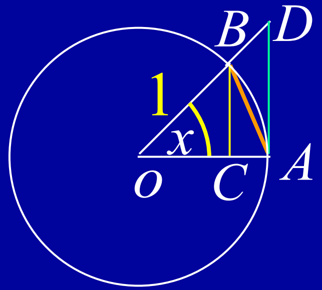
第五节

两个重要极限

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



证: 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,

$\triangle AOB$ 的面积 < 圆扇形AOB的面积 < $\triangle AOD$的面积

即 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

故有 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}\quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

显然有 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1\quad (0<|x|<\frac{\pi}{2})$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, 注 $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解: 令 $t=\arcsin x$, 则 $x=\sin t$, 因此

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=1$$

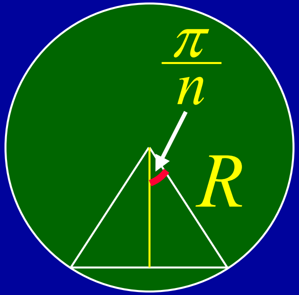
例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$

例5. 已知圆内接正 n 边形面积为

$$A_n=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\pi R^2$.



证: $$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\pi R^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos\frac{\pi}{n}=\pi R^2$$

一般地，

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$

则

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

证: 当 $x>0$ 时, 令 $[x]=n$, 则 $n\le x<n+1$,

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})] = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

当 $x \to -\infty$ 时, 令 $x = -(t+1)$，则 $t \to +\infty$, 从而有

$$\lim_{x\to -\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}[(1+\frac{1}{t})^t(1+\frac{1}{t})] = e$$

故 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

说明: 此极限也可写为 $\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$

第二个重要极限的三种常见形式:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

一般地，若 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$

则 $$\boxed{\lim_{x\to x_0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e}$$

例6. 求 $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解: 令 $t=-x$, 则

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t} = \frac{1}{e}$$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{2}]^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\,(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\,\right]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

$$=e$$

例8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

内容小结

两个重要极限

$$(1)\quad \lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

$$(2)\quad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

$$或\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

注: $\square$ 代表相同的表达式

思考与练习

填空题 (1 ~ 4)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 1 \quad}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = \underline{\quad 0 \quad}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n = \underline{\quad e^{-1} \quad}$;

作业

P55 8(16), (17)

9 (1)，(3), (5)，(7) (9);

10