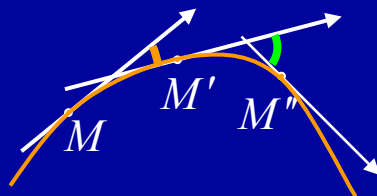


## 第七节

## 平面曲线的曲率

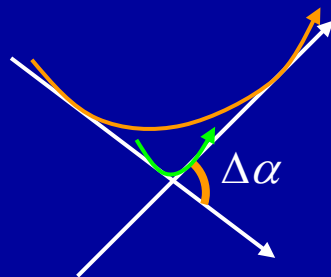
曲线的弯 { 与切线的转角有关  
曲程度 { 与曲线的弧长有关



主要内容:



- 一、弧微分
- 二、曲率及其计算公式
- 三、曲率圆与曲率半径



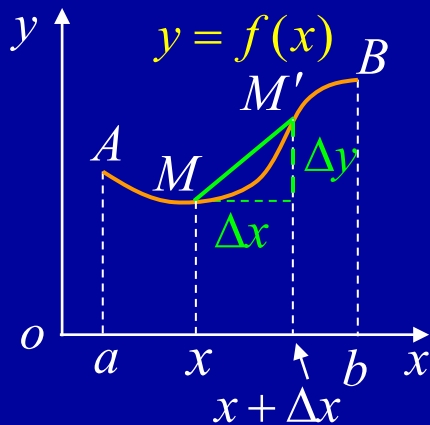
## 一、弧微分

设  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内有连续导数, 其图形为  $\widehat{AB}$ ,

弧长  $s = \widehat{AM} = s(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta x} &= \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x} \\ &= \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} \\ &= \pm \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\therefore s'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (y')^2}$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} = \pm 1$$



$$s'(x) = \sqrt{1 + (y')^2}$$

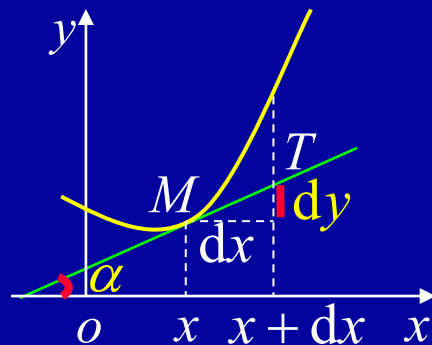
$$\therefore ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad \text{或} \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

若曲线由参数方程表示:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

则弧长微分公式为  $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

**几何意义:**  $ds = |MT|$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$



## 二、曲率及其计算公式

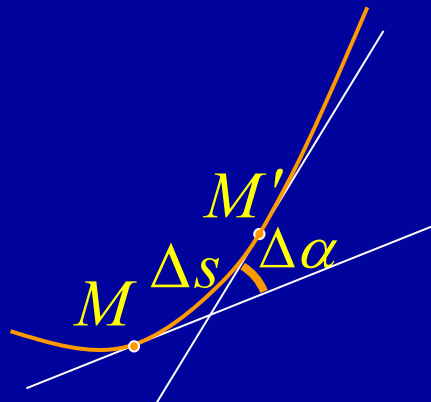
在光滑弧上自点  $M$  开始取弧段, 其长为  $\Delta s$ , 对应切线转角为  $\Delta\alpha$ , 定义

弧段  $\Delta s$  上的平均曲率

$$\bar{K} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

点  $M$  处的曲率

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$



**注意:** 直线上任意点处的曲率为 0 !

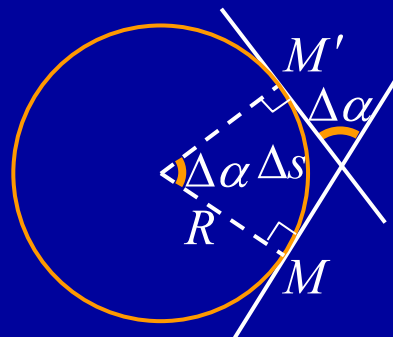


**例1.** 求半径为 $R$ 的圆上任意点处的曲率.

**解:** 如图所示,

$$\Delta s = R\Delta\alpha$$

$$\therefore K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \frac{1}{R}$$



可见:  $R$  愈小, 则 $K$  愈大, 圆弧弯曲得愈厉害;

$R$  愈大, 则 $K$  愈小, 圆弧弯曲得愈小.



## 曲率 $K$ 的计算公式

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$

设曲线弧  $y = f(x)$  二阶可导, 则由

$$\tan \alpha = y' \quad \left( \text{设 } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

得  $\alpha = \arctan y'$

$$d\alpha = (\arctan y')' dx = \frac{y''}{1 + y'^2} dx$$

$$\text{又 } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$\text{故曲率计算公式为 } K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

当  $|y'| \ll 1$  时, 有曲率近似计算公式  $K \approx |y''|$



## 说明:

(1) 若曲线由参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  给出, 则

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

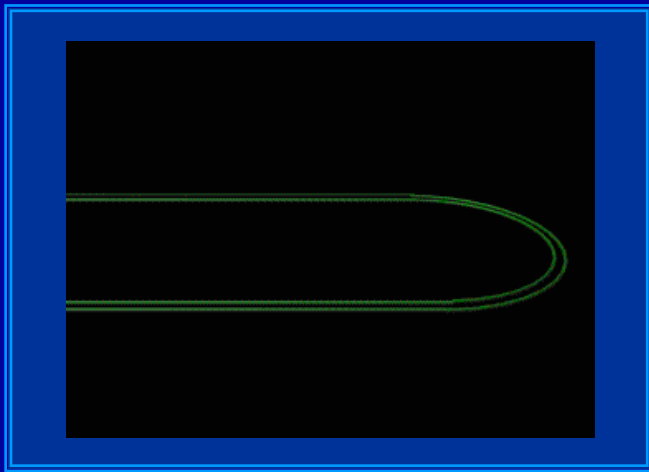
(2) 若曲线方程为  $x = \varphi(y)$ , 则

$$K = \frac{|x''|}{(1 + x'^2)^{3/2}}$$

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$



**例2.** 我国铁路常用立方抛物线  $y = \frac{1}{6Rl}x^3$  作缓和曲线, 其中  $R$  是圆弧弯道的半径,  $l$  是缓和曲线的长度, 且  $l \ll R$ . 求此缓和曲线在其两个端点  $O(0, 0)$ ,  $B(l, \frac{l^2}{6R})$  处的曲率



**说明:**

铁路转弯时为保证行车平稳安全, 离心力必须连续变化, 因此铁道的曲率应连续变化.

点击图片任意处播放\暂停





**例2.** 我国铁路常用立方抛物线  $y = \frac{1}{6Rl}x^3$  作缓和曲线, 其中  $R$  是圆弧弯道的半径,  $l$  是缓和曲线的长度, 且  $l \ll R$ . 求此缓和曲线在其两个端点  $O(0, 0)$ ,  $B(l, \frac{l^2}{6R})$  处的曲率

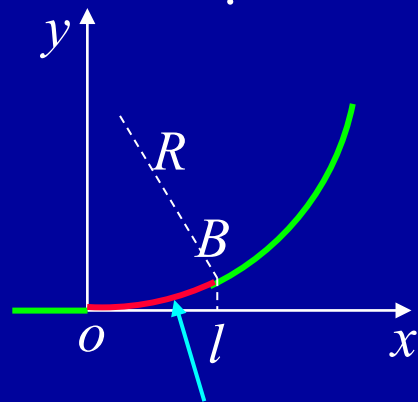
**解:** 当  $x \in [0, l]$  时,

$$\because y' = \frac{1}{2Rl}x^2 \leq \frac{l}{2R} \approx 0$$

$$y'' = \frac{1}{Rl}x$$

$$\therefore K \approx |y''| = \frac{1}{Rl}x$$

显然  $K|_{x=0} = 0; \quad K|_{x=l} \approx \frac{1}{R}$



$$y = \frac{1}{6Rl}x^3$$



**例3.** 求椭圆  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$  在何处曲率最大?

**解:**  $\dot{x} = -a \sin t; \quad \ddot{x} = -a \cos t$   
 $\dot{y} = b \cos t; \quad \ddot{y} = -b \sin t$

$\dot{x}$  表示对参数  $t$  的导数

故曲率为

$$K = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$K \text{ 最大} \iff f(t) = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t \text{ 最小}$$

求驻点:

$$f'(t) = 2a^2 \sin t \cos t - 2b \cos t \sin t = (a^2 - b^2) \sin 2t$$



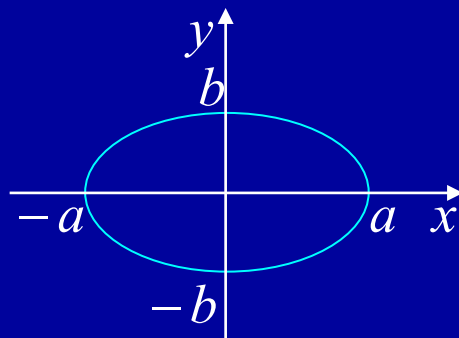
$$f'(t) = (a^2 - b^2) \sin 2t$$

令  $f'(t) = 0$ , 得  $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

计算驻点处的函数值:

$t$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f(t)$	$b^2$	$a^2$	$b^2$	$a^2$	$b^2$

设  $0 < b < a$ , 则  $t = 0, \pi, 2\pi$  时  
 $f(t)$  取最小值, 从而  $K$  取最大值.  
 这说明椭圆在点  $(\pm a, 0)$  处曲率  
 最大.



### 三、曲率圆与曲率半径

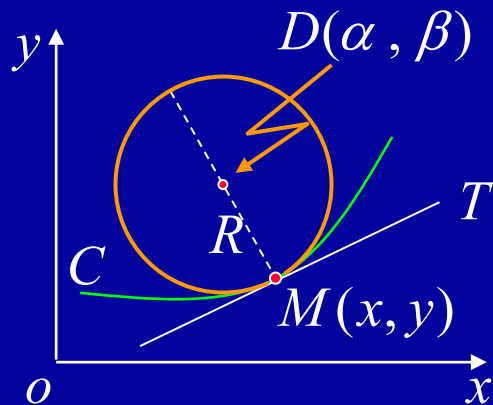
设  $M$  为曲线  $C$  上任一点, 在点  $M$  处作曲线的切线和法线, 在曲线的凹向一侧法线上取点  $D$  使

$$|DM| = R = \frac{1}{K}$$

把以  $D$  为中心,  $R$  为半径的圆叫做曲线在点  $M$  处的**曲率圆** (密切圆),  $R$  叫做**曲率半径**,  $D$  叫做**曲率中心**.

在点  $M$  处曲率圆与曲线有下列密切关系:

- (1) 有公切线;      (2) 凹向一致;      (3) 曲率相同.



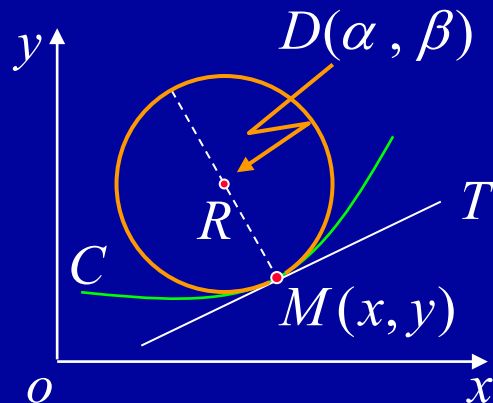
设曲线方程为  $y = f(x)$ , 且  $y'' \neq 0$ , 求曲线上点  $M$  处的曲率半径及曲率中心  $D(\alpha, \beta)$  的坐标公式.

设点  $M$  处的曲率圆方程为

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = R^2$$

故曲率半径公式为

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$



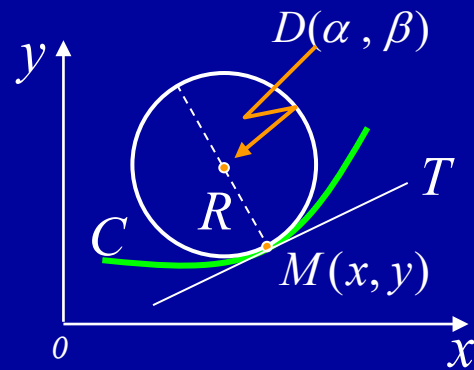
$\alpha, \beta$  满足方程组

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 & (M(x, y) \text{ 在曲率圆上}) \\ y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta} & (DM \perp MT) \end{cases}$$



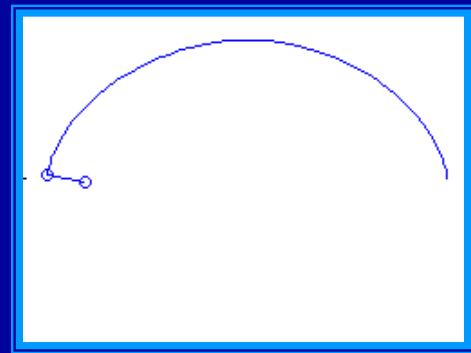
由此可得曲率中心公式

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$



(注意  $y - \beta$  与  $y''$  异号)

当点  $M(x, y)$  沿曲线  $y = f(x)$  移动时, 相应的曲率中心的轨迹  $G$  称为曲线  $C$  的**渐屈线**, 曲线  $C$  称为曲线  $G$  的**渐伸线**. 曲率中心公式可看成渐屈线的参数方程(参数为  $x$ ).



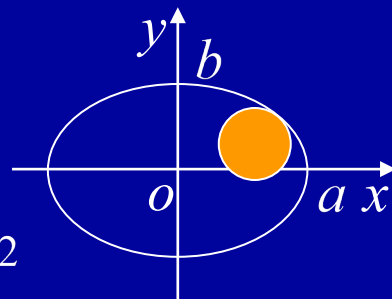
点击图中任意点动画开始或暂停



**例4.** 设一工件内表面的截痕为一椭圆, 现要用砂轮磨削其内表面, 问选择多大的砂轮比较合适?

**解:** 设椭圆方程为  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi, b \leq a)$

由例3可知, 椭圆在  $(\pm a, 0)$  处曲率最大, 即曲率半径最小, 且为



$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab} \bigg|_{t=0} = \frac{b^2}{a}$$

显然, 砂轮半径不超过  $\frac{b^2}{a}$  时, 才不会产生过量磨损, 或有的地方磨不到的问题.



**例5.** 求摆线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  的渐屈线方程.

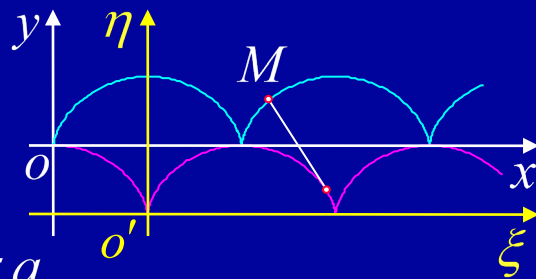
**解:**  $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{\dot{x}} = \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2}$

代入曲率中心公式, 得

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t) \\ \beta = a(\cos t - 1) \end{cases}$$

$$\downarrow \text{令 } t = \pi + \tau, \begin{cases} \xi = \alpha - \pi a \\ \eta = \beta + 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau) \\ \eta = a(1 - \cos \tau) \end{cases} \quad (\text{仍为摆线})$$





## 内容小结

1. 弧长微分  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$  或  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

2. 曲率公式  $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

3. 曲率圆

曲率半径  $R = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

曲率中心  $\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$



## 思考与练习

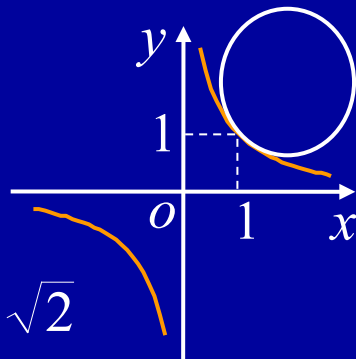
1. 曲线在一点处的曲率圆与曲线有何密切关系?

**答:** 有公切线; 凹向一致; 曲率相同.

2. 求双曲线  $xy=1$  的曲率半径  $R$ , 并分析何处  $R$  最小?

**解:**  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ,  $y'' = \frac{2}{x^3}$ , 则

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1 + \frac{1}{x^4})^{3/2}}{\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{2} (x^2 + \frac{1}{x^2})^{3/2} \geq \sqrt{2}$$



显然  $R|_{x=\pm 1} = \sqrt{2}$  为最小值.

利用  $a^2 + b^2 \geq 2ab$



# 作业

P182 1, 2, 3

