UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Wenderson Gustavo Serrantola

Planejamento de Rota e Trajetória para Manipulador Planar de Base Livre Flutuante com Dois Braços

São Carlos

Wenderson Gustavo Serrantola

Planejamento de Rota e Trajetória para Manipulador Planar de Base Livre Flutuante com Dois Braços

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Prof. Dr. Valdir Grassi Junior

São Carlos 2018

Trata-se da versão corrigida da dissertação. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Serrantola, Wenderson Gustavo

S487p

Planejamento de rota e trajetória para manipulador planar de base livre flutuante com dois braços / Wenderson Gustavo Serrantola; orientador Valdir Grassi Jr. São Carlos, 2018.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

1. Manipulador espacial. 2. Manipulador dinamicamente equivalente. 3. Planejamento de movimento. 4. RRT. 5. OMPL. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro WENDERSON GUSTAVO SERRANTOLA.

Título da dissertação: "Planejamento de rota e trajetória para manipulador planar de base livre flutuante com dois braços".

Data da defesa: 25/09/2018.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. Valdir Grassi Junior (Orientador)

Aprovado

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Associado **Adriano Almeida Gonçalves Siqueira** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Profa. Dra. **Tatiana de Figueiredo Pereira Alves Taveira Pazelli**(Universidade Federal de São Carlos / UFSCar)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica: Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação: Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**



AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus.

Agradeço aos meus pais, José e Carmen, por terem sido fundamentais nessa jornada, sem eles não seria possivel a conclusão desse sonho.

Às minhas irmãs Gisele e Michelle e à minha namorada Marina, por todo o apoio dado e pela participação durante esse grande passo em minha vida.

À todos os familiares que sempre acreditaram em mim.

Ao Professor Valdir Grassi Jr, pela orientação e paciência durante todo o projeto.

"Determinação, coragem e auto-confiança são fatores decisivos para o sucesso. Se estamos possuídos por uma inabalável determinação, conseguiremos superá-los. Independentemente das circunstâncias, devemos ser sempre humildes, recatados e despidos de orgulho."

Dalai Lama

RESUMO

SERRANTOLA, W. G. Planejamento de Rota e Trajetória para Manipulador Planar de Base Livre Flutuante com Dois Braços. 2018. 89p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Robôs manipuladores vem desempenhando um importante papel em operações orbitais, e isso foi possível devido ao grande avanço da robótica espacial nas últimas décadas. Porém, o planejamento do movimento ainda é considerado um dos maiores desafios nesse campo, embora diversos métodos e considerações tenham sido propostas para resolver esse problema. As primeiras contribuições na área de planejamento de movimento dependiam de uma representação explícita do espaço de configuração do robô. Dessa forma, o planejamento de movimento para sistemas robóticos com muitos graus de liberdade era impraticável. Para lidar com esse problema, surgiram os métodos baseados em amostragem, dentre eles, o método de Árvore Aleatória de Exploração Rápida - RRT (do inglês, Rapidly-Exploring Random Tree). Estes métodos, ao invés da construção de todo o conjunto de configurações livre de colisões, requerem apenas a verificação de colisão com obstáculos para um conjunto discreto e finito de configurações do robô. Consequentemente, para este tipo de problema, são métodos mais vantajosos em termos computacionais. Com esta motivação, o presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um planejador de rota e de um planejador de trajetória para um robô manipulador espacial de base livre flutuante com dois braços, ambos planejadores com suporte a desvio de obstáculos estáticos. O conceito de manipulador dinamicamente equivalente é utilizado para modelar o manipulador espacial. Isso permite que o planejamento seja feito para um manipulador de base fixa subatuado dinamicamente equivalente ao manipulador de base livre flutuante. Os algoritmos baseados em amostragem RRT* e RRTControl disponibilizados na biblioteca OMPL (do inglês, Open Motion Planning Library) foram adaptados para resolver este problema de planejamento. O algoritmo RRT* é usado para o planejamento de rota, e o RRTControl para o planejamento de trajetória. Ambos planejadores utilizam o espaço de configuração das juntas do robô. Para possibilitar que a orientação e posição final dos dois efetuadores do robô pudessem ser especificadas no espaço da tarefa, um algoritmo de cinemática inversa baseado em algoritmo genético também foi desenvolvido para encontrar a solução da cinemática inversa do manipulador.

Palavras-chave: Manipulador espacial. Manipulador Dinamicamente Equivalente. Planejamento de movimento. RRT. OMPL.

ABSTRACT

SERRANTOLA, W. G. Path and Trajectory Planning for a Dual-Arm Planar Free-Floating Manipulator. 2018. 89p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Robot manipulator has played an important role in orbital missions and this was possible due to the advance of space robotics in recent decades. However, motion planning is still considered one of the biggest challenges of the field though various methods and considerations were proposed by researchers to handle this problem. The first contributions in this field were dependent on an explicit representation of the free configuration space. Consequently, it was impractical to solve the motion planning problem for robotic systems with many degrees of freedom. In order to cope with this limitation, sampling-based methods were proposed, in particular, the Rapidly-Exploring Random Tree – RRT. Sampling-based methods only requires a procedure to verify collision with obstacles for a discrete amount of robot configuration during planning. Therefore, they are more advantageous in computational terms. In this work a path planner and a trajectory planner were developed for a free-floating planar manipulator with two arms with support for static obstacle avoidance. The Dynamically Equivalent Manipulator approach was used for modelling the robot. Thus, the planners were developed based on a fixed-base underactuated manipulator model which is dynamically equivalent to the free-floating manipulator. The sampling-based algorithms RRT* and RRTControl of the Open Motion Planning Library (OMPL) were adapted to solve this motion planning problem. The RRT* were used for path planning, and the RRTControl for trajectory planning, both carried out in the robot joint space. As the desired orientations and positions of the two end-effectors were specified in the task-space, a genetic algorithm was also developed to compute the inverse kinematics of the manipulator.

Keywords: Space Manipulator. Dynamically Equivalent Manipulator. Motion Planning. RRT. OMPL.

LISTA DE FIGURAS

F'igura 1 –	Algoritmo RRT básico
Figura 2 –	Processo Expansão do RRT básico
Figura 3 –	Manipulador espacial juntamente com seu MDE
Figura 4 -	Parâmetros Geométricos do ME e do MDE, respectivamente 39
Figura 5 –	Manipulador espacial de base livre flutuante com dois manipuladores . 40
Figura 6 –	Manipulador espacial juntamente com os MDEs
Figura 7 –	Fluxograma da implementação dos planejadores
Figura 8 -	Configuração Inicial (azul claro) e Final (azul escuro) 47
Figura 9 –	Solução para a função de otimização de menor rota das juntas ativas. A
	base livre flutuante é representada pela linha tracejada, os obstáculos
	pelos quadrados, o efetuador 1 pelos círculos vermelhos, e finalmente, o
	efetuador 2 pelos círculos preto
Figura 10 –	Trajetória das juntas do MDE2
Figura 11 –	Solução para a função de otimização de menor movimento da base livre
	flutuante
Figura 12 –	Trajetória das juntas do MDE2
Figura 13 –	Solução para a função de otimização multiobjetivo
Figura 14 –	Trajetória das juntas do MDE2
Figura 15 –	Solução para a função de otimização do movimento dos efetuadores $$. $$ 53
Figura 16 –	Trajetória das juntas do MDE2
Figura 17 –	Configuração Inicial (azul claro) e Final (azul escuro). A base livre
	flutuante é representada pela linha tracejada, o efetuador 1 pelos círculos
	vermelhos e o efetuador 2 pelos círculos verdes
O	Movimento do manipulador espacial
Figura 19 –	Trajetória das juntas do MDE2
Figura 20 –	Velocidade angular das juntas do MDE2
Figura 21 –	Aceleração das juntas do MDE2
Figura 22 –	Perfil de torque aplicado no MDE2
Figura 23 –	Movimento do manipulador espacial
Figura 24 –	Trajetória das juntas do MDE2
Figura 25 –	Velocidade angular das juntas do MDE2 60
Figura 26 –	Aceleração das juntas do MDE2
Figura 27 –	Perfil de torque aplicado no MDE2 61
Figura 28 –	Configuração Inicial e Final, juntamente com o obstáculo (representado
	pelo quadrado)

Figura 29 – Movimento do manipulador espacial. Para uma melhor verificação do	
movimento, foi realizada a ampliação da área delimitada pelo quadrado	
vermelho	63
Figura 30 – Trajetória das juntas do MDE2	64
Figura 31 – Velocidade angular das juntas do MDE2	64
Figura 32 – Aceleração das juntas do MDE2	65
Figura 33 – Perfil de torque aplicado no MDE2	65
Figura 34 – Movimento do manipulador espacial	67
Figura 35 – Trajetória das juntas do MDE2	67
Figura 36 – Velocidade angular das juntas do MDE2	68
Figura 37 – Aceleração das juntas do MDE2	68
Figura 38 – Perfil de torque aplicado no MDE2	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Equivalência entre os Ângulos do ME e dos MDEs	41
Tabela 2 –	Equivalência entres os membros do ME e dos MDEs	41
Tabela 3 –	Equivalência entre as juntas do ME e dos MDEs	41
Tabela 4 -	Parâmetros Estruturais do MBLF	42
Tabela 5 –	Parâmetros Estruturais do MDE1	42
Tabela 6 –	Parâmetros Estruturais do MDE2	42

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Resultados da otimização do movimento das juntas	49
Quadro 2 –	Resultados da otimização do movimento da base	51
Quadro 3 –	Resultados da otimização multiobjetivo	53
Quadro 4 -	Resultados da otimização do movimento dos efetuadores	54
Quadro 5 -	Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição	
	e orientação dos efetuadores	56
Quadro 6 –	Erro de velocidade angular das juntas	58
Quadro 7 –	Erro de aceleração angular das juntas	59
Quadro 8 -	Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição	
	e orientação dos efetuadores	61
Quadro 9 –	Erro de velocidade angular das juntas	61
Quadro 10 –	Erro de aceleração angular das juntas	62
Quadro 11 –	Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição	
	e orientação dos efetuadores	66
Quadro 12 –	Erro de velocidade angular das juntas	66
Quadro 13 –	Erro de aceleração angular das juntas	66
Quadro 14 –	Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição	
	e orientação dos efetuadores	69
Quadro 15 –	Erro de velocidade angular das juntas	69
Quadro 16 –	Erro de aceleração angular das juntas	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

USP Universidade de São Paulo

EESC Escola de Engenharia de São Carlos

MBLF Manipulador Espacial de Base Livre Flutuante

MDE Manipulador Dinamicamente Equivalente

RRT do inglês, Rapidly-Exploring Random Tree

RRT* do inglês, Rapidly-Exploring Random Tree Star

OMPL do inglês, The Open Motion Planning Library

ME Manipulador Espacial

EF1 Efetuador 1

EF2 Efetuador 2

MDE Manipulador Dinamicamente Equivalente

PRM do inglês, *Probabilistic Roadmaps*

SPARS do inglês, Sparse Roadmap Spanner algorithm

EST do inglês, Expansive Space Trees

KPIECE do inglês, Kinematic Planning by Interior-Exterior Cell Exploration

PDST do inglês, Path-Directed Subdivision Trees

RRTControl do inglês, Rapidly-Exploring Random Tree Control

MILP do inglês, Mixed-Integer Linear Program

LISTA DE SÍMBOLOS

 W_i' Vetor que representa o comprimento do elo i

 C_i Centro de massa do elo i

 R_i Vetor que liga o C_i à junta J_{i+1}

 L_i Vetor que liga a junta J_i ao C_i

 l_{ci}^{\prime} Vetor que liga a junta J_{i}^{\prime} ao centro de massa do elo i

 m_k Massa do k-ésimo elo

 M_t Massa total

 I_i Inércia do elo i

 J_i i-ésima junta

 D_p, D_{pa}, D_a Matrizes de inércia

 V_p, V_a Forças centrífugas e de Coriolis

 q_p Vetor com os ângulos das juntas passivas

 q_a Vetor com os ângulos das juntas ativas

 τ_a Torques aplicados nas juntas ativas

 θ_{ji} Configuração da junta j no estado i

 α, β Constantes definidas com o valor 1

x Valor a ser normalizado

min Valor mínimo

max Valor máximo

 (x_{1i},y_{1i}) Coordenadas do efetuador 1 para o estado i

 (x_{2i}, y_{2i}) Coordenadas do efetuador 2 para o estado i

 $\theta_{inicial}$ Configuração inicial

 θ_{final} Configuração final

 μ Média

Ts Tempo de amostragem

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
2	PLANEJAMENTO DE MOVIMENTO	31
2.1	RRT	33
2.2	RRT*	34
2.3	RRTControl	34
3	MANIPULADORES ESPACIAIS	37
3.1	Modelagem de manipuladores espaciais	37
3.1.1	Manipulador Dinamicamente Equivalente	38
3.1.2	Modelagem de um Manipulador Espacial de Base Livre Flutuante com dois	
	Braços	40
4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	43
4.1	The Open Motion Planning Library (OMPL)	43
4.2	Cinemática Inversa	45
4.3	Planejamento de Caminho	46
4.3.1	Planejamento para minimizar o movimento das juntas	47
4.3.2	Planejamento para minimizar o movimento da base livre flutuante	48
4.3.3	Planejamento multiobjetivo	49
4.3.4	Planejamento para minimizar o movimento dos efetuadores no espaço de	
	trabalho	51
4.3.5	Discussão dos resultados para planejamento de caminho	53
4.4	Planejamento de Trajetória	54
4.4.1	Sem Obstáculo	55
4.4.2	Com Obstáculo	57
4.4.3	Discussão dos resultados para planejamento de trajetória	63
5	CONCLUSÃO	71
	REFERÊNCIAS	73
	ANEXOS	77
	ANEXO A – ESPECIFICAÇÃO DO MODELO	79

1 INTRODUÇÃO

Com a evolução da tecnologia houve grandes avanços no campo espacial. Mas, devido ao fato do espaço ser um ambiente hostil, com temperaturas extremas, radiação, gravidade e grandes distâncias, operações como montagem, inspeção e manutenção de estações espaciais e satélites são consideradas tarefas extremamente complexas e perigosas (YOSHIDA, 2009). Dessa forma, para auxiliar as atividades humanas no espaço, robôs manipuladores têm desempenhado um papel essencial nas operações orbitais, ampliando os horizontes de exploração para além das áreas de acesso humano (PEDERSEN et al., 2003; YOSHIDA, 2009).

A principal característica desses manipuladores espaciais é seu acoplamento dinâmico entre o braço robótico e a base espacial, ou seja, a base se move livremente em respostas às alterações dinâmicas causadas pelos movimentos dos efetuadores e vice versa. Porém, tal acoplamento demonstra problemas, tais como restrições não-holonômicas e singularidades dinâmicas, que podem causar efeitos importantes sobre o planejamento e controle do sistema. Outro aspecto interessante, proposto por Dubowsky e Papadopoulos (1993), foi a divisão dos manipuladores robóticos espaciais em dois modos representativos de atuação: manipuladores de base livre controlada e manipuladores de base livre flutuante (MBLF).

Em manipuladores de base livre controlada, a posição e a atitude do sistema são controlados ativamente por jatos de propusão ou rodas de reação. No entanto, esse sistema de controle apresenta um consumo excessivo de combustível e energia, limitando, assim, a vida útil do manipulador em órbita. Em compensação, os manipuladores de base livre flutuante não apresentam um sistema de controle ativo para a posição e atitude, logo, a base se movimenta livremente em resposta aos movimentos dos efetuadores, gerando uma grande economia de combustível e energia. Porém, esse modo de operação possui uma maior complexidade nos sistemas de controle e no planejamento do movimento (PAPADOPOULOS; DUBOWSKY, 1991).

Em vista desse problema, umas das formas de simplificar a modelagem de um MBLF é através do conceito de manipulador dinamicamente equivalente (MDE) (LIANG; XU; BERGERMAN, 1997a), onde o MBLF é modelado como um manipulador de base fixa subatuado com dinâmica e cinemática equivalente. Essa abordagem permite a aplicação em MBLF de técnicas de planejamento e controle aplicadas a robôs manipuladores de base fixa.

Além do acoplamento dinâmico, o planejamento do movimento é considerado um dos maiores desafios no campo da robótica espacial, o qual tem como objetivo orientar

automaticamente um robô ao redor de um ambiente com diversos obstáculos (CANNY, 1988). Por esse motivo, diversos métodos e considerações foram propostos com o intuito de contribuir nessa área (SAKAWA, 1999; RICHARDS et al., 2002; PAPADOPOULOS; TORTOPIDIS; NANOS, 2005; XU et al., 2008; FEIHU, 2013). Sakawa (1999) propôs o planejamento de trajetória de um manipulador planar de base livre controlada utilizando controle ótimo. Para tal tarefa foi empregado o algoritmo Sakawa-Shindo para o cálculo do controle. Richards et al. (2002) propuseram o planejamento de trajetórias ótimas para veículos espaciais utilizando programação linear inteiro misto (do inglês, Mixed — IntegerLinearProgram - MILP), que é um caso especial da programação linear, onde algumas variáveis são obrigadas a assumir apenas valores inteiros. O MILP foi aplicado em diferentes tipos de satélites com o intuito de encontrar trajetórias ótimas e evitar colisões com obstáculos e outros satélites. Papadopoulos, Tortopidis e Nanos (2005) propuseram uma metodologia de planejamento de trajetória no espaço da juntas para manipuladores planares de base livre flutuante. O método foi baseado no mapamento das restrições não-holonômicas para o espaço onde as mesmas pudessem ser satisfeitas. Xu et al. (2008) utilizaram as características não-holonômicas de um manipulador espacial de base livre flutuante com 6 graus de liberdade para o planejamento da trajetória no espaço das juntas. A metodologia consistia em: parametrizar a trajetória das juntas utilizando funções senoidais, definir as funções de custo para otimização de acordo com as restrições do robô e, por fim, utilizar os algoritmos genéticos para procurar possíveis soluções dos parâmetros. Feihu (2013) utilizou o algoritmo memético (combinação dos algoritmos genéticos com o método de cozimento simulado) para o planejamento de caminhos ótimos com obstáculos em manipuladores espaciais de base controlada. O algorimo apresentou bons resultados comparado com algoritmos genético e de colônias de formigas.

Entre os diversos métodos e contribuições, os métodos de planejamento de movimento baseado em amostragem tiveram um grande destaque na aplicação a robôs manipuladores. Uma caractéristica importante desse método é o fato de não ser necessário construir explicitamente os limites dos obstáculos no espaço de configuração, em vez disso, possuem um procedimento que decide se uma determinada configuração do robô está em colisão com os obstáculos ou não, consequentemente, tornando-se mais vantajoso em termos computacionais (CHOSET et al., 2005). Mesmo não sendo métodos completos, tais algoritmos fornecem garantias probabilísticas, ou seja, se existir alguma solução, a probabilidade de não encontra-la decai a zero à medida que o número de amostras se aproxima do infinito (KARAMAN; FRAZZOLI, 2011).

Entre os principais algoritmos de planejamento de movimento baseado em amostragem, um dos mais populares, e que também é utilizado nesse trabalho, é o algoritmo de Árvore Aleatória de Exploração Rápida (RRT). No caso do algoritmo RRT (LAVALLE, 1998), o diferencial é a capacidade de lidar com restrições não-holonômicas e com vários graus de liberdade. Basicamente, cada iteração do algoritmo tenta expandir sua árvore

de busca adicionando um novo vértice. Para isso, são amostrados vários estados x_{rand} aleatoriamente no espaço livre de configuração do robô. Em seguida, uma função de busca procura nos estados existentes na árvore um estado mais próximo para então expandi-lo rumo àquele estado amostrado. O processo é repetido até que a condição final seja satisfeita ou um tempo pré-definido seja atingido (LAVALLE; KUFFNER JR, 2000).

Com essas vantagens diversos trabalhos foram prospostos com o intuito de realizar o planejamento de movimento em MBLF, entre eles: Benevides (2015) propôs o planejamento de rota autônomo, ou seja, capaz de retornar uma solução livre de colisão entre duas configurações, para um MBLF com um braço. Para isso, ele utilizou o algoritmo RRT e sua variante RRT Bidirecional. Li e Liang (2014) propuseram a utilização do algoritmo RRT Bidirecional com checagem de colisão para o planejamento de movimento de um MBLF. Depois de grande número de experimentos, o algoritmo proposto se mostrou apto para o planejamento de trajetórias em MBLFs. Rybus e Seweryn (2015) aplicaram o algoritmo RRT no planejamento de trajetória em manipulador-satélite planar de base livre flutuante com dois graus de liberdade. O trabalho teve como foco principal o problema de colisão com obstáculos, uma vez que, os satélites possuem grandes quantidades de equipamentos para o seu funcionamento que podem atrapalhar no planejamento.

Os trabalhos mencionados anteriormente lidam com um MBLF com um manipulador. Nesse trabalho é proposto o planejamento de movimento de um MBLF com dois manipuladores. Comparado com um MBLF com um braço, um MBLF com dois braços ou mais possui maior destreza e flexibilidade, e pode completar tarefas mais complexas. Assim, tarefas como abastecimento de estações espaciais e limpeza e/ou destruição do lixo espacial podem ser divididas entre os braços, ilustrando uma das vantagem de múltiplos manipuladores (XU et al., 2012).

Com base nos tópicos mencionados anteriormente, neste trabalho é proposta uma metodologia para o planejamento cinemático de rota e uma metodologia para o planejamento de trajetória, ambas no espaço das juntas e com suporte a desvio de obstáculos estáticos, para um MBLF com dois braços. Neste trabalho considerou-se que a posição dos obstáculos é conhecida, ou pode ser obtida através de sensores antes do planejamento de movimento do robô.

O MBLF foi modelado utilizando o conceito de manipulador dinamicamente equivalete (LIANG; XU; BERGERMAN, 1997a), devido à sua capacidade de simplificação do modelo de manipuladores espaciais. A biblioteca de planejamento de movimento baseado em amostragem OMPL - The Open Motion Planning Library (SUCAN; MOLL; KAVRAKI, 2012) foi utilizada como base de implementação do sistema, ela disponibiliza diversas implementações de algoritmos de planejamento baseados em amostragem, entre elas, o algoritmo RRT e suas modificações, que serão o foco desse trabalho. Como o planejamento de movimento foi realizado no espaço das juntas, foi desenvolvindo um

método, utilizando algoritmos genéticos (GOLDBERG; HOLLAND, 1989), para o cálculo da cinemática inversa do manipulador. Permitindo assim, que as posições e orientações dos dois efetuadores fossem especificadas no espaço da tarefa. Para o planejamento de rota foi utilizado o algoritmo de planejamento RRT* (KARAMAN; FRAZZOLI, 2011), que possui a propriedade de otimização assintótica, ou seja, uma vez encontrada uma solução para o problema de planejamento, o algoritmo converge assintoticamente a cada iteração para a solução ótima. E para o planejamento de trajetória foi utilizado o algoritmo RRTControl (LAVALLE; KUFFNER JR, 2001), que é uma adaptação do planejador RRT utilizada em problemas onde o sistema está sujeito a restrições diferenciais.

Este documento está organizado da forma descrita a seguir. O capítulo 2 apresenta o resumo das principais referências com relação ao planejamento de movimento e ao planejamento de movimento baseado em amostragem. O capítulo 3 apresenta os manipuladores espaciais e sua modelagem. O capítulo 4 mostra os parâmetros considerados para as simulações, os resultados obtidos e uma comparação quantitativa dos métodos utilizados. Por último, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões sobre os métodos de planejamento aplicado no trabalho.

2 PLANEJAMENTO DE MOVIMENTO

O problema do planejamento de movimento recebeu considerável atenção, especialmente na última década, à medida que os robôs começaram a se tornar uma parte vital da indústria moderna e de nossa vida diária. Mesmo que os robôs modernos possuam diferenças significativas em detecção, atuação, tamanho, espaço de trabalho, aplicação, o problema de navegar por um ambiente complexo é incorporado e essencial em quase todas as aplicações robóticas (KARAMAN; FRAZZOLI, 2011).

Basicamente, esse planejamento pode ser dividido em dois grupos: planejamento de caminho e planejamento de trajetória. No primeiro, o movimento do robô é descrito de forma geométrica, não existindo especificações dos aspectos dinâmicos do movimento, como velocidades e acelerações (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2006). Em contrapartida, no planejamento de trajetória, a posição do robô é dada como uma função do tempo, ou seja, o planejador calcula uma função $q^d(t)$ que especifica completamente o movimento do robô ao longo do caminho, além de considerar os apectos dinâmicos e limitações do robô (CANNY, 1988). Com isso, garantindo que o robô seja capaz de executar a trajetória definida.

Outro aspecto interessante sobre o planejamento do movimento é que seu estudo pode ser executado no espaço das juntas ou no espaço da tarefa. No espaço das juntas, o movimento desejado para o manipulador é descrito em função das variáveis de junta. Um dos grandes problemas enfrentado por esse método é a cinemática inversa, que consiste na determinação das variáveis de juntas correspondentes a uma posição e orientação do efetuador final do manipulador. Essa conversão pode ser extremamente complexa para robôs com vários graus de liberdade ou em casos de obstáculos muito próximos ao robô. Já, no planejamento no espaço da tarefa, o movimento desejado para o manipulador robótico é descrito em função de variáveis cartesianas, ou seja, uma sequência de pontos que fornecem a posição e orientação do efetuador em função do tempo. Uma das grandes complicações do planejamento no espaço da tarefa são os problemas devido às singularidades do mecanismo, resultante da não-inversibilidade da matriz jacobiana, matriz esta que representa as transformações lineares correspondentes a velocidade da junta com a velocidade cartesiana (BENEVIDES, 2015; TONETTO, 2007).

Para o planejamento de movimento destinados a tarefas de manipulação, os algoritmos devem fornecer rapidamente caminhos ou trajetórias que não apenas obedecem às restrições incorporadas no ambiente, mas que também aproveitem os recursos completos do robô para que o mesmo realize tarefas desafiadoras em diversos espaços. Em vista aos problemas relacionados ao planejamento de movimento em manipuladores, duas importantes observações devem ser levadas em consideração. Em primeiro lugar, o espaço de

configuração da maioria dos manipuladores possui alta dimensão. Os braços robóticos são tipicamente equipados com juntas que resultam em até dez graus de liberdade, tornando impraticáveis algoritmos baseados em uma discretização do espaço de configuração. Em segundo lugar, para tarefas nas quais a proximidade de certos obstáculos é fundamental, o processo de planejamento requer uma verificação de colisão de alta precisão, gerando, com isso, altos custos computacionais (PEREZ et al., 2011).

A fim de superar a complexidade computacional associada à busca em um espaço dimensional alto, a maioria dos algoritmos de planejamento de movimento são projetados para executar duas tarefas fundamentais: uma delas é a aquisição de informações sobre a topologia do espaço de pesquisa, ou seja, a localização de obstáculos, a outra, é o processamento das informações disponíveis, calculadas pela tarefa anterior com o intuito de melhorar incrementalmente a solução atual. De forma geral, o modo como essas duas tarefas são incorporadas produz planejadores de características diferentes em termos de subotimalidade, otimalidade assintótica, taxa de convergência, etc. Para projetar algoritmos de planejamento de movimento que sejam ótimos, deve-se garantir que a exploração cubra todo o espaço de busca (pelo menos assintoticamente) e que a exploração encontre a melhor solução possível, dada a informação disponível, sem ficar presa em uma solução local. Logo, os algoritmos de planejamento podem ser classificados em duas categorias: completos e incompletos. Os algoritmos completos são capazes de encontrar sempre uma solução ou garantir que esta não exista, enquanto os algoritmos incompletos não conseguem provar que uma solução exista, mas são eficazes em encontrar uma solução, se pelo menos uma existir (SKLIAROVA; FERRARI, 2003).

Os métodos probabilísticos provaram ser muito eficientes para a solução de problemas de planejamento de movimento com restrições dinâmicas em espaços de busca de alta dimensão (ARSLAN; TSIOTRAS, 2013). Em vez de usar uma representação explícita do ambiente, os algoritmos baseados em amostragem contam com um módulo de verificação de colisão, fornecendo informações sobre a viabilidade de candidatos a trajetórias e conectando um conjunto de pontos amostrados do espaço livre de obstáculos para construir um grafo (mapa) de trajetórias viáveis. O mapa é então usado para construir a solução para o problema original de planejamento de movimento. Logo, os métodos baseados em amostragem fornecem uma economia significante dos custos computacionais, evitando a construção explícita de obstáculos no espaço de estados, em oposição à maioria dos algoritmos completos de planejamento de movimento. Mesmo que esses algoritmos não sejam completos, eles fornecem garantias probabilísticas no sentido de que a probabilidade de que o planejador não retorne uma solução, se existir, decai para zero quando o número de amostras se aproxima do infinito (KARAMAN; FRAZZOLI, 2011).

Entre eles, o algoritmo de Árvore Aleatória de Exploração Rápida (RRT) é um dos mais populares e será utilizado nesse trabalho, sendo apresentado mais detalhadamente a

seguir.

2.1 RRT

Árvore Aleatória de Exploração Rápida (RRT) é um método de planejamento de movimento baseado em amostragem proposto por LaValle (1998), LaValle (2002) que pode ser aplicado para uma ampla classe de problemas. Seu diferencial é a capacidade de lidar com vários graus de liberdade e considerar no problema de planejamento os modelos cinemáticos e dinâmicos dos robôs, incluindo, por exemplo, restrições nos comandos de atuação do robô e restrições de movimento não holonômicas causadas pela não integrabilidade do momento angular (PAPADOPOULOS; DUBOWSKY, 1993).

O algoritmo do RRT básico tem como tarefa calcular um caminho contínuo à partir de uma configuração inicial x_{init} para uma configuração final x_{goal} , sem utilizar qualquer pré-processamento. Cada iteração do algoritmo tenta expandir sua árvore de busca adicionando um novo vértice. Para isso, a cada repetição um estado aleatório x_{rand} , com probabilidade 1-p, é amostrado no espaço livre de configuração X_{free} . A configuração final x_{goal} é amostrada com uma probabilidade p, portanto, quando maior o valor de p, mais rápido é o crescimento da árvore em direção à configuração final, necessitando de um menor número de iterações. Entretanto, o algoritmo pode sofrer com o problema de mínimos locais, caso o valor de p seja muito alto. Experimentalmente foi observado que o valor de p = 5% produz melhores efeitos de convergência (URMSON; SIMMONS, 2003).

Em seguida, empregando-se um método de busca, o algoritmo encontra um estado mais próximo de x_{rand} já existente na árvore. Esse estado x_{near} , é selecionado de acordo com uma métrica ρ , que nesse trabalho, é referente à distância euclidiana em relação à configuração x_{rand} . Posteriormente, são avaliados os movimentos de x_{near} depois de aplicado um conjunto de entradas u dentro de um intervalo de tempo Δt . Tais entradas são selecionadas aleatoriamente dentre todas as possíveis entradas U para esse estado. Depois de avaliados todos os estados gerados após o movimento, é escolhido o estado livre de colisão e que possua o menor valor, novamente, de acordo com a métrica ρ . Finalmente, esse novo estado x_{new} é adicionado aos vértices da árvore. O processo se repete até que se encontre um estado x_{new} suficientemente próximo do objetivo x_{goal} (LAVALLE; KUFFNER JR, 2000). A Figura 1 ilustra o algoritmo básico do RRT e a Figura 2 mostra o processo de expansão da árvore do algoritmo RRT básico.

Depois de publicada a primeira proposta do algoritmo RRT, diversos outros trabalhos foram divulgados com o objetivo de melhoria do mesmo. Os estudos possibilitaram que a versão básica do algoritmo fosse estendida para várias direções, encontrando, assim, diversas aplicações na robótica e em outras áreas.

Figura 1 – Algoritmo RRT básico

```
GENERATE_RRT(x_{init}, K, \Delta t)

1 \mathcal{T}.init(x_{init});

2 for k = 1 to K do

3 x_{rand} \leftarrow RANDOM\_STATE();

4 x_{near} \leftarrow NEAREST\_NEIGHBOR(x_{rand}, \mathcal{T});

5 u \leftarrow SELECT\_INPUT(x_{rand}, x_{near});

6 x_{new} \leftarrow NEW\_STATE(x_{near}, u, \Delta t);

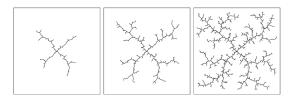
7 \mathcal{T}.add\_vertex(x_{new});

8 \mathcal{T}.add\_edge(x_{near}, x_{new}, u);

9 Return \mathcal{T}
```

Fonte: LaValle (1998)

Figura 2 – Processo Expansão do RRT básico



Fonte: LaValle e Kuffner Jr (2000)

2.2 RRT*

O algoritmo RRT* (KARAMAN; FRAZZOLI, 2011) é uma variante do algoritmo RRT que possui a propriedade de otimização assintótica, isto é, ele converge para uma solução ótima se o tempo de execução não for limitado. Nele é possível que o modelo do robô seja utilizado na expansão da árvore e que uma função custo adequada ao problema seja utilizada.

No algoritmo, primeiramente um estado do espaço de configuração livre é uniformemente amostrado e denotado como x_{rand} . Em seguida, um conjunto de nós da árvore, X_{near} , que estão próximos de x_{rand} é selecionado de acordo com um critério de proximidade. Posteriormente, busca-se um nó pertencente a X_{near} através do qual é possível chegar ao estado x_{rand} com custo mínimo. Esse nó é denominado x_{min} , e a rota que conecta x_{min} a x_{rand} é chamado de σ_{min} . Se essa rota é livre de colisões, o estado x_{rand} e sua conexão com x_{min} são adicionados à arvore. Então tenta-se reconectar x_{rand} a cada nó do conjunto X_{near} . Caso seja encontrada uma rota de menor custo entre x_{rand} e um estado x_{near} , esse estado passa a ser o pai do estado x_{rand} e é feita a reconexão entre esses nós (PEREZ et al., 2012).

2.3 RRTControl

O algoritmo RRT*Control* (LAVALLE; KUFFNER JR, 2001) é uma adaptação do planejador RRT utilizado quando o sistema é submetido a restrições diferenciais.

Sua tarefa é determinar as entradas de controle que permitam conduzir o robô de uma configuração inicial x_{init} , com posição, velocidade e aceleração, para uma configuração final x_{goal} , também, com posição, velocidade e aceleração. No algoritmo, cada iteração tenta expandir a árvore de busca adicionando um novo vértice, assim como no algoritmo RRT básico. Para isso, diferentemente do algoritmo original, é utilizado uma função de propagação, na qual, é possível modelar os efeitos das entradas de controle amostradas pelo planejador através da implementação do modelo dinâmico do robô.

Inicialmente, empregando-se um método de busca, o algoritmo encontra um estado mais próximo de x_{goal} já existente na árvore. Esse estado x_{near} é escolhido de acordo com uma métrica ρ , que nesse trabalho foi utilizado uma métrica simples com base em uma distância euclidiana ponderada para posição, velocidade e aceleração. Depois de avaliados todos os estados presente na árvore de expansão, um conjunto de entradas de controle u é amostrada dentre todas as possíveis entradas U. Em seguida, com o auxílio da função de propagação e as entradas de controle amostradas, o sistema é propagado, a partir de x_{near} , por um pequeno intervalo de tempo T_s . O estado resultante é denominado x_{new} . Finalmente, é realizada uma verificação de colisão em x_{new} , e, caso o estado seja livre de colisão, o mesmo é adicionado aos vértices da árvore. O processo se repete até que se encontre um estado x_{new} suficientemente próximo do objetivo x_{qoal} (STILMAN, 2014).

3 MANIPULADORES ESPACIAIS

Manipuladores espaciais (ME) difereciam-se de manipuladores de base fixa por uma principal característica: o acoplamento dinâmico entre o braço robótico e a base espacial, a qual se move livremente em resposta às alterações dinâmicas causadas pelos movimentos dos efetuadores e vice versa. Tal acoplamento demonstra alguns problemas envolvendo o controle e a dinâmica dos manipuladores, sendo um deles a singularidade dinâmica, que, além de depender da estrutura cinemática, depende também da distribuição de massa e inércia. Essas singularidades devem ser consideradas no planejamento e no controle desses sistemas, pois podem causar efeitos importantes sobre o desenvolvimento dos mesmos (PAPADOPOULOS; DUBOWSKY, 1993).

Os manipuladores espaciais podem ser divididos em duas principais categorias: manipuladores de base livre controlada e manipuladores de base livre flutuante. Na primeira, a posição e a atitude do sistema são controladas ativamente por jatos de propusão ou rodas de reação , possibilitando, assim, versatilidade e um espaço de trabalho quase ilimitado, além da aplicabilidade de controladores já conhecidos para manipuladores de base fixa. Uma das suas principais desvantagens é o consumo excessivo de combustível e energia para o controle de posição e atitude devido às pertubações ocasionadas pelo movimento dos manipuladores, limitando, assim, a vida útil em órbita (DUBOWSKY; PAPADOPOULOS, 1993).

Na segunda categoria, não existe controle ativo para posição e a atitude, ou seja, a base se movimenta livremente em resposta ao movimentos dos efetuadores e vice e versa, gerando uma significativa economia de combustível e energia e, aumentando sua vida útil (DUBOWSKY; PAPADOPOULOS, 1993). Porém, esse modo de operação é viável apenas quando não existem forças externas agindo sobre o sistema e quando seu momento total é insignificante, além disso, possui uma maior complexidade nos sistemas de controle e no planejamento do movimento (PAPADOPOULOS; DUBOWSKY, 1991).

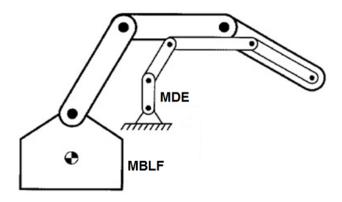
3.1 Modelagem de manipuladores espaciais

Tendo como motivação a simplificação da modelagem de manipuladores espaciais, neste trabalho será utilizado o conceito de Manipulador Dincamicamente Equivalente (MDE), que será apresentado brevemente, recomendando-se, assim, uma consulta à literatura citada caso o leitor anseie por maiores detalhes.

3.1.1 Manipulador Dinamicamente Equivalente

Uma das formas de se lidar com a complexidade na modelagem de um MBLF é utilizar o conceito de Manipulador Dinamicamente Equivalente (MDE) proposto por Liang, Xu e Bergerman (1997a). O MDE é um manipulador de base fixa sub-atuado que possui equivalência cinemática e dinâmica com o MBLF. Através dessa abordagem, um manipulador MBLF com n juntas é mapeado por um MDE de base fixa com n+1 juntas, sendo que a primeira junta é esférica e passiva, localizada no centro de massa do MBLF, como ilustra a figura 3.

Figura 3 – Manipulador espacial juntamente com seu MDE



Fonte: Liang, Xu e Bergerman (1997b)

Devido a sua equivalência cinemática e dinâmica ao sistema espacial, é possível simular e testar tal sistema sem a necessidade de estruturas complexas. O MDE possui as seguintes propriedades cinemáticas em relação ao MBLF:

- O eixo de uma junta do MDE é paralelo ao eixo da junta correspondente no MBLF;
- O valor de posição de uma junta do MDE é igual ao valor da junta correspondente no MBLF;
- O ponto final do MDE sempre coincide com o efetuador do MBLF.

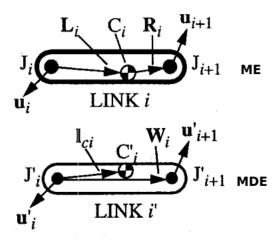
Para garantir a equivalência cinemática entre o MBLF e o MDE a relação entre os parâmetros geométricos de ambos manipuladores, mostrada na Figura 4, deve ser:

$$W'_{1} = R_{1},$$
 $W'_{i} = R_{i} + L_{i},$
 $para: i = 2, ..., n + 1,$
 $l'_{c1} = 0,$
 $l'_{ci} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} m_{k}}{M_{i}} L_{i},$
 $para: i = 2, ..., n + 1,$

(3.1)

onde n é o número de juntas do MBLF, C_i é o centro de massa, u_i representa o eixo de rotação da junta J_i em relação ao elo i, R_i é o vetor que conecta C_i a J_{i+1} , L_i é o vetor que conecta J_i a C_i , W representa o comprimento dos elos, l_c representa a distância da junta até o centro de massa do elo, I representa o momento de inércia do elo, M_t é a massa total do MBLF e m_k é a massa do k-ésimo elo. As variáveis com linha (') são referentes ao MDE.

Figura 4 – Parâmetros Geométricos do ME e do MDE, respectivamente.



Fonte: Liang, Xu e Bergerman (1997a)

Liang, Xu e Bergerman (1997a) demonstraram que as componentes angulares e lineares da energia cinética são iguas tanto para o MDE quanto para ME. Devido à essa igualdade, os Lagrangianos podem ser considerados iguais, desde que ambos operem em ambientes sem gravidade. Assim, assumindo que as forças generalizadas que atuam sobre os sistemas são iguais, pode-se afirmar que a dinâmica destes é a mesma. As condições necessárias para essa equivalência são mostradas em 3.2.

$$m'_{i} = \frac{M_{t}^{2} m_{i}}{\sum_{k=1}^{i} m_{k} \sum_{k=1}^{i} m_{k}}$$

$$i = 2, ..., n + 1,$$

$$I'_{i} = I_{i}$$

$$i = 1, ..., n + 1,$$

$$(3.2)$$

onde m representa a massa e I representa o momento de inércia. Como pode ser observado, a massa do primeiro membro do MDE não é definida, assim, seu valor pode ser escolhido arbritariamente, da mesma forma como o membro a ser considerado como base do modelo equivalente.

3.1.2 Modelagem de um Manipulador Espacial de Base Livre Flutuante com dois Braços

A plataforma robótica considerada nesse trabalho é o MBLF planar com dois manipuladores (Figura 5) desenvolvida por (PAZELLI, 2011). Para sua modelagem foi utilizado o método de manipulador dinamicamente equivalente. Porém, a modelagem utilizando tal método permite que apenas um dos efetuadores do MBLF seja mapeado por vez. Como solução, nesse trabalho, foram utilizados dois MDEs, assim, foi possível mapear os dois efetuadores do MBLF simultaneamente (BEZERRA, 2015).

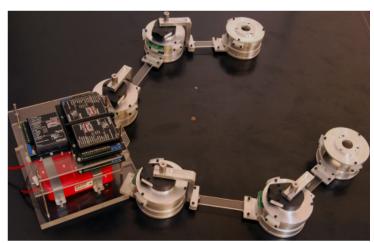


Figura 5 – Manipulador espacial de base livre flutuante com dois manipuladores

Fonte: Pazelli (2011)

A Figura 6 ilustra os dois MDEs e o MBLF. O MDE1 faz o mapeamento do efetuador EF1 e o MDE2 faz o mapeamento do efetuador EF2. Os modelos dos três manipuladores possuem a equivalência entre os ângulos de suas juntas mostrada na Tabela 1. As Tabelas 2 e 3 apresentam outras equivalências entre os modelos. Isso se deve ao fato dos MDEs mapearem o mesmo MBLF.

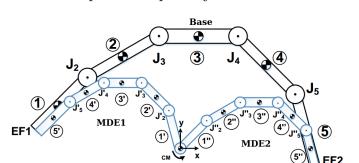


Figura 6 – Manipulador espacial juntamente com os MDEs

Fonte: Bezerra (2015)

Tabela 1 – Equivalência entre os Ângulos do ME e dos MDEs

ME	MDE1	MDE2
θ_2	$-\theta_5'$	θ_2''
θ_3	$-\theta_4'$	θ_3''
θ_4	$-\theta_3'$	θ_4''
$ heta_5$	$-\theta_2'$	θ_5''

Tabela 2 – Equivalência entres os membros do ME e dos MDEs

ME	MDE1	MDE2
membro 1	membro 5	membro 1
membro 2	membro 4	membro 2
membro 3	membro 3	membro 3
membro 4	membro 2	membro 4
membro 5	membro 1	membro 5

Fonte: Elaborada pelo autor

ME	MDE1	MDE2
$\overline{J_2}$	J_5'	J_2''
J_3	J_4'	J_3''
J_4	J_3'	J_4''
J_5	J_2'	J_5''

Fonte: Elaborada pelo autor

Utilizando as equações 3.1 e 3.2 apresentadas na subseção 3.1.1, juntamente com a tabela 4, que apresenta os valores das especificações estruturais do MBLF a ser modelado, foram calculados os parâmetros geométricos e dinâmicos dos dois MDEs. Os valores são mostrados nas tabelas 5 e 6.

O passo seguinte foi a obtenção do modelo dinâmico dos MDEs. Dado que, o MDE possui uma junta passiva fixada sobre o centro de massa do MBLF, como dito anteriormente, sua modelagem resulta em um sistema equivalente subatuado, ou seja, o

Tabela 4 – Parâmetros Estruturais do MBLF

Membro	m (kg)	$I (\mathrm{kgm}^2)$	R (m)	L (m)
1	1,01	0,01	0,112	0,112
2	1,38	0,02	0,111	0,144
3	4,78	0,04	0,150	0,150
4	1,38	0,02	0,111	0,144
5	1,01	0,01	0,112	0,112

Fonte: Bezerra (2015)

Tabela 5 – Parâmetros Estruturais do MDE1

Membro	m (kg)	$I (\mathrm{kgm}^2)$	R (m)	L (m)
1'	1.0100	0.0100	0.0118	0
2'	52.2487	0.0200	0.0430	0.0152
3'	25.4933	0.0400	0.1500	0.0375
4'	2.0574	0.0200	0.2120	0.0833
5'	1.1293	0.0100	0.2122	0.1002

Fonte: Bezerra (2015)

Tabela 6 – Parâmetros Estruturais do MDE2

Membro	m (kg)	$I (\mathrm{kgm}^2)$	R (m)	L (m)
1"	1.0100	0.0100	0.0118	0
2"	52.2487	0.0200	0.0430	0.0152
3"	25.4933	0.0400	0.1500	0.0375
4"	2.0574	0.0200	0.2120	0.0833
5"	1.1293	0.0100	0.2122	0.1002

Fonte: Bezerra (2015)

sistema possui menos atuadores que graus de liberdade, assim, o controle das juntas passivas é feito considerando o acoplamento dinâmico entre elas e as juntas ativa (SIQUEIRA, 2004). Portanto, seu modelo dinâmico (Equação 3.3) pode ser definido como o de um manipulador com n juntas, $n = n_a + n_p$, das quais n_p são passivas e n_a são ativas.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & D_{pa} \\ D_{pa}^T & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_p \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_p \\ V_a \end{bmatrix}$$
(3.3)

onde $q_p \in \Re^{n_p \times 1}$ é o vetor com os ângulos das juntas passivas, $q_a \in \Re^{n_a \times 1}$ é o vetor com os ângulos das juntas ativas, $D_p \in \Re^{n_p \times n_p}$, $D_{pa} \in \Re^{n_p \times n_a}$ e $D_a \in \Re^{n_a \times n_a}$ são matrizes de inércia, $V_p \in \Re^{n_p \times 1}$ e $V_a \in \Re^{n_a \times 1}$ são forças centrífugas e de Coriolis e $\tau_a \in \Re^{n_a \times 1}$ são os torques aplicados nas juntas ativas. Os subíndices a e p são relacionados às variáveis de juntas ativas e passivas respectivamente. As matrizes D e V foram identificadas no anexo A.

4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste trabalho, dadas as configurações inicial e final para o MBLF, q_i e q_f , respectivamente, deseja-se encontrar, utilizando o algoritmo RRT*, caminhos ótimos com o objetivo de minimizar o movimento das juntas, minimizar o movimento da base livre flutuante, minimizar os movimentos das juntas e da base livre flutuante e minimizar o movimento dos efetuadores no espaço de trabalho. E, com o auxílio do algoritmo RRTControl, uma trajetória, com velocidades e acelerações iniciais e finais definidas como zero, que leve o robô da configuração q_i para q_f sem que ocorram colisões com obstáculos. Para isso, ambos os algoritmos foram implementados utilizando a biblioteca de planejamento de movimento baseado em amostragem OMPL como estrutura para implementação do sistema. O planejamento é realizado no espaço das juntas ativas de um dos MDEs e a colisão deve ser sempre verificada entre o MBLF e os obstáculos para as configurações do MDE.

4.1 The Open Motion Planning Library (OMPL)

De acordo com Sucan, Moll e Kavraki (2012), a OMPL é uma biblioteca para planejamento de movimento baseado em amostragem que disponibiliza diversas implementações de algoritmos de planejamento. Dentro da biblioteca, tais algoritmos são divididos em duas categorias:

- Planejadores Geométricos (Geometric planners) apresentam apenas restrições geométricas e cinemáticas do sistema, supondo que qualquer caminho viável pode ser transformado em uma trajetória dinâmica viável. Sendo dividos em planejadores de busca múltipla (Multi-query planners), como PRM (Probabilistic Roadmap Method) e SPARS (Sparse Roadmap Spanner algorithm), e planejadores de busca única (Single-query planners), como RRT, EST (Expansive Space Trees), KPIECE (Kinematic Planning by Interior-Exterior Cell Exploration), entre outros.
- Planejadores baseados em controle (Control-based planners) estes planejadores contam com a propagação do estado, ou seja, possuem uma função de propagação onde é possível modelar os efeitos dos controles escolhidos pelos planejadores nos estados do sistema, ao invés de uma simples interpolação para gerar os movimentos. São utilizados quando o sistema é submetido a restrições diferenciais. O PDST (Path-Directed Subdivision Trees) é um exemplo de planejador baseado em controle. Existe também uma adaptação do planejador RRT nessa categoria.

Além da grande quantidade de planejadores, a biblioteca proporciona um alto nível de abstração, conseguindo integrá-la em outros sistemas robóticos, como: *Movelt*, *OpenRAVE*, entre outros, caso seja necessário uma representação específica de algum robô ou ambiente. Logo, a biblioteca permite ao usuário resolver uma grande variedade de problemas complexos de planejamento de movimento com um mínimo de entradas.

A linguagem utilizada para o desenvolvimento da biblioteca é o c++, possuindo algumas funções em Python. Assim, para uma melhor integração com a biblioteca, foi utilizado a linguagem c++ para a implementação dos planejadores utilizados no trabalho. A Figura 7 apresenta o fluxograma referente ao funcionamento dos planejadores juntamente com a biblioteca.

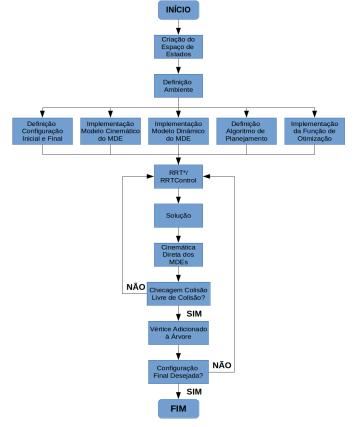


Figura 7 – Fluxograma da implementação dos planejadores

Fonte: Elaborada pelo autor

Para o seu funcionamento, utilizando os planejadores geométricos, é necessário informar os tipos de juntas (eg: rotacional, prismática, etc), a quantidades de juntas, a posição final e inicial de cada ângulo das juntas, em radianos, o algoritmo de planejamento desejado, o mapa com as informações dos obstáculos, o objetivo de otmização escolhido, e por fim, a cinemática do MDE. Como resposta, a biblioteca retorna um conjunto de estados que contém os valores dos ângulos das juntas, em radianos, que correspondem ao movimento que o manipulador deverá realizar entre a posição inicial até a posição final,

livre de colisão.

Para os planejadores baseados em controle, é necessário informar os tipos de juntas, a quantidades de juntas, a posição final e inicial de cada ângulo das juntas, em radianos, o algoritmo de planejamento desejado, o mapa com as informações dos obstáculos, e por último, a dinâmica do manipulador e o tempo de amostragem. Como solução, é retornado um conjunto de estados que contém posição, velocidade, aceleração e torque das juntas, correspondente ao movimento realizado pelo manipulador durante a simulação, também, livre de colisão.

4.2 Cinemática Inversa

Para que as posições e orientações iniciais e finais dos dois efetuadores pudessem ser especificadas no espaço da tarefa, uma vez que o planejamento de movimento utilizado neste trabalho é realizado no espaço das juntas, foi desenvolvido um método para encontrar a solução da cinemática inversa do robô.

A cinemática inversa tornou-se um problema fundamental na robótica e consiste na obtenção dos valores necesários para as juntas do manipulador para uma determinada posição e orientação dos efetuadores. Vários métodos foram propostos para sua solução, e a maioria desses métodos incluia as abordagens tradicionais: geométrica, iterativa e algébrica. Porém, tais métodos são indicados para manipuladores com uma geometria simples. Para manipuladores com uma estrutra mais complexa os métodos tradicionais podem gerar altos custos computacionais, maior tempo de processamento e ineficácia ao encontrar a solução devido à alta complexibilidade da estrutura matemática resultante da formulação do problema (KOUML, 2011).

Recentemente, novos métodos foram apresentados para resolver o problema da cinemática inversa, entre eles as redes neurais e os algoritmos genéticos. Entretanto, as redes neurais apresentaram algumas dificuldades na solução de problemas com equações cinemáticas complexas, não lineares, acopladas e com múltiplas soluções. Em vista disso, os algorimos genéticos passaram a ser propostos como solução da cinemática inversa para problemas complexos, uma vez, que não apresentam tais dificuldades (MOMANI; ABO-HAMMOUR; ALSMADI, 2016).

O método de cinemática inversa desenvolvido utiliza algoritmo genético para encontrar a solução. Os algoritmos genéticos (GOLDBERG; HOLLAND, 1989) são procedimentos de busca extremamente eficiente no seu objetivo de varrer o espaço de soluções e encontrar soluções próximas da solução ótima. Um dos problemas enfrentados por esse método é o tempo de processamento. Assim, tais algoritmos são mais adequados em problemas especialmentes difíceis (LINDEN, 2008).

No algoritmo desenvolvido, primeiramente, para cada nova geração formada por

um conjunto de configurações do robô, posição e orientação de cada um dos efetuadores são calculadas para cada uma dessas configurações. Esse cálculo pode ser feito utilizando a cinemática direta do MBLF ou a cinemática direta dos dois MDEs que mapeiam a posição de cada efetuador.

Em seguida, verifica-se os erros de posição e orientação calculados para os efetuadores em relação aos valores desejados fornecidos como entrada da cinemática inversa. As configurações cujos erros são menores e que apresentam a menor somatória dos ângulos das juntas, $\sum_{i=1}^4 \|\theta_i\|$, são selecionadas para formar a próxima geração.

Quando o algoritmo genético convergir para erros de posição e orientação menores que 0.01m e 0.01°, respectivamente, é retornada a solução constituída pelos valores dos ângulos das juntas do robô.

4.3 Planejamento de Caminho

O objetivo do planejamento de caminho foi encontrar soluções ótimas com o intuito de minimizar o movimento das juntas, minimizar o movimento da base livre flutuante, minimizar os movimentos das juntas e da base livre flutuante e minimizar o movimento dos efetuadores no espaço de trabalho. Para isso, foi implementado o algoritmo RRT* baseado nas funções disponíveis na biblioteca OMPL. O modelo cinemático do MDE2 precisou ser implementado dentro do contexto da OMPL para ser utilizado no planejamento cinemático. Foi utilizado apenas um MDE devido ao fato do planejamento ser realizado no espaço das juntas. Assim, não é necessário o mapeamento da posição dos dois efetuadores durante o planejamento. Além disso, foram desenvolvidadas funções para verificação de colisão entre o próprio MBLF e colisão entre o MBLF e o ambiente.

Para uma melhor vizualização dos resultado durante a execução do caminho planejado, as configurações inicial e final dos efetuadores do robô foram escolhidas de tal forma que a base livre flutuante tivesse as mesmas posições inicial e final, conforme ilustra a figura 8. As configurações inicias dos efetuadores foram definidas como $EF1_i = (-0, 2149m, 0, 3179m, 50^\circ)$ e $EF2_i = (0, 2149m, -0, 3179m, -130^\circ)$, e as configurações finais como $EF1_f = (-0, 2149m, -0, 3179m, -50^\circ)$ e $EF2_i = (0, 2149m, 0, 3179m, 130^\circ)$. Logo, as configurações inicial e final das juntas do manipulador dinamicamente equivalente calculadas através da cinemática inversa são: $\theta_{inicial} = [-130^\circ 95^\circ 35^\circ -35^\circ -95^\circ]$ e $\theta_{final} = [130^\circ -95^\circ -35^\circ 35^\circ 95^\circ]$. Dentro do espaço de trabalho do manipulador também foram definidos dois obstáculos quadrados fixos com centros nas coordenadas (-0, 35m, 0, 35m) e (0, 45m, -0, 35m) e comprimento dos lados iguais a 0, 1m.

A execução do algoritmo RRT*, com critério de parada de trinta segundos, foi repetida 100 vezes para cada uma das quatro funções de custo propostas no trabalho: minimização do movimento das juntas $(f_1(x))$, minimização do movimento da base livre

flutuante $(f_2(x))$, minimização multiobjetivo $(f_3(x))$ e minimização dos movimentos dos efetuadores no espaço de trabalho $(f_4(x))$, correspondentes as Equações 4.1, 4.2, 4.3 e 4.5, respectivamente. Para as simulações foi utilizado um notebook com processador Intel Core I7-4700MQ com 2,40GHz e 8Gb de memória Ram. Os resultados serão apresentados nas próximas subseções.

MBLF

0.6

0.4

0.2

0.2

-0.4

-0.6

-0.6

-0.4

-0.2

0.2

0.2

0.4

0.6

Posição em x (m)

Figura 8 – Configuração Inicial (azul claro) e Final (azul escuro)

Fonte: Elaborada pelo autor

4.3.1 Planejamento para minimizar o movimento das juntas

Uma forma bastante comum de se planejar a rota para um robô manipulador é procurar uma solução que minimize o deslocamento em cada uma das juntas. Para alcançar este objetivo, a seguinte função custo pode ser utilizada:

$$\min f_1(x) = \sum_{i=2}^m \|\theta_{1i} - \theta_{1i-1}\| + \|\theta_{2i} - \theta_{2i-1}\| + \|\theta_{3i} - \theta_{3i-1}\| + \|\theta_{4i} - \theta_{4i-1}\| + \|\theta_{5i} - \theta_{5i-1}\|,$$

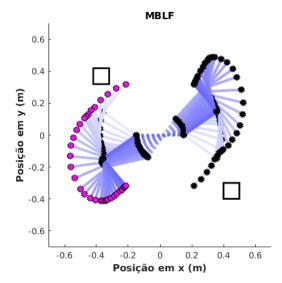
$$(4.1)$$

onde m é a quantidade total de estados obtidos para a rota, e θ_{ji} representa a configuração da junta j no estado i.

Uma das soluções encontradas pelo algoritmo RRT*, utilizando a função de minimização do movimento das juntas f1(x), é ilustrada pelas Figuras 9 e 10, com 33 estados obtidos, custo inicial de 15,57 radianos e custo final de 14,1015 radianos. Na figura o robô manipulador espacial é representado por uma cor mais clara quando na configuração inicial e mais escura na configuração final. O Quadro 1 mostra a média μ , devio padrão σ , o valor mínimo min, e o valor máximo max, da quantidade de estados obtidos, do custo inicial de f1(x) (custo da primeira solução encontrada durante a expansão da árvore), do custo

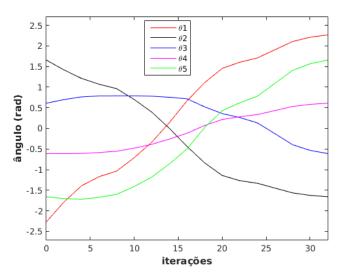
final de f1(x) (custo da solução final do RRT*), e o custo final de f2(x), f3(x) e f4(x) (calculados para uma melhor comparação entre os métodos) para as soluções encontradas.

Figura 9 – Solução para a função de otimização de menor rota das juntas ativas. A base livre flutuante é representada pela linha tracejada, os obstáculos pelos quadrados, o efetuador 1 pelos círculos vermelhos, e finalmente, o efetuador 2 pelos círculos preto



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 10 – Trajetória das juntas do MDE2



Fonte: Elaborada pelo autor

4.3.2 Planejamento para minimizar o movimento da base livre flutuante

Alternativamente, para alcançar o objetivo de minimizar o movimento da base livre flutuante do manipulador, neste trabalho é proposta a seguinte função custo a ser

	μ	σ	min	max
Estados	37,8000	12,6235	5,0000	73,0000
f1 Inicial (radianos)	16,8968	1,3022	14,4000	20,5700
f1 Final (radianos)	13,8691	0,2178	13,6136	14,6180
$f2 \text{ Final}$ (m^2)	1,0601	0,9240	0,0866	4,4175
f3 Final	5,8374	4,5227	1,2287	22,0789
$f4 \text{ Final}$ (m^2)	0,1548	0,0853	0,0586	0,5951

Quadro 1 – Resultados da otimização do movimento das juntas

minimizada:

$$\min f_2(x) = \sum_{i=1}^m (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 + (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 + (y_{2i} - \bar{y}_2)^2, \tag{4.2}$$

onde m é a quantidade de estados obtidos na solução da rota, (x_{1i}, y_{1i}) e (x_{2i}, y_{2i}) são as coordenadas de dois pontos fixos distintos na base para o estado i, e (\bar{x}_1, \bar{y}_1) e (\bar{x}_2, \bar{y}_2) são as coordenadas desejadas para os mesmos dois pontos fixos na base. Estes pontos na base foram escolhidos como sendo a posição em coordenadas cartesianas das juntas ativas J_3 e J_4 (Figura 6). A posição desejada para estes dois pontos são suas posições iniciais.

O Quadro 2 apresenta os resultados utilizando a função de minimização do movimento da base livre flutuante f2(x). As Figuras 11 e 12 mostram uma das soluções encontradas pelo algoritmo, com 53 estados obtidos, custo inicial de $1,97m^2$ e custo final de $0,0054m^2$.

4.3.3 Planejamento multiobjetivo

Outra possível aplicação que é utilizada nesse trabalho é a combinação das duas funções anteriormentes citadas, f1(x) e f2(x), sendo possível especificar pesos diferentes para cada uma das funções, possibilitando assim, privilegiar uma delas. A seguir é apresentada a função de custo proposta:

$$\min f_3(x) = \alpha \sum_{i=2}^m c_1 + \beta \sum_{i=1}^m c_2, \tag{4.3}$$

sendo

Figura 11 – Solução para a função de otimização de menor movimento da base livre flutuante

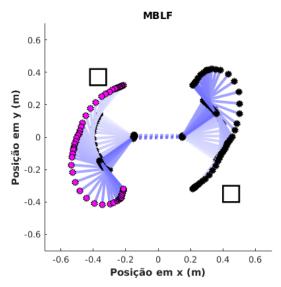
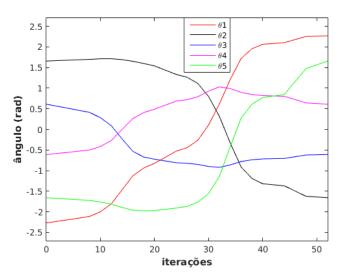


Figura 12 – Trajetória das juntas do MDE2



$$c_1 = \|\theta_{1i} - \theta_{1i-1}\| + \|\theta_{2i} - \theta_{2i-1}\| + \|\theta_{3i} - \theta_{3i-1}\| + \|\theta_{4i} - \theta_{4i-1}\| + \|\theta_{5i} - \theta_{5i-1}\|)$$

$$c_2 = (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 + (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 + (y_{2i} - \bar{y}_2)^2$$

	μ	σ	min	max
Estados	41,5600	14,4056	13,0000	89,0000
$f2$ Inicial (m^2)	0,7248	0,4786	0,0500	1,9000
$f2 \text{ Final}$ (m^2)	0,0166	0,0152	0,0005	0,0934
f1 Final (radianos)	16,1777	1,7919	14,3168	23,0936
f3 Final	0,8533	0,1497	0,5189	1,2206
$f4 \text{ Final}$ (m^2)	0,1114	0,0371	0,0471	0,2613

Quadro 2 – Resultados da otimização do movimento da base

onde m é a quantidade de estados obtidos na solução da rota, θ_{ji} representa a configuração da junta j no estado i, (x_{1i}, y_{1i}) e (x_{2i}, y_{2i}) são as coordenadas de dois pontos fixos distintos na base para o estado i, e (\bar{x}_1, \bar{y}_1) e (\bar{x}_2, \bar{y}_2) são as coordenadas desejadas para os mesmos dois pontos fixos na base, e α e β são constantes, que, nesse trabalho, tiveram o valor definido como 1, assim, não privilegiando nenhuma das funções. Como os custos c_1 e c_2 possuem unidades diferentes foi utilizado o método de normalização linear (Equação 4.4) para normaliza-los entre o intervalo [0,1].

$$norm = \frac{x - min}{max - min},\tag{4.4}$$

onde x representa o valor a ser normalizado e min e max são os valores mínimo e máximo que x pode assumir, respectivamente. Foram analisados 300.000 possíveis valores para c_1 e c_2 , assim, ficando definido: min = 0,1299 e max = 14,2654 para a função c_1 e min = 0 e max = 0,2030 para a função c_2 .

O Quadro 3 apresenta os resultados do algoritmo RRT* utilizando a função de minimização multiobjetivo f3(x). As Figuras 13 e 14 retratam uma das soluções encontradas, com 33 estados obtidos, custo inicial de 4,84 e custo final de 1,3472.

4.3.4 Planejamento para minimizar o movimento dos efetuadores no espaço de trabalho

E por fim, a última função custo proposta no trabalho tem como finalidade minimizar o movimento dos efetuadores no espaço de trabalho. A função custo proposta é indicada a seguir:

0.6 - 0.4 - 0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.4 - 0.6 -

Figura 13 – Solução para a função de otimização multiobjetivo

Posição em x (m)
Fonte: Elaborada pelo autor

0

0.2

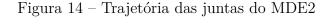
0.4

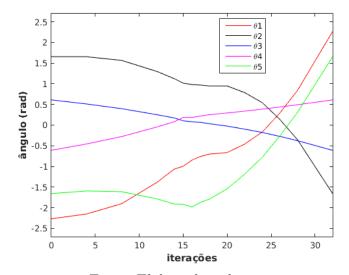
0.6

-0.6

-0.4

-0.2





Fonte: Elaborada pelo autor

$$\min f_4(x) = \sum_{i=2}^m (x_{1i} - x_{1i-1})^2 + (y_{1i} - y_{1i-1})^2 + (x_{2i} - x_{2i-1})^2 + (y_{2i} - y_{2i-1})^2$$
(4.5)

onde m é a quantidade de estados obtidos na solução da rota e (x_{1i},y_{1i}) e (x_{2i},y_{2i}) representam as coordenadas do efetuador 1 e do efetuador 2 para o estado i, respectivamente, no espaço de trabalho.

As Figuras 15 e 16 mostram uma das soluções encontradas utilizando a função de

min μ σ maxEstados 40,8400 13,0000 113,0000 16,0395 f3 Inicial 4,9010 2,5097 1,3900 10,7300 f3 Final 0,9701 0,2419 0,3456 1,7576 f1 Final 14,5173 13,6851 16,8988 0,4736 (radianos)

f2 Final

 $\frac{(m^2)}{f4 \text{ Final}}$

 (m^2)

Quadro 3 – Resultados da otimização multiobjetivo

Fonte: Elaborado pelo autor

0,0539

0,0410

0,0025

0,0447

0,2261

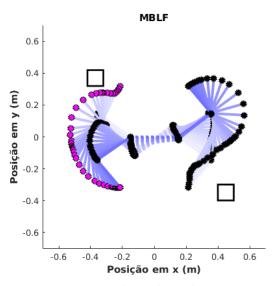
0,2589

0,0628

0,1090

minimização do movimento dos efetuadores f4(x), com 45 estados obtidos, custo inicial de $0.73m^2$ e custo final de $0.0851m^2$. Os resultados são mostrados no Quadro 4.

Figura 15 – Solução para a função de otimização do movimento dos efetuadores



Fonte: Elaborada pelo autor

4.3.5 Discussão dos resultados para planejamento de caminho

Como observado nos resultados, todas as funções, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$, conseguiram alcançar seus objetivos que consistiam em minimizar o movimento das juntas, minimizar o movimento da base livre flutuante, minimizar os movimentos das juntas e da base livre flutuante e minimizar o movimento dos efetuadores no espaço de trabalho, respectivamente. Ao minimizar o movimento das juntas ativas, obteve-se em média soluções com menor números de estados. A função $f_2(x)$ apresentou menor desvio padrão para os custos das soluções finais. Ao realizar a minimização multiobjetivo, obteve-se em média soluções com maior número de estados. Observa-se também, que o algoritmo RRT*

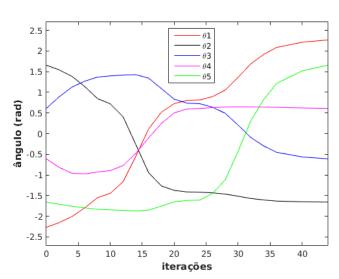


Figura 16 – Trajetória das juntas do MDE2

Quadro 4 – Resultados da otimização do movimento dos efetuadores

	μ	σ	min	max
Estados	39,4000	13,7745	5,0000	89,0000
$f4$ Inicial (m^2)	0,6965	0,1960	0,4200	1,5300
$f4 \text{ Final}$ (m^2)	0,1185	0,1168	0,0449	0,8398
f1 Final (radianos)	17,0587	1,4891	14,2098	20,1527
$f2 \text{ Final}$ (m^2)	0,7334	0,6247	0,0264	2,7435
f3 Final	4,4665	3,0854	0,8948	14,4232

Fonte: Elaborado pelo autor

para todos os casos conseguiu uma melhora de desempenho em relação a solução inicial encontrada.

4.4 Planejamento de Trajetória

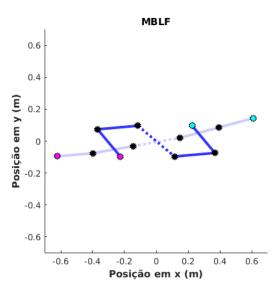
Como dito anteriormente, o planejador de caminho fornece rotas que levam o robô da posição inicial para a posição final, sendo, uma descrição puramente espacial. Para determinar os aspectos dinâmicos do movimento, como velocidades e acelerações, uma possível solução seria a geração de uma trajetória válida estabelecida à partir do caminho determinado pelo planejador. Entretando, essa tarefa não é considerada trivial devido ao fato do planejador determinar uma posição para a junta passiva do manipulador dinamicamente equivalente, a qual, depende diretamente das posições, velocidades e

acelerações das juntas ativas, dificultando com isso, a determinação de uma trajetória válida. Outra opção, que será detalhada nessa seção, é o planejamento direto de uma trajetória.

O objetivo do planejamento foi encontrar uma trajetória que permitisse conduzir o manipulador da posição inicial q_i para a posição final q_f , livre de colisão. Para isso, foi implementado o algoritmo RRTControl, também baseado nas funções disponíveis na biblioteca de planejamento OMPL. Nesse algoritmo, além do modelo cinemático do MDE2, foi necessário a implementação do modelo dinâmico do mesmo (Equação 3.3), juntamente com funções para verificação de colisão do MBLF.

A posição inicial e final dos efetuadores (Figura 17) foram escolhidas arbitrariamente, as velocidades e acelerações iniciais e finais definidas como zero, e o tempo de amostragem foi definido como Ts=0,45s. As configurações inicias dos efetuadores foram definidas como $EF1_i=(-0,6208m,-0,0955m,-175^\circ)$ e $EF2_i=(0,6116m,0,1443m,15^\circ)$, e as configurações finais como $EF1_f=(-0,2250m,-0,0974m,-50^\circ)$ e $EF2_i=(0,2250m,0,0974m,130^\circ)$. Logo, as configurações inicial e final das juntas do manipulador dinamicamente equivalente calculadas através do método da cinemática inversa implementado são: $\theta_{inicial}=[5^\circ 5^\circ 0^\circ 5^\circ 0^\circ]$ e $\theta_{final}=[130^\circ -125^\circ -45^\circ 45^\circ 125^\circ]$.

Figura 17 – Configuração Inicial (azul claro) e Final (azul escuro). A base livre flutuante é representada pela linha tracejada, o efetuador 1 pelos círculos vermelhos e o efetuador 2 pelos círculos verdes



Fonte: Elaborada pelo autor

4.4.1 Sem Obstáculo

Para o planejamento de trajetória sem obstáculos foram realizadas simulações com dois critérios de paradas diferentes. O primeiro critério de parada foi definido como: erro de posição dos efetuadores $(x,y) \le 0.1m$, erro de orientação dos efetuadores $\le 3^{\circ}$,

erro de velocidade e aceleração das juntas <=0.06rad/s e $0.06rad/s^2$, respectivamente, e tempo <=180s. Para o primeiro critério foram efetuados 469 simulações e econtradas 100 soluções. Uma das soluções encontradas pelo algoritmo RRTControl é ilustrada pelas Figuras de 18 a 22, com 96 estados obtidos e tempo de processamento igual a 131, 498s. Da mesma forma como foram apresentados os resultados do planejamento de rota, o robô manipulador espacial é representado por uma cor mais clara quando na sua configuração inicial e mais escura na configuração final.

Os Quadros de 5 a 7 mostram a média μ , devio padrão σ , o valor mínimo min, e o valor máximo max, da quantidade de estados obtidos, do tempo de processamento, erro de posição e orientação dos efetuadores e erro de velocidade e aceleração das juntas para as soluções encontradas.

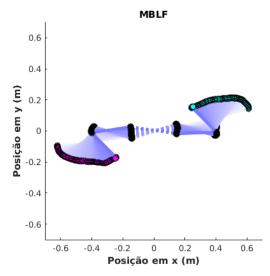


Figura 18 – Movimento do manipulador espacial

Fonte: Elaborada pelo autor

Quadro 5 – Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição e orientação dos efetuadores

	μ	σ	min	max
Estados	96,2500	27,0209	44,0000	196,0000
Tempo de Processamento (s)	56,4500	50,8277	0,5880	168,0970
Erro x - EF1 (m)	0,0312	0,0173	0,0016	0,0946
Erro y - EF1 (m)	0,0747	0,0168	0,0103	0,0996
Erro orientação - EF1 (°)	1,9640	0,8679	0,0671	2,9869
Erro x - EF2 (m)	0,0327	0,0147	0,0020	0,0836
Erro y - EF2 (m)	0,0738	0,0180	0,0173	0,0995
Erro orientação - EF2 (°)	1,6341	0,8181	0,0061	2,9753

2.5 2 1.5 1 ângulo (rad) 0.5 -0.5 -1.5 θ 3 -2 θ 4 θ5 -2.5 10 15 20 25 30 35 40 0

Figura 19 – Trajetória das juntas do MDE2

tempo (s)

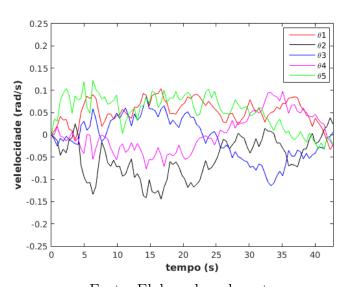


Figura 20 – Velocidade angular das juntas do MDE2

Fonte: Elaborada pelo autor

Para o segundo critério foram realizadas 1246 simulações e encontradas 100 soluções. O critério de parada foi definido como: erro de posição dos efetuadores (x,y) <= 0.08m, erro de orientação dos efetuadores $<= 3^{\circ}$, erro de velocidade e aceleração das juntas <= 0.06rad/s e $0.06rad/s^2$, respectivamente, e tempo <= 180s. Os Quadros de 8 a 10 mostram o resultado para as soluções encontradas, e as Figuras de 23 a 27 apresentam umas das soluções encontrada pelo algoritmo RRTControl com 79 estados obtidos e tempo de processamento igual a 138,876.

4.4.2 Com Obstáculo

Figura 21 – Aceleração das juntas do MDE2

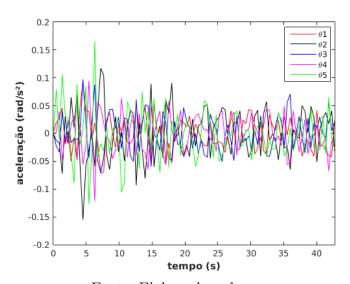
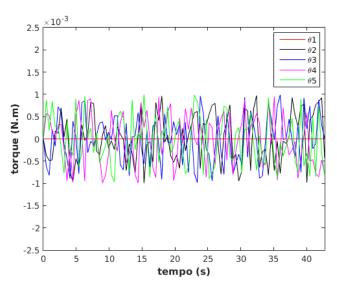


Figura 22 – Perfil de torque aplicado no MDE2



Fonte: Elaborada pelo autor

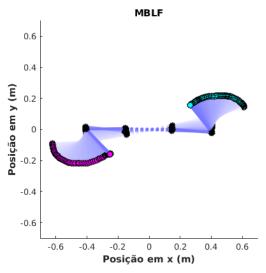
Quadro 6 – Erro de velocidade angular das juntas

	μ	σ	min	max
Erro vel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0301	0,0174	0,0015	0,0600
Erro vel. θ_2 (rad/s)	0,0259	0,0159	0,0003	0,0590
Erro vel. θ_3 (rad/s)	0,0293	0,0172	0,0002	0,0598
Erro vel. $\theta_4 \ (rad/s)$	0,0313	0,0167	0,0002	0,0596
Erro vel. θ_5 (rad/s)	0,0314	0,0196	0,0002	0,0592

Quadro 7 – Erro de aceleração angular das juntas

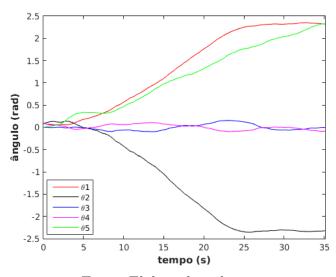
	μ	σ	min	max
Erro acel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0234	0,0130	0,0000	0,0516
Erro acel. θ_2 (rad/s)	0,0247	0,0151	0,0008	0,0573
Erro acel. θ_3 (rad/s)	0,0182	0,0143	0,0001	0,0583
Erro acel. θ_4 (rad/s)	0,0218	0,0148	0,0001	0,0579
Erro acel. θ_5 (rad/s)	0,0285	0,0172	0,0002	0,0594

Figura 23 – Movimento do manipulador espacial



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24 – Trajetória das juntas do MDE2



0.25
0.2
0.15
0.01
0.05
0.05
-0.05
-0.15
-0.2

Figura 25 – Velocidade angular das juntas do MDE2

15 20 tempo (s) 25

30

35

-0.25 L

5

10

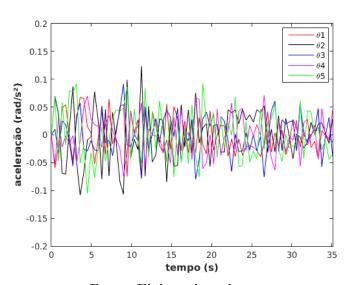


Figura 26 – Aceleração das juntas do MDE2

Figura 27 – Perfil de torque aplicado no MDE2

Quadro 8 – Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição e orientação dos efetuadores

	μ	σ	min	max
Estados	99,0900	28,4399	50,0000	204,0000
Tempo de Processamento (s)	57,8620	49,4539	0,7510	180,0000
Erro x - EF1 (m)	0,0334	0,0092	0,0008	0,0537
Erro y - EF1 (m)	0,0667	0,0092	0,0237	0,0799
Erro orientação - EF1 (°)	1,6682	0,9213	0,0312	2,9898
Erro x - EF2 (m)	0,0352	0,0086	0,0050	0,0561
Erro y - EF2 (m)	0,0653	0,0103	0,0060	0,0798
Erro orientação - EF2 (°)	1,8120	0,9161	0,0041	2,9996

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 9 – Erro de velocidade angular das juntas

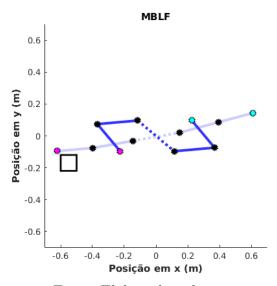
	μ	σ	min	max
Erro vel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0280	0,0164	0,0006	0,0595
Erro vel. θ_2 (rad/s)	0,0243	0,0165	0,0001	0,0577
Erro vel. θ_3 (rad/s)	0,0283	0,0164	0,0000	0,0586
Erro vel. θ_4 (rad/s)	0,0296	0,0174	0,0001	0,0598
Erro vel. θ_5 (rad/s)	0,0307	0,0180	0,0000	0,0591

Quadro 10 – Erro de aceleração angular das juntas

	μ	σ	min	max
Erro acel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0249	0,0146	0,0010	0,0561
Erro acel. θ_2 (rad/s)	0,0268	0,0151	0,0011	0,0569
Erro acel. θ_3 (rad/s)	0,0228	0,0147	0,0001	0,0579
Erro acel. θ_4 (rad/s)	0,0231	0,0151	0,0014	0,0595
Erro acel. θ_5 (rad/s)	0,0270	0,0153	0,0006	0,0584

Para o planejamento de trajetória com obstáculo foi adicionado, no espaço de trabalho do manipulador, um obstáculo quadrado fixo com centro na coordenada (-0, 55m, -0, 17m) e comprimento dos lados iguais a 0, 1m (Figura 28). Foram utilizados os mesmos critérios de parada apresentados no planejamento de trajetória sem obstáculo.

Figura 28 – Configuração Inicial e Final, juntamente com o obstáculo (representado pelo quadrado)

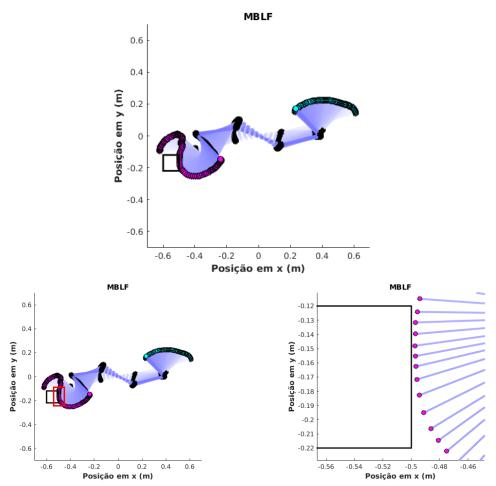


Fonte: Elaborada pelo autor

Para o primeiro critério foram realizadas 1127 simulações e encontradas 100 soluções. Os Quadros de 11 a 13 mostram o resultado para as soluções encontradas, e as Figuras de 29 a 33 apresentam umas das soluções encontrada pelo algoritmo RRTControl com 119 estados obtidos e tempo de processamento igual a 93,050s.

Para o segundo critério de parada foram efetuados 2161 simulações e encontradas 100 soluções. Uma das soluções encontradas pelo algoritmo RRT*Control* é ilustrada pelas Figuras de 34 a 38, com 159 estados obtidos e tempo de processamento igual a 6.280s. Os Quadros de 14 a 16 mostram o resultado para as soluções encontradas.

Figura 29 – Movimento do manipulador espacial. Para uma melhor verificação do movimento, foi realizada a ampliação da área delimitada pelo quadrado vermelho



4.4.3 Discussão dos resultados para planejamento de trajetória

Como observado nos resultados, o algoritmo RRTControl conseguiu solucionar o problema de planejamento de trajetória para o MBLF em ambos os casos, com e sem obstáculo, e para os dois critérios de parada escolhidos. Para todas as simulações o erro de posição do eixo y apresentou maior valor em média para os dois efetuadores. O segundo critério de parada apresentou maior número de simulações para os dois casos. Observa-se também, que o planejamento com obstáculo apresentou em média soluções com maior número de estados. O planejamento sem obstáculo obteve em média menor tempo de processamento. Finalmente, o planejamento de trajetória apresentou em média soluções com maior números de estados comparados ao planejamento de caminho.

Figura 30 – Trajetória das juntas do MDE2

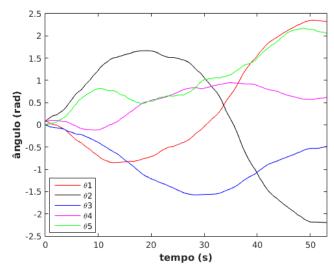
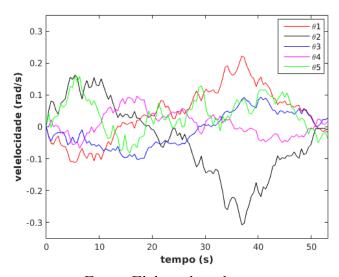


Figura 31 – Velocidade angular das juntas do MDE2



0.15 aceleração (rad/s²) 0.05 -0.1 -0.15 -0.2 L

Figura 32 – Aceleração das juntas do MDE2

20

10

30 **tempo (s)**

40

50

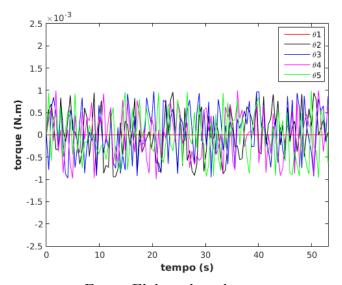


Figura 33 – Perfil de torque aplicado no MDE2

Quadro 11 – Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição e orientação dos efetuadores

	μ	σ	min	max
Estados	185,9000	39,2195	104,0000	288,0000
Tempo de Processamento (s)	85,3465	49,9586	1,6010	176,9160
Erro x - EF1 (m)	0,0359	0,0252	0,0022	0,0984
Erro y - EF1 (m)	0,0699	0,0244	0,0006	0,0999
Erro orientação - EF1 (°)	1,7846	0,8913	0,0115	2,9946
Erro x - EF2 (m)	0,0328	0,0243	0,0003	0,0967
Erro y - EF2 (m)	0,0627	0,0279	0,0017	0,0997
Erro orientação - EF2 (°)	1,8371	0,7640	0,0291	2,9833

Quadro 12 – Erro de velocidade angular das juntas

	μ	σ	min	max
Erro vel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0247	0,0156	0,0001	0,0587
Erro vel. θ_2 (rad/s)	0,0224	0,0153	0,0002	0,0594
Erro vel. θ_3 (rad/s)	0,0262	0,0169	0,0003	0,0590
Erro vel. $\theta_4 \ (rad/s)$	0,0258	0,0178	0,0001	0,0585
Erro vel. θ_5 (rad/s)	0,0373	0,0182	0,0001	0,0600

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 13 – Erro de aceleração angular das juntas

	μ	σ	min	max
Erro acel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0212	0,0121	0,0013	0,0449
Erro acel. θ_2 (rad/s)	0,0256	0,0140	0,0008	0,0565
Erro acel. θ_3 (rad/s)	0,0176	0,0135	0,0004	0,0545
Erro acel. $\theta_4 \ (rad/s)$	0,0158	0,0145	0,0001	0,0554
Erro acel. θ_5 (rad/s)	0,0272	0,0148	0,0003	0,0596

MBLF

0.6

0.4

0.2

-0.4

-0.6

-0.4

-0.6

-0.4

-0.2

0.2

0.4

0.6

Posição em x (m)

Figura 34 – Movimento do manipulador espacial

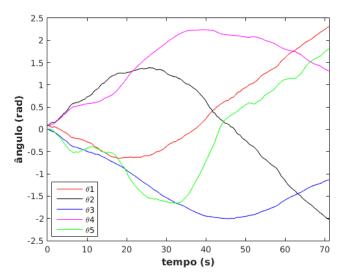


Figura 35 – Trajetória das juntas do MDE2

Figura 36 – Velocidade angular das juntas do MDE2

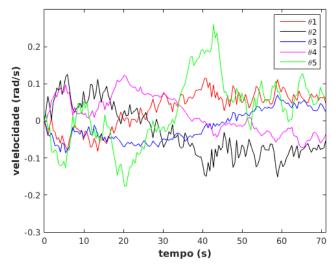
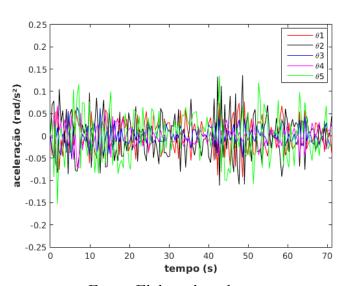


Figura 37 – Aceleração das juntas do MDE2



2.5 ×10⁻³

2
1.5

0.5

-1

-1.5

-2

-2.5

0 10 20 30 40 50 60 70

tempo (s)

Figura 38 – Perfil de torque aplicado no MDE2

Quadro 14 – Número de estados obtidos, tempo de processamento e erro de posição e orientação dos efetuadores

	μ	σ	min	max
Estados	191,5638	39,2337	101,0000	282,0000
Tempo de Processamento (s)	92,3148	52,3824	3,4920	180,0000
Erro x - EF1 (m)	0,0294	0,0153	0,0010	0,0784
Erro y - EF1 (m)	0,0584	0,0175	0,0055	0,0794
Erro orientação - EF1 (°)	1,6672	0,9144	0,0051	2,9841
Erro x - EF2 (m)	0,0283	0,0137	0,0005	0,0750
Erro y - EF2 (m)	0,0567	0,0196	0,0034	0,0793
Erro orientação - EF2 (°)	1,7293	0,8498	0,0106	2,9799

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 15 – Erro de velocidade angular das juntas

	μ	σ	min	max
Erro vel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0267	0,0148	0,0002	0,0583
Erro vel. θ_2 (rad/s)	0,0232	0,0182	0,0009	0,0596
Erro vel. θ_3 (rad/s)	0,0302	0,0175	0,0003	0,0596
Erro vel. θ_4 (rad/s)	0,0312	0,0196	0,0003	0,0585
Erro vel. $\theta_5 \ (rad/s)$	0,0258	0,0179	0,0003	0,0600

Quadro 16 – Erro de aceleração angular das juntas

	μ	σ	min	max
Erro acel. $\theta_1 \ (rad/s)$	0,0236	0,0134	0,0010	0,0484
Erro acel. θ_2 (rad/s)	0,0304	0,0160	0,0006	0,0592
Erro acel. θ_3 (rad/s)	0,0228	0,0146	0,0015	0,0592
Erro acel. θ_4 (rad/s)	0,0231	0,0150	0,0003	0,0596
Erro acel. θ_5 (rad/s)	0,0279	0,0158	0,0000	0,0586

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi utilizado os algoritmos RRT* e RRTControl, disponibilizados pela biblioteca OMPL, no planejamento cinemático de rotas e no planejamento de trajetórias, ambas no espaço das juntas e com desvio de obstáculos estáticos, para um MBLF com dois braços.

Para a modelagem do MBLF, foi utilizado o conceito de manipulador dinamicamente equivalente. Como o robô possuiu dois braços, foi utilizado dois DEM's para mapeálos. Além da implementação dentro dos algoritmos de planejamento, os DEM's foram empregados na metodologia desenvolvida para a determinação da cinemática inversa do robô que, neste trabalho, foi elaborada utilizando algoritmos genéticos. Assim, foi possível especificar a posição e orientação dos dois efetuadores no espaço da tarefa, uma vez que o planejamento de movimento utilizado neste trabalho é realizado no espaço das juntas.

No planejamento de rotas foram aplicadas quatro funções de otimização: minimização do movimento das juntas ativas, minimização do movimento da base livre flutuante, minimização do movimento das juntas ativas e da base livre flutuante e minimização do movimento dos efetuadores no espaço de trabalho. Todas as funções conseguiram atingir seus objetivos e o algoritmo RRT* conseguiu uma melhora de desempenho em relação a solução inicial para todos os casos. Para o planejamento de trajetórias foram utilizadas duas situações distintas para o espaço de trabalho, sem e com obstáculo, e para cada situação, fora aplicados dois critérios de parada diferentes. Para todas as situações o algoritmo RRTControl conseguiu resolver o problema de planejamento e encontrou trajetórias para as tarefas determinadas.

Sobre trabalhos futuros, sugere-se que as trajetórias obtidas pelas simulações sejam aplicadas em experimentos com o manipulador espacial de base livre flutuante considerado neste trabalho. Outras possíveis abordagens seriam a geração de uma trajetória válida estabelecida à partir do caminho determinado pelo planejador de rotas, e a implementação de funções de otimização no algoritmo RRTControl para a determinação de trajetórias ótimas.

REFERÊNCIAS

- ARSLAN, O.; TSIOTRAS, P. Use of relaxation methods in sampling-based algorithms for optimal motion planning. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, IEEE, p. 2421–2428, 2013.
- BENEVIDES, J. R. S. **Planejamento de Rota para Manipulador Planar de Base Livre Flutuante utilizando o Algoritmo RRT**. 2015. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- BEZERRA, R. A. Modelagem e Controle de Robô Manipulador de Base Livre Flutuante com Dois Braços. 2015. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- CANNY, J. The Complexity of Robot Motion Planning. [S.l.]: MIT press, 1988.
- CHOSET, H.; LYNCH, K.; HUTCHINSON, S.; THRUN, S. Principles of Robot Motion: Theory, Algorithms, and Implementations. [S.l.]: MIT Press, 2005. ISBN 0-262-03327-5.
- DUBOWSKY, S.; PAPADOPOULOS, E. The kinematics, dynamics, and control of free-flying and free-floating space robotic systems. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, IEEE, v. 9, n. 5, p. 531–543, Oct 1993. Doi:10.1109/70.258046.
- FEIHU, J. Path planning of free-flying space robot using memetic algorithm. In: **Strategic Technology (IFOST), 2013 8th International Forum on**. IEEE: [s.n.], 2013. p. 19–22.
- GOLDBERG, D. E.; HOLLAND, J. H. Genetic algorithms and machine learning. **Machine Learning**, v. 3, p. 95–99, 1989.
- KARAMAN, S.; FRAZZOLI, E. Sampling-based algorithms for optimal motion planning. **The International Journal of Robotics Reserch**, p. 846–894, 2011.
- KOUML, K. A neuro-genetic approach to the inverse kinematics solution of robotic manipulators. Scientific Research and Essays, p. 2784–2794, 2011.
- LAVALLE, S. M. Rapidly-exploring random trees: A new tool for path planning. 1998.
- _____. From dynamic programming to RRTs: Algorithmic design of feasible trajectories. In: Control Problems in Robotics. Springer-Verlag: [s.n.], 2002. p. 19–37.
- LAVALLE, S. M.; KUFFNER JR, J. J. Rapidly-exploring random trees: Progress and prospects. In: Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics. [S.l.: s.n.], 2000.
- _____. Randomized kinodynamic planning. The International Journal of Robotics Research, p. 378–400, 2001.
- LI, H.; LIANG, Y. Bidirectional RRT algorithm for collision avoidance motion planning of FFSR. **Sensors & Transducers**, p. 69–74, 2014.

- LIANG, B.; XU, Y.; BERGERMAN, M. Dynamically equivalent manipulator for space manipulator system. 1. **Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation**, IEEE, v. 4, p. 2765–2770, 1997.
- _____. Dynamically equivalent manipulator for space manipulator system. 2. Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '97), IEEE, v. 3, p. 1493–1499, 1997.
- LINDEN, R. Algoritmos genéticos. 2. ed. [S.l.]: Brasport, 2008.
- MOMANI, S.; ABO-HAMMOUR, Z. S.; ALSMADI, O. M. Solution of inverse kinematics problem using genetic algorithms. **Applied Mathematics & Information Sciences**, p. 225, 2016.
- PAPADOPOULOS, E.; DUBOWSKY, S. On the nature of control algorithms for free-floating space manipulators. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, IEEE, v. 7, n. 6, p. 750–758, 1991.
- _____. Dynamics singularities in free-floating space manipulators. **ASME Journal of dynamic Systems, measurement, and control**, v. 115, n. 1, p. 44–52, 1993.
- PAPADOPOULOS, E.; TORTOPIDIS, I.; NANOS, K. Smooth planning for free-floating space robots using polynomials. **Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation**, IEEE, p. 4272–4277, 2005.
- PAZELLI, T. de F. P. A. T. Montagem e Controle $H\infty$ Não Linear de Manipuladores Espaciais com Base Flutuante. 2011. Tese (Doutorado) Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- PEDERSEN, L.; KORTENKAMP, D.; D.WERRERGREEN; NOURBAKHSH, I. A survey of space robotics. In: **The 7th International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in space**. [S.l.: s.n.], 2003.
- PEREZ, A.; KARAMAN, S.; SHKOLNIK, A.; FRAZZOLI, E.; TELLER, S.; MATTH. Asymptotically-optimal path planning for manipulation using incremental sampling-based algorithms. Proceedings of the 2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE, p. 4307–4313, 25-30 Sep 2011.
- PEREZ, A.; PLATT JR, R.; KONIDARIS, G.; KAELBLING, L.; LOZANO-PEREZ, T. LQR-RRT*: Optimal sampling-based motion planning with automatically derived extension heuristics. **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, IEEE, p. 2537–2542, 2012.
- RICHARDS, A.; SCHOUWENAARS, T.; HOW, J. P.; FERON, E. Spacecraft trajectory planning with avoidance constraints using mixed-integer linear programming. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 25, p. 755–764, 2002.
- RYBUS, T.; SEWERYN, K. Application of rapidly-exploring randon trees (RRT) algorithm for trajectory planning of free-floating space manipulator. **10th International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo)**, IEEE, 2015.
- SAKAWA, Y. Trajectory planning of a free-flying robot by using the optimal control. **Optimal Control Applications and Methods**, v. 20, n. 5, p. 235–248, 1999.

- SIQUEIRA, A. A. G. Controle $H\infty$ Não Linear de Robôs Manipuladores Subatuados. 2004. Tese (Doutorado) Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- SKLIAROVA, I.; FERRARI, A. B. Satisfação booleana: algoritmos, aplicações, implementações. **Electrónica e Telecomunicações**, p. 400–408, 2003.
- SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. Robot modeling and control. New York: John Wiley & Sons, 2006.
- STILMAN, T. K. an M. Probabilistically complete kinodynamic planning for robot manipulators with acceleration limits. **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, IEEE, p. 3713–3719, 14-18 September 2014.
- SUCAN, I. A.; MOLL, M.; KAVRAKI, L. E. The open motion planning library. In: **IEEE** Robotics & Automation Magazine. IEEE: [s.n.], 2012. p. 72–82.
- TONETTO, C. P. Uma Proposta de Sistematização do Processo de Planejamento de Trajetórias para o Desenvolvimento de Tarefas de Robôs Manipuladores. 2007. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- URMSON, C.; SIMMONS, R. Approaches for heuristically biasing RRT growth. Proceedings of the 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003), IEEE, p. 1178–1183, 2003.
- XU, W.; LIU, H.; SHE, Y.; LIANG, B. Singularity-free path planning of dual-arm space robot for keeping the base inertially stabilized during target capturing. In: **IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)**. IEEE: [s.n.], 2012. p. 1536–1541.
- XU, W.; LIU, Y.; LIANG, B.; XU, Y.; LI, C.; QIANG, W. Non-holonomic path planning of a free-floating space robotic system using genetic algorithms. **Advanced Robotics**, v. 22, p. 451–476, 2008.
- YOSHIDA, K. Achievements in space robotics. In: **IEEE Robotics & Automation Magazine**. IEEE: [s.n.], 2009. p. 20–28.



ANEXO A - ESPECIFICAÇÃO DO MODELO

Como foi apresentado na seção 3.1.2, o modelo tem a forma da equação 3.3, que será repetida aqui:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & D_{pa} \\ D_{pa}^T & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_p \\ \ddot{q}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_p \\ V_a \end{bmatrix}$$
(A.1)

simplificando, temos:

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} \tag{A.2}$$

onde

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} V_p \\ V_a \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Com as matrizes D(q) e $C(q, \dot{q})$:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{14} & d_{45} \\ d_{51} & d_{15} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix}$$
(A.4)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{14} & c_{45} \\ c_{51} & c_{15} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}$$
(A.5)

De acordo com Bezerra (2015), seus elementos estão identificados abaixo:

$$\begin{split} d_{1,1} &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + l_{c1}^2 m_1 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_1^2 m_2 \\ &+ W_1^2 m_3 + W_1^2 m_4 + W_1^2 m_5 + W_2^2 m_3 + W_2^2 m_4 + W_2^2 m_5 + W_3^2 m_4 + W_3^2 m_5 \\ &+ W_4^2 m_5 + 2 l_{c5} W_1 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + 2 l_{c3} W_1 m_3 cos(\theta_2 + \theta_3) \\ &+ 2 l_{c4} W_2 m_4 cos(\theta_3 + \theta_4) + 2 l_{c5} W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + 2 W_1 W_3 m_4 cos(\theta_2 + \theta_3) \\ &+ 2 W_1 W_3 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3) + 2 W_2 W_4 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4) + 2 l_{c2} W_1 m_2 cos(\theta_2) \\ &+ 2 l_{c3} W_2 m_3 cos(\theta_3) + 2 l_{c4} W_3 m_4 cos(\theta_4) + 2 l_{c5} W_4 m_5 cos(\theta_5) + 2 W_1 W_2 m_3 cos(\theta_2) \\ &+ 2 W_1 W_2 m_4 cos(\theta_2) + 2 W_1 W_2 m_5 cos(\theta_2) + 2 W_2 W_3 m_4 cos(\theta_3) \\ &+ 2 W_2 W_3 m_5 cos(\theta_3) + 2 W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4) + 2 l_{c4} W_1 m_4 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &+ 2 l_{c5} W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + 2 W_1 W_4 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{split}$$

$$\begin{split} d_{1,2} &= d_{2,1}I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_2^2 m_3 + W_2^2 m_4 \\ &\quad + W_2^2 m_5 + W_3^2 m_4 + W_3^2 m_5 + W_4^2 m_5 + l_{c5} W_1 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + l_{c3} W_1 m_3 cos(\theta_2 + \theta_3) + 2 l_{c4} W_2 m_4 cos(\theta_3 + \theta_4) + 2 l_{c5} W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_1 W_3 m_4 cos(\theta_2 + \theta_3) + W_1 W_3 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3) + 2 W_2 W_4 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c2} W_1 m_2 cos(\theta_2) + 2 l_{c3} W_2 m_3 cos(\theta_3) + 2 l_{c4} W_3 m_4 cos(\theta_4) + 2 l_{c5} W_4 m_5 cos(\theta_5) \\ &\quad + W_1 W_2 m_3 cos(\theta_2) + W_1 W_2 m_4 cos(\theta_2) + W_1 W_2 m_5 cos(\theta_2) + 2 W_2 W_3 m_4 cos(\theta_3) \\ &\quad + 2 W_2 W_3 m_5 cos(\theta_3) + 2 W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4) + l_{c4} W_1 m_4 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + 2 l_{c5} W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1 W_4 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{split}$$

$$d_{1,3} = d_{3,1}I_3 + I_4 + I_5 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_3^2 m_4 + W_3^2 m_5$$

$$+ W_4^2 m_5 + l_{c5} W_1 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3} W_1 m_3 cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$+ l_{c4} W_2 m_4 cos(\theta_3 + \theta_4) + 2 l_{c5} W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + W_1 W_3 m_4 cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$+ W_1 W_3 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3) + W_2 W_4 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4) + l_{c3} W_2 m_3 cos(\theta_3)$$

$$+ 2 l_{c4} W_3 m_4 cos(\theta_4) + 2 l_{c5} W_4 m_5 cos(\theta_5) + W_2 W_3 m_4 cos(\theta_3)$$

$$+ W_2 W_3 m_5 cos(\theta_3) + 2 W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4) + l_{c4} W_1 m_4 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

$$+ l_{c5} W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1 W_4 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

$$d_{1,4} = d_{4,1}I_4 + I_5 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_4^2 m_5 + l_{c5}W_1 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

$$+ l_{c4}W_2 m_4 cos(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5)$$

$$+ W_2 W_4 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3 m_4 cos(\theta_4) + 2l_{c5}W_4 m_5 cos(\theta_5)$$

$$+ W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4) + l_{c4}W_1 m_4 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

$$+ l_{c5}W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1 W_4 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$

$$d_{1,5} = d_{5,1}I_5 + l_{c5}^2 m_5 + l_{c5}W_1 m_5 cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4 m_5 cos(\theta_5) + l_{c5}W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

$$d_{2,2} = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_2^2 m_3 + W_2^2 m_4$$

$$+ W_2^2 m_5 + W_3^2 m_4 + W_3^2 m_5 + W_4^2 m_5 + 2l_{c4} W_2 m_4 cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$+ 2l_{c5} W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + 2W_2 W_4 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4) + 2l_{c3} W_2 m_3 cos(\theta_3)$$

$$+ 2l_{c4} W_3 m_4 cos(\theta_4) + 2l_{c5} W_4 m_5 cos(\theta_5) + 2W_2 W_3 m_4 cos(\theta_3)$$

$$+ 2W_2 W_3 m_5 cos(\theta_3) + 2W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4) + 2l_{c5} W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

$$d_{2,3} = d_{3,2}I_3 + I_4 + I_5 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_3^2 m_4 + W_3^2 m_5 + W_4^2 m_5 + l_{c4}W_2 m_4 cos(\theta_3 + \theta_4) + 2l_{c5}W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + W_2 W_4 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4) + l_{c3}W_2 m_3 cos(\theta_3) + 2l_{c4}W_3 m_4 cos(\theta_4) + 2l_{c5}W_4 m_5 cos(\theta_5) + W_2 W_3 m_4 cos(\theta_3) + W_2 W_3 m_5 cos(\theta_3) + 2W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4) + l_{c5}W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

$$d_{2,4} = d_{4,2}I_4 + I_5 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_4^2 m_5 + l_{c4}W_2 m_4 cos(\theta_3 + \theta_4)$$
$$+ l_{c5}W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + W_2 W_4 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3 m_4 cos(\theta_4)$$
$$+ 2l_{c5}W_4 m_5 cos(\theta_5) + W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4) + l_{c5}W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

$$d_{2,5} = d_{5,2}I_5 + l_{c5}^2 m_5 + l_{c5}W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4 m_5 cos(\theta_5) + l_{c5}W_2 m_5 cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

$$d_{3,3} = I_3 + I_4 + I_5 + l_{c3}^2 m_3 + l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + W_3^2 m_4 + W_3^2 m_5 + W_4^2 m_5 + 2l_{c5} W_3 m_5 cos(\theta_4 + \theta_5) + 2l_{c4} W_3 m_4 cos(\theta_4) + 2l_{c5} W_4 m_5 cos(\theta_5) + 2W_3 W_4 m_5 cos(\theta_4)$$

$$d_{3,4} = d_{4,3}m_4l_{c4}^2 + W_3m_4cos(\theta_4)l_{c4} + m_5l_{c5}^2 + 2m_5cos(\theta_5)l_{c5}W_4$$
$$+W_3m_5cos(\theta_4 + \theta_5)l_{c5} + m_5W_4^2 + W_3m_5cos(\theta_4)W_4 + I_4 + I_5$$

$$d_{3,5} = d_{5,3}I_5 + l_{c5}^2 m_5 + l_{c5}W_3 m_5 \cos(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4 m_5 \cos(\theta_5)$$

$$d_{4,4} = l_{c4}^2 m_4 + l_{c5}^2 m_5 + 2m_5 \cos(\theta_5) l_{c5} W_4 + m_5 W_4^2 + I_4 + I_5$$

$$d_{4,5} = d_{5,4}l_{c5}^2 m_5 + W_4 m_5 \cos(\theta_5)l_{c5} + I_5$$

$$d_{5,5} = l_{c5}^2 m_5 + I_5$$

$$\begin{split} c_{1,1} &= -\dot{\theta_3}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) + W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &- \dot{\theta_5}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_4)) - \dot{\theta_4}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \\ &+ l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &- \dot{\theta_2}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) \\ &+ W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) \\ &+ W_1W_2m_5sin(\theta_2) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{split}$$

$$\begin{split} c_{1,2} &= -\dot{\theta}_3(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) + W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &\quad - \dot{\theta}_5(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_4)) - \dot{\theta}_4(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &\quad - \dot{\theta}_1(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) \\ &\quad + W_1W_2m_5sin(\theta_2) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &\quad - \dot{\theta}_2(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad + W_1W_3m_5sin(\theta_2) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &\quad - \dot{\theta}_2(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) \\ &\quad + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) \\ &\quad + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) \\ &\quad + W_1W_2m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) \\ &\quad + W_1W_2m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) \\ &\quad + W_1W_2m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) \\ &\quad + W_1W_2m_5sin(\theta_2) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &\quad + W_1W_2m_5sin(\theta_2) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &\quad + W_1W_2m_5sin(\theta_2) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + W_1W$$

$$\begin{split} c_{1,3} &= -\dot{\theta}_1(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) + W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ &\quad - \dot{\theta}_2(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad - \dot{\theta}_3(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) + W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &\quad + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W$$

$$\begin{split} c_{1,4} &= -\dot{\theta}_5(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) - \dot{\theta}_1(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ -\dot{\theta}_2(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) - \dot{\theta}_3(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \theta_5) \\ &\quad + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &\quad + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ -\dot{\theta}_4(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_4 + \theta_5) \\ &\quad + W_2W_$$

$$\begin{split} c_{1,5} &= -\dot{\theta_1}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) - \dot{\theta_2}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \\ &+ l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_3}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) - \dot{\theta_4}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &+ l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_5}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \end{split}$$

$$c_{2,1} = \dot{\theta}_1(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c3}W_1m_3sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_4sin(\theta_2 + \theta_3) + W_1W_3m_5sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c2}W_1m_2sin(\theta_2) + W_1W_2m_3sin(\theta_2) + W_1W_2m_4sin(\theta_2) + W_1W_2m_5sin(\theta_2) + l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)) \\ -\dot{\theta}_3(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) + W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_4sin(\theta_3) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ -\dot{\theta}_5(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ -\dot{\theta}_4(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5))$$

$$\begin{split} c_{2,2} &= -\dot{\theta_4}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3+\theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3+\theta_4) \\ &+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &- \dot{\theta_3}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3+\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_3+\theta_4) + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) \\ &+ W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &- \dot{\theta_5}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \end{split}$$

$$\begin{split} c_{2,3} &= -\dot{\theta_4}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_1}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) \\ &+ W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_2}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) \\ &+ W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_3}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) \\ &+ W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_5}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \end{split}$$

$$\begin{split} c_{2,4} &= -\dot{\theta_1}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_2}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_3}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_4}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) \\ &+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \\ &- \dot{\theta_5}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) \end{split}$$

$$\begin{split} c_{2,5} &= -\dot{\theta_1}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &-\dot{\theta_2}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &-\dot{\theta_3}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &-\dot{\theta_4}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &-\dot{\theta_5}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \end{split}$$

$$c_{3,1} = \dot{\theta}_{1}(l_{c5}W_{1}m_{5}sin(\theta_{2} + \theta_{3} + \theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c3}W_{1}m_{3}sin(\theta_{2} + \theta_{3}) + l_{c4}W_{2}m_{4}sin(\theta_{3} + \theta_{4})$$

$$+W_{1}W_{3}m_{4}sin(\theta_{2} + \theta_{3}) + W_{1}W_{3}m_{5}sin(\theta_{2} + \theta_{3}) + W_{2}W_{4}m_{5}sin(\theta_{3} + \theta_{4})$$

$$+l_{c3}W_{2}m_{3}sin(\theta_{3}) + W_{2}W_{3}m_{4}sin(\theta_{3}) + W_{2}W_{3}m_{5}sin(\theta_{3}) + l_{c4}W_{1}m_{4}sin(\theta_{2} + \theta_{3} + \theta_{4})$$

$$+l_{c5}W_{2}m_{5}sin(\theta_{3} + \theta_{4} + \theta_{5}) + W_{1}W_{4}m_{5}sin(\theta_{2} + \theta_{3} + \theta_{4})$$

$$-\dot{\theta}_{4}(l_{c5}W_{3}m_{5}sin(\theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c4}W_{3}m_{4}sin(\theta_{4}) + W_{3}W_{4}m_{5}sin(\theta_{4})$$

$$+\dot{\theta}_{2}(l_{c4}W_{2}m_{4}sin(\theta_{3} + \theta_{4}) + W_{2}W_{4}m_{5}sin(\theta_{3} + \theta_{4}) + l_{c3}W_{2}m_{3}sin(\theta_{3})$$

$$+W_{2}W_{3}m_{4}sin(\theta_{3}) + W_{2}W_{3}m_{5}sin(\theta_{3}) + l_{c5}W_{2}m_{5}sin(\theta_{3} + \theta_{4} + \theta_{5})$$

$$-\dot{\theta}_{5}(l_{c5}W_{3}m_{5}sin(\theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c5}W_{4}m_{5}sin(\theta_{5}))$$

$$\begin{split} c_{3,2} &= \dot{\theta_1}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3+\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_3+\theta_4) + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) \\ &+ W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &- \dot{\theta_4}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &+ \dot{\theta_2}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3+\theta_4) + W_2W_4m_5sin(\theta_3+\theta_4) + l_{c3}W_2m_3sin(\theta_3) \\ &+ W_2W_3m_4sin(\theta_3) + W_2W_3m_5sin(\theta_3) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &- \dot{\theta_5}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5)) \end{split}$$

$$c_{3,3} = -\dot{\theta}_4(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) -\dot{\theta}_5(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5))$$

$$\begin{split} c_{3,4} &= -\dot{\theta_1}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &-\dot{\theta_2}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &-\dot{\theta_3}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &-\dot{\theta_4}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &-\dot{\theta_5}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5)) \end{split}$$

$$c_{3,5} = -\dot{\theta}_{1}(l_{c5}W_{3}m_{5}sin(\theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c5}W_{4}m_{5}sin(\theta_{5}))$$

$$-\dot{\theta}_{2}(l_{c5}W_{3}m_{5}sin(\theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c5}W_{4}m_{5}sin(\theta_{5}))$$

$$-\dot{\theta}_{3}(l_{c5}W_{3}m_{5}sin(\theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c5}W_{4}m_{5}sin(\theta_{5}))$$

$$-\dot{\theta}_{4}(l_{c5}W_{3}m_{5}sin(\theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c5}W_{4}m_{5}sin(\theta_{5}))$$

$$-\dot{\theta}_{5}(l_{c5}W_{3}m_{5}sin(\theta_{4} + \theta_{5}) + l_{c5}W_{4}m_{5}sin(\theta_{5}))$$

$$c_{4,1} = \dot{\theta}_3(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4))$$

$$+ \dot{\theta}_2(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4)$$

$$+ l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5))$$

$$+ \dot{\theta}_1(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) + l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5)$$

$$+ W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)$$

$$+ l_{c4}W_1m_4sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

$$+ W_1W_4m_5sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - l_{c5}W_4\dot{\theta}_5m_5sin(\theta_5)$$

$$c_{4,2} = \dot{\theta_3}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4))$$

$$-\dot{\theta_1}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4)$$

$$+l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5))$$

$$+\dot{\theta_2}(l_{c4}W_2m_4sin(\theta_3 + \theta_4) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + W_2W_4m_5sin(\theta_3 + \theta_4)$$

$$+l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5))$$

$$-l_{c5}W_4\dot{\theta_5}m_5sin(\theta_5)$$

$$\begin{split} c_{4,3} &= \dot{\theta}_1(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &+ \dot{\theta}_2(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &+ \dot{\theta}_3(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c4}W_3m_4sin(\theta_4) + W_3W_4m_5sin(\theta_4)) \\ &- l_{c5}W_4\dot{\theta}_5m_5sin(\theta_5) \end{split}$$

$$c_{4,4} = -l_{c5}W_4\dot{\theta}_5 m_5 sin(\theta_5)$$

$$c_{4,5} = -l_{c5}W_4\dot{\theta}_1 m_5 sin(\theta_5) - l_{c5}W_4\dot{\theta}_2 m_5 sin(\theta_5) - l_{c5}W_4\dot{\theta}_3 m_5 sin(\theta_5) - l_{c5}W_4\dot{\theta}_4 m_5 sin(\theta_5) - l_{c5}W_4\dot{\theta}_5 m_5 sin(\theta_5)$$

$$\begin{split} c_{5,1} &= \dot{\theta_2}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &+ \dot{\theta_1}(l_{c5}W_1m_5sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) \\ &+ l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) \\ &+ \dot{\theta_3}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5)) + l_{c5}W_4\dot{\theta_4}m_5sin(\theta_5) \end{split}$$

$$c_{5,2} = \dot{\theta}_1(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) + \dot{\theta}_2(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5) + l_{c5}W_2m_5sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)) + \dot{\theta}_3(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4 + \theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5)) + l_{c5}W_4\dot{\theta}_4m_5sin(\theta_5)$$

$$\begin{split} c_{5,3} &= \dot{\theta_1}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5)) \\ &+ \dot{\theta_2}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5)) \\ + \dot{\theta_3}(l_{c5}W_3m_5sin(\theta_4+\theta_5) + l_{c5}W_4m_5sin(\theta_5)) + l_{c5}W_4\dot{\theta_4}m_5sin(\theta_5) \end{split}$$

$$c_{5,4} = l_{c5}W_4\dot{\theta}_1 m_5 sin(\theta_5) + l_{c5}W_4\dot{\theta}_2 m_5 sin(\theta_5) + l_{c5}W_4\dot{\theta}_3 m_5 sin(\theta_5) + l_{c5}W_4\dot{\theta}_4 m_5 sin(\theta_5)$$