10/11/2025

10/11/25 09:16

NUMERO DI CONDIZIONE

$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

Se $K(A)$ piccolo $\sim 10^p$ con $p = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$ problema ben condizionato.

Se $K(A)$ grande $\sim 10^n \Rightarrow$ problema mal condizionato.

Dato che abbiamo detto che le norme (a 2 o di Frobenius) sono equivalenti anche $K(A)$ calcolato con una norma o con l'altra ha lo stesso significato.

$K(A)$ è sempre ≥ 1.

Se il problema è mal condizionato non ha senso cambiare l'algoritmo ma posso provare a cambiare i dati (prendo una matrice $\tilde{A}$ con valori molto vicini a quelli di A).

FATTORIZZAZIONE SVD

DEF: i vettori $v_1 .. v_m$ si dicono ortogonali se $v_i^T v_j = 0 \ \forall i \neq j$

DEF: i vettori $v_1 .. v_m$ si dicono ortonormali se $v_i^T v_j = 0 \ \forall i \neq j$ e $v_i^T v_i = \|v_i\| = 1$ (norma unitaria)

DEF: una matrice A è ortogonale se le colonne di A sono vettori ortonormali. Una matrice ortogonale A ha le seguenti proprietà: $A^{-1} = A^T$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \|Ax\|$ quindi A è un isometria, cioè mantiene le distanze.

TEO: se gli autovett. di A sono l.i. allora $A = PDP^{-1}$ dove D è diagonale che contiene gli autovalori e P gli autovettori di A. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $P = (v_1 .. v_n)$

TEO: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ di rango $k \leq n \leq m$. Allora esistono:

I) una matrice ortogonale U $m \times m$

II) una matrice ortogonale V $n \times n$

III) una matrice diagonale Σ $m \times n$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

tali che $A = U \Sigma V^T$ dove σ_i sono i valori singolari di A non nulli, mentre le colonne di $U = (u_1 .. u_m)$ e di $V = (v_1 .. v_n)$ sono rispettivamente i vettori singolari destri e sinistri di A.

Vale la seguente relazione fra i valori singolari di A e gli autovalori di $A^T A$:

$A^T A = (U \Sigma V^T)^T (U \Sigma V^T) = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} V^T = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} V^{-1}$ quindi $\sigma_i^2 = \lambda_i$ di $A^T A$

Segue che $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \sigma_1 \ \dots \ \sigma_k = \sqrt{\lambda_{min}(A^T A)} \Rightarrow \|A^{-1}\| = 1/\sigma_k$

P D P^{-1}

SLIDE PROF

$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$

I valori singolari danno informazioni sul rango di A, $\|A\|_2$, $K(A)$ numero di condizione.

Usiamo ora questa decomposizione per risolvere il problema dei minimi quadrati $\min \|Ax - b\|^2$

MINIMI QUADRATI

Vogliamo risolvere $Ax = b$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Il sistema in generale non ha soluzioni. Cerchiamo allora di rendere più piccolo possibile il vettore residuo $r = Ax - b$, quindi cerco $\min \|r\|$.

1) Quando c'è soluzione al problema (unica)? Il problema ha sempre soluzione: $\|Ax - b\|$ è una funzione convessa, quindi ha sempre un minimo.

Caso A) $rg(A) = n$ (massimo)

In questo caso la soluzione è unica;

Caso B) $rg(A) = k < n$ (non massimo)

Ci sono infinite soluzioni;

2) Come calcolo la soluzione?

a) metodo del gradiente

b) metodi di algebra lineare

b') nel caso $rg(A) = n$ risolvo il sistema lineare delle eq. normali $A^T A x = A^T b$. Questo deriva dalle condizioni del 1° ordine $\nabla f = 0 \Rightarrow \nabla(\|Ax - b\|^2) = A^T A x - A^T b = 0$.

Osserviamo che $A^T A$ è quadrata $(n \times n)$, simmetrica e def. positiva quindi è non singolare.

Il sistema ha una unica soluzione che calcolo con la fattorizzazione LU.

b'') Si usa la decomposizione SVD se $rg(A) = k < n$