Otimização do Serviço de Embarque Remoto de um Aeroporto

André Costa Batista

26 de setembro de 2025

Resumo

Este documento fornece uma formulação matemática para o problema de otimização do serviço de embarque remoto de um aeroporto, considerando as restrições de tempo e capacidade dos ônibus. O problema é modelado como um problema de roteamento de veículos com coleta e entrega acopladas, com múltiplas viagens, limites de distância e janelas de tempo. As equações matemáticas detalham a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições que regem o sistema.

Palavras-chave: otimização, pesquisa operacional, roteamento de veículos, coleta e entrega, múltiplas viagens.

1 Introdução

Seja um aeroporto em um dia de operação normal. Existe uma certa quantidade de embarques e desembarque que são feitas remotamente, i.e., ônibus idênticos são deslocados para levar passageiros do portão de embarque para o avião e vice-versa. O número de passageiros em um voo é geralmente maior que o número de assentos disponíveis no ônibus, o que implica que múltiplas viagens ou múltiplos ônibus são necessários para completar o transporte de todos os passageiros. Além disso, cada voo tem um horário específico para embarque e desembarque, o que impõe janelas de tempo para o transporte dos passageiros.

Cada voo, seja de embarque ou desembarque, pode ser desmembrado em um conjunto de requisições. Ou seja, se um voo tem 150 passageiros e o ônibus tem capacidade para 50, então são necessárias 3 requisições para completar o transporte. Cada requisição consiste em uma tarefa de coleta (no caso de embarque, no portão de embarque; no caso de desembarque, no avião) e uma tarefa de entrega (no caso de embarque, no avião; no caso de desembarque, no portão de desembarque). Essas tarefas são acopladas, ou seja, a entrega da requisição só pode ser feita após a coleta. Além disso, cada grupo de passageiros podem ter uma janela de tempo específica para coleta, de maneira que a ordem dos embarques ou desembarques são respeitados e o prazo para que o voo termine o embarque ou desembarque também seja viável.

Os ônibus são idênticos e partem de uma garagem localizada no aeroporto. Após completar uma ou mais requisições, o ônibus deve retornar à garagem para reabastecimento antes de atender novas requisições. Cada ônibus tem um limite de distância que ele pode percorrer antes de precisar retornar à garagem para reabastecimento.

Desta forma, podemos tratar o problema de alocar ônibus para o embarque ou desembarque remoto de um aeroporto como um problema de roteamento de veículos com coleta e entrega acopladas, com múltiplas viagens, com limite de distância e com janela de tempo onde cada nó é uma requisição com um grupo dos passageiros que vão embarcar ou desembarcar de um voo específico. A formulação do problema de roteamento com coleta e entrega e janelas de tempo é conhecido na literatura como *Pickup and Delivery Problem with Time Windows* (PDPTW). Quando os pares de coleta/entrega são acoplados, esta formulação é conhecida como *Dial-a-Ride Problem* (DARP).

2 Definições do Modelo

2.1 Conjuntos

- N: Conjunto de requisições, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- C: Conjunto dos pontos de coleta, $C = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- E: Conjunto dos pontos de entrega, $E = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$.
- V: Conjunto das viagens, $V = \{1, 2, \ldots, r\}$.
- K: Conjunto de ônibus disponíveis, $K = \{1, 2, \ldots, m\}$.
- N_0: Conjunto de todas as requisições mais a garagem, representado pelo nó 0. $N_0 = N \cup \{0\}$.

2.2 Parâmetros

Os seguintes parâmetros são necessários para o modelo.

- d_{ij}: Distância entre um ponto i e um ponto j, sejam eles de coleta ou de entrega. Por exemplo, a distância entre o ponto de coleta da requisição i e seu ponto de entrega é $d_{i,i+n}$. Já a distância do ponto de entrega da requisição i até o ponto de coleta da requisição j é $d_{i+n,j}$.
- D_{ij}: Distância entre uma requisição i e outra j. Considerando os pontos de coleta e entrega das requisições, a distância D_{ij} é definida como:

  $$D_{ij} = d_{i,i+n} + d_{i+n,j}$$

  onde $i, j \in N$. As exceções são as distâncias envolvendo a garagem. Nesses casos, $D_{0i} = d_{0i}$ e $D_{i0} = d_{i+n,0}$.
- c_{ij}: Custo de atender uma requisição i e depois a requisição j. Neste problema, o custo significará a distância total percorrida para atender ambas as requisições, logo $c_{ij} = D_{ij}$.
- s_i: Duração total de serviço de um ônibus em uma requisição i. Isso já inclui o tempo de acomodação e saída do ônibus. No caso da garagem (s_0), se refere ao tempo de abastecimento.
- t_{ij}: Tempo de viagem do ônibus entre os pontos i e j, sejam eles de coleta ou de entrega. Por exemplo, o tempo de viagem do ônibus entre o ponto de coleta da requisição i e seu ponto de entrega é $t_{i,i+n}$. Já o tempo de viagem do ônibus entre o ponto de entrega da requisição i até o ponto de coleta da requisição j é $t_{i+n,j}$.

- T_{ij}: Tempo total de viagem do ônibus entre as requisições i e j. Esse tempo é definido pelo trajeto entre o ponto de coleta e de entrega da requisição i e o trajeto da entrega de i para a coleta de j. Ou seja:

$$T_{ij} = t_{i,i+n} + t_{i+n,j}$$

- e_i: Tempo de início da janela de tempo da coleta da requisição i. Ou seja, o limite inferior para o instante em que um ônibus deve chegar no ponto de coleta da requisição i.
- l_i: Tempo de fim da janela de tempo da coleta da requisição i. Ou seja, o limite superior para o instante em que um ônibus deve chegar no ponto de coleta da requisição i.
- $T^{\max}$: Tempo máximo permitido para uma viagem.

2.3 Variáveis de Decisão

- $x_{ijvk} \in 0, 1$: Variável binária que assume valor 1 se o ônibus k viaja da requisição i para a requisição j na viagem v, e 0 caso contrário.
- $B_{ivk} \geq 0$: Variável contínua que representa o instante de início do serviço na coleta da requisição i pelo ônibus k na viagem v.
- $y_{vk} \in 0, 1$: Variável binária que assume valor 1 se o ônibus k realiza a viagem v, e 0 caso contrário.

3 Modelo Matemático

3.1 Função Objetivo

Minimizar o custo total que, neste caso, equivale à distância total percorrida por todos os ônibus.

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{k \in K} \sum_{v \in V} \sum_{i \in N_0} \sum_{\substack{j \in N_0 \\ i \neq j}} c_{ij} x_{ijvk} \tag{1}$$

3.2 Restrições

Atendimento das Requisições: Cada requisição deve ser realizada exatamente uma vez.

$$\sum_{k \in K} \sum_{v \in V} \sum_{\substack{i \in N_0, \\ i \neq j}} x_{ijvk} = 1, \quad \forall j \in N \tag{2}$$

Conservação de Fluxo O fluxo é conservado em cada nó de requisição.

$$\sum_{\substack{i \in N_0, \\ i \neq j}} x_{ijvk} - \sum_{\substack{i \in N_0, \\ i \neq j}} x_{jivk} = 0, \quad \forall j \in N, \forall v \in V, \forall k \in K \tag{3}$$

Início e Fim de Cada Viagem: Cada viagem utilizada ($y_{vk} = 1$) deve começar e terminar no depósito.

$$\sum_{j \in N} x_{0jvk} = y_{vk} \quad \forall k \in K, \forall v \in V \tag{4}$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0vk} = y_{vk} \quad \forall k \in K, \forall v \in V \tag{5}$$

Sequência de Viagens: Uma viagem v só pode ser utilizada se a viagem anterior $v-1$ também for utilizada.

$$y_{vk} \leq y_{v-1,k} \quad \forall k \in K, \forall v \in V, v > 1 \tag{6}$$

Janela de Tempo da Coleta: O início do serviço na coleta da requisição i deve respeitar sua janela de tempo seja qual a viagem v e o ônibus k que realize esse requisição.

$$e_i \sum_{j \in N_0} x_{jivk} \leq B_{ivk} \leq l_i \sum_{j \in N_0} x_{jivk}, \quad \forall i \in N, \forall v \in V, \forall k \in K \tag{7}$$

Sequência Temporal das Rotas (Intra-viagem): Garante a consistência dos tempos de chegada entre requisições consecutivas de uma viagem v (M é uma constante grande).

$$B_{ivk} + s_i + T_{ij} - M(1 - x_{ijvk}) \leq B_{jvk}, \quad \forall i \in N, j \in N_0, i \neq j, \forall v \in V, \forall k \in K \tag{8}$$

Para contemplar o caso da saída da garagem na primeira viagem ($v = 1$):

$$s_0 + T_{0i} - M(1 - x_{0i1k}) \leq B_{i1k}, \quad \forall i \in N, \forall k \in K \tag{9}$$

Sequência Temporal das Rotas (Inter-viagem): A partida da garagem para uma nova viagem v só pode ocorrer após o retorno do ônibus k da viagem anterior $v-1$.

$$B_{0,v-1,k} + s_0 + T_{0i} - M(1 - x_{0ivk}) \leq B_{ivk}, \quad \forall i \in N, \forall v \in V, v > 1, \forall k \in K \tag{10}$$

Limite de Tempo por Viagem: Garante que o tempo acumulado em uma viagem não exceda um limite máximo. No caso da primeira viagem, o tempo total é igual ao instante de chegada na garagem após completar todas as requisições da viagem. Ou seja:

$$B_{01k} \leq y_{1k} T^{\max}, \quad \forall k \in K \tag{11}$$

Para as viagens subsequentes, o tempo total de uma viagem é igual ao instante em que o ônibus k retorna à garagem após completar todas as requisições da viagem menos o instante que o ônibus chega à garagem na viagem anterior. Ou seja:

$$B_{0vk} - B_{0,v-1,k} \leq y_{vk} T^{\max}, \quad \forall k \in K, \forall v \in V, v > 1 \tag{12}$$

Domínio das Variáveis:

$$x_{ijvk} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N_0, \forall v \in V, k \in K \tag{13}$$

$$y_{vk} \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, k \in K \tag{14}$$

$$B_{ik} \geq 0, \quad \forall i \in N, k \in K \tag{15}$$

Referências

[1] Diego Cattaruzza, Nabil Absi, and Dominique Feillet. The multi-trip vehicle routing problem with time windows and release dates. *Transportation Science*, 50(2):676–693, 2016.

[2] Jean-François Cordeau and Gilbert Laporte. The dial-a-ride problem: models and algorithms. *Annals of operations research*, 153(1):29–46, 2007.

[3] Yves Molenbruch, Kris Braekers, and An Caris. Typology and literature review for dial-a-ride problems. *Annals of Operations Research*, 259(1):295–325, 2017.

[4] Sophie N Parragh, Karl F Doerner, and Richard F Hartl. A survey on pickup and delivery problems: Part ii: Transportation between pickup and delivery locations. *Journal für Betriebswirtschaft*, 58(2):81–117, 2008.

[5] Martin WP Savelsbergh and Marc Sol. The general pickup and delivery problem. *Transportation science*, 29(1):17–29, 1995.