

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра Обчислювальної Математики

**Курсова робота**

За спеціальністю 113 "Прикладна математика"

на тему:

**Моделювання розвитку епідемії  
з використанням чисельних методів**

Виконав студент 3-го курсу

Коломієць Микола

Науковий керівник:

Тимошенко Андрій. . .

Київ, 2023

# ЗМІСТ

<b>1</b>	<b>SIR модель</b>	<b>3</b>
1.1	SIR модель . . . . .	3
1.2	SEIR модель . . . . .	4
1.3	SEI модель . . . . .	5
1.4	Смертність . . . . .	5
1.5	SIR-подібні моделі з вакцинацією . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Моделювання</b>	<b>7</b>
2.1	Створення моделі . . . . .	7

## **ВСТУП**

Оцінка сучасного стану об'єкта дослідження. Актуальність роботи та підстави для її виконання. Мета й завдання роботи. Метою є Об'єкт, методи та засоби дослідження. Можливі сфери застосування.

## РОЗДІЛ 1 SIR МОДЕЛЬ

Є декілька найбільш розповсюджених математичних моделей для моделювання епідемій (та загалом інфекційних захворювань). Спочатку розглянемо найрозповсюдженіші з них, а вже в другому розділі створимо свою модель для COVID-19.

### 1.1 SIR модель

Одною з найпростіших моделей є SIR модель. В ній всі люди розглядаються у вигляді трьох груп: здорові (susceptible), хворі (infectious) та ті, що одужали (removed). Форсування людей між цими групами відбувається зі здорових у хворі і з хворих до одужаних. (див рис. 1.1)



Рис. 1.1: SIR model

Зв'язок між цими групами записують за допомогою системи диференціальних рівнянь (див рівняння 1.1).

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (1.1)$$

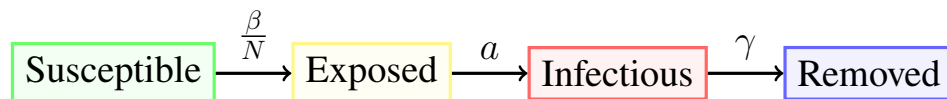
Перше рівняння описує, що кількість здорових зменшується на величину пропорційну добутку хворих на здорових - кількість можливих контактів. Друге рівняння показує, що кількість хворих зростає на ту саму величину і

зменшується на величину пропорційну до кількості хворих (кількість одужаних). Третє рівняння збільшується на ту саму кількість одужаних[1].

Додавши всі рівняння системи отримаємо  $-\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$ . Тож населення у нашій моделі не змінюється з часом:  $N = S + I + R = const$ .

## 1.2 SEIR модель

Часто хвороба характеризується не лише станами - хворий, здоровий, перехворівший. Для подібних випадків додають додаткові стани. Наприклад, якщо додати у SIR модель ще одну групу «заражені, але ще не змозі інфікувати інших» то вийде SEIR модель. Тоді у порівнянні з SIR моделлю у схему додається проміжний етап. (див рис. 1.2)



**Рис. 1.2:** Схема роботи SIER моделі

У вихідну систему додається додаткове рівняння (див рівняння 1.2)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - aE \\ \frac{dI}{dt} = aE - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (1.2)$$

$E(t)$  функція кількості заражених, коефіцієнт  $a$  відповідає оберненому середньому періоду переходу людини від зараженої, до повноцінного інфікованого. Так само населення залишається незмінним:  $N = S + E + I + R$ .

Подіюні прийоми застосовують для більш точного моделювання відповідно до протікання хвороби - часто є певний період під час якого інфікований, ще не заражає оточуючих або заражає з меншим шансом, більш тісним контактом, або період до проявів перших симптомів і початком домашньої ізоляції, носіння маски. Все це впливає на параметри та рівняння моделі і на точність результату. Буде складніше підібрати вірні параметри, але це може позитивно вплинути на точність.

### 1.3 SEI модель

Іноді моделі не ускладнюють, а спрощують. Наприклад, якщо для хвороби виробити імунітет навічно не можливо, як от нежить, одужаних розглядати немає сенсу. Таким чином схема спрощується (див рис. 1.3)

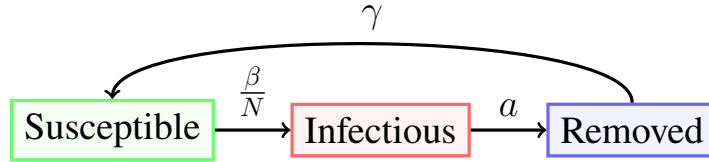


Рис. 1.3: Схема роботи SEI моделі

Отже і система буде складатись з меншої кількості рівнянь. (див рівняння 1.3)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI + \gamma I \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - aE \\ \frac{dI}{dt} = aE - \gamma I \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.4 Смертність

Якщо зробити припущення, що людина у кожній групі може померти з ймовірністю  $\mu$ , то кожна група буде зменшуватися на добуток  $\mu$  та популяцію цієї групи. В таких моделях також додають до розгляду новонароджених. Якщо припустити, що у середньому народжуваність за момент часу  $dt$  дорівнює  $\Lambda$ , одержемо нуву систему рівнянь. (див рівняння 1.4)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \frac{\beta}{N}SI \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (1.4)$$

У даній моделі населення вже буде змінюватись. (див рівняння 1.4)

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) = \Lambda - \mu(S(t) + I(t) + R(t)) \quad (1.5)$$

Іноді для спрощення встановлюють  $\Lambda = \mu$  - за таких значень населення не змінюється, проте трохи збільшується потенціал інфікування (з приростом нового покоління у категорію здорових)

### 1.5 SIR-подібні моделі з вакцинацією

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = vN(1 - P) - \frac{\beta}{N}SI \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \\ \frac{dV}{dt} = vNP \end{cases} \quad (1.6)$$

## РОЗДІЛ 2 МОДЕЛЮВАННЯ

### 2.1 Створення моделі

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I}{N} S - l\beta \frac{H}{N} S - \beta' \frac{P}{N} S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta \frac{I}{N} S + l\beta \frac{H}{N} S + \beta' \frac{P}{N} S - \kappa E, \\ \frac{dI}{dt} = \kappa \rho_1 E - (\gamma_a + \gamma_i) I - \delta_i I, \\ \frac{dP}{dt} = \kappa \rho_2 E - (\gamma_a + \gamma_i) P - \delta_p P, \\ \frac{dA}{dt} = \kappa (1 - \rho_1 - \rho_2) E, \\ \frac{dH}{dt} = \gamma_a (I + P) - \gamma_r H - \delta_h H, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_i (I + P) + \gamma_r H, \\ \frac{dF}{dt} = \delta_i I + \delta_p P + \delta_h H, \end{array} \right. \quad (2.1)$$



## БІБЛІОГРАФІЯ

- [1] Ayoob Salimipour, Toktam Mehraban, Hevi Seerwan Ghafour, Noreen Izza Arshad, and M. J. Ebadi. SIR model for the spread of COVID-19: A case study. *Operations Research Perspectives*, 10:100265, 2023. Publisher: Elsevier.