ITAM	Integrantes	Clave única
	Primer integrante	primera CU
	Segundo integrante	segunda CU
Tarea No. 1 - Simulación	Itzama Delgadillo García	181081

1. Problema 5

Probar que la parte fraccional de la suma de uniformes en $(0,1)$ se distribuye también uniforme en $(0,1)$

Demostración. Sea $(x) = x - \lfloor x \rfloor$ la parte fraccionaria de x. Demostraremos primero que si z_1,z_2 son dos reales no negativos, entonces:

$$(z_1 + z_2) = ((z_1) + z_2)$$

Supongamos primero que $(z_1) + (z_2) < 1$

entonces

$$(z_1) + z_2 = (z_1) + (z_2) + \lfloor z_2 \rfloor$$

e forma que $\lfloor (z_1) + z_2 \rfloor = \lfloor z_2 \rfloor$.

De forma similar

$$z_1 + z_2 = (z_1) + (z_2) + \lfloor z_1 \rfloor + \lfloor z_2 \rfloor$$

Y entonces $\lfloor z_1 + z_2 \rfloor = \lfloor z_1 \rfloor + \lfloor z_2 \rfloor$.

Finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) &= z_1 + z_2 - \lfloor z_1 + z_2 \rfloor \\
&= z_1 + z_2 - \lfloor z_1 \rfloor - \lfloor z_2 \rfloor \\
&= (z_1) + z_2 - \lfloor z_2 \rfloor \\
&= (z_1) + z_2 - \lfloor (z_1) + z_2 \rfloor \\
&= ((z_1) + z_2)
\end{aligned}$$

Ahora si $(z_1) + (z_2) > 1$

entonces

$$(z_1) + z_2 = (z_1) + (z_2) + \lfloor z_2 \rfloor = \lfloor z_2 \rfloor + 1 + \zeta$$

con$\zeta \in (0,1)$

por lo que $\lfloor (z_1) + z_2 \rfloor = \lfloor z_2 \rfloor + 1$.

Con un proceso similar obtenemos que

$$\lfloor z_1 + z_2 \rfloor = \lfloor z_1 \rfloor + \lfloor z_2 \rfloor + 1$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) &= z_1 + z_2 - \lfloor z_1 + z_2 \rfloor \\
&= z_1 + z_2 - \lfloor z_1 \rfloor - \lfloor z_2 \rfloor - 1 \\
&= (z_1) + z_2 - \lfloor z_2 \rfloor - 1 \\
&= (z_1) + z_2 - \lfloor (z_1) + z_2 \rfloor \\
&= ((z_1) + z_2)
\end{aligned}$$

Ahora, sean U_1,U_2 variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Definamos $Z = U_1 + U_2$; es claro que Z toma valores en $(0,2)$. Calculemos su función de densidad, f_z.

a) Notar que $z \in (0,1)$ y $0 < z - u < 1$ con $u \in (0,1)$ si y solo si $-1 < z - 1 < 0 < u < z < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \int_0^z \mathbb{1}_{(0,1)}(u)\mathbb{1}_{(0,1)}(z-u)\,du \\ &= z \end{aligned}$$

Si $z \in (0,1)$

b) Notar que $z \in (1,2)$ y $0 < z - u < 1$ con $u \in (0,1)$ si y solo si $0 < z - 1 < u < 1 < z < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \int_{z-1}^1 \mathbb{1}_{(0,1)}(u)\mathbb{1}_{(0,1)}(z-u)\,du \\ &= 2 - z \end{aligned}$$

Si $z \in (0,1)$

De forma que la función de densidad de Z tiene la forma $f(z) = z\mathbb{1}_{(0,1)}(z) + (2-z)\mathbb{1}_{(1,2)}(z)$

Ahora calculemos la función de distribución acumulada de $(Z) = (U_1 + U_2)$. Como Z toma valores en $(0,2)$, el evento $\{(Z) \leq z\}$ ocurre si y solo si $\{Z \leq z\}$ o $\{1 \leq Z \leq 1+z\}$ ocurren, por supuesto, con $z \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} F_{(z)}(z) &= \int_0^z f_z(t)\,dt + \int_1^{1+z} f_z(t)\,dt \\ &= \int_0^z t\,dt + \int_1^{1+z} (2-t)\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_0^z + \frac{(t-2)^2}{2}\Big|_{1+z}^1 \\ &= \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z^2 - 2z + 1}{2} \\ &= z \end{aligned}$$

De forma que $(Z) \sim U(0,1)$, este es nuestro caso base.

Ahora supongamos que $(U_1 + ... + U_n)$ se distribuye uniformemente en el intervalo $(0,1)$. Entonces, por lo demostrado en la primera página

$$(U_1 + ... + U_n + U_{n+1}) = ((U_1 + ... + U_n) + U_{n+1})$$

y por hipótesis de inducción sabemos que $(U_1 + ... + U_n) \sim U(0,1)$, además $(U_1 + ... + U_n)$ es independiente de U_{n+1} pues todas lo son. De forma que $(U_1 + ... + U_n + U_{n+1}) = ((U_1 + ... + U_n) + U_{n+1})$ es la parte fraccionaria de la suma de dos variables independientes distribuidas uniformemente en el intervalo $(0,1)$ y, por lo tanto, se distribuye uniforme en el intervalo $U(0,1)$.

$\square$