第四节

归结原理 极限运算法则

一、 函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

二、 极限的四则运算法则

三、 复合函数的极限运算法则

一、 函数极限与数列极限的关系及夹逼准则

1. 函数极限与数列极限的关系

定理1. **(归结原理，Heine定理)**

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}:\ x_n\neq x_0,\ f(x_n)\text{ 有定义},$$

$$x_n\to x_0\ (n\to\infty)\ \big(x_n\to\infty\big),\ \text{有}\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

为确定起见，仅讨论 $x\to x_0$ 的情形.

微积分

定理1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}:\ x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

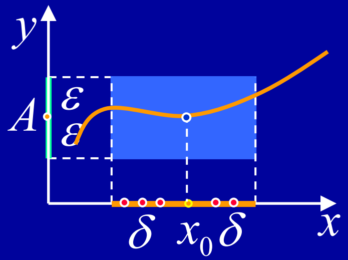
证: “$\Longrightarrow$” 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 即 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 当

$0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\forall\{x_n\}:\ x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义, 且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,

对上述 δ, $\exists\ N$, 当 $n>N$ 时, 有 $0<|x_n-x_0|<\delta$,

于是当 $n>N$ 时 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$.



故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

“$\Longleftarrow$”可用反证法证明. (略)

定理1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)$ 有定义

且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ $(x_n\to\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

说明: 此定理常用于判断函数极限不存在.

法1 找一个数列 $\{x_n\}: x_n\neq x_0$，且 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在.

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

例1. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在 .

证: 取两个趋于 0 的数列

$$x_n=\frac{1}{2n\pi} \text{ 及 } x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\tfrac{\pi}{2})=1$$

由定理 1 知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在 .

2. 函数极限存在的夹逼准则

定理2. 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $g(x) \le f(x) \le h(x)$, 且

$(|x| > X > 0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$$

(利用定理1及数列的夹逼准则可证)

证:

二、 极限的四则运算法则

定理 3 . 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x) = A\pm B$$

证:

定理 4 . 若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则有

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = AB$$

说明: 定理 2 可推广到有限个函数相乘的情形 .

推论 1 . $\lim[C f(x)] = C \lim f(x)$ (C 为常数)

推论 2 . $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$ (n 为正整数)

例2. 设 n 次多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, 试证

$$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

证: $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = a_0 + a_1 \lim\limits_{x\to x_0} x + \cdots + a_n \lim\limits_{x\to x_0} x^n$

$$= P_n(x_0)$$

定理 5 . 若 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$， 且 $B\neq 0$, 则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$$

证:

例3. 设有分式函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中$P(x),Q(x)$ 都是多项式，若 $Q(x_0)\neq 0$，试证：$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=R(x_0)$.

证: $$\lim_{x\to x_0} R(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=R(x_0)$$

说明: 若$Q(x_0)=0$，不能直接用商的运算法则 .

例4. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+3}$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$\boxed{x=3\text{ 时分母为 }0\text{ !}}$

例5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

例6 . 求 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

三、 复合函数的极限运算法则

定理6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a$, 且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,

$\phi(x)\neq a$, 又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\phi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A \qquad ①$$

证: $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A \Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$, 当 $0<|u-a|<\eta$

时, 有 $|f(u)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=a \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0$, $\exists\delta_2>0$, 当

$0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有 $|\phi(x)-a|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0<|\phi(x)-a|=|u-a|<\eta$$

故 $|f[\varphi(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$, 因此①式成立.

定理6. 设 $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = a$, 且 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$\phi(x) \neq a$, 又 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} f[\phi(x)] = \lim_{u \to a} f(u) = A$$

说明：若定理中 $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = \infty$, 则类似可得

$$\lim_{x \to x_0} f[\phi(x)] = \lim_{u \to \infty} f(u) = A$$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解: 令 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$

已知 $\lim\limits_{x\to 3} u=\dfrac{1}{6}$?

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{u\to\frac{1}{6}}\sqrt{u}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

例8 . 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

解：方法 1　令 $u=\sqrt{x}$, 则 $\lim\limits_{x\to1}u=1$,

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{u^2-1}{u-1}=u+1$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{u\to1}(u+1)=2$$

方法 2

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)$$

$$=2$$

内容小结

1. 函数极限与数列极限关系的应用

(1) 利用数列极限判别函数极限不存在

法1 找一个数列 $\{x_n\}: x_n \neq x_0$，且 $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在 .

法2 找两个趋于 x_0 的不同数列 $\{x_n\}$ 及 $\{x_n'\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n')$$

(2) 数列极限存在的夹逼准则 $\Longrightarrow$ 函数极限存在的夹逼准则

2. 极限运算法则

$\left.\begin{array}{l}\text{(1) 极限四则运算法则}\\ \text{(2) 复合函数极限运算法则}\end{array}\right\}$ 注意使用条件

3. 求函数极限的方法

(1) 分式函数极限求法

1) $x \to x_0$ 时, 用代入法　（分母不为 0）

2) $x \to x_0$ 时, 对 $\frac{0}{0}$ 型, 约去公因子

(2) 复合函数极限求法 —— 设中间变量

思考及练习

1. 若 $\lim f(x)$ 存在, $\lim g(x)$ 不存在, 问

$\lim[f(x)+g(x)]$ 是否存在？为什么？

答: 不存在． 否则由 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$

利用极限四则运算法则可知 $\lim g(x)$ 存在，与已知条件矛盾.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right]=?$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{2}$

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解法 1

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

解法 2 令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $t\to 0^+$

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left[\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+1}=\frac{1}{2}$$

4. 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax)=0$.

解： 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$0=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0$$

故 $\quad -1-a=0$

因此 $\quad a=-1$

作业

P55　8　(1)，　(4)，　(7)，　(10)，　(13)

备用题 设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，求 $f(x)$.

解: 利用前一极限式可令

$$f(x)=2x^3+2x^2+a\,x+b$$

再利用后一极限式，得

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(a+\frac{b}{x}\right)$$

可见 $a=3\,,\,b=0$

故 $f(x)=2x^3+2x^2+3x$