第二节 微积分的基本公式

一、引例

二、积分上限的函数及其导数

三、牛顿 – 莱布尼兹公式

一、引例

在变速直线运动中, 已知位置函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 之间有关系:

$$s'(t) = v(t)$$

物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}\,t = s(T_2) - s(T_1)$$

这里 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数 .

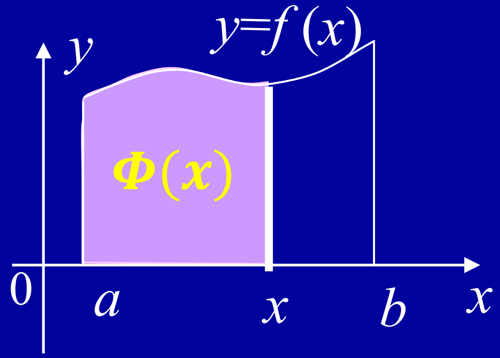
这种积分与原函数的关系在一定条件下具有普遍性 .

二、积分上限的函数及其导数

积分上限函数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,并且设 x 为 $[a,b]$ 上的一点,积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是 x 函数,记为 $\Phi(x)$. 即

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad x\in[a,b]$$



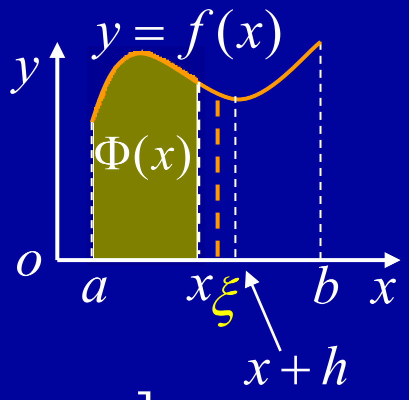
称 $\Phi(x)$ 为积分上限函数或变上限函数.

定理1. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在$[a,\ b]$上可导，且

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$$



证: $\forall\, x, x+h\in[a,b]$，则有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)\quad(x<\xi<x+h)$$

$\because f(x)\in C[a,b]$

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x)$$

推论(原函数存在定理)

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数

说明:

1) 定理 1 证明了连续函数的原函数是存在的. 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路 .

2) 变限积分求导: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例1. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$

解: 原式 $=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2e}$

例2. 确定常数 a , b , c 的值, 使

$$\lim_{x\to 0}\frac{a x-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t}=c\quad(c\neq 0).\qquad \boxed{\frac{0}{0}}$$

解: $\because\ x\to 0$时, $ax-\sin x\to 0$, $c\neq 0$, $\therefore\ b=0.$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c$$

$c\neq 0$, 故 $a=1.$ 又由$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, 得 $c=\frac{1}{2}.$

例3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续, 且 $f(x)>0$, 证明

$$F(x)=\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

只要证

$F'(x)>0$

证: $$F'(x)=\frac{x f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{f(x)\cdot(x-\xi)f(\xi)x}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

$(0<\xi<x)$

$\therefore$ $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增函数.

三、牛顿－莱布尼兹公式

实际上,定义本身不失为定积分的一种计算方法.其基本步骤是:先作积分和,然后求其和式极限.这一过程是比较复杂的,并且应用范围也仅限于少数几种特殊的被积函数.在历史上,寻找定积分新的计算方法,经历了漫长的岁月,直到17世纪中叶,英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼兹创立了微积分基本定理.从而揭示了定积分与不定积分之间的关系,建立了一种切实可行的、简单的计算方法.

定理2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

（牛顿 - 莱布尼兹公式）

证: 根据定理 1, $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 故

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

令 $x = a$, 得 $C = F(a)$, 因此 $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$, 得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \overset{\text{记作}}{=\!=} \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

例4. 计算$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

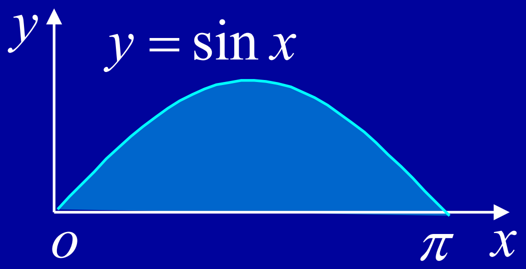
解: $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1)$

$$= \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{7}{12}\pi$$

例5. 计算正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与x轴所围成的面积.

解: $A = \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -[-1-1] = 2$$



例6 计算 $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}\,x$

例7 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1\\ 2x, 1<x\le 2\end{cases}$，求

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\,,x\in[0,2]$$

例8. 汽车以每小时 36 km 的速度行驶，到某处需要减速停车，设汽车以等加速度 $a=-5\ \mathrm{m/s^2}$ 刹车，问从开始刹车到停车走了多少距离?

解: 设开始刹车时刻为 $t=0$，则此时刻汽车速度

$$v_0=36\left(\mathrm{km/h}\right)=\frac{36\times 1000}{3600}\left(\mathrm{m/s}\right)=10\left(\mathrm{m/s}\right)$$

刹车后汽车减速行驶，其速度为

$$v(t)=v_0+at=10-5t$$

当汽车停住时，$v(t)=0$，即 $10-5t=0$，得 $t=2\,(\mathrm{s})$

故在这段时间内汽车所走的距离为

$$s=\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2(10-5t)\,\mathrm{d}t=\left[10t-\tfrac{5}{2}t^2\right]_0^2=10\,(\mathrm{m})$$

内容小结

1. 微积分基本公式

设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $F'(x)=f(x)$， 则有

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}}=F'(\xi)(b-a)}_{\text{牛顿 – 莱布尼兹公式}}=F(b)-F(a)$$

微分中值定理

2. 变限积分求导公式

作　业

备用题

1. 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解: 定积分为常数, 故应用积分法定此常数.

设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=a$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=b$, 则

$$f(x)=x^2-bx+2a$$

$$a=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{b}{2}+2a$$

$$b=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^2=\frac{8}{3}-2b+4a$$

$$\Longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3}\ \Longrightarrow f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

2. 求 $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$ 的递推公式(n为正整数) .

解: 由于 $I_{n-1}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$, 因此

$$I_n-I_{n-1}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

所以 $$I_n=I_{n-1}+\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}\qquad(n=2,3,\cdots)$$

其中 $$I_1=\int_0^{\pi/2}2\cos x\,\mathrm{d}\,x=2$$