

December 2023

B. Tech (IT/CE (Hindi Medium)/CE/CSE/CSE (AIML)) - III SEMESTER
Mathematics III (Calculus and Ordinary Differential Equations)(BSC-301)

Time: 3 Hours

Max. Marks: 75

- Instructions:**
1. It is compulsory to answer all the questions (1.5 mark each) of Part -A in short.
 2. Answer any four questions from Part -B in detail.
 3. Different sub-parts of a question are to be attempted adjacent to each other.

PART -A

- Q1 (a) Write the type of the sequence $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$. Is it convergent? (1.5)
 अनुक्रम $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ का प्रकार लिखिए। क्या यह अभिसरण है?
- (b) What is positive term series? (1.5)
 धनात्मक शब्द श्रृंखला क्या है?
- (c) Test $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ exists or not. (1.5)
 परीक्षण करे $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ मौजूद है या नहीं।
- (d) If $u = (x - y)(y - z)(z - x)$, then find $\frac{\partial u}{\partial y}$. (1.5)
 यदि $u = (x - y)(y - z)(z - x)$, तो $\frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए।
- (e) Evaluate $\int_0^1 \int_0^1 x e^y dy dx$. (1.5)
 $\int_0^1 \int_0^1 x e^y dy dx$ का मूल्यांकन करें।
- (f) State Green's theorem. (1.5)
 ग्रीन का प्रमेय बताएं।
- (g) Find the integrating factor for the differential equation (1.5)

$$2 \cos x \frac{dy}{dx} + 4 \sin x y = 0$$
 विभेदक समीकरण के लिए एकीकृत कारक ज्ञात कीजिये

$$2 \cos x \frac{dy}{dx} + 4 \sin x y = 0$$
- (h) Check if the following differential equation is exact: (1.5)

$$(y^2 + 2x^2y)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$$
 जाँचें कि क्या निम्न अंतर समीकरण सटीक है:

$$(y^2 + 2x^2y)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$$
- (i) What is Clairaut's type equation? Give an example. (1.5)

क्लेरौट प्रकार का समीकरण क्या है? एक उदाहरण दीजिए।

- (j) Identify the nature of the singular points of the differential equation (1.5)
 $x^2(x-2)y'' + (x-1)y' + 2xy = 0$

विभेदक समीकरण के एकवचन बिंदुओं की प्रकृति को पहचानिए
 $x^2(x-2)y'' + (x-1)y' + 2xy = 0$

PART -B

- Q2 (a) Test the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ (8)

$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ के अभिसरण का परीक्षण करें

- (b) Using Taylor's series expansion, prove that (7)

$$\log_e(1+e^x) = \log_e 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots$$

टेलर की श्रृंखला विस्तार का उपयोग करते हुए, साबित करें कि

$$\log_e(1+e^x) = \log_e 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots$$

- Q3 (a) If $z = f(x, y)$ where $x = u^2 - v^2, y = 2uv$, prove that (8)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 4(u^2 + v^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

यदि $z = f(x, y)$ जहाँ $x = u^2 - v^2, y = 2uv$, साबित करें कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 4(u^2 + v^2) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

- (b) Find the minimum value of the function $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the condition $xy + yz + zx = 3a^2$. (7)

$xy + yz + zx = 3a^2$ शर्त के अधीन फ़ंक्शन $x^2 + y^2 + z^2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

- Q4 (a) Using Gauss divergence theorem, evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ where $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ and S is the surface of the cube bounded by the planes $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$. (8)

गॉस विचलन प्रमेय का उपयोग करते हुए, $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ का मूल्यांकन करें जहाँ $\vec{F} = 4xz\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ है और S घन की सतह है जो $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ से घिरा हुआ है।

- (b) Change the order of integration $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy dy dx$ and hence evaluate. (7)

एकीकरण $\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy dy dx$ का क्रम बदलें और मूल्यांकन करें।

- Q5 (a) Solve the differential equation $p^2 - p(e^x + e^{-x}) + 1 = 0$ where p has usual meaning. (8)

अंतर समीकरण $p^2 - p(e^x + e^{-x}) + 1 = 0$ को हल करें जहाँ p का सामान्य अर्थ है।

- (b) Solve $(2x + y + 1)dy = (x + y + 1)dx$. (7)

हल करें $(2x + y + 1)dy = (x + y + 1)dx$

- Q6 (a) Solve the following differential equation by using variation of parameter (8)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

पैरामीटर की भिन्नता का उपयोग करके निम्नलिखित अंतर समीकरण को हल करें

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

- (b) Find the power series solution of $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ in powers of x . (7)

x की घात में $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ का घात श्रृंखला समाधान ज्ञात कीजिए।

- Q7 (a) Solve $(D^4 - 1)y = e^x \cos x$. (8)
हल करें $(D^4 - 1)y = e^x \cos x$

- (b) Find the directional derivative of $2yz + z^2$ in the direction of the vector $\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ at the point $(1, -1, 3)$. (7)

$\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ वेक्टर की दिशा में $2yz + z^2$ का $(1, -1, 3)$ बिंदु पर दिशात्मक व्युत्पन्न ज्ञात कीजिये।