Рандомизирани квази-Монте Карло алгоритми за намиране на екстремални собствени стойности

Александър Огнянов Маразов
Фак. ном.: M23074

12 ноември 2013 г.

Намиране на собствени стойности

$$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}, \text{ за } k = 1, \dots, n$$

$$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}, \text{ за } k = 1, \ldots, n$$

- Методи базирани на факторизацията на матрици

$$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}, \text{ за } k = 1, \dots, n$$

- Методи базирани на факторизацията на матрици
    - QR-алгоритъм
    - степенен метод
    - обратен степенен метод

Намиране на собствени стойности

$$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}, \text{ за } k = 1, \dots, n$$

- Методи базирани на факторизацията на матрици
  - QR-алгоритъм
  - степенен метод
  - обратен степенен метод
- сложност $O(n^3) + kO(n^2)$:

Намиране на собствени стойности

$$Ax^{(k)} = \lambda_k x^{(k)}, \text{ за } k = 1, \ldots, n$$

- Методи базирани на факторизацията на матрици
  - QR-алгоритъм
  - степенен метод
  - обратен степенен метод
- сложност $O(n^3) + kO(n^2)$:
  Извод: не са подходящи за големи матрици!

Степенен метод с Монте Крло итерации

- едни от първите публикации в областта на Монте Карло методите от 50-те са за линейна алгебра

- едни от първите публикации в областта на Монте Карло методите от 50-те са за линейна алгебра
- доминантната собствена стойност: Михайлов (1967) и Собол (1973)

Степенен метод с Монте Крло итерации

- едни от първите публикации в областта на Монте Карло методите от 50-те са за линейна алгебра
- доминантната собствена стойност: Михайлов (1967) и Собол (1973)
- най-малката: Михайлов през 1987

Степенен метод с Монте Крло итерации

- едни от първите публикации в областта на Монте Карло методите от 50-те са за линейна алгебра
- доминантната собствена стойност: Михайлов (1967) и Собол (1973)
- най-малката: Михайлов през 1987
- степенният метод с Монте Карло итерация: Димов и Караиванова (1995-1998)

Степенен метод с Монте Крло итерации

- едни от първите публикации в областта на Монте Карло методите от 50-те са за линейна алгебра
- доминантната собствена стойност: Михайлов (1967) и Собол (1973)
- най-малката: Михайлов през 1987
- степенният метод с Монте Карло итерация: Димов и Караиванова (1995-1998)
- приложение на квази-Монте Карло методи за екстремални собствени стойности: Караиванова и Маскани (2001-2002)

Степенен метод с Монте Крло итерации

- едни от първите публикации в областта на Монте Карло методите от 50-те са за линейна алгебра
- доминантната собствена стойност: Михайлов (1967) и Собол (1973)
- най-малката: Михайлов през 1987
- степенният метод с Монте Карло итерация: Димов и Караиванова (1995-1998)
- приложение на квази-Монте Карло методи за екстремални собствени стойности: Караиванова и Маскани (2001-2002)
- в тази работа ще представя ***рандомизиран*** *квази-Монте Карло метод*

Монте Карло методи

Монте Карло методи

- преформулиране на задачата

- преформулиране на задачата

$$I(f) = \mathbb{E}\left(f(X)\right) = \int_{[0,1)^s} f(x)q(x)dx \tag{1}$$

Монте Карло методи

- преформулиране на задачата

$$I(f) = \mathbb{E}(f(X)) = \int_{[0,1)^s} f(x)q(x)dx \tag{1}$$

- дефиниране на случайна величина или случаен процес, чието математическо очакване съвпада с търсеното решение

- преформулиране на задачата

$$I(f) = \mathbb{E}(f(X)) = \int_{[0,1)^s} f(x)q(x)dx \qquad (1)$$

- дефиниране на случайна величина или случаен процес, чието математическо очакване съвпада с търсеното решение

$$\hat{I}(f) = \hat{I}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad (2)$$

Монте Карло методи

- преформулиране на задачата

$$I(f) = \mathbb{E}(f(X)) = \int_{[0,1)^s} f(x)q(x)dx \tag{1}$$

- дефиниране на случайна величина или случаен процес, чието математическо очакване съвпада с търсеното решение

$$\hat{I}(f) = \hat{I}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \tag{2}$$

- приближена оценка на статистическите характерисики (дисперсия, очакване)

Сходимост на Монте Карло методите

Ако x_i са:

Ако x_i са:

- случайни числа реда на сходимост е $O(N^{-1/2})$ независимо от размерността

Ако x_i са:

- случайни числа реда на сходимост е $O(N^{-1/2})$ независимо от размерността
- квази-случайни числа реда на сходимост е $O(N^{-1}(\log N)^s)$.

Дефиниция

Звезда-дискрепанс

$$D_N^{\star} = \sup_{0 \le \nu_k < 1} \left| \frac{1}{N} \#\{x_i \in J(\nu)\} - \prod_{k=1}^{s} \nu_k \right| \tag{3}$$

Дискрепанс на числова редица

Дефиниция

Звезда-дискрепанс

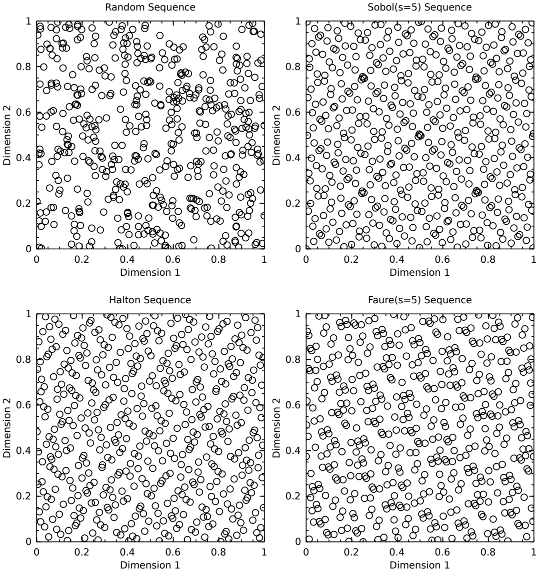
$$D_N^\star = \sup_{0 \le \nu_k < 1} \left| \frac{1}{N} \#\{x_i \in J(\nu)\} - \prod_{k=1}^{s} \nu_k \right| \tag{3}$$

Неравенство

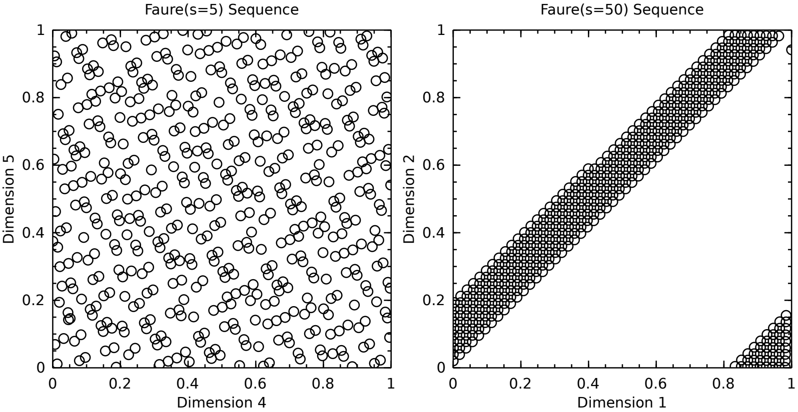
Коксма-Хлавка

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) - I(f) \right| \le V(f) D_N^\star \tag{4}$$

Случайни и псевдо случайни редици

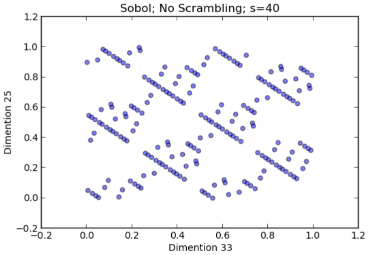


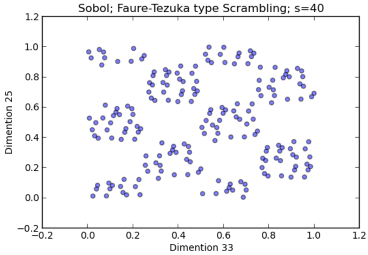
Корелация на квазислучайни редици



Фигура: Ниско размерна (в ляво) и високо размерна (в дясно) редица на Фор. Високо размерната редица показва значителна корелация.

Разбъркване на квазислучайни редици





Теорема

Нека $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *е такава, че*

Теорема

Нека $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *е такава, че*

1. A *има* n *линейно независими собствени вектора* $x^{(k)}$ *, съответващи на собствени стойности* λ_k, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема

Нека $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *е такава, че*

1. A *има* n *линейно независими собствени вектора* $x^{(k)}$ *, съответващи на собствени стойности* λ_k, $k = 1, \dots, n$.
2. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$

Теорема

Нека $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *е такава, че*

1. A *има* n *линейно независими собствени вектора* $x^{(k)}$ *, съответващи на собствени стойности* λ_k, $k = 1, \ldots, n$.
2. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$

Нека $y_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(k)}$, $a_1 \neq 0$,

Степенен метод

Теорема

Нека $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *е такава, че*

1. A *има* n *линейно независими собствени вектора* $x^{(k)}$ *, съответващи на собствени стойности* λ_k, $k = 1, \ldots, n$.
2. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$

Нека $y_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(k)}$, $a_1 \neq 0$,
Тогава за $y_{l+1} = Ay_l$, *имаме*

Степенен метод

Теорема

Нека $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *е такава, че*

1. A *има* n *линейно независими собствени вектора* $x^{(k)}$ *, съответващи на собствени стойности* λ_k, $k = 1, \ldots, n$.
2. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n|$

Нека $y_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(k)}$, $a_1 \neq 0$,
Тогава за $y_{l+1} = Ay_l$, *имаме*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\langle h, A^l y_0\rangle}{\langle h, A^{l-1} y_0\rangle} = \lambda_1 \tag{5}$$

Конструираме Марковска верига с матрицата A:

$$P(i,j) = \mathbb{P}\left(X_t = j | X_{t-1} = i\right) = \frac{|A(i,j)|}{\sum_{k=1}^{n} |A(i,k)|} \tag{6}$$

Конструираме Марковска верига с матрицата A:

$$P(i,j) = \mathbb{P}\left(X_t = j | X_{t-1} = i\right) = \frac{|A(i,j)|}{\sum_{k=1}^{n} |A(i,k)|} \tag{6}$$

$$p(i) = \mathbb{P}\left(X_0 = i\right) = \frac{|h(i)|}{\sum_{j=1}^{n} |h(j)|} \tag{7}$$

Конструираме Марковска верига с матрицата A:

$$P(i,j) = \mathbb{P}\left(X_t = j | X_{t-1} = i\right) = \frac{|A(i,j)|}{\sum_{k=1}^{n} |A(i,k)|} \tag{6}$$

$$p(i) = \mathbb{P}\left(X_0 = i\right) = \frac{|h(i)|}{\sum_{j=1}^{n} |h(j)|} \tag{7}$$

И случайна величина

$$Y_0 = \frac{h(X_0)}{p(X_0)}, \quad Y_t = Y_{t-1}\frac{A(X_{t-1}, X_t)}{P(X_{t-1}, X_t)}, \quad t = 1, 2, \ldots, m \tag{8}$$

за която

$$\langle h, A^m f\rangle = \mathbb{E}\left(Y_m f(X_m)\right) \tag{9}$$

Обикновен степенен метод с Монте Карло итерации за намиране на най-голямата собствена стойност

$$\lambda_{\max} \approx \frac{\mathbb{E}\left(Y_i f\left(X_i\right)\right)}{\mathbb{E}\left(Y_{i-1} f\left(X_{i-1}\right)\right)}$$

Грешка на алгоритъма

Грешка на алгоритъма

- систематична грешка на степенния метод

Грешка на алгоритъма

- систематична грешка на степенния метод

$$\text{за обикновения степенен метод: } O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$$

Грешка на алгоритъма

- систематична грешка на степенния метод

  за обикновения степенен метод: $O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$

- стохастична грешка

Грешка на алгоритъма

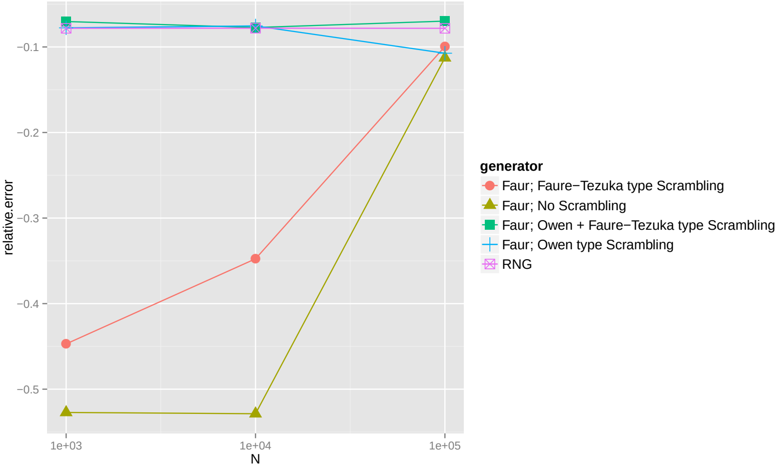
- систематична грешка на степенния метод

$$\text{за обикновения степенен метод: } O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$$

- стохастична грешка

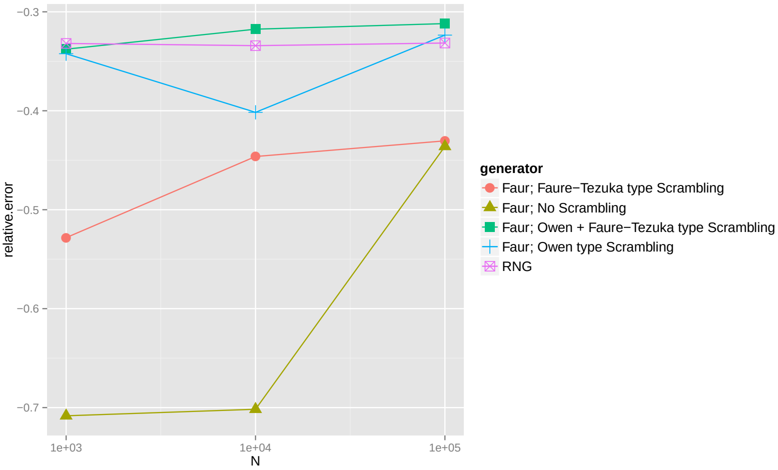
$$\text{за псевдослучайна редица: } O(N^{-1/2})$$
$$\text{за редица с малък дискрепанс: } O((\log(N))^s/N)$$

Резултати за малка матрица



Фигура: Резултати за матрицата A

Резултати за голяма разредена матрица



Фигура: Резултати за матрицата X

Заключение

Заключение

- при разбърканите редици тази граница се достига по-точно и за по-малко итерации

Заключение

- при разбърканите редици тази граница се достига по-точно и за по-малко итерации
- времето за изпълнение на матрица (1100×1100) е само 10 пъти по-голямо от това на матрица 11×11

Заключение

- при разбърканите редици тази граница се достига по-точно и за по-малко итерации
- времето за изпълнение на матрица (1100×1100) е само 10 пъти по-голямо от това на матрица 11×11
- рандомизираните редици позволяват лесна паралелизация

Заключение

- при разбърканите редици тази граница се достига по-точно и за по-малко итерации
- времето за изпълнение на матрица (1100×1100) е само 10 пъти по-голямо от това на матрица 11×11
- рандомизираните редици позволяват лесна паралелизация
- оценка на грешката използвайки дисперсията

Благодаря за вниманието!