

# Curvas de Bézier

*Notas de seminário de Iniciação Científica – UFMG*

*Rodney Josué Biezuner (Departamento de Matemática – rodney@mat.ufmg.br)*

*Breno Felipe Rodrigues de Jesus (Matemática Computacional)*

*9 de dezembro de 2014*

Curvas de Bézier são curvas paramétricas polinomiais no plano ou no espaço com as seguintes propriedades:

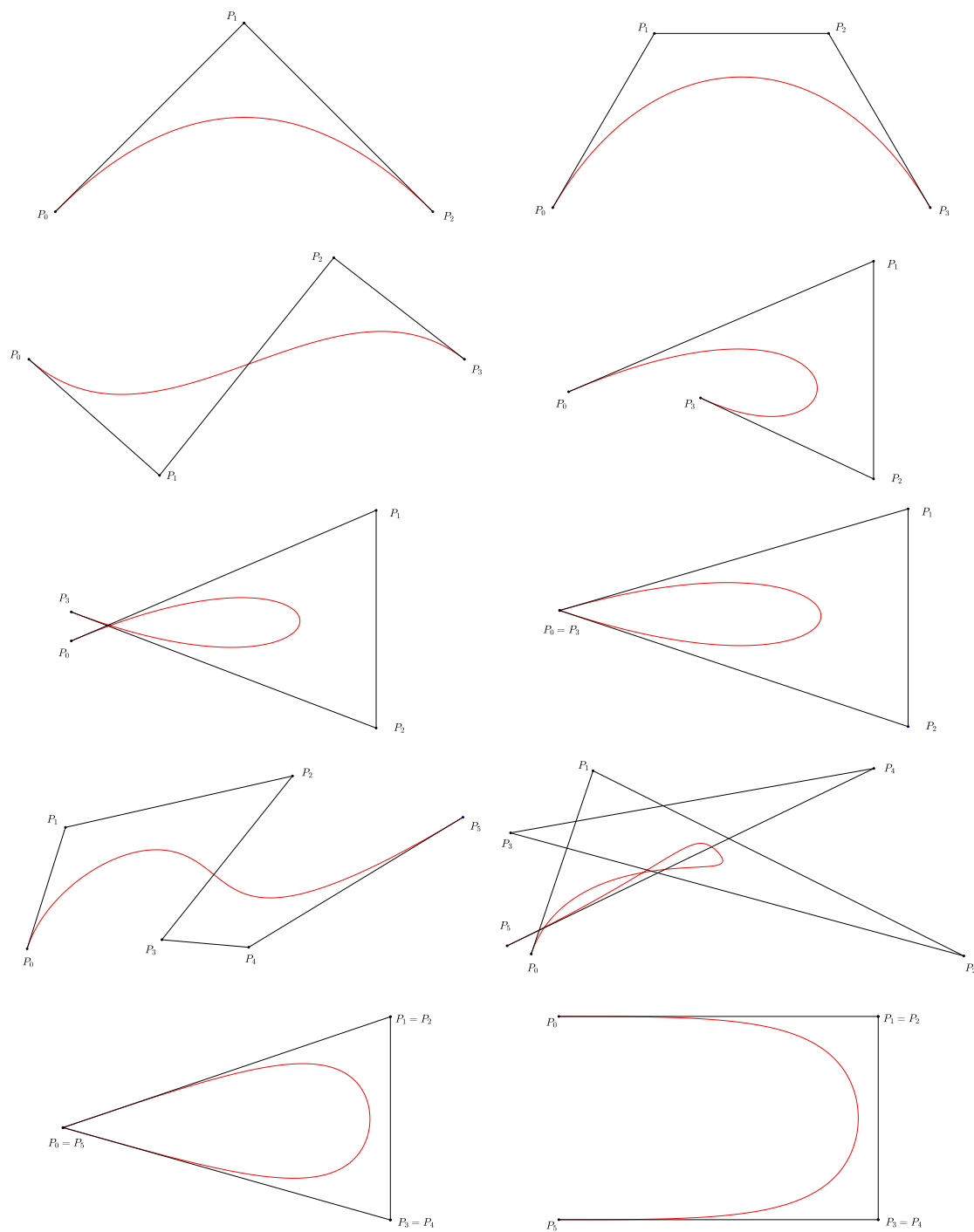
1. A curva aproxima uma curva poligonal dada, chamada *polígono de controle*, ou seja, a curva geralmente segue a forma do polígono de controle.
2. A curva tangencia o primeiro e o último segmentos do polígono de controle no primeiro e último vértices do polígono.
3. A curva está contida dentro do fecho convexo do polígono de controle.
4. A curva não oscila mais que o polígono de controle.
5. A curva é invariante sob transformações afins.

Mais especificamente, para um polígono de controle com  $n + 1$  vértices  $P_0 \dots P_n$ , a curva de Bézier é uma curva paramétrica polinomial de grau  $n$  da forma

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t),$$

onde os polinômios  $B_{k,n}$  são polinômios com propriedades especiais, chamados *polinômios de Bernstein*. Os vértices  $P_k$  podem ser vistos como *pesos*. Para aumentar o peso de um vértice basta repeti-lo; a curva de Bézier tenderá a aproximá-lo mais, isto é, a ficar mais próxima a um vértice repetido.

As curvas de Bézier foram desenvolvidas independentemente pelos engenheiros Paul de Casteljaeu da Citroën, em 1959, e Pierre Etienne Bézier da Renault, em 1962, para auxiliar no design e fabricação assistida por computador. O primeiro desenvolveu um algoritmo eficiente, numericamente estável, para calculá-las usado até hoje, mas sua pesquisa foi considerada segredo industrial pela empresa em que trabalhava durante algum tempo, de modo que foi o segundo que as popularizou. Os polinômios de Bernstein já existiam desde 1912, quando Sergei Natanovich Bernstein os usou para dar uma demonstração concreta do teorema de aproximação de Stone-Weierstrass. Atualmente, as curvas de Bézier são extensivamente usadas em computação gráfica na modelagem de curvas suaves, em animação, no design de interfaces e na produção de fontes. Curvas de Bézier quadráticas ou cúbicas são mais comumente usadas, já que polinômios de grau maior são computacionalmente mais custosos de calcular. Para formas mais complexas, muitas vezes são usadas curvas de Bézier por partes, isto é, curvas compostas de segmentos polinomiais de Bézier de grau baixo. Por exemplo, as fontes *TrueType* são curvas de Bézier por partes compostas de curvas de Bézier quadráticas; já os sistemas mais modernos como PostScript (usado em arquivos PDF), Metafont e SVG usam curvas de Bézier por partes compostas de curvas de Bézier cúbicas.

**Figura 1.1** Curvas de Bézier.

## 1.1 Polinômios de Bernstein

### 1.1.1 Definição

**1.1 Definição.** Os polinômios

$$B_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad (1.1)$$

são chamadas as **funções base de Bernstein de grau  $n$**  em  $[0, 1]$ .  $\square$

Em  $[a, b]$ , temos as *funções base de Bernstein generalizadas de grau  $n$*

$$B_{k,n}(a, b; t) = B_{k,n}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \binom{n}{k} \frac{(t-a)^k (b-t)^{n-k}}{(b-a)^n}, \quad (1.2)$$

para  $k = 0, \dots, n$ .

### 1.1.2 Propriedades

Os polinômios de Bernstein são positivos dentro do intervalo  $(0, 1)$ :

**1.2 Proposição.** Temos  $B_{k,n}(t) > 0$  para todo  $0 < t < 1$ , para  $k = 0, \dots, n$ .

**Prova:** Para  $t \in (0, 1)$ , temos  $t > 0$  e  $1-t > 0$ .  $\blacksquare$

A propriedade crucial das funções base de Bernstein de grau  $n$  é o fato que elas formam uma partição da unidade:

**1.3 Proposição.** Vale

$$\sum_{k=0}^n B_{k,n}(t) = 1. \quad (1.3)$$

**Prova:** Pelo teorema binomial de Newton, temos

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Escolhendo  $a = t$  e  $b = 1-t$ , segue que

$$1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

$\blacksquare$

**1.4 Proposição.** (Derivadas dos Polinômios de Bernstein) Vale

$$B'_{k,n}(t) = n[B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t)] \quad (1.4)$$

para  $k = 0, \dots, n$ , onde convencionamos  $B_{-1,n-1} \equiv 0$  e  $B_{n,n-1} \equiv 0$ .

**Prova:** Para  $k \neq 0, n$  temos

$$B'_{k,n}(t) = \binom{n}{k} \left[ kt^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k)t^k (1-t)^{n-k-1} \right].$$

Como

$$\binom{n}{k} k = \frac{n!}{k! (n-k)!} k = n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

e

$$\binom{n}{k} (n-k) = \frac{n!}{k! (n-k)!} (n-k) = n \frac{(n-1)!}{k! (n-k-1)!} = n \binom{n-1}{k},$$

segue que

$$B'_{k,n}(t) = n \left[ \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} - \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} \right],$$

donde o resultado.

Para  $k = 0$ , temos

$$B'_{0,n}(t) = \binom{n}{0} [-n(1-t)^{n-1}] = -n(1-t)^{n-1} = n \binom{n-1}{0} (1-t)^{n-1} = -n B_{0,n-1}(t),$$

enquanto que para  $k = n$  temos

$$B'_{n,n}(t) = \binom{n}{n} n t^{n-1} = n t^{n-1} = n \binom{n-1}{n-1} t^{n-1} = n B_{n-1,n-1}(t).$$

■

Os polinômios de Bernstein são *unimodais*, no sentido de que assumem exatamente um máximo no intervalo  $[0, 1]$ :

**1.5 Proposição.** *O máximo de  $B_{k,n}(t)$  é atingido em  $t = k/n$ , com*

$$B_{k,n}\left(\frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \frac{k^k (n-k)^{n-k}}{n^n}. \quad (1.5)$$

**Prova:** Usando o resultado anterior, escrevemos

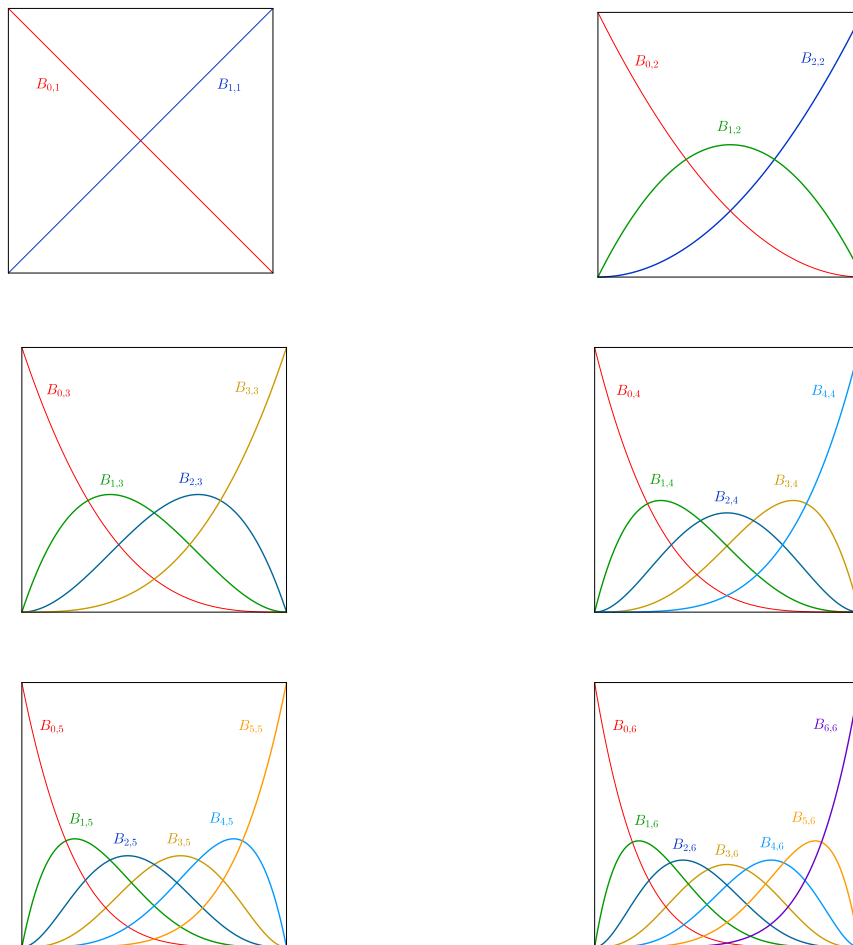
$$\begin{aligned} B'_{k,n}(t) &= \binom{n}{k} \left[ k t^{k-1} (1-t)^{n-k} - (n-k) t^k (1-t)^{n-k-1} \right] \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} [k(1-t) - (n-k)t] \\ &= \binom{n}{k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} [k - nt], \end{aligned}$$

de modo que  $B'_{k,n}(t) = 0$  para  $t = 0, 1, k/n$ . Para  $k \neq 0$  temos  $B_{k,n}(0) = B_{k,n}(1) = 0$  e como as funções base de Bernstein são positivas no interior do intervalo  $[0, 1]$ , segue que  $t = k/n$  é um ponto de máximo global para  $B_{k,n}$  em  $[0, 1]$ . Como  $B_{0,n}(t) = (1-t)^n$  e  $B_{n,n}(t) = t^n$ , claramente 0 e 1 são pontos de máximo globais, respectivamente, para estas duas funções.

Por fim,

$$B_{k,n}\left(\frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{k^k (n-k)^{n-k}}{n^n}.$$

■



**Figura 1.2** Polinômios de Bernstein.

**1.6 Proposição.** *As funções base de Bernstein de grau  $n$  formam uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$ .*

**Prova 1:** Como a dimensão deste espaço vetorial é  $n + 1$ , para provar o resultado basta provar que as  $n + 1$  funções base de Bernstein de grau  $n$  são linearmente independentes. Suponha que

$$\sum_{k=0}^n c_k B_{k,n}(t) = 0.$$

Mostraremos que  $c_k = 0$  para todo  $k$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n c_k B_{k,n}(t) &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} t^k \left[ \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 1^j (-t)^{n-k-j} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} t^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} t^{n-k-j} \\
 &= \sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} t^{n-j} \\
 &= \sum_{j=0}^n t^{n-j} \sum_{k=0}^{n-j} c_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j}.
 \end{aligned}$$

Defina

$$a_{kj} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j}.$$

Note que os coeficientes  $a_{kj}$  são positivos. Obtemos então que

$$\sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=0}^{n-j} a_{kj} c_k \right) t^{n-j} = 0.$$

Como  $1, t, \dots, t^n$  são linearmente independentes, segue que

$$\sum_{k=0}^{n-j} a_{kj} c_k = 0$$

para  $j = 0, 1, \dots, n$ . Ou seja, temos o sistema triangular com coeficientes  $a_{kj}$  positivos (fazendo  $j = n, n-1, n-2, \dots, 0$ ):

$$\begin{cases}
 a_{0n} c_0 = 0 \\
 a_{01} c_0 + a_{11} c_1 = 0 \\
 a_{02} c_0 + a_{12} c_1 + a_{22} c_2 = 0 \\
 \vdots \\
 a_{0n} c_0 + a_{1n} c_1 + \dots + a_{n-1,n} c_{n-1} + a_{n,n} c_n = 0
 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação obtemos  $c_0 = 0$ . Substituindo este valor obtido na segunda equação obtemos  $c_1 = 0$ . Substituindo estes dois valores obtidos na terceira equação obtemos  $c_2 = 0$ . Procedendo desta forma, obtemos  $c_k = 0$  para todo  $k$ .

**Prova 2:** Como  $1, t, t^2, \dots, t^n$  formam uma base para este espaço vetorial, basta provar que elas são geradas pelas  $n+1$  funções base de Bernstein de grau  $n$ .

De fato, a mudança de base da base de Bernstein para a base canônica  $1, t, t^2, \dots, t^n$  é dada por ([Farouki-Rajan])

$$t^k = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_{j,n}(t) \quad (1.6)$$

enquanto que a mudança de base recíproca é dada por

$$B_{k,n}(t) = \sum_{j=k}^n \left[ (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} \right] t^j \quad (1.7)$$

para  $k = 0, \dots, n$ . Para provar a primeira relação de mudança de base, use a expansão binomial

$$\begin{aligned} t^k &= t^k [(1-t) + t]^{n-k} = t^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (1-t)^i t^{n-k-i} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (1-t)^i t^{n-i} \\ &= \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{n-j} t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{n-k}{n-j}}{\binom{n}{j}} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\ &= \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_{j,n}(t), \end{aligned}$$

onde fizemos a mudança de índice  $i = n - j$  e usamos o fato que

$$\frac{\binom{n-k}{n-j}}{\binom{n}{j}} = \frac{(n-k)!}{(n-j)!(j-k)!} = \frac{(n-k)!}{(j-k)!} \frac{j!}{n!} = \frac{j!}{(j-k)!} \frac{j!}{(n-k)!} = \frac{j!}{k!(j-k)!} \frac{j!}{n!} = \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}}.$$

Para provar a segunda relação de mudança de base, faça a expansão binomial na função de Bernstein

$$\begin{aligned} B_{k,n}(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-t)^{n-k-i} = \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^{n-k-i} t^{n-k-i} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (-1)^{n-k-i} t^{n-i} = \binom{n}{k} \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{n-j} (-1)^{j-k} t^j = \binom{n}{k} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} (-1)^{j-k} t^j \\ &= \sum_{j=k}^n \left[ (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} \right] t^j, \end{aligned}$$

onde novamente fizemos a mudança de índice  $i = n - j$  e usamos a relação entre os coeficientes binomiais estabelecida anteriormente. ■

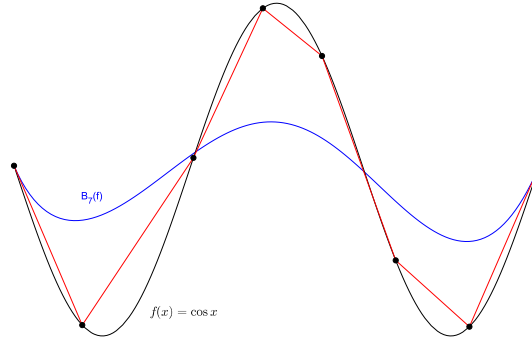
### 1.1.3 Aproximação Polinomial de Bernstein

**1.7 Definição.** Dada  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ , definimos a  $n$ -ésima **aproximação polinomial de Bernstein** de  $f$  por

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}(x). \quad (1.8)$$

□

Também usaremos a notação  $B_n(f; x)$  para denotar  $B_n(f)(x)$ .



**Figura 1.3** Aproximação polinomial de Bernstein  $B_7(f)$  da função cosseno.

**1.8 Proposição.** *Temos*

$$B_n(1) \equiv 1. \quad (1.9)$$

**Prova:** Pela propriedade da partição da unidade,

$$B_n(1)(x) = \sum_{k=0}^n 1B_{k,n}(x) = 1.$$

■

**1.9 Proposição.** *Temos*

$$B_n(x) = x. \quad (1.10)$$

**Prova:** De fato,

$$\begin{aligned} B_n(x; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= x \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} B_{k,n-1}(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

■



Portanto (veja a Proposição 1.12 a seguir), a aproximação polinomial de Bernstein reproduz exatamente as funções lineares:

$$B_n(ax + b) = ax + b, \quad (1.11)$$

uma propriedade que é chamada a *precisão linear* da aproximação de Bernstein.

**1.10 Proposição.** *Temos*

$$B_n(x^2) = x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2).$$

**Prova:** Com efeito,

$$\begin{aligned} B_n(x^2; x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= x \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \\ &= x \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \right] \\ &= x \left[ \frac{n-1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} \right] \\ &= x \left( \frac{n-1}{n} x + \frac{1}{n} \right) \\ &= x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2). \end{aligned}$$

■

**1.11 Corolário.** *Vale*

$$\|B_n(x^2) - x^2\|_{L^\infty(0,1)} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Prova:** Pois

$$B_n(x^2) - x^2 = \frac{1}{n}(x - x^2)$$

e  $0 \leq x - x^2 \leq 1/4$  em  $[0, 1]$ . ■

As seguintes propriedades da aproximação polinomial de Bernstein serão úteis:

**1.12 Proposição.** *A aproximação polinomial de Bernstein é um operador linear, isto é,*

$$B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha B_n(f) + \beta B_n(g). \quad (1.12)$$

**Prova:** Segue imediatamente da definição. ■

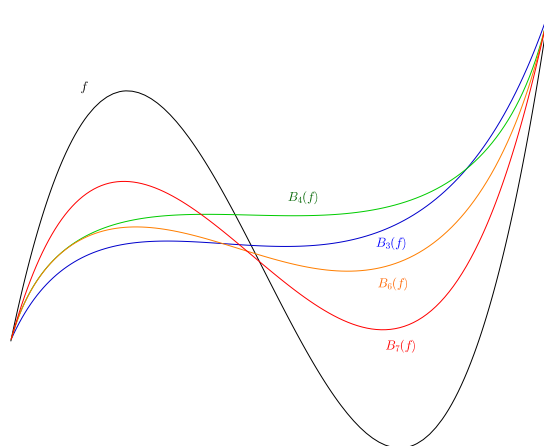
**1.13 Proposição.** A aproximação polinomial de Bernstein é um operador positivo, isto é, se  $f \geq 0$ , então  $B_n(f; x) \geq 0$ .

Em particular, ela é um operador monotónico, isto é, se  $f \leq g$ , então  $B_n(f; x) \leq B_n(g; x)$ .

**Prova:** Isso segue do fato das funções base de Bernstein serem não negativas em  $[0, 1]$ . ■

### 1.1.4 Prova do Teorema de Aproximação de Weierstrass via Polinômios de Bernstein

As aproximações polinomiais de Bernstein de uma função contínua  $f$  convergem uniformemente para  $f$  (embora lentamente).



**Figura 1.4** Aproximações polinomiais de Bernstein convergindo para  $f$ .

**1.14 Teorema.** (Teorema de Aproximação de Weierstrass – 1885) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então existe uma sequência de polinômios que converge uniformemente para  $f$  em  $[a, b]$ .

**Prova:** Basta considerar o caso  $[a, b] = [0, 1]$ , pois o caso geral segue por uma mudança de variáveis.

Para provar o resultado, temos que mostrar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > N$  vale

$$|B_n(f; \xi) - f(\xi)| < \varepsilon$$

para todo  $\xi \in [0, 1]$ .

Denote  $M = \|f\|_\infty$ .

Como  $[0, 1]$  é compacto,  $f$  é uniformemente contínua. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|x - y| < \delta$  implica  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Fixe  $\xi \in [0, 1]$ . Dado  $x \in [0, 1]$ , se  $|x - \xi| < \delta$  temos

$$|f(x) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

enquanto que se  $|x - \xi| \geq \delta$  temos

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x)| + |f(\xi)| \leq 2M \leq 2M \left( \frac{|x - \xi|}{\delta} \right)^2.$$

Portanto, para todo  $x \in [0, 1]$  vale

$$|f(x) - f(\xi)| < 2M \left( \frac{|x - \xi|}{\delta} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.13)$$

Agora observe que, por linearidade e reprodução exata das funções constantes, a aproximação polinomial de Bernstein satisfaz

$$B_n(f; x) - f(\xi) = B_n(f - f(\xi); x). \quad (1.14)$$

Logo, por monotonicidade, linearidade e reprodução exata das funções constantes,

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(\xi)| &= |B_n(f - f(\xi); x)| \leq B_n\left(2M\left(\frac{x - \xi}{\delta}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{2}; x\right) \\ &= \frac{2M}{\delta^2} B_n((x - \xi)^2; x) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, por linearidade e pela Proposição 1.10 temos

$$\begin{aligned} B_n((x - \xi)^2; x) &= B_n(x^2 - 2\xi x + \xi^2; x) \\ &= B_n(x^2; x) - 2\xi B_n(x; x) + B_n(\xi^2; x) \\ &= x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2) - 2\xi x + \xi^2 \\ &= x^2 - 2\xi x + \xi^2 + \frac{1}{n}(x - x^2) \\ &= (x - \xi)^2 + \frac{1}{n}(x - x^2). \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$|B_n(f; x) - f(\xi)| \leq \frac{2M}{\delta^2} \left[ (x - \xi)^2 + \frac{1}{n}(x - x^2) \right] + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, tomando  $x = \xi$ , obtemos

$$|B_n(f; \xi) - f(\xi)| \leq \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n} (\xi - \xi^2) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.15)$$

Como o máximo da função  $\xi \mapsto \xi - \xi^2$  no intervalo  $[0, 1]$  é  $1/4$ , segue que

$$|B_n(f; \xi) - f(\xi)| \leq \frac{M}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.16)$$

Seja  $N \geq M/\delta^2\varepsilon$ . Para todo  $n > N$  temos então que

$$|B_n(f; \xi) - f(\xi)| < \varepsilon$$

para todo  $\xi \in [0, 1]$ . ■

Observe que na demonstração acima utilizamos a linearidade do operador, sua precisão linear e a continuidade uniforme da aproximação para a função  $f(x) = x^2$ . Estas condições podem ser enfraquecidas: de fato, pelo Teorema de Korovkin (veja [Korovkin]), se um aproximante polinomial para uma função contínua em  $[0, 1]$  é especificado por um operador linear positivo, sua convergência uniforme para qualquer função contínua é garantida se for possível mostrar tal convergência para os casos simples  $f(x) = 1, x, x^2$ .

### 1.1.5 Mais Propriedades das Funções Base de Bernstein

As funções base  $B_{k,n}$  e  $B_{n-k,n}$  são a reflexão uma da outra em relação à reta  $t = 1/2$ :

**1.15 Proposição.** *Vale*

$$B_{k,n}(t) = B_{n-k,n}(1 - t).$$

**Prova:** Pois

$$B_{n-k,n}(1-t) = \binom{n}{n-k} (1-t)^{n-k} t^{n-(n-k)} = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = B_{k,n}(t).$$

■

As funções base de Bernstein podem ser obtidas por recursão:

**1.16 Proposição.** Definindo  $B_{0,0} \equiv 1$ ,  $B_{-1,n-1} \equiv 0$  e  $B_{n,n-1} \equiv 0$ , vale a relação recursiva

$$B_{k,n}(t) = tB_{k-1,n-1}(t) + (1-t)B_{k,n-1}(t)$$

para  $k = 0, \dots, n$ .

**Prova:** Pois, usando a conhecida propriedade do triângulo de Pascal,

$$\begin{aligned} tB_{k-1,n-1}(t) + (1-t)B_{k,n-1}(t) &= t \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} + (1-t) \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} \\ &= \left[ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}. \end{aligned}$$

■

## 1.2 Cônicas

## 1.3 Curvas de Bézier

### 1.3.1 O Algoritmo de Casteljau

**1.20 Definição.** Dizemos que os pontos  $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$  formam um **polígono de controle** se os segmentos  $P_i P_{i+1}$  formarem uma linha poligonal contínua.

Denotaremos o polígono de controle por  $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$ .

**1.21 Definição.** (Algoritmo de Casteljau) Dado um polígono de controle  $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$ , definimos a **curva de Bézier**  $B(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  **de grau**  $n$  associada a este polígono de controle através do seguinte algoritmo recursivo:

**Algoritmo de Casteljau**

**Etapas 0.** Fixe  $t \in [0, 1]$ .

**Etapas 1.** Para  $k = 0, 1, \dots, n$ , defina  $P_k^{[0]}(t) \equiv P_k$ .

**Etapas 2.** Para  $j = 1, \dots, n$ , defina

$$P_k^{[j]}(t) = (1-t)P_{k-1}^{[j-1]}(t) + tP_k^{[j-1]}(t) \quad (1.17)$$

para  $k = j, \dots, n$ .

**Etapas 3.**  $B(t) = P_n^{[n]}(t)$ .

Assim, cada uma das três coordenadas de  $B(t)$  é um polinômio em  $t$  de grau  $n$ .

**1.22 Exemplo.** (Bézier Cúbica) Seja  $P = [P_0, P_1, P_2, P_3]$ . No primeiro passo temos

$$P_0^{[0]}(t) \equiv P_0, P_1^{[0]}(t) \equiv P_1, P_2^{[0]}(t) \equiv P_2 \text{ e } P_3^{[0]}(t) \equiv P_3.$$

No segundo passo temos

$$\begin{aligned} P_1^{[1]}(t) &= (1-t)P_0^{[0]}(t) + tP_1^{[0]}(t) = (1-t)P_0 + tP_1, \\ P_2^{[1]}(t) &= (1-t)P_1^{[0]}(t) + tP_2^{[0]}(t) = (1-t)P_1 + tP_2, \\ P_3^{[1]}(t) &= (1-t)P_2^{[0]}(t) + tP_3^{[0]}(t) = (1-t)P_2 + tP_3. \end{aligned}$$

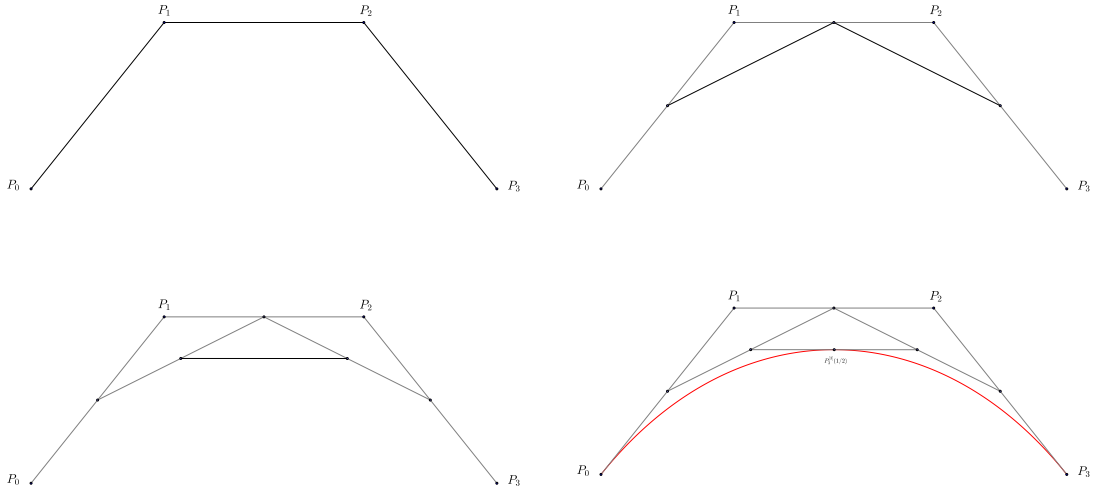
No terceiro passo temos

$$\begin{aligned} P_2^{[2]}(t) &= (1-t)P_1^{[1]}(t) + tP_2^{[1]}(t) = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2] \\ &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2, \\ P_3^{[2]}(t) &= (1-t)P_2^{[1]}(t) + tP_3^{[1]}(t) = (1-t)[(1-t)P_1 + tP_2] + t[(1-t)P_2 + tP_3] \\ &= (1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3. \end{aligned}$$

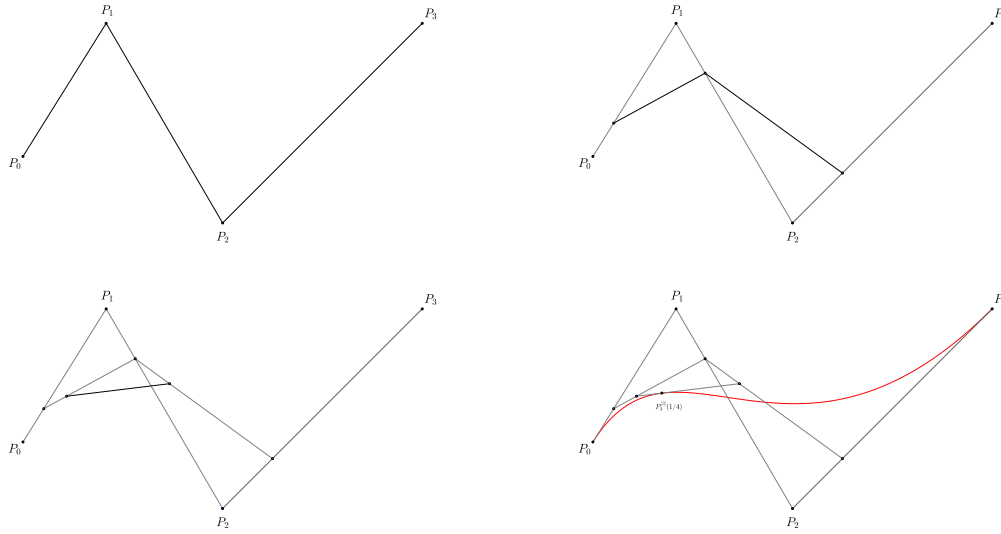
Finalmente, no quarto e último passo obtemos a Bézier cúbica:

$$\begin{aligned} B(t) &= P_3^{[3]}(t) = (1-t)P_2^{[2]}(t) + tP_3^{[2]}(t) \\ &= (1-t)[(1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2] + t[(1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3] \\ &= (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3. \end{aligned}$$

□

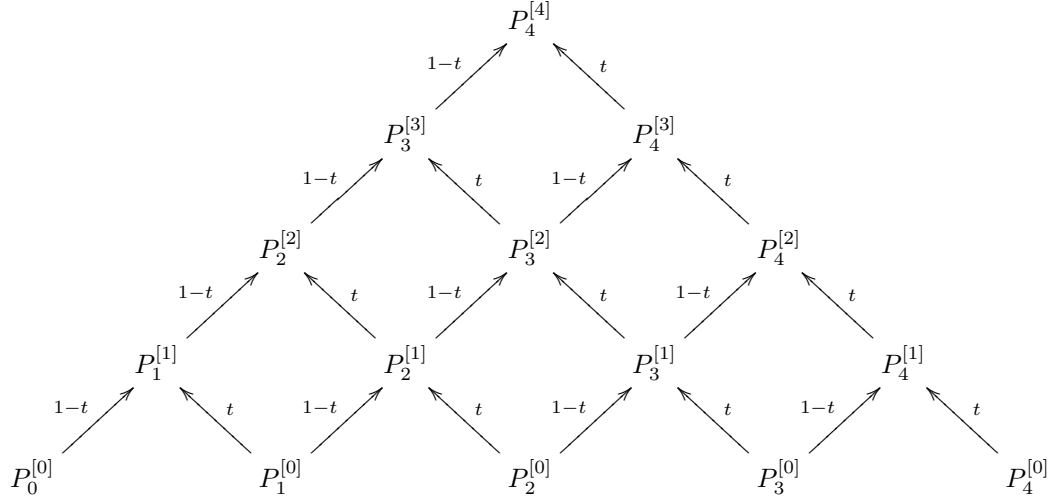


**Figura 1.5** Obtenção de  $P_3^{[3]}(1/2)$  através do algoritmo de Casteljau.



**Figura 1.6** Obtenção de  $P_3^{[3]}(1/4)$  através do algoritmo de Casteljau.

### 1.3.2 Fórmula Fechada para a Curva de Bézier



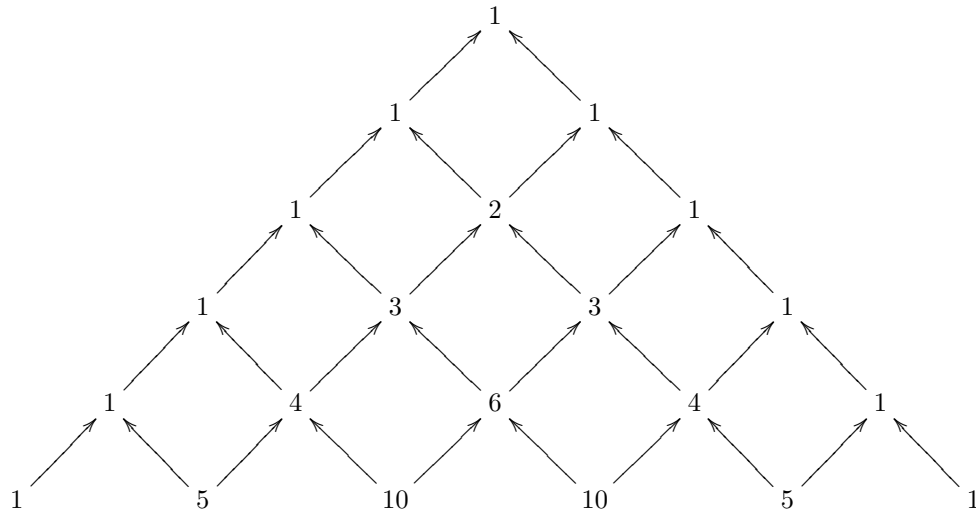
Para obter uma fórmula fechada para a curva de Bézier a partir do algoritmo de Casteljau, observe o grafo acima que ilustra o processo. Para facilitar a visualização, o parâmetro  $t$  foi omitido e escrevemos  $P_k^{[j]}$  ao invés de  $P_k^{[j]}(t)$  em cada célula. Os pontos do polígono de controle  $P_k^{[0]}$  são exatamente as células que ocupam a fila inferior do grafo (sobrescrito 0), enquanto que o ponto da curva de Bézier  $P_n^{[n]}$  correspondente a um parâmetro  $t$  dado, construído a partir destes pontos seguindo o algoritmo de Casteljau, ocupa o ápice do grafo (sobrescrito  $n$ ). De acordo com o algoritmo de Casteljau

$$P_k^{[j]}(t) = (1-t)P_{k-1}^{[j-1]}(t) + tP_k^{[j-1]}(t),$$

logo a célula  $P_k^{[j]}$  recebe duas setas das duas células imediatamente abaixo dela, uma do ponto  $P_{k-1}^{[j-1]}$  imediatamente abaixo à esquerda, indexada pelo parâmetro  $1 - t$ , e uma do ponto  $P_{k-1}^{[j]}$  imediatamente abaixo à direita indexada pelo parâmetro  $t$ . Assim, todas as setas que apontam para a direita são indexadas por  $1 - t$ , correspondente à multiplicação por este valor, enquanto que todas as células que apontam para a esquerda são indexadas por  $t$ , correspondente à multiplicação por este valor. Um caminho que vai das células inferiores no grafo (sobrescrito 0) até a célula que fica no ápice do grafo (sobrescrito  $n$ ) exige exatamente  $n$  saltos ou transições, isto é, o caminho possui  $n$  setas. Das  $n$  setas que devem ser percorridas para chegar de um ponto  $P_k^{[0]}$  na fila inferior até o ápice, seja qual for o caminho escolhido, precisamos passar por exatamente  $k$  setas para a esquerda, que são indexadas por  $t$  e correspondem cada uma a uma multiplicação por  $t$ , resultando na multiplicação final por  $t^k$ ; restam no caminho  $n - k$  setas para a direita, que são indexadas por  $1 - t$  e correspondem cada uma a uma multiplicação por  $1 - t$ , resultando na multiplicação final por  $(1 - t)^{n-k}$ . Assim, cada caminho de  $P_k^{[0]}$  até  $P_n^{[n]}$  corresponde a adicionar o termo

$$t^k (1 - t)^{n-k} P_k$$

na fórmula final para a curva de Bézier. Resta apenas contar quantos caminhos existem desde  $P_k^{[0]}$  até  $P_n^{[n]}$ . Este número dependerá de  $k$  e de  $n$ . Veremos agora que este número é exatamente  $\binom{n}{k}$ , que é precisamente o valor da célula correspondente quando enxergamos o grafo acima como um triângulo de Pascal.



De fato, usando um argumento de indução é possível provar que no triângulo de Pascal existem exatamente  $\binom{n}{k}$  caminhos possíveis da célula ocupando a posição  $\binom{n}{k}$  no triângulo até a célula que fica no ápice do triângulo. Com efeito, a célula que ocupa esta posição tem um caminho para a célula ocupando a posição acima dela imediatamente à direita e um caminho para a célula ocupando a posição acima dela imediatamente à esquerda; assim o número de caminhos desta célula até a célula no ápice do triângulo é precisamente a soma dos números de caminhos possíveis destas duas células imediatamente acima dela até a célula no ápice do triângulo. [Esta propriedade é análoga à propriedade do triângulo de Pascal que o valor em uma célula é igual à soma dos valores das duas células imediatamente acima.] Este é o passo geral da indução. Como as duas células que ocupam a segunda fila no triângulo de Pascal tem ambas valor 1 e apenas 1 caminho possível para a célula no ápice, o primeiro passo de indução é satisfeito.

Portanto, obtemos a seguinte fórmula fechada para a curva de Bézier:

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} t^k (1 - t)^{n-k},$$

ou seja,

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t).$$

Este resultado também pode ser provado da seguinte forma:

**1.23 Teorema.** *Seja  $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$  um polígono de controle. Então a curva de Bézier de grau  $n$  produzida pelo algoritmo de Casteljau é dada por*

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t). \quad (1.18)$$

**Prova:** Defina

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t).$$

Segue da Proposição 1.16 que

$$\begin{aligned} C(t) &= P_0 B_{0,n}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k B_{k,n}(t) + P_n B_{n,n}(t) \\ &= P_0 (1-t) B_{0,n-1}(t) + \sum_{k=1}^{n-1} P_k [t B_{k-1,n-1}(t) + (1-t) B_{k,n-1}(t)] + P_n t B_{n-1,n-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} P_k B_{k,n-1}(t) + t \sum_{k=1}^n P_k B_{k-1,n-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} P_k B_{k,n-1}(t) + t \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1} B_{k,n-1}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [(1-t) P_k + t P_{k+1}] B_{k,n-1}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}^{[1]}(t) B_{k,n-1}(t). \end{aligned}$$

Aplicando este argumento repetidas vezes obtemos, consecutivamente,

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_{k=0}^{n-2} P_{k+2}^{[2]}(t) B_{k,n-2}(t), \\ C(t) &= \sum_{k=0}^{n-3} P_{k+3}^{[3]}(t) B_{k,n-3}(t), \\ &\vdots \\ C(t) &= \sum_{k=0}^{n-j} P_{k+j}^{[j]}(t) B_{k,n-j}(t), \end{aligned}$$

até que, depois de  $n$  aplicações do argumento, obtemos

$$C(t) = P_n^{[n]}(t) B_{0,0}(t) = P_n^{[n]}(t).$$

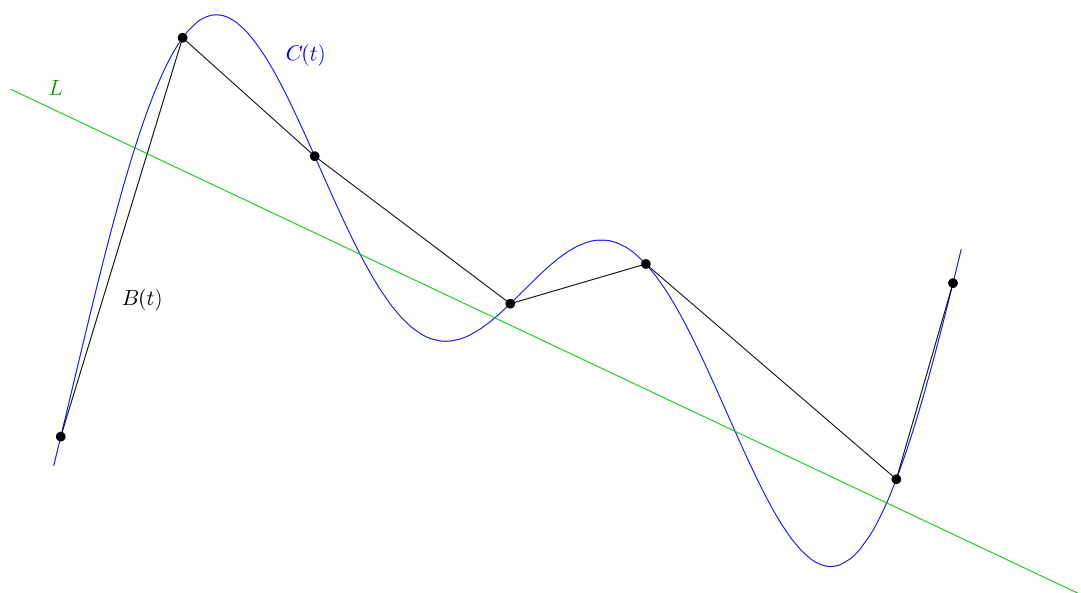
■



## 1.4 Propriedade de Redução da Variação para Curvas de Bézier Planas

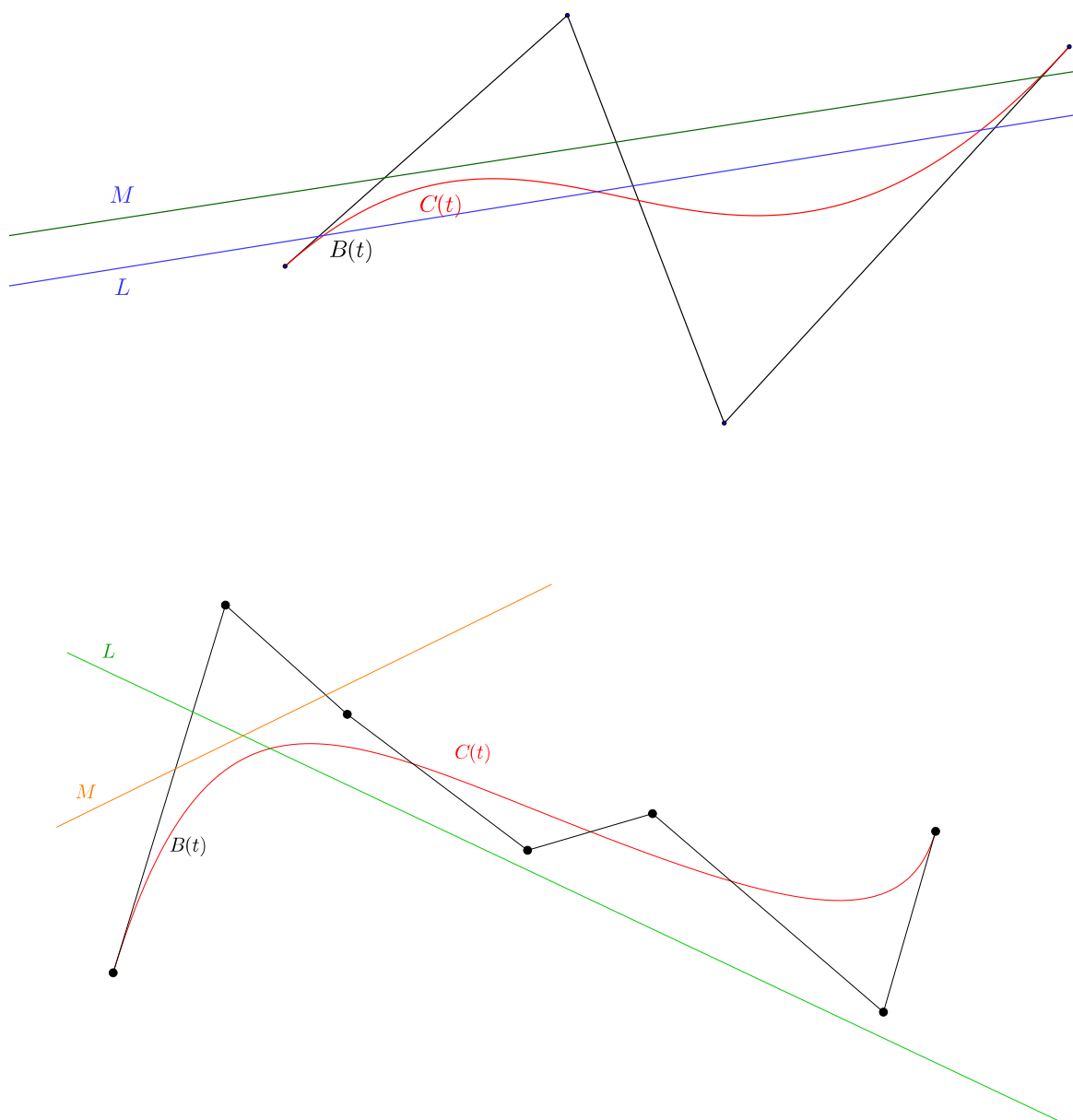
A curva de Bézier não é mais ondulada que o polígono de controle original. Esta propriedade pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

**1,24 Definição.** Dizemos que uma aproximação  $B(t)$  a uma curva  $C(t)$  tem a **propriedade de redução da variação** se qualquer reta arbitrária não pode interceptar  $B$  mais vezes do que intercepta  $C$ .



**Figura 1.7** A curva  $C(t)$  não possui a propriedade de redução de variação em relação à poligonal  $B(t)$ . Por exemplo, a reta  $L$  intercepta a poligonal uma vez e a curva 5 vezes. É fácil encontrar outras retas que tem um número de interseções com a curva maior que o número de interseções que elas tem com a poligonal. Observe que a curva aproxima a poligonal razoavelmente bem, mas é muito mais ondulada.

O principal objetivo desta seção é provar que a curva de Bézier tem a propriedade de redução da variação em relação ao seu polígono de controle.



**Figura 1.8** Na primeira figura, a curva de Bézier cúbica  $C(t)$  possui a propriedade de redução da variação em relação ao seu polígono de controle  $B(t)$ . Por exemplo, a reta  $L$  intercepta o polígono de controle 3 vezes e a curva de Bézier também 3 vezes; já a reta  $M$  intercepta o polígono de controle 3 vezes e a curva de Bézier apenas 1 vez. Qualquer outra reta tem um número de interseções com a curva de Bézier no máximo igual ao número de interseções que ela tem com o polígono de controle. Na segunda figura, a curva de Bézier de grau 6  $C(t)$  possui a propriedade de redução da variação em relação ao seu polígono de controle  $B(t)$ . Por exemplo, a reta  $L$  intercepta o polígono de controle e a curva de Bézier apenas uma vez; já a reta  $M$  intercepta o polígono de controle 2 vezes e a curva de Bézier apenas uma vez. Qualquer outra reta tem um número de interseções com a curva de Bézier no máximo igual ao número de interseções que ela tem com o polígono de controle.

**1.25 Lema.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $B_n(f)$  sua aproximação polinomial de Bernstein de grau  $n$  e  $r(x) = ax + b$  uma reta arbitrária. Então o número de vezes que  $r$  intercepta  $B_n(f)$  é igual ao número de mudanças de sinal de  $B_n(f - r)$ .*

**Prova:** Por linearidade e precisão linear da aproximação polinomial de Bernstein,

$$B_n(f - r)(x) = B_n(f)(x) - r(x),$$

logo

$$B_n(f)(x) = r(x) \quad \text{se e somente se} \quad B_n(f - r)(x) = 0,$$

ou seja, contar as interseções de  $r$  e  $B_n(f)$  é equivalente a contar os zeros do polinômio  $B_n(f - r)$ . ■

**1.26 Definição.** Se  $a_0, a_1, \dots, a_n$  é uma sequência de números reais, denotaremos por  $Z[a_0, a_1, \dots, a_n]$  o número de mudanças de sinal desta sequência, ignorando os zeros.

Se  $f$  é uma função contínua, denotaremos por  $Z[f]$  o número de mudanças de sinal de  $f$ .

**1.27 Teorema.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então*

$$Z[B_n(f)] \leq Z\left[f(0), f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n-1}{n}\right), f(1)\right]. \quad (1.19)$$

**Prova:** Para  $x \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} Z[B_n(f)] &= Z\left[\frac{B_n(f)}{(1-x)^n}\right] \\ &= Z\left[\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k\right] \\ &= Z\left[\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} z^k\right] \end{aligned}$$

onde denotamos  $z = \frac{x}{1-x}$ . Note que quando  $x$  varia de 0 até 1, a variável  $z$  varia de 0 a  $+\infty$ . Como os coeficientes binomiais são positivos, os sinais dos coeficientes do polinômio

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} z^k$$

são dados pelos sinais dos valores  $f\left(\frac{k}{n}\right)$ . Portanto, pela Regra de Sinais de Descartes (ver Apêndice A), o número de zeros positivos deste polinômio é menor ou igual ao número de mudanças de sinal da sequência destes valores, donde segue o resultado. ■

**1.28 Lema.** *Sejam  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  pontos no plano  $\mathbb{R}^2$  que formam um polígono de controle  $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$ . Seja  $r : ax + by + c = 0$  uma reta que não contém nenhum segmento de  $P$ . Então o número de interseções transversais da reta  $r$  com as arestas do polígono  $P$  é dado por*

$$Z[ax_0 + by_0 + c, ax_1 + by_1 + c, \dots, ax_n + by_n + c], \quad (1.20)$$

enquanto que o número de interseções da reta  $r$  com os vértices do polígono  $P$  é dado pelo número de zeros desta sequência.

**Prova:** A equação paramétrica do segmento  $L_i = P_i P_{i+1}$  é dada por

$$\begin{aligned} L_i(t) &= (1-t)(x_i, y_i) + t(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ &= ((1-t)x_i + tx_{i+1}, (1-t)y_i + ty_{i+1}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

para  $t \in [0, 1]$ . Note que  $L_i(0) = P_i$  e  $L_i(1) = P_{i+1}$ . Defina

$$g(t) = a[(1-t)x_i + tx_{i+1}] + b[(1-t)y_i + ty_{i+1}] + c. \quad (1.22)$$

Então  $L_i(t) \in r$  se e somente se  $g(t) = 0$ . Se a reta  $r$  intercepta um dos pontos extremos do segmento  $L_i$ , isto é, um dos vértices  $P_i$  ou  $P_{i+1}$  do polígono de controle, então uma das duas alternativas seguintes ocorre:

$$g(0) = ax_i + by_i + c = 0 \quad \text{e} \quad g(1) = ax_{i+1} + by_{i+1} + c \neq 0,$$

ou

$$g(1) = ax_{i+1} + by_{i+1} + c = 0 \quad \text{e} \quad g(0) = ax_i + by_i + c \neq 0,$$

já que a reta  $r$  não contém todo o segmento  $L_i$ . Se a reta  $r$  intercepta o segmento  $L_i$  transversalmente, isto é, em um ponto interior do segmento, então existe  $\bar{t} \in (0, 1)$  tal que  $g(\bar{t}) = 0$ . Quando isso acontece, como o gráfico de  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é o de uma reta não horizontal que intercepta a origem no ponto interior  $\bar{t}$  do intervalo  $(0, 1)$  (se a reta fosse horizontal, isso significaria que a reta  $r$  contém o segmento  $L_i$ ), segue que

$$g(0) = ax_i + by_i + c \quad \text{e} \quad g(1) = ax_{i+1} + by_{i+1} + c$$

tem sinais opostos. ■

**1.29 Teorema.** *Considerada como uma aproximação a seu polígono de controle, a curva de Bézier plana possui a propriedade de redução da variação.*

**Prova:** Sejam  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  pontos no plano  $\mathbb{R}^2$  que formam um polígono de controle  $P = [P_0, P_1, \dots, P_n]$  e seja

$$B(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(t) = \sum_{k=0}^n (B_{k,n}(t) x_k, B_{k,n}(t) y_k).$$

sua curva de Bézier. Denote

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^n B_{k,n}(t) x_k, \\ y(t) &= \sum_{k=0}^n B_{k,n}(t) y_k. \end{aligned}$$

Se  $r : ax + by + c = 0$  é uma reta que não contém segmentos do polígono de controle, então o número de interseções de  $r$  e  $B$  é o número de zeros da função

$$f(t) = ax(t) + by(t) + c.$$

Escrevendo

$$f(t) = \sum_{k=0}^n (ax_k + by_k + c) B_{k,n}(t),$$

e raciocinando como na demonstração do Teorema X segue que o número de zeros do polinômio  $f$ , que é igual ao número de mudanças de sinal da função  $f$ , é menor ou igual a

$$Z[ax_0 + by_0 + c, ax_1 + by_1 + c, \dots, ax_n + by_n + c].$$

Pelo lema anterior, este último é igual ao número de vezes que a reta intercepta transversalmente as arestas do polígono de controle. ■

Além da curva de Bézier não ser mais ondulada que o polígono de controle original, da demonstração vemos que as ondulações que ocorrerem na curva devem ocorrer aproximadamente próximas às ondulações do polígono. Esta propriedade, juntamente com a propriedade do fecho convexo, dão uma boa idéia de onde a curva deve estar em relação ao polígono de controle.

## 1.5 Apêndice A: Regra dos Sinais de Descartes

**A1 Teorema.** (Regra dos Sinais de Descartes) *Seja  $p(x)$  um polinômio com coeficientes reais, ordenados em ordem decrescente de grau dos monômios associados.*

*O número de raízes positivas de  $p$  é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p(x)$  ou menor que este número por um número par.*

*O número de raízes negativas de  $p$  é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p(-x)$  ou menor que este número por um número par.*

Observe que ao determinar as mudanças de sinal, ignoramos os termos com coeficientes nulos. Quando nos referimos ao número de raízes, estamos contando multiplicidades.

**A2 Exemplo.** Considere o polinômio

$$p(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 + x^2 - x + 2.$$

Temos 4 mudanças de sinal:

$$+ \underbrace{x^5} - \underbrace{x^4} + 4x^3 + \underbrace{x^2} - \underbrace{x} + 2.$$

Portanto, este polinômio pode ter 0, 2 ou 4 raízes positivas (na realidade, ele não possui nenhuma raiz positiva). Por outro lado,

$$p(-x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + x^2 + x + 2$$

tem apenas uma mudança de sinal:

$$-x^5 - x^4 - \underbrace{4x^3} + x^2 + x + 2,$$

logo  $p(x)$  tem exatamente uma raiz negativa.

Considere agora o polinômio

$$p(x) = x^4 + x^2 + 1 = p(-x).$$

Como não há nenhuma mudança de sinal, tanto nos coeficientes de  $p(x)$  como nos coeficientes de  $p(-x)$ , o polinômio  $p(x)$  não possui nem raízes positivas nem negativas. Como 0 também não é raiz para ele, ele não possui nenhuma raiz real.

Em seguida, considere o polinômio

$$p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1.$$

Como não há nenhuma mudança de sinal, o polinômio  $p(x)$  não possui nem raízes positivas. Por outro lado,

$$p(-x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + 1$$

tem 3 mudanças de sinal, ele possui 1 ou 3 raízes negativas (na verdade, ele possui uma única raiz negativa). Observe que neste exemplo o coeficiente do termo  $x$  é 0.

Finalmente, como um último exemplo, considere o polinômio

$$p(x) = x^2 - 4x + 4.$$

Como há duas mudanças de sinal, este polinômio pode ter 0 ou 2 raízes positivas. De fato, o polinômio tem  $x = 2$  como raiz positiva de multiplicidade 2.  $\square$

**Prova do Teorema A1:** Observe que, sem perda de generalidade, podemos considerar apenas polinômios mônicos, isto é, em que o coeficiente correspondente ao termo de maior grau é 1. De fato, seja  $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$  um polinômio de grau  $n$ , ou seja  $a_n \neq 0$ . Considere o polinômio mônico

$$q(x) = x^n + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_n} x^k$$

obtido dividindo-se  $p$  pelo coeficiente  $a_n$ . Segue que  $p$  e  $q$  tem as mesmas raízes e o mesmo número de mudanças de sinal: se  $a_n > 0$ , então os coeficientes de  $p$  e  $q$  têm os mesmos sinais e se  $a_n < 0$  então os coeficientes de  $q$  tem todos sinais opostos aos coeficientes de  $p$ , de modo que quando ocorre uma mudança de sinal nos coeficientes de  $p$  de *positivo* para *negativo*, ocorre uma mudança de sinal nos coeficientes de  $q$  de *negativo* para *positivo* e vice-versa; quando não ocorre mudança de sinal nos coeficientes de  $p$ , correspondentemente não ocorre mudança de sinal nos coeficientes de  $q$ .

Além disso, podemos também assumir sem perda de generalidade que o coeficiente do termo constante é  $a_0 \neq 0$ , pois se 0 é uma raiz de multiplicidade  $m$  do polinômio  $p(x)$ , o polinômio  $q(x) = p(x)/x^m$  com termo constante não nulo tem as mesmas raízes positivas e negativas de  $p$  e o mesmo padrão de mudanças de sinal em seus coeficientes.

Portanto, podemos assumir que

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

com  $a_0 \neq 0$ . O Teorema A1 seguirá do resultado mais preciso a seguir:

**A3 Teorema.** *Seja  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  um polinômio mônico com coeficientes reais tal que  $a_0 \neq 0$ .*

*Se  $a_0 < 0$ , então o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p$  e o número de raízes positivas de  $p$  é ímpar.*

*Se  $a_0 > 0$ , então o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p$  e o número de raízes positivas de  $p$  é par.*

*Com relação a raízes negativas:*

*(i) se  $n$  é par: se  $a_0 < 0$ , então o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p(-x)$  e o número de raízes negativas de  $p$  é ímpar; se  $a_0 > 0$ , então o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p(-x)$  e o número de raízes negativas de  $p$  é par.*

*(ii) se  $n$  é ímpar: se  $a_0 < 0$ , então o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p(-x)$  e o número de raízes negativas de  $p$  é par; se  $a_0 > 0$ , então o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p(-x)$  e o número de raízes negativas de  $p$  é ímpar.*

**Prova:** O polinômio  $p(x)$  é mônico, logo o sinal do seu primeiro coeficiente é positivo. Registre as mudanças de sinal nos coeficientes de  $p$  desde o primeiro coeficiente até o último, seguindo a ordem decrescente de grau dos termos do polinômio. Como o número de mudanças de sinal necessárias para chegar de um sinal positivo para um sinal negativo é ímpar, segue que se  $a_0 < 0$  o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p$  é ímpar. Já o número de mudanças de sinal necessárias para chegar de um sinal positivo para voltar a um sinal positivo é par; logo se  $a_0 > 0$  o número de mudanças de sinal dos coeficientes de  $p$  é par. Se  $n$  é par,

então  $p(-x)$  continua sendo um polinômio mônico, enquanto que se  $n$  é ímpar então o coeficiente do termo  $x^n$  de  $p(-x)$  passa a ser negativo.

O resultado para os números de raízes positivas e negativas seguirá por indução.

**Passo 1. O resultado vale para polinômios lineares.**

Se  $p(x) = x + b$ , então  $x = -b$  é uma raiz positiva se e somente se  $b < 0$ ;  $x = -b$  é uma raiz negativa se e somente se  $b > 0$ , o que corresponde a uma mudança de sinal nos coeficientes do polinômio  $p(-x) = -x + b$ .

**Passo 2. O resultado vale para polinômios quadráticos.**

Se  $p(x) = x^2 + bx + c$ , o discriminante deste polinômio é

$$\Delta = b^2 - 4c.$$

Portanto, para que o polinômio não tenha nenhuma raiz real é necessário que  $c > 0$  e que  $c$  seja suficientemente grande quando comparado a  $b$  para que o discriminante seja negativo. Quando isso ocorre, o sinal de  $b$  não importará e podemos ter até mesmo  $b = 0$ . De qualquer modo, temos os seguintes casos:  $b \geq 0$ , quando não há nenhuma mudança de sinal nos coeficientes de  $p(x)$  e  $b < 0$  quando há duas mudanças de sinal nos seus coeficientes. A mesma conclusão, isto é, a ocorrência de um número par de mudanças de sinal, vale para os coeficientes de  $p(-x)$ , exceto que se  $b > 0$  há duas mudanças de sinal e se  $b \leq 0$  não há nenhuma mudança de sinal.

Se o polinômio possuir raízes reais  $r_1$  e  $r_2$ , então  $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)$  e

$$b = -(r_1 + r_2) \quad \text{e} \quad c = r_1 r_2.$$

Neste caso, segue que  $c > 0$  se e somente se ambas as raízes são positivas, ou ambas as raízes são negativas; no primeiro caso,  $b < 0$  e temos exatamente duas mudanças de sinal nos coeficientes de  $p(x)$ , enquanto que no segundo caso temos  $b > 0$  e o polinômio  $p(-x) = x^2 - bx + c$  tem duas mudanças de sinal em seus coeficientes. Por outro lado, se  $c < 0$ , as duas raízes tem sinais opostos, isto é, temos exatamente uma raiz positiva e uma raiz negativa; mas neste caso, qualquer que seja o sinal de  $b$ , os polinômios  $p(x)$  e  $p(-x)$  tem ambos exatamente uma mudança de sinal.

**Passo 3. Caso geral.**

Vamos denotar por  $P[p]$  o número de raízes positivas e por  $N[p]$  o número de raízes negativas de um polinômio  $p(x)$ . Como hipótese de indução, assumamos que o resultado vale para todos os polinômios de grau menor que  $n$ . Seja

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

com  $n \geq 3$ .

**Passo 3a. Caso  $a_0 < 0$ .**

Suponha primeiramente que  $a_0 < 0$ . Então  $p(0) = a_0 < 0$  e como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ , segue do Teorema do Valor Intermediário que  $p$  possui uma raiz positiva, digamos em  $r$ . Logo

$$p(x) = (x - r)q(x)$$

onde  $q(x)$  é um polinômio mônico de grau  $n - 1$ . Seja  $b_0$  o termo constante de  $q$ . Como  $a_0 = -rb_0$ , segue que  $b_0 > 0$ . Pela hipótese de indução, o número de raízes positivas de  $q$  é par. Como  $P[p] = P[q] + 1$ , concluímos que o número de raízes positivas de  $p$  é ímpar.

Para analisar o número de raízes negativas de  $p$ , observe que  $N[p] = N[q]$  pois  $r$  é uma raiz positiva. Se  $n$  é ímpar, então  $n - 1$  é par e como  $b_0 > 0$  segue da hipótese de indução que  $N[q]$  é par. Se  $n$  é par, então  $n - 1$  é ímpar e como  $b_0 > 0$  segue da hipótese de indução que  $N[q]$  é ímpar.

**Passo 3b. Caso  $a_0 > 0$ .**

Agora assumamos  $a_0 > 0$ . Temos dois casos a considerar,  $n$  ímpar e  $n$  par.

Se  $n$  é ímpar, então podemos proceder como no caso anterior. Temos  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$  e como  $p(0) = a_0 > 0$ , segue do Teorema do Valor Intermediário que  $p$  possui uma raiz negativa, digamos em  $r$ . Logo

$$p(x) = (x - r)q(x)$$

onde  $q(x)$  é um polinômio mônico de grau  $n - 1$ . Seja  $b_0$  o termo constante de  $q$ . Como  $a_0 = -rb_0$ , segue que  $b_0 > 0$  também. Mas agora  $P[p] = P[q]$ , pois  $r$  é uma raiz negativa, e pela hipótese de indução  $P[q]$  é par.

Para analisar o número de raízes negativas de  $p$ , note que agora  $N[p] = N[q] + 1$ . Como  $n$  é ímpar, então  $n - 1$  é par e pela hipótese de indução  $N[q]$  é par, logo  $N[p]$  é ímpar.

Finalmente, suponha  $n$  par. Se  $P[p] = 0$  então o teorema está provado com relação a raízes positivas. Se  $P[p] \neq 0$ , então  $p$  tem pelo menos uma raiz positiva em  $r$ , digamos, e

$$p(x) = (x - r)q(x)$$

onde  $q(x)$  é um polinômio mônico de grau  $n - 1$ . Seja  $b_0$  o termo constante de  $q$ . Como  $a_0 = -rb_0$ , segue que  $b_0 < 0$ . Pela hipótese de indução,  $P[q]$  é ímpar. Como  $P[p] = P[q] + 1$ , concluímos que  $P[p]$  é par. Isso conclui a demonstração do teorema para raízes positivas.

Para analisar o número de raízes negativas de  $p$ , observe que se  $N[p] = 0$  então o teorema está provado. Se  $N[p] \neq 0$ , então  $p$  tem pelo menos uma raiz negativa em  $r$ , digamos, e

$$p(x) = (x - r)q(x)$$

onde  $q(x)$  é um polinômio mônico de grau  $n - 1$ . Seja  $b_0$  o termo constante de  $q$ . Como  $a_0 = -rb_0$ , segue que  $b_0 > 0$ . Pela hipótese de indução, como  $n - 1$  é ímpar,  $N[q]$  é ímpar. Como  $N[p] = N[q] + 1$ , concluímos que  $N[p]$  é par. Isso conclui a demonstração do teorema para raízes negativas. ■



# Referências Bibliográficas

- [CRE] Elaine COHEN, Richard F. RIESENFELD e Gershon ELBER, *Geometric Modeling with Splines, an Introduction*, A K Peters, 2001.
- [Davidson-Donsig] K. DAVIDSON e A. DONSIG, *Real Analysis with Real Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2002.
- [Farouki] Rida T. FAROUKI, *The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective*, Computer Aided Geometric Design 29 (2012) 379–419.
- [Farouki-Rajan] Rida T. FAROUKI e V. T. RAJAN, *On the numerical condition of polynomials in Bernstein form*, Computer Aided Geometric Design 4, 191–216.
- [Korovkin] P.P. KOROVKIN, *Linear Operators and Approximation Theory*, Hindustan Publishing Corporation, Delhi, 1960 (translated from Russian).