

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia  
ENG10026 Robótica A

## **Geração de Trajetórias**

Prof. Walter Fetter Lages

31 de outubro de 2019

# **1 Introdução**

O problema de geração de trajetória consiste em gerar o histórico temporal das variáveis de junta para que o robô realize um movimento desejado. A especificação do movimento desejado pode ser realizada tanto no espaço das juntas quanto no espaço cartesiano. Usualmente este movimento é especificado através dos pontos iniciais e finais, da forma geométrica do caminho que deve ser percorrido entre estes pontos e o tempo final do movimento.

É importante perceber a diferença entre trajetória e caminho. Em uma trajetória existe uma dependência temporal, enquanto que caminho é uma descrição puramente espacial, sem relação com o tempo. Uma trajetória pode ser encarada como um caminho ao qual se impõe um perfil de velocidade.

A maioria dos métodos a geração de trajetória consiste em calcular-se os parâmetros da curva tomada como caminho de forma a acomodar os pontos iniciais e finais e o tempo final, tendo-se como resultado uma função parametrizada no tempo.

## **1.1 Trajetória no Espaço das Juntas**

Quando a geração de trajetória é realizada no espaço das juntas, a própria trajetória já é o histórico temporal das variáveis de junta, que pode ser utilizado como referência para os controladores de junta.

Tipicamente neste caso escolhe-se como caminho uma reta no espaço das juntas, e utiliza-se polinômios para parametrizar a trajetória no tempo. Sendo gerada no espaço das juntas, a trajetória resultante não apresenta problemas de singularidades, a menos de limitações nos valores máximos e mínimos das variáveis de junta. Por outro lado, a trajetória cartesiana resultante não é facilmente inferida

a partir da trajetória das juntas, devido ao mapeamento não-linear entre o espaço das juntas e o espaço cartesiando, realizado pelo modelo cinemático.

**Exemplo 1** *Para um robô com três juntas, é usual definir-se a trajetória a forma:*

$$\begin{aligned} q_1(t) &= p_1(t) \\ q_2(t) &= p_2(t) \\ q_3(t) &= p_3(t) \end{aligned}$$

onde  $q_i(t)$  são os históricos temporais das variáveis de junta (trajetória no espaço das juntas) e  $p_i(t)$  são polinômios de mesma ordem com coeficientes a determinar em função dos pontos iniciais e finais e do tempo final da trajetória. Obviamente, as derivadas no tempo dos polinômios  $p_i(t)$  são o perfil de velocidade imposto ao caminho, criando a trajetória. Ou seja, pode-se dizer que uma trajetória é um caminho associado à um perfil de velocidade.

## 1.2 Trajetória no Espaço Cartesiano

Neste caso, a trajetória será o histórico temporal das variáveis cartesianas, portanto, para que se tenha as referências para os controladores de junta é necessário fazer o mapeamento da trajetória no espaço cartesiano para a trajetória no espaço das juntas. Isto é feito ponto a ponto utilizando-se o modelo cinemático inverso. Ou seja, para cada ponto da trajetória cartesiana são computados, através do modelo cinemático inverso, os valores das variáveis de junta correspondentes, que podem então ser utilizados com referência para os controladores de junta. Assim, a trajetória é primeiramente gerada no espaço cartesiando e depois mapeada ponto a ponto para o espaço das juntas. Com isto, garante-se que a trajetória realiza o movimento espacial desejado. No entanto, devido ao mapeamento não-linear realizado pelo modelo cinemático inverso, podem ocorrer problemas de singularidades. Isto é, pode ocorrer que para alguns pontos da trajetória espacial não seja possível obter o ponto equivalente no espaço das juntas, significando que a trajetória espacial desejada não é factível.

Adicionalmente podem ocorrer problemas de continuidade de solução, pois para uma dada configuração espacial podem corresponder mais de uma configuração no espaço das juntas, sendo então necessário escolher a configuração mais adequada de forma a manter a continuidade das variáveis de junta.

Contrariamente às trajetórias no espaço das juntas, no espaço cartesiano nem sempre escolhe-se como caminho uma reta. Na verdade, o caminho é basicamente uma função da tarefa a ser desempenhada pelo robô. Neste caso, a sua parametrização em função do tempo merece especial atenção, pois o caminho for diferente

de uma reta no espaço cartesiano, as formas expressões das trajetórias para cada variável cartesiana serão diferentes entre si.

**Exemplo 2** *Para um robô de três graus de liberdade executar uma reta no espaço cartesiano, o caminho devem ser tal que*

$$\begin{aligned}y(t) &= a_1 x(t) + a_0 \\z(t) &= b_1 x(t) + b_0\end{aligned}$$

*Supondo que o perfil de velocidade seja tal que  $x(t)$  tenha a forma de um polinômio  $p_x(t)$ , tem-se que*

$$\begin{aligned}y(t) &= a_1 p_x(t) + a_0 = p_y(t) \\z(t) &= b_1 p_x(t) + b_0 = p_z(t)\end{aligned}$$

*sendo  $p_y(t)$  e  $p_z(t)$  polinômios de mesma ordem que  $p_x(t)$ , apenas com coeficientes diferentes.*

*Cada ponto  $(x(t), y(t), z(t))$  deve ainda ser mapeado através do modelo cinemático inverso para o espaço das juntas, de forma a se obter os valores das variáveis de junta  $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ .*

**Exemplo 3** *Se, por outro lado, desejar-se que o mesmo robô execute um arco de circunferência no plano horizontal centrado na origem do espaço cartesiano, as variáveis cartesianas devem ser tais que*

$$\begin{aligned}x^2(\tau) + y^2(\tau) &= r^2 \\z(\tau) &= z(0)\end{aligned}$$

*que pode ser parametrizado na forma*

$$\begin{aligned}x(\tau) &= r \cos(\tau) \\y(\tau) &= r \sin(\tau)\end{aligned}$$

*com  $\tau \mapsto [0, 2\pi]$ .*

*Supondo que o perfil de velocidade seja tal que  $\tau(t)$  tenha a forma de um polinômio  $p(t)$ , tem-se que*

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos(p(t)) \\y(t) &= a \sin(p(t)) \\z(t) &= z(0)\end{aligned}$$

que resulta em curvas com formas diferentes para  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ .

Cada ponto  $(x(t), y(t), z(t))$  deve ainda ser mapeado através do modelo cinemático inverso para o espaço das juntas, de forma a se obter os valores das variáveis de junta  $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ .

É interessante notar que a forma de calcular os coeficientes para a trajetória é exatamente a mesma, independentemente se é desejada uma trajetória no espaço das juntas ou no espaço cartesiano. As diferenças estão apenas na parametrização da trajetória em função do tempo, ou seja, no perfil de velocidade imposto e no mapeamento do espaço cartesiano para o espaço das juntas, se for o caso.

## 2 Tipos de Trajetórias (Perfis de Velocidade)

A escolha do perfil de velocidade é uma decisão importante na implementação de um gerador de trajetórias. A trajetória, além de ser factível, deve ser computacionalmente tratável. Polinômios são uma escolha conveniente para representação de trajetórias porque suas propriedades são bem conhecidas e suas derivadas podem ser calculadas facilmente e são também polinômios.

### 2.1 Trajetória Degrau (Perfil de Velocidade Delta de Dirac)

Devido às características do movimento ponto-a-ponto, tende-se a considerar a utilização de trajetórias do tipo degrau de posição, nas quais o perfil de velocidade é um delta de Dirac. Esta abordagem simplifica o problema de rastreamento da trajetória, que passa a ser um problema de *setting-point*, ou seja:

$$q_i(t) = q_{ref}$$

No entanto, esta estratégia mostra-se desaconselhável, pois produz movimentos difíceis de serem previstos, visto que todas as juntas começam a se mover simultaneamente e param conforme vão atingindo suas posições de referência. Além disso, várias juntas movem-se com maior velocidade do que seria necessário caso fosse realizado um movimento coordenado (com todas as juntas partindo e parando simultaneamente), sofrendo um maior *stress* e produzindo perturbações

maiores do que o necessário nas demais juntas. Como as trajetórias percorridas fisicamente pelo manipulador devem ser contínuas em posição e velocidade, tendo-se um degrau como trajetória de referência, haverá um grande erro de rastreamento nos instantes iniciais da trajetória, o que impossibilita a utilização de algumas estratégias avançadas de controle, que assumem um erro de rastreamento pequeno o suficiente para que se possa utilizar um modelo linearizado em torno de um ponto de operação.

## 2.2 Trajetória com Taxa Limitada (Perfil de Velocidade com Limite de Velocidade)

Para evitar um degrau excessivo na referência, uma estratégia comum é limitar a taxa de variação, ou seja, impor uma velocidade máxima. Com isso a trajetória é dada por:

$$\begin{aligned} q_i(0) &= q_{i0} \\ q_i(t_f) &= q_{if} \\ q_i(t) &= \begin{cases} q_{if} & \text{se } |q_{if} - q_i(t - T)| < V_{imax}T \\ q_i(t - T) + \text{sgn}(q_{if} - q_i(t - T)) V_{imax}T & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $q_{i0}$  e  $q_{if}$  são a posição inicial e final da junta  $i$ ,  $V_{imax}$  é a velocidade máxima (em módulo) para a junta  $i$  e  $T$  é o período de amostragem.

## 2.3 Trajetórias Lineares (Perfil de Velocidade Retangular)

A forma mais simples de trajetória polinomial é impor uma variação linear da posição em função do tempo. Assim, para este tipo de trajetória tem-se

$$q_i(t) = a_{i1}t + a_{i0}$$

Considerando-se as restrições de posição inicial  $q_i(0) = q_{i0}$  e final  $q_i(t_f) = q_{if}$  tem-se

$$\begin{aligned} q_i(0) &= a_{i0} \\ q_i(t_f) &= a_{i1}t_f + a_{i0} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} a_{i0} &= q_{i0} \\ a_{i1} &= \frac{q_{if} - q_{i0}}{t_f} \end{aligned}$$

## 2.4 Trajetórias Cúbicas (Perfil de Velocidade Parabólico)

Trajetórias lineares são problemáticas porque implicam velocidade constante e consequentemente acelerações descontínuas nos instantes iniciais e finais. Adicionalmente, é comum a situação em que se deseja implementar uma trajetória completa a partir de trajetórias mais simples. Nestes casos frequentemente deseja-se ter segmentos de trajetórias que iniciam e terminam com velocidades diferentes de zero, para serem utilizadas nos segmentos internos da trajetória completa. Para estes casos, deseja-se ter uma trajetória onde se possa impor tanto as posições iniciais e finais quanto as velocidades iniciais e finais. Como neste caso tem-se quatro restrições, torna-se necessário a utilização de um polinômio cúbico, para que se possa acomodar todas as restrições. Assim, tem-se

$$q_i(t) = a_{i3}t^3 + a_{i2}t^2 + a_{i1}t + a_{i0}$$

Considerando-se as restrições de posição inicial  $q_i(0) = q_{i0}$  e final  $q_i(t_f) = q_{if}$  e as restrições de velocidade inicial  $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0}$  e final  $\dot{q}_i(t_f) = \dot{q}_{if}$ , tem-se

$$\begin{aligned} q_i(0) &= a_{i0} \\ q_i(t_f) &= a_{i3}t_f^3 + a_{i2}t_f^2 + a_{i1}t_f + a_{i0} \\ \dot{q}_i(0) &= a_{i1} \\ \dot{q}_i(t_f) &= 3a_{i3}t_f^2 + 2a_{i2}t_f + a_{i1} \end{aligned}$$

ou

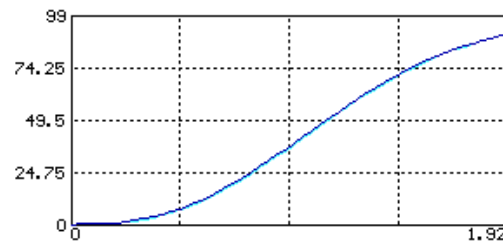
$$\begin{aligned} a_{i0} &= q_{i0} \\ a_{i1} &= \dot{q}_{i0} \\ a_{i2} &= \frac{3}{t_f^2}(q_{if} - q_{i0}) - \frac{2}{t_f}\dot{q}_{i0} - \frac{1}{t_f}\dot{q}_{if} \\ a_{i3} &= -\frac{2}{t_f^3}(q_{if} - q_{i0}) + \frac{1}{t_f^2}(\dot{q}_{if} + \dot{q}_{i0}) \end{aligned}$$

## 2.5 Trajetórias Polinomiais de Quinto Grau

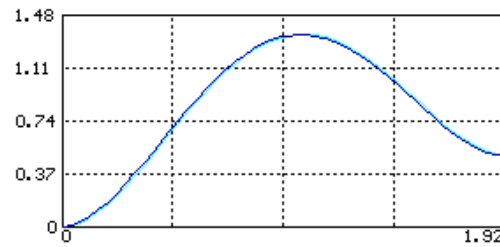
De forma a satisfazer as restrições de posição, velocidade e aceleração impostas às trajetórias factíveis, pode-se utilizar um polinômio de quinto grau. Neste caso, as restrições de continuidade são automaticamente satisfeitas. As restrições de posição, velocidade e aceleração nos pontos inicial e final podem então ser satisfeitas determinando-se adequadamente os coeficientes do polinômio, como será apresentado no item 2.5

*Splines* cúbicos têm sido propostos [11, 9], no entanto, este tipo de trajetória utiliza vários segmentos, enquanto que um único polinômio de quinto grau pode representar a trajetória inteira.

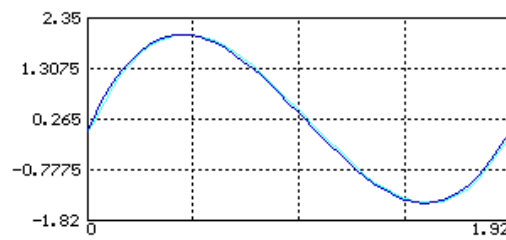
Na Figura 1 é mostrada uma trajetória polinomial de quinto grau. Pode-se notar que a aceleração permanece em seus valores máximos por pouco tempo e que quando a velocidade atinge valores elevados a aceleração é reduzida. Desta forma o torque máximo do atuador é exigido por pouco tempo, deixando margem de torque para a ação do controlador.



(a) Posição  $\times$  tempo.



(b) Velocidade  $\times$  tempo.



(c) Aceleração  $\times$  tempo.

Figura 1: Trajetória polinomial de quinto grau.

Utilizando-se trajetórias polinomiais de quinto grau percorre-se nos primeiros instantes de 70% a 80% da distância percorrida no mesmo tempo utilizando-se uma trajetória com velocidade trapezoidal. Conforme o tempo de movimento aumenta, a distância percorrida pela trajetória polinomial de quinto grau aproxima-

se ou até supera a distância percorrida por uma trajetória com velocidade trapezoidal [1].

Uma trajetória polinomial de quinto grau pode ser descrita por um conjunto de  $n$  polinômios da forma

$$q_i(t) = a_{i5}t^5 + a_{i4}t^4 + a_{i3}t^3 + a_{i2}t^2 + a_{i1}t + a_{i0} \quad (1)$$

onde

$n$  = número de juntas do manipulador;

$q_i(t)$  = posição instantânea da  $i$ -ésima variável de junta,  $i = 1, \dots, n$ ;

$a$  = coeficientes do polinômio,  $i = 1, \dots, n$   $j = 0, \dots, 5$  e

$t$  = tempo.

Como cada junta obedece a uma expressão da forma (1), a trajetória resultante será uma reta no espaço das juntas do manipulador.

Derivando-se a expressão (1) em relação ao tempo, obtém-se as seguintes expressões para as velocidades e acelerações instantâneas das juntas

$$\dot{q}_i(t) = 5a_{i5}t^4 + 4a_{i4}t^3 + 3a_{i3}t^2 + 2a_{i2}t + a_{i1} \quad (2)$$

$$\ddot{q}_i(t) = 20a_{i5}t^3 + 12a_{i4}t^2 + 6a_{i3}t + 2a_{i2} \quad (3)$$

O planejamento da trajetória consiste em calcular-se os coeficientes  $a_{ij}$  de tal forma que as variáveis de juntas  $q_i(t)$  e suas derivadas  $\dot{q}_i(t)$  e  $\ddot{q}_i(t)$  desloquem-se de seus valores iniciais  $q_i(t_0)$ ,  $\dot{q}_i(t_0)$  e  $\ddot{q}_i(t_0)$  até seus valores finais  $q_i(t_f)$ ,  $\dot{q}_i(t_f)$  e  $\ddot{q}_i(t_f)$  quando  $t$  varia de seu valor inicial  $t_0$  à seu valor final  $t_f$ . Para tanto, basta aplicar as condições iniciais e finais às expressões (1-3), obtendo-se

$$q_i(t_0) = a_{i5}t_0^5 + a_{i4}t_0^4 + a_{i3}t_0^3 + a_{i2}t_0^2 + a_{i1}t_0 + a_{i0} \quad (4)$$

$$\dot{q}_i(t_0) = 5a_{i5}t_0^4 + 4a_{i4}t_0^3 + 3a_{i3}t_0^2 + 2a_{i2}t_0 + a_{i1} \quad (5)$$

$$\ddot{q}_i(t_0) = 20a_{i5}t_0^3 + 12a_{i4}t_0^2 + 6a_{i3}t_0 + 2a_{i2} \quad (6)$$

$$q_i(t_f) = a_{i5}t_f^5 + a_{i4}t_f^4 + a_{i3}t_f^3 + a_{i2}t_f^2 + a_{i1}t_f + a_{i0} \quad (7)$$

$$\dot{q}_i(t_f) = 5a_{i5}t_f^4 + 4a_{i4}t_f^3 + 3a_{i3}t_f^2 + 2a_{i2}t_f + a_{i1} \quad (8)$$

$$\ddot{q}_i(t_f) = 20a_{i5}t_f^3 + 12a_{i4}t_f^2 + 6a_{i3}t_f + 2a_{i2} \quad (9)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (4-9), que possui solução única, tem-se as expressões para o cálculo dos coeficientes  $a_{ij}$



$$a_{i5} = \frac{t_f [(\ddot{q}_{if} - \ddot{q}_{i0}) t_f - 6 (\dot{q}_{if} + \dot{q}_{i0})] + 12 (q_{if} - q_{i0})}{2t_f^5} \quad (10)$$

$$a_{i4} = \frac{t_f [16\dot{q}_{i0} + 14\dot{q}_{if} + (3\ddot{q}_{i0} - 2\ddot{q}_{if}) t_f] + 30 (q_{i0} - q_{if})}{2t_f^4} \quad (11)$$

$$a_{i3} = \frac{t_f [(\ddot{q}_{if} - 3\ddot{q}_{i0}) t_f - 8\dot{q}_{if} - 12\dot{q}_{i0}] + 20 (q_{if} - q_{i0})}{2t_f^3} \quad (12)$$

$$a_{i2} = \frac{\ddot{q}_{i0}}{2} \quad (13)$$

$$a_{i1} = \dot{q}_{i0} \quad (14)$$

$$a_{i0} = q_{i0} \quad (15)$$

onde

$$q_{i0} = q_i(t_0);$$

$$\dot{q}_{i0} = \dot{q}_i(t_0);$$

$$\ddot{q}_{i0} = \ddot{q}_i(t_0);$$

$$q_{if} = q_i(t_f);$$

$$\dot{q}_{if} = \dot{q}_i(t_f);$$

$$\ddot{q}_{if} = \ddot{q}_i(t_f).$$

## 2.6 Trajetórias Lineares com Suavização Parabólica (Perfil de Velocidade Trapezoidal)

Trajetórias com interpolação linear simples causam discontinuidades na velocidade no início e no final do movimento, ou seja, implicam aceleração infinita e portanto não são fisicamente factíveis. Para criar uma trajetória suave em posição e velocidade, pode-se adicionar suavizações parabólicas no início e no final de uma trajetória linear, gerando um perfil de velocidade trapezoidal.

Neste tipo de trajetória o manipulador é acionado com aceleração constante até atingir a velocidade desejada, move-se nesta velocidade e a seguir é desacelerado constantemente até atingir o ponto final da trajetória, gerando um perfil trapezoidal para a velocidade. Ou seja, tem-se:

$$q_i(t) = \begin{cases} a_{i2}t^2 + a_{i1}t + a_{i0} & ; 0 \leq t \leq t_1 \\ b_{i1}(t - t_1) + b_{i0} & ; t_1 \leq t \leq t_2 \\ c_{i2}(t - t_2)^2 + c_{i1}(t - t_2) + c_{i0} & ; t_2 \leq t \leq t_f \end{cases}$$

Assim, para o intervalo  $0 \leq t \leq t_1$  tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i(t) &= 2a_{i2}t + a_{i1} \\ \ddot{q}_i(t) &= 2a_{i2}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}q_i(0) &= a_{i0} \\ \dot{q}_i(0) &= a_{i1} \\ \ddot{q}_i(0) &= 2a_{i2} \\ q_i(t_1) &= a_{i2}t_1^2 + a_{i1}t_1 + a_{i0} \\ \dot{q}_i(t_1) &= 2a_{i2}t_1 + a_{i1}\end{aligned}$$

Considerando-se as restrições de posição inicial  $q_i(0) = q_{i0}$  e velocidade inicial  $\dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i0}$  e que a aceleração é constante no intervalo e igual  $a_{imax}$  e que a velocidade máxima  $v_{imax}$  é atingida no final do intervalo tem-se:

$$\begin{aligned}a_{i0} &= q_{i0} \\ a_{i1} &= \dot{q}_{i0} \\ a_{i2} &= \frac{a_{imax}}{2} \\ t_1 &= \frac{v_{imax} - a_{i1}}{2a_{i2}} = \frac{v_{imax} - \dot{q}_{i0}}{a_{imax}}\end{aligned}$$

Para o intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  tem-se:

$$\begin{aligned}q_i(t_1) &= b_{i0} \\ \dot{q}_i(t_1) &= b_{i1} \\ q_i(t_2) &= b_{i1}(t_2 - t_1) + b_{i0} \\ \dot{q}_i(t_2) &= b_{i1}\end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned}b_{i0} &= a_{i2}t_1^2 + a_{i1}t_1 + a_{i0} = \frac{(v_{imax} - \dot{q}_{i0})^2}{2a_{imax}} + \frac{\dot{q}_{i0}v_{imax} - \dot{q}_{i0}^2}{a_{imax}} + q_{i0} \\ b_{i0} &= \frac{v_{imax}^2 - 2v_{imax}\dot{q}_{i0} + \dot{q}_{i0}^2 + 2\dot{q}_{i0}v_{imax} - 2\dot{q}_{i0}^2}{2a_{imax}} + q_{i0} \\ b_{i0} &= \frac{v_{imax}^2 - \dot{q}_{i0}^2}{2a_{imax}} + q_{i0}\end{aligned}$$

e considerando que no intervalo a velocidade é constante:

$$b_{i1} = v_{imax}$$

Para o intervalo  $t_2 \leq t \leq t_f$  tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i(t) &= 2c_{i2}(t - t_2) + c_{i1} \\ \ddot{q}_i(t) &= 2c_{i2}\end{aligned}$$

e portanto

$$q_i(t_2) = c_{i0} \quad (16)$$

$$\dot{q}_i(t_2) = c_{i1} = v_{imax} \quad (17)$$

$$\ddot{q}_i(t) = 2c_{i2} = -a_{imax} \quad (18)$$

$$q_i(t_f) = c_{i2}(t_f - t_2)^2 + c_{i1}(t_f - t_2) + c_{i0} \quad (19)$$

$$\dot{q}_i(t_f) = 2c_{i2}(t_f - t_2) + c_{i1} \quad (20)$$

ou

$$c_{i0} = b_{i1}(t_2 - t_1) + b_{i0} \quad (21)$$

$$c_{i1} = v_{imax} \quad (22)$$

$$c_{i2} = -\frac{a_{imax}}{2} \quad (23)$$

De (20):

$$t_f - t_2 = \frac{\dot{q}_{if} - v_{imax}}{a_{imax}}$$

que substituída em (19): resulta:

que resulta:

$$c_{i0} = q_{if} - \frac{\dot{q}_{if}^2 - v_{imax}^2}{2a_{imax}}$$

De (21):

$$\begin{aligned}t_2 &= \frac{c_{i0} - b_{i0}}{b_{i1}} + t_1 \\ &= \frac{q_{if} - q_{i0}}{v_{imax}} - \frac{\dot{q}_{if}^2 - \dot{q}_{i0}^2}{2a_{imax}v_{imax}} + \frac{v_{imax} - \dot{q}_{i0}}{a_{imax}}\end{aligned}$$

De (20):

$$\begin{aligned}
t_f &= \frac{\dot{q}_{if} - c_{i1}}{2c_{i2}} + t_2 \\
&= \frac{\dot{q}_{if} - v_{imax}}{a_{imax}} + \frac{c_{i0} - b_{i0}}{b_{i1}} + \frac{v_{imax} - \dot{q}_{i0}}{a_{imax}} \\
&= \frac{\dot{q}_{if} - \dot{q}_{i0}}{a_{imax}} + \frac{c_{i0} - b_{i0}}{b_{i1}} \\
&= \frac{\dot{q}_{if} - \dot{q}_{i0}}{a_{imax}} + \frac{q_{if} - q_{i0}}{v_{imax}} - \frac{\dot{q}_{if}^2 - \dot{q}_{i0}^2}{2a_{imax}v_{imax}}
\end{aligned}$$

De modo a permitir o rastreamento da trajetória, a aceleração e a velocidade devem ser escolhidas de forma conservativa, para que exista uma certa margem de torque para a atuação do controlador, distanciando ainda mais o desempenho do manipulador dos seus limites [1].

Uma sofisticação para que este tipo de trajetória é a suavização da aceleração empregando-se algum tipo de interpolação nos pontos de descontinuidade da aceleração, o que complica a implementação e reduz o desempenho deste tipo de trajetória.

## 2.7 Trajetórias de Tempo Mínimo

Trajetórias de tempo mínimo usualmente utilizam ao máximo as potencialidades do manipulador. No entanto, estas trajetórias são bastante descontínuas em aceleração, frequentemente gerando trajetórias *bang-bang* [10]. Como estas trajetórias operam o manipulador sobre a sua curva de torque máximo  $\times$  velocidade, não deixam margem de torque para a atuação do controlador.

Normalmente, para a obtenção destas trajetórias é necessário a utilização de algoritmos de busca em grafos e algoritmos de otimização numérica, sendo portanto computacionalmente dispendiosa, impossibilitando a sua aplicação em sistemas que devem operar *on-line*, como pode ser observado pelos tempos de processamento obtidos por [9]. Estas trajetórias podem ser interessantes para sistemas que operam com tarefas repetitivas, pois a geração de trajetória pode ser feita *off-line*, e o tempo necessário para que seja calculada não é crítico.

Trajetórias deste tipo não podem ser divididas em uma fase de planejamento e uma fase expansão da trajetória em tempo real. O planejamento deste tipo de trajetória requer a expansão da trajetória completa, o que pode levar a um desperdício computacional caso a trajetória deva ser modificada durante o movimento.

### 3 Trajetórias Factíveis

Tradicionalmente o problema de movimentação de manipuladores robóticos é abordado de forma particionada. Tem-se um gerador de trajetória, responsável por calcular um histórico temporal das posições, velocidades e acelerações desejadas, em geral operando *off-line*, seguido por um rastreamento *on-line* desta trajetória de referência. Esta divisão permite o rastreamento da trajetória utilizando-se controladores simples [10] (por exemplo, PID), que ignoram as não-linearidades no modelo do manipulador.

Analogamente, o problema de geração de trajetória pode ser dividido em uma fase de planejamento, onde parâmetros que descrevem trajetória são calculados e uma fase de expansão da trajetória, onde os valores de posição, velocidade e aceleração de cada ponto da trajetória são efetivamente calculados.

As tarefas normalmente atribuídas a manipuladores robóticos exigem basicamente dois tipos de movimentos: a) ponto-a-ponto e b) contínuos. Em movimentos ponto-a-ponto, o manipulador deve mover-se de um lugar para outro sem a necessidade de seguir uma trajetória especificada. Este tipo de movimento é em geral utilizado em tarefas de *pick-and-place*, como por exemplo a inserção de componentes em uma placa de circuito impresso. Por outro lado, existem tarefas, como solda a arco ou pintura, nas quais devem ser utilizados movimentos contínuos, normalmente com trajetórias e velocidades determinadas convenientemente [7]. Aqui será considerado o problema de geração de trajetória para tarefas ponto-a-ponto, pois neste caso o planejamento é mais crítico, pois para movimentos contínuos a própria tarefa especifica a trajetória.

A complexa dinâmica acoplada dos manipuladores é, geralmente, desconsiderada no problema de planejamento de trajetória [2, 6], originando em geral, trajetórias demasiadamente conservativas e ineficientes. Obviamente esta ineficiência pode ser eliminada explorando-se o modelo dinâmico do manipulador.

Uma trajetória é dita factível se puder ser realizada fisicamente pelo manipulador. Logo, esta trajetória deve obedecer a certas restrições impostas pelas características cinemáticas e dinâmicas do manipulador. Os valores assumidos pelas variáveis de junta quando da expansão desta trajetória devem estar dentro dos limites admitidos pela estrutura mecânica do manipulador. Como os torques fornecidos pelos atuadores para movimentar o manipulador são finitos, conclui-se que a trajetória deve possuir valores finitos para as acelerações das juntas, sendo portanto contínua em velocidade e posição. Adicionalmente, é conveniente que a trajetória também seja contínua em aceleração, pois trajetórias que apresentam *jerk* (derivada da aceleração) elevado tendem a excitar ressonâncias mecânicas no manipulador, causando vibrações [2].

Os valores de velocidade das juntas e dos torques aplicados para que o manipulador percorra a trajetória devem estar abaixo da curva de torque máximo  $\times$  ve-

locidade do atuador. Do modelo dinâmico do manipulador, dado por [3]

$$\tau = M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) \quad (24)$$

observa-se que a aceleração máxima de cada junta é função dos torques, posições e velocidades de todas as juntas do manipulador. Estas restrições impostas pela dinâmica do manipulador são frequentemente [2, 3, 11] consideradas impondo-se limites constantes para as velocidades, acelerações e torques nas juntas do manipulador. Contudo esta abordagem não é realista pois os limites reais são determinados por relações complexas dadas pela expressão (24) e pela curva de torque máximo  $\times$  velocidade do atuador. Para que estes limites possam ser tomados como constantes, devem ser utilizados valores por demais conservativos, que não permitem explorar totalmente as capacidades do manipulador.

### 3.1 Modelo do Atuador

Para que se possa planejar trajetórias que explorem ao máximo as capacidades do manipulador é necessário considerar a curva de torque máximo  $\times$  velocidade do atuador, no caso um motor DC. Aqui será considerada uma aproximação desta curva descrita pelos parâmetros  $T_{\text{clip}}$ ,  $T_{\text{máx}}$  e  $k$ , de modo que o torque disponível no eixo do atuador,  $T$ , em função da velocidade do atuador,  $v$ , seja dado por

$$\max(-T_{\text{clip}}, -T_{\text{máx}} - kv) \leq T \leq \min(T_{\text{clip}}, T_{\text{máx}} - kv) \quad (25)$$

Estes parâmetros são calculados a partir das características dos atuadores pelas expressões

$$T_{\text{clip}} = K_t I_{\text{máx}} \quad (26)$$

$$T_{\text{máx}} = K_t \frac{V_{\text{máx}}}{R} \quad (27)$$

$$k = K_t \frac{K_e}{R} \quad (28)$$

onde

$K_t$  = constante de torque;

$I_{\text{máx}}$  = corrente máxima;

$V_{\text{máx}}$  = tensão máxima;

$R$  = resistência do enrolamento; e

$K_e$  = constante de força contra-eletromotriz.

## 3.2 Determinação do Instante Final e da Factibilidade

Em geral, deseja-se planejar trajetórias que sejam factíveis e alcancem o ponto final no menor tempo possível. Para tanto, em [1] é proposto um algoritmo baseado na margem de aceleração, definida como a diferença entre a aceleração que pode ser gerada pelo acionador de uma junta e a aceleração que se pretende dar à junta correspondente. Se esta margem de aceleração for menor do que zero em algum ponto, a trajetória não é factível. A trajetória polinomial de quinto grau de tempo mínimo é tal que a margem de aceleração é nula em pelo menos um ponto, já que esta trajetória utiliza ao máximo as características de aceleração e desaceleração dos acionadores. Sem perda de generalidade, pode-se assumir que o instante inicial  $t_0 = 0$ , de modo que o problema de determinar a duração ótima da trajetória reduz-se a determinar o instante final ótimo.

### 3.2.1 Método da Margem de aceleração

Da definição de margem de aceleração e utilizando-se a expressão (24), desprezando-se  $V(q, \dot{q})$  e (25), considerando-se apenas os limites positivos, tem-se

$$a_{mi} = \frac{\min \left( T_{\text{clip}}, T_{\text{máx}} - kN\dot{q}_i \right) - \sum_{i \neq j} M_{ij}(q)\ddot{q}_j + G_i(q)}{M_{ii}(q)} - \ddot{q}_i \quad (29)$$

onde

$a_{mi}$  = margem de aceleração i-ésima junta e

$N$  = relação de engrenagens i-ésima junta

Como  $\dot{q}_i$  e  $\ddot{q}_i$  são polinômios de quarto e terceiro grau, respectivamente, e os termos  $V$  da expressão (24) foram desprezados, tem-se que a margem de aceleração será um polinômio de quarto grau no tempo. Derivando-se em relação ao tempo e igualando-se a zero, obtém-se uma equação cúbica, que pode ser resolvida analiticamente para obtenção do tempo final ótimo para a junta  $i$ . O tempo final ótimo válido para todas as juntas será então o máximo dos tempos ótimos de cada junta.

### 3.2.2 Método da Margem de Torque

O método da margem de aceleração, apresentado em [1], embora forneça uma solução em forma fechada para o instante final da trajetória, despreza os efeitos das forças centrífugas e de Coriolis, de modo a obter uma expressão tratável

analiticamente. Por outro lado, observando-se a expressão (24), nota-se que estes efeitos tornam-se mais significativos com o aumento da velocidade de operação do manipulador. Como uma trajetória de tempo mínimo em geral aciona o manipulador em altas velocidades, desconsiderar estes efeitos pode levar ao planejamento de uma trajetória por demais otimista. Estas limitações podem ser superadas introduzindo-se algumas generalizações no método proposto em [1].

Defina-se, inicialmente, margem de torque como sendo a diferença entre o torque que pode ser gerado pelo acionador de uma junta e o torque necessário para acionar a junta correspondente com a aceleração, velocidade e posição desejadas. Se esta margem de torque for menor do que zero em algum ponto, a trajetória não é factível. A trajetória polinomial de quinto grau de tempo mínimo é tal que a margem de torque é nula em pelo menos um ponto. Através de desenvolvimento semelhante ao item 3.2.1 obtém-se

$$T_{mi} = \min \left( T_{\text{clip}}, T_{\text{máx}} - kN\dot{q}_i \right) - \sum_{j=1}^n M_{ij}(q)\ddot{q}_j + V_i(q, \dot{q}) + G_i(q) \quad (30)$$

Observando-se que o termo  $V(q, \dot{q})$  inclui produtos cruzados dos elementos de  $\dot{q}(t)$ , pode-se concluir que  $T_{mi}$  será um polinômio de oitavo grau no tempo, e portanto não é mais possível obter-se uma solução em forma fechada para o instante final da trajetória. É necessário então utilizar-se métodos numéricos para calcular raízes de equações, sendo o método de Brent [8] particularmente eficiente. Deve ser ressaltado que este método requer a determinação a priori de um intervalo contendo a raiz.

Ao invés de se obter o tempo final ótimo para cada junta e tomar-se o maior deles, como é feito no método da margem de aceleração, define-se a margem de torque global

$$T_m = \min (T_{mi}) \quad (31)$$

e utiliza-se o algoritmo de Brent para determinar o tempo ótimo global.

Como pontos iniciais para o algoritmo de determinação do intervalo onde se encontra a raiz, são utilizados os pontos correspondentes a  $t_{f1} = T$  e  $t_{f2} = 2T$ , sendo  $T$  o período de amostragem do sistema de controle. Em geral estes dois pontos possuem margem de torque negativa, pois implicam velocidades elevadas. Caso os pontos iniciais possuam margem de torque maior ou igual a zero, o menor deles será o ponto ótimo global.



## 4 Aplicações

Como exemplo de aplicação considere-se que é desejado movimentar o manipulador ITA-IEMP [4, 5] da configuração  $q = [0 \ 60 \ -90]^T$  graus e  $\dot{q} = [0 \ 0 \ 0]^T$  rd/s para a configuração  $q = [90 \ 0 \ -120]^T$  graus e  $\dot{q} = [0 \ 0 \ 0]^T$  rd/s.

Utilizando-se o método da margem de torque obtém-se  $t_f = 1.51s$ . A Tabela 1 apresenta a evolução da margem de torque e do tempo final em função do número de iteração do algoritmo de Brent.

Tabela 1: Evolução da margem de torque e do tempo final.

Iterações	Tempo Final	Margem de Torque
1	1.73104	0.281187
2	1.72854	0.281187
3	1.72854	0.281187
4	1.66664	0.281187
5	1.66664	0.281187
6	1.46729	-0.137738
7	1.46729	-0.137738
8	1.51713	0.0289793
9	1.51713	0.0289793
10	1.50467	-0.116763
11	1.5109	0.0087347
12	1.50778	-0.00144768

Nas Figuras 2- 5 tem-se as curvas de posição, velocidade, aceleração e torque para este movimento, utilizando-se um controlador de perturbação adaptativo, com um período de amostragem de 10 ms. Deve ser notado que, neste caso, o tempo ótimo foi determinado pela junta 1 e que o torque nesta junta se mantém próximo do valor máximo por pouco tempo. As curvas de posição e velocidade são relativamente suaves. Devido à ação do controlador e à escala dos gráficos não é possível perceber o erro entre a referência e os valores reais de posição e velocidade. No gráfico da aceleração é possível perceber o erro de aceleração, pois esta variável é a derivada das duas últimas e portanto os ruídos presentes naquelas são amplificados.

## Referências

- [1] R. L. Andersson. Aggressive trajectory generator for a robot ping-pong player. *IEEE Control Systems Magazine*, 9(1):15–21, Feb 1989.

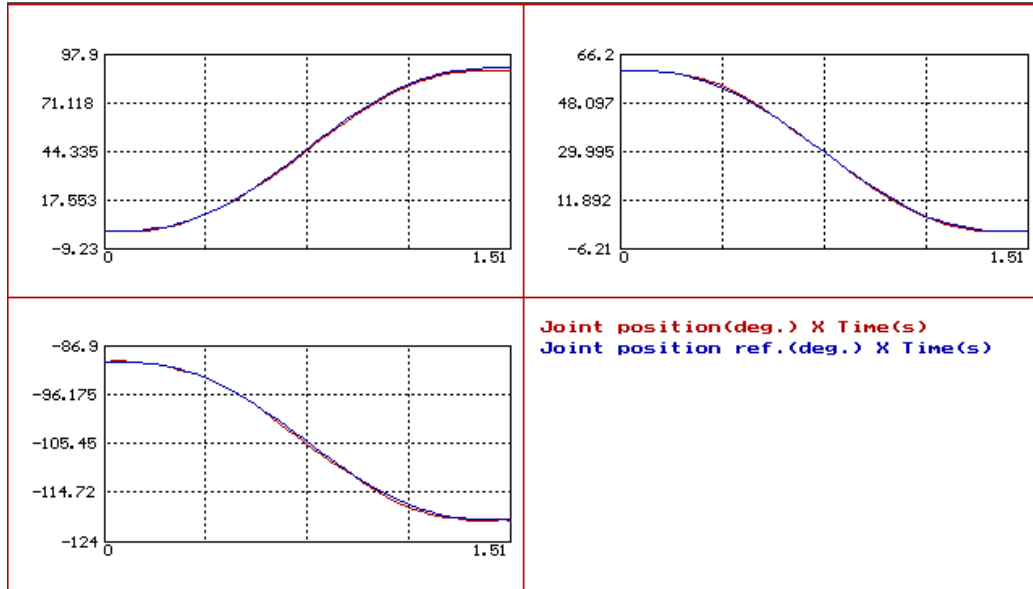


Figura 2: Posição  $\times$  tempo da trajetória ótima.

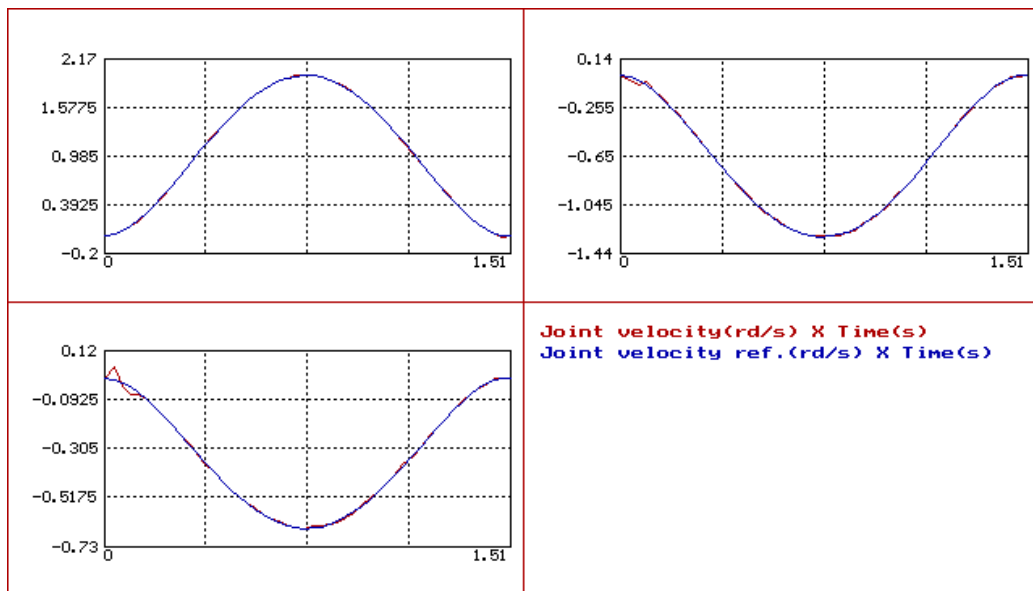


Figura 3: Velocidade  $\times$  tempo da trajetória ótima.

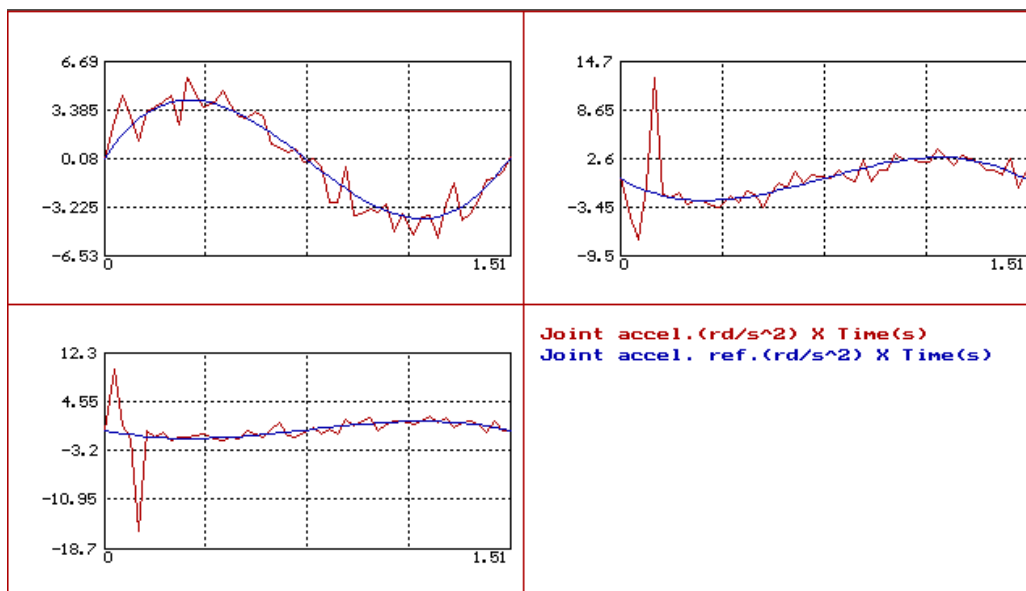


Figura 4: Aceleração  $\times$  tempo da trajetória ótima.

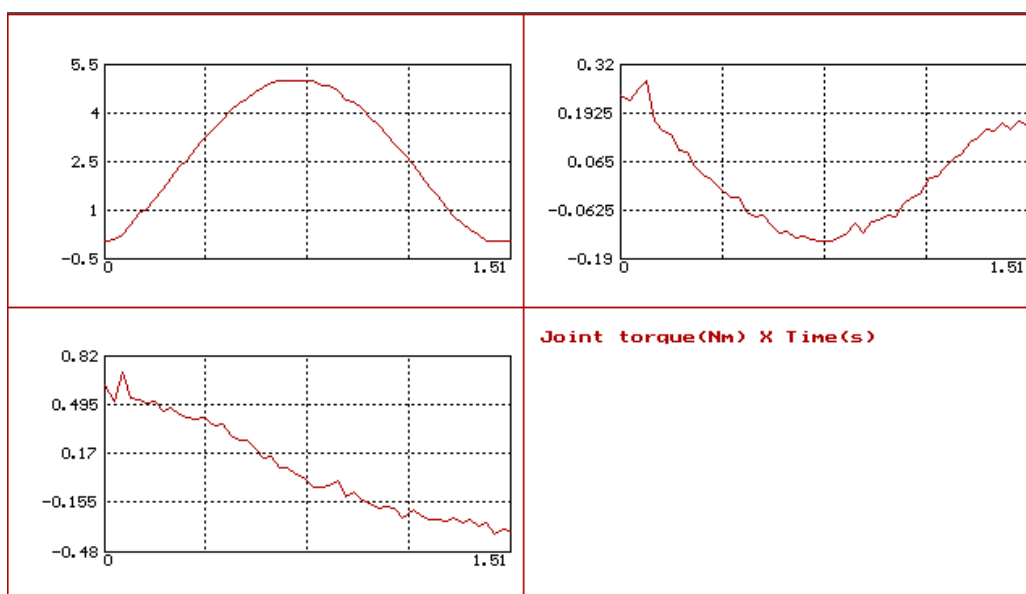


Figura 5: Torque  $\times$  tempo da trajetória ótima.

- [2] J. J. Craig. *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1989.
- [3] K. S. Fu, R. C. Gonzales, and C. S. G. Lee. *Robotics Control, Sensing, Vision and Intelligence*. Industrial Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [4] W. F. Lages and E. M. Hemerly. Planejamento de tarefas para manipuladores robóticos com realimentação visual. In *Anais do XV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, São Carlos, SP, set 1992.
- [5] W. F. Lages and E. M. Hemerly. Supervisão e controle de manipuladores robóticos dotados de visão. In *Anais do XII Seminário de Ciências Exatas e Engenharias da Universidade Estadual Paulista*, Guaratinguetá, SP, nov 1992.
- [6] R. P. Paul. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. The MIT Press Series in Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
- [7] E. P. Popov and E. I. Yurevich. *Robotics*. Mir Publishers, Moscow, 1987.
- [8] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992.
- [9] Z. Shiller and S. Dubowsky. On computing the global time-optimal motion of robotic manipulators in the presence of obstacles. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(6):785–797, Dec 1991.
- [10] K. G. Shin and N. D. McKay. Minimum-time control of robotic manipulators with geometric path constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(6):531–541, Jun 1985.
- [11] C. shin Lin, P. rong Chang, and J. Y. S. Luh. Formulation and optimization of cubic polynomial joint trajectories for industrial robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(12):189–186, Dec 1983.