QUELQUES CONNAISSANCES SUR LES ENSEMBLES

La notion d'ensemble fait partie des notions premières des mathématiques : elle est à la fois totalement intuitive et terriblement abstraite. Avant d'aborder le sujet, souvenons nous un peu...
Si l'on s'intéresse aux productions mathématiques depuis les Grecs, on ne peut que s'étonner à la fois de la nature des questions posées et de la teneur des réponses apportées :

- *Lorsqu'on cite le problème de la quadrature du cercle ou de la duplication du cube, on fait référence à un simple problème géométrique de tracés de cercles et de droites : est-il possible en partant de deux points éloignés d'une longueur unité de tracer « à la règle et au compas », les nombres réels* $\sqrt{\pi}$ *et* $\sqrt[3]{2}$ *? Bien que le problème soit très simple à concevoir, il faut attendre l'élaboration de théories très abstraites (théorie des extensions de corps), environ deux millénaires plus tard, pour que la réponse (négative) soit donnée.*
- *Pierre de Fermat (1601 - 1665) indiqua en marge des Arithmétiques de Diophante que l'équation* $x^n + y^n = z^n$ *n'a pas de solution non triviale dans* $\mathbb{N}^3$ *pour* $n \geqslant 3$*. Difficile d'imaginer qu'il faudra plus de trois siècles d'acharnement de la part des meilleurs mathématiciens et la mise en place de théories extrêmement riches pour qu'une démonstration soit donnée par Andrew Wiles, en 1994.*
- *Dans la cour de l'école primaire, lorsque nous faisions des tas de 5 billes pour les partager entre copains et copines, nous ne savions pas que nous rencontrions pour la première fois un objet si cher aux spécialistes de la théorie des anneaux et de l'arithmétique : la division euclidienne. Celle-là même qui, plus tard, nous amènera au même type de manipulations sur des polynômes ou sur les entiers de Gauss.*
- *Dès la maternelle, le maître ou la maîtresse qui nous demandait de trier des objets de différentes natures en fonction de leur couleur, nous faisait découvrir un concept mathématique fondamental : la notion de relation d'équivalence. Encore une idée concrète, que l'on retrouve dans des concepts hautement abstraits tels que les ensembles quotients, l'arithmétique modulaire ou la théorie des groupes.*

On pourra s'étonner que les mathématiques soient parfois si proches de nous et qu'elles paraissent à d'autres moments si éloignées de notre sens du concret... tout en reposant souvent sur des idées similaires. Doit-on y voir un caractère universel de la science mathématique ? un lien étroit entre théories et perception du monde ? Quoi qu'il en soit, tous ces exemples mettent en avant des démarches propres aux mathématiques :

- *la nécessité de « donner vie mathématique » aux objets que l'on manipule,*
- *un édifice de vérités mathématiques écrites, vérifiées, archivées et disponibles, qui sont toutes établies par des preuves (à l'exception de quelques axiomes -énoncés que l'on admet-),*
- *des règles du jeu claires, précises et communes.*

Parmi les points primordiaux figure ainsi la construction d'objets abstraits, tels que : fonctions, nombres rationnels, nombres réels, groupes, points d'un plan, espaces vectoriels, polynômes, etc (note [1])... Mais, pour être manipulés de façon rigoureuse et licite, ces objets doivent êtres placés dans des lieux, des cadres conceptuels, et acquérir ainsi leur identité mathématique : ces lieux, ce sont ***les ensembles****, dont les objets deviennent des* ***éléments.***
Il ne faudrait pas croire que l'on peut faire tout et n'importe quoi avec ces ensembles : les règles auxquelles ils sont soumis font l'objet de traités théoriques, qui dépassent rapidement le cadre de nos programmes de MPSI-MPII. Dans ce mini-cours, notre objectif sera essentiellement d'énumérer quelques règles élémentaires de manipulation .

1. *En MPSI-MPII, à l'exception des courbes elliptiques, tous les concepts cités dans cette présentation pourront être abordés en cours, TD, séances de TIPE ou d'approfondissement.*

– La notion d'ensemble –

Un **ensemble** E est une collection d'objets ; on saura dire d'un objet donné x s'il est **élément de** (s'il **appartient à**) cet ensemble : si c'est le cas, on note $x \in E$ (« x appartient à E »). On note $x \notin E$ (« x n'appartient pas à E ») pour signifier *non* $(x \in E)$ i.e. que l'objet x n'est pas élément de E. Cette collection peut être vide : aucun objet n'appartient à E ; E est alors appelé **ensemble vide** et noté $\varnothing$.

Quelques classiques :

- Les ensembles de nombres usuels :
  - $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels
  - $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs
  - $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux
  - $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnel
  - $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
  - $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des droites du plan.

Mais tout n'est pas si simple :

- Parfois, trop c'est trop, et vouloir construire des ensembles partout peut mener à des démarches illicites ! Par exemple, considérer l'ensemble de tous les ensembles mène à une contradiction (c'est le *paradoxe de Russel*).
- Étant donnée une famille d'ensembles non vides, il paraît naturel de pouvoir piocher un élément dans chacun d'eux pour construire un nouvel ensemble. Pourtant, cette démarche ne va pas de soi : un axiome est nécessaire pour la légitimer (c'est l'*axiome du choix*).

Les notations utilisées pour un ensemble sont variées :

- On désigne parfois par une lettre un ensemble particulier, que l'on cite lors d'une rédaction : l'ensemble E des entiers naturels pairs.
- Un ensemble peut être défini par l'énumération de ses éléments, entre accolades. Par exemple : $\{1, 4, 9, 16\}$ ou encore $\{2k ;\ k \in \mathbb{N}\}$, qui n'est autre que l'ensemble E ci-dessus.
- Un ensemble peut aussi être décrit par une propriété caractéristique de ses éléments. Par exemple : $\left\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ n^2 = 2k\right\}$, qui (de manière moins apparente) désigne encore l'ensemble des entiers naturels pairs. Là encore, les accolades sont de rigueur. Cet exemple se lit : « l'ensemble des entiers naturels n tels qu'il existe un entier naturel k pour lequel $n = k^2$ ». Le symbole $\exists$ est le « quantificateur existentiel » ; il se lit « il existe » et signifie « il existe au moins un ... ».
- Lorsque cela n'engendre pas d'ambiguïté, on peut utiliser des points de suspension et noter, par exemple $\{0, 2, 4, 6, \cdots, 100\}$, ou encore $\{0, 2, \cdots, 2n, \cdots\}$.

Passons maintenant à la notion de sous-ensemble.

Définition. Soient E et F des ensembles. On dit que F **est un sous-ensemble de** E, ou que F **est une partie de** E, ou encore que F **est inclus dans** E, lorsque tout élément de F est élément de E. On note alors $F \subset E$.

Remarque :

1) Soient E, F et G des ensembles. Si $F \subset G$ et $G \subset E$ alors $F \subset E$.

2) Soient E, F des ensembles. *non* $(F \subset E)$ signifie qu'**il existe** (au moins) un élément de F qui n'est pas élément de E.

3) Notons que l'ensemble vide $\varnothing$ est une partie de E ($\varnothing \subset E$), peu importe l'ensemble E.

- Si E est un ensemble, alors les ensembles du type $\{x \in E \mid A(x)\}$ rencontrés précédemment sont des sous ensembles [2] de E.
- L'ensemble des fonctions polynomiales est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$.
- On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. En particulier la proposition $A(x)$ peut être fausse pour tout $x \in E$ (la proposition $A(x) : x \notin E$ par exemple), faisant de $\{x \in E \mid A(x)\}$ l'ensemble vide. **L'ensemble vide doit donc être considéré comme sous-ensemble de tout ensemble.** Il en est de même pour E car $E = \{x \in E \mid x \in E\}$

Deux ensembles E et F sont dits **égaux** lorsqu'ils ont les mêmes éléments. Ainsi $E = F$ lorsqu'on a $E \subset F$ et $F \subset E$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $E = \{\alpha\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, constitué d'un seul élément : c'est un **singleton**. Attention de ne pas confondre α et $\{\alpha\}$: l'un est un élément de $\mathbb{R}$, tandis que l'autre est une partie de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels sont respectivement les parties suivantes de $\mathbb{R}$:
$$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{Z},\ \exists p \in \mathbb{N},\ x = \frac{a}{10^p}\right\}$$
et
$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ \exists q \in \mathbb{N}^\star,\ x = \frac{p}{q}\right\}$$
- L'ensemble $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geqslant 0\right\}$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$. On peut vérifier que :
$$A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$
Voir plus bas pour des remarques générales sur l'union, l'intersection, etc...
- Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des points du plan et O un point de $\mathcal{P}$, alors $\{M \in \mathcal{P} \mid OM = 2\}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}$: c'est le cercle de centre O et de rayon 2. Et $\{M \in \mathcal{P} \mid OM = -3\}$ est aussi une partie de $\mathcal{P}$: c'est l'ensemble vide !
- Si a est un réel et C un cercle du plan , alors $E = \{C, a\}$ est un ensemble [3].
- Des ensembles que l'on rencontre lors de l'étude des fonctions : l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}^\star$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est égale à elle-même, l'ensemble des fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ avec a, b des réels quelconques...

3. Une première occasion de se dire : " on a le droit de faire ça ? " Eh bien oui !

– Opérations sur les ensembles –

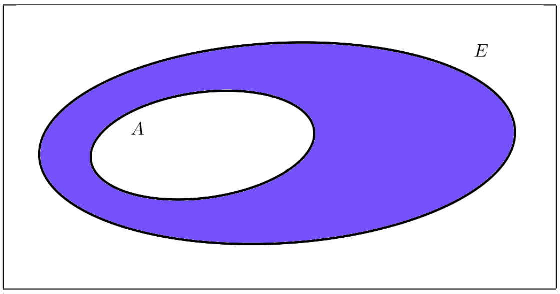
Dans ce paragraphe, on se donne un ensemble E.

Définition. Soient A et B des parties de E. On définit :

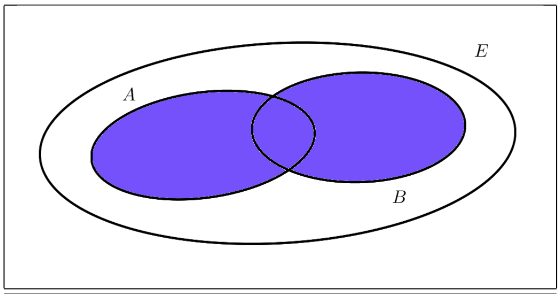
- **le complémentaire de** A **dans** E :
  $E - A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ encore noté $\overline{A}$, s'il n'y a pas ambiguïté sur E ;
- **l'union de** A **et** B : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
- **l'intersection de** A **et** B : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Ce sont trois parties de E.

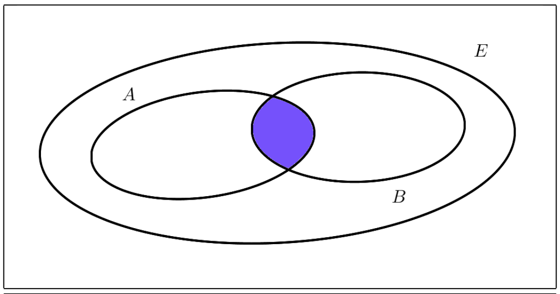
Les figures ci-dessous donnent une idée intuitive de ces opérations :



Complémentaire de A dans E



Union de A et de B



Intersection de A et de B

– Quelques Exercices –

Exercice 1. Etant donné $q \in \mathbb{N}$, on note E_q la partie de $\mathbb{N}$ constituée des multiples de q.

1) Donner E_0 et E_1 ainsi que $\overline{E_2}$.

2) Prouver que $E_4 \subset E_2$. A quelle condition a-t-on plus généralement $E_p \subset E_q$ si p, q sont deux entiers naturels ?

3) Déterminer $E_2 \cap E_3$ et $E_4 \cap E_6$.

4) Est-il vrai que $15 \in E_4 \cup E_{11}$?

Exercice 2. Soit $E = \{a, b, c\}$. Lesquelles de ces affirmations sont valides :
1) $a \in E$ **2)** $a \subset E$ **3)** $\{a\} \subset E$ **4)** $\{a\} \in E$ **5)** $\{\varnothing\} \in E$ **6)** $\{\varnothing\} \subset E$ **7)** $\varnothing \in E$ **8)** $\varnothing \subset E$ **9)** $E \subset E$ **10)** $E \in E$

Exercice 3. Etant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties (on en reparlera...).

1) Soit $E = \{a\}$ un singleton. Donner l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

2) Même question si $E = \{a, b\}$ est un ensemble à deux éléments.

3) Si $E = \{a, b, c\}$ est un ensemble à trois éléments, combien E possède-t-il de parties ?

4) Si E est un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$), combien $\mathcal{P}(E)$ possède-t-il d'éléments ?

Exercice 4. Soient E un ensemble, A et B des parties de E.

1) Montrer que $A \cup B = A$ si, et seulement si, $B \subset A$.

2) Montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.

3) On suppose $A \subset B$. Quel lien existe-t-il entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

4) Exprimer $\overline{A \cap B}$ à l'aide de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 5. Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E telles que $A \subset B \cap C$ et $B \cup C \subset A$. Montrer que $A = B = C$.

– Corrections des Exercices –

Exercice 1. Etant donné $q \in \mathbb{N}$, on note E_q la partie de $\mathbb{N}$ constituée des multiples de q.

1) Donner E_0 et E_1 ainsi que $\overline{E_2}$.

2) Prouver que $E_4 \subset E_2$. A-t-on $E_4 = E_2$?

3) À quelle condition a-t-on plus généralement $E_p \subset E_q$ si p, q sont deux entiers naturels ?

4) Déterminer $E_2 \cap E_3$ et $E_4 \cap E_6$.

5) Est-il vrai que $15 \in E_4 \cup E_{11}$?

▹ Avant de commencer, notons que, pour $q \in \mathbb{N}$ donné, on peut écrire l'ensemble E_q de plusieurs façons. Parmi elles :

- $E_q = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est un multiple de } q\}$: « ensemble des entiers naturels n tels que n est un multiple de q » ,
- $E_q = \{n \in \mathbb{N} \mid q \text{ divise } n\}$: « ensemble des entiers naturels n tels que q divise n (au sens « est un diviseur de n ») »,
- $E_q = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = kq\}$: « ensemble des entiers naturels n tels qu'il existe un entier k pour lequel $n = kq$ »,
- $E_q = \{kq, k \in \mathbb{N}\}$, version condensée de la précédente : « ensemble des éléments de la forme kq avec k parcourant $\mathbb{N}$ ».

1) On a :
- $E_0 = \{k \times 0, k \in \mathbb{N}\} = \{0\}$,
- $E_1 = \{k \times 1, k \in \mathbb{N}\} = \{k, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$
- $\overline{E_2} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin E_2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ non } (n \text{ est un multiple de } 2)\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est impair}\}$: $\overline{E_2}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs, on peut l'écrire par exemple $\overline{E_2} = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$.

2) $E_4 \subset E_2$ car pour $n \in \mathbb{N}$:
- **1ère tournure** : si $n \in E_4$, c'est-à-dire n est un multiple de 4, alors n est un multiple de 2 (car 4 est un multiple de 2), c'est-à-dire que $n \in E_2$.

- **2ème tournure** : si $n \in E_4$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$ donc $n = 2 \times (2k)$ et ainsi il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k'$ (il suffit de poser $k' = 2k$), donc $n \in E_2$.
- **3ème tournure** : si $n \in E_4$, 4 divise n, or 2 divise 4, donc 2 divise n, donc $n \in E_2$.

Non, **on n'a pas** $E_4 = E_2$ car il existe un $n \in E_2$ tel que $n \notin E_4$: $n = 2$ par exemple.

3) Montrons que $E_p \subset E_q$ **si et seulement si** p est un multiple de q :

- Si $E_p \subset E_q$, alors, comme $p \in E_p$, on a $p \in E_q$ i.e. p est un multiple de q.
- Réciproquement, si p est un multiple de q, alors $E_p \subset E_q$ car :
  pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \in E_p$, n est un multiple de p, p est un multiple de q, donc n est un multiple de q i.e. $n \in E_q$.

Conclusion : une condition **nécessaire et suffisante** pour que $E_p \subset E_q$ est : p **est un multiple de** q**.**

4) Déterminer $E_2 \cap E_3$ et $E_4 \cap E_6$.

- $E_2 \cap E_3 = E_6$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \in E_2 \cap E_3 &\Leftrightarrow ((n \in E_2) \text{ et } (n \in E_3)) \text{ (par définition de l'intersection de deux ensembles)} \\ &\Leftrightarrow (n \text{ est un multiple de 2 et } n \text{ est un multiple de 3}) \\ &\Leftrightarrow n \text{ est un multiple de 6 (justification plus bas de ce passage)} \\ &\Leftrightarrow n \in E_6 \end{aligned}$$

  car, en effet (justification de l'avant dernière équivalence) :
  - si n est un multiple de 6, alors puisque 6 est multiple de 2 et de 3, n est un multiple de 2 et de 3,
  - si n est un multiple de 2 et de 3, alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2k$ et $n = 3k'$, alors $3k' = 2k$ est pair, donc, puisque 3 est impair, k' est pair, il existe donc $k'' \in \mathbb{N}$ tel que $k' = 2k''$ et donc $n = 6k''$, n est un multiple de 6.
- $E_4 \cap E_6 = E_{12}$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n \text{ est un multiple de 4 et } n \text{ est un multiple de 6}) \Leftrightarrow n \text{ est un multiple de 12}$$

  en effet :
  - si n est un multiple de 12, alors puisque 12 est multiple de 4 et de 6, n est un multiple de 4 et de 6,
  - si n est un multiple de 4 et de 6, alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $n = 4k$ et $n = 6k'$, alors $6k' = 4k$ donc $3k' = 2k$ est pair, donc k' est pair, il existe donc $k'' \in \mathbb{N}$ tel que $k' = 2k''$ et donc $n = 12k''$, n est un multiple de 12.

5) **Non** car $15 \in E_4 \cup E_{11}$ signifie (par définition de la réunion de deux ensembles) que $15 \in E_4$ ou $15 \in E_{11}$, or ni l'un ni l'autre n'est vrai : $15 \notin E_4$ car 15 n'est pas un multiple de 4, et $15 \notin E_{11}$ car 15 n'est pas un multiple de 11.

Exercice 2. Soit $E = \{a, b, c\}$. Lesquelles de ces affirmations sont valides :
1) $a \in E$ **2)** $a \subset E$ **3)** $\{a\} \subset E$ **4)** $\{a\} \in E$ **5)** $\{\varnothing\} \in E$ **6)** $\{\varnothing\} \subset E$ **7)** $\varnothing \in E$ **8)** $\varnothing \subset E$ **9)** $E \subset E$ **10)** $E \in E$

Seules les affirmations **1), 3), 8) et 9) sont valides.**

Exercice 3. Etant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties (on en reparlera...).

1) Soit $E = \{a\}$ un singleton. Donner l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

2) Même question si $E = \{a, b\}$ est un ensemble à deux éléments.

3) Si $E = \{a, b, c\}$ est un ensemble à trois éléments, combien E possède-t-il de parties ?

4) Si E est un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$), combien $\mathcal{P}(E)$ possède-t-il d'éléments ?

1) Les parties (i.e. les sous-ensembles) de l'ensemble $\{a\}$ sont $\varnothing$ et $\{a\}$; ainsi $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$.

2) Dans l'ensemble $\{a, b\}$ on peut constituer exactement 4 parties (deux à deux différentes) : $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{a, b\}$; ainsi $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

3) Dans l'ensemble à 3 éléments $\{a, b, c\}$ il y a exactement 8 parties :

- ▹ la partie vide (sous-ensemble à 0 élément) : il y en a une, c'est $\varnothing$,
- ▹ les sous-ensembles à 1 élément (les singletons) : il y en a 3, qui sont $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$,
- ▹ les sous-ensembles à 2 éléments : il y en a 3, qui sont $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$,
- ▹ les sous-ensembles à 3 éléments : il y en a un, c'est $\{a, b, c\}$.

4) **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un ensemble à n éléments possède 2^n parties, autrement dit, $\mathcal{P}(E)$ possède 2^n éléments** : prouvons-le par récurrence.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : « tout ensemble à n éléments possède 2^n parties ».

- ▹ On a $(\mathcal{P}_0)$: si E est un ensemble à 0 éléments, E est donc l'ensemble vide, qui possède une seule partie, la partie vide (autrement dit $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$) ; ainsi il y a bien $1 = 2^0$ partie dans E.
- ▹ Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on a $(\mathcal{P}_n)$, alors, pour tout ensemble E à $n + 1$ éléments :
  - comme $n + 1 \geqslant 1$, E n'est pas vide : prenons un élément $a \in E$ fixé.
  - Les parties de E sont alors de l'un des deux types distincts suivants :
    - ∗ celles qui ne contiennent pas a : il y en a exactement autant que de parties de $E - \{a\}$, soit 2^n d'après $(\mathcal{P}_n)$ puisque $E - \{a\}$ possède n éléments,
    - ∗ celles qui contiennent a : elles sont de la forme $\{a\} \cup A$, A parcourant l'ensemble des parties de $E - \{a\}$, il y en a aussi 2^n.

    Au total, E possède $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ parties.

  On a donc $(\mathcal{P}_{n+1})$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(\mathcal{P}_n)$.

Exercice 4. Soient E un ensemble, A et B des parties de E.

1) Montrer que $A \cup B = A$ si, et seulement si, $B \subset A$.

2) Montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.

3) On suppose $A \subset B$. Quel lien existe-t-il entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

4) Exprimer $\overline{A \cap B}$ à l'aide de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

1)
- ▹ Hypothèse : $A \cup B = A$

  On a toujours $B \subset A \cup B$ donc $\underline{B \subset A}$
- ▹ Hypothèse : $B \subset A$
  - On a $A \subset A \cup B$ (cette inclusion est vraie en toute généralité).
  - On a aussi $A \cup B \subset A$ car pour $x \in E$: si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$; or $B \subset A$, donc, dans les deux cas, $x \in A$.

  Par double inclusion

$$\boxed{A \cup B = A}$$

2) **2.a)** Hypothèse : $A \cap B = A$

Comme $A \cap B \subset B$ et qu'ici $A \cap B = A$, il vient que $\underline{A \subset B}$

2.b) Hypothèse : $A \subset B$.

- ▹ On a $A \cap B \subset A$ (cette inclusion est vraie en toute généralité).
- ▹ On a aussi $A \subset A \cap B$ car pour $x \in E$: si $x \in A$ alors, comme $A \subset B$, $x \in B$ aussi ; ainsi $x \in A$ et $x \in B$, donc $x \in A \cap B$.

Par double inclusion

$$\boxed{A \cap B = A}$$

3) Lorsque $A \subset B$ on a $\boxed{\overline{B} \subset \overline{A}}$, en effet, pour $x \in E$: si $x \in \overline{B}$, on n'a pas $x \in A$ car sinon $x \in B$ (puisque $A \subset B$!), ainsi $x \in \overline{A}$.

4) On a $\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$ car pour $x \in E$:

$$non(\ x \in A \cap B\ ) \Leftrightarrow non(\ x \in A \ et\ x \in B\ ) \Leftrightarrow (non(\ x \in A\ ))\ \ ou\ \ (non(\ x \in B\ )) \Leftrightarrow \left(x \in \overline{A}\ ou\ x \in \overline{B}\right)$$

Exercice 5. Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E telles que $A \subset B \cap C$ et $B \cup C \subset A$. Montrer que $A = B = C$.

- ▹ On montre tout d'abord que $\boxed{A = B}$ en montrant que $A \subset B$ et $B \subset A$:
  - – on a $A \subset B \cap C$ (par hypothèse), or $B \cap C \subset B$, donc $A \subset B$;
  - – on a $(B \cup C) \subset A$ (par hypothèse), or $B \subset B \cup C$, donc $B \subset A$.
- ▹ De la même façon on a $\boxed{A = C}$.