Лабораторна робота №1 (варіант 10)

Коломієць Микола ОМ-4

13 листопада 2023 р.

Зміст

Постановка задачі

$f(x) = -24x^3cos(3x) + 18(x^4 + 1)sin(3x) + 6(2sin(1.2x) + 1)cos(3x)$
$+(2sin(3x) + 3)(cos(2x) + 1.5), \mu_1 = -1.5, \mu_2 = 1300$

За допомогою методів Бубнова-Гальоркіна і найменших квадратів знайти наближений розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$-(k(x)u')' + p(x)u' + q(x)u = f(x), a < x < b,$$

$$-k(a)u'(a) + \alpha_1 u(a) = \mu_1,$$

$$k(b)u'(b) + \alpha_2 u(b) = \mu_2,$$

де

$$k(x) = k_1 x^{k_2} + k_3, k(x) > 0, \quad p(x) = p_1 \sin(p_2 x) + p_3,$$
$$q(x) = q_1 \cos(q_2 x) + q_3, q(x) \geq 0, \quad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0.$$

Побудувати графіки отриманих розв'язків та точного розв'язку (всі разом). Обчислити відхилення. Зауваження:

1. заданий розв'язок задачі $u(x) = m_1 sin(m_2 x) + m_3$.
2. обрати початкову кількість базисних функцій від 4 до 7.
3. всі параметри в умовах задачі можуть змінюватися.

4. початкові значення параметрів можна взяти рівними 1, проміжок [0, 4].

Алгоритм розв'язання

Зробимо крайові умови однорідними шляхом заміни $u(x) = w(x) + v(x)$, де $v(x)$ будемо шукати з системи:

$$\begin{cases} v(x) = rx + l \\ -k(a)v'(a) + \alpha_1 v(a) = \mu_1 \\ k(b)v'(b) + \alpha_2 v(b) = \mu_2 \end{cases}$$

Після підстановки:

$$\begin{cases} r(-k(a) + \alpha_1 a) + \alpha_2 l = \mu_1 \\ r(k(b) + \alpha_2 b) + \alpha_2 l = \mu_2 \end{cases}$$

За теоремою Крамера:

$$r = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 & \alpha_1 \\ \mu_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-k(a) + \alpha_1 a) & \alpha_1 \\ (k(b) + \alpha_2 b) & \alpha_2 \end{vmatrix}}, l = -\frac{\begin{vmatrix} (-k(a) + \alpha_1 a) & \mu_1 \\ (k(b) + \alpha_2 b) & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-k(a) + \alpha_1 a) & \alpha_1 \\ (k(b) + \alpha_2 b) & \alpha_2 \end{vmatrix}}$$

Таким чином

$$\begin{cases} r = \frac{\mu_1\alpha_2 - \mu_2\alpha_1}{-k(a)\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 a - \alpha_1 k(b) - \alpha_1\alpha_2 b} \\ l = \frac{\mu_2 k(a) - \mu_2\alpha_1 a + \mu_1 k(b) + \mu_1\alpha_2 b}{-k(a)\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 a - \alpha_1 k(b) - \alpha_1\alpha_2 b} \end{cases}$$

Підставимо отриману $v(x)$ у головне рівняння:

$$-(k(x)w')' + p(x)w' + q(x)w - rk'(x) + rp(x) + q(x)rx + q(x)l = f(x)$$

$$-(k(x)w')' + p(x)w' + q(x)w = rk'(x) - rp(x) - q(x)rx - q(x)l + f(x) = f_1(x)$$

Нова задача з однорідними умовами:

$$-(k(x)w')' + p(x)w' + q(x)w = f_1(x), a < x < b,$$

$$-k(a)w'(a) + \alpha_1 w(a) = 0,$$

$$k(b)w'(b) + \alpha_2 w(b) = 0,$$

Знаходимо базисні функції $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n$ такі, що виконують граничні умови.

$$\begin{cases} \varphi_1 = (x-a)^2(x-C) \\ \varphi_2 = (b-x)^2(x-D) \\ \varphi_i = (x-a)^2(b-x)^{i-1}, i \geq 3 \end{cases}$$

Тоді наша функція буде знаходитись у вигляді $w(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$

Для методу Бубнова-Гальоркіна значення коефіцієнтів c_i можна розрахувати із СЛАР

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(A\varphi_i, \varphi_\gamma) = (f, \varphi_\gamma), \gamma = 1, ...n$$

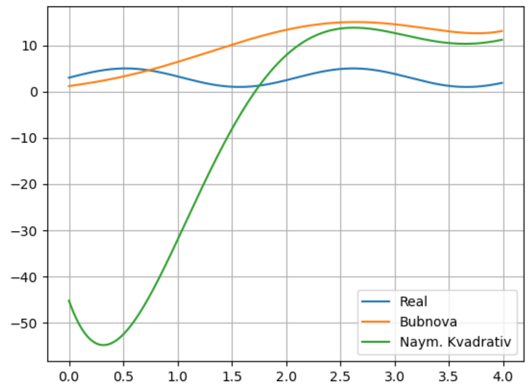
Для методу найменших квадратів

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(A\varphi_i, A\varphi_\gamma) = (f, A\varphi_\gamma), \gamma = 1...n$$

Кінцеву похибку обчислимо за формулою:

$$\varepsilon = \|u - u_n\| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (u - u_n)^2 dx}$$

Результати

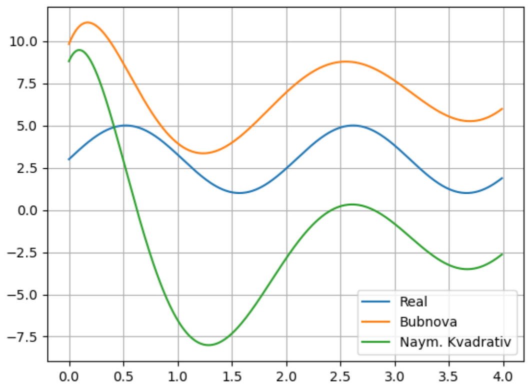


4 функцій

Точність

Бубнова-Гальоркіна: 17.9

Найменших квадратів: 56.2

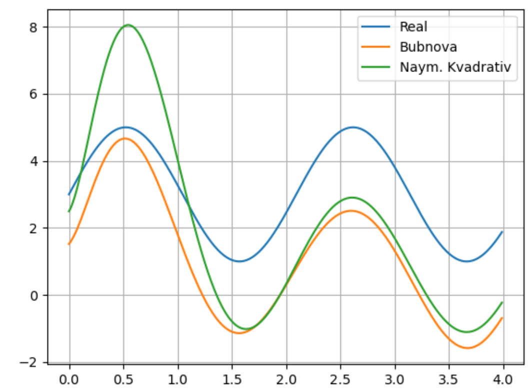


5 функцій

Точність

Бубнова-Гальоркіна: 8

Найменших квадратів: 12

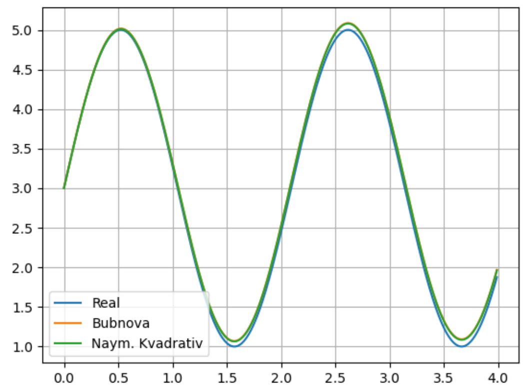


7 функцій

Точність

Бубнова-Гальоркіна: 4.2

Найменших квадратів: 4

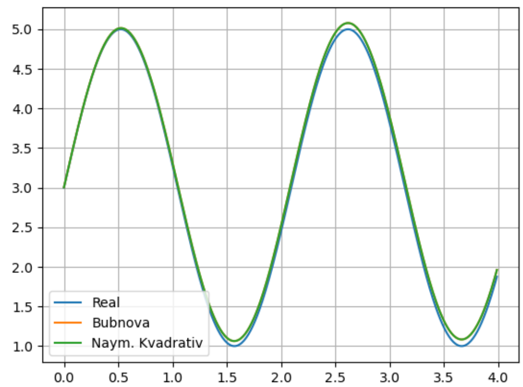


12 функцій

Точність

Бубнова-Гальоркіна: 0.14

Найменших квадратів: 0.13



18 функцій

Точність

Бубнова-Гальоркіна: 0.13

Найменших квадратів: 0.12

Параметри

k1 = 1, k2 = 4, k3 = 1, p1 = 2, p2 = 1.2, p3 = 1, q1 = 1, q2 = 2, q3 = 1.5,

alpha1 = 1.5, alpha2 = 1.1,

a = 0, b = 4,

m1 = 2, m2 = 3, m3 = 3,

Висновки

1. Зі збільшенням кількості векторів для наближеного розв'язку точність покращується. Це підтверджує важливість вибору оптимальної кількості векторів для досягнення необхідної точності.

2. Метод Бубнова-Гальоркіна виявився більш точним в порівнянні з методом найменших квадратів, коли використовується та ж сама кількість векторів. Це може свідчити про його більшу ефективність для дослідження даних граничних задач.

3. З результатів видно, що при використанні 7 векторів точність наближеного розв'язку стає дуже високою, що робить його дуже корисним для практичного використання в розв'язанні граничних задач.