多元 **Lagrarge** 反演公式: 记 $\boldsymbol{X} = X_1, ..., X_r$. 对于 $H \in R((\boldsymbol{X}))$, $G_i \in R[\![\boldsymbol{X}]\!]$, 如果对任意 i 有 $G_i(0) \in R^\times$, 可以对于 $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_r)$ 递归定义 $F_i = X_i G_i(\boldsymbol{F})$, 满足 Lagrarge 反演公式

$$\left[\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{k}}\right] H(\boldsymbol{F}) = \left[\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{k}}\right] H \cdot \boldsymbol{G}^{\boldsymbol{k}} \cdot \left\|\delta_{ij} - \frac{X_j}{G_i(\boldsymbol{X})} \frac{\partial G_i(\boldsymbol{X})}{\partial X_j}\right\|,$$

其中 $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{k}} = X_1^{k_1} \cdots X_r^{k_r}$.

现在我们考虑用 X 计量白点, Y 计量黑点的指数型生成函数. $W(X,Y)$ 表示白点为根的树, $B(X,Y)$ 表示黑点为根的树. 因为限制是“黑点只能连向白点”, 我们可以得到递推式

$$\begin{cases} W = X \exp(W + B) \\ B = Y \exp W. \end{cases}$$

所以根据 Lagrange 反演公式, 我们有

$$\begin{aligned} [X^n Y^m] H(W, B) &= [X^n Y^m] H(X, Y) e^{n(X+Y)} e^{mX} \det \begin{pmatrix} 1 - X & -Y \\ -X & 1 \end{pmatrix} \\ &= [X^n Y^m] H(X, Y) e^{(n+m)X + nY} (1 - X - XY). \end{aligned}$$

而 $H = \exp C$, C 是一个环的情况, 我们首先计算不考虑奇偶的方案, 记为 C_0, 环的基本单元是 BW 和 W, 所以

$$C_0 = \log \frac{1}{1 - BW - W},$$

那么 C 是去掉 B, W 均出现了奇数次的情况, 有

$$\begin{aligned} C(W, B) &= C_0 - \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^{1} (-1)^{i+j} C_0\left((-1)^i B, (-1)^j W\right) \\ &= \log \frac{1}{1 - BW - W} - \frac{1}{4} \log \frac{(1 + BW)^2 - W^2}{(1 - BW)^2 - W^2}, \\ H(X, Y) &= \exp C(X, Y) \\ &= \frac{1}{1 - XY - X} \left(\frac{(1 - XY)^2 - X^2}{(1 + XY)^2 - X^2}\right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

所以我们有

$$\mathrm{ans} = n! m! [X^n Y^m] \left(\frac{(1 - XY)^2 - X^2}{(1 + XY)^2 - X^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{(n+m)X + nY}.$$

设

$$a_n(Y) = [X^n] H(X, Y),$$

根据方程

$$\left(1 - 2\left(1 + Y^2\right) X^2 + \left(1 - Y^2\right)^2 X^4\right) \cdot X \frac{\partial H}{\partial X} = -XY\left(1 + X^2\left(1 - Y^2\right)\right) \cdot H,$$

可以得到递推式

$$na_n = -Ya_{n-1} + 2(n-2)\left(1+Y^2\right)a_{n-2} - Y\left(1-Y^2\right)a_{n-3} - (n-4)\left(1-Y^2\right)^2 a_{n-4},$$

由于我们要任意模数, 令 $a_n = \frac{b_n}{n!}$, 得到

$$\begin{aligned} b_n = &-Yb_{n-1} \\ &+2(n-1)(n-2)\left(1+Y^2\right)b_{n-2} \\ &-(n-1)(n-2)Y\left(1-Y^2\right)b_{n-3} \\ &-(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left(1-Y^2\right)^2 b_{n-4}. \end{aligned}$$

额外的 *comments*: 如果是模类似 998244353 状物, 由于 $\left(\frac{(1-XY)^2-X^2}{(1+XY)^2-X^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{(n+m)X+nY}$ 是整式递推的, 我们其实可以在 $O(\sqrt{n}\log n + \sqrt{m}\log m)$ 的时间内求出答案.