第三节 分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

或 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分公式

选取 u 及 v' (或 $\mathrm{d}v$) 的原则:

1) v 容易求得 ;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\,\mathrm{d}x$ 容易计算 .

例1. 求$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = x,\ v' = \cos x$,

则 $u' = 1,\ v = \sin x$

$\therefore$ 原式 $= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$

$= x\sin x + \cos x + C$

思考: 如何求$\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$?

提示: 令 $u = x^2,\ v' = \sin x$, 则

原式 $= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

$= \cdots$

例2. 求$\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\ln x,\ v'=x$

则 $u'=\frac{1}{x},\qquad v=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore$ $\text{原式}=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

例3. 求 $\int x \arctan x \,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \arctan x,\ v' = x$

则 $u' = \dfrac{1}{1+x^2},\quad v = \dfrac{1}{2}x^2$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$$

例4. 求 $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u=\sin x$, $v'=e^x$,

$u'=\cos x$, $v=e^x$ 则

$\therefore$ 原式 $=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

再令 $u=\cos x$, $v'=e^x$, 则

$u'=-\sin x$, $v=e^x$

$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

故 原式 $=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

说明: 也可设 $u=e^x, v'$ 为三角函数 , 但两次所设类型必须一致 .

解题技巧: 选取 u 及 v' 的一般方法:

把被积函数视为两个函数之积，按 “**反对幂指三**” 的顺序, 前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数
对: 对数函数
幂: 幂函数
指: 指数函数
三: 三角函数

例5. 求 $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \arccos x$, $v' = 1$, 则

$$u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x$$

$$原式 = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$= x \arccos x - \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} \, \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

例6. 求 $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \ln\cos x$, $v' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ，则

$$u' = -\tan x, \quad v = \tan x$$

$$\text{原式} = \tan x \cdot \ln\cos x + \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tan x \cdot \ln\cos x + \tan x - x + C$$

例7. 求$\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令$\sqrt{x}=t$, 则$x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

$$原式=2\int t\,e^{t}\,\mathrm{d}t$$

$\Big\downarrow$ 令$u=t$, $v'=e^{t}$

$$=2(t\,e^{t}-e^{t})+C$$

$$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

例8. 求$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解: 令 $u=\sqrt{x^2+a^2}$, $v'=1$, 则 $u'=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $v=x$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$

例9. 求$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解: 令$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $v' = 1$, 则$u' = \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $v = x$

$$\therefore\ I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

得递推公式 $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$$

递推公式 $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$

说明: 已知 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ 利用递推公式可求得 I_n.

例如,

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1\right)$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a} + C$$

例10. 证明递推公式

$$I_n = \int \tan^n x \, \mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

证: $I_n = \int \tan^{n-2} x \, (\sec^2 x - 1) \, \mathrm{d}x$

$$= \int \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}(\tan x) - I_{n-2}$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$

注: $I_n \to \cdots \to I_0$ 或 I_1

$$I_0 = x + C, \quad I_1 = -\ln|\cos x| + C$$

说明:

分部积分题目的类型:

1) 直接分部化简积分 ;

2) 分部产生循环式 , 由此解出积分式 ;

(注意: 两次分部选择的 u , v 函数类型不变 ,

解出积分后加 C)

例4

3) 对含自然数 n 的积分, 通过分部积分建立递推公式 .

例11. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\cos x}{x}$, 求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\begin{aligned}\int x f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}f(x)\\ &= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C\\ &= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C\end{aligned}$$

说明: 此题若先求出 $f'(x)$ 再求积分反而复杂.

$$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\cos x + \frac{2\sin x}{x} + \frac{2\cos x}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

例12. 求 $I=\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$

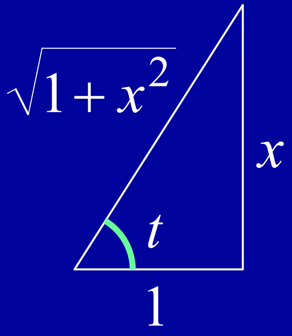
解法1 先换元后分部

令 $t=\arctan x$, 即$x=\tan t$, 则

$$I=\int \frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int e^t \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t \sin t-\int e^t \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=e^t \sin t+e^t \cos t-\int e^t \cos t\,\mathrm{d}t$$



故 $I=\dfrac{1}{2}(\sin t+\cos t)e^t+C$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right]e^{\arctan x}+C$$

解法2 用分部积分法

$$I=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x\,e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}e^{\arctan x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}(1+x)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C$$

内容小结

分部积分公式 $\int u\,v'\,\mathrm{d}x = u\,v - \int u'v\,\mathrm{d}x$

1. 使用原则： v 易求出, $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 易积分

2. 使用经验：“**反对幂指三**” ，前 u 后 v'

3. 题目类型：

   分部化简； 循环解出; 递推公式

4. 计算格式：

$$\begin{array}{ccc} u & & u' \\ & \searrow + & \Big|\ -\int \\ v' & & v \end{array}$$

例13. 求 $I=\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$

解: 令 $t=\ln x$, 则 $x=e^t$, $\mathrm{d}\,x=e^t\,\mathrm{d}\,t$

$$\therefore\quad I=\int e^t\sin t\,\mathrm{d}\,t \longrightarrow \boxed{=e^t\sin t-\int e^t\cos t\,\mathrm{d}\,t}$$

$$\begin{array}{cccc} \sin t & \cos t & -\sin t & \\ & + \quad - & + & \int \\ e^t & e^t & e^t & \end{array}$$

$$=e^t(\sin t-\cos t)-I$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{2}x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

可用表格法求

多次分部积分

例14. 求 $\int x^3 (\ln x)^4 \,\mathrm{d}x$.

解: 令 $u = \ln x$, 则 $x = e^u$, $\mathrm{d}x = e^u \,\mathrm{d}u$

原式 $= \int e^{3u} u^4 \cdot e^u \,\mathrm{d}u = \int u^4 e^{4u} \,\mathrm{d}u$

u^4	$4u^3$	$12u^2$	$24u$	24	0
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$\mid -\int$
e^{4u}	$\frac{1}{4}e^{4u}$	$\frac{1}{4^2}e^{4u}$	$\frac{1}{4^3}e^{4u}$	$\frac{1}{4^4}e^{4u}$	$\frac{1}{4^5}e^{4u}$

原式 $= \frac{1}{4} e^{4u} \left(u^4 - u^3 + \frac{3}{4} u^2 - \frac{3}{8} u + \frac{3}{32} \right) + C$

$$= \frac{1}{4} x^4 \left(\ln^4 x - \ln^3 x + \frac{3}{4} \ln^2 x - \frac{3}{8} \ln x + \frac{3}{32} \right) + C$$

思考与练习

1. 下述运算错在哪里? 应如何改正?

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \left(\frac{1}{\sin x}\right)' \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= 1 - \int \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \sin x\,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 1, \quad \text{得 } 0 = 1$$

$$\boxed{= \ln\left|\sin x\right| + C}$$

答: 不定积分是原函数族, 相减不应为 0 .

求此积分的正确作法是用换元法 .

2. 求 $I=\int e^{kx}\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$

提示:

$$\begin{array}{ccccc}
\cos(ax+b) & & -a\sin(ax+b) & & -a^2\cos(ax+b) \\
& + & & - & \bigg| \; +\int \\
e^{kx} & & \dfrac{1}{k}e^{kx} & & \dfrac{1}{k^2}e^{kx}
\end{array}$$

作业

备用题. 求不定积分 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解: 方法1 (先分部，再换元)

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}(e^x-1)$$

$$= 2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{(e^x-1)} = 2x\sqrt{e^x-1} - 2\int\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \quad \boxed{-4(u-\arctan u)+C}$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

方法2 (先换元,再分部)

令 $u=\sqrt{e^x-1}$, 则 $x=\ln(1+u^2)$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$

故 $$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2\int\ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4\int\frac{1+u^2-1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$