第一章

函数与极限

分析基础 函数 —— 研究对象
极限 —— 研究方法
连续 —— 研究桥梁

第一节

映射与函数

一、集合

二、映射

三、函数

一、 集合

1. 定义

具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**.

组成集合的事物称为**元素**.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

元素 a 属于集合 M, 记作 $a \in M$.

元素 a 不属于集合 M, 记作 $a \overline{\in} M$ （或 $a \notin M$ ）.

注: M 为数集 $\begin{cases} M^{*} \text{表示} M \text{中排除 0 的集；} \\ M^{+} \text{表示} M \text{中排除 0 与负数的集 .} \end{cases}$

2. 表示法

(1) 列举法：按某种方式列出集合中的全体元素 .

例: 有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}=\{a_i\}_{i=1}^{n}$

自然数集 $\mathrm{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}=\{n\}$

(2) 描述法: $M=\{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$

例: 整数集合 $\mathrm{Z}=\{x \mid x\in\mathrm{N} \text{ 或} -x\in\mathrm{N}^+\}$

有理数集 $\mathrm{Q}=\left\{\dfrac{p}{q} \,\middle|\, p\in\mathrm{Z}, q\in\mathrm{N}^+,\ p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$

实数集合 $\mathrm{R}=\{x \mid x \text{ 为有理数或无理数}\}$

开区间 $(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$

闭区间 $[a, b]=\{x \mid a\le x\le b\}$

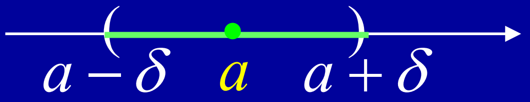
半开区间 $[a,b)=\{x \mid a \le x < b\}$

$$(a,b]=\{x \mid a < x \le b\}$$

无限区间 $[a,+\infty)=\{x \mid a \le x\}$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x \le b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \in \mathrm{R}\}$$



点 a 的 **δ邻域** $\mathrm{U}(a,\delta)=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$

$$=\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

去心 **δ邻域** $\mathring{\mathrm{U}}(a,\delta)=\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$

其中, a 称为邻域中心 , δ称为邻域半径 .

左 δ邻域 : $(a-\delta,a)$, **右 δ邻域 :** $(a,a+\delta)$.

二、 映射

1. 映射的概念

定义 设 X, Y 是两个非空集合, 若存在一个对应规则 f, 使得 $\forall x \in X$, 有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应，则

称 f 为从 X 到 Y 的**映射**, 记作 $f: X \to Y$.

元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的 **像**，记作 $y = f(x)$.

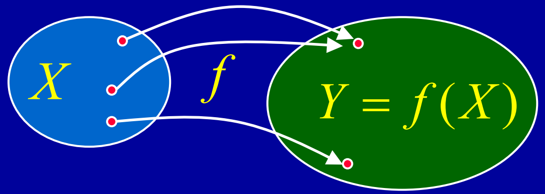
元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的 **原像** .

集合 X 称为映射 f 的**定义域**；

Y 的子集 $f(X)=\{\, f(x) \mid x\in X \,\}$ 称为 f 的 **值域**.

对映射 $f: X\to Y$

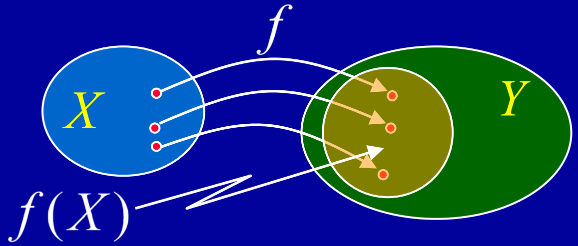
若 $f(X)=Y$, 则称 f 为**满射**;



若 $\forall x_1, x_2\in X, x_1\neq x_2$， 有

$$f(x_1)\neq f(x_2)$$

则称 f 为**单射;**

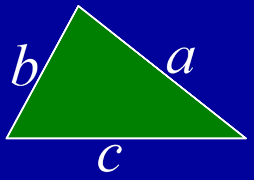


若 f 既是满射又是单射，则称 f 为**双射** 或**一一映射**.

例1. $\forall$三角形 $\in \Delta$ (三角形集合)

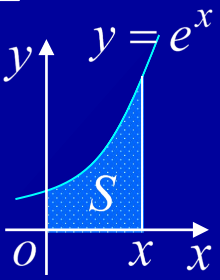
$\downarrow$ 海伦公式

Δ 面积 $S \in (0,+\infty)$ **(满射)**



例2. 如图所示, $\forall\, x \in [0,+\infty)$

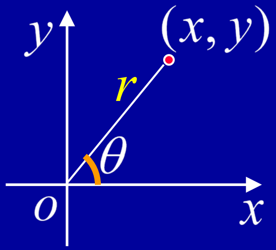
对应阴影部分的面积 $S \in [0,+\infty)$



则在数集 $[0,+\infty)$ 自身之间定义了一种映射 **(满射)**

例3. 如图所示, 则有

$$f:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

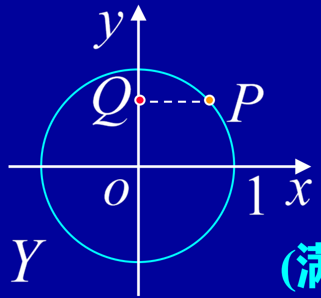


$$(r,\theta) \in [0,+\infty)\times[0,2\pi) \xmapsto{\ f\ } (x,y) \in \mathrm{R}^2$$ **(满射)**

例4. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ (点集)

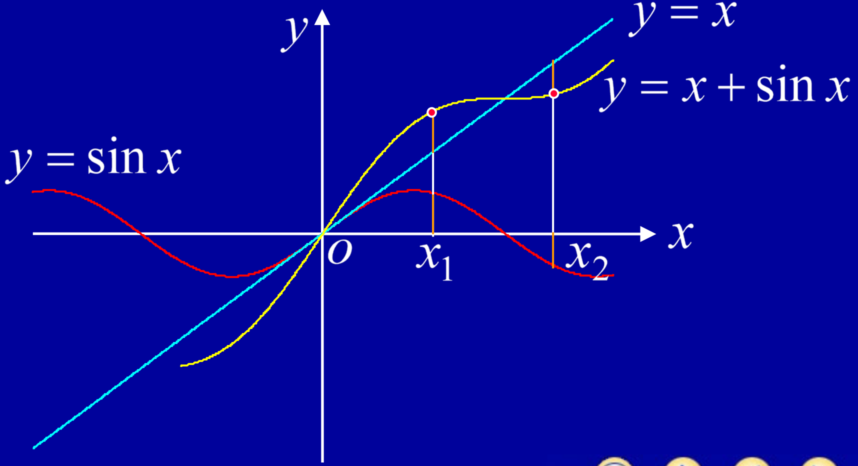
$Y=\{(0,y)\,|\,-1\le y\le 1\}$ (点集)

$\forall$点 $P\in C \xrightarrow[\text{向 } y \text{ 轴投影}]{}$ 投影点 $Q\in Y$



(满射)

例5. $\forall x\in \mathbb{R} \xrightarrow{y=x+\sin x} y\in \mathbb{R}$



(双射)

注意:

1) 映射的三要素— 定义域 , 对应规则 , 值域 .

例如：对于函数 $y=f(x)=\sin x$，

若将其看成从$\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射，则 f 既不是单射，也不是满射；

若将其看为从$\mathbb{R}$到 [−1，1] 上的映射，则 f 是满射，但不是单射；

若将 f 的定义域限定在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 f 是从 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 到 [−1，1] 上的双射。

2) 元素 x 的像 y 是唯一的, 但 y 的原像不一定唯一 .

说明:

映射又称为算子. 在不同数学分支中有不同的惯用 名称. 例如,

$X(\neq\varnothing) \xrightarrow{f} Y$ (数集)　　f 称为 X 上的泛函

$X(\neq\varnothing) \xrightarrow{f} X$　　f 称为 X 上的变换

X (数集 或点集) $\xrightarrow{f} \mathrm{R}$　　f 称为定义在 X 上的为函数

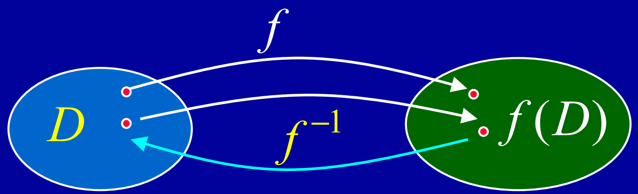
2. 逆映射与复合映射

(1) 逆映射的定义

定义: 若映射 $f: D \to f(D)$ 为单射, 则存在一新映射

$f^{-1}: f(D) \to D$, 使 $\forall y \in f(D), f^{-1}(y) = x$, 其中 $f(x) = y$,

称此映射 f^{-1} 为 f 的逆映射 .



习惯上 , $y = f(x), x \in D$ 的逆映射记成

$$y = f^{-1}(x) \ , x \in f(D)$$

例如, 映射 $y = x^2,\ x \in (-\infty, 0]$, 其逆映射为

$$y = -\sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

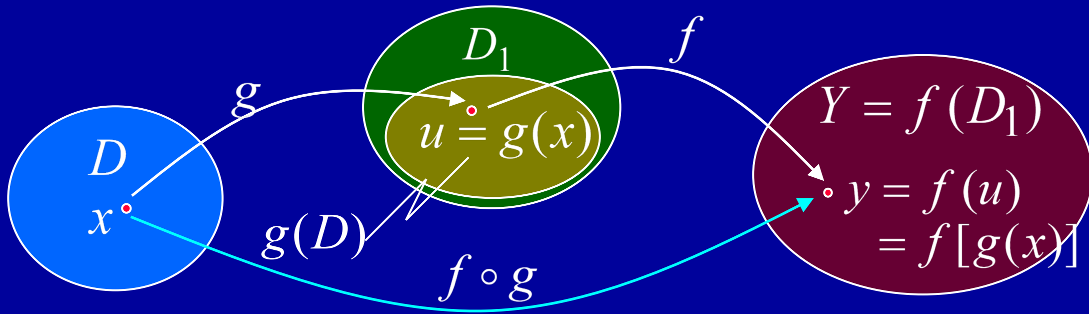
(2) 复合映射

定义. 设有映射链

$$\forall x \in D \xmapsto{\ g\ } u = g(x) \in g(D)$$

$$\forall u \in D_1 \xmapsto{\ f\ } y = f(u) \in Y = f(D_1)$$

则当 $g(D) \subset D_1$ 时, 由上述映射链可定义由 D 到 Y 的**复合映射**, 记作 $y = f[g(x)]$, 或 $f \circ g(x), x \in D$.



注意: 构成复合映射的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

以上定义也可推广到多个映射的情形.

三、函数

1. 函数的概念

定义4. 设非空数集 $D \subset \mathrm{R}$，则称映射 $f: D \to \mathrm{R}$ 为定义在 D 上的函数，记为

$$y = f(x),\ x \in D$$

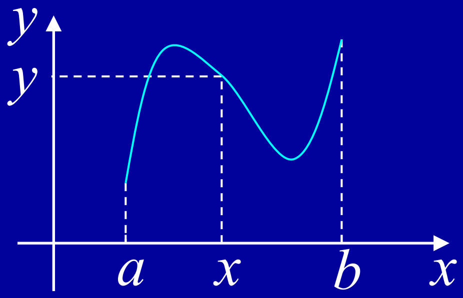
定义域

因变量　　自变量

$f(D)$ 称为值域

函数图形:

$$C = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D\} \subset D \times f(D)$$



$(D = [a, b])$

$$\forall\, x \in D \xmapsto{\ \ f\ \ } y \in f(D) = \{\, y \mid y = f(x), x \in D \,\}$$

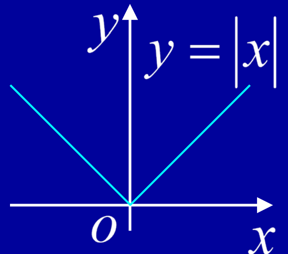
(定义域)——┘ (对应规则) (值域)

- **定义域** —— 使表达式及实际问题都有意义的自变量集合.
- **对应规律**的表示方法：解析法、图象法、列表法

例如, 反正弦主值 $y = f(x) = \arcsin x$

定义域 $D = [-1, 1]$, 值域 $f(D) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

又如, 绝对值函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



定义域 $D = \mathrm{R}$

值　域 $f(D) = [0, +\infty)$

例6. 已知函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}\,, & 0\le x\le 1\\ 1+x\,, & x>1\end{cases}$

求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{t})$，并写出定义域及值域 .

解: $f(\frac{1}{2})=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$$f(\tfrac{1}{t})=\begin{cases}1+\dfrac{1}{t}\,, & 0<t<1\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{t}}\,, & t\ge 1\end{cases}$$

$t\le 0$时
函数无定义

定义域 $D=[0,+\infty)$

值　域 $f(D)=[0,+\infty)$

2. 反函数与复合函数

(1) 反函数的概念及性质

若函数 $f: D \to f(D)$ 为单射, 则存在逆映射

$$f^{-1}: f(D) \to D$$

称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数 .

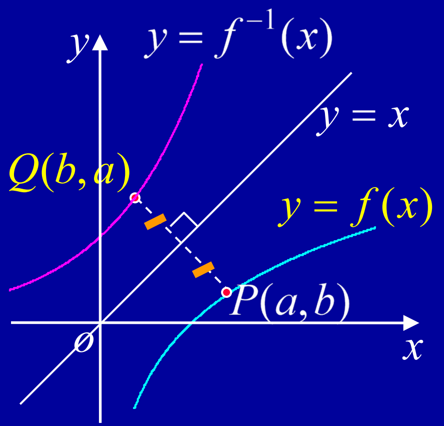
习惯上, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成

$$y = f^{-1}(x)\ ,\ x \in f(D)$$

性质:

1) $y = f(x)$ 严格 单调递增 (减) 其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在, 且也严格单调递增 (减) .

2) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 .



例如 ,

指数函数 $y=e^x,\ x\in(-\infty,+\infty)$
对数函数 $y=\ln x\ ,\ x\in(0,+\infty)$
} 互为反函数 ,

它们都严格单调递增, 其图形关于直线 $y=x$ 对称 .

(2) 复合函数 — 复合映射的特例

设有函数链

$$y = f(u),\ u \in D_1 \qquad ①$$

$$u = g(x),\ x \in D,\quad 且\ g(D) \subset D_1 \qquad ②$$

则 $\quad y = f[g(x)],\ x \in D$

称为由①, ②确定的复合函数 , u 称为中间变量.

注意: 构成复合函数的条件 $g(D) \subset D_1$ 不可少.

例如, 函数链 : $y = \arcsin u$, $u = 2\sqrt{1-x^2}$, 可定义复合

函数

$$y = \arcsin 2\sqrt{1-x^2},\quad x \in D = [-1, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}] \cup [\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 1]$$

但函数链 $y = \arcsin u, u = 2 + x^2$ 不能构成复合函数 .

两个以上函数也可构成复合函数. 例如,

$$y=\sqrt{u}\,,\ \ u>0$$

$$u=\cot v\,,\ \ v\neq k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$v=\frac{x}{2},\ \ x\in(-\infty,+\infty)$$

可定义复合函数:

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},\quad x\in(2k\pi\,,(2k+1)\pi\,],\quad n\in Z$$

$$k\pi<\frac{x}{2}\leq k\pi+\frac{\pi}{2}\text{时},\ \cot\frac{x}{2}\geq 0$$

3. 初等函数

(1) 基本初等函数

常数函数

幂函数

指数函数

对数函数

三角函数

反三角函数

反三角函数

① $y = \arcsin x$ 是函数 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数，

因此，$y = \arcsin x$ 的定义域为 [-1，1]，值域为$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

于是有公式

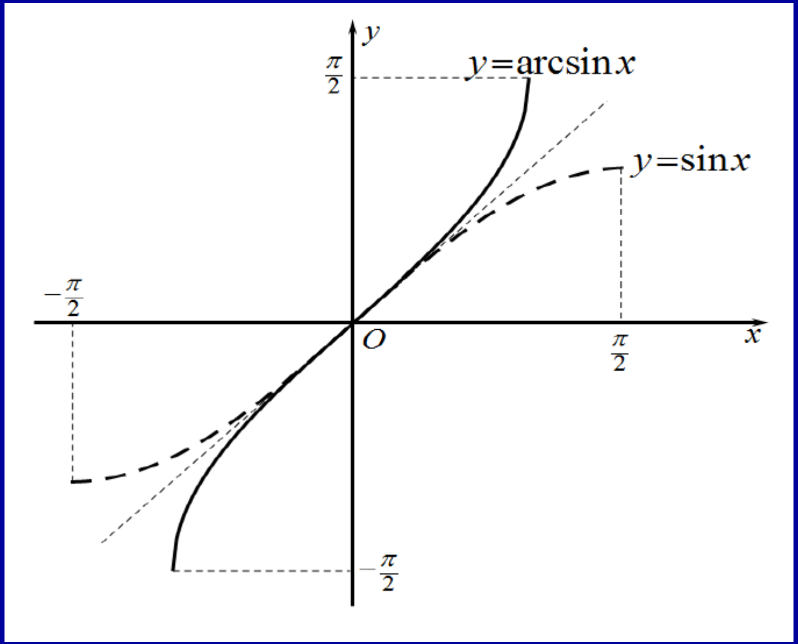
$$\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1,1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$



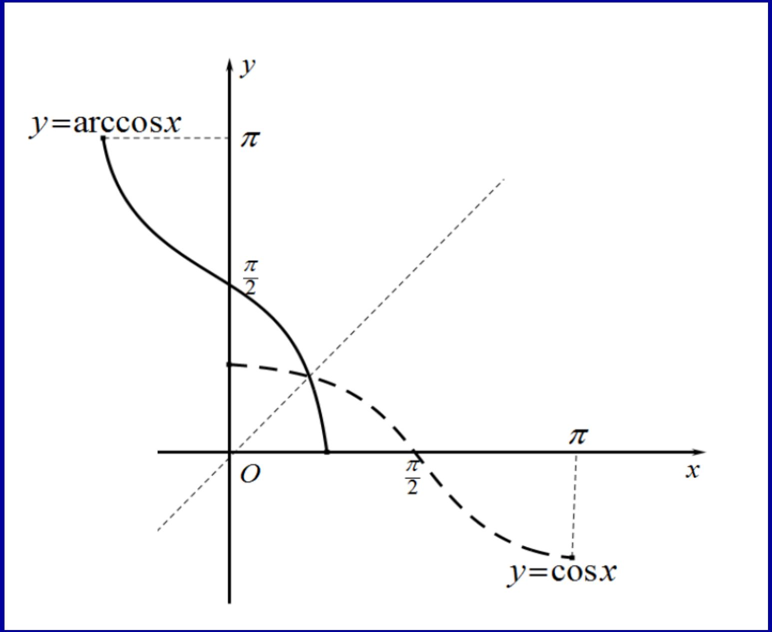
② $y = \arccos x$ 是函数 $y = \cos x, x \in [0, \pi]$ 的反函数，

因此， $y = \arccos x$ 的定义域为 [-1，1]， 值域为$[0, \pi]$

$$\cos(\arccos x) = x, x \in [-1,1]$$

$$\arccos(\cos x) = x, x \in [0, \pi]$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1,1]$$

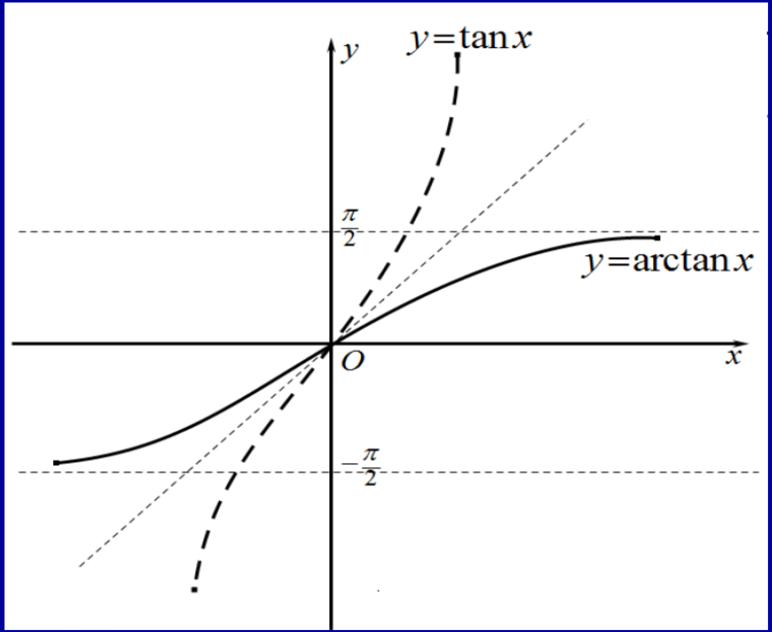


③ $y=\arctan x$ 是函数 $y=\tan x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的反函数，

因此，$y=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\tan(\arctan x)=x, x\in\mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan x)=x, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$



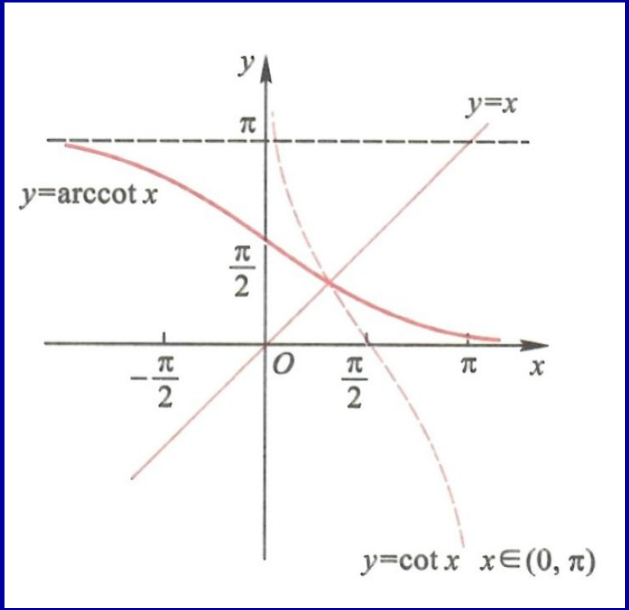
④ $y = arccot\, x$ 是函数 $y = cot\, x, x \in (0, \pi)$ 的反函数，

因此， $y = arccot\, x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, \pi)$.

$$cot(arccot\, x) = x, x \in \mathbb{R}$$

$$arccot(cot\, x) = x, x \in (0, \pi)$$

$$arctan\, x + \mathrm{arccot}\, x = \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$$



(2) 初等函数

由基本的初等函数经过有限次四则运算和复合步骤所构成的函数，称为初等函数.

否则称为非初等函数.

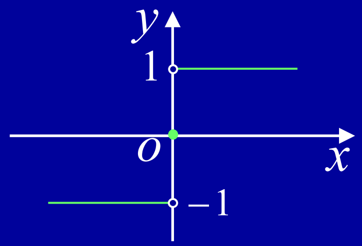
例如，$y=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$，故为初等函数.

微积分

非初等函数举例:

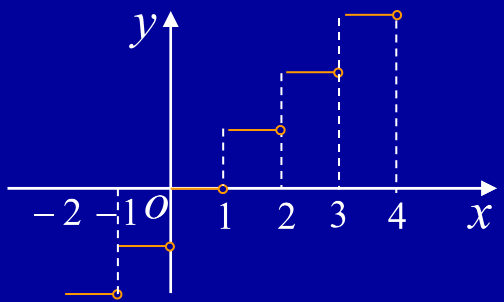
符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$



取整函数

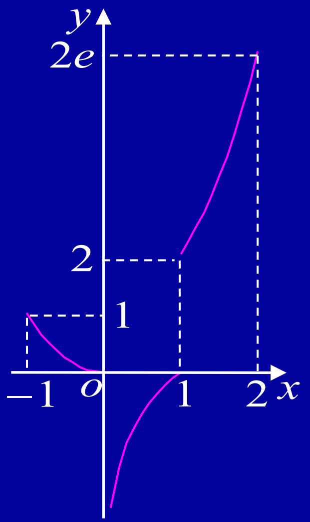
$$y=[x]=n,\ \text{当 } n\le x<n+1,\ n\in Z$$



Dirichlet 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数} \\ 0, x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

例7. 求 $y=\begin{cases} x^2, & -1\le x<0 \\ \ln x, & 0<x\le 1 \\ 2e^{x-1}, & 1<x\le 2 \end{cases}$ 的反函数及其定义域.



解: 当$-1\le x<0$ 时, $y=x^2\in(0,1]$,

则 $x=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1]$

当$0<x\le 1$ 时, $y=\ln x\in(-\infty,0]$,

则 $x=e^y$, $y\in(-\infty,0]$

当$1<x\le 2$ 时, $y=2e^{x-1}\in(2,2e]$,

则 $x=1+\ln\frac{y}{2}$, $y\in(2,2e]$

反函数 $y=\begin{cases} e^x, & x\in(-\infty,0] \\ -\sqrt{x}, & x\in(0,1] \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & x\in(2,2e] \end{cases}$

定义域为

$(-\infty,1]\cup(2,2e]$

4. 函数的几种特性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$, 且有区间 $I \subset D$.

(1) 有界性

$\exists M > 0, \forall x \in D$, 使 $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$ 为有界函数.

$\exists M > 0, \forall x \in I$, 使 $|f(x)| \le M$, 称 $f(x)$ 在 I 上有界.

说明: 还可定义有上界、有下界、无界

$\cdots, f(x) \le M$, 称 为**有上界**

$\cdots, M \le f(x)$, 称 为**有下界**

若对任意正数 M , 均存在 $x \in D$, 使 $|f(x)| > M$,

则称 $f(x)$ **无界**.

例8　证明：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在（0，1）上无界.

(2) 单调性

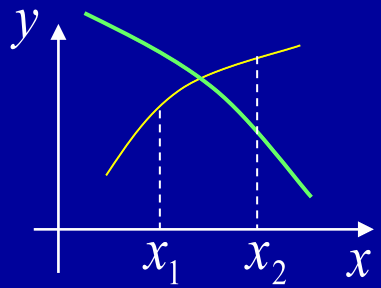
$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的

$(\le)$ 单调增函数 ;

若 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为 I 上的

$(\ge)$ 单调减函数 .

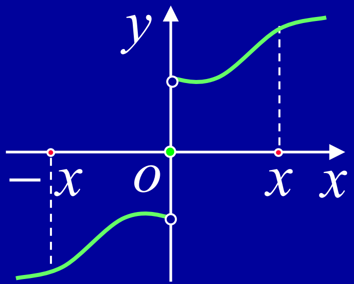


(3) 奇偶性

$\forall x \in D$, 且有 $-x \in D$,

若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;

若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

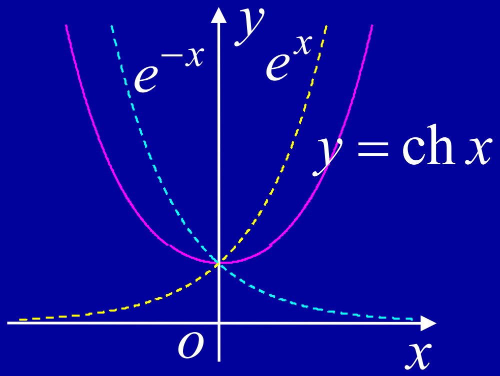


说明: 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 有定义, 则当 $f(x)$ 为**奇函数**时, 必有 $f(0)=0$.

例如,

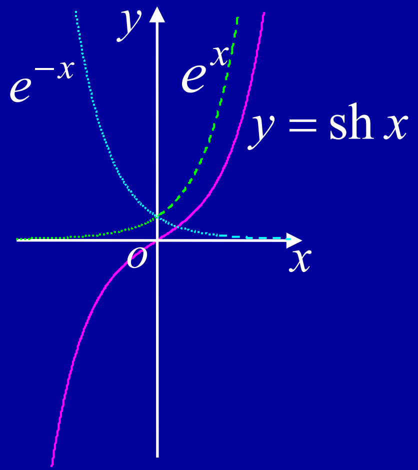
$$y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{偶函数}$$

$$\overset{\text{记}}{=} \operatorname{ch} x \quad \text{双曲余弦}$$



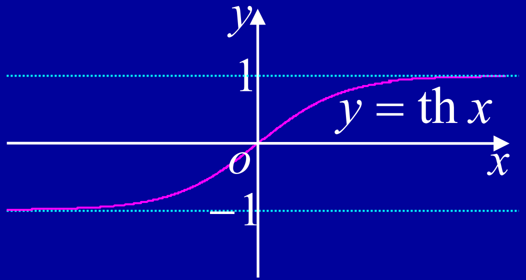
又如, $y=f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 奇函数

记 $=\operatorname{sh}x$ 双曲正弦



再如, $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 奇函数

记 $=\operatorname{th}x$ 双曲正切

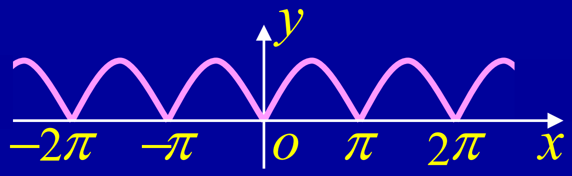


(4) 周期性

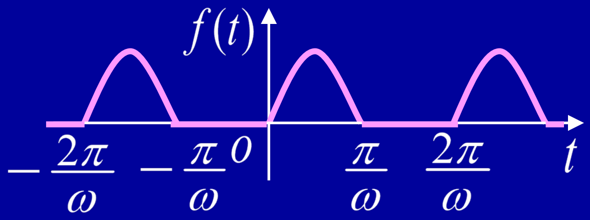
$\forall x \in D,\ \exists\, l \neq \mathbf{0}$ 且 $x + l \in D$, 若

$$f(x+l) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**, 称 l 为**周期** (一般指**最小正周期**).



周期为 π



周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

注: 周期函数不一定存在最小正周期 .

例如, 常量函数 $f(x) = C$

狄里克雷函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

四. 有界集、确界原理

M_1 称为A的一个上界

M_2 称为A的一个下界

定义: 设 $A \subset R, A \neq \Phi$

$\exists M_1 \in R, \ \forall x \in A,$ 使 $x \le M_1$，称A为**有上界**的数集

$\exists M_2 \in R, \ \forall x \in A,$ 使 $x \ge M_2$，称A为**有下界**的数集

既有上界，又有下界 的数集称为**有界集**。 因此

A有界 $\Leftrightarrow \exists M_1, M_2 \in R,$ 使 $\forall x \in A, \ M_2 \le x \le M_1.$

等价于

A有界 $\Leftrightarrow \ \exists M > 0,$ 使 $\forall x \in A, \ |x| \le M.$ Why?

若A不是有界集，则称A为**无界**集。 因此

A无界 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 \in A,$ 使 $|x_0| > M.$ Why?

定义：设$A\subset R, \mathrm{A}\neq\Phi$, 若存在常数$\alpha$，满足

(1) $\forall x\in A, x\le\alpha$，　(即 α 是A的一个上界)

(2) $\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in A$, 使 $x_0>\alpha-\varepsilon$,

(即α 是A的最小上界)

则称α 为数集A的 **上确界**。记为 $\alpha=\sup A$

定义：设$A\subset R, \mathrm{A}\neq\Phi$, 若存在常数 β 满足

(1) $\forall x\in A, x\ge\beta$，　(即 β 是A的一个下界)

(2) $\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in A$, 使 $x_0<\beta+\varepsilon$,

(即 β 是A的最大下界)

则称 β 为数集A的 **下确界**。记为 $\beta=\inf A$

例

确界原理

非空有上界的数集，必有上确界。

非空有下界的数集，必有下确界。

因此

非空有界数集，必有上、下确界

内容小结

1. 集合及映射的概念

2. 函数的定义及函数的二要素 $\begin{cases}\text{定义域} \\ \text{对应规律}\end{cases}$

3. 函数的特性 —— 有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性

4. 初等函数的结构

备用题

1. 设 $f(0)=0$ 且 $x\neq 0$ 时 $a\,f(x)+b\,f(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数, 且 $|a|\neq|b|$, 证明 $f(x)$ 为奇函数 .

证: 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $x=\dfrac{1}{t}$, $a\,f(\frac{1}{t})+b\,f(t)=ct$

由
$$\begin{cases} a\,f(x)+b\,f(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \\ a\,f(\frac{1}{x})+b\,f(x)=cx \end{cases}$$

消去 $f(\frac{1}{x})$, 得

$$f(x)=\frac{c}{b^2-a^2}\left(bx-\frac{a}{x}\right)\quad (x\neq 0)$$

显然 $f(-x)=-f(x)$, 又 $f(0)=0$, 故 $f(x)$ 为奇函数 .

2 . 设函数 $y=f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a$, $y=b\ (a\neq b)$ 均对称, 求证 $y=f(x)$ 是周期函数.

证: 由 $f(x)$ 的对称性知

$$f(a+x)=f(a-x),\qquad f(b+x)=f(b-x)$$

于是

$$\begin{aligned} f(x)&=f\left[a+(x-a)\right]\\ &=f\left[a-(x-a)\right]=f(2a-x)\\ &=f\left[b+(2a-x-b)\right]\\ &=f\left[b-(2a-x-b)\right]\\ &=f\left[x+2(b-a)\right]\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数 , 周期为 $T=2(b-a)$