Lycée Thiers

Mini-Cours

MPSI-MPII

RÉCURRENCE

Le logo apparaîtra de temps en temps : il vous invite à pousser un peu plus loin votre réflexion, à échaffauder une démonstration, à détailler un calcul...

– De quoi s'agit-il ? –

On est souvent conduit, en mathématiques, à examiner si une certaine propriété, dont l'énoncé fait intervenir un entier naturel n, est vraie pour toutes les valeurs de n ou non.

A titre d'exemple, intéressons-nous à la propriété suivante :

$\mathcal{P}(n)$: « la somme des n premiers nombres impairs est un carré parfait »

et posons-nous la question : $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie pour tout entier $n \geqslant 1$?

On peut aisément vérifier que c'est le cas si $1 \leqslant n \leqslant 4$:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

En poursuivant le test avec de plus grandes valeurs de n, disons jusqu'à $n = 20$ par exemple, on constaterait que cette propriété persiste pour toutes ces valeurs.

Mais cela nous autorise-t-il à affirmer qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$? Prudence ...

Il existe en effet des propriétés qui sont vraies pour les premières valeurs de n, éventuellement jusqu'à des seuils assez élevés, mais qui pourtant ne le sont pas pour tout n.

En voici un exemple ...

Considérons la propriété :

$\mathcal{Q}(n)$: « l'entier $n^2 + n + 41$ est un nombre premier »

Si l'on note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, on constate que :

$$0^2 + 0 + 41 = 41 \in \mathbb{P}$$

$$1^1 + 1 + 41 = 43 \in \mathbb{P}$$

$$2^2 + 2 + 41 = 47 \in \mathbb{P}$$

$$3^2 + 3 + 41 = 53 \in \mathbb{P}$$

et ça continue !...

$$\cdots$$

$$37^2 + 37 + 41 = 1447 \in \mathbb{P}$$

$$38^2 + 38 + 41 = 1523 \in \mathbb{P}$$

$$39^2 + 39 + 41 = 1601 \in \mathbb{P}$$

Cependant, pour $n = 40$, ça ne marche pas ; en effet :

$$40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2 \notin \mathbb{P}$$

Il serait donc précieux de disposer d'un outil permettant d'établir qu'une propriété est vraie pour <u>tout</u> $n \in \mathbb{N}$ (ou, plus généralement, pour tout $n \geqslant N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$).
Bonne nouvelle : un tel outil existe !

– Le principe de récurrence –

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels possède les trois propriétés fondamentales suivantes :

- ⋆ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément $(\mathcal{A}_1)$
- ⋆ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément $(\mathcal{A}_2)$
- ⋆ L'ensemble $\mathbb{N}$ ne possède pas de plus grand élément $(\mathcal{A}_3)$

Nous considérons, dans le cadre de notre cours de MPSI, que ces propriétés sont des « axiomes », c'est-à-dire des énoncés vrais ***a priori***.
Ces énoncés ne sont donc pas à démontrer : ce sont pour nous des « vérités premières ».
On peut alors établir le :

Théorème. *(Principe de récurrence)*
Soit X une partie de $\mathbb{N}$, telle que :

$$0 \in X \qquad \textit{et} \qquad \forall n \in X,\ n+1 \in X$$

Alors $X = \mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons $X \neq \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{N} - X$ (qui désigne l'ensemble des entiers naturels n'appartenant pas à X) est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui possède d'après l'axiome $\mathcal{A}_1$ un plus petit élément, noté p.
Comme $0 \in X$, alors $p \geqslant 1$. Intéressons-nous à l'entier naturel $p - 1$.
Vue la définition de p, il est clair que $p - 1 \in X$. Vu que $p = (p-1) + 1$, on en déduit que $p \in X$: c'est absurde !
On conclut donc que $X = \mathbb{N}$. □

– Démonstrations par récurrence –

Proposition. *Etant donnée une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui porte sur un entier $n \in \mathbb{N}$, si les deux conditions suivantes sont remplies :*

- ⋆ *$\mathcal{P}(0)$ est vraie* — *Initialisation*
- ⋆ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie* — *Hérédité*

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut « sentir » assez facilement que cet énoncé dit vrai ...

En effet : comme $\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation), alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après l'hérédité. Mais comme $\mathcal{P}(1)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(2)$ aussi, pour la même raison ! Et ainsi de suite ...

Couplée à l'initialisation, la condition d'hérédité permet donc de propager celle-ci à tous les entiers.

Cela dit, cette *explication* ne constitue pas une ***preuve*** ...

Démonstration. Considérons :

$$X = \text{l'ensemble des entiers naturels } n \text{ pour lesquels } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}$$

Les hypothèses du théorème indiquent que le principe de récurrence s'applique à X. En effet : $0 \in X$ puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie. De plus, si $n \in X$, autrement dit, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et donc $n+1 \in X$.
Il s'ensuit que $X = \mathbb{N}$. □

Une légère modification de ce qui précède donne l'énoncé plus général suivant :

Proposition. *Soit une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui porte sur un entier $n \in \mathbb{N}$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont remplies :*

- ⋆ *$\mathcal{P}(N)$ est vraie* — *Initialisation*
- ⋆ *Pour tout entier $n \geqslant N$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie* — *Hérédité*

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant N$.

Sauriez-vous établir cette dernière proposition ?

Passons à des exemples, classiques et fondamentaux, de démonstrations par récurrence ... D'autres exemples – un peu moins classiques – suivront.

– Somme des n premiers entiers –

Alignons des objets (des billes, des allumettes, ... peu importe) sur une table de la manière suivante :

1 objet sur une première rangée, 2 objets sur la suivante, puis trois, puis quatre , etc ... jusqu'à une n–ème et dernière rangée comportant n objets.

De combien d'objets disposera-t-on en tout ? Le schéma ci-dessous illustre la situation, dans le cas particulier $n = 6$:

En notant S_n le nombre total d'objets (la présence, en indice, de la lettre n nous rappelle que cet entier dépend de n), on a donc :

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$

On peut calculer les premières valeurs et les reporter dans un tableau :

n	1	2	3	4	5	6
S_n	1	3	6	10	15	21

Un examen attentif de ces valeurs doit mener à une observation-clef. Il semble bien que l'on ait, pour tout $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\star)$$

C'est visiblement le cas pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Est-ce vrai au-delà ?

Une petite preuve par récurrence est le tour sera joué :

- ⋆ l'initialisation est largement faite ! (la vérification pour $n = 1$ suffit).
- ⋆ supposons l'égalité $(\star)$ vraie pour un certain $n \geqslant 1$. Alors :

  $$S_{n+1} = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = S_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

  et donc :

  $$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  comme souhaité !

On retiendra donc :

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Remarque. Ce résultat peut tout à fait être établi autrement ! On peut en effet observer que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1 + 2 + \cdots + (n-1) + n) + (n + (n-1) + \cdots + 2 + 1) \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$2S_n = n(n+1)$$

d'où la conclusion.

On retiendra que si la récurrence est un moyen performant pour démontrer certains résultats portant sur les entiers naturels, elle ne constitue certainement pas la seule voie envisageable en général !

– Somme des n premiers nombres impairs –

Qui est le n−ème nombre impair ?

Si l'on admet que le premier nombre impair est 1, alors le second est 3, le troisième est 5, etc ...

On parvient rapidement à formuler l'énoncé suivant :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \text{ le } n\text{−ème nombre impair est } 2n-1}$$

Cette affirmation peut aller de soi. Mais à supposer qu'on nous en demande une **preuve** ... comment procéder ? La réponse s'impose désormais : par récurrence !

- ⋆ Pour $n = 1$, c'est vrai car le premier nombre impair est effectivement $2 \times 1 - 1$.
- ⋆ Supposons que, pour un certain $n \geqslant 1$, le n−ème nombre impair soit $2n-1$. Alors, le $(n+1)$ −ème est :

$$(2n-1)+2 = 2n+1 = 2(n+1)-1$$

Revenons maintenant à la propriété $\mathcal{P}$ évoquée au début de ce texte et montrons, par récurrence, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2}$$

Cette égalité est vraie pour $n = 1$, ce qui assure l'initialisation. Ensuite, en la supposant vraie pour un certain $n \geqslant 1$, on voit que :

$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

comme souhaité.

Remarque. Là encore, une autre approche est envisageable ! On peut s'appuyer sur ce que nous avons prouvé à la section précédente. En effet, pour tout $n \geqslant 1$:

$$1+3+\cdots+(2n-1) \quad = \quad (1+2+3+4\cdots+(2n)) - (2+4+6+\cdots+(2n))$$

Autrement dit, si l'on note :

- ⋆ S_n la somme de tous les entiers de 1 à n,
- ⋆ T_n la somme des n premiers impairs, alors :

$$T_n = S_{2n} - 2S_n = \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) = n^2$$

– Sommes géométriques –

Proposition. *Soit $q \in \mathbb{R} - \{1\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration. Fixons $q \in \mathbb{R} - \{1\}$. Pour $n = 0$, on a bien :

$$1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$$

Si l'on suppose l'égalité vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$1+q+\cdots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

ce qui établit le résultat voulu, par récurrence. □

Remarque. Et si $q = 1$? Il est clair que la somme étudiée comporte $n+1$ termes, tous égaux à 1. Cette somme est donc égale à $n+1$.

– Peut-on se passer de l'initialisation ? –

Considérons le cas de la propriété :

$$\mathcal{R}(n) : 4^n + 1 \text{ est multiple de } 3$$

et supposons que celle-ci soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Pour cet entier n là, on peut donc écrire :

$$4^n + 1 = 3K \qquad \text{avec } K \in \mathbb{N}$$

mais alors :

$$4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1 = 4(3K - 1) + 1 = 3(4K - 1)$$

ce qui prouve que $4^{n+1} + 1$ est, à son tour, multiple de 3.

Pourtant :

$$\begin{array}{ll} 4^0 + 1 = 2 & : \text{pas multiple de } 3 \\ 4^1 + 1 = 5 & : \text{pas multiple de } 3 \\ 4^2 + 1 = 17 & : \text{pas multiple de } 3 \\ 4^3 + 1 = 65 & : \text{pas multiple de } 3 \end{array}$$

En fait, on peut continuer ... ça ne marchera jamais ! Et pour cause :

Comme $4 \equiv 1 \pmod 3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n \equiv 1 \pmod 3$ et donc

$$4^n + 1 \equiv 2 \pmod 3$$

ce qui montre que le reste de la division de $4^n + 1$ par 3 est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, non nul. Bref :

Sans l'initialisation, l'hérédité est impuissante !

Au passage, quels sont les entiers $p \geqslant 2$ pour lesquels la propriété

$$\mathcal{P}_n \ : \ (p+1)^n + 1 \text{ est multiple de } p$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

– Pour aller (un peu) plus loin ... –

Certaines propriétés peuvent être établies à l'aide de ce qu'on appelle une « récurrence d'ordre deux ». Voyons de quoi il s'agit ...

Proposition. *Etant donnée une propriété $\mathcal{P}(n)$ qui porte sur un entier $n \in \mathbb{N}$, si les deux conditions suivantes sont remplies :*

- ⋆ *$\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies* — *Initialisation*
- ⋆ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, si $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie* — *Hérédité*

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Considérons la ***suite de Fibonacci***, qui est définie par les relations :

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

et montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

On constate que :

$$F_0 = 0 < 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^0 \qquad \text{et} \qquad F_1 = 1 < \frac{5}{3}$$

Par ailleurs, si pour un certain $n \geqslant 1$, on a $F_{n-1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$ et $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$, alors :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < \frac{5^n}{3^n} + \frac{5^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{5^{n-1} \times 24}{3^{n+1}} < \frac{5^{n-1} \times 25}{3^{n+1}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$$

– Quelques exercices pour s'entraîner –

Exercice 1. *(Inégalité de Bernoulli)*
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et soit ϵ un réel strictement positif. Alors :

$$(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon$$

Exercice 2. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[\,,\ \ln(1+x) \leqslant x$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln(n)$$

Exercice 3. Soient a, b des réels (non nécessairement entiers) tels que $a+b$ et ab soient entiers. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n + b^n$ est un entier.
Peut-on affirmer que a et b sont entiers ?

Exercice 4. *(Une récurrence qui cloche)*
On se propose de montrer qu'étant donnés n points distincts du plan, ces points sont nécessairement alignés ! Voici la preuve proposée pour cet étrange résultat ...
Pour $n = 1$ et $n = 2$, c'est vrai !
Supposons le résultat établi pour un certain $n \geqslant 2$ et soient $M_1, \cdots, M_{n+1}$ points du plan. Par hypothèse de récurrence, les points $M_1, \cdots, M_n$ sont alignés : notons D la droite qui les porte. Pour les mêmes raisons, les points $M_2, \cdots, M_{n+1}$ sont tous sur une même droite D'. Mais comme M_2 et M_n appartiennent simultanément à D et à D', on voit que $D = D'$. Ainsi, les points $M_1, \cdots, M_{n+1}$ sont alignés.
Diable ! Mais où est l'erreur !?

– Pour s'entraîner (correction) –

Exercice 1. (Inégalité de Bernoulli)
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et soit ϵ un réel strictement positif. Alors :

$$(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon$$

Par récurrence ($\epsilon > 0$ est fixé). Pour $n = 2$, on constate que :

$$(1+\epsilon)^2 = 1 + 2\epsilon + \epsilon^2 > 1 + 2\epsilon$$

Supposons maintenant que $(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon$, pour un certain entier $n \geqslant 2$. En multipliant chaque membre de cette inégalité par $1+\epsilon$ (qui est strictement positif, ce qui permet de maintenir l'inégalité stricte dans le même sens), on obtient :

$$(1+\epsilon)^{n+1} > (1+n\epsilon)(1+\epsilon)$$

c'est-à-dire :

$$(1+\epsilon)^{n+1} > 1 + (n+1)\,\epsilon + n\epsilon^2$$

et donc, à plus forte raison :

$$(1+\epsilon)^{n+1} > 1 + (n+1)\,\epsilon$$

comme souhaité.

Exercice 2. Montrer que :

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leqslant x$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln(n)$$

Considérons la fonction

$$f : \left]-1, +\infty\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \ln(1+x)$$

f est dérivable et, pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

ce qui prouve que $f(x)$ est du signe de x. Ainsi, f décroît sur $\left]-1, 0\right]$ et croît sur $\left[0, +\infty\right[$, donc présente en $x = 0$ un minimum.

Comme ce minimum est égal à $f(0) = 0$, on peut conclure que $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f(x) \geqslant 0$; autrement dit :

$$\boxed{\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ \ln(1+x) \leqslant x} \qquad (\star)$$

Montrons maintenant par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln(n) \qquad (\star\star)$$

Cette inégalité est vraie pour $n = 2$, car en choisissant $x = -\frac{1}{2}$, la relation $(\star)$ donne $\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \ln(2)$.

Supposons maintenant que l'inégalité ($\star\star$) soit vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$. En ajoutant $\frac{1}{n+1}$ à chaque membre, on voit que :

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n+1}$$

et il suffirait, pour conclure, de prouver que :

$$\ln(n) + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)$$

c'est-à-dire :

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

or ceci résulte (encore) de ($\star$) en choisissant $x = -\frac{1}{n+1}$.

Exercice 3. Soient a, b des réels (non nécessairement entiers) tels que $a+b$ et ab soient entiers. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n + b^n$ est un entier.
Peut-on affirmer que a et b sont entiers ?

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = a^n + b^n$. Clairement, $u_0 \in \mathbb{N}$ et $u_1 \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$u_{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab\left(a^{n-1} + b^{n-1}\right) = (a+b)\,u_n - ab u_{n-1}$$

donc, si l'on suppose que, pour un certain $n \geqslant 1$, les nombres réels u_{n-1} et u_n sont entiers, on voit que c'est aussi le cas de u_{n+1}.

On a ainsi montré, via une récurrence d'ordre 2, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}}$$

Il n'est pas nécessaire que a et b soient entiers pour que $a+b$ et ab le soient. Exemple :

$$a = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = 1 - \sqrt{2}$$

Exercice 4. *(Une récurrence qui cloche)*
On se propose de montrer qu'étant donnés n points distincts du plan, ces points sont nécessairement alignés ! Voici la preuve proposée pour cet étrange résultat ...
Pour $n = 1$ et $n = 2$, c'est vrai !
Supposons le résultat établi pour un certain $n \geqslant 2$ et soient $M_1, \cdots, M_{n+1}$ points du plan. Par hypothèse de récurrence, les points $M_1, \cdots, M_n$ sont alignés : notons D la droite qui les porte. Pour les mêmes raisons, les points $M_2, \cdots, M_{n+1}$ sont tous sur une même droite D'. Mais comme M_2 et M_n appartiennent simultanément à D et à D', on voit que $D = D'$. Ainsi, les points $M_1, \cdots, M_{n+1}$ sont alignés.
Diable ! Mais où est l'erreur ! ?

Dans cette pseudo-démonstration, il est implicitement supposé que les points M_2 et M_n sont distincts ... ce qui est faux si $n = 2$ (auquel cas les points $M_1, \cdots, M_{n+1}$ sont au nombre de trois).

D'ailleurs, chacun sait que l'énoncé :

« Etant donnés n points distincts du plan, ces points sont nécessairement alignés »

est faux pour $n = 3$.