第三节

函数的极限

对 $y = f(x)$, 自变量变化过程的六种形式:

(1) $x \to x_0$ (4) $x \to \infty$

(2) $x \to x_0^+$ (5) $x \to +\infty$

(3) $x \to x_0^-$ (6) $x \to -\infty$

本节内容：

一、自变量趋于有限值时函数的极限

二、自变量趋于无穷大时函数的极限

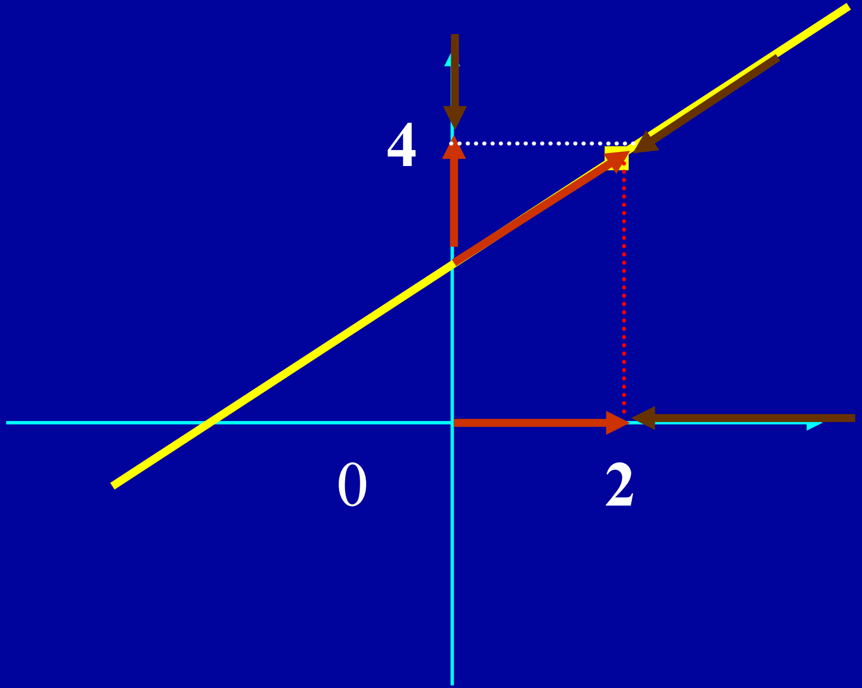
一、自变量趋于有限值时函数的极限

1. $x \to x_0$ 时函数极限的定义

考察函数

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}\ (x\neq 2)$$

当 $x \to 2$ 的变化趋势。



定义1 . 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，

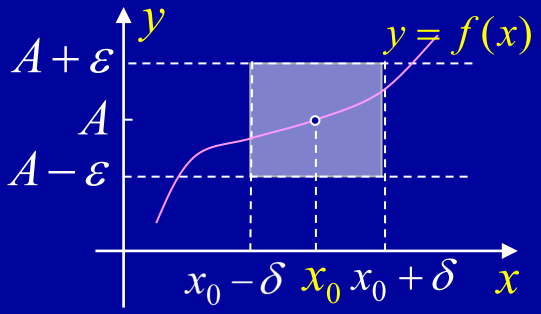
若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \;(\text{当} x \to x_0)$$

即 $$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta) \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

几何解释:



这表明:

$$\boxed{\text{极限存在} \Longrightarrow \text{函数局部有界}}$$

例1. 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ （C 为常数）

证: $|f(x) - A| = |C - C| = 0$

故 $\forall \varepsilon > 0$，对任意的 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

总有 $|C - C| = 0 < \varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

例2. 证明 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

证: $\left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x+1-2\right|=\left|x-1\right|$

故 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<\left|x-1\right|<\delta$ 时，必有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

因此 $$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

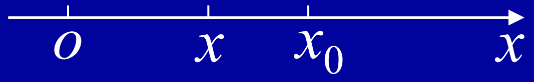
例3. 证明: 当$x_0>0$ 时 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证: $|f(x)-A|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|$

$$\le\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|$$

$\forall\,\varepsilon>0$, 欲使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\,\varepsilon$, 且 $x\ge 0$. 而 $x\ge 0$ 可用$|x-x_0|\le x_0$ 保证. 故取 $\delta=\min\{\sqrt{x_0}\,\varepsilon,\,x_0\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$ 时, 必有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$$



因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$

例4 证明: $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

2. 左极限与右极限

左极限： $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,$ 当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$

时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限： $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

$\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,$ 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$

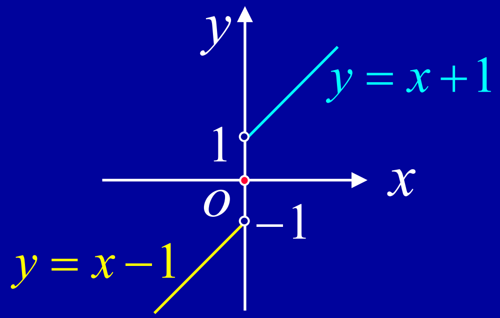
时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理 1 .

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

例5. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0\ \ , & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$



讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在 .

解: 利用定理 3 . 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1$$

显然 $f(0^-)\neq f(0^+)$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在 .

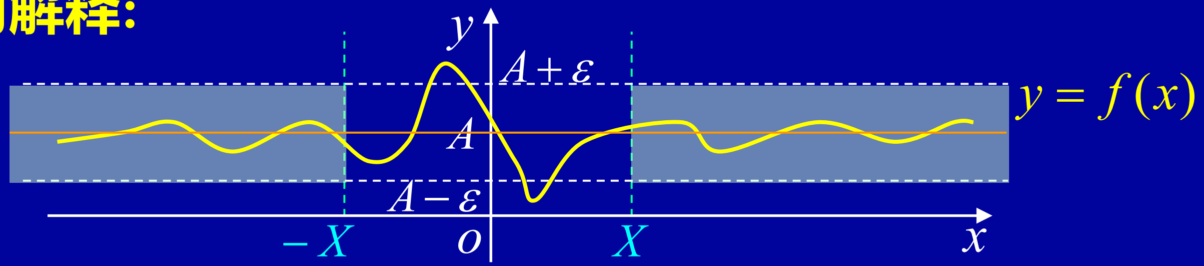
二、自变量趋于无穷大时函数的极限

定义2 . 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 若 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ \ (当 x\to\infty)$$

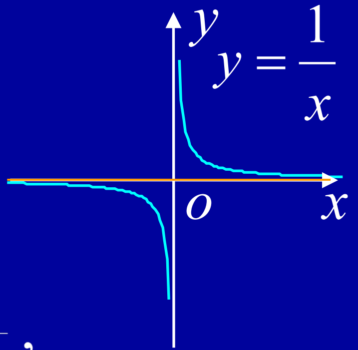
$$\boxed{x<-X 或 x>X} \qquad \boxed{A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon}$$

几何解释:



直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线

例6. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$



证: $\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$

故 $\forall\,\varepsilon>0$, 欲使 $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$, 即 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$,

取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x|>X$时, 就有 $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

注: $y=0$为$y=\frac{1}{x}$的水平渐近线.

两种特殊情况：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \text{当}\ x>X\ \text{时, 有}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \text{当}\ x<-X\ \text{时, 有}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

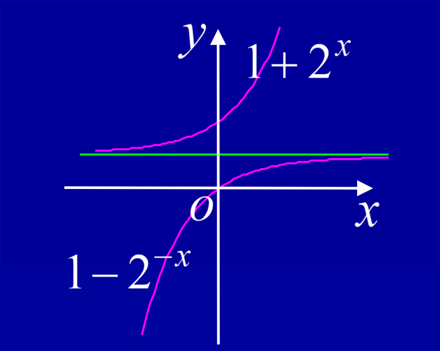
几何意义：直线 $y=A$ 仍是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线

例如, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\quad g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

都有水平渐近线 $y=0$;

又如, $f(x)=1-2^{-x}$, $\quad g(x)=1+2^{x}$

都有水平渐近线 $y=1$.



三. 函数极限的性质

定理 2 （唯一性） 若函数在某极限过程中极限存在，则极限是唯一的。

定理 3 （局部有界性） 若函数在某极限过程中极限存在，则其局部有界。

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$： $\exists M>0$ 及 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$： $\exists M>0$ 及 $\delta>0$, 当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A$： $\exists M>0$ 及 $X>0$, 当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A$ ？

定理 4 （局部保序性） （不等式性质）

（1）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ 且 $A>B,$ 则在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x)>g(x)$

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ 且在 x_0 的某去心邻域内有 $f(x)>g(x)$，则 $A\geqslant B,$

定理 5 （局部保号性）

（1）设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$,

则 $\forall \eta \in (0, A)$, $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$, 有 $f(x) > \eta > 0$.

（2）设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A < 0$,

则 $\forall \eta \in (A, 0)$, $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$, 有 $f(x) < \eta < 0$.

内容小结

1. 函数极限的"$\varepsilon-\delta$" 或"$\varepsilon-X$" 定义及应用

2. 函数极限的性质: 局部有界性、局部保序性、局部保号性定理与左右极限等价定理

思考与练习

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$?

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\le 1 \\ 2x+1, & x>1 \end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在, 则 $a=$ __3__ .

作业

P55 1(2)(4) ; 3 ; 4 ; 5(1)