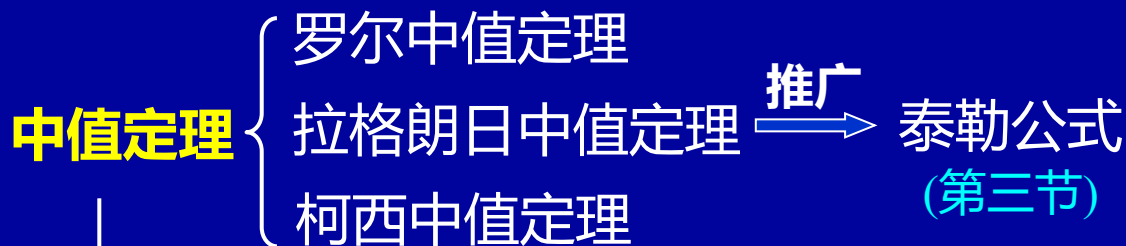


第三章

微分中值定理 与导数的应用



应用

- 研究函数性质及曲线性态
- 利用导数解决实际问题



第一节

中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

二、拉格朗日中值定理

三、柯西(Cauchy)中值定理



函数的极值

定义 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点某邻域内有定义, 若 $f(x)$ 在该邻域内有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或} \quad f(x) > f(x_0)) \quad (x \neq x_0)$$

则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值). 并称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点(或极小值点).

函数的极大值与极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

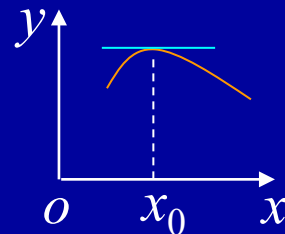


一、罗尔(Rolle)定理

费马(fermat)引理



$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \text{ 在 } \cup(x_0) \text{ 有定义,} \\ \text{且 } f(x) \leq f(x_0), f'(x_0) \text{ 存在} \\ \text{(或 } \geq \text{)} \end{array} \right\} \implies f'(x_0) = 0$$



证: 设 $\forall x_0 + \Delta x \in \cup(x_0), f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$,

$$\text{则 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} f'_-(x_0) \geq 0 & (\Delta x \rightarrow 0^-) \\ f'_+(x_0) \leq 0 & (\Delta x \rightarrow 0^+) \end{cases} \implies f'(x_0) = 0$$

证毕



罗尔 (Rolle) 定理

$y = f(x)$ 满足:

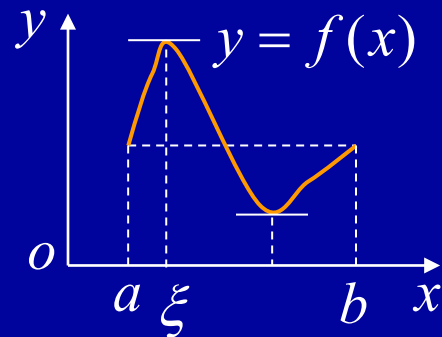
- (1) 在区间 $[a, b]$ 上连续
- (2) 在区间 (a, b) 内可导
- (3) $f(a) = f(b)$

\implies 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

证: 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故在 $[a, b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m .

若 $M = m$, 则 $f(x) \equiv M, x \in [a, b]$,

因此 $\forall \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0$.

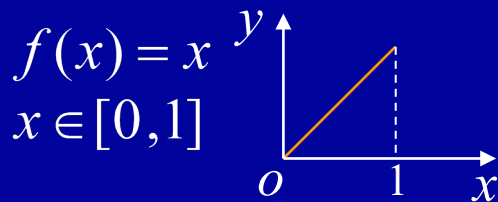
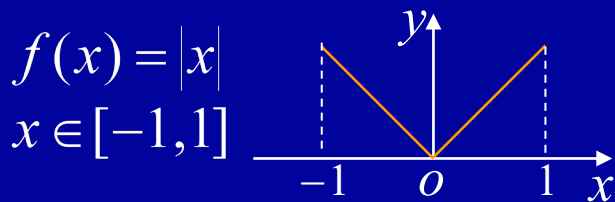
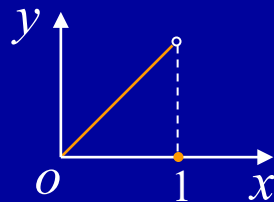


若 $M > m$, 则 M 和 m 中至少有一个与端点值不等, 不妨设 $M \neq f(a)$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = M$, 则由费马引理得 $f'(\xi) = 0$.

注意:

1) 定理条件不全具备, 结论不一定成立. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$



2) 定理条件只是充分的. 本定理可推广为

$y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$$

\implies 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

证明提示: 设 $F(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ f(b^-), & x = b \end{cases}$

证 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理.



例1. 证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 有且仅有一个小于1 的正实根 .

证: 1) 存在性 .

设 $f(x) = x^5 - 5x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 且 $f(0) = 1, f(1) = -3$. 由介值定理知存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $f(x_0) = 0$, 即方程有小于 1 的正根 x_0 .

2) 唯一性 .

假设另有 $x_1 \in (0, 1), x_1 \neq x_0$, 使 $f(x_1) = 0, \because f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件, \therefore 在 x_0, x_1 之间至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

但 $f'(x) = 5(x^4 - 1) < 0, x \in (0, 1)$, 矛盾, 故假设不真!

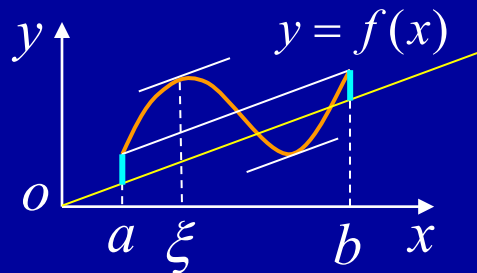


二、拉格朗日中值定理

$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导



⇒ 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$



显然, $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$\varphi(a) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = \varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点

$\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即定理结论成立. **证毕**



拉格朗日中值定理的**有限增量形式**:

令 $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$, 则

$$\Delta y = f'(\underbrace{x_0 + \theta \Delta x}_{\xi}) \Delta x \quad (0 < \theta < 1)$$

推论: 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上必为常数.

证: 在 I 上任取两点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 在 $[x_1, x_2]$ 上用拉日中值公式, 得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0 \quad (x_1 < \xi < x_2)$$

$$\therefore f(x_2) = f(x_1)$$

由 x_1, x_2 的任意性知, $f(x)$ 在 I 上为常数.



例2. 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1].$

证: 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在 $(-1, 1)$ 上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C$ (常数)

令 $x = 0$, 得 $C = \frac{\pi}{2}.$

又 $f(\pm 1) = \frac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域 $[-1, 1]$ 上成立.

经验: 欲证 $x \in I$ 时 $f(x) = C_0$, 只需证在 I 上 $f'(x) \equiv 0$,
且 $\exists x_0 \in I$, 使 $f(x_0) = C_0.$

自证: $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$



例3. 证明不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)$.

证: 设 $f(t) = \ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 因此应有

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0), \quad 0 < \xi < x$$

即
$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}, \quad 0 < \xi < x$$

因为
$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x$$

故
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)$$



三、柯西(Cauchy)中值定理



$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导
- (3) 在开区间 (a, b) 内 $F'(x) \neq 0$

⟹ 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析: $F(b)-F(a) = F'(\eta)(b-a) \neq 0 \quad a < \eta < b$

要证 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F'(\xi) - f'(\xi) = 0 \quad \phi'(\xi)$

⟹ $\phi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F(x) - f(x)$



证: 作辅助函数 $\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F(x) - f(x)$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$\varphi(a) = \frac{f(b)F(a) - f(a)F(b)}{F(b) - F(a)} = \varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗?

$$\begin{aligned} \because f(b) - f(a) &= f'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b) \\ F(b) - F(a) &= F'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{两个 } \xi \text{ 不} \\ \text{一定相同} \end{array}$$

上面两式相比即得结论. **错!**



柯西定理的几何意义:

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

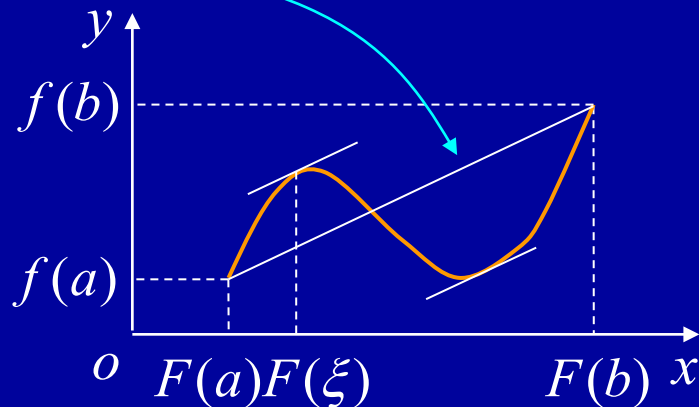
弦的斜率

切线斜率

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

注意:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{F'(t)}$$



例4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

证: 结论可变形为

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} = \frac{f'(x)}{(x^2)'} \Big|_{x=\xi}$$

设 $F(x) = x^2$, 则 $f(x), F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即
$$f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$$



例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

证: 法1 用柯西中值定理. 令

$$f(x) = \sin \ln x, \quad F(x) = \ln x$$

则 $f(x), F(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足柯西中值定理条件,

因此

$$\frac{f(e) - f(1)}{F(e) - F(1)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \quad \xi \in (1, e)$$

即

$$\sin 1 = \frac{\frac{1}{\xi} \cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \cos \ln \xi$$

分析:

$$\sin 1 = \cos \ln \xi \iff \frac{\sin \ln e - \sin \ln 1}{\ln e - \ln 1} = \frac{\frac{1}{\xi} \cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}}$$



例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

法2 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

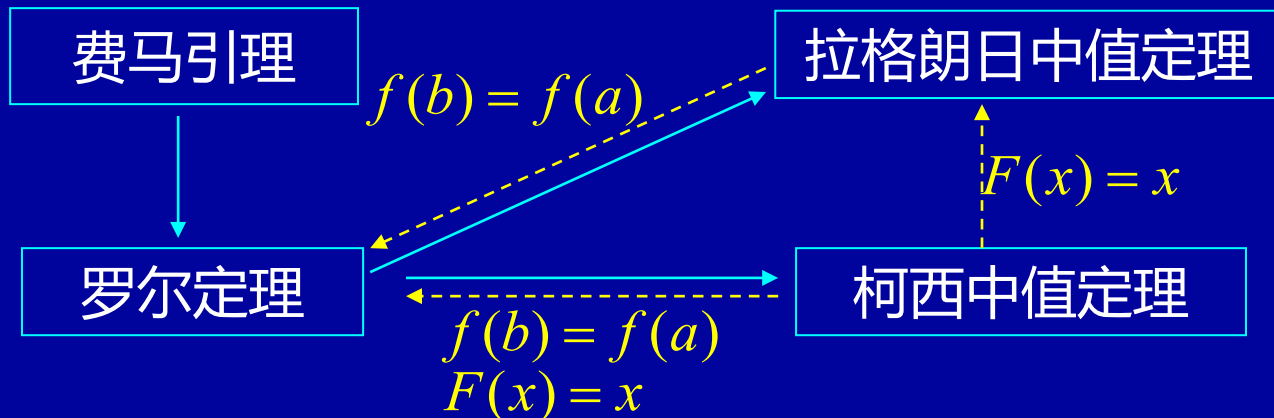
则 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足罗尔中值定理条件,
因此存在 $\xi \in (1, e)$, 使

$$\begin{array}{c} f'(\xi) = 0 \\ \downarrow \\ f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x} \\ \sin 1 = \cos \ln \xi \end{array}$$



内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



2. 微分中值定理的应用

- (1) 证明恒等式
- (2) 证明不等式
- (3) 证明有关中值问题的结论

关键:
利用逆向思维
设辅助函数



思考与练习

1. 填空题

1) 函数 $f(x) = x^4$ 在区间 $[1, 2]$ 上满足拉格朗日定理条件, 则中值 $\xi = \underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$.

$$\frac{2^4 - 1^4}{2 - 1} = 4\xi^3$$

2) 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x) = 0$ 有 3 个根, 它们分别在区间 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 上.



2. 设 $f(x) \in C[0, \pi]$, 且在 $(0, \pi)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, \pi)$, 使 $f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$.

提示: 由结论可知, 只需证

$$f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \cos \xi = 0$$

即
$$\left[f(x) \sin x \right]' \Big|_{x=\xi} = 0$$

设
$$F(x) = f(x) \sin x$$

验证 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上满足罗尔定理条件.



3. 若 $f(x)$ 可导, 试证在其两个零点间一定有 $f(x) + f'(x)$ 的零点.

提示: 设 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$,

欲证: $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$

只要证 $e^{\xi} f(\xi) + e^{\xi} f'(\xi) = 0$

亦即 $[e^x f(x)]' \Big|_{x=\xi} = 0$

作辅助函数 $F(x) = e^x f(x)$, 验证 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足罗尔定理条件.



4. 思考: 在 $[0, x]$ 上对函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
应用拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0), \quad \xi \in (0, x)$$

即
$$x^2 \sin \frac{1}{x} = (2\xi \sin \frac{1}{\xi} - \cos \frac{1}{\xi})x, \quad \xi \in (0, x)$$

$$\therefore \cos \frac{1}{\xi} = 2\xi \sin \frac{1}{\xi} - x \sin \frac{1}{x}$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $\xi \rightarrow 0^+$, 因此由上式得 $\cos \frac{1}{\xi} \rightarrow 0$.

问是否可由此得出 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} = 0$?

不能! 因为 $\xi = \xi(x)$ 是依赖于 x 的一个特殊的函数.
 $x \rightarrow 0^+$ 表示 x 从右侧以任意方式趋于 0.



作业

P131 3,4,5(2)(4),7,10,18,22



柯西(1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面. 一生发表论文800余篇, 著书 7 本, 《柯西全集》共有 27 卷. 其中最重要的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》, 《无穷小分析概论》, 《微积分在几何上的应用》等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远. 他是经典分析的奠基人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.



柯西, A.-L.



备用题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导, 且 $f(1) = 0$,
求证存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

证: 设辅助函数 $\varphi(x) = x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件,

因此至少存在 $\xi \in (0,1)$, 使得

$$\varphi'(\xi) = n\xi^{n-1}f(\xi) + \xi^n f'(\xi) = 0$$

即
$$nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$



2. 设 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$ 证明对任意 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 有

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$$

证: 不妨设 $0 < x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} & \because f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1) \\ &= [f(x_1 + x_2) - f(x_2)] - [f(x_1) - f(0)] \\ &= f'(\xi_2)x_1 - f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2, 0 < \xi_1 < x_1) \\ &= x_1 f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1) < 0 \quad (\xi_1 < \xi < \xi_2) \\ &\therefore f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

