第四节 定积分在物理学上的应用

一、 变力沿直线所作的功

二、 液体的静压力

三、 引力问题

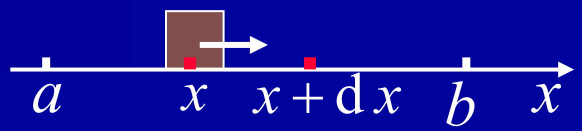
四、 转动惯量

一、 变力沿直线所作的功

设物体在连续变力 $F(x)$ 作用下沿 x 轴从 $x=a$ 移动到 $x=b$，力的方向与运动方向平行，求变力所做的功 .

在$[a,b]$上任取子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，在其上所作的功元素为

$$\mathrm{d}W = F(x)\,\mathrm{d}x$$



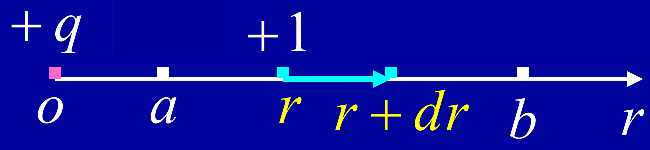
因此变力$F(x)$ 在区间$[a,b]$上所作的功为

$$W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

例1. 在一个带 $+q$ 电荷所产生的电场作用下，一个单位正电荷沿直线从距离点电荷 a 处移动到 b 处 $(a<b)$，求电场力所作的功 .

解: 当单位正电荷距离原点 r 时，由**库仑定律**电场力为

$$F = k\frac{q}{r^2}$$



则功的元素为 $\mathrm{d}W = \dfrac{kq}{r^2}\,\mathrm{d}r$

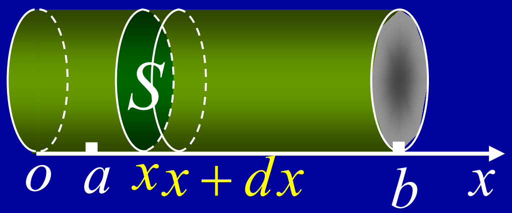
所求功为 $$W = \int_a^b \frac{kq}{r^2}\,\mathrm{d}r = kq\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

说明: 电场在 $r=a$ 处的电势为 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{kq}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{kq}{a}$

例2. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体, 由于气体的膨胀, 把容器中的一个面积为S 的活塞从点 a 处移动到点 b 处 (如图), 求移动过程中气体压力所作的功 .

解: 建立坐标系如图. 由波义耳—马略特定律知压强 p 与体积 V 成反比 , 即 $p=\frac{k}{V}=\frac{k}{xS}$, 故作用在活塞上的力为

$$F=p\cdot S=\frac{k}{x}$$



功元素为 $\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=\frac{k}{x}\mathrm{d}x$

所求功为 $W=\int_a^b\frac{k}{x}\mathrm{d}x=k\left[\ln x\right]_a^b=k\ln\frac{b}{a}$

例3. 一蓄满水的圆柱形水桶高为 5 m, 底圆半径为3m, 试问要把桶中的水全部吸出需作多少功 ?

解: 建立坐标系如图. 在任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的一薄层水的重力为

$$g\cdot\rho\cdot\pi 3^2\,\mathrm{d}x \quad (\mathrm{KN})$$

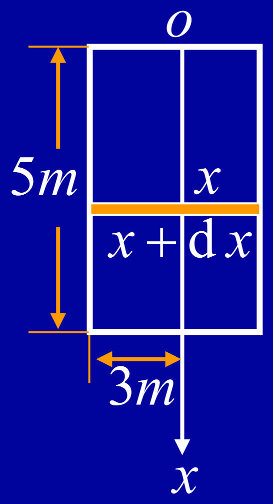
这薄层水吸出桶外所作的功(**功元素**)为

$$\mathrm{d}W = 9\pi g\,\rho\, x\,\mathrm{d}x$$

故所求功为

$$W = \int_0^5 9\pi g\rho x\,\mathrm{d}x = 9\pi g\rho \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5$$

$$= 112.5\pi g\,\rho \quad (\mathrm{KJ})$$

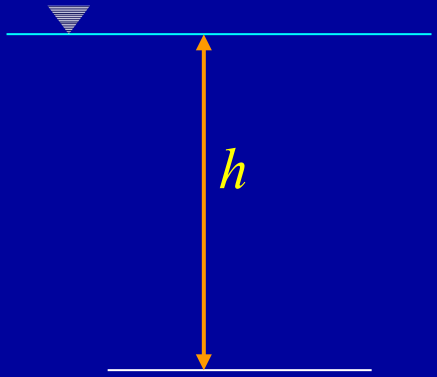


设水的密度为 ρ

二、液体静压力

设液体密度为 ρ

深为 h 处的压强: $p = g\rho h$



面积为 A 的平板

- 当平板与水面平行时,

平板一侧所受的压力为

$$P = p\,A$$

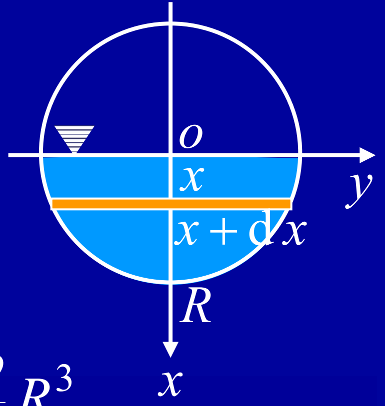
- 当平板不与水面平行时,

所受侧压力问题就需用积分解决 .

例4. 一水平横放的半径为R 的圆桶,内盛半桶密度为ρ的液体，求桶的一个端面所受的压力.

解: 建立坐标系如图. 所论半圆的方程为

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\quad(0\le x\le R)$$



利用对称性，压力元素

$$\mathrm{d}P=2\,g\,\rho x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

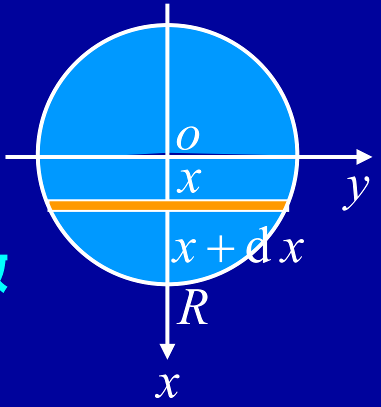
端面所受侧压力为

$$P=\int_0^R 2g\,\rho\,x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2g\,\rho}{3}R^3$$

说明: 当桶内充满液体时,小窄条上的压强为 $g\rho(R+x)$,

侧压力元素 $\mathrm{d}P = 2g\rho(R+x)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

故端面所受侧压力为



$$P = \int_{-R}^{R} 2g\rho(R+\underline{x})\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

奇函数

$$= 4Rg\rho\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

令 $x = R\sin t$

$$= 4Rg\rho\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2} + \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R$$

$$= \pi g\rho R^3$$

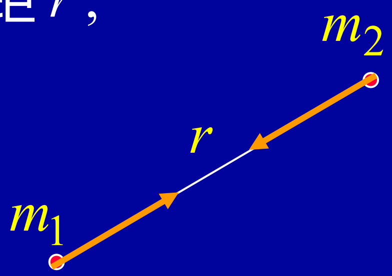
微积分

机动 目录 上页 下页 返回 结束

三、 引力问题

质量分别为 m_1 , m_2 的质点 , 相距 r ,

二者间的引力 :



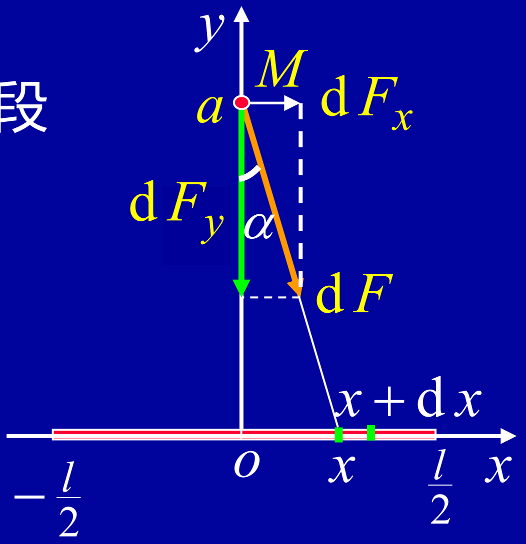
大小: $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向: 沿两质点的连线

若考虑**物体**对质点的引力, 则需用积分解决 .

例5. 设有一长度为 l, 线密度为 μ 的均匀细直棒, 在其中垂线上距 a 单位处有一质量为 m 的质点 M, 试计算该棒对质点的引力.

解: 建立坐标系如图. 细棒上小段 $[x, x+dx]$ 对质点的引力大小为



$$\mathrm{d}F = k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

故垂直分力元素为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cos\alpha$$

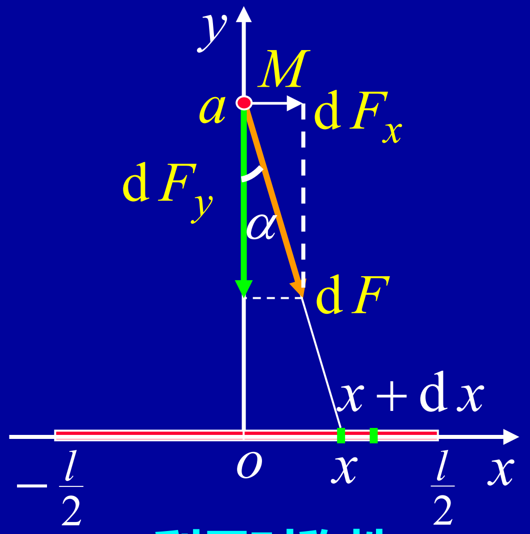
$$= -k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = -km\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的垂直分力为

$$F_y = -2k\,m\mu\,a\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -k\,m\mu\,a\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= -\frac{2k\,m\mu\,l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$



利用对称性

棒对质点引力的水平分力 $F_x = 0$.

故棒对质点的引力大小为 $F = \dfrac{2k\,m\mu\,l}{a}\dfrac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

说明:

1) 当细棒很长时,可视 l 为无穷大 ,

此时引力大小为 $\dfrac{2km\mu}{a}$

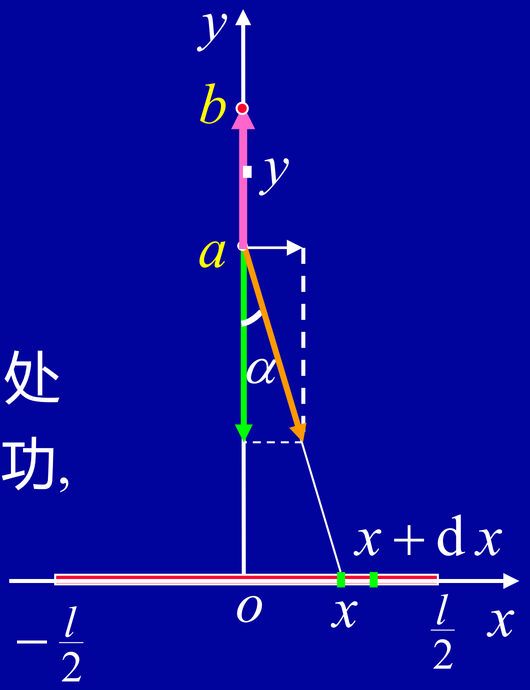
方向与细棒垂直且指向细棒 .

2) 若考虑质点克服引力沿 y 轴从 a 处移到 $b\ (a<b)$ 处时克服引力作的功,

则有

$$\mathrm{d}W=-\frac{2km\mu l}{y}\frac{1}{\sqrt{4y^2+l^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$W=-2km\mu l\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2+l^2}}$$



3) 当质点位于棒的左端点垂线上时,

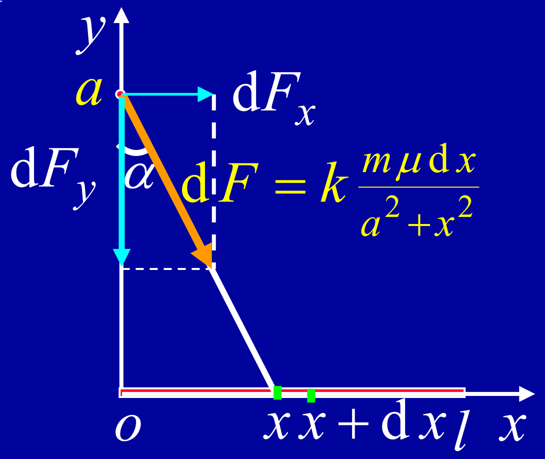
$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cdot\cos\alpha = -k m\mu\, a \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\sin\alpha = k m\mu \frac{x\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

注意正负号

$$\therefore\quad F_y = -k m\mu\, a\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$F_x = k m\mu \int_0^l \frac{x\,\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$



引力大小为 $F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$

四、转动惯量

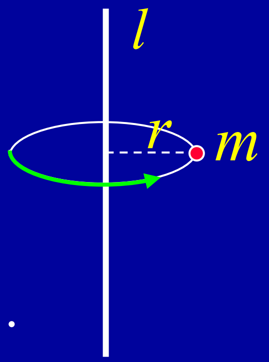
质量为 m 的质点关于轴 l 的转动惯量为

$$I = m r^2$$

与轴 l 的距离为 r_i，质量为 $m_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的质点系

关于轴 l 的转动惯量为

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$



若考虑**物体**的转动惯量，则需用积分解决 .

例6. 设有一个半径为 R , 质量为 M 的均匀圆盘 ,

(1) 求圆盘对通过中心与其垂直的轴的转动惯量 ;

(2) 求圆盘对直径所在轴的转动惯量 .

解: (1) 建立坐标系如图. 设圆盘面密度为ρ. 对应于

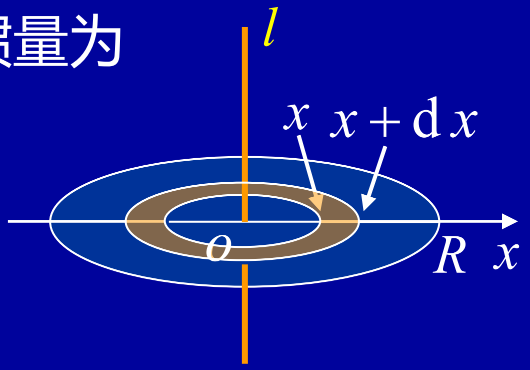
$[x, x+\mathrm{d}x]$ 的小圆环对轴 l 的转动惯量为

$$\mathrm{d}I = 2\pi\rho x^3\,\mathrm{d}x$$

故圆盘对轴 l 的转动惯量为

$$I = \int_0^R 2\pi\rho x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi\rho R^4$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 \qquad (\rho = \frac{M}{\pi R^2})$$



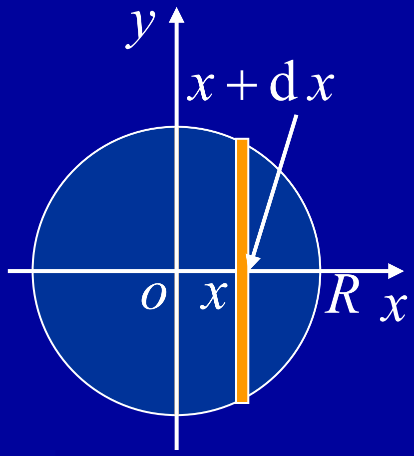
对应于$[x, x+\mathrm{d}x]$的

小圆环质量$\approx 2\pi x\rho\,\mathrm{d}x$

(2) 取旋转轴为 y 轴, 建立坐标系如图.

对应于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的平行 y 轴的细条

关于 y 轴的转动惯量元素为



$$\mathrm{d}I_y = 2\rho\, y x^2\,\mathrm{d}x = 2\rho\, x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

故圆盘对 y 轴的转动惯量为

$$I_y = 2\rho\int_{-R}^{R} x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 4\rho\int_0^R x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad (令\ x = R\sin t)$$

$$= \frac{1}{4}\rho\pi R^4 = \frac{1}{4}M R^2 \qquad \left(\rho = \frac{M}{\pi R^2}\right)$$

内容小结

1.用定积分求一个分布在某区间上的整体量 Q 的步骤:

(1) 先用微元分析法求出它的微分表达式 $\mathrm{d}Q$

一般微元的几何形状有: **条**、**段**、**环**、**带**、**扇**、**片**、**壳** 等.

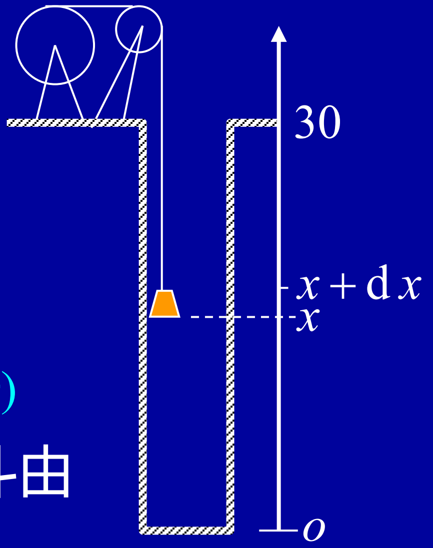
(2) 然后用定积分来表示整体量 Q , 并计算之.

2.定积分的物理应用:

变力作功 , 静压力 , 引力, 转动惯量等.

思考与练习

1.为清除井底污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口, 已知井深30 m , 抓斗自重400N , 缆绳每米重50N , 抓斗抓起的污泥重2000N , 提升速度为3m /s , 在提升过程中污泥以20N /s 的速度从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起污泥的抓斗提升到井口, 问克服重力需作多少焦耳(J) 功? (99考研)



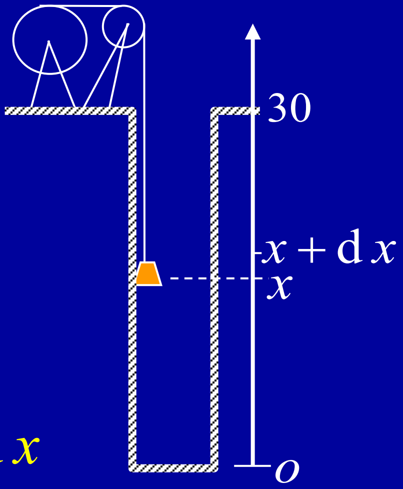
提示: 作 x 轴如图. 将抓起污泥的抓斗由 x 提升 $\mathrm{d}x$ 所作的功为

井深 30 m，　抓斗自重 400 N，　缆绳每米重50N，

抓斗抓起的污泥重 2000N，　提升速度为3m/s，

污泥以 20N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2 + \mathrm{d}W_3$$



克服抓斗自重: $\mathrm{d}W_1 = 400\,\mathrm{d}x$

克服缆绳重: $\mathrm{d}W_2 = 50\cdot(30-x)\,\mathrm{d}x$

抓斗升至 x 处所需时间： $\frac{x}{3}$ (s)

提升抓斗中的污泥:

$$\mathrm{d}W_3 = (2000 - 20\cdot\tfrac{x}{3})\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad W = \int_0^{30}[400 + 50(30-x) + (2000 - 20\cdot\tfrac{x}{3})]\,\mathrm{d}x$$

$$= 91500\ (\mathrm{J})$$

2. 设星形线 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ 上每一点处线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在点 O 处有一单位质点，求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

提示: 如图.

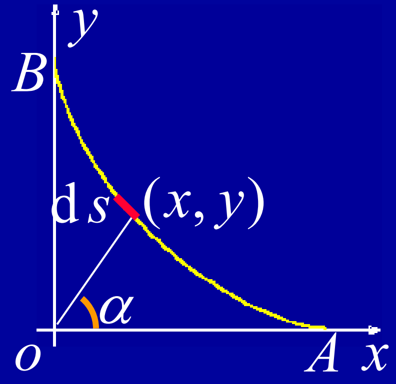
$$\mathrm{d}F = k\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}s}{x^2+y^2} = k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cdot\cos\alpha$$

$$= k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$$

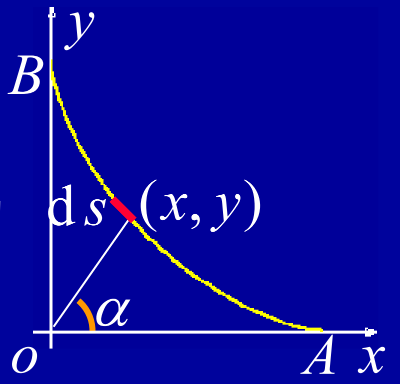
$$= kx\,\mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cdot\sin\alpha = ky\,\mathrm{d}s$$



$$F_x = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\cdot \sqrt{[3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2 t\cdot\cos t]^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 3a^2k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\cdot\sin t\,\mathrm{d}\,t = \frac{3}{5}k\,a^2$$



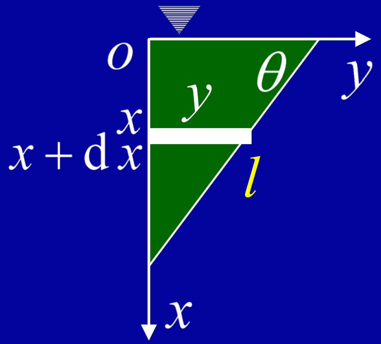
同理 $F_y = \frac{3}{5}k\,a^2$

故星形线在第一象限的弧段对该质点的引力大小为 $F=\frac{3}{5}\sqrt{2}\,k\,a^2$

作业:

备用题 斜边为定长的直角三角形薄板，垂直放置于水中，并使一直角边与水面相齐，问斜边与水面交成的锐角θ 取多大时，薄板所受的压力 P 最大 .

解： 选取坐标系如图．设斜边长为 l ,



则其方程为$y=-\cot\theta\cdot x+l\cos\theta$

$$P=\int_0^{l\sin\theta}\rho\, g\, y\, x\,\mathrm{d}x$$

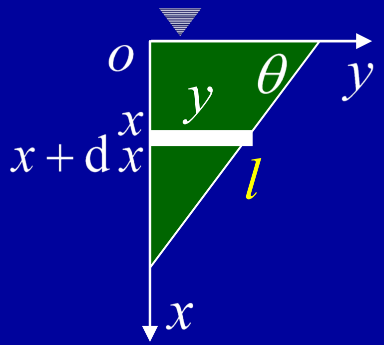
$$=\rho g\int_0^{l\sin\theta}(-x^2\cot\theta+l\,x\cos\theta)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\rho g l^3}{6}(\cos\theta-\cos^3\theta)$$

$$P=\frac{\rho g l^3}{6}(\cos\theta-\cos^3\theta)$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}=0$，即

$$-\sin\theta+3\cos^2\theta\sin\theta=0$$



$\because \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，故得唯一驻点

$$\theta_0=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$$

由实际意义可知最大值存在，故此唯一驻点 θ_0 即为所求.