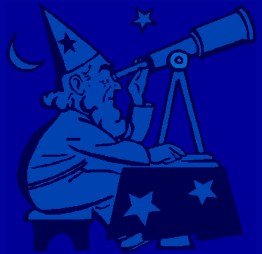
第四节 有理函数的积分

第四章

- 基本积分法：直接积分法；换元积分法；分部积分法
- 初等函数 $\underset{\cancel{\text{积分}}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}$ 初等函数



本节内容:

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分举例

一、 有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\le n$ 时, $R(x)$ 为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$ 为真分式

有理函数 $\underset{\text{相除}}{=\!=\!=}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$

$\downarrow$ 分解

$\boxed{\text{若干部分分式之和}}$

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in \mathrm{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

定理： 设 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 是一个有理真分式，且其分母 $Q_m(x)$ 有分解式：

$$Q_m(x)=q_0(x-a)^i\cdots(x-b)^j(x^2+px+q)^k\cdots(x^2+sx+t)^l$$

其中 $q_0,a,\cdots,b;p,q,\cdots,s,t$ 为实数，且 $p^2-4q<0,\cdots,s^2-4t<0,$ $i,\cdots,j;k,\cdots,l$ 为自然数，则 $R(x)$ 可表示为

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_i}{(x-a)^i}+\cdots$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_j}{(x-b)^j}$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{C_kx+D_k}{(x^2+px+q)^k}+\cdots$$

$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+sx+t}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+sx+t)^2}+\cdots+\frac{E_lx+F_l}{(x^2+sx+t)^l}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots A_i; \cdots; B_1, B_2, \cdots, B_j;\quad C_1, D_1, C_2, D_2, \cdots, C_k, D_k; \cdots;$

$E_1, F_1, E_2, F_2, \cdots, E_l, F_l$ 都是唯一确定的实数.

因此，有理真分式可以分解成下列两类**部分分式**之和：

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in \mathrm{N}^+, p^2-4q<0)$$

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1)\ \frac{1}{x(x-1)^2};\quad (2)\ \frac{x+3}{x^2-5x+6};\quad (3)\ \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

(2) 用赋值法

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore \quad A=(x-2)\cdot\text{原式}\Big|_{x=2}=\frac{x+3}{x-3}\Big|_{x=2}=-5$$

$$B=(x-3)\cdot\text{原式}\Big|_{x=3}=\frac{x+3}{x-2}\Big|_{x=3}=6$$

故 $\quad\text{原式}=\dfrac{-5}{x-2}+\dfrac{6}{x-3}$

(3) 混合法

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A = (1+2x)\cdot 原式\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

分别令 $x=0,1$ 代入等式两端

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{4}{5} + C \\ \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{15} + \dfrac{B+C}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{2}{5} \\ C = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$原式 = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

四种典型部分分式的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$

$(p^2 - 4q < 0\,,\, n \neq 1)$

变分子为

$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}d(x^2+px+q) + (N-\frac{Mp}{2}\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}dx$$

$$= \begin{cases} \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q), & n=1 \\ \frac{M}{2(1-n)}(x^2+px+q)^{1-n}, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

作变量替换

$$u = x + \frac{p}{2}, \quad 并记 \quad a^2 = \frac{4q-p^2}{4}$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{(u^2+a^2)^n}du$$

记 $$I_n=\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}dx$$

由P204例23，

$$I_n=\frac{u}{2(n-1)a^2(u^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}$$

归结为 $$I_1=\int\frac{1}{u^2+a^2}du=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

综上所述，**一切有理函数的原函数可以用有理函数、对数函数及反正切函数表示出来.**

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解： 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

例3. 求 $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $\displaystyle = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

思考: 如何求 $\displaystyle\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$?

提示: 变形方法同例3, 并利用 P204 例23

说明： 将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例4. **求** $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x\,.$

解：

$$I=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= \int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C$$

例6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解: 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C \quad (x\neq 0)$$

注意本题技巧

按常规方法较繁

二、可化为有理函数的积分举例

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

$\downarrow$ 令 $t=\tan\frac{x}{2}$　　万能代换

t 的有理函数的积分

例7. **求** $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例8. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$.

解: $\text{原式} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时，用代换 $t = \tan x$ 往往更方便 .

例9. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$.

解法 1

$$原式 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x + b)^2 \cos^2 x}$$

$$\Big\downarrow \text{令 } t = \tan x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(a\,t + b)^2} = -\frac{1}{a(a\,t + b)} + C$$

$$= -\frac{\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)} + C$$

例9. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$

解法 2 令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$

$$原式 = \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi) + C$$

$$\varphi = \arctan\frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan(x - \arctan\frac{a}{b}) + C$$

例10. 求 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t=\sin x$,

$$\text{原式}=\int \frac{(\cos^2 x-2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}=-\int \frac{(\sin^2 x+1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}$$

$$=-\int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}=-\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t=-\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x}+C$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令\ t = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令\ t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, p 为 m, n 的最小公倍数.

例11. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2$, $\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$原式 =\int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \quad =3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$=3[\ \tfrac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\ ]+C$$

$$=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}$$

$$+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例12. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数 2 , 3 的最小公倍数 6， 令 $x=t^6$， 则有

$$原式 = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln|1+t|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

例13. 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$,则 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式 $\displaystyle=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

内容小结

1. 可积函数的特殊类型

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{有理函数} \arrow[d, "\text{分解}"] & \text{三角函数有理式} \arrow[l, "\text{万能代换}"'] \\
\text{多项式及部分分式之和} & \text{简单无理函数} \arrow[u, "\text{三角代换}"'] \arrow[ul, "\text{根式代换}"']
\end{tikzcd}$$

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便，要注意综合使用基本积分法，简便计算 .

思考与练习

如何求下列积分更简便？

$$1.\ \int \frac{x^2}{a^6 - x^6}\mathrm{d}x \quad (a>0) \qquad\qquad 2.\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$$

解: 1. 原式 $= \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2} = \frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{x^3+a^3}{x^3-a^3}\right| + C$

2. 原式 $= \displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x} + \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x} = \ln|\tan x| - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 x} + C$$

作业

备用题 1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

分母次数较高,
宜使用倒代换.

解: 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 故

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int (t^4-t^2+1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C$$

2.求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x.$

解： 原式 $\displaystyle = \int \frac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$

前式令 $u=\tan\frac{x}{2}$ ；后式配元

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \int \frac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}(3+\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{u^2+2}\,\mathrm{d}u - \ln\left|3+\cos x\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} - \ln\left|3+\cos x\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left|3+\cos x\right| + C$$