Lagrangian Mechanics ฉบับพื้นฐาน

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

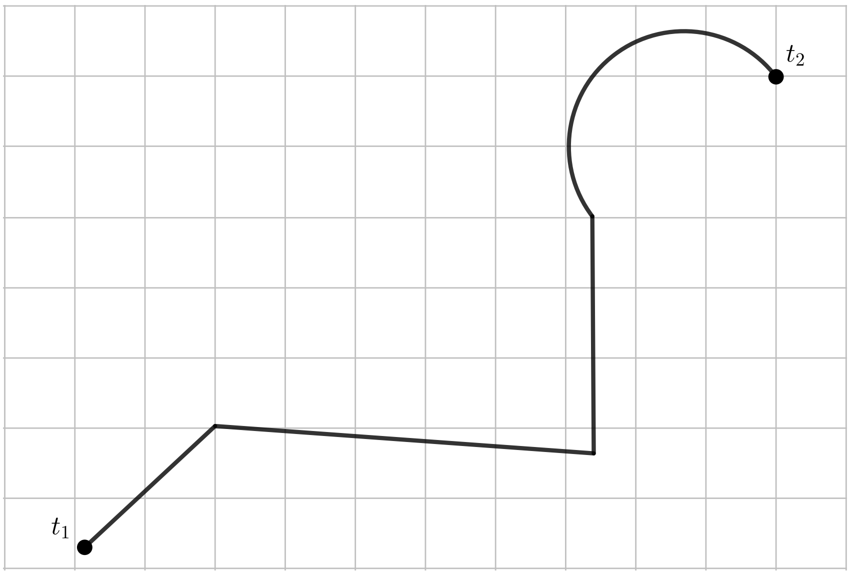
18 พฤศจิกายน พ.ศ. 2563

1 บทนำ

Lagrange Mechanics เป็นการบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุต่าง ๆ โดยอาศัยพลังงานและ Principle of Stationary Action ซึ่งแตกต่างจาก Newtonian Mechanics ที่อาศัย “แรง” บรรยาย ทำให้มีจุดเด่นในการแก้ปัญหาที่มีวัตถุหรือองศาเสรี (Degree of Freedom) จำนวนมากเพราะปริมาณต่าง ๆ ที่พิจารณาเป็นปริมาณสเกลาร์

2 สมการ Euler–Lagrange

พิจารณาสถานการณ์ที่เราต้องการหาสมการบรรยายการเคลื่อนที่แล้วตีตารางลงบนสถานการณ์นั้น จากนั้นหาค่าพลัง

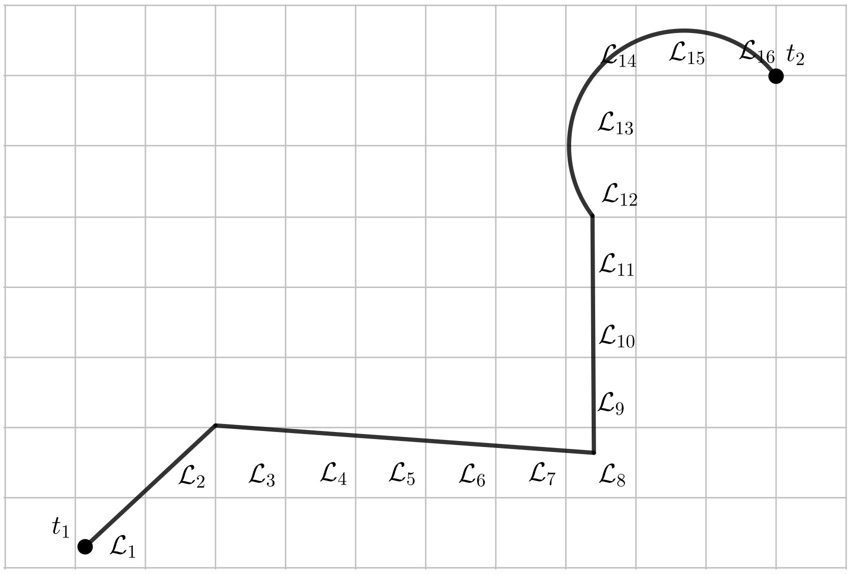


งานจน์ลบพลังงานศักย์ของทุกช่อง โดยเราจะนิยามค่าในตารางนั้นว่า Lagrangian ($\mathcal{L}$)

$$\mathcal{L} \equiv K - U \tag{1}$$

เนื่องจากการพิจารณานี้เราทราบว่าวัตถุเริ่มที่เวลาใดและจบที่เวลาใด เราจึงหาผลรวมของ Lagrangian ตามเส้นทางที่วัตถุเคลื่อนที่จากเริ่มต้น (t_1) จนถึงเวลาที่เราสนใจ (t_2) โดยรวมระยะเวลาย่อย ๆ ทีละ Δt

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \mathcal{L}\Delta t$$



จากนั้นกำหนด $\Delta t \to 0$ ทำให้ตารางมีความละเอียดเป็นอนันต์และได้ค่าที่เที่ยงตรงไม่ว่าจะเป็นเส้นทางใด ๆ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t=t_1}^{t_2} \mathcal{L}\Delta t$$

เรานิยามค่านี้คือ $\mathrm{Action}(S)$ และเปลี่ยนสัญลักษณ์เป็นปริพันธ์

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

เราทราบว่า $\mathcal{L}$ ขึ้นอยู่กับ K และ U ดังนั้น $\mathcal{L}$ จะขึ้นอยู่กับ $x(t),\ \dot{x}(t)$ และ t ด้วย* เราจึงทำการนิยามฟังก์ชันบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุให้เท่ากับฟังก์ชันคงที่บวก $(x_0(t))$ กับฟังก์ชันที่แปรผันได้ $(\alpha\beta(t))$ เพื่อช่วยในการแก้ปัญหานี้

$$x(t) \equiv x_0(t) + \alpha\beta(t) \tag{3}$$

และหาอนุพันธ์เทียบเวลาเพื่อหา $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \alpha\dot{\beta}(t) \tag{4}$$

ทั้งนี้การที่มี α คูณกับ β นั้นจะช่วยทำให้เราสามารถใช้แคลคูลัสหนึ่งตัวแปรแก้ปัญหาได้และ $\beta(t_1) = 0, \beta(t_2) = 0$ เพราะเรากำหนดให้ต้นทางเริ่มที่ $x(t_1)$ และ $x(t_2)$ แต่เส้นทางการเคลื่อนที่ยังคงเปลี่ยนแปลงได้
จาก Principle of Stationary Action จะได้

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,\mathrm{d}t = 0$$

อาศัย Leibniz Integral Rule จะได้

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}t = 0$$

*เช่น $K = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t))^2$ และ $U = mgx(t)$

ระลึกว่า $\mathcal{L}$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ $x(t)$, $\dot{x}(t)$ และ t อาศัย Chain rule จะได้

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบ α ของสมการ (3) และ (4)

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \beta \tag{6}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} = \dot{\beta} \tag{7}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha} = 0 \tag{8}$$

นำ (6) และ (7) แทนใน (5)

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{\beta}\,\mathrm{d}t$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\beta\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{\beta}\,\mathrm{d}t$$

จากนั้นเราจะทำ Integration by Parts พจน์หลังเพื่อกำจัด $\dot{\beta}$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\beta\mathrm{d}t + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\beta\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)\beta\,\mathrm{d}t$$

เนื่องจากเรากำหนดให้ $\beta(t_1) = 0$ และ $\beta(t_2) = 0$ ดังนั้น

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\beta\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)\beta\,\mathrm{d}t$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)\right)\beta\,\mathrm{d}t$$

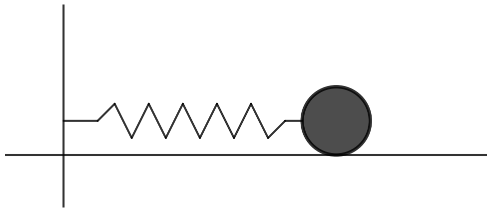
สมการดังกล่าวจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อพจน์ในวงเล็บเท่ากับศูนย์เท่ากันเพราะ β ไม่จำเป็นต้องมีค่าเป็นศูนย์ เราจึงสรุปได้ว่า

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \tag{9}$$

ซึ่ง x และ $\dot{x}$ สามารถเปลี่ยนไปเป็นตัวแปรอื่นได้ตามจำนวนองศาเสรีของระบบนั้น ๆ และเรียกสมการนี้ว่า Euler-Lagrange เนื่องจาก Euler และ Lagrange ได้ร่วมกันแก้ปัญหาดังกล่าว

3 ตัวอย่างการใช้งานสมการ Euler-Lagrange

ทรงกระบอกมวล m รัศมี r ติดสปริงที่มีค่าคงตัว k จงหาคาบของการสั่นเมื่อขยับทรงกระบอกแล้วปล่อย โดยทรงกระบอกกลิ้งแบบไม่ไถล[1]
สังเกตระบบจะพบว่ามีพลังงานศักย์หยืดหยุ่นและพลังงานจลน์เกี่ยวข้อง



จาก

$$\mathcal{L} = K - U \tag{10}$$

ได้

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}kx^2 \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}kx^2 \\
\mathcal{L} &= \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad (11)
\end{aligned}$$

นำสมการ (11) แทนไปในสมการ (9)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)\right) \\
0 &= (-kx) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3}{2}m\dot{x}\right) \\
0 &= -kx - \frac{3}{2}m\ddot{x} \\
\ddot{x} &= -\left(\frac{2k}{3m}\right)x \qquad (12)
\end{aligned}$$

นำสมการ (12) เทียบกับสมการในรูปทั่วไปของ SHM† ดังนั้นจะได้

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \tag{13}$$

จาก

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{14}$$

นำสมการ (13) แทนใน (14)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}} \ \blacksquare$$

หนังสืออ้างอิง

[1] Morin, D. (2008). *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions.* Cambridge University Press.

† $\ddot{x} = -\omega^2 x$