Лабораторна робота №2

Коломієць Микола ОМ-4

26 листопада 2023 р.

Зміст

Постановка задачі

Методи побудови різницевих схем

Інтегро-інтерполяційний метод.

Розглянемо наступну граничну задачу:

$$\begin{cases} -(ku')' + qu = f, 0 < x < 1, \\ -ku' + \alpha_1 u = \mu_1, \quad x = 0, \\ ku' + \alpha_2 u = \mu_2, \quad x = 1, \end{cases}$$

де $k = k(x) \geq c_0 > 0, q = q(x) \geq 0, \quad k(x) \in Q^1[a,b], q(x), f(x) \in Q[a,b]$. Побудуємо сітку $\bar{\omega}_h = \left\{x_i = ih, h = 1/N, i = \overline{0,N}\right\}$ та проінтегруємо (1) по відрізку $\left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right]$, отримаємо :

$$w_{i+1/2} - w_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (qu - f)dx = 0,$$

де $w_i = -k\left(x_i\right) \frac{du}{dx}\left(x_i\right)$ - величина потоку, який проходить через точку x_i.

Розглянемо

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx = u(\xi) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx \approx u_i \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx = hd_i u_i,$$

де $\xi \in [a,b]$,

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1}} q(x)dx$$

Аналогічно

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \varphi_i h,$$

де

$$\varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Проінтегруємо по відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ вираз $u' = -\frac{w(x)}{k(x)}$. Отримаємо

$$u_i - u_{i-1} = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)}dx \approx -w_{i-1/2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}dx,$$

або

$$w_{i-1/2} \approx -a_i u_{\bar{x},i},$$

де

$$a_i = \left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}dx\right)^{-1}$$

Враховуючи також вираз

$$w_{i+1/2} \approx -a_{i+1} u_{\bar{x},i+1}$$

отримаємо однорідну різницеву задачу

$$-\left(a y_{\bar{x}}\right)_{x,i} + d_i y_i = \varphi_i, i = \overline{1, N-1}$$

Проінтегруємо співвідношення (1) по відрізку $\left[0, x_{1/2}\right]$:

$$w_{1/2} - w_0 + \int_0^{x_1/2} (qu - f) dx = 0.$$

$$w_0 = \mu_1 - \alpha_1 u_0,$$

а при $i = 1$

$$w_{1/2} \approx -a_1 u_{x,0}.$$

Скористаємося також наближеннями

$$\int_0^x \frac{1}{2} qu dx \approx u_0 \int_0^x \frac{1}{2} q(x) dx = \frac{h}{2} u_0 d_0,$$

де

$$d_0 = \frac{2}{h} \int_0^{x_{1/2}} q(x) dx,$$

та

$$\int_0^{x_{1/2}} f(x) dx = \frac{h}{2} \varphi_0,$$

де

$$\varphi_0 = \frac{2}{h} \int_0^{x_{1/2}} f(x) dx$$

отримуємо різницеву апроксимацію граничних умов :

$$-a_1 y_{x,0} + \alpha_1 y_0 - \mu_1 + \frac{h}{2} d_0 y_0 - \frac{h}{2} \varphi_0 = 0,$$

або

$$-a_1 y_{x,0} + \overline{\alpha_1} y_0 = \overline{\mu_1},$$

де

$$\overline{\alpha_1} = \alpha_1 + \frac{h}{2}d_0, \overline{\mu_1} = \mu_1 + \frac{h}{2}\varphi_0.$$

Алгоритм розв’язання

Результати

Висновки