Реферат по лабораторній роботі №3

Коломієць Микола ОМ-4

1 листопада 2023 р.

Зміст

Постановка задачі

Особливості нашого варіанту:

$$L(\partial_s) = \partial_t^2 - c^2\partial_x^2; \quad G(s) = \frac{H(t - \frac{r}{c})}{2c}, \quad s = (x,t), \quad r = |x|,$$

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$ - функкція Хевісайда.

Вектори $u_0 = (u_{0m}, m = 1, M_0)^T, u_\Gamma = (u_{\Gamma m}, m = 1, M_g)^T$ невідомих фіктивних зовнішньодинамічних збурень, вибераємо їх за середньоквадратичним відхиленням:

$$\Phi = \sum_{r=1}^{R_0} \int\limits_{S_0} (L_r^0(\partial_t)y(s)|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx +$$

$$+ \sum_{p=1}^{R_\Gamma} \int\limits_{\Gamma} dx \int\limits_0^T (L_p^\Gamma(\partial_x)y(s) - Y_p^\Gamma(x,t))^2 dt \to \min_{y(s)}$$

Для знаходження векторів отримаємо систему:

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_r^0(\partial_t)\, G\left(s-s_m^0\right)\Big|_{t=0} u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_r^0(\partial_t)\, G\left(s-s_m^\Gamma\right) u_{\Gamma m} =$$

$$= \bar{Y}_r^0(x) \left(r=\overline{1,R_0}\right),$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G\left(s-s_m^0\right)\Big|_{x\in\Gamma} u_{0m} + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, G\left(s-s_m^\Gamma\right) u_{\Gamma m} =$$

$$= \bar{Y}_\rho^\Gamma(x,t) \quad \left(\rho=\overline{1,R_\Gamma}\right).$$

При цьому

$$\bar{Y}_r^0(x) = Y_r^0(x) - L_r^0(\partial_t)\, y_\infty(s)\big|_{t=0},$$

$$\bar{Y}_\rho^\Gamma(x,t) = Y_\rho^\Gamma(x,t) - L_\rho^\Gamma(\partial_x)\, y_\infty(s)\big|_{x\in\Gamma}.$$

Для розв'язання системи згідно із критерієм зведемо її до вигляду $B(s)\bar{u} = Y(s)$, де $\bar{u} = \mathrm{col}\,(u_0, u_\Gamma)$, а

$$Y(s) = \mathrm{col}\,(Y_0(x)\,(x\in S_0)\,, Y_\Gamma(x,t)(x,t)\in\Gamma\times[0,T])\,,$$

$$B(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} (B_{11}(x)\,(x\in S_0)) & (B_{12}(x)\,(x\in S_0)) \\ (B_{21}(x,t)(x,t)\in\Gamma\times[0,T])) & (B_{22}(x,t)(x,t)\in\Gamma\times[0,T])) \end{pmatrix}$$

при

$$Y_0(x) = \mathrm{col}\left(\bar{Y}_r^0(x), r=\overline{1,R_0}\right),$$

$$Y_\Gamma(x,t) = \mathrm{col}\left(\bar{Y}_\rho^\Gamma(s), \rho=\overline{1,R_\Gamma}\right),$$

$$B_{11}(x) = \mathrm{col}\left(\mathrm{str}\left(L_r^0\left(\partial_t\right) G\left(s - s_m^0\right)\right|_{t=0}, m = \overline{1, M_0}\right), r = \overline{1, R_0}\right),$$

$$B_{12}(x) = \mathrm{col}\left(\mathrm{str}\left(L_r^0\left(\partial_t\right) G\left(s - s_m^\Gamma\right)\right|_{t=0}, m = \overline{1, M_\Gamma}\right), r = \overline{1, R_0}\right),$$

$$B_{21}(x,t) = \mathrm{col}\left(\mathrm{str}\left(L_\rho^\Gamma\left(\partial_x\right) G\left(s - s_m^0\right), m = \overline{1, M_0}\right), \rho = \overline{1, R_\Gamma}\right),$$

$$B_{22}(x,t) = \mathrm{col}\left(\mathrm{str}\left(L_\rho^\Gamma\left(\partial_x\right) G\left(s - s_m^\Gamma\right), m = \overline{1, M_\Gamma}\right), \rho = \overline{1, R_\Gamma}\right).$$

Розв'язання системи еквівалентне знаходженню вектора $\bar{u}$ такого, щоб

$$\bar{u} = \arg \min_{u \in R^{M_0 + M_\Gamma}} \int_{(\cdot)} \|B(s)u - Y(s)\|^2 ds.$$

Далі маємо маємо

$$\bar{u} \in \Omega_u = \left\{u : u = P^+ B_y + v - P^+ P v, \quad \forall v \in R^{M_0 + M_\Gamma}\right\},$$

де

$$P = \int_{(\cdot)} B^T(s) B(s) ds, B_y = \int_{(\cdot)} B^T(s) Y(s) ds.$$

Матрицю P і вектор B_y подамо у вигляді

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad B_y = \begin{pmatrix} B_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) B_{1j}(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{2i}^T(x,t) B_{2j}(x,t) dx dt$$

$$B_{yi} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) Y_0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{2i}^T(x,t) Y_\Gamma(x,t) dx dt \quad (i, j = \overline{1,2}).$$

Вважаючи, що

$$P^+ = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

де $Q_{11} \in R^{M_0 \times M_0}$, $Q_{12} \in R^{M_0 \times M_\Gamma}$, $Q_{21} \in R^{M_\Gamma \times M_0}, Q_{22} \in R^{M_\Gamma \times M_\Gamma}$, а $v = \mathrm{col}\,(v_0, v_\Gamma)\,,$ $v_0 \in R^{M_0}$, $v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}$, знаходимо шукані згідно моделюючі вектори u_0 та u_Γ. При цьому

$$\begin{aligned} &u_0 \in \Omega_0 = \big\{u \in R^{M_0} : u = (Q_{11}, Q_{12})\, B_y + \\ &+v_0 - (Q_{11}, Q_{12})\, Pv, \quad \forall v \in R^{M_0}\big\}\,, \\ &u_\Gamma \in \Omega_\Gamma = \big\{u \in R^{M_\Gamma} : u = (Q_{21}, Q_{22})\, B_y + \\ &+v_\Gamma - (Q_{21}, Q_{22})\, Pv, \quad \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}\big\}\,. \end{aligned}$$

Знайдені вектори u_0 та u_Γ дозволяють знайти функцію $y(s)$ стану розглядуваної системи, яка початково-крайові умови моделює з точністю

$$\varepsilon_0^2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi = \min_{u \in \Omega_0 \times \Omega_\Gamma} \int_{(\cdot)} \|B(s)u - Y(s)\|^2 ds = \int_{S_0} Y_0^T(x) Y_0(x) dx +$$
$$+ \int_{\Gamma \times [0,T]} Y_\Gamma^T(x,t) Y_\Gamma(x,t) dx dt - B_y^T P^+ B_y,$$

Моделювання буде однозначним $(v \equiv 0)$ при $\det P > 0$. За інших умов розв'язок задачі буде неоднозначним.