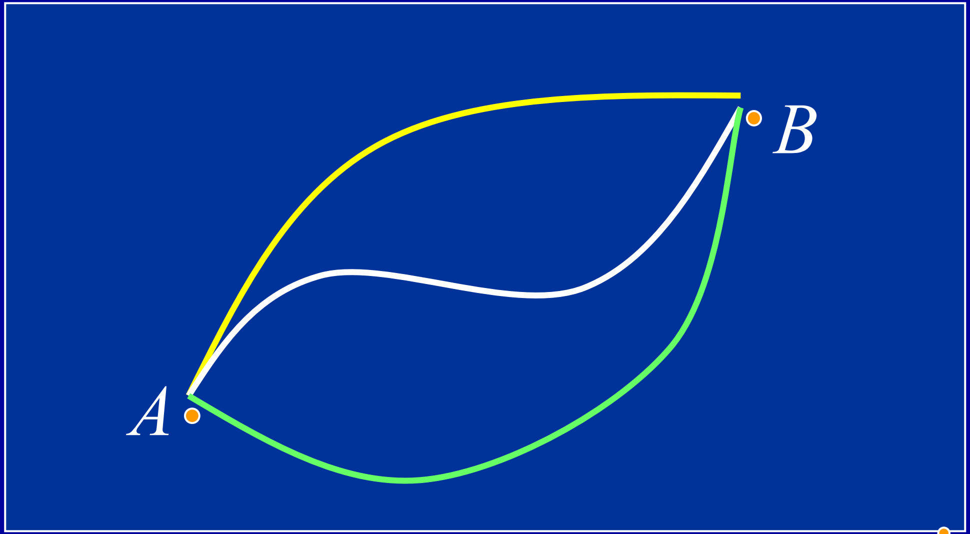
第五节

第三章

曲线的凹凸性与拐点

曲线的凹凸与拐点



定义1. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且曲线 $y=f(x)$

都在曲线上任一点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线的上方

(即 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$)，则称曲线

$y=f(x)$ 在该区间是 凹 的

如果曲线 $y=f(x)$ 都在曲线上任一点 $(x_0,f(x_0))$

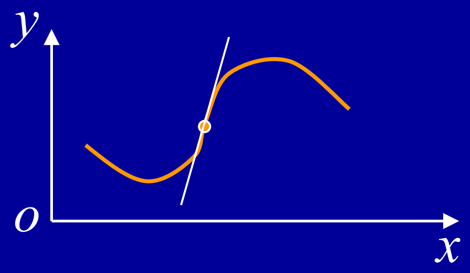
的切线的下方(即 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$)，

则称曲线 $y=f(x)$ 在该区间是 凸 的

定义2 .

连续曲线上有切线的凹凸分界点

称为**拐点** .



定理1.(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数

(1) 在 I 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凹的 ;

(2) 在 I 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凸的 .

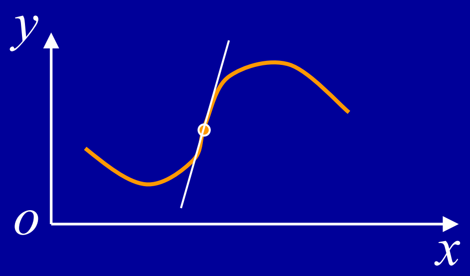
证明:

定义1'. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$\forall x_1, x_2 \in I$,

(1) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的图形是**凹**的;

(2) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 的图形是**凸**的.

连续曲线上有切线的凹凸分界点称为**拐点**.



定理1'.(凹凸判定法) 设函数 $f(x)$ 在区间I 上有二阶导数

(1) 在 I 内$f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凹的 ;

(2) 在 I 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凸的 .

证: $\forall x_1\,, x_2 \in I$, 利用一阶泰勒公式可得

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\boxed{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}+\boxed{\frac{f''(\xi_1)}{2\,!}\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\boxed{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}+\boxed{\frac{f''(\xi_2)}{2\,!}\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

两式相加

$$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\underline{\frac{1}{2!}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]}$$

当$f''(x)\underset{<}{>}0$时, $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\underset{<}{>}f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$, 说明 (1) 成立;
(2)

证毕

定义1”. 设函数 在区间 I 上有定义， $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in (0,1)$,

(1) 若恒有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

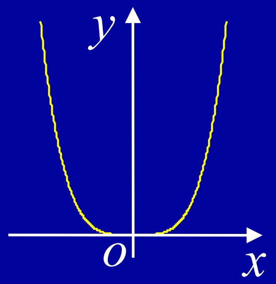
则称 $f(x)$ 的图形是**凹**的;

(2) 若恒有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 的 图形是**凸**的 .

例1. 判断曲线 $y = x^4$ 的凹凸性.



解: $y' = 4x^3,\ y'' = 12x^2$

当$x \neq 0$时，$y'' > 0$; $x = 0$时, $y'' = 0$,

故曲线 $y = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是向上凹的.

说明:

若在某点二阶导数为 0 ，　在其两侧二阶导数不变号,

则曲线的凹凸性不变 .

定理2： 设 $f(x)$ 在区间(a,b)内二阶可导，$(x_0, f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点， 则有 $f''(x_0)=0$.

根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

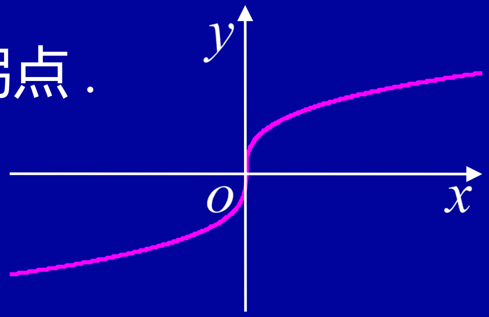
若曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续, $f''(x_0)=0$ 或不存在, 但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号，则点$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$的一个拐点.

例2. 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解: $y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, $y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y	凹	0	凸

因此点 $(0,0)$ 为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点 .



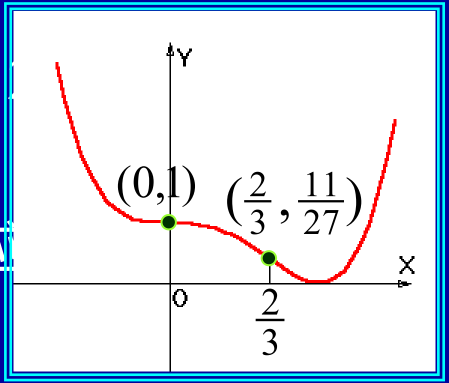
例3. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解: 1) 求 y''

$$y'=12x^3-12x^2,\quad y''=36x^2-$$

2) 求拐点可疑点坐标

令 $y''=0$ 得 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$, 对应



3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	1	凸	$\frac{11}{27}$	凹

故该曲线在 $(-\infty,0)$ 及 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上向上凹, 在 $(0,\frac{2}{3})$ 上向上凸, 点 $(0,1)$ 及 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 均为拐点.

定理3： 设 $f(x)$ 在 x_0 处存在 n 阶导数$(n \geq 3)$，且满足

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \qquad k = 2,3,\cdots,n-1, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

那么，如果 n 为奇数，则点$(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

如果 n 为偶数，则点$(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

例4. 设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b)内二阶可导，且$f''(x) \geq 0$.

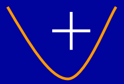
证明：对于(a,b)内任意两点x_1, x_2及$0 \leq t \leq 1$, 有

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

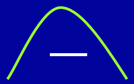
内容小结

曲线凹凸与拐点的判别

$f''(x)>0, x\in I \Longrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 I 上向上凹



$f''(x)<0, x\in I \Longrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 在 I 上向上凸



拐点 — 连续曲线上有切线的凹凸分界点

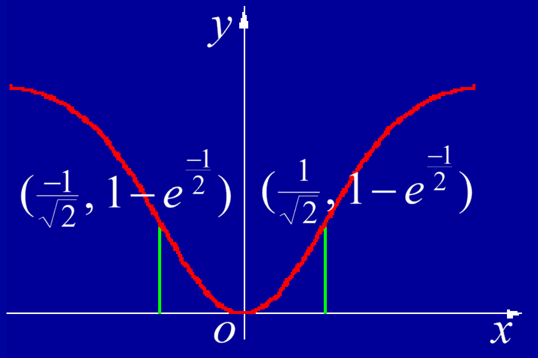
思考与练习

曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}$；

凸区间是 $\underline{(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})}$ 及 $\underline{(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)}$；

拐点为 $\underline{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1-e^{\frac{-1}{2}})}$.

提示: $y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$



作 业

P131 11,12(1)(4),13(3)(6), 16(2)(4)

P163 1(1)(4), 3

备用题

1.求证曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

证明： $y'=\dfrac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$y''=\frac{(-2-2x)(x^2+1)^2-(1-2x-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''=0$ 得

$$x_1=1,\quad x_2=-2-\sqrt{3},\quad x_3=-2+\sqrt{3}$$

从而三个拐点为

$$(1,1),\quad \left(-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right),\quad \left(-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\right)$$

因为

$$\frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}-1}{-2-\sqrt{3}-1}=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}-1}{-2+\sqrt{3}-1}$$

所以三个拐点共线.

2 . 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

证明: 令 $F(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x$, 则 $F(0) = 0,\ F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\because \quad F'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$

$F''(x) = -\sin x < 0$

$\therefore \quad F(x)$ 是**凸**函数

$\therefore \quad F(x) \geq \min\{ F(0), F(\frac{\pi}{2}) \} = 0$ (自证)

即 $\sin x > \frac{2}{\pi} x \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$