

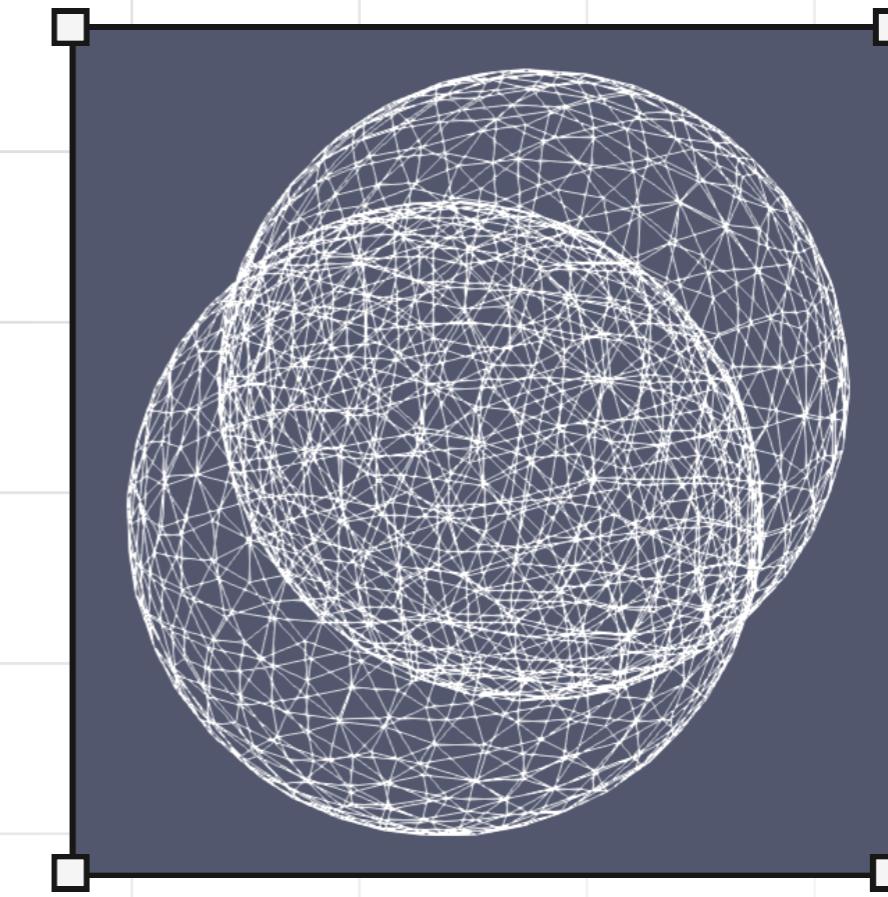
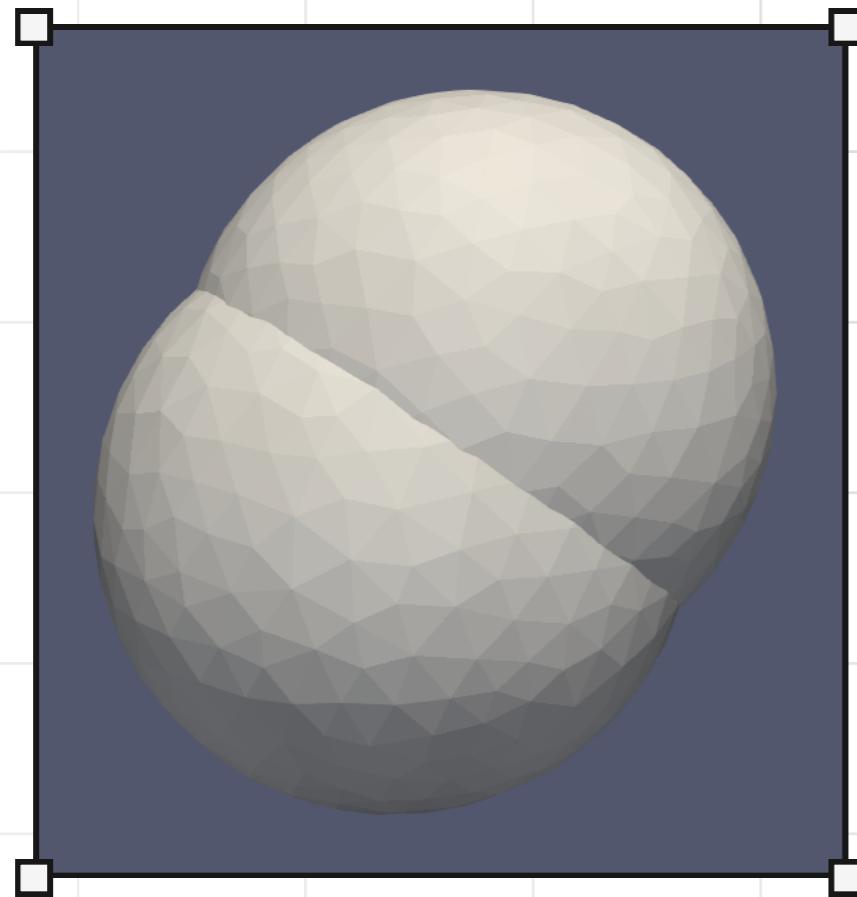
Нахождение самопересечений и встраивание точек в тесселяцию

Сергей Агибалов, Б03-001
Тимур Селин, Б03-001

Проблема

01

При построении сеток, любой человек может не уследить и допустить самопересечение сетки. Эта проблема обычно вскрывается в конце работы, когда сама модель просчитывается или отправляется на печать. Наш алгоритм призван автоматизировать «лечение» сетки.



Постановка задачи

о2

Наш план действий выглядел следующим образом:

1. Научиться считывать данные из .vtk файла
2. Придумать алгоритм для нахождения самопересечений
3. Придумать алгоритм для разбиения треугольников на части после встраивания точки для нескольких случаев пересечений
4. Тестирование и исправление багов

Структуры и классы

оз

Для упрощения работы мы написали несколько структур:

```
class Point:  
    x: float  
    y: float  
    z: float  
    number: int
```

```
class Vector:  
    x: float  
    y: float  
    z: float
```

```
class Triangle:  
    A: Point  
    B: Point  
    C: Point  
    a: Vector # B - A  
    b: Vector # C - B  
    c: Vector # A - C
```

```
class Grid:  
    points: list[Point]  
    triangles: list[Triangle]  
    n_points: int  
    n_triangles: int
```

Аналитика

04

Мы берем два треугольника и ищем пересечения
ребер второго треугольника с первым.

Считаем детерминант

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Переобозначаем константы и подставляем $x=x_4+a_x t$,
 $y=y_4+a_y t$, $z=z_4+a_z t$.

По итогу получается

$$Q_1(x_4 - x_1 + a_x t) - Q_2(y_4 - y_1 + a_y t) + Q_3(z_4 - z_1 + a_z t) = 0,$$

Отсюда выражаем t :

$$t = \frac{Q_1(x_1 - x_4) - Q_2(y_1 - y_4) + Q_3(z_1 - z_4)}{Q_1(x_5 - x_4) - Q_2(y_5 - y_4) + Q_3(z_5 - z_4)}$$

Аналитика алгоритма

05

$$Q_1 = ((1_B^y - 1_A^y) \cdot (1_C^z - 1_A^z) - (1_B^z - 1_A^z) \cdot (1_C^y - 1_A^y))$$

$$Q_2 = ((1_B^x - 1_A^x) \cdot (1_C^z - 1_A^z) - (1_B^z - 1_A^z) \cdot (1_C^x - 1_A^x))$$

$$Q_3 = ((1_B^x - 1_A^x) \cdot (1_C^y - 1_A^y) - (1_B^y - 1_A^y) \cdot (1_C^x - 1_A^x))$$

$$T_1 = ((1_A^x - 1_A^x) \cdot Q_1 - (1_A^y - 1_A^y) \cdot Q_2 + (1_A^z - 1_A^z) \cdot Q_3) / ((1_A^x - 1_B^x) \cdot Q_1 - (1_A^y - 1_B^y) \cdot Q_2 + (1_A^z - 1_B^z) \cdot Q_3 + \varepsilon / 100)$$

$$T_2 = ((1_B^x - 1_A^x) \cdot Q_1 - (1_B^y - 1_A^y) \cdot Q_2 + (1_B^z - 1_A^z) \cdot Q_3) / ((1_B^x - 1_C^x) \cdot Q_1 - (1_B^y - 1_C^y) \cdot Q_2 + (1_B^z - 1_C^z) \cdot Q_3 + \varepsilon / 100)$$

$$T_3 = ((1_C^x - 1_A^x) \cdot Q_1 - (1_C^y - 1_A^y) \cdot Q_2 + (1_C^z - 1_A^z) \cdot Q_3) / ((1_C^x - 1_B^x) \cdot Q_1 - (1_C^y - 1_B^y) \cdot Q_2 + (1_C^z - 1_B^z) \cdot Q_3 + \varepsilon / 100)$$

$$M_1 = 1_A + 1_A \cdot T_1$$

$$M_2 = 1_B + 1_B \cdot T_2$$

$$M_3 = 1_B + 1_B \cdot T_3$$

Аналитика

06

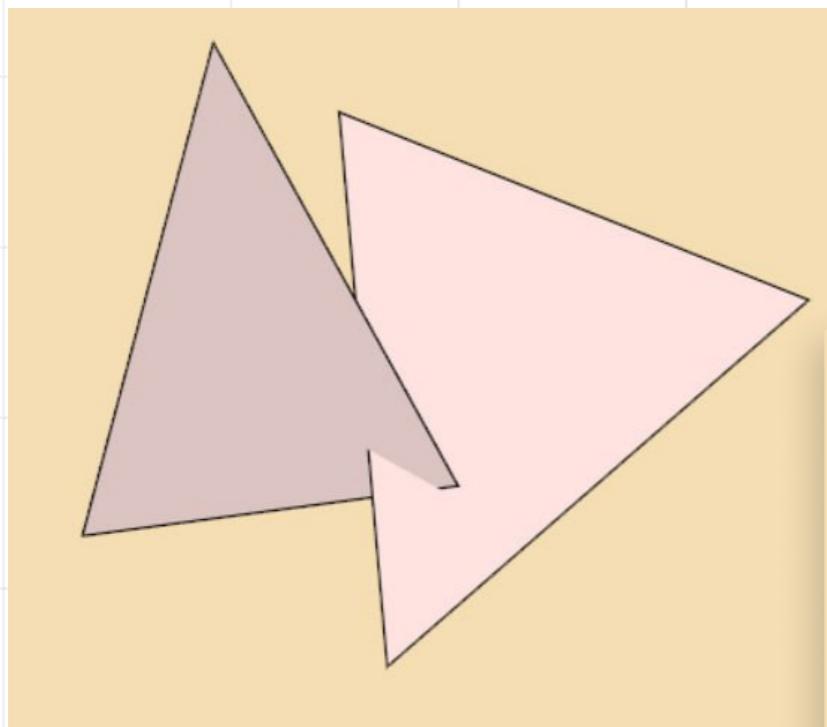
Таким образом мы знаем, что точка лежит на ребре одного треугольника и внутри другого ⇒ они пересекаются. Повторяем данный алгоритм для всех ребер одного треугольника, поменяем их местами, и повторим снова. Так мы получаем все точки пересечения двух треугольников.

Далее идет проверка на то, что точка пересечения лежит внутри треугольника: по формуле Герона считаются площади трех внутренних треугольников, и если площадь совпадает с площадью большого треугольника, то точка лежит внутри треугольника.

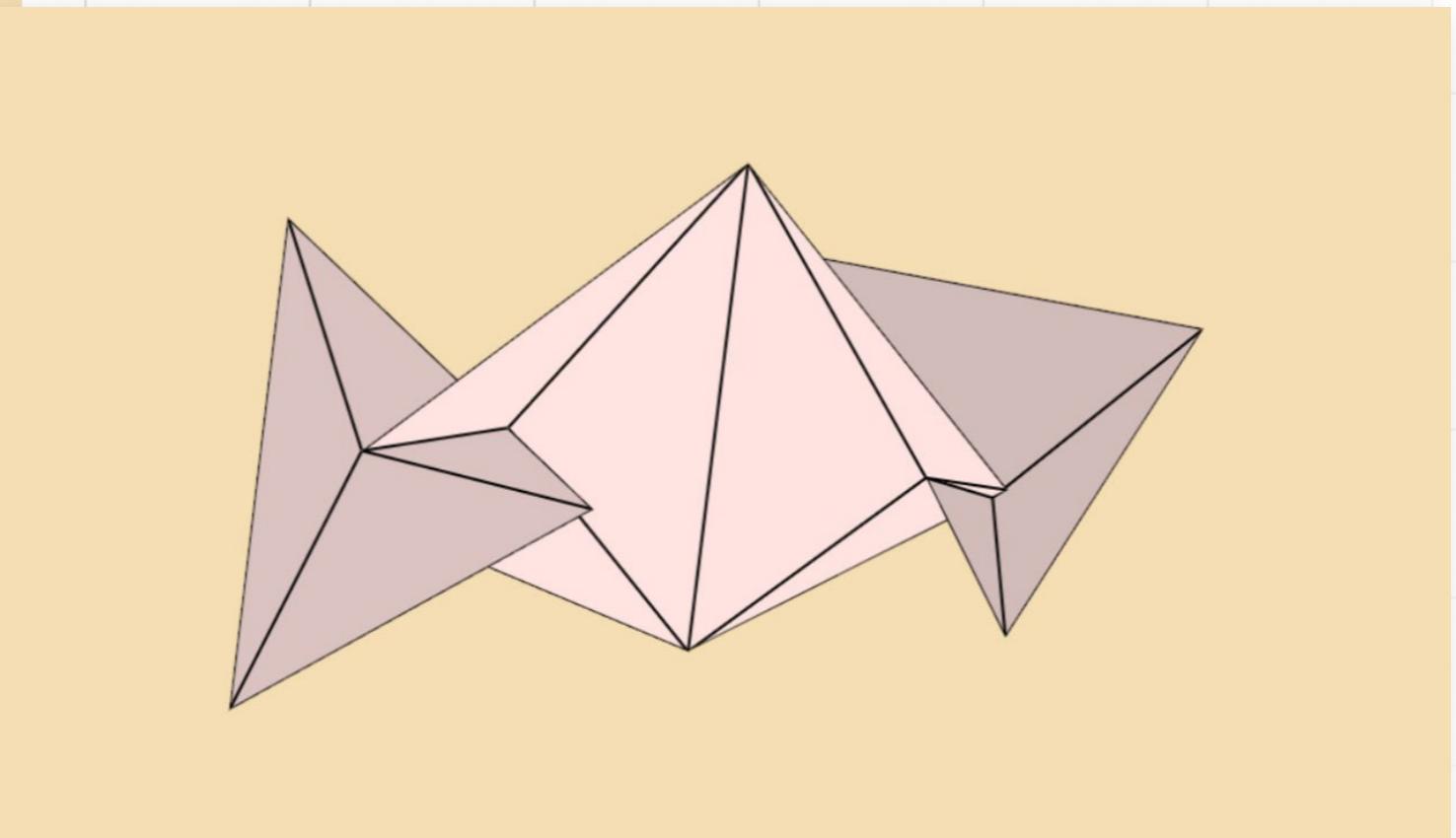
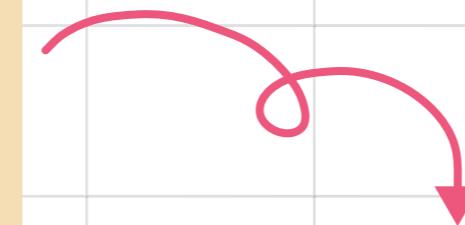
Разбиение треугольников

07

Всего мы исследовали два типа пересечений треугольников: перекрестное и сквозное.

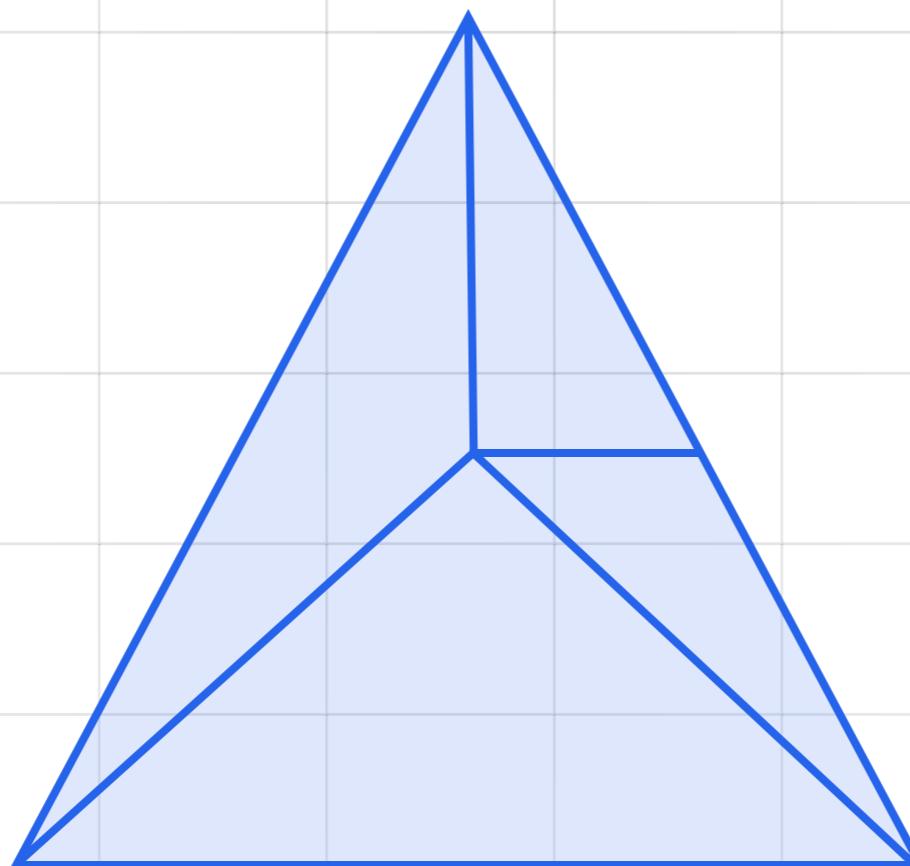


Перекрестное
пересечение



Перекрестное пересечение

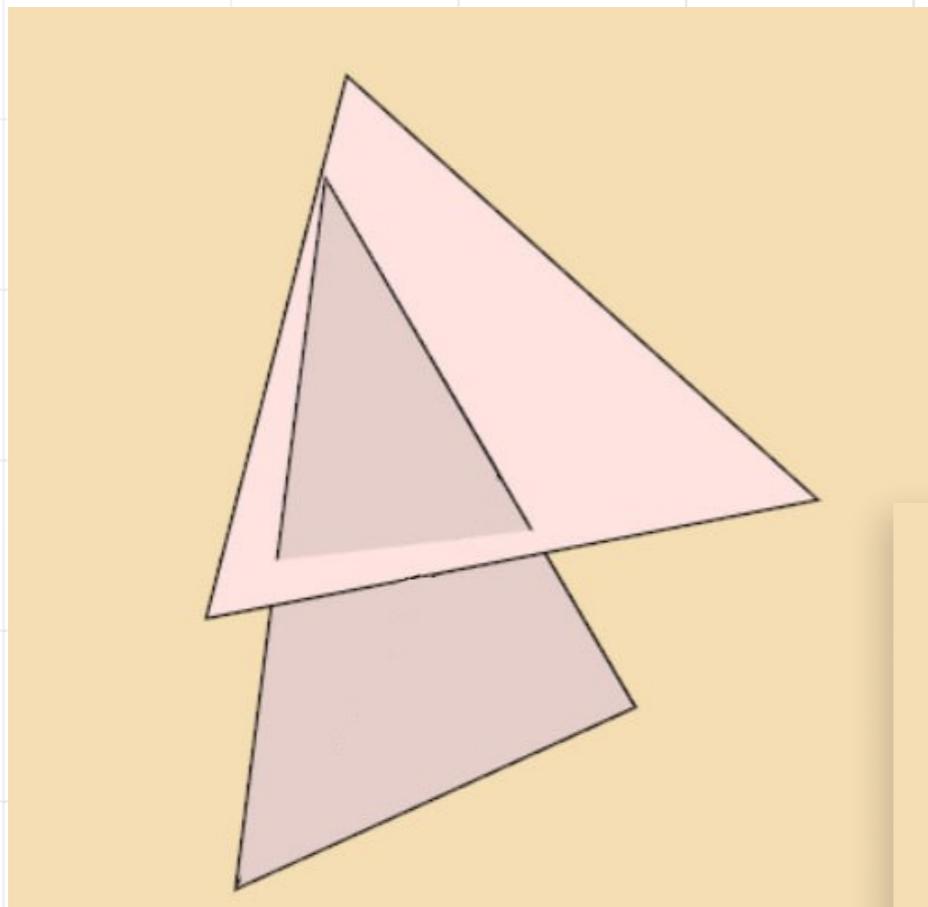
В этом случае разбиение треугольников одинаковое и достаточно простое: для каждого треугольника есть две точки — внутри и на ребре, тогда разбиение будет следующим



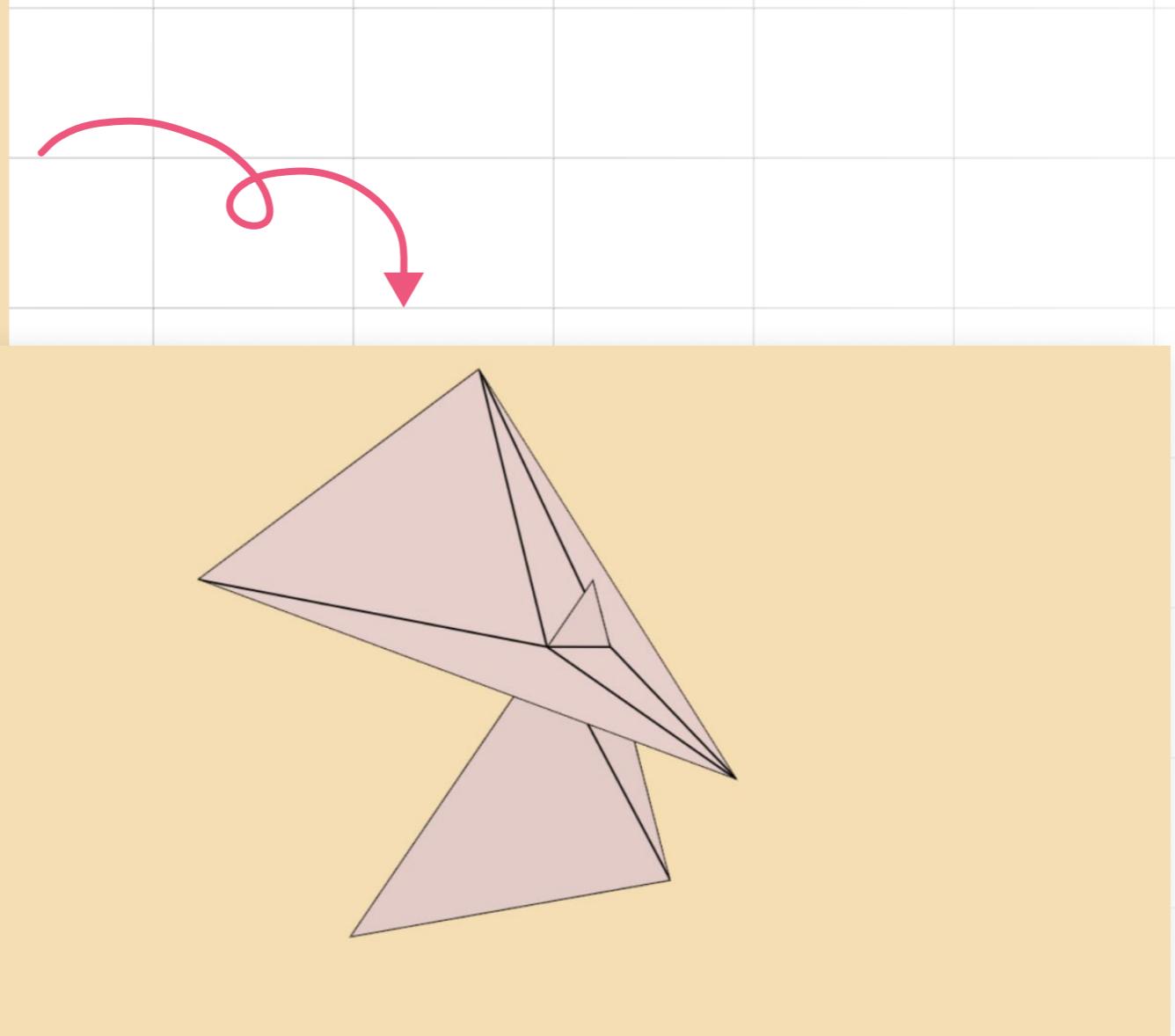
Разбиение треугольников

09

Второй случай



Сквозное
пересечение

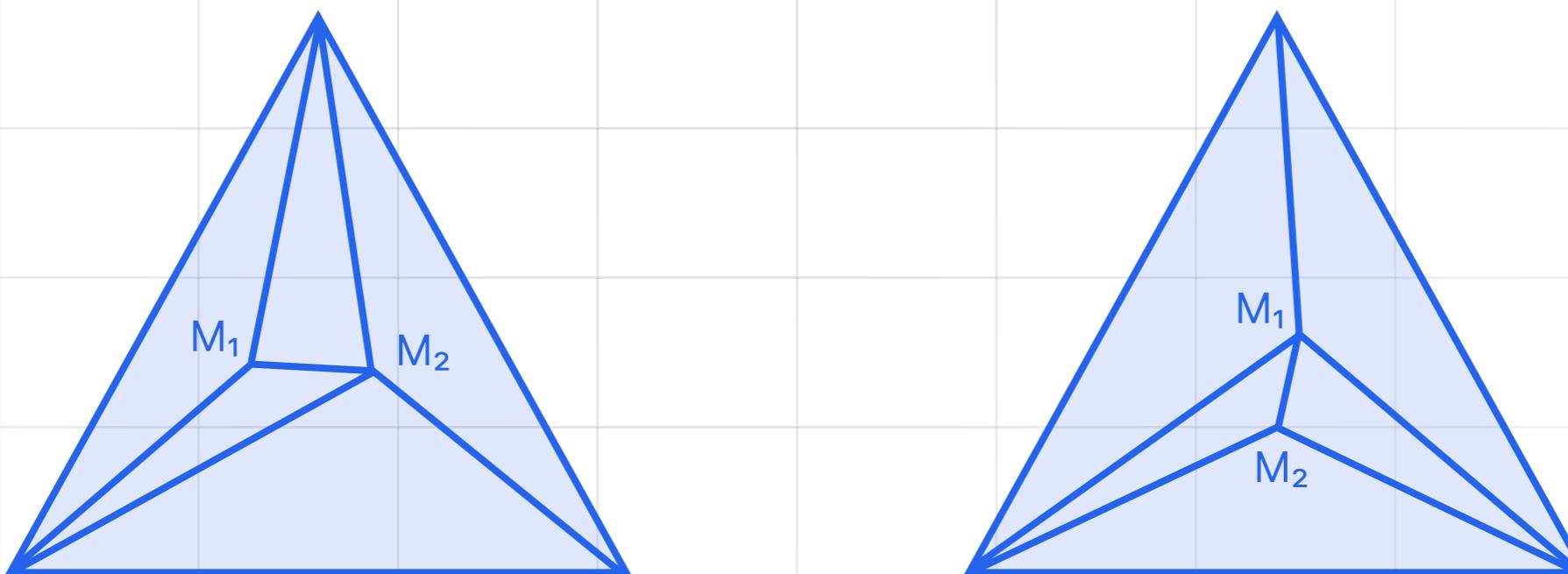


Сквозное пересечение

10

Рассмотрим пропыкаемый треугольник, точки пересечения M_1, M_2 .

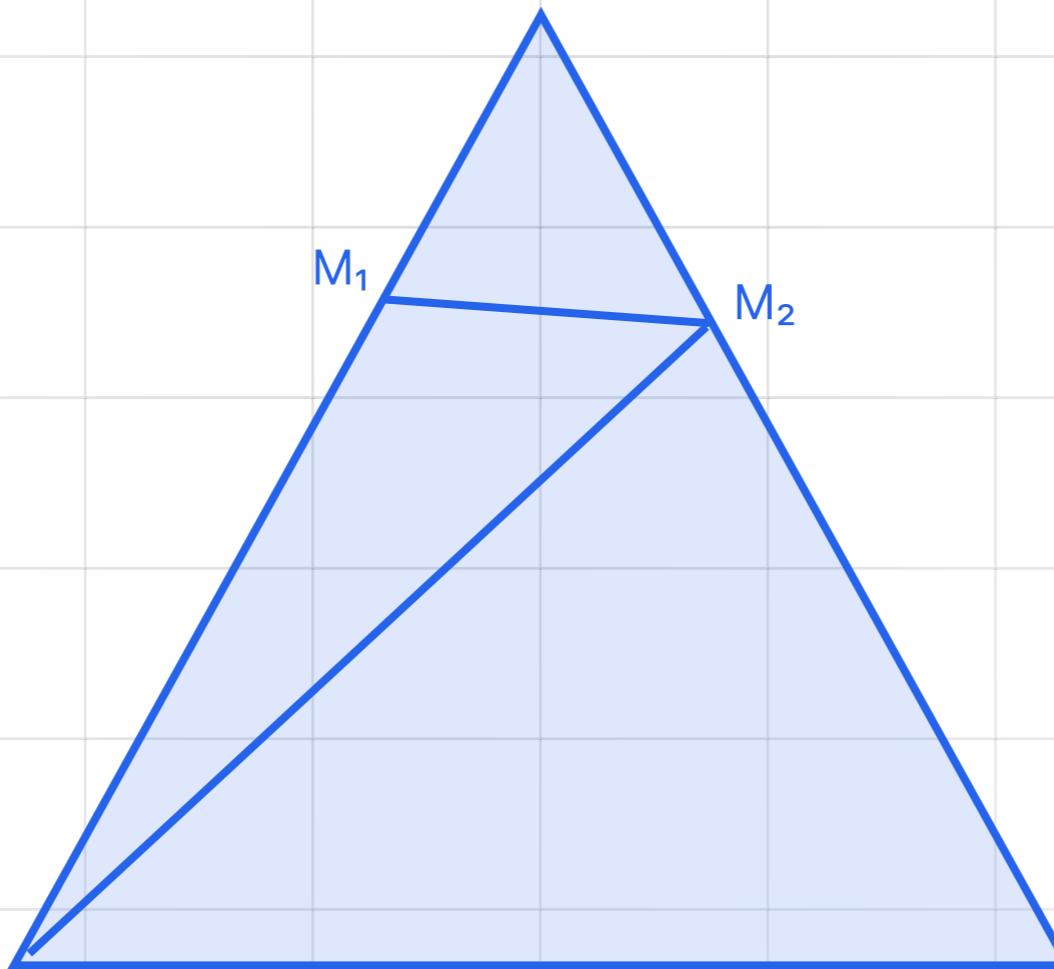
Чтобы правильно построить разбиение, считаем попарные скалярные произведения сторон треугольника и вектора M_1M_2 . Далее, в зависимости от величины и знака скалярного произведения, стоятся разбиение, вот некоторые из них:



Сквозное пересечение

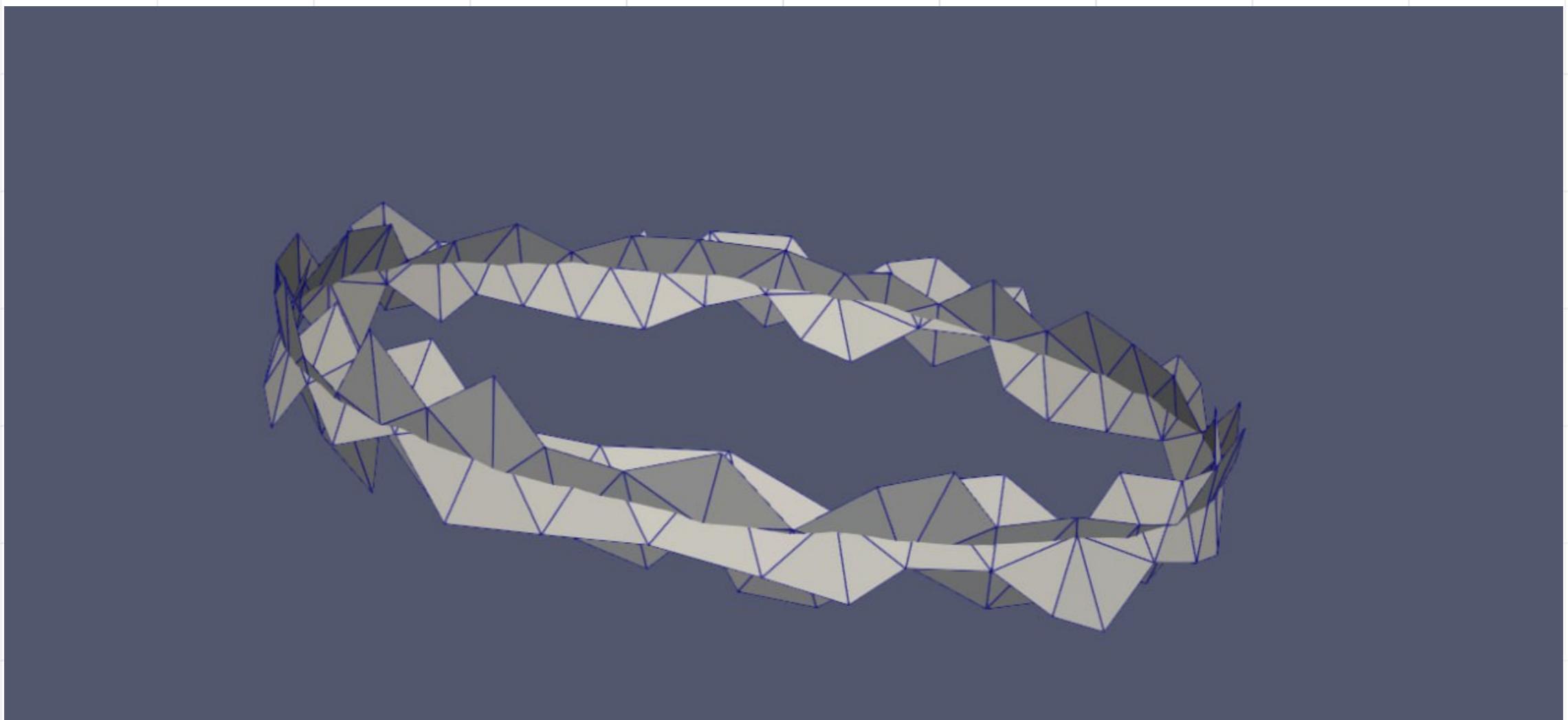
11

У протыкающего же треугольника разбиение строится следующим образом:



Алгоритм для нахождения самопересечений

12



Логика поиска пересечений

13

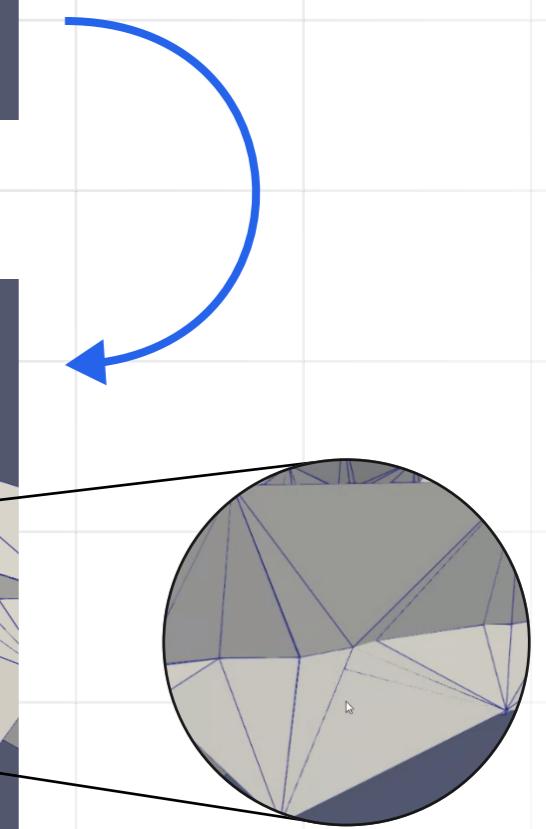
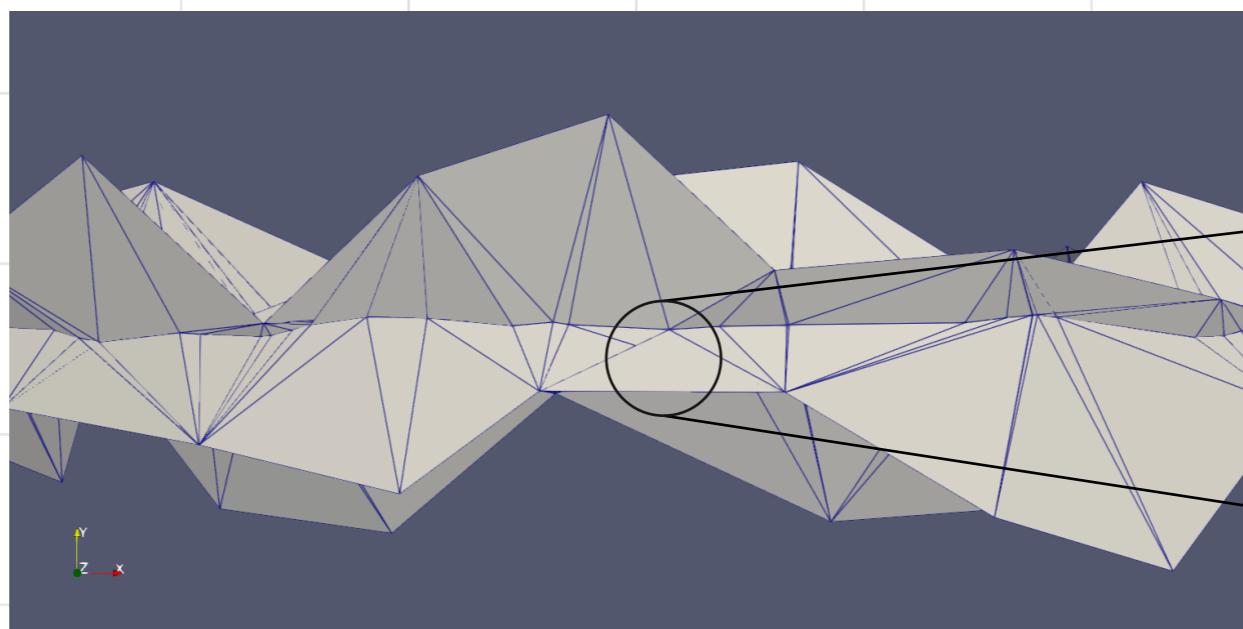
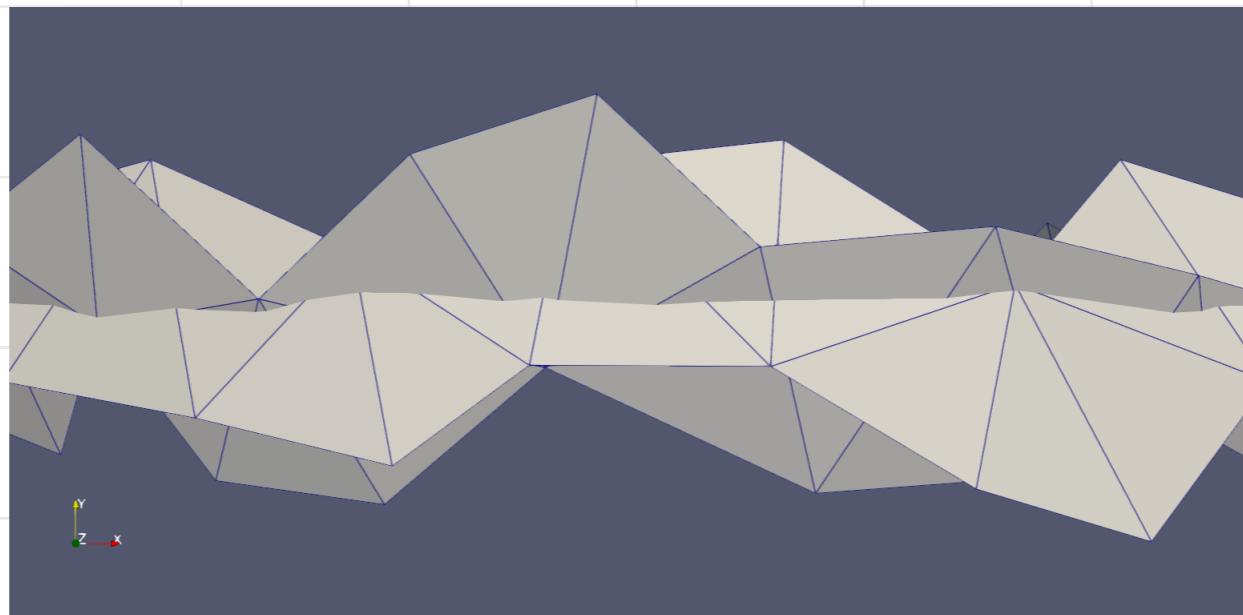
Мы делаем двойной цикл по треугольникам, и как только находим два пересекающихся:

- Определяем тип пересечения
- Удаляем старые два
- Добавляем новое разбиение треугольников
- Запускаем двойной цикл заново, пока не найдем два пересекающихся треугольника вновь.

Благодаря этому, алгоритм каждый раз работает с новой сеткой и не плодит лишние пересечения.

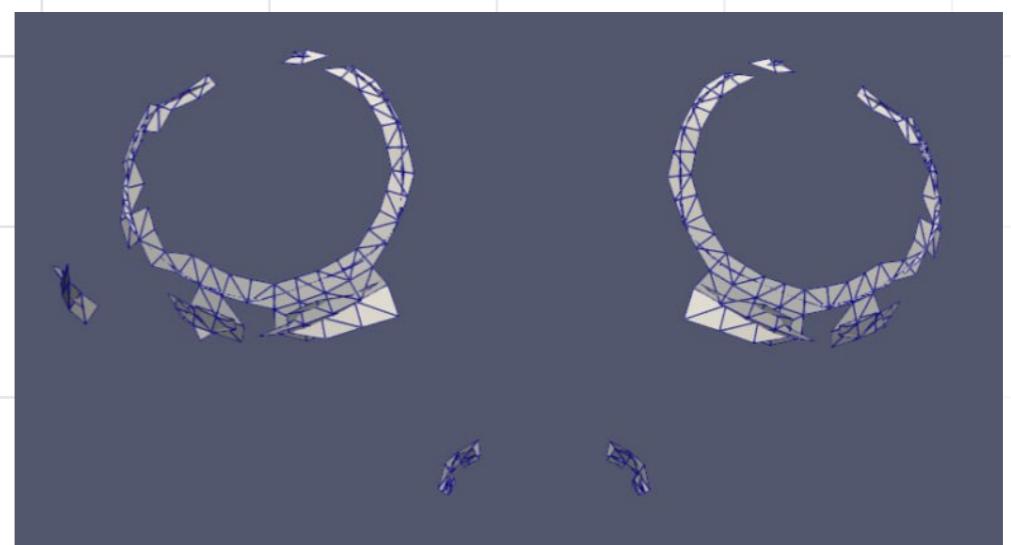
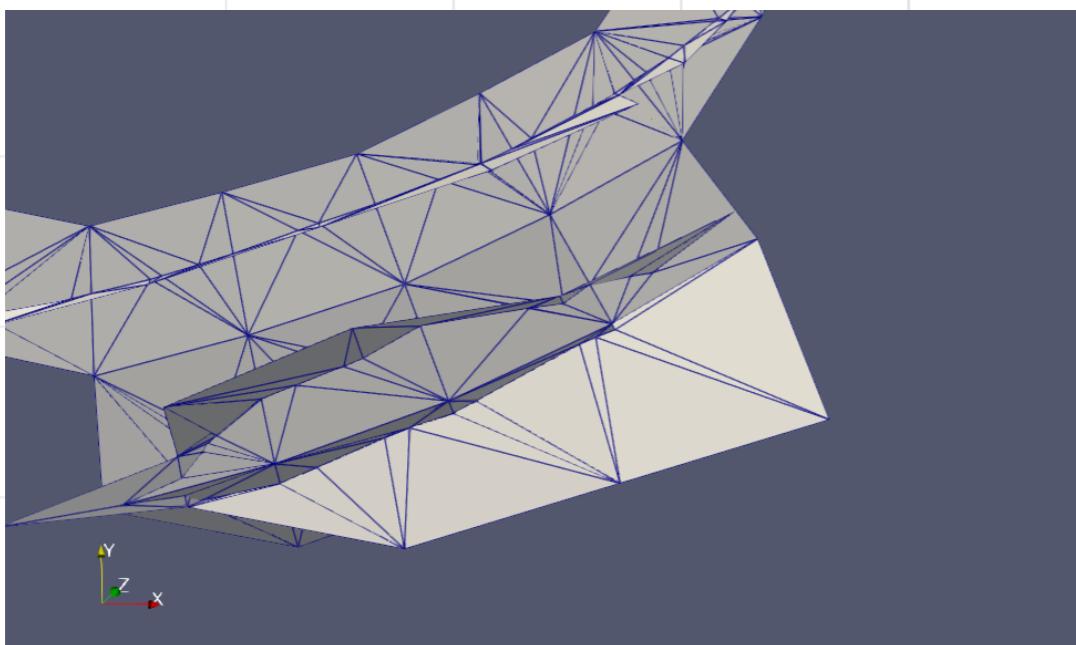
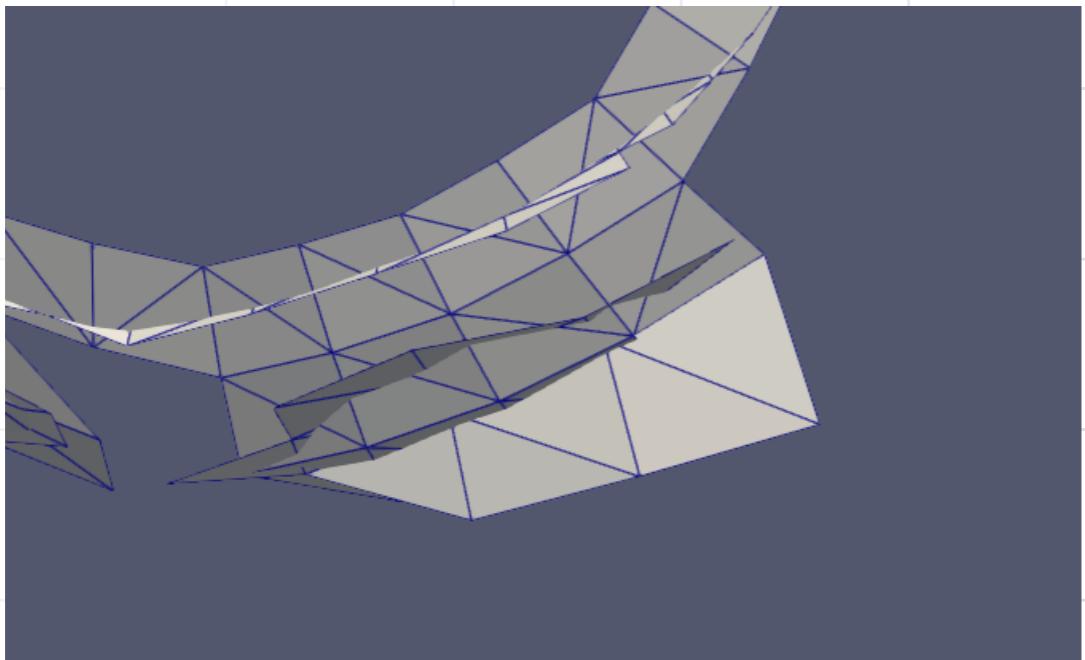
Пример работы

14



Другие сетки

15



Итоги

16

Что мы делали?

- Парсили .vtk файл
- Находили самопересечения
- Добавляли и удаляли треугольники, точки
- Классифицировали пересечения
- Перестраивали сетку
- Протестировали код на разных сетках

Спасибо за внимание!