第五章

定积分

积分学 $\begin{cases} \text{不定积分} \\ \text{定积分} \end{cases}$

第一节
定积分的概念及性质

一、定积分问题举例

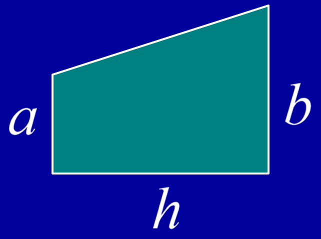
二、 定积分的定义

三、 定积分的性质

一、定积分问题举例

矩形面积 $= a\,h$

梯形面积 $= \dfrac{h}{2}(a+b)$



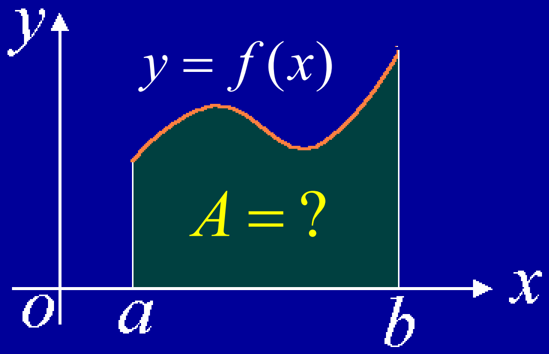
1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

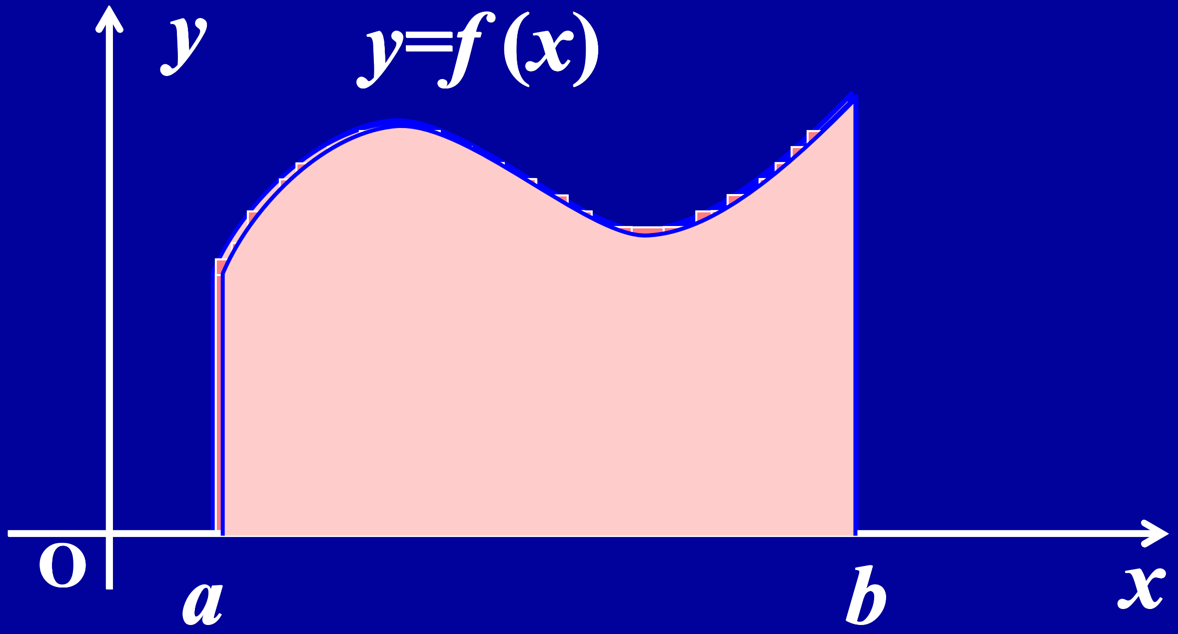
$$y = f(x) \quad (f(x) \ge 0)$$

及 x 轴，以及两直线 $x = a,\ x = b$

所围成，求其面积 A .



怎样求曲边梯形的面积?



分割越细,小矩形面积的和越趋近于曲边梯形的面积.

解决步骤：

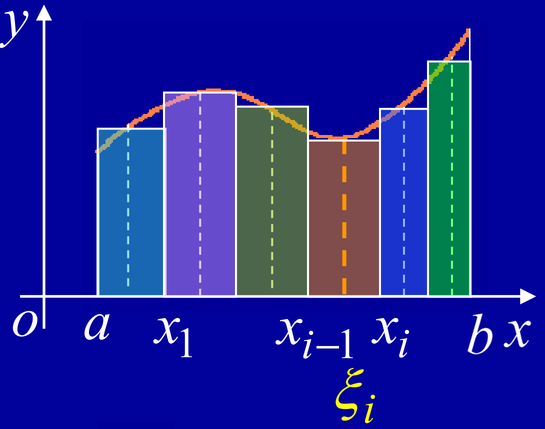
1) 分割. 在区间 $[a\,,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 近似. 在第i 个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}\,, x_i]$

作以$[x_{i-1}\,, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形，并以此小梯形面积近似代替相应窄曲边梯形面积 ΔA_i，得



$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,,\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

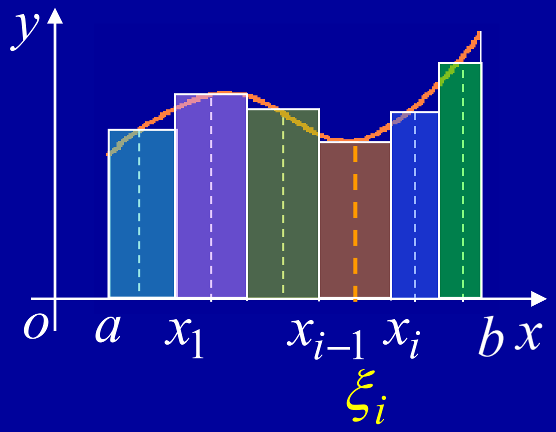
3) **求和.**

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

4) **取极限.** 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, 则曲边梯形面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$



2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t) \in C[T_1, T_2]$，且 $v(t) \ge 0$，求在运动时间内物体所经过的路程 s.

解决步骤:

1) 分割. 在 $[T_1, T_2]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点，将它分成 n 个小段 $[t_{i-1}, t_i]\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，在每个小段上物体经过的路程为 $\Delta s_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

2) 近似. 任取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$，以 $v(\xi_i)$ 代替变速，得

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

3) **求和.**

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

4) **取极限 .**

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \qquad (\lambda = \max_{1\le i\le n}\Delta t_i)$$

上述两个问题的**共性**:

- 解决问题的方法步骤相同 :

  “分割 , 近似 , 求和 , 取极限 ”

- 所求量极限结构式相同:　特殊乘积和式的极限

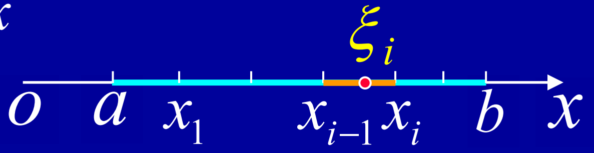
二、定积分定义

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，若对 $[a,b]$ 的**任一种**分法

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，**任取**

$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$，只要 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I，则称此极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**可积**.

$[a,b]$ 称为积分区间

积分上限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

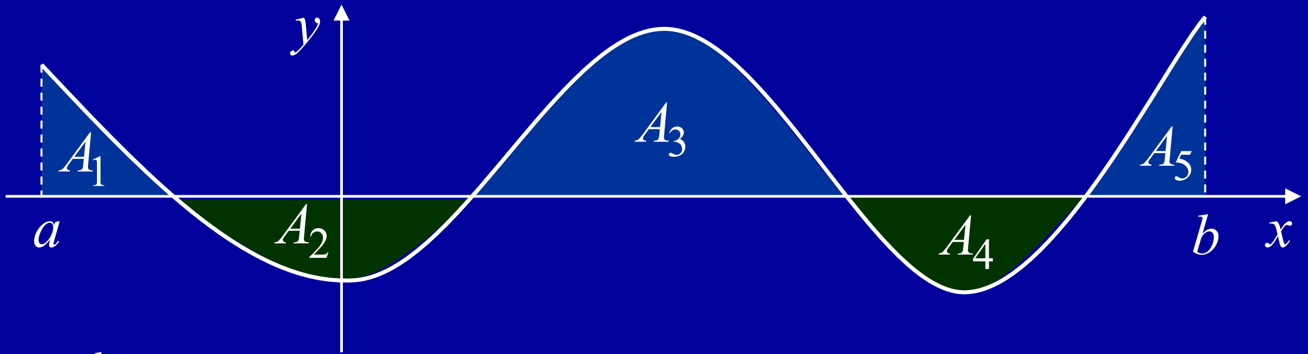
定积分仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

定积分的几何意义:

$f(x) > 0, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x) < 0, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形面积的负值



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

可积的必要条件:

定理1. 若函数 f(x) 在闭区间 [a,b] 上可积，则 f(x) 在 [a,b] 上有界

逆命题不真　　　比如：D(x), [0,1]

可积的充分条件:

定理2. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

定理3. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点

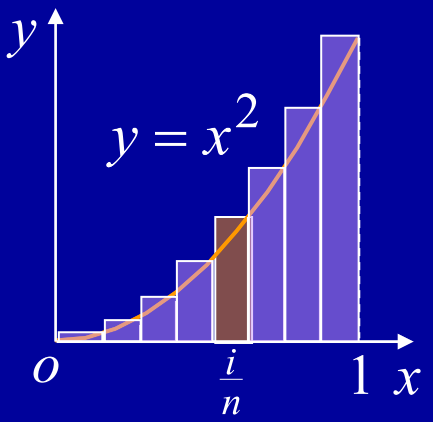
$\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.　　(证明略)

例1. 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

解: 将 $[0,1]$ n 等分, 分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n)$

取 $\xi_i=\frac{i}{n},\ \Delta x_i=\frac{1}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$

则 $f(\xi_i)\Delta x_i=\xi_i^2\Delta x_i=\dfrac{i^2}{n^3}$



注

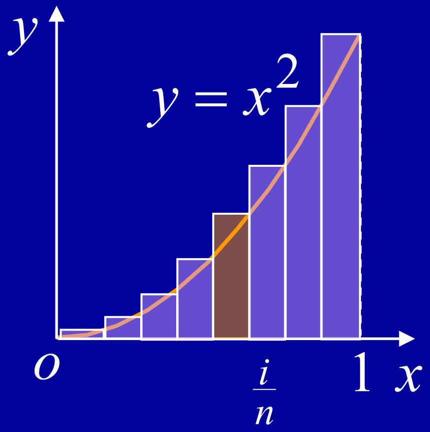
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$\therefore \quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{3}$$



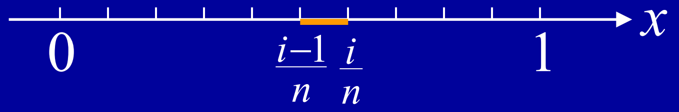
例2. 用定积分表示下列极限:

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} \qquad (2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

解: (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$



$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\Big)^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

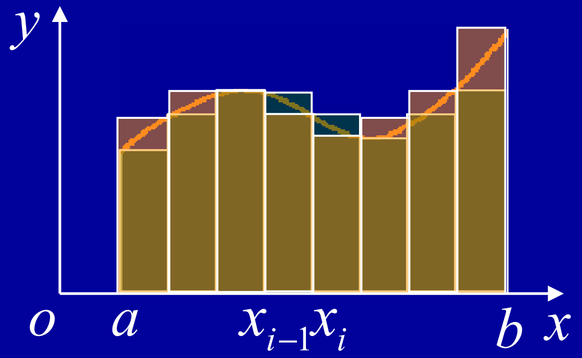
$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x$$

说明: 设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 存在, 根据定积分定义可得如下近似计算方法:

将 $[a\,,\,b]$ 分成 n 等份: $\Delta x=\frac{b-a}{n}$,

$$x_i=a+i\cdot\Delta x\ (i=0,1,\cdots,n)$$

记 $f(x_i)=y_i\ \ (i=0,1,\cdots,n)$



1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx y_0\Delta x+y_1\Delta x+\cdots+y_{n-1}\Delta x$

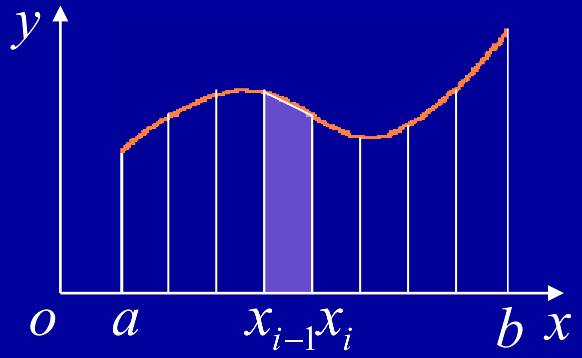
$$=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$$ (左矩形公式)

2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx y_1\Delta x+y_2\Delta x+\cdots+y_n\Delta x$

$$=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$ (右矩形公式)

3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2}[y_{i-1} + y_i]\Delta x$$



$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + (y_1 + \cdots + y_{n-1})\right]$$ (梯形公式)

为了提高精度, 还可建立更好的求积公式, 例如辛普森公式, 复化求积公式等, 并有现成的数学软件可供调用.

三、定积分的性质 (设所列定积分都存在)

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

3. $\int_a^b k f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k 为常数)

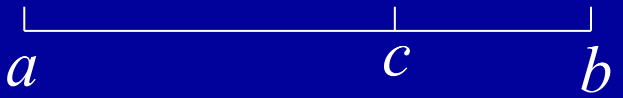
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

证: 左端 $= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$ = 右端

$$5.\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

证: 当$a<c<b$时,



因$f(x)$在$[a,b]$上可积,

所以在分割区间时, 可以永远取 c 为分点, 于是

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\Big\downarrow \text{令 } \lambda \to 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 a, b, c 的相对位置任意时，例如 $a < b < c$,

则有

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

6. 若在 $[a\,,b]$ 上 $f(x)\ge 0$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$.

证: $\because \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$$

推论1. 若在 $[a\,,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

推论2. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad (a<b)$

证: $\because \quad -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

$\therefore \quad -\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

即 $\quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

$6'.$ 若在 $[a\ ,b]$ 上连续，$f(x)\ge 0\ (\le 0)$ 但 $f(x)\not\equiv 0,$

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0\ \ (< 0)$

证:

7. 设 $M=\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]} f(x)$, 则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b)$$

例3. 试证: $1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$.

证: 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则在$(0, \frac{\pi}{2})$ 上, 有

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

$$\therefore \quad f(\frac{\pi}{2}^-) < f(x) < f(0^+)$$

即 $$\frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x$$

即 $$1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$$

8. 积分中值定理

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m, M,

则由**性质7** 可得

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

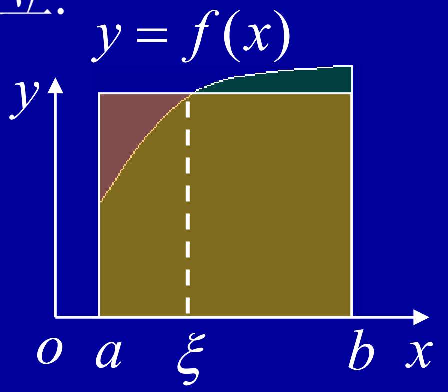
根据闭区间上连续函数介值定理, 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此定理成立.

说明:

- 积分中值定理对 $a<b$ 或 $a>b$ 都成立.
- 可把 $\dfrac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=f(\xi)$



理解为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值. 因

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)$$

故它是有限个数的平均值概念的推广.

(推广的定积分中值定理)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，

则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

例4. 计算从 0 秒到 T 秒这段时间内自由落体的平均速度.

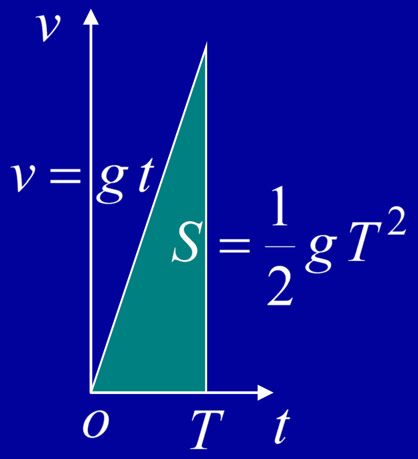
解: 已知自由落体速度为

$$v = gt$$

故所求平均速度

$$\bar{v} = \frac{1}{T-0}\int_0^T g t \,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}gT^2 = \frac{gT}{2}$$



例5 设函数 f(x) 在 [0,1] 上连续，在 (0,1) 内可导，且

$$\frac{1}{2}f(1)=\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$$

证明：存在 $\xi\in$ （0，1） 使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$

例6 设函数 f(x) 在 [0,1] 上连续且递减，证明：

当 $0 < \lambda < 1$ 时，有

$$\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x \geq \lambda \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

内容小结

1. 定积分的定义 — 乘积和式的极限

$\Longrightarrow$ 近似计算 $\begin{cases} \text{矩形公式} \\ \text{梯形公式} \end{cases}$

2. 定积分的性质

3. 积分中值定理

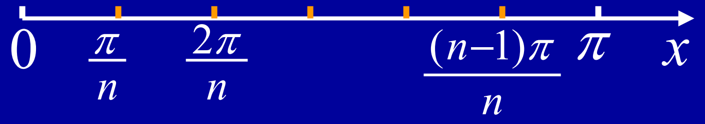
$\Longrightarrow$ 连续函数在区间上的平均值公式

思考与练习

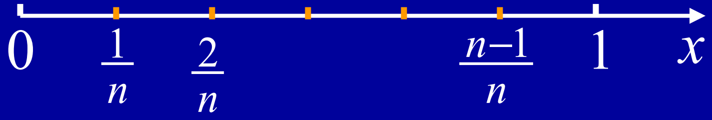
1. 用定积分表示下述极限：

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

解: $$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$



或 $$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^{1}\sin\pi x\,\mathrm{d}x$$



思考1: 如何用定积分表示下述极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}+\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right]$$

提示:

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$

$$\boxed{-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

极限为 0 !

思考2: 如何用定积分表示下述极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$$

(考研98)

解： 将数列适当放大和缩小，以简化成积分和:

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\boxed{\frac{1}{k}}}<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

利用**夹逼准则**可知 $I=\frac{2}{\pi}.$

思考3:

$$J=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}{n+\frac{1}{n+1}}\right]=?$$

提示:由上题

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}$$

故 $$J=I-\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}{n+\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{2}{\pi}-0+0=\frac{2}{\pi}$$

练习：1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right).$

解： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$

提示： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\le$ 原式 $\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}$

左边 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{\frac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\ln 2}=$ 右边

作业