第七节 闭区间上连续函数的性质

一、最值定理

二、介值定理

*三、一致连续性

一、最值定理

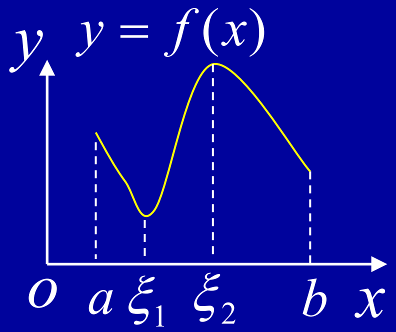
定理1.在闭区间上连续的函数 在该区间上一定有最大值和最小值.

即：设 $f(x) \in C[a,b]$，则 $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$，使

$$f(\xi_1) = \min_{a \le x \le b} f(x)$$

$$f(\xi_2) = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

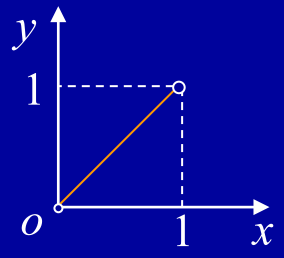
(证明略)



注意：若函数在开区间上连续，或在闭区间内有间断点，结论不一定成立．

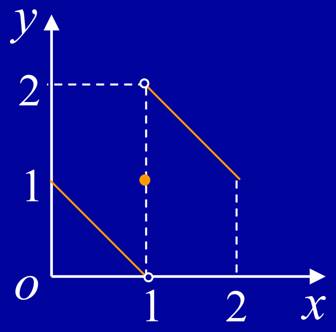
例如, $y = x\,,\, x \in (0,1)$

无最大值和最小值



又如,

$$f(x) = \begin{cases} -x+1\,, & 0 \le x < 1 \\ 1\,, & x = 1 \\ -x+3\,, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

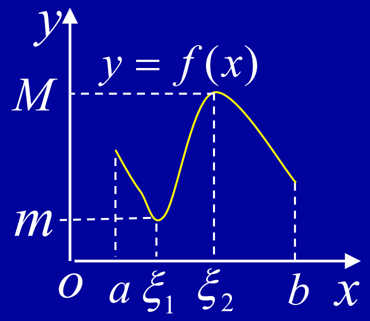


也无最大值和最小值

推论. 在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

证: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 由定理 1 可知有

$$M=\max_{x\in[a,b]} f(x),\quad m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$



故 $\forall x\in[a,b]$, 有 $m\le f(x)\le M$,

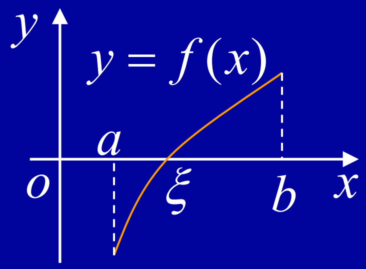
因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

二、介值定理

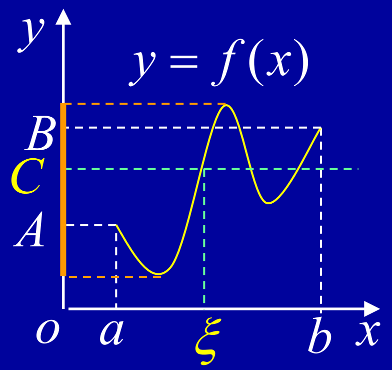
定理2.（零点定理）$f(x)\in C[a,b]$,

且 $f(a)f(b)<0 \Longrightarrow$ 至少有一点

$\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.（证明略）



定理3.（介值定理） 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$A\neq B$，则对 A 与 B 之间的任一数 C，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=C$.



证: 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C$$

则$\varphi(x)\in C[a,b]$，且

$$\varphi(a)\,\phi(b)=(A-C)(B-C)<0$$

故由零点定理知，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使$\varphi(\xi)=0$，即

$$f(\xi)=C.$$

推论: 在闭区间上的连续函数必取得介于最小值与最大值之间的任何值 .

例1. 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根 .

证: 显然 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1 \in C[0,1]$, 又

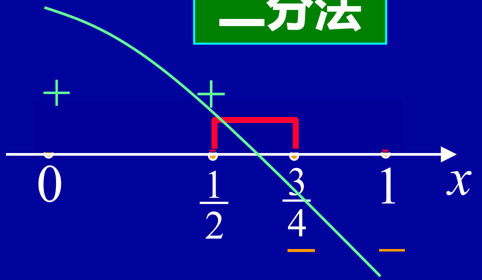
$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -2 < 0$$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即

$$\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$$

说明:

二分法



取 $[0,1]$ 的中点 $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} > 0$,

则 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内必有方程的根 ;

取 $[\frac{1}{2}, 1]$ 的中点 $x = \frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4}) < 0$,

则 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 内必有方程的根 ; $\cdots$ 可用此法求近似根.

例2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒为正，证明:

对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$，必存在一点 $\xi \in [x_1, x_2]$，使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

证: 令 $F(x) = f^2(x) - f(x_1)f(x_2)$，则 $F(x) \in C[a,b]$

$$F(x_1)F(x_2) = -f(x_1)f(x_2)[f(x_1) - f(x_2)]^2 \le 0$$

当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，取 $\xi = x_1$ 或 $\xi = x_2$，则有

$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

当 $f(x_1) \ne f(x_2)$ 时，$\because f(x) > 0$，$\therefore F(x_1)F(x_2) < 0$，

故由零点定理知，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$，使 $F(\xi) = 0$，即

$$f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

*三. 一致连续性

已知函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，即:

$$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} \left| x - x_0 \right| < \delta \text{时},$$

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

一般情形，δ 与 ε, x_0 都有关. 若 δ 与 x_0 无关时，就引出了一致连续的概念 .

定义: 对 $f(x)$, $x \in \mathrm{I}$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对**任意**的 $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, 当 $\left| x_1 - x_2 \right| < \delta$ 时，都有 $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| < \varepsilon$,
则称 $f(x)$ **在 I 上一致连续 .**

显然: $f(x)$ 在区间 I 上一致连续 $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $f(x)$ 在区间 I 上连续

例如, $f(x)=\frac{1}{x}\in C(0,1]$, 但不一致连续 .

因为 $\forall\varepsilon>0\ (0<\varepsilon<1)$, 取点 $x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{1}{n+1}\ (n\in\mathrm{N}^+)$,

则 $\quad |x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$ 可以任意小

但 $\quad |f(x_1)-f(x_2)|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon$

这说明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不一致连续 .

定理. 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

(证明略)

思考: P73 题 6

提示: 设 $f(a^+),\ f(b^-)$ 存在, 作辅助函数

$$F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ f(b^-), & x=b \end{cases}$$

显然 $F(x)\in C[a,b]$

内容小结

设 $f(x)\in C[a,b]$,则

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

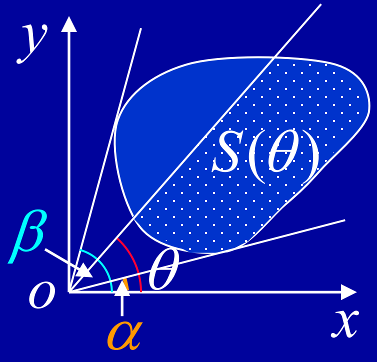
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最大值与最小值;

3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取最大与最小值之间的任何值;

4. 当 $f(a)f(b)<0$ 时, 必存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

思考与练习

1. 任给一张面积为 A 的纸片(如图)，证明必可将它一刀剪为面积相等的两片.



提示: 建立坐标系如图.

则面积函数 $S(\theta)\in C[\alpha,\beta]$

因 $S(\alpha)=0,\ S(\beta)=A$

故由介值定理可知:

$$\exists\theta_0\in(\alpha,\beta),\ 使\ S(\theta_0)=\frac{A}{2}.$$

2. 设 $f(x)\in C[0,2a]$, $f(0)=f(2a)$, 证明至少存在一点 $\xi\in[0,a]$, 使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

提示: 令 $\varphi(x)=f(x+a)-f(x)$,

则 $\varphi(x)\in C[0,a]$, 易证 $\varphi(0)\varphi(a)\le 0$

备用题 证明 $x=e^{x-3}+1$ 至少有一个不超过 4 的正根 .

证： 令 $f(x)=x-e^{x-3}-1$

显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,4]$ 上连续, 且

$$f(0)=-e^{-3}-1<0$$

$$f(4)=4-e^{4-3}-1=3-e>0$$

根据零点定理 , 在开区间 $(0,4)$ 内至少存在一点 $\xi\in(0,4)$, 使 $f(\xi)=0$, 原命题得证 .