第五节 函数的微分

一、微分的概念

二、微分运算法则

三、微分在近似计算中的应用

四、微分在估计误差中的应用

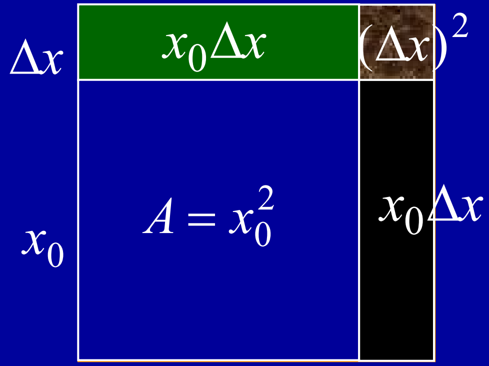
一、微分的概念

引例: 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$, 问此薄片面积改变了多少?

设薄片边长为 x, 面积为 A, 则 $A=x^2$, 当 x 在 x_0 取得增量 Δx 时, 面积的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x^2$$

$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\Delta x\text{的线性主部}}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x\to 0\text{时为高阶无穷小}}$$



故 $\Delta A\approx \underline{2x_0\Delta x}$

$\boxed{\text{称为函数在 } x_0 \text{ 的微分}}$

定义: 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于Δx 的常数)

则称函数 $y = f(x)$ 在点x_0 **可微**, 而 $A\Delta x$ 称为$f(x)$在点x_0 的**微分**, 记作$\mathrm{d}y$ 或$\mathrm{d}f$, 即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

定理: 函数 $y = f(x)$ 在点x_0 可微的**充要条件**是 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $A = f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

定理 : 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

证: “必要性”

已知 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微 , 则

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A$$

故 $y = f(x)$ 在点 x_0 的可导, 且 $f'(x_0) = A$

定理 : 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的**充要条件**是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A=f'(x_0)$, 即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

"充分性" 已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 的可导, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\quad(\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0)$$

故 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x=\underbrace{f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)}_{\text{线性主部}}$ $\quad(f'(x_0)\neq 0$ 时)

即 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

说明: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}$$

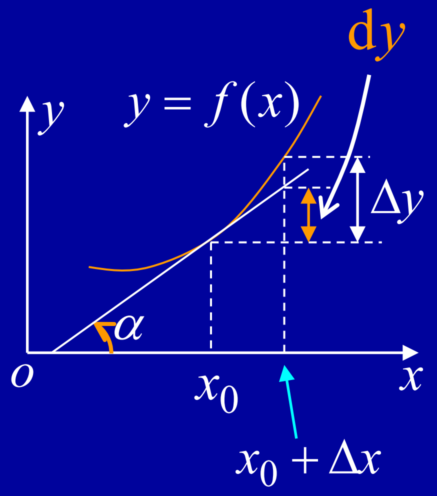
$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

所以 $\Delta x \to 0$ 时 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小, 故当 $|\Delta x|$ 很小时, 有近似公式

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y$$

微分的几何意义 —— 切线纵坐标的增量

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha \cdot \Delta x$$



当 Δx 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$

当 $y = x$ 时,

$$\Delta y = \Delta x \overset{\text{记}}{=} \mathrm{d}x$$

称 Δx 为**自变量的微分**, 记作 $\mathrm{d}x$

则有 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$

从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$

导数也叫作微商

例如， $y = x^3$,

$$\mathrm{d}y \Big|_{\substack{x=2 \\ \mathrm{d}x=0.02}} = 3x^2 \cdot \mathrm{d}x \Big|_{\substack{x=2 \\ \mathrm{d}x=0.02}} = 0.24$$

又如， $y = \arctan x$,

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{基本初等函数的微分公式 (?)}}$

二、 微分运算法则

设 $u(x)$, $v(x)$ 均可微，则

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$

2. $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$ （C 为常数）

3. $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$

4. $\mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$ $(v \neq 0)$

5. 复合函数的微分

$y = f(u), u = \varphi(x)$ 分别可微，

则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = f'(u)\boxed{\varphi'(x)\,\mathrm{d}x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}u}$$

$$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u$$

微分形式不变

例1. $y=\ln(1+e^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解: $$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+e^{x^2}}\,\mathrm{d}(1+e^{x^2})$$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\mathrm{d}x$$

例2. 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，求 $\mathrm{d}y$.

解: 利用一阶微分形式不变性，有

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin(x-y)\,(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

例3. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

$$(1)\quad \mathrm{d}(\ \tfrac{1}{2}x^2+C\ )=x\mathrm{d}x$$

$$(2)\quad \mathrm{d}(\ \tfrac{1}{\omega}\sin\omega t\ +C)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

说明: 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

注意: 数学中的反问题往往出现多值性.

三、 微分在近似计算中的应用

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时, 得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

令 $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

使用原则: 1) $f(x_0),\ f'(x_0)$ 好算;

2) x 与 x_0 靠近.

特别当 $x_0 = 0$，$|x|$ 很小时，

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

常用近似公式： ($|x|$ 很小)

(1) $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$

证明： 令 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$

得 $f(0) = 1,\ \ f'(0) = \alpha$

$\therefore$ 当 $|x|$ 很小时，$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$

(2) $\sin x \approx x$ (3) $e^x \approx 1 + x$

(4) $\tan x \approx x$ (5) $\ln(1+x) \approx x$

例4. 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值 .

解: 设 $f(x)=\sin x$,

取 $x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, $x=29^\circ=\frac{29}{180}\pi$

则 $\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{180}$

$$\sin 29^\circ=\sin\frac{29}{180}\pi \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)$$

$$\approx 0.485$$

$$\boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\cdots}$$

例5. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值 .

$3^5 = 243$

解: $\sqrt[5]{245} = (243+2)^{\frac{1}{5}}$

$= 3\,(1+\frac{2}{243})^{\frac{1}{5}}$

$\boxed{(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x}$

$\approx 3\,(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243})$

$= 3.0048$

例6. 有一批半径为1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克．(铜的密度：$8.9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$)

解： 已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为 V 在 $R=1, \Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV，

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V \Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} = 4\pi R^2 \Delta R \Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}$$

$$\approx 0.13\,(\mathrm{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9\times 0.13 = 1.16\ (\mathrm{g})$$

四、 微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 A，其近似值为 a，

$|A-a|$ 称为a 的**绝对误差**

$\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为a 的**相对误差**

若 $|A-a| \le \delta_A$

δ_A 称为测量 A 的**绝对误差限**

$\dfrac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 A 的**相对误差限**

误差传递公式：

若直接测量某量得 x，已知测量误差限为 δ_x，按公式 $y = f(x)$ 计算 y 值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\le |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$

相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} \approx \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \delta_x$

例7. 设测得圆钢截面的直径 $D=60.0\text{ mm}$, 测量D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05\text{ mm}$, 欲利用公式 $A=\dfrac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢截面积, 试估计面积的误差 .

解: 计算 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A=\left|A'\right|\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times 60.0\times 0.05$$

$$\approx 4.715\quad(\text{mm})$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{\left|A\right|}=\frac{\frac{\pi}{2}D\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.0}=0.17\ \%$$

内容小结

1. 微分概念

• 微分的定义及几何意义

• 可导 $\longleftrightarrow$ 可微

2. 微分运算法则

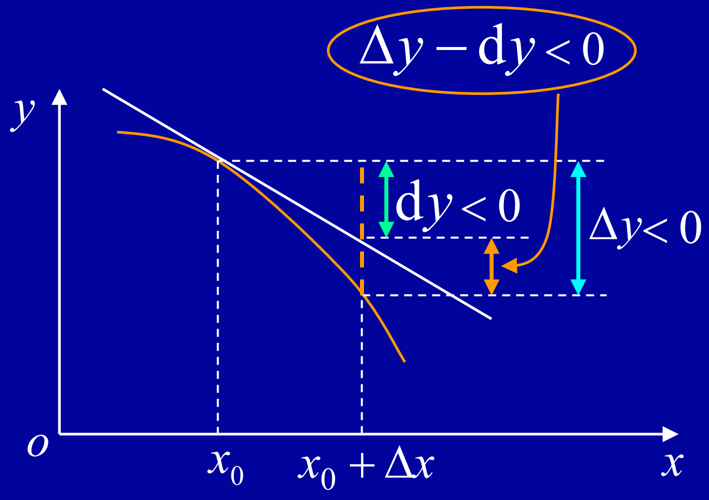
微分形式不变性：$\mathrm{d} f(u) = f'(u)\,\mathrm{d} u$

（u 是自变量或中间变量）

3. 微分的应用 $\begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$

思考与练习

1. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如下, 试在图中标出的点 x_0 处的 $\mathrm{d}y$, Δy 及 $\Delta y - \mathrm{d}y$, 并说明其正负 .



2. $\mathrm{d}(\arctan e^{-x}) = \underline{\dfrac{1}{1+e^{-2x}}}\,\mathrm{d}e^{-x}$

$$= \underline{\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}}\,\mathrm{d}x$$

3. $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x} = \underline{\sec^3 x}$

4. $\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x + C\right) = \sin 2x\,\mathrm{d}x$

5. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$ 确定,

求$\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}$.

解: 方程两边求微分, 得

$$3x^2\,\mathrm{d}\,x + 3y^2\,\mathrm{d}\,y - 3\cos 3x\,\mathrm{d}\,x + 6\,\mathrm{d}\,y = 0$$

当$x = 0$时$y = 0$, 由上式得$\mathrm{d}\,y\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\,x$

6. 设 $a > 0$, 且 $|b| << a^n$, 则

$$\sqrt[n]{a^n + b} \approx \underline{\quad a + \frac{b}{n\,a^{n-1}} \quad}$$

作业

P115　1,3,5,7,10,22,24

综合题：1，4，7，13

备用题

1. 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$, 求 $\mathrm{d}\,y$.

解: 因为

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

所以

$$\mathrm{d}\,y=y'\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\sin\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$$

2. 已知 $xy = e^{x+y}$，求 $\mathrm{d}\,y$.

解: 方程两边求微分，得

$$x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x = e^{x+y}(\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y)$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}\,y = \frac{y - e^{x+y}}{x + e^{x+y}}\,\mathrm{d}\,x$$