第四节

函数的单调性与极值

一、函数单调性的判定法

二、函数的极值及其求法

三、最大值与最小值问题

一、 函数单调性的判定法

I的内部，记为 I^0

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在区间 I 内可导， 则

(1) 若 $f'(x) \geqslant 0$ (>0) ， $x \in I^0$， 则 $f(x)$ 在 I 上 (严格) 递增；

(2) 若 $f'(x) \leqslant 0$ (<0) ， $x \in I^0$， 则 $f(x)$ 在 I 上 (严格) 递减；

(3) 若 $f'(x) = 0$ ， $x \in I^0$， 则 $f(x) = c$ (常数) $on\ I$

证: 任取 $x_1, x_2 \in I$ $(x_1 < x_2)$ 由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \qquad \xi \in (x_1, x_2) \subset I$$

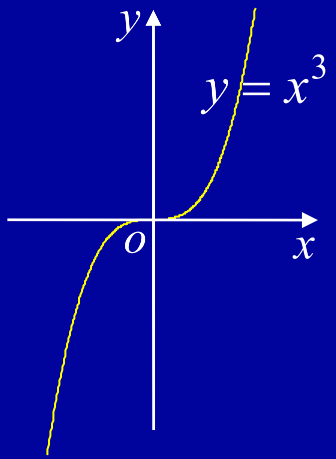
代入(1)(2)(3)的条件，可得相应的结论。 证毕

如果函数在某驻点两边导数同号,
则不改变函数的单调性 .

例如, $y = x^3\,, x \in (-\infty, +\infty)$

$$y' = 3x^2$$

$$y'\big|_{x=0} = 0$$



定理2： 若$f(x)$在区间 I 上连续，在区间 I 内部可导， 则

当$x \in I^0$，$f'(x) \geq 0$ (≤ 0)，且 $f(x)$ 在 I 的任何子区间上，

$f'(x) \neq 0$, $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 在区间 I 上 严格单调增加 (减少) .

证：

定理3 （Darboux 达布）

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$

则存在 $\xi\in(a,b)$， 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)<c<f'(b)$

则存在 $\xi\in(a,b)$， 使得 $f'(\xi)=c$.

证:

推论：设

$f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b)$, 且 $f'(x) \neq 0 \quad in \quad (a,b)$,

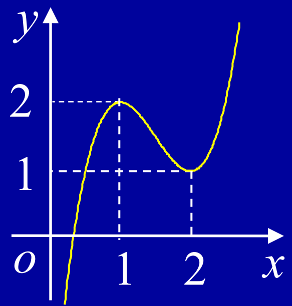
则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调

例1. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解: $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1,\ x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$



故 $f(x)$ 的**单调增**区间为 $(-\infty,1),\ (2,+\infty)$;

$f(x)$ 的**单调减**区间为 $(1,2)$.

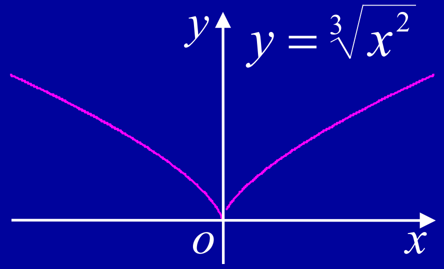
说明:

单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2}\,, x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'\big|_{x=0}=\infty$$



例2. 确定函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解: $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{3}}$

易见不可导的点为 $x=0$, 驻点为 $x=\frac{2}{5}$.

函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/5)$	$2/5$	$(2/5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的**单调增**区间为 $(-\infty,0)$, $(2/5,+\infty)$

单调减区间为 $(0,2/5)$

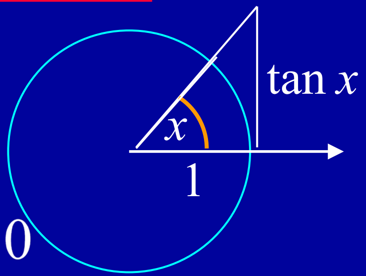
例3. 证明 $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}$.

证: 令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上可导, 且

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

证



因此 $f(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内单调递减,

又 $f(x)$ 在 $\dfrac{\pi}{2}$ 处左连续, 因此 $f(x) \ge f(\dfrac{\pi}{2}) = 0$

从而 $\dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}$, $x \in (0, \dfrac{\pi}{2}]$

例4： 证明： 当 $b > a > e$ 时，$a^b > b^a$

二、函数的极值及其求法

定义: 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义, 若 $f(x)$ 在该邻域内有

$$f(x)<f(x_0)\quad(\text{或 } f(x)>f(x_0))\quad(x\neq x_0)$$

则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值). 并称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点(或极小值点).

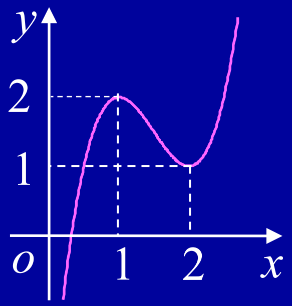
函数的极大值与极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

例如

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$

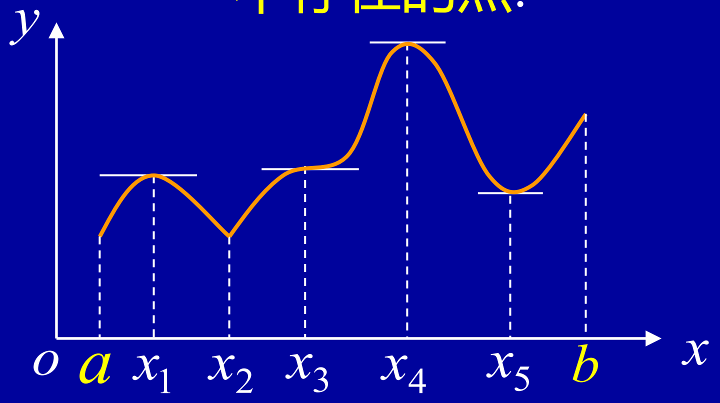
$x=1$ 为极大点，$f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 为极小点，$f(2)=1$ 是极小值



注意: 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



x_1, x_4 为极大点

x_2, x_5 为极小点

x_3 不是极值点

费马(fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \text{ 在 } \cup(x_0) \text{ 有定义,} \\ \text{且 } f(x) \le f(x_0),\ f'(x_0) \text{ 存在} \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

(或 $\ge$)

定理 (极值的必要条件)

设$f(x)$在点x_0处取得极值，且$f'(x_0)$存在，则

$$f'(x_0) = 0$$

定理 1 (极值第一判别法)

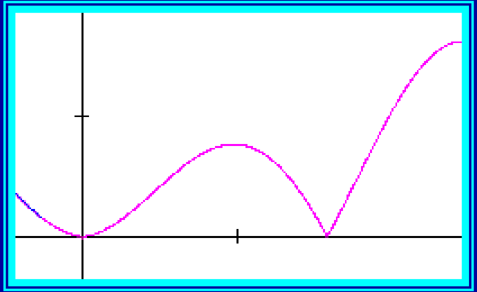
设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续, 且在空心邻域内有导数, 当 x 由小到大通过 x_0 时,

(1) $f'(x)$ "**左正右负**" , 则 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

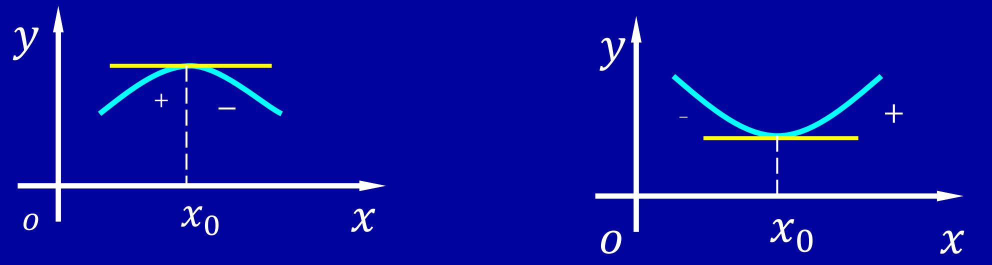
(2) $f'(x)$ "**左负右正**" , 则 $f(x)$ 在 x_0 取极小值;

(3) $f'(x)$ 不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值;

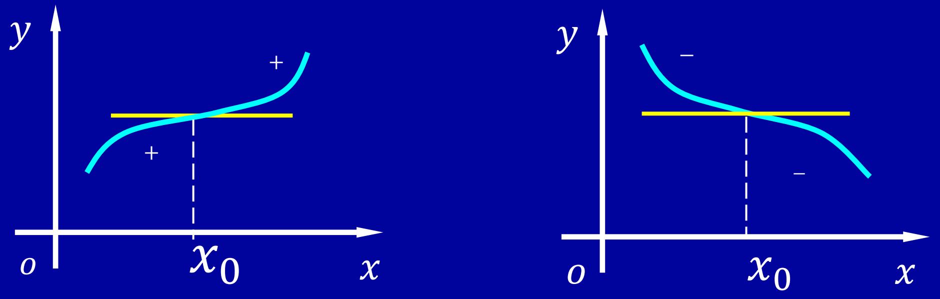
(自证)



点击图中任意处动画播放\暂停



(是极值点情形)



(不是极值点情形)

例5. 求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解: $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{3}}$

易见不可导的点为 $x=0$，驻点为 $x=\frac{2}{5}$.

函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$， 列表讨论如下：

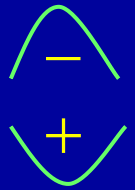
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/5)$	$2/5$	$(2/5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$的极大值为 $f(0)=0$， 极小值 $f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$

定理2 (极值第二判别法) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值 .

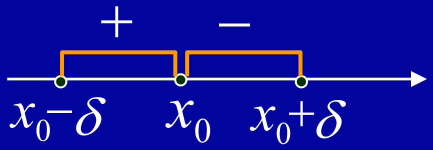


证: (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$f'(x)<0$，



由第一判别法知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证 .

例6. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解: 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2, \qquad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

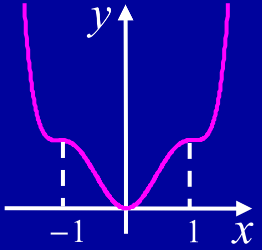
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值 ;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$，故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,

$\therefore\ f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.

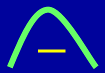


定理3 (判别法的推广) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$

则: 1) 当 n 为偶数时, x_0 为极值点，且

$f^{(n)}(x_0)>0$时, x_0 是极小点；

$f^{(n)}(x_0)<0$时, x_0 是极大点 .



2) 当 n 为奇数时, x_0 不是极值点 .

证: 利用 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式，可得

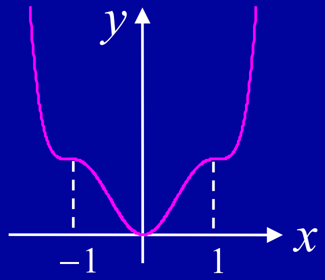
$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

当 x 充分接近 x_0 时, 上式左端正负号由右端第一项确定，故结论正确 .

例如，例2中 $f(x)=(x^2-1)^3+1$

$$f'''(x)=24x(5x^2-3),\quad f'''(\pm1)\neq 0$$

所以 $x=\pm1$ 不是极值点 .

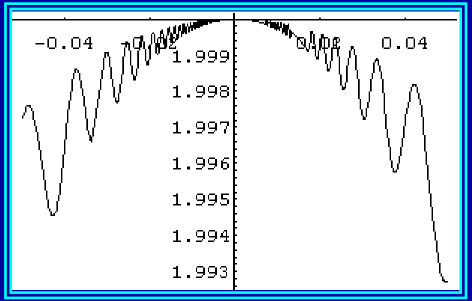


说明： 极值的判别法(定理1 ~ 定理3) **都是充分的.**

当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

例如：

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$



$f(0)=2$ 为极大值 , 但不满足定理1 ~ 定理3 的条件.

三、最大值与最小值问题

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, **则其最值只能在极值点或端点处达到 .**

求函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) 内的极值可疑点

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{\,f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

最小值

$$m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内只有一个极值可疑点时,

  若在此点取极大 (小)值 , 则也是最大(小)值 .

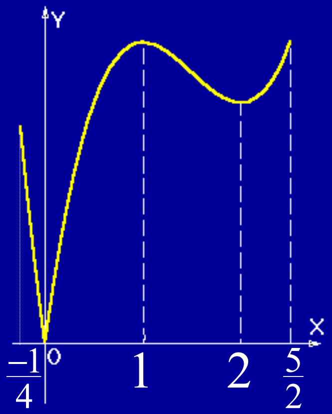
- 当 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上**单调**时, 最值必在端点处达到.

- 对应用问题 , 有时可根据实际意义判别求出的

  可疑点是否为最大 值点或最小值点 .

例7. 求函数 $f(x)=\left|\,2x^3-9x^2+12x\right.$

上的最大值和最小值 .



解: 显然 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le \\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0 \\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$$f(\tfrac{-1}{4})=3\tfrac{19}{32},\ f(0)=0,\ f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(\tfrac{5}{2})=5$$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0 ; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值 5.

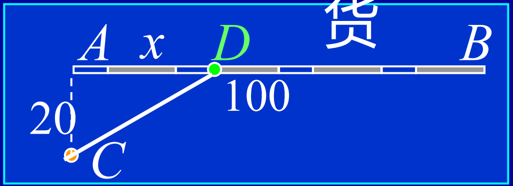
例7. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间$[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$上的最大值和最小值 .

说明:

令 $\varphi(x)=f^2(x)$

由于 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 最值点相同 , 因此也可通过 $\varphi(x)$ 求最值点. (自己练习)

例8. 铁路上 AB 段的距离为100 km , 工厂 C 距 A 处20 Km , $AC \perp AB$, 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5 , 为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省, 问 D 点应如何选取?



解: 设 $AD = x$ (km), 则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$, 总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \qquad (0 \le x \le 100)$$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right), \qquad y'' = 5k\frac{400}{(400 + x^2)^{3/2}}$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 15$, 又 $y''\big|_{x=15} > 0$, 所以 $x = 15$ 为唯一的极小点 , 从而为最小点 , 故 $AD = 15$ km 时运费最省 .

例9. 把一根直径为 d 的圆木锯成矩形梁，问矩形截面的高 h 和 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解: 由力学分析知矩形梁的抗弯截面模量为

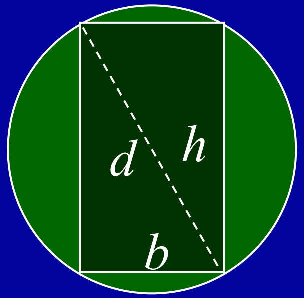
$$w=\tfrac{1}{6}bh^2=\tfrac{1}{6}b(d^2-b^2),\qquad b\in(0,d)$$

令 $\quad w'=\tfrac{1}{6}(d^2-3b^2)=0$

得 $\quad b=\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,d$

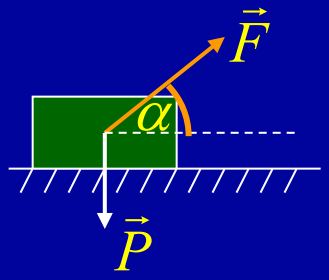
从而有 $\quad h=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,d$

即 $\quad d:h:b=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$



由实际意义可知，所求最值存在，驻点只一个，故所求结果就是最好的选择 .

例10. 设有质量为 5 kg 的物体置于水平面上，受力 $\vec{F}$ 作用开始移动，设摩擦系数 $\mu = 0.25$，问力 $\vec{F}$ 与水平面夹角 α 为多少时才可使力 $\vec{F}$ 的大小最小?



解: 克服摩擦的水平分力 $F_x = F\cos\alpha$

正压力 $\quad P - F_y = 5g - F\sin\alpha$

$$\therefore \quad F\cos\alpha = \mu(5g - F\sin\alpha)$$

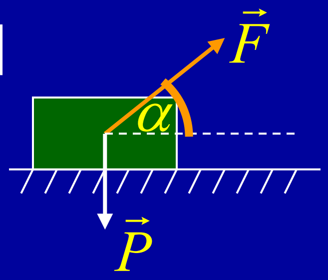
即
$$F = \frac{5\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

令 $\quad \varphi(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$

则问题转化为求 $\varphi(\alpha)$ 的最大值问题 .

解: ……

即 $F = \dfrac{5\mu g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$



令 $\varphi(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$

则问题转化为求$\varphi(\alpha)$的最大值问题 .

$$\varphi'(\alpha) = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha$$

$$\varphi''(\alpha) = -\cos\alpha - \mu\sin\alpha$$

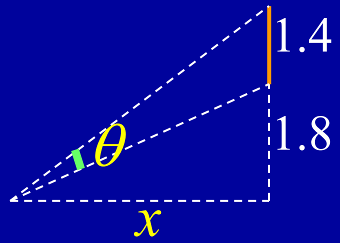
令 $\varphi'(\alpha) = 0$, 解得

$$\alpha = \arctan\mu = \arctan 0.25 = 14^\circ 2'$$

而 $\varphi''(\alpha) < 0$, $\therefore \alpha = 14^\circ 2'$ 时 $\varphi(\alpha)$ 取最大值,

因而 F 取最小值 .

例11. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛1.8 m，问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角 θ 最大)？



解: 设观察者与墙的距离为 x m，则

$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}$$

令 $\theta' = 0$，得驻点 $x = 2.4 \in (0, +\infty)$

根据问题的实际意义，观察者最佳站位存在，驻点又唯一，因此观察者站在距离墙 2.4 m 处看图最清楚.

内容小结

1. 可导函数单调性判别

$f'(x) > 0, x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上严格单调递增

$f'(x) < 0, x \in I \Longrightarrow f(x)$ 在 I 上严格单调递减

2. 连续函数的极值

(1) 极值可疑点 : 使导数为0 或不存在的点

(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由正变负 $\Longrightarrow f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由负变正 $\Longrightarrow f(x_0)$ 为极小值

(3) 第二充分条件

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0) \text{ 为极大值}\ -$$

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0) \text{ 为极小值}\ +$$

(4) 判别法的推广

3. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找；

应用题可根据问题的实际意义判别 .

思考与练习

1. 设在$[0,1]$ 上 $f''(x)>0$, 则$f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (**B**)

$(A)\quad f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

$(B)\quad f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

$(C)\quad f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

$(D)\quad f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

提示: 利用$f'(x)$ 单调增加 , 及

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\quad (0<\xi<1)$$

2. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 a 处(B).

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$；

(B) $f(x)$ 取得极大值；(C) $f(x)$ 取得极小值；

(D) $f(x)$ 的导数不存在.　　(L. P500 题4)

提示: 利用极限的保号性 .

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (D).

(A) 不可导 ;

(B) 可导, 且 $f'(0)\neq 0$;

(C) 取得极大值 ;

(D) 取得极小值 .

提示: 利用极限的保号性 .

4. 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0（ A ）

(A) 取得极大值；

(B) 取得极小值；

(C) 在某邻域内单调增加；

(D) 在某邻域内单调减少

提示: 将 $f(x)$ 代入方程，令 $x=x_0$，得

$$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$$

作 业

P131 11,12(1)(4),13(3)(6), 16(2)(4)

P163 1(1)(4), 3

备用题 **1．** 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

证明： 令 $F(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ ，则 $F(0) = 0,\ F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\because \quad F'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

$$F''(x) = -\sin x < 0$$

$\therefore$ $F(x)$ 是**凸**函数

$$\therefore \quad F(x) \ge \min\{ F(0), F(\frac{\pi}{2}) \} = 0$$ (自证)

即 $\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$