第二节 数列的极限

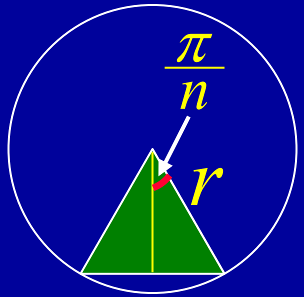
一、数列极限的定义

二、收敛数列的性质

三、极限存在准则

一、数列极限的定义

引例. 设有半径为 r 的圆，用其内接正 n 边形的面积 A_n 逼近圆面积 S .



如图所示，可知

$$A_n = n\, r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

$$(\,n = 3, 4, 5, \cdots\,)$$

当 n 无限增大时, A_n 无限逼近 S (刘徽割圆术) ,

数学语言描述: $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left|\,A_n - S\,\right| < \varepsilon$$

定义: 自变量取正整数的函数称为**数列**,记作 $x_n = f(n)$ 或 $\{x_n\}$. x_n 称为**通项**(一般项) .

若数列 $\{x_n\}$ 及常数 a 有下列关系：

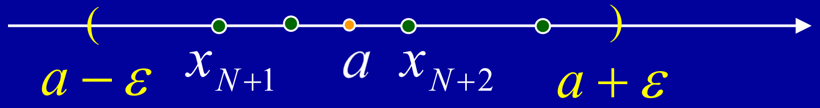
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正数 N, 当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n - a| < \varepsilon$

则称该数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \ (n \to \infty)$$

此时也称数列**收敛**，否则称数列**发散**.

几何解释：



$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$(n > N)$

即 $x_n \in U(a, \varepsilon)$

$(n > N)$

例如, $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

$$x_n=\frac{n}{n+1}\to 1\quad (n\to\infty)$$

$2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

$$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\to 1\quad (n\to\infty)$$

收敛

$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$

$$x_n=2^n\to\infty\quad (n\to\infty)$$

$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

$$x_n=(-1)^{n+1}\quad \text{趋势不定}$$

发散

关于数列极限定义的说明:

(1) ε 的任意性

(2) N 的存在性

例1. 已知 $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$，证明数列$\{x_n\}$的极限为1.

证: $\left|x_n - 1\right| = \left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$，欲使 $\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$，只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$

因此，取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n > N$ 时，就有

$$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

故 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$$

例2. 已知 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

证: $\left|x_n-0\right|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n+1}$

$\forall\varepsilon\in(0,1)$, 欲使 $\left|x_n-0\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.

取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}-1]$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $\left|x_n-0\right|<\varepsilon$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$

也可由 $\left|x_n-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

取 $N=[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1]$

说明: N 与 ε 有关, 但不唯一.

不一定取最小的 N.

例3. 设 $|q|<1$, 证明等比数列 $1,q,q^2,\cdots,q^{n-1},\cdots$ 的极限为 0 .

证: $|x_n-0| = |q^{n-1}-0| = |q|^{n-1}$

$\forall\varepsilon\in(0,1)$, 欲使 $|x_n-0|<\varepsilon$, 只要 $|q|^{n-1}<\varepsilon$, 即

$(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$, 亦即 $n>1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

因此, 取 $N=\left[1+\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 就有

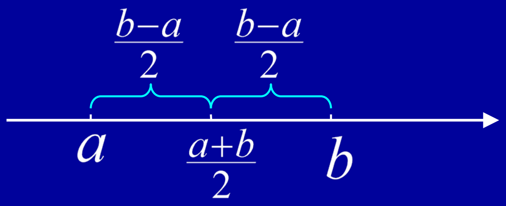
$$|q^{n-1}-0|<\varepsilon$$

故
$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1}=0$$

例: 设 $x_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$.

例: 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

二、收敛数列的性质



1. 收敛数列的极限唯一.

证: 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$.

取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在 N_1, 使当 $n > N_1$ 时,

$$\left| x_n - a \right| < \frac{b-a}{2},\ \text{从而}\ x_n < \frac{a+b}{2}$$

同理, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 故存在 N_2, 使当 $n > N_2$ 时, 有

$$\left| x_n - b \right| < \frac{b-a}{2},\ \text{从而}\ x_n > \frac{a+b}{2}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, x_n 满足的不等式

矛盾. 故假设不真! 因此收敛数列的极限必唯一.

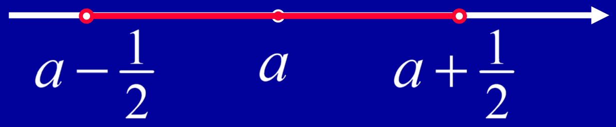
例4. 证明数列$x_n=(-1)^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$是发散的.

证: 用反证法.

假设数列$\{x_n\}$收敛，则有唯一极限 a 存在 .

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则存在 N, 使当 $n>N$ 时，有

$$a-\frac{1}{2}<x_n<a+\frac{1}{2}$$



但因 x_n 交替取值 1 与 - 1，而此二数不可能同时落在长度为 1 的开区间$(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2})$内, 因此该数列发散 .

2. 改变数列的有限项，不改变数列的敛散性及极限

3. 收敛数列一定有界.

证: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有

$|x_n - a| < 1$, 从而有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|a|\}$$

则有 $$|x_n| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由此证明收敛数列必有界.

说明: 此性质反过来不一定成立 . 例如,

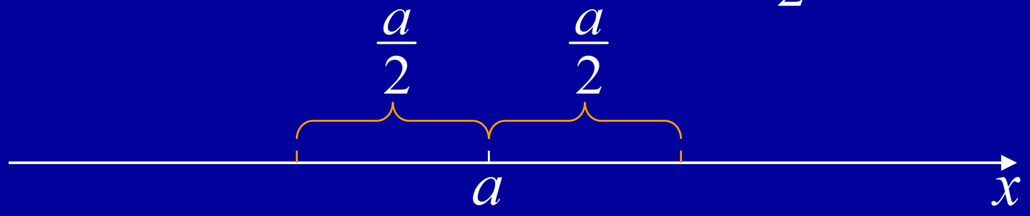
数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 虽有界但不收敛 .

4. 收敛数列的保号性.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a>0$ (<0), 则$\exists N\in\mathrm{N}^+$,当$n>N$ 时, 有$x_n>0$ (<0).

证: 对 $a>0$, 取 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}$, 则$\exists N\in\mathrm{N}^+$,当$n>N$时,

$$\left|x_n-a\right|<\frac{a}{2} \Longrightarrow x_n>a-\frac{a}{2}>0$$



推论: 若数列从某项起 $x_n\geq 0$ (≤ 0) 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a\geq 0$ (≤ 0). (用反证法证明)

更一般的

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$ (< 0)， 则对于满足

$0 < \eta < a$ $(a < \eta < 0)$ 的任何常数η， $\exists N \in \mathrm{N}^+$,

当$n > N$ 时, 有

$$x_n > \eta > 0 \quad (x_n < \eta < 0)$$

推论: 若数列从某项起 $x_n \geq y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$,
则$x \geq y$.

5.数列极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$,

$\{x_n y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ $(y \neq 0)$ 的极限都存在，且

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \pm y$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \cdot y$

(3) 当$y \neq 0$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{x}{y}$

证明:

例

三、极限存在准则

夹逼准则;

数列与其子列的关系

单调有界准则;

柯西审敛准则 .

1. 夹逼准则 (准则1)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证: 由条件 (2) , $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2,$

当$n > N_1$ 时, $|y_n - a| < \varepsilon$

当$n > N_2$ 时, $|z_n - a| < \varepsilon$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当$n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

由条件 (1) $\quad a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例5. 证明 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证: 利用夹逼准则 . 由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi} < n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right) < \frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}} = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

例

例

2. 数列的子列

给定数列 $\{x_n\}$， 从中挑选无穷多项并按照原有的次序列出来，即

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots \quad (n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$$

就得到一个以 k 为序号的数列$\{x_{n_k}\}$，称其为原数列$\{x_n\}$的一个子数列， 简称子列

由定义， $\mathrm{n}_k \geq k$

定理： 数列收敛的充要条件是其任一子数列收敛于同一极限 .

证： 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列 .

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

现取正整数 K, 使 $n_K \ge N$, 于是当 $k > K$ 时, 有

$$n_k > n_K \ge N$$

x_N $\quad$ x_{n_K}

*********************************……

N $\quad$ n_K

从而有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$,

由此证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

这就证明了必要性.

而充分性是显然的. ?

说明:

由此性质可知，若数列有两个子数列收敛于不同的极限，则原数列一定发散．

例如，

$$x_n = (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots) \text{ 发散！}$$

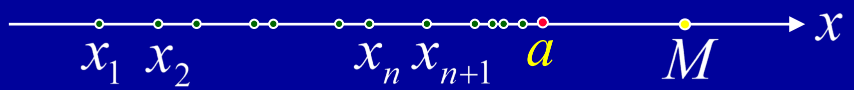
$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1; \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -1}$$

例 $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

3. 单调有界数列必有极限 (准则2)

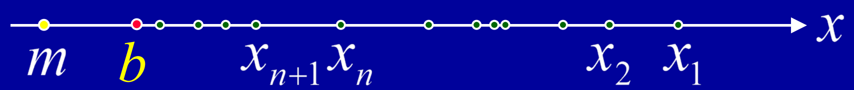
$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (\le M)$$



$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \quad (\ge m)$$



证明：

例6. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在 .

证: 利用二项式公式，有

$$x_n=(1+\tfrac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_n = 1+1+\underline{\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})} + \underline{\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} + \cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_{n+1} = 1+1+\underbrace{\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})}_{\text{大}} + \underbrace{\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})}_{\text{大}} + \cdots$$

$$\underbrace{+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})}_{\text{正}}$$

比较可知 $x_n < x_{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots)$

又 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

又 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ 有极限 .

记此极限为 e 即

,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

e 为无理数，其值为

$$e=2.718281828459045\cdots$$

例

例

*4. 柯西极限存在准则(柯西审敛原理)

数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall\,\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $m > N,\ n > N$ 时,

有 $$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

证: "必要性" 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, N$, 使当

$m > N,\ n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon/2, \quad |x_m - a| < \varepsilon/2$$

因此 $$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)|$$

$$\le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

"充分性" 证明从略 .

内容小结

1. 数列极限的 “$\varepsilon - N$” 定义及应用

2. 收敛数列的性质:

唯一性；有界性；保号性;

任一子数列收敛于同一极限

3. 极限存在准则:

夹逼准则；单调有界准则；柯西准则

思考与练习

1. 如何判断极限不存在?

方法1. 找一个趋于∞的子数列;

方法2. 找两个收敛于不同极限的子数列.

2. 已知 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + 2x_n \ (n = 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 时 下述作法是否正确? 说明理由.

,

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cancel{=} a$, 由递推式两边取极限得

$$a = 1 + 2a \Longrightarrow a = -1$$

不对! 此处 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

作业

P32　1 (2) , (3)　(4) ,　3　,　4

7 (2), (4), (6)

8 (2), (4), (5)

9 (1), (3), 10, 15

备用题

1. 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\ (n=1,2,\cdots)$，且 $x_1>0$，$a>0$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

利用极限存在准则

解： $\because x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\leq\frac{1}{2}(1+\frac{a}{a})=1$$

$\therefore$数列单调递减有下界，故极限存在，设 $\lim_{n\to\infty} x_n=A$

则由递推公式有 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})\Longrightarrow A=\pm\sqrt{a}$

$\because\ x_1>0,\ \therefore\ x_n>0$，故 $\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$

2. 设 $a_i \ge 0\ (i=1,2,\cdots)$，证明下述数列有极限 .

$$x_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

证: 显然 $x_n \le x_{n+1}$，即 $\{x_n\}$ 单调增, 又

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+a_k)-1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} = 1 - \frac{1}{1+a_1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} < 1$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

“拆项相消”法