$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{(3,3)}{\begin{pmatrix} \lambda x & 0 & -\lambda x \cdot \mu x \\ 0 & \lambda y & -\lambda y \cdot \mu y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(3,12)}{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{12} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{12} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}$$

Vom demonstra acum că media este 0 pe fiecare linie obținută. Vom considera prima linie (din output).

$$\lambda x \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 - \lambda x \cdot \mu x + \dots \lambda x \cdot x_{12} + 0 \cdot y_{12} - \lambda x \cdot \mu x$$

$$= \left.\begin{matrix} \lambda x \cdot x_1 - \lambda x \cdot \mu x + \\ \lambda x \cdot x_2 - \lambda x \cdot \mu x + \\ \vdots \\ \lambda x \cdot x_{12} - \lambda x \cdot \mu x \end{matrix}\right\} \overset{medie}{=} \frac{\lambda x(x_1 + x_2 + \dots + x_{12}) - 12 \cdot \lambda x \cdot \mu x}{12}$$

$$*_1 \boxed{\mu x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{12}}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 12 \cdot \mu x$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda x(12 \cdot \mu x) - 12 \cdot \lambda x \cdot \mu x}{12} = 0/12 = \boxed{0.}$$

- așadar se observă că obținem media 0 și putem generaliza ușor demonstrația de la $x_1, \dots x_{12}$ la $x_1, x_2, \dots x_n$ → în final avem:

$$\frac{\lambda x(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n \cdot \lambda x \cdot \mu x}{n}$$

$$= \frac{\lambda x \cdot n \cdot \mu x - n \cdot \lambda x \cdot \mu x}{12} = 0/12 = \boxed{0.}$$

similar vom obține și pentru y:

$$\frac{\lambda y(y_1 + \dots + y_n) - n \cdot \lambda y \cdot \mu y}{12} = 0/12 = 0.$$

Vom demonstra acum pentru varianță că este 1 pe fiecare linie: $\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 / N$

pentru prima linie avem: $\lambda x((x_1 + x_2 + \dots + x_n) - \mu x)$

Aplicăm $var(\lambda x \cdot (x_1 + \dots + x_n - \mu x))$

$$= \lambda_x^2 \cdot var(x) = \lambda_x^2 \cdot \frac{\sum (x_i - \mu_x)^2}{n}$$

$$= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2}{n} = 1.$$

Analog se procedează și pentru y, a doua linie din output.

$$\lambda_y^2 \cdot var(y) = \lambda_y^2 \cdot \frac{\sum (y_i - \mu_y)^2}{n} = 1.$$

În mod analog se procedează și pt. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ pentru a arăta că var este 1.

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \\ 1 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & 0 & 0 & -\lambda x \cdot \mu x \\ 0 & \lambda y & 0 & -\lambda y \cdot \mu y \\ 0 & 0 & \lambda z & -\lambda z \cdot \mu z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1, \dots & x_n \\ y_1, \dots & y_n \\ z_1, \dots & z_n \\ 1, \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru a arăta că media este 0 pe fiecare linie din rezultat (output) se procedează analog ca la dem pentru $\hat{x}$, $\hat{y}$. De exemplu, pentru prima linie vom avea

$$\lambda x \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot z_1 - \lambda x \cdot \mu x + \dots \quad \lambda x \cdot x_n + 0 \cdot y_n + 0 \cdot z_n - \lambda x \cdot \mu x$$

medie

$$= \frac{\lambda x (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - \lambda x \cdot \mu x}{n} = 0 \, (12)$$

Dacă înlocuim pe rând x cu y și apoi cu z (se procedează analog cu dem de mai sus) obținem și pentru aceste linii media 0.

Pentru var că este 1 se procedează analog ca pentru $\hat{x}$ și $\hat{y}$ dem. anterior.