第三节 定积分的换元法和分部积分法

第五章

不定积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\\text{分部积分法}\end{array}\right. \longrightarrow$ 定积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{换元积分法}\\\text{分部积分法}\end{array}\right.$

一、定积分的换元法

二、定积分的分部积分法

一、定积分的换元法

定理1. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;

2) 在$[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

证: 所证等式两边被积函数都连续, 因此积分都存在, 且它们的原函数也存在. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$的一个原函数, 则$F[\varphi(t)]$ 是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的原函数, 因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

说明:

1) 当$\beta < \alpha$, 即区间换为$[\beta,\alpha]$时， 定理 1 仍成立 .

2) 必需注意**换元必换限**, 原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用 , 即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (令\ x = \varphi(t))$$

或配元 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t} = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$

$\boxed{\text{配元不换限}}$

例1. 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0).$

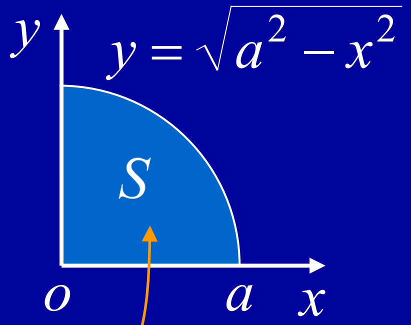
解: 令 $x = a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad \text{原式} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$



例2. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{2x+1}$, 则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$.

$$\therefore \quad 原式 = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\,t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Big|_1^3=\frac{22}{3}$$

例3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x\, dx$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, d\cos x$

$= -[\frac{1}{6}\cos^6 x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$

例4 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - sin^5 x}\, \mathrm{d}\, x$

例5 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\geq 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0 \end{cases}$ 计算 $\int_1^4 f(x-2)dx$

例6 设 f(x) 为连续函数，$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$， 求 $F'(x)$

二、定积分的分部积分法

定理2. 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

证: $\because\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\Big\downarrow$ 两端在 $[a,b]$ 上积分

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

例7. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x\arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

例8 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$, 计算 $\int_0^{\pi} f(x)dx$

例9* 设函数 $u=u(x), v=v(x)$ 在 [a,b] 上具有连续 n+1 阶连续导数，则

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx \quad =\int_a^b u dv^{(n)} \quad = uv^{(n)}\Big|_a^b - \int_a^b u'v^{(n)}\,dx$$

$$= uv^{(n)}\Big|_a^b - \int_a^b u'\mathrm{d}v^{(n-1)} = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)}]\big|_a^b + \int_a^b u''v^{(n-1)}\,dx$$

$$= \cdots$$

$$= [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v dx$$

令 $u=f(x), v=(b-x)^n,$ 则 $v' = -n(b-x)^{n-1},$

$v'' = (-1)^2 n(n-1)(b-x)^{n-2}, \ \ldots, v^{(n)} = (-1)^n n!, v^{(n+1)} = 0,$

当 x=b 时，$v, v', v'', \ldots, v^{(n-1)}$ 都为0，因此

$$0=(-1)^n[n!\big(f(b)-f(a)\big)-n!\,f'(a)(b-a)-\frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2$$

$$-\cdots-\frac{n!}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}-\frac{n!}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n]$$

$$+(-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx$$

由此得

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx$$

用 x 代替 b, x_0 代替 a, 就得到下面的公式:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dx$$

称为**带有定积分型余项的 n 阶 Taylor 公式**

例10 设 $u_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots(1+\frac{n}{n})\right]$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

三、定积分的一些简化计算方法

1. 关于原点对称区间上函数的定积分

定理 设 $f(x) \in C[-a, a]$,

(1) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

偶倍奇零

(3) 若 $f(x)$ 为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

证: (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\boxed{令\ x=-t}$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\,\mathrm{d}x$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$

因此 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$

(3) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x) = f(x)$

因此 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

例11 计算 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2(\sin x-\cos x)^4}{1+sin^2 2x}dx$

例12 计算 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,dx$

2. 周期函数的定积分

定理 设 f(x) 是以 T 为周期的连续函数， 则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \qquad (a\text{ 为任意常数})$$

3. Wallis 公式

定理

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

证: 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= \underbrace{\left[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx$$

微积分

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}x$$
$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x}$$

由此得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

于是 $$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1$$

而 $$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1$$

故所证结论成立 .

例13 计算 $\displaystyle\int_{10-\frac{\pi}{2}}^{10+\frac{\pi}{2}} \tan^2 x \sin^4 2x \, dx$

4. 灵活运用变量代换计算定积分

例14 设 f(x) 在 [0,1] 上连续，证明

(1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

(2) $$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

并由此计算 $$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+cos^2 x}dx$$

证: (1) 作变换 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 可得.

(2) 作变换 $t=\pi-x$, 则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

所以 $$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

利用这个结论，有

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+cos^2x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+cos^2x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+cos^2x}d\cos x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

例15 计算 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\arctan e^{x}}{1+cos^{2}x}dx$

例16 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{ln^2 x}{1+x} dx$

例17 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

内容小结

$$\text{基本积分法}\begin{cases}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{cases}$$

换元必换限
配元不换限
边积边代限

思考与练习

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\ \sin^{100}x\ }$

提示： 令 $u = x - t$, 则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100}u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(e)$.

解法1 $\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$

令 $u=x^3$, 得 $f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u \Longrightarrow f(e)=\frac{1}{3}$

解法2 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3)=\frac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得 $f'(u)=\frac{1}{3u}$

$\therefore\quad f(e)=\int_1^{e} f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)$

$=\frac{1}{3}\int_1^{e}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$

思考: 若改题为

$\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t=\ln x$

$f(e)=?$

提示: 两边求导, 得

$f'(x)=\frac{1}{3x^3}$

$f(e)=\int_1^{e} f'(x)\,\mathrm{d}x$

3. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x\, \underline{f''(2x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ (分部积分)

$$= \frac{1}{2}\left[\, x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \,\right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

作 业

备用题

1. 证明 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$ 是以π为周期的函数.

证： $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$

令 $u=t+\pi$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以π为周期的周期函数.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 试证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$

解: 右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$

分部积分积分

$$=\frac{1}{2}\left[(x-a)(x-b)f'(x)\right]\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$

再次分部积分

$$=-\frac{1}{2}\left[(2x-a-b)f(x)\right]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$