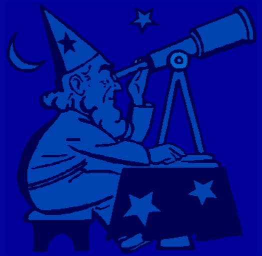
第三章

# 第二节 洛必达法则

一、$\dfrac{0}{0}$ 型未定式

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

三、其他未定式



$$\text{微分中值定理}\begin{cases}\text{函数的性态} \\ \quad\Big\downarrow\Big\uparrow \\ \text{导数的性态}\end{cases}$$

**本节研究:**

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{ 或 }\dfrac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$

$\Big\downarrow$ 转化 **洛必达法则**

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

洛必达, G.-F.-A. de

## 一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

**定理 1.**

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\mathring{U}(a)$内可导, 且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为$\infty$ )

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$ (洛必达法则)

**定理条件:** 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导, 且$F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为$\infty$ )

---

**证:** 无妨假设$f(a)=F(a)=0$, 在指出的邻域内任取 $x\neq a$, 则$f(x), F(x)$在以 $x, a$ 为端点的区间上满足柯西定理条件, 故

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi\text{在}x, a\text{之间})$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \overset{3)}{=\!=} \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}}$

**推论1.** 定理 1 中 $x\to a$ 换为

$$x\to a^+,\quad x\to a^-,\quad x\to\infty,\quad x\to+\infty,\quad x\to-\infty$$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

**推论 2.** 若 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x), F'(x)$ 满足定理1条件, 则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{F''(x)}$$

**例1.** 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

**解:** 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

**注意:** 不是未定式不能用洛必达法则！

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

**例2.** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

$\frac{0}{0}$ 型

**解:** 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$=\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

**思考:** 如何求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$ ( $n$ 为正整数) ?

## 二、$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

**定理 2.**

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|F(x)|=\infty$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导, 且$F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为$\infty$)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$ (洛必达法则)

**证:** 仅就极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 存在的情形加以证明 .

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}\neq 0$ 的情形

$\dfrac{0}{0}$ 型

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-1}{F^2(x)}F'(x)}{\frac{-1}{f^2(x)}f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\frac{F'(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

$$\therefore\quad 1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{f'(x)}$$

从而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=0$ 的情形. 取常数 $k\neq 0$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{F(x)}+k\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}$$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+kF(x)}{F(x)}=k\neq 0$, 可用 1) 中结论

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+kF'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}+k\right]$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\infty$ 时, 结论仍然成立. ( 证明略 )

**说明:** 定理中 $x\to a$ 换为

$x\to a^{+}$, $x\to a^{-}$, $x\to\infty$,

$x\to +\infty$, $x\to -\infty$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理仍然成立.

**例3.** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\ (n>0)$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

**解:** 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$

**例4.** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}\ (n>0,\lambda>0)$.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

**解:** (1) $n$ 为正整数的情形.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

**例4.** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}\ (n>0\,,\lambda>0).$

(2) $n$ 不为正整数的情形.

存在正整数 $k$, 使当 $x>1$ 时,

$$x^k < x^n < x^{k+1}$$

从而
$$\frac{x^k}{e^{\lambda x}} < \frac{x^n}{e^{\lambda x}} < \frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$$

用夹逼准则

由(1)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}} = 0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}} = 0$$

**说明:**

1) 例3 , 例4 表明 $x \to +\infty$ 时,

$$\ln x,\quad x^n\ (n>0),\quad e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快 .

2) 在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题 . 例如,

用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

3) 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} .$$

**例如,** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} \neq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos x}{1}$

极限不存在

$\|$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

**补充:** $\dfrac{*}{\infty}$ **型**

**定理 2’:**

1) $\lim\limits_{x\to a}|F(x)| = \infty$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导, 且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为$\infty$)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

## 三、其他未定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$ 型

**解决方法:**

$$\infty-\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

**例5.** 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x \quad (n>0)$.

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

**解:** 原式 $= \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-n}} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0$$

$\infty-\infty \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}} 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

**例6.** 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x).$ $\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

**解:** 原式

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

**例:** $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$; $(\infty-\infty)$

**解:** $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ $(令\ t=\frac{1}{x})$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

$\infty - \infty$ $\xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}}$ $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}}$ $0 \cdot \infty$ $\xleftarrow[\text{转化}]{\text{取对数}}$ $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$

**例7.** 求 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

$\boxed{0^0 \text{ 型}}$

**解:** $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$

**利用 例5**

$= e^0 = 1$

**例8.** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

**解:** 注意到 $\sin x \sim x$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$

$$= \frac{1}{3}$$

**例9.** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1).$

$\boxed{\infty\cdot 0\text{型}}$

**法1** 用洛必达法则

**分析:** 为用洛必达法则，考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1).$

若其极限存在，由归结原理，可得所求极限.

**解:** 设 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}}=-2\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = 4\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$$

令 $x_n = n$ 由归结原理 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$

即 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)=0$

**法2** 原式 $= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ $\qquad \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \to 1$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{e^u - 1 \sim u}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$$

**例：** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

**解：** 考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ $(1^\infty型)$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right) \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{\ln(\frac{1}{t}\tan\ t)}{t^2}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan\ t}sec^2\ t-\frac{1}{t}}{2t} = \lim_{t\to0^+}\frac{2t-\sin 2t}{2t^2\sin 2t}=\frac{1}{3}$$

$$= e^{\frac{1}{3}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}$

# 内容小结

## 洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y = f^g$

取对数

$0 \cdot \infty$ 型

$f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$

$\dfrac{0}{0}$ 型

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$f - g = \dfrac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$

## 思考与练习

1. 设 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是未定式极限，如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在，是否 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也不存在？ 举例说明 .

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$$

$$\boxed{\ln(1+x)\sim x}$$

**分析:** 原式$= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \dfrac{1}{2}(3+0)$

微积分

说明 目录 上页 下页 返回 结束

**3.** $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=$ $\underline{\quad\frac{1}{6}\quad}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1}$

**分析:** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$

**4.** 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

**解:** 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

# 作业

P141　1.(1) (3)(5)　2.(4)(5)

3.(2)(5)(8)

4.(2)(4)(5)

6.(1)(3)

**备用题** 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$;  2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

**解：** 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$  (令 $t=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

**解:** 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则

$$原式=\lim_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}$$ (用洛必达法则)

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}$$ (继续用洛必达法则)

$$=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

**解:** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$