КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра Обчислювальної Математики

Курсова робота

За спеціальністю 113 "Прикладна математика"

на тему:

Моделювання розвитку епідемії з використанням чисельних методів

Виконав студент 3-го курсу
Коломієць Микола
Науковий керівник:
Тимошенко Андрій. . .

Київ, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Оцінка сучасного стану об'єкта дослідження. Актуальність роботи та підстави для її виконання. Мета й завдання роботи. Метою є Об'єкт, методи та засоби дослідження. Можливі сфери застосування.

РОЗДІЛ 1 SIR МОДЕЛЬ

В першому розгляді розглянемо SIR-подібні моделі. Почнемо з базової SIR моделі і поступово будемо ускладнювати модель шляхом додавання нових груп, що дозволить поступово наблизити модель до реалій протікання хвороби.

1.1 SIR модель

Одною з найпростіших моделей є SIR модель. В ній всі люди розглядаються у вигляді трьох груп: здорові (susceptible), хворі (infectious) та ті, що одужали (removed). Форсування людей між цими групами відбувається зі здорових у хворі і з хворих до одужаних.(див рис. 1.1)

Рис. 1.1: SIR model

Зв'язок між цими групами записують за допомогою системи диференціальних рівняннь

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \tag{1.1}$$

Перше рівняння описує, що кількість здорових зменшується на величину пропорційну добутку хворих на здорових - кількість можливих контактів. Друге рівняння показує, що кількість хворих зростає на ту саму величну і зменшується на величину пропорційну до кількості хворих (кількість одужаних). Третє рівняння зібльшується на ту саму кількість одужаних[1].

Додавши всі рівняння системи отримаємо - $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$. Тож населення у нашій моделі не змінюєтся з часом: $N = S + I + R = const$.

1.2 SEIR модель

Часто хвороба характеризується не лише станами - хворий, здоровий, перехворівший. Для подібних випадків додають додаткові стани. Наприклад, якщо додати у SIR модель ще одну групу «заражені, але ще не взмозі інфікувати інших» то вийде SEIR модель. Тоді у порівнянні з SIR моделлю у схему додасться проміжний етап. (див рис. 1.2)

$$\boxed{\text{Susceptible}} \xrightarrow{\frac{\beta}{N}} \boxed{\text{Exposed}} \xrightarrow{a} \boxed{\text{Infectious}} \xrightarrow{\gamma} \boxed{\text{Removed}}$$

Рис. 1.2: Схема роботи SIER моделі

У вихідну систему додається додаткове рівняння

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} SI \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta}{N} SI - aE \\ \frac{dI}{dt} = aE - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \tag{1.2}$$

E(t) функція кількості заражених, коефіцієнт a відповідає оберненому середньому періоду переходу людини від зараженої, до повноцінного інфікованого. Так само населення залишається незмінним: $N = S + E + I + R$.

Подіюні прийоми застосовують для більш точного моделювання відповідно до протікання хвороби - часто є певний період під час якого інфікований, ще не заражає оточуючих або заражає з меншим шансом, більш тісним контаком, або період до проявів перших симптомів і початком домашньої ізоляції, носіння маски. Все це впливає на парамтри та рівняння моделі і на точність результа. Буде складніше підібрати вірні параметри, але це може позетивно вплинути на точність.

1.3 SEI модель

Іноді моделі не ускладнюютть, а спрощують. Наприклад, якщо для хвороби виробити імунітет навічно не можливо, як от нежить, одужаних розглядати немає сенсу. Таким чином схема спрощується(див рис. 1.3)

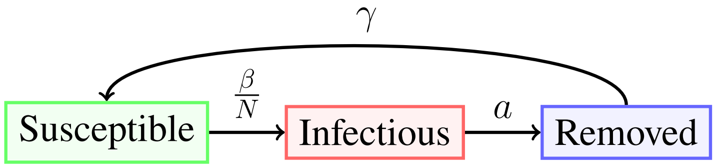

Рис. 1.3: Схема роботи SEI моделі

Отже і система буде складатись з меншої кількості рівняннь.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI + \gamma I \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - aE \\ \frac{dI}{dt} = aE - \gamma I \end{cases} \tag{1.3}$$

1.4 SEIPR

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta\frac{I}{N}S - \beta'\frac{P}{N}S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta\frac{I}{N}S + \beta'\frac{P}{N}S - \kappa E, \\ \frac{dI}{dt} = \kappa\rho_1 E - \gamma_i I, \\ \frac{dP}{dt} = \kappa(1-\rho_1)E - \gamma_i P, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_i(I+P) \end{cases} \tag{1.4}$$

1.5 SEIAPR

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta\frac{I}{N}S - \beta'\frac{P}{N}S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta\frac{I}{N}S + \beta'\frac{P}{N}S - aE, \\ \frac{dI}{dt} = a\rho_1 E - \gamma I, \\ \frac{dP}{dt} = a\rho_2 E - \gamma P, \\ \frac{dA}{dt} = a\left(1-\rho_1-\rho_2\right)E, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma(I+P) \end{cases} \tag{1.5}$$

1.6 SEIPHR

1.7 SEIPHRD

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{I}{N} S - l\beta \frac{H}{N} S - \beta' \frac{P}{N} S, \\ \frac{dE}{dt} = \beta \frac{I}{N} S + l\beta \frac{H}{N} S + \beta' \frac{P}{N} S - aE, \\ \frac{dI}{dt} = a\rho_1 E - (\gamma_a + \gamma_i) I - \delta_i I, \\ \frac{dP}{dt} = a\rho_2 E - (\gamma_a + \gamma_i) P - \delta_p P, \\ \frac{dA}{dt} = a(1 - \rho_1 - \rho_2) E, \\ \frac{dH}{dt} = \gamma_a (I + P) - \gamma_r H - \delta_h H, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_i (I + P) + \gamma_r H, \\ \frac{dF}{dt} = \delta_i I + \delta_p P + \delta_h H, \end{cases} \tag{1.6}$$

1.8 Смертність

Якщо зробити припущення, що людина у кожній групі може померти з ймовірністю μ, то кожна група буде зменшуватися на добуток μ та популяцію цієї групи. В таких моделях також додають до розгляду новонароджених. Якщо припустити, що у середньому народжуваність за момент часу dt дорівнює Λ, одержемо нуву систему рівняннь. (див рівняння 1.8)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \frac{\beta}{N} SI \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \tag{1.7}$$

У даній моделі населення вже буде змінюватись. (див рівняння 1.8)

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda - \mu N(t) = \Lambda - \mu(S(t) + I(t) + R(t)) \tag{1.8}$$

Іноді для спрощення встановлюють $\Lambda = \mu$ - за таких значень населення не змінюється, проте трохи збільшується потенціал інфікування (з приростом нового покоління у категорію здорових)

1.9 SIR-подібні моделі з вакцинацією

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = vN(1-P) - \frac{\beta}{N}SI \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \\ \frac{dV}{dt} = vNP \end{cases} \tag{1.9}$$

РОЗДІЛ 2 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

У другому розділі розглянемо чисельні методи для розв'язання даних сисетем диф рівняннь та для визначення оптимальних параметрів, що якнайкраще симулюють розвиток захворювансті.

2.1 Методи вирішення системи диф рівяннь

2.1.1 Метод Ейлера

2.1.2 Метод Рунге Кутті

2.2 Методи підбору параметрів

2.2.1 Метод рою часток

РОЗДІЛ 3 ОЦІНКА І ПОРІВНЯННЯ МОДЕЛЕЙ

БІБЛІОҐРАФІЯ

[1] Ayoob Salimipour, Toktam Mehraban, Hevi Seerwan Ghafour, Noreen Izza Arshad, and M. J. Ebadi. SIR model for the spread of COVID-19: A case study. *Operations Research Perspectives*, 10:100265, 2023. Publisher: Elsevier.