第五节 反常积分的审敛法 Γ函数

反常积分 { 无穷限的反常积分；无界函数的反常积分

一、无穷限反常积分的审敛法

二、无界函数反常积分的审敛法

三、Γ函数

一、无穷限反常积分的审敛法

定理1. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $f(x)\geq 0$，若函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

在$[a,+\infty)$上有上界，则反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

证: $\because f(x)\geq 0$，$F(x)$在$[a,+\infty)$上单调递增有上界,

根据极限收敛准则知

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

存在，即反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.

定理2 . (比较审敛原理) 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且对充分大的 x 有 $0\le f(x)\le g(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 发散} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ 发散}$$

证: 不失一般性 , 设 $x\in[a,+\infty)$ 时, $0\le f(x)\le g(x)$

若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则对 $t>a$ 有

$$\int_a^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^{t} g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

故 $\int_a^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 t 的单调递增有上界函数 , 因此

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

极限存在，即反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散，因为 $t>a$ 时有

$$0\le\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $t\to+\infty$，可见反常积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 必发散.

说明: 已知 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{发散}, & p\le 1\end{cases}\quad(a>0)$

故常取 $g(x)=\dfrac{A}{x^p}\ (A>0)$ 作比较函数，得下列比较审敛法.

定理3. (比较审敛法 1) 设非负函数 $f(x)\in C[a,+\infty)$ $(a>0)$.

1) 若存在常数 $M>0$, $p>1$, 使对充分大的 x 有

$$f(x)\le\frac{M}{x^p}$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 若存在常数 $N>0$, $p\le 1$, 使对充分大的 x 有

$$f(x)\ge\frac{N}{x^p}$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例1. 判别反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}} \mathrm{d}x$ 的敛散性 .

解: $\because \quad 0 \le \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$

由比较审敛法 1 可知原积分收敛 .

思考题: 讨论反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \mathrm{d}x$ 的敛散性 .

提示: 当 $x \ge 1$ 时, 利用

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^3}} = \frac{1}{x+1}$$

可知原积分发散 .

定理4. (极限审敛法1) 若 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $f(x)\ge 0$, 满足

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=l$$

则有: 1) 当 $p>1, 0\le l<+\infty$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 当 $p\le 1, 0<l\le+\infty$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

证: 当 $p>1$ 时, 根据极限定义, 对取定的 $\varepsilon>0$, 当 x 充分大时, 必有 $x^p f(x)\le l+\varepsilon$, 即

$$0\le f(x)\le \frac{M}{x^p}\quad (M=l+\varepsilon)$$

可见 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

当$p\le 1$时, 可取$\varepsilon>0$, 使$l-\varepsilon>0$, ($l=+\infty$时用任意正数N代替$l-\varepsilon$), 必有

$$x^p f(x)\ge l-\varepsilon$$

即 $$f(x)\ge\frac{l-\varepsilon}{x^p}\ge\frac{N}{x}\qquad(N=l-\varepsilon)$$

可见$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

注意: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^p}}$ 此极限的大小刻画了$x\to+\infty$时$f(x)$趋于0的快慢程度.

例2. 判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的敛散性 .

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$

根据极限审敛法 1 , 该积分收敛 .

例3. 判别反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性 .

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1$

根据极限审敛法 1 , 该积分发散 .

定理5. 若 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛,

则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证: 令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$, 则 $0\le\varphi(x)\le|f(x)|$

$\because\ \int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\therefore\ \int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛,

而

$$f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

可见反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定义. 设反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，

若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛；

若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛 .

例4. 判断反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ (a,b 为常数，$a>0$) 的敛散性 .

解: 因 $\left|e^{-ax}\sin bx\right| \le e^{-ax}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ 收敛，根据比较审敛原理知 $\int_a^{+\infty} \left|e^{-ax}\sin bx\right|\,\mathrm{d}x$ 收敛，故由定理5知所给积分收敛 (绝对收敛) .

二、无界函数反常积分的审敛法

无界函数的反常积分可转化为无穷限的反常积分. 例如

设 $f(x)\in C(a,b], a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 由定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

令 $x = a + \frac{1}{t}$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(a+\frac{1}{t})\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\frac{1}{t})\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

因此无穷限反常积分的审敛法完全可平移到无界函数的反常积分中来 .

定理6 . (比较审敛原理) 设 $f(x), g(x) \in C(a, b]$, a 是瑕点, 且对充分靠近点 a 的 x 有 $0 \le f(x) \le g(x)$, 则

$$\int_a^b g(x)dx \text{ 收敛} \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 收敛}$$

$$\int_a^b f(x)dx \text{ 发散} \Longrightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ 发散}$$

利用 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 收敛, & q<1 \\ 发散, & q\ge 1 \end{cases}$

有类似定理 3 与定理 4 的如下审敛法.

推论1. (比较审敛法 2) 设非负函数 $f(x)\in C[a,b]$, a 为瑕点, 使对一切充分接近 a 的 x ($x>a$).

1) 若存在常数 $M>0$, $q<1$, 有 $f(x)\le \dfrac{M}{(x-a)^q}$

则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 若存在常数 $N>0$, 有 $f(x)\ge \dfrac{N}{x-a}$

则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论2. (极限审敛法2) 若 $f(x)\in C(a,b]$, 且 $f(x)\geq 0$,

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=l$$

则有: 1) 当 $0<q<1, 0\leq l<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2) 当 $q\geq 1, 0<l\leq +\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例5. 判别反常积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 的敛散性.

解: 此处 $x=1$ 为瑕点, 利用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1$$

根据极限审敛法2, 所给积分发散.

微积分

例6. 判定椭圆积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $(k^2<1)$ 的敛散性 .

解: 此处 $x=1$ 为瑕点, 由于

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$$

根据极限审敛法 2 , 椭圆积分收敛 .

类似定理5, 有下列结论:

若反常积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ (a为瑕点)收敛, 则反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 称为绝对收敛.

例7. 判别反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解: 此处 $x=0$ 为瑕点, 因 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{4}}\ln x = 0$, 故对充分小的 x, 有 $\left|x^{\frac{1}{4}}\ln x\right| < 1$, 从而

$$\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}} = \frac{\left|x^{\frac{1}{4}}\ln x\right|}{x^{\frac{3}{4}}} < \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$$

据比较审敛法2, 所给积分绝对收敛.

三、Γ 函数

1. 定义

Γ函数： $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (s>0)$

(含参变量s的反常积分)

下面证明这个特殊函数在 $s>0$ 内收敛．令

$$I_1=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad I_2=\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1) 讨论 I_1. 当$s\geq 1$时, I_1 是定积分;

当$0<s<1$时， $x^{s-1}e^{-x}=\dfrac{1}{x^{1-s}}\cdot\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{1}{x^{1-s}}$

而$1-s<1$，根据比较审敛法2知I_1收敛.

$$\boxed{I_2=\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x}$$

2) 讨论 I_2 .

$$\because\quad \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot(x^{s-1}e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0$$

根据极限审敛法1知 I_2 收敛.

综上所述 , $\Gamma(s)=I_1+I_2$ 在 $s>0$ 上收敛.

2. 性质

(1) 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s) \quad (s>0)$

证: $\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty} x^s e^{-x}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} x^s\,\mathrm{d}e^{-x}$ (分部积分)

$$=\left[-x^s e^{-x}\right]_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=s\,\Gamma(s)$$

注意到: $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$

$\therefore \forall n\in \mathrm{N}^+$, 有

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)$$

$$=\cdots=n!\,\Gamma(1)=n!$$

一般地，对　$n < s \le n+1 \quad \Rightarrow 0 < s - n \le 1$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s(s-1)\Gamma(s-1) = \cdots$$

$$= s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n)$$

因此，只要知道$\Gamma(s)$在$0 < s \le 1$中的值，其他都可计算。

数学用表 取 s∈ [1,2]，可推得下面的公式：

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\Gamma(s), & s = t+1, 0 < t < 1 \\ \Gamma(s), & s = t, 1 \le t \le 2 \\ (t-1)(t-2)\cdots s\Gamma(s), & s = t-n+1, 2 < n \le n+1 \end{cases}$$

(2) Γ 函数定义域的延拓

当 $-1 < s < 0$ 时，定义 $\quad \Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$

$-2 < s < -1, \quad \Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}$

$\cdots\cdots$

$-n-1 < s < -n, \quad \Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}$

当 s=-n (n 为正整数）时，无定义

(3) 当$s \to 0^{+}$时, $\Gamma(s) \to +\infty$.

证: $\because\ \Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s},\ \Gamma(1) = 1$

且可证明$\Gamma(s)$在$s > 0$连续,

$\therefore s \to 0^{+}$时, $\Gamma(s) \to +\infty$

(4) 余元公式:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad (0 < s < 1) \qquad \text{(证明略)}$$

当$s = \frac{1}{2}$时, 有

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

(5) $\Gamma(s)$的其他形式

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (s>0)$$

令 $x=u^2$，得

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2s-1}\,\mathrm{d}u \quad (s>0)$$

再令 $2s-1=t$，即 $s=\dfrac{1+t}{2}$，得应用中常见的积分

$$\int_0^{+\infty} u^t e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t>-1)$$

这表明左端的积分可用 Γ 函数来计算. 例如,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(6) 例

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^{+\infty}x^{\frac{3}{2}}e^{-2x}dx\overset{t=2x}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}t^{\frac{5}{2}-1}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{16}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx\overset{t=\ln\frac{1}{x}}{=\!=\!=}-\int_{+\infty}^0 t^p e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}t^{(p+1)-1}e^{-t}dt$$

$$=\Gamma(p+1)$$

内容小结

1. 两类反常积分的**比较审敛法**和**极限审敛法** .

2. 若在同一积分式中出现两类反常积分, 可通过分项使每一项只含一种类型的反常积分, 只有各项都收敛时, 才可保证给定的积分收敛 .

3. Γ 函数的定义及性质 .