การแก้ปัญหาวงจรไฟฟ้ากระแสสลับด้วยจำนวนเชิงซ้อน

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

4 กันยายน พ.ศ. 2563

1 บทนำ

การใช้จำนวนเชิงซ้อนดีกว่าการใช้ Phasor ในระบบมัธยมปลายทั่วไปอย่างไร ?

- ไม่ต้องวาด Phasor Diagram
- เป็นการแก้ปัญหาด้วยพีชคณิต ไม่ต้องใช้เรขาคณิตซึ่งโดยส่วนใหญ่แล้วพีชคณิตจะง่ายกว่า

วิธีการคิด จะใช้ Euler's formula[1] ช่วยในการแปลงตรีโกณมิติเป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{1}$$

เราจะใช้ j เพื่อสงวน i ไว้ใช้เป็นตัวแปรของกระแสไฟฟ้า

$$j^2 = -1 \tag{2}$$

แต่เนื่องด้วย วิธีการคิดที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนแต่คำตอบที่ต้องการเป็นจำนวนจริง เราจึงต้องพิจารณาแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับว่า เป็นฟังก์ชันของ sin หรือ cos และนำเฉพาะส่วนจริง (Real Part) หรือส่วนจินตภาพ (Imaginary Part) เป็นคำตอบ

2 การใช้ปริมาณเชิงซ้อนในไฟฟ้ากระแสสลับ

1. แหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ
   (a) $V_{\max}\sin\omega t \to V_{\max}e^{j\omega t}$ โดย $V_{\max}\sin\omega t = \mathrm{Im}\left[V_{\max}e^{j\omega t}\right]$
   (b) $V_{\max}\cos\omega t \to V_{\max}e^{j\omega t}$ โดย $V_{\max}\cos\omega t = \mathrm{Re}\left[V_{\max}e^{j\omega t}\right]$
2. ตัวต้านทาน
   (a) $R \to R$

[1]ในระดับมัธยมปลายจะนิยมเขียน $\mathrm{cis}\,\theta$

3. ตัวเก็บประจุ

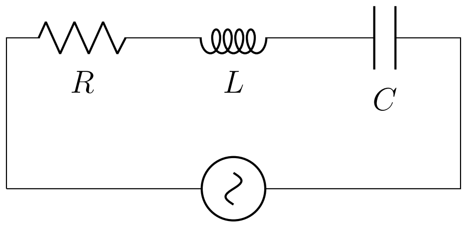
   (a) $C \rightarrow \tilde{X}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

4. ตัวเหนี่ยวนำ

   (a) $L \rightarrow \tilde{X}_L = j\omega L$

3 ตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหา

3.1 วงจร R L C ต่ออนุกรม



ให้ $v(t) = V_{\max} \sin \omega t$ คร่อมแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ จงหา $i(t)$
วิธีทำ ให้

$$\tilde{v}(t) = V_{\max} e^{j\omega t}$$
$$v(t) = \mathrm{Im}\left[V_{\max} e^{j\omega t}\right]$$

กำหนดให้ Z คือ ความขัด (Impedance) ของ R, X_L และ X_C

$$\tilde{Z} = R + \tilde{X}_L + \tilde{X}_C$$
$$\tilde{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$\tilde{Z} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$
$$\tilde{Z} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j$$

แปลงให้อยู่ใน รูปเชิงขั้ว

$$\tilde{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)}$$

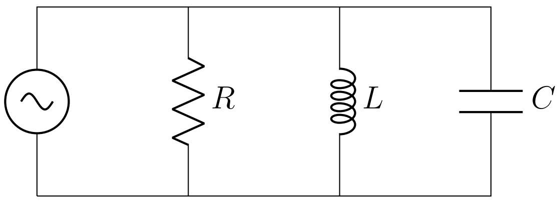
จาก $\tilde{v} = \tilde{i}\tilde{Z}$ (Ohm's law)

$$
\begin{aligned}
\tilde{i}(t) &= \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{Z}} \\
\tilde{i}(t) &= \frac{V_{\max} e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)}} \\
\tilde{i}(t) &= \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

take imaginary part

$$
\therefore i(t) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)\right) \blacksquare
$$

3.2 วงจร R L C ต่อขนาน



ให้ $v(t) = V_{\max} \cos \omega t$ คร่อมแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ จงหา $i(t)$
วิธีทำ ให้

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}(t) &= V_{\max} e^{j\omega t} \\
v(t) &= \mathrm{Re}\left[V_{\max} e^{j\omega t}\right]
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ Z คือ ความขัด (Impedance) ของ R, X_L และ X_C

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{Z}} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\tilde{X}_C} + \frac{1}{\tilde{X}_L} \\
\frac{1}{\tilde{Z}} &= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\
\frac{1}{\tilde{Z}} &= \frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) j
\end{aligned}
$$

แปลงให้อยู่ใน รูปเชิงขั้ว

$$
\frac{1}{\tilde{Z}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)}
$$

จาก $\tilde{v} = \tilde{i}\tilde{Z}$ (Ohm's law)

$$\tilde{i}(t) = \frac{\tilde{v}(t)}{\tilde{Z}}$$

$$\tilde{i}(t) = V_{\max} e^{j\omega t} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{j \arctan\left(\frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)}$$

$$\tilde{i}(t) = V_{\max} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} e^{j \arctan\left(\omega t + \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)}$$

take real part

$$\therefore i(t) = V_{\max} \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}\right)\right) \blacksquare$$

หนังสืออ้างอิง

[1] จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. คณะวิทยาศาสตร์. ภาควิชาฟิสิกส์. (2559). ฟิสิกส์ 2. พิมพ์ครั้งที่ 14. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[2] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม ฟิสิกส์ เล่ม 4. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

[3] Nossu G. N. (2562). GEN Phys 2 Midterm.