第二节 定积分在几何学上的应用

一、 平面图形的面积

二、 平面曲线的弧长

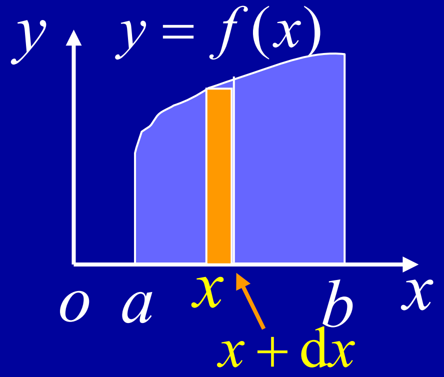
三、 已知平行截面面积函数的立体体积

四、 旋转体的侧面积

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

设曲线 $y = f(x)\ (\geq 0)$ 与直线 $x = a, x = b\ (a < b)$ 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A，则

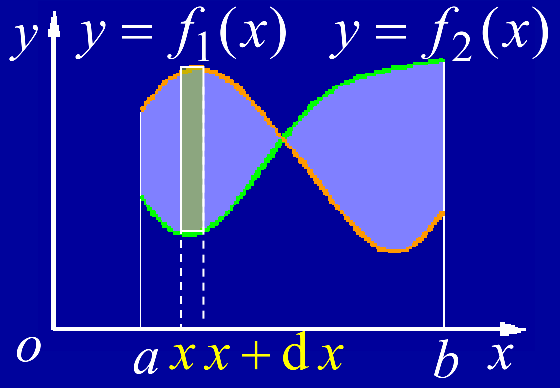


$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

右下图所示图形面积为

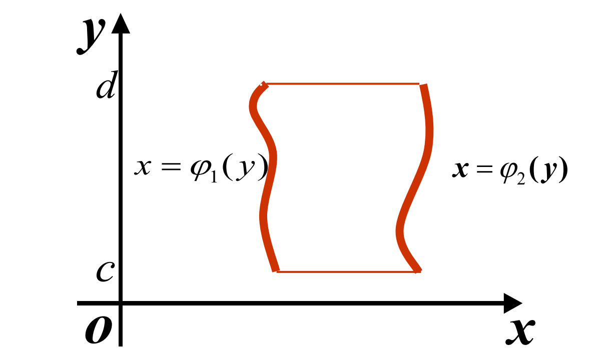
$$A = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$



同理，由曲线 $x = \phi_1(y)$ 、 $x = \phi_2(y)$ $(\phi_2(y) \geq \phi_1(y))$

与直线 $y = c$ 、 $y = d(c < d)$ 所围成的平面图形的面积为

$$A = \int_c^d [\phi_2(y) - \phi_1(y)]dy$$



例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围所围图形的面积 .

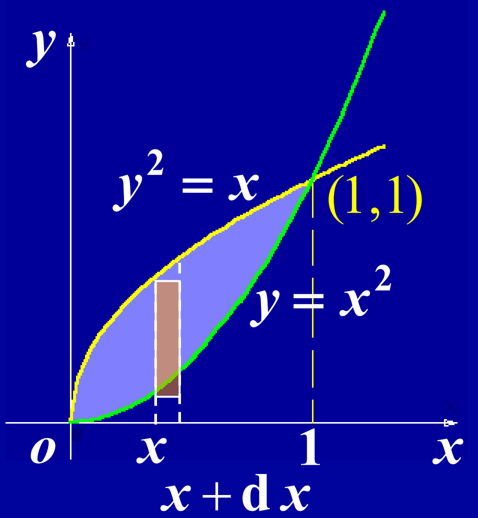
解: 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

得交点 $(0, 0)$, $(1, 1)$

$$\therefore \quad A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

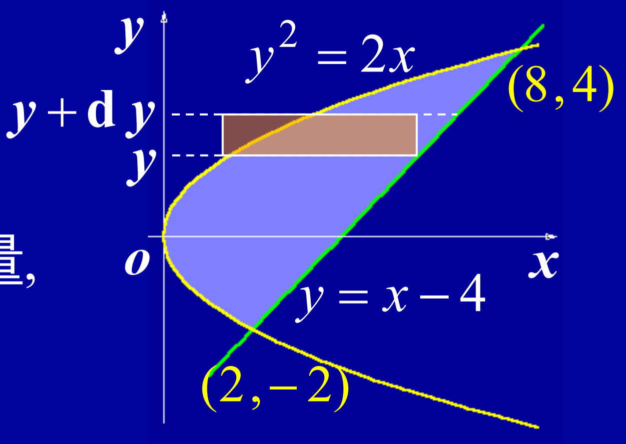
$$= \frac{1}{3}$$



例2. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点

$(2,-2),(8,4)$

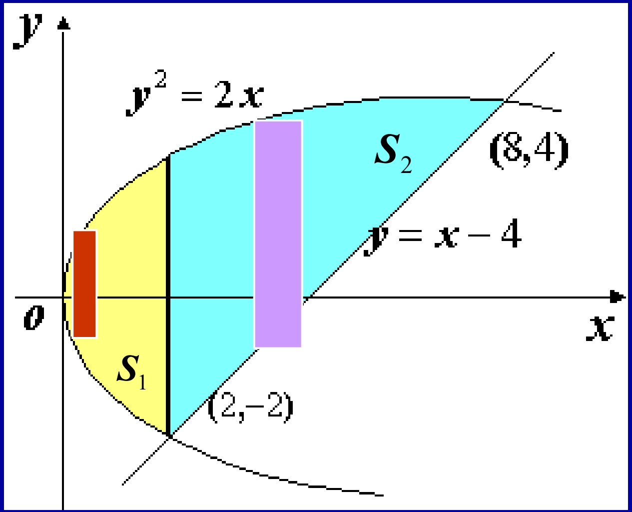


为简便计算, 选取 y 作积分变量, 则有

$$\therefore \quad A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\tfrac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y^2+4y-\tfrac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18$$

另解： **选x为积分变量**



$$A = S_1 + S_2$$

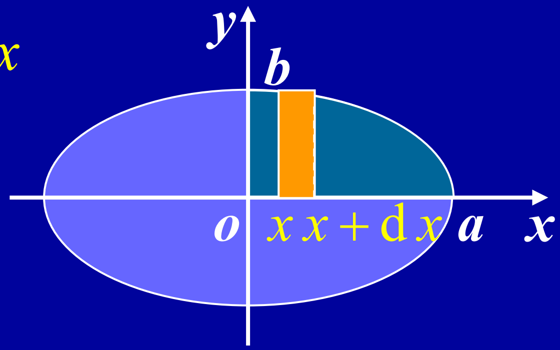
$$= \int_0^2 [\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})]dx + \int_2^8 [\sqrt{2x} - (x-4)]dx$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^8 [\sqrt{2x} - x + 4]dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_2^8 = 18$$

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

解: 利用对称性 , 有 $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$



$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

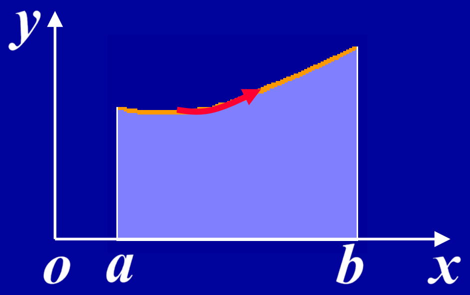
$$= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 $a=b$ 时得圆面积公式

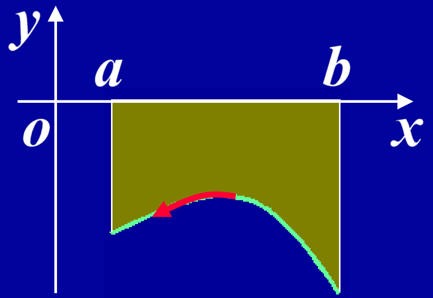
一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，按顺时针方向规定起点和终点的参数值 t_1 , t_2



$(t_1$ 对应 $x = a)$



$(t_1$ 对应 $x = b)$

则曲边梯形面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$

例4. 求由摆线 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (a > 0)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积 .

解: $A = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$

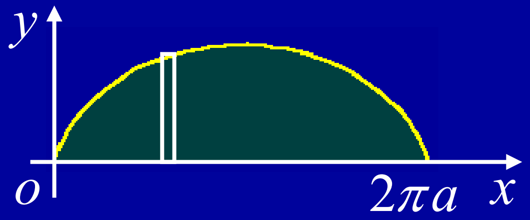
$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 u\,\mathrm{d}u \qquad (\text{令 } u = \frac{t}{2})$$

$$= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\,\mathrm{d}u$$

$$= 16a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$



2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta) \in C[\alpha, \beta], \varphi(\theta) \geq 0$，求由曲线 $r = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

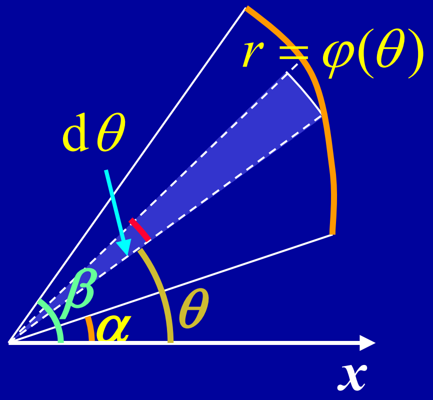
在区间 $[\alpha, \beta]$ 上任取小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

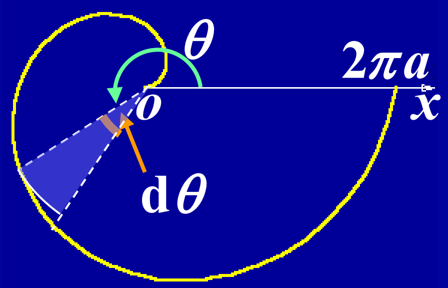
$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 \,\mathrm{d}\theta$$

所求曲边扇形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(\theta) \,\mathrm{d}\theta$$



例5. 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \ (a > 0)$ 对应 θ 从 0 变到 2π 所围图形面积 .



解: $A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(a\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta$

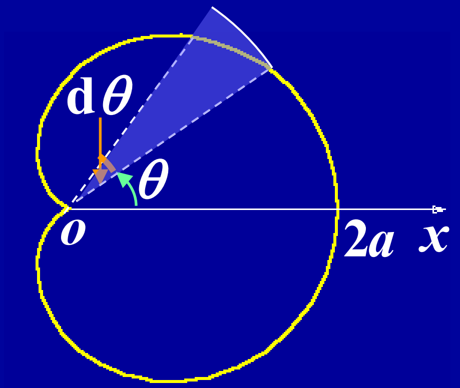
$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

例6. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ \ (a>0)$ 所围图形的面积 .

解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta$

(利用对称性)



$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4 \frac{\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, \mathrm{d}t$

$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$

例7. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $r = a$ 所围图形的面积 .

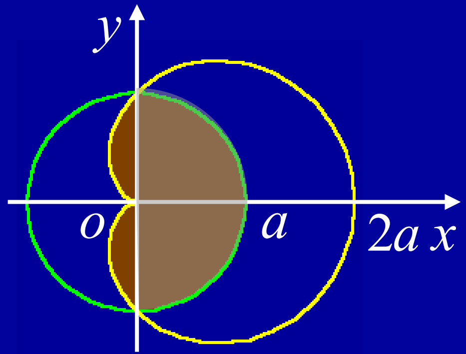
解: 利用对称性，所求面积

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2\left(\frac{3}{4}\pi - 2\right)$$

$$= \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$



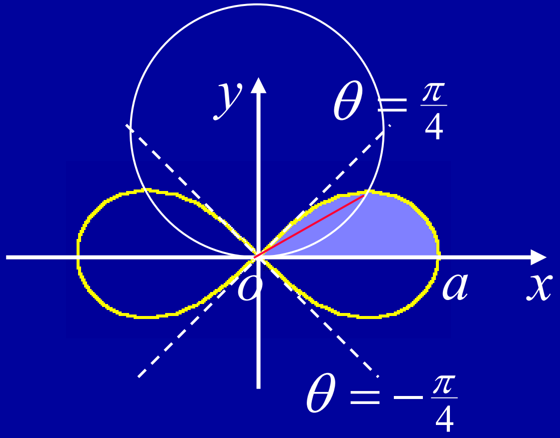
例8. 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 利用对称性 , 则所求面积为

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \,\mathrm{d}(2\theta)$$

$$= a^2 [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$



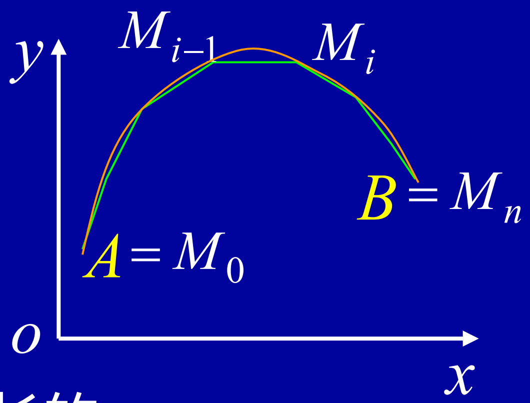
思考: 用定积分表示该双纽线与圆 $r = a\sqrt{2}\sin\theta$ 所围公共部分的面积 .

答案: $A = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta\right]$

二、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda\to 0$ 时，折线的长度趋向于一个确定的极限，则称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left|M_{i-1}M_i\right|$$



并称此曲线弧为可求长的.

定理: 任意光滑曲线弧都是可求长的.

(证明略)

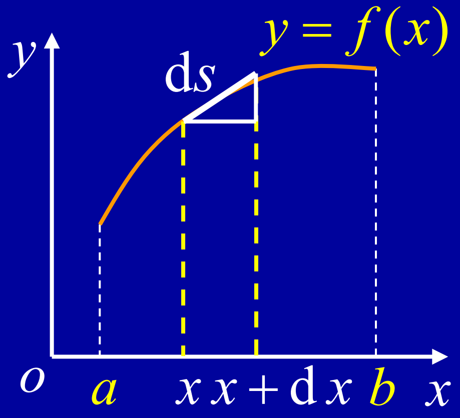
(1) 曲线弧由直角坐标方程给出:

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$$



因此所求弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x$$

(2) 曲线弧由参数方程给出:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

因此所求弧长

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

(3) 曲线弧由极坐标方程给出:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

令 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$，则得

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(自己验证)}$$

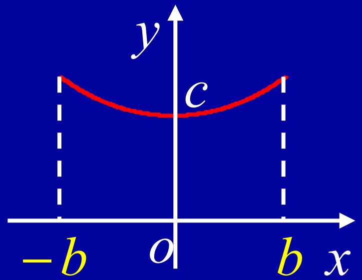
因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例9. 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量,下垂成悬链线 . 悬链线方程为

$$y = c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c} \quad (-b \le x \le b)$$

求这一段弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad s = 2\int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = 2c\left[\mathrm{sh}\frac{x}{c}\right]_0^b$$

$$= 2c\,\mathrm{sh}\frac{b}{c}$$

$$\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$$

$$(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$$

例10. 求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}\,t$ 的弧长.

解: $\because\ \cos x\ge 0,\ \therefore\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

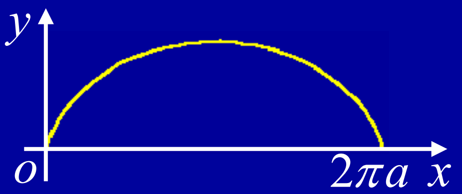
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\left[2\sin\tfrac{x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4$$

例11. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 一拱$(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t$

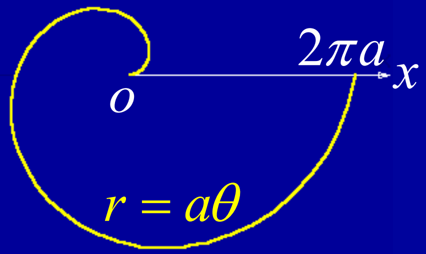
$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\;\mathrm{d}t$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

例12. 求阿基米德螺线$r = a\theta \ (a>0)$相应于 $0\le\theta\le 2\pi$ 一段的弧长 .



解: $ds = \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$$= \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\ \mathrm{d}\theta$$

$$= a\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad s = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right|\right]_0^{2\pi}$$

$$= a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$$

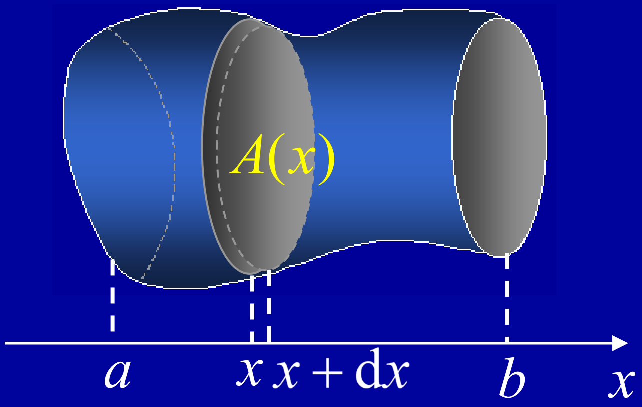
三、已知平行截面面积函数的立体体积

设所给立体垂直于x 轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续, 则对应于小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$ 的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

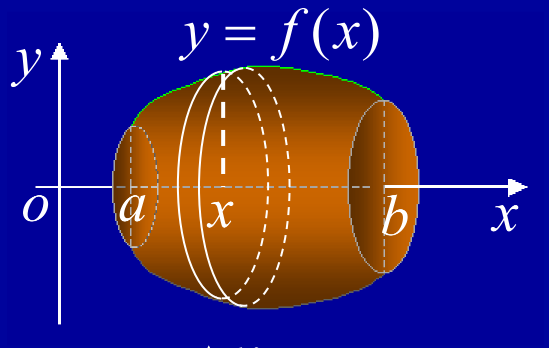
$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



特别，当考虑连续曲线段 $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ 绕 x 轴

轴旋转一周围成的立体体积时，有

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$



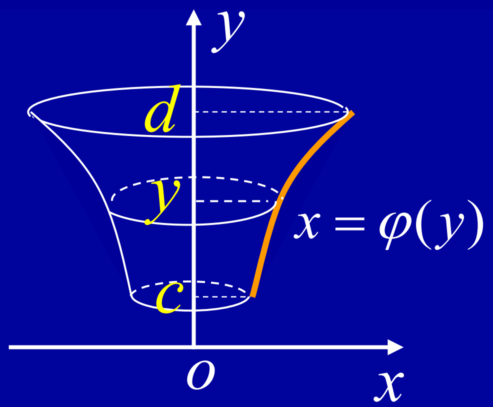
当考虑连续曲线段

$$x = \varphi(y) \quad (c \le y \le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时，

有

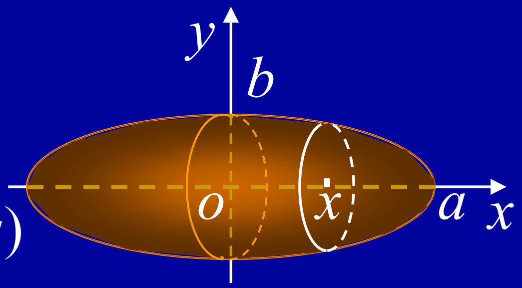
$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 \mathrm{d}y$$



例13. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.

解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a)$$



则 $$V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x$$

(利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

方法2 利用椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则 $V = 2\int_0^a \pi\, y^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2 \sin^3 t\,\mathrm{d}t$

$$= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

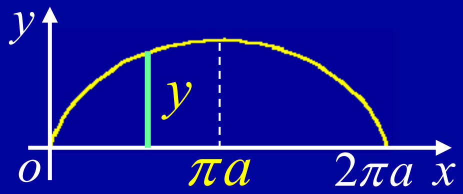
$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当$b = a$时，就得半径为a的球体的体积$\frac{4}{3}\pi a^3$.

例14. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的一拱与 $y = 0$

所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积 .

解: 绕 x 轴旋转而成的体积为



$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) \, \mathrm{d}t$$

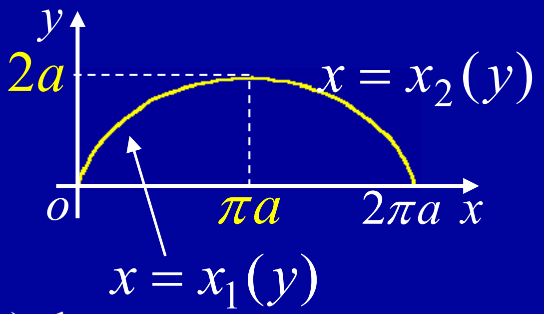
利用对称性

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 \, \mathrm{d}t = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t \quad (令 u = \frac{t}{2})$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u \, \mathrm{d}u = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$



绕 y 轴旋转而成的体积为

$$V_y = \int_0^{2a} \pi\, x_2^2(y)\,\mathrm{d}\,y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}\,t$$

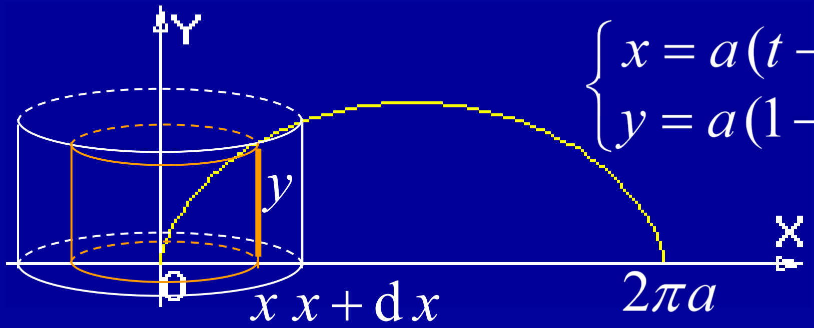
注意上下限！

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}\,t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t\,\mathrm{d}\,t$$

$$= 6\pi^3 a^3$$ **注**

说明: V_y也可按柱壳法求出



柱面面积 $2\pi x \cdot y$ 柱壳体积 $2\pi xy \cdot \mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \mathrm{d}\,t$$

$$V_y = \cdots$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$= 8\pi\, a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin^4 \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t$$

$$\Big\downarrow \quad \text{令 } u = \frac{t}{2}$$

$$= 16\pi\, a^3 \int_0^{\pi} (2u - \sin 2u) \sin^4 u \,\mathrm{d}u$$

$$\Big\downarrow \quad \text{令 } v = u - \frac{\pi}{2}$$

$$= 16\pi\, a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\underline{2v} + \underline{\pi} + \underline{\sin 2v})\, \underline{\cos^4 v}\, \mathrm{d}v = 6\pi^3 a^3$$

偶函数

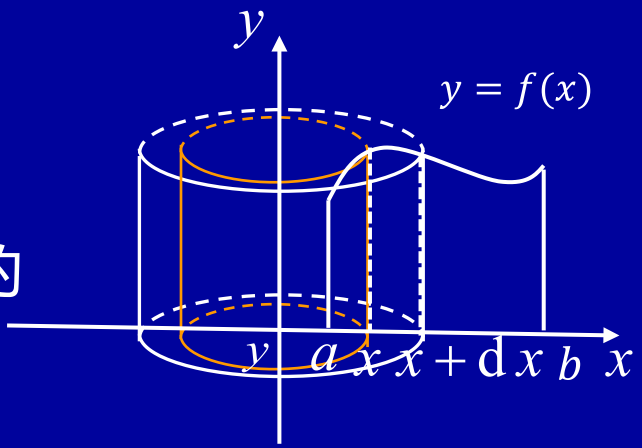
奇函数

柱壳法

平面图形 D：

$$0 \le y \le f(x), a \le x \le b$$

绕 y 轴旋转所形成的旋转体的体积 V_y



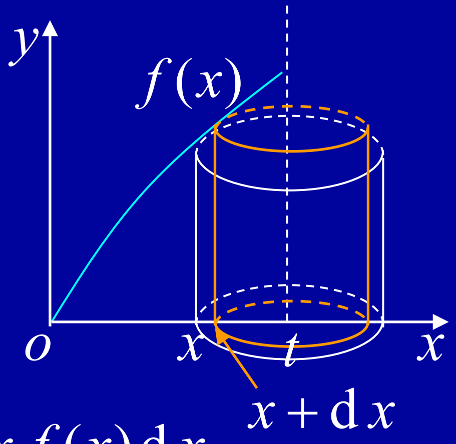
$$\Delta V_y \approx \pi(x+\Delta x)^2 f(x) - \pi x^2 f(x) \approx 2\pi x f(x)\Delta x$$

$$dV_y = 2\pi x f(x) dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

例15. 设 $y=f(x)$ 在 $x\geq 0$ 时为连续的非负函数，且 $f(0)=0$, $V(t)$ 表示 $y=f(x)$, $x=t\ (>0)$ 及 x 轴所围图形绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积，证明:

$$V''(t)=2\pi f(t).$$



证: 利用柱壳法

$$\mathrm{d}V=2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

则 $$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V'(t)=2\pi\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\cancel{2\pi t f(t)}-\cancel{2\pi t f(t)}$$

故 $$V''(t)=2\pi f(t)$$

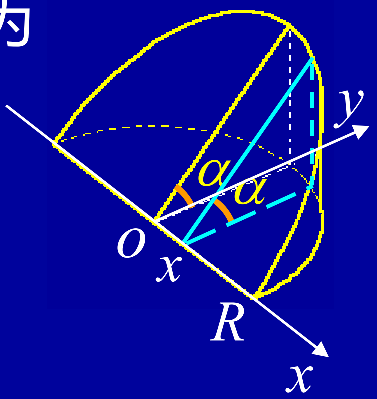
例16. 一平面经过半径为R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成 α 角，计算该平面截圆柱体所得立体的体积 .

解: 如图所示取坐标系，则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

垂直于x 轴 的截面是直角三角形，其面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \quad (-R \le x \le R)$$



利用对称性

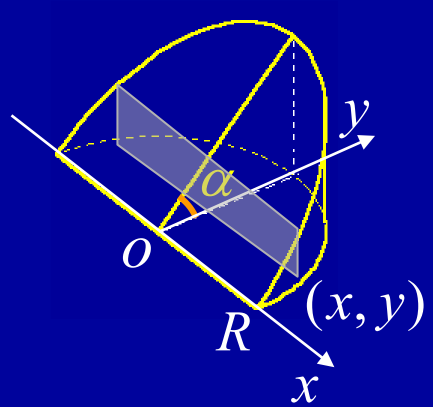
$$V = 2\int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \,\mathrm{d}x$$

$$= 2\tan\alpha\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

思考: 可否选择 y 作积分变量？

此时截面面积函数是什么？

如何用定积分表示体积？



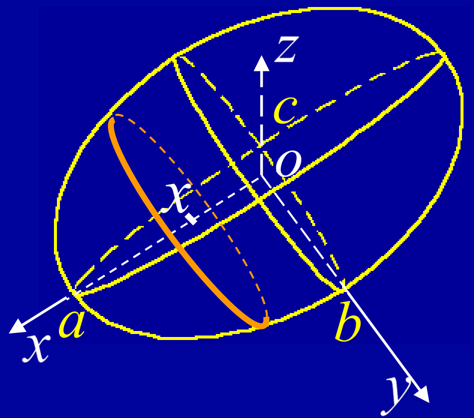
提示:

$$A(y) = 2x \cdot y\tan\alpha$$

$$= 2\tan\alpha \cdot y\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$V = 2\tan\alpha \cdot \int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$$

例17. 计算由曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围立体(椭球体)的体积.



解: 垂直 x 轴的截面是椭圆

$$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{z^2}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1$$

它的面积为 $A(x)=\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\ (-a\le x\le a)$

因此椭球体体积为

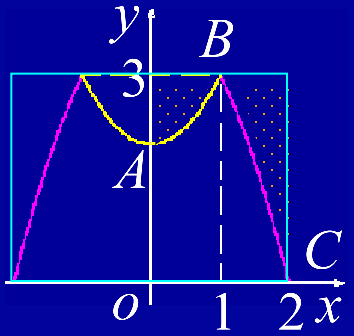
$$V=2\int_0^a \pi\, bc(1-\frac{x^2}{a^2})\mathrm{d}\,x=2\pi bc\left[\,x-\frac{x^3}{3a^2}\,\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi abc$$

特别当 $a=b=c$ 时就是球体体积 .

例18. 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转得的旋转体体积. (94 考研)

解: 利用对称性，在第一象限

$$y = \begin{cases} x^2 + 2, & 0 \le x \le 1 \\ 4 - x^2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$



故旋转体体积为

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 - 2\int_0^1 \pi[3 - (x^2 + 2)]^2 \,\mathrm{d}x$$

$$- 2\int_1^2 \pi[3 - (4 - x^2)]^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= 36\pi - 2\pi\int_0^2 (x^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{448}{15}\pi$$

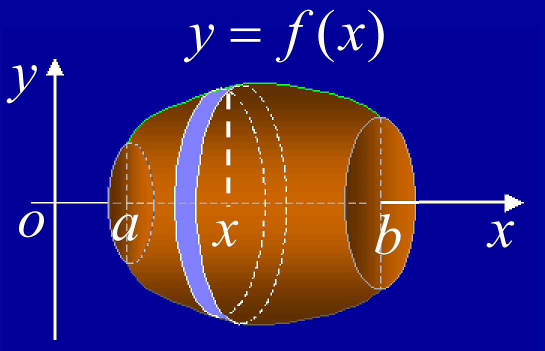
四、旋转体的侧面积

设平面光滑曲线 $y = f(x) \in C^1[a,b]$, 且 $f(x) \geq 0$, 求它绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的侧面积 .

取侧面积元素: 位于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的圆台的侧面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \,\mathrm{d}s$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

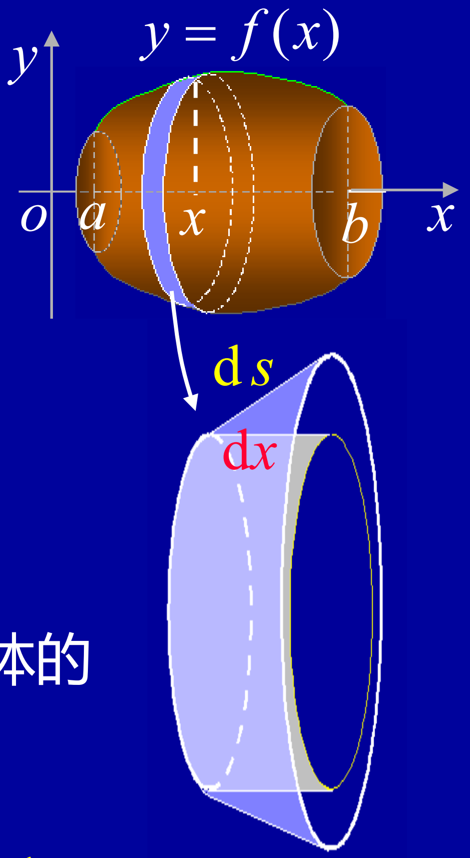


积分后得旋转体的侧面积

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

注意： 侧面积元素

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s \neq 2\pi y\,\mathrm{d}x$$



因为$2\pi y\,\mathrm{d}x$ 不是薄片侧面积ΔS 的的线性主部 .

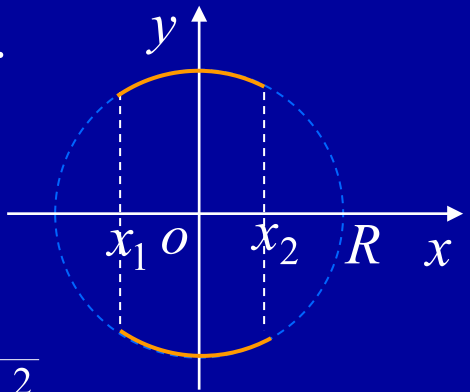
若光滑曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

给出, 则它绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例19. 计算圆 $x^2+y^2=R^2$ 在 $x\in[x_1,x_2]\subset[-R,R]$ 上绕 x 轴旋转一周所得的球台的侧面积 S.



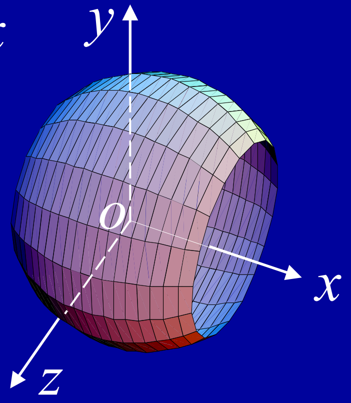
解: 对曲线弧

$$y=\sqrt{R^2-x^2},\quad x\in[x_1,x_2]$$

应用公式得

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_{x_1}^{x_2}R\,\mathrm{d}x=2\pi R(x_2-x_1)$$



当球台高 $h=2R$ 时, 得球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

例20. 求由星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的表面积 S.

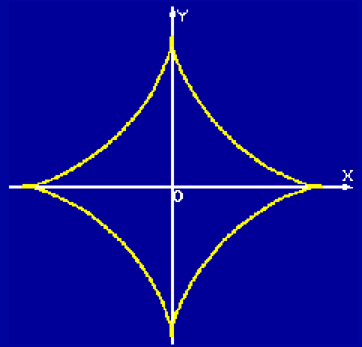
解: 利用对称性

$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 12\pi a^2\left[\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^2$$



内容小结

上下限按顺时针方向确定

1. 平面图形的面积

边界方程 $\begin{cases} 直角坐标方程 \\ 参数方程 \quad A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ 极坐标方程 \quad A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

2. 平面曲线的弧长

弧微分: $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

注意: 求弧长时积分上下限必须上大下小

曲线方程 $\begin{cases} 直角坐标方程 \\ 参数方程方程 \\ 极坐标方程 \quad \mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

3. 已知平行截面面面积函数的立体体积

$$V=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ 旋转体的体积

$$y=y(x)\begin{cases} 绕\ x\ 轴:\ A(x)=\pi y^2 \\ 绕\ y\ 轴:\ A(x)=2\pi x y \quad (柱壳法) \end{cases}$$

4. 旋转体的侧面积

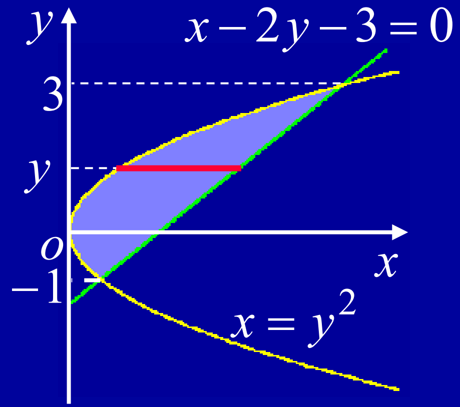
$y=y(x)$ 绕 x 轴旋转，侧面积元素为 $\mathrm{d}S=2\pi y\,\mathrm{d}s$

(注意在不同坐标系下 ds 的表达式)

思考与练习

1.用定积分表示图中阴影部分的面积 A 及边界长 s .

提示: 交点为$(1,-1),(9,3)$，以 x 为积分变量，则要分两段积分，故以 y 为积分变量.



$$A=\int_{-1}^{3}\left[\,(2y+3)-y^2\,\right]\mathrm{d}y=\frac{32}{3}$$

弧线段部分　　　　直线段部分

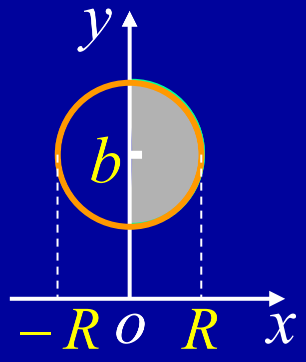
$$s=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+4y^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{3}\sqrt{1+2^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=3\sqrt{37}+5\sqrt{5}+\frac{1}{4}\left[\ln(6+\sqrt{37})+\ln(2+\sqrt{5})\right]$$

2. 试用定积分求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2\ (R<b)$ 绕 x 轴旋转而成的环体体积 V 及表面积 S .

提示: 上/下 半圆为 $y=b\pm\sqrt{R^2-x^2}$

$$y'=\mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$



求体积 :

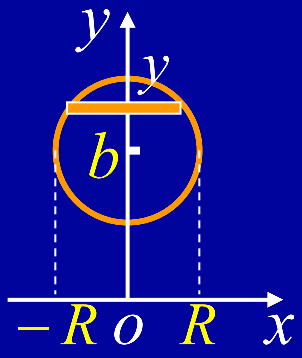
方法1 利用对称性

$$V=2\int_0^R \pi\left[(b+\sqrt{R^2-x^2})^2-(b-\sqrt{R^2-x^2})^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\pi^2R^2b$$

上下半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

方法2 用柱壳法



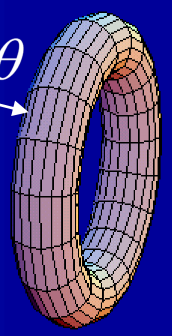
$$\mathrm{d}V = 2\pi y \cdot 2x \cdot \mathrm{d}y$$

$$V = 4\pi \int_{b-R}^{b+R} y\sqrt{R^2 - (y-b)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi^2 R^2 b$$

说明: 上式可变形为

$$\mathrm{d}V = \pi R^2 \cdot b\,\mathrm{d}\theta$$



$$V = \pi R^2 \cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} \pi R^2 \cdot b\,\mathrm{d}\theta$$

此式反映了环体微元的另一种取法(如图所示).

上
下 半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

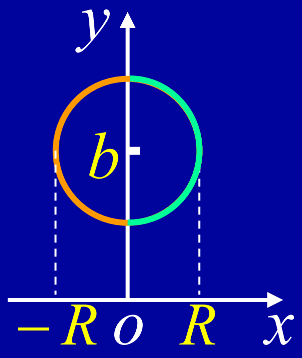
求侧面积：

$$S = 2\int_0^R 2\pi\left(b + \sqrt{R^2 - x^2}\right)\cdot\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

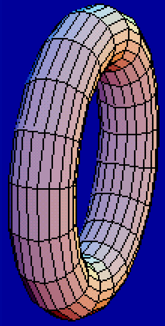
$$+ 2\int_0^R 2\pi\left(b - \sqrt{R^2 - x^2}\right)\cdot\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

二者 y'^2 相同

$$= 8\pi b\int_0^R \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi^2 bR$$



利用对称性



上式也可写成 $S = 2\pi R\cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} 2\pi R\cdot b\,\mathrm{d}\theta$

它也反映了环面微元的另一种取法.

作 业

补充题: 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$, 过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

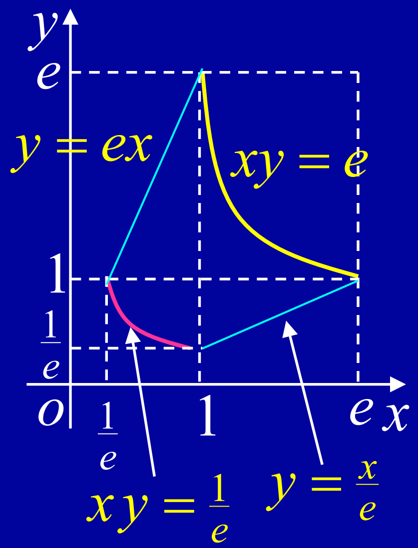
备用题 1. 求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围图形的面积.

解: 显然 $|\ln x|\le 1, |\ln y|\le 1$

$$\Longrightarrow e^{-1}\le x\le e, e^{-1}\le y\le e$$

又 $|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & 1\le x\le e \\ -\ln x, & e^{-1}\le x\le 1 \end{cases}$

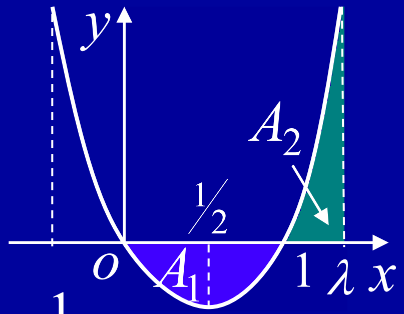
$|\ln y| = \begin{cases} \ln y, & 1\le y\le e \\ -\ln y, & e^{-1}\le y\le 1 \end{cases}$



故在区域 $\begin{cases} e^{-1}\le x\le 1 \\ e^{-1}\le y\le 1 \end{cases}$ 中曲线为 $xy=\frac{1}{e}$, 同理其它.

面积为 $S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(ex-\frac{1}{ex})\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}(\frac{e}{x}-\frac{x}{e})\,\mathrm{d}x=e-\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$

2. λ 为何值才能使 $y=x(x-1)$ 与 x 轴围成的面积等于 $y=x(x-1)$ 与 $x=\lambda$ 及 x 轴围成的面积.



解: $y=x(x-1)$ 与 x 轴所围面积

$$A_1=\int_0^1 -x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$\lambda\ge 0$时,

$$A_2=\int_1^\lambda x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{6}$$

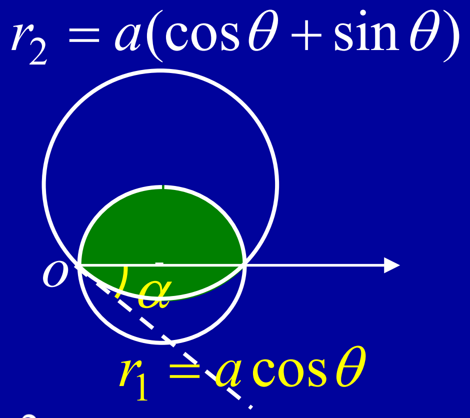
由 $A_1=A_2$, 得 $\lambda^2(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{2})=0$, 故

$$\lambda_1=\frac{3}{2},\quad \lambda_2=0$$

由图形的对称性, $\lambda_3=-\frac{1}{2}$, $\lambda_4=1$ 也合于所求.

3. 求曲线 $r_1 = a\cos\theta$ 与 $r_2 = a(\cos\theta + \sin\theta)$ 所围成图形的公共部分的面积 .

解: 令 $r_2(\theta) = 0$，得 $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$



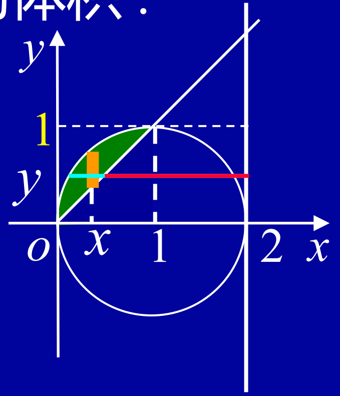
所围区域的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} [r_2(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\cos\theta + \sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{8}a^2$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{a^2(\pi - 1)}{4}$$

4. 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.



提示： 选 x 为积分变量.

旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{2}{3}\pi$$

若选 y 为积分变量，则

$$V=\pi\int_0^1\left[2-(1-\sqrt{1-y^2})\right]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(2-y)^2\,\mathrm{d}y$$