第六节 无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

三、无穷小与无穷大的关系

四、无穷小量阶的比较

一、 无穷小

定义1 . 若 $x \to x_0$ (或$x \to \infty$) 时，函数 $f(x) \to 0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ (或$x \to \infty$) 时的**无穷小** .

例如：

$\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$，函数 $x-1$ 当 $x \to 1$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，函数 $\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 0$，函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 当 $x \to -\infty$ 时为无穷小.

定义1. 若 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时 , 函数 $f(x) \to 0$, 则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时的**无穷小** .

说明: 除 0 以外任何很小的常数都不是无穷小 !

因为

$$\lim_{x \to x_0} C = 0 \quad \rightleftharpoons \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|C - 0| < \varepsilon$$

显然 C 只能是 0 !

定理 1 . (无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha ,$$ 其中 α 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量 .

证: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\xLeftrightarrow{\alpha = f(x) - A} \lim_{x \to x_0} \alpha = 0$$

对自变量的其它变化过程类似可证 .

定理2. （1）有限个无穷小的和还是无穷小

.

（2）有限个无穷小之积仍为无穷小　　？

说明: **无限个**无穷小之和**不一定**是无穷小！

例如,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

定理3. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证: 设 $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$, $|u| \le M$

又设 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$

时, 有 $|\alpha| \le \frac{\varepsilon}{M}$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 就有

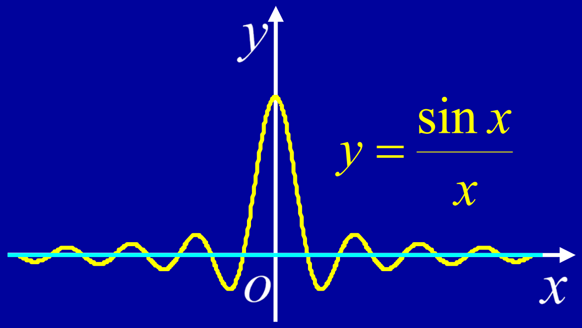
$$|u\alpha| = |u||\alpha| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x \to x_0} u\alpha = 0$, 即 $u\alpha$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

推论 1. 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2. 有限个无穷小的乘积是无穷小.

例1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.



解: $\because \ |\sin x|\le 1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

利用定理 2 可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

说明 : $y=0$ 是 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的渐近线 .

二、 无穷大

定义2 . 若任给 $M>0$, 总存在 $\delta>0$ （正数 X ）, 使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ （$|x|>X$）的 x , 总有

$$|f(x)|>M \qquad ①$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ （$x\to\infty$）时为无穷大, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty. \qquad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

若在定义中将 ①式改为 $f(x)>M$ （$f(x)<-M$）,

则记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$ （$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$）

注意:

1. 无穷大不是很大的数, 它是描述函数的一种状态.

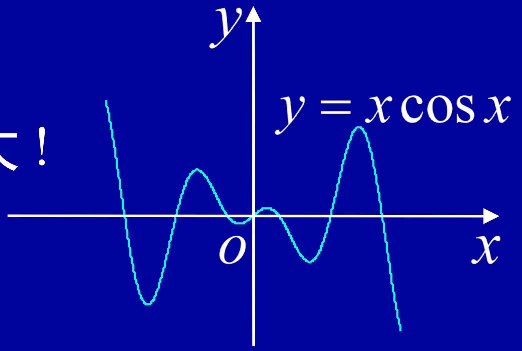
2. 函数为无穷大 , 必定无界 . 但反之不真 !

例如, 函数 $f(x)=x\cos x,\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$f(2n\pi)=2n\pi\to\infty \quad (\text{当 } n\to\infty)$$

但 $f(\frac{\pi}{2}+n\pi)=0$

所以 $x\to\infty$ 时 , $f(x)$ 不是无穷大 !



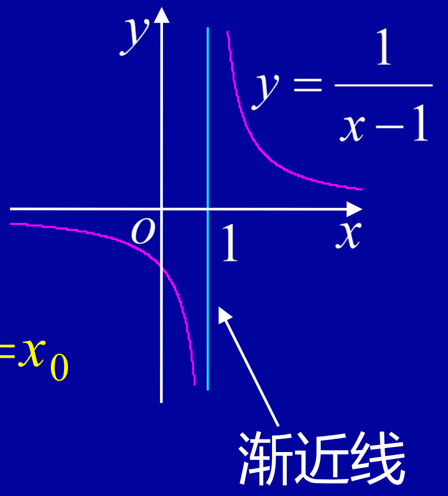
例2. 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$

证: 任给正数 M，要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$，即 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$，

只要取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，则对满足 $0<|x-1|<\delta$ 的一切 x，有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.



说明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$

为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线 .

三、无穷小与无穷大的关系

定理4. 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 ;

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(自证)

说明: 据此定理 , 关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

再看例2

例3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+9}{5x^2+2x-1}$.

解: $x\to\infty$ 时, 分母 $\to\infty$, 分子 $\to\infty$.

分子分母同除以 x^2, 则

"抓大头"

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{4-3\frac{1}{x}+9\frac{1}{x^2}}{5+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{5}$$

一般有如下结果:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$

$(a_0b_0\neq 0,m,n$ 为非负常数$)$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当 n=m\\ 0\ , & 当 n>m\\ \infty\ , & 当 n<m\end{cases}$$

四、无穷小的比较

引例． $x \to 0$ 时, $3x$, x^2, $\sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$

可见无穷小趋于 0 的速度是多样的．

定义3. 设 α, β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α **高阶**的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α **低阶**的无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 则称 β 是 α 的**同阶**无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0$, 则称 β 是关于 α 的 k **阶**无穷小;

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 是 α 的**等价**无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ 或 $\beta \sim \alpha$

例如，当 $x \to 0$ 时

$$x^3 = o(6x^2)\,; \quad \sin x \sim x\,; \quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

又如，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

故 $x \to 0$ 时 $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小, 且

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

例4. 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

证: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

$$a^n - b^n = (a-b)\ (a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x\left[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\cdots+1\right]}$$

$=1$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$

定理5. $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$

证: $\alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$

$\Longleftrightarrow \lim(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1) = 0$, 即 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$

$\Longleftrightarrow \beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

例如, $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

$x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$

定理6 . 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 , 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

证: $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\ \frac{\beta'}{\alpha'}\ \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'}\ \lim \frac{\beta'}{\alpha'}\ \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

例如, $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

原式 $\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解: 当 $x\to 0$ 时,

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2$$

$$\cos x-1\sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore\quad 原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$$

内容小结

1. 无穷小与无穷大的定义

2. 无穷小与函数极限的关系

3. 无穷小与无穷大的关系

4. 无穷小的比较

设 α, β 对同一自变量的变化过程为无穷小, 且 $\alpha \neq 0$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \beta \text{是} \alpha \text{的高阶无穷小} \\ \infty, & \beta \text{是} \alpha \text{的低阶无穷小} \\ C\,(\neq 0), & \beta \text{是} \alpha \text{的同阶无穷小} \\ 1, & \beta \text{是} \alpha \text{的等价无穷小} \end{cases}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, \qquad \beta \text{是} \alpha \text{的} k \text{阶无穷小}$$

常用等价无穷小 : 当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x,$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$$

5. 等价无穷小替换定理

作业

P56 12 (1), (2) ; 13

16(1)(3)