第二章

导数与微分

导数思想最早由法国数学家 Ferma 在研究极值问题中提出.

微积分学的创始人:

英国数学家 Newton

德国数学家 Leibniz

微分学
- **导数** —— 描述函数变化快慢
- **微分** —— 描述函数变化程度

都是描述物质运动的工具 (从微观上研究函数)

第一节 导数的概念

一、引例

二、导数的定义

三、单侧导数

四、导数的几何意义

五、函数的可导性与连续性的关系

一、 引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

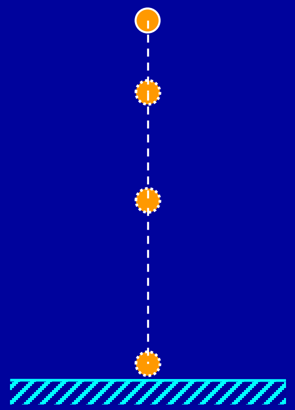
$$s = f(t)$$

则 t_0 到 t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

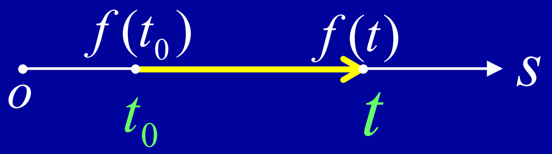
而在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



自由落体运动

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

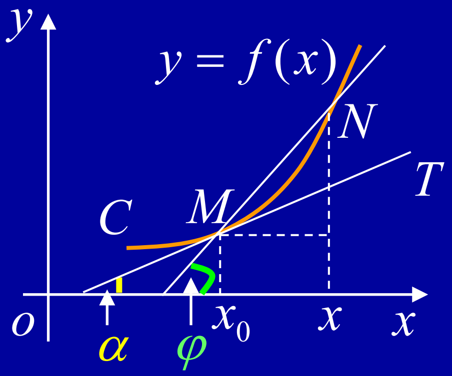


2. 曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 MN 的极限位置 MT

(当$\varphi \to \alpha$时)



切线 MT 的斜率

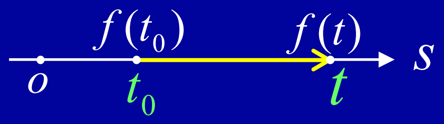
$$k = \tan\alpha = \lim_{\varphi \to \alpha} \tan\varphi$$

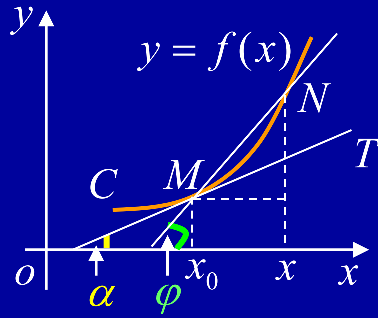
割线 MN 的斜率 $\tan\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

瞬时速度 $v=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

切线斜率 $k=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$





两个问题的**共性:**

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

………

变化率问题

二、导数的定义

定义1. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

若 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta y=f(x)-f(x_0)\\ \Delta x=x-x_0\end{array}}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点x_0处**可导**, 并称此极限为

$y=f(x)$ 在点 x_0 的**导数**. 记作:

$$y'\big|_{x=x_0};\quad f'(x_0);\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0};\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

即 $$y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

运动质点的位置函数 $s = f(t)$

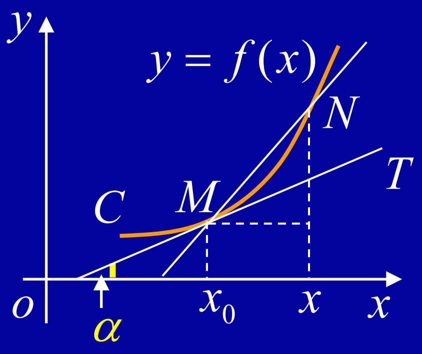
在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)$$



说明: 在经济学中，边际成本率，

边际劳动生产率和边际税率等从数学角度看就是导数.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\Delta y=f(x)-f(x_0)\\ \Delta x=x-x_0\end{array}}$$

若上述极限不存在，就说函数 在点 x_0 不可导.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, 也称 $f(x)$ 在 x_0 的导数为无穷大 .

若函数在开区间 I 内每点都可导, 就称函数在 I 内可导.

此时导数值构成的新函数称为导函数.

记作: y' ; $f'(x)$; $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

注意: $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}\neq\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$

例1. 求函数 $f(x)=C$ (C 为常数) 的导数.

解: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$

即 $\boxed{(C)'=0}$

例2. 求函数 $f(x)=x^n$ $(n\in\mathrm{N}^+)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$

$=n\,a^{n-1}$

说明：

对一般幂函数 $y = x^{\mu}$ （ μ 为常数）

$$\boxed{(x^{\mu})' = \mu\, x^{\mu-1}}$$

（以后将证明）

例如，

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = (x^{-\frac{3}{4}})' = \frac{-3}{4} x^{-\frac{7}{4}}$$

例3. 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解: 令 $h=\Delta x$, 则

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} 2\cos(x+\frac{h}{2})\,\sin\frac{h}{2}\Big/ h$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\,\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

即 $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$

类似可证得 $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$

例4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 的导数.

解: $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

或

$$\boxed{=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{x}}$$

$$=\lim_{h\to0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

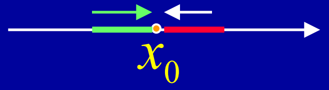
$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

即 $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

三、 单侧导数

定义2. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个**右** (左) 邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\Delta x\to 0^-)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\Delta x\to 0^-)}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



存在, 则称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 处的**右** (**左**) **导数**, 记作

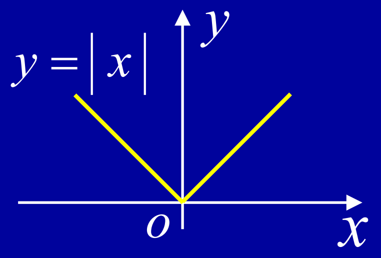
$f'_+(x_0)$ $(f'_-(x_0))$

即 $$f'_{\pm}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0^{\pm}} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

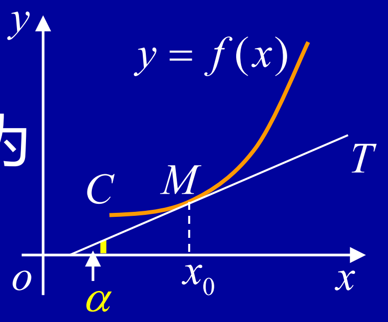
定理1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导的**充分必要条件**是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在，且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

简写为 $\boxed{f'(x_0)\text{ 存在} \Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)}$

例5. 证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导.



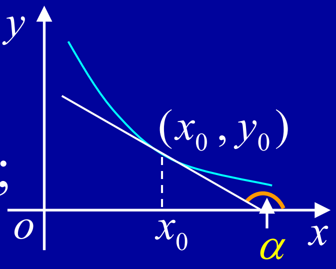
三、 导数的几何意义



曲线$y = f(x)$在点(x_0, y_0)的切线斜率为

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

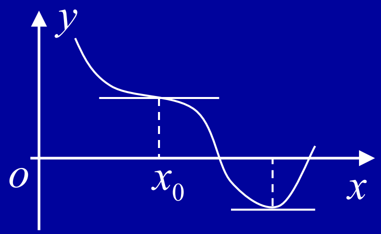
若 $f'(x_0) > 0$, 曲线过 (x_0, y_0) 上升;



若 $f'(x_0) < 0$, 曲线过 (x_0, y_0) 下降;

若 $f'(x_0) = 0$, 切线与 x 轴平行, x_0 称为**驻点**;

若 $f'(x_0) = \infty$, 切线与 x 轴垂直 .



$f'(x_0) \neq \infty$ 时, 曲线在点(x_0, y_0) 处的

切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

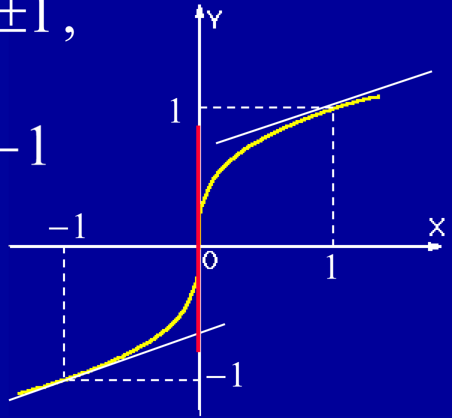
法线方程: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$

例6. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有垂直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

解: $\because\ y'=(\sqrt[3]{x})'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad\therefore\ y'\big|_{x=0}=\infty$,

故在原点 $(0,0)$ 有垂直切线 $x=0$

令 $\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{1}{3}$, 得 $x=\pm 1$, 对应 $y=\pm 1$,



则在点 $(1,1)$, $(-1,-1)$ 处与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$

平行的切线方程分别为

$$y-1=\tfrac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\tfrac{1}{3}(x+1)$$

即 $$x-3y\pm 2=0$$

五、 函数的可导性与连续性的关系

定理2. $f(x)$ 在点 x 处可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x 处连续

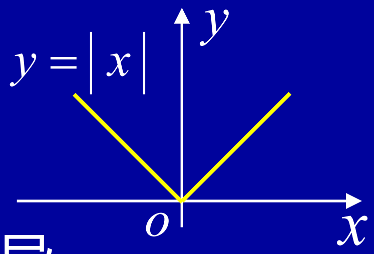
证: 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

存在，因此必有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha\,,\quad 其中 \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

故 $\quad \Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\,\Delta x \xrightarrow{\Delta x\to 0} 0$

所以函数 $y=f(x)$ 在点 x 连续 .



注意: 函数在点 x **连续未必可导**.

反例: $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导.

定理3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**右(左)**导数存在 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 必**右(左)**连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)内可导, 且 $f'_+(a)$ 与$f'_-(b)$ 都存在 , 则称 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上可导.

显然:

$f(x)$在闭区间 $[a,b]$ 上可导 $\Longrightarrow$ $f(x)\in C[a,b]$

内容小结

1. 导数的实质：增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=a$

3. 导数的几何意义：切线的斜率;

4. 可导必连续，但连续不一定可导;

5. 已学求导公式 :

$$(C)'=0; \qquad (x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}; \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\sin x)'=\cos x; \qquad (\cos x)'=-\sin x;$$

6. 判断可导性 $\begin{cases} \text{不连续，一定不可导.} \\ \text{直接用导数定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{cases}$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

区别: $f'(x)$ 是函数， $f'(x_0)$ 是数值;

联系: $f'(x)\big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意: $f'(x_0) \cancel{\overset{?}{=}} [f(x_0)]'$

2. 设 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = \underline{\;-f'(x_0)\;}.$$

3. 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=k_0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\underline{\;k_0\;}$.

4. 若 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，问 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 可导?

解: 由题设 $f(0)=0$

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le|x|$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且

$$f'(0)=0$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x\,, & x<0\\ a\,x\,, & x\ge 0\end{cases}$，问 a 取何值时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，并求出 $f'(x)$.

解: 显然该函数在 $x=0$ 连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a x-0}{x-0}=a$$

故 $a=1$ 时 $f'(0)=1$，此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x\,, & x<0\\ 1\,, & x\ge 0\end{cases}$$

作业

P100： 7（3）（4），10，81（1）， 82(2)，83（2）

备用题

1. 设 $f'(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 求 $f'(1)$.

解: 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

所以 $f'(1)=-2.$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

证: 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $f(0)=0$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.