第四节 隐函数和参数方程求导 相关变化率

一、隐函数的导数

二、由参数方程确定的函数的导数

三、相关变化率

一、隐函数的导数

若由方程 $F(x,y)=0$ 可确定 y 是 x 的函数，则称此函数为**隐函数**.

由 $y=f(x)$ 表示的函数，称为**显函数**.

例如, $x-y^3-1=0$ 可确定显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$

$y^5+2y-x-3x^7=0$ 可确定 y 是 x 的函数，但此隐函数不能显化.

隐函数**求导方法**: $F(x,y)=0$

$\Downarrow$ 两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y)=0 \quad (\text{含导数 } y' \text{ 的方程})$$

例1. 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解: 方程两边对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^5+2y-x-3x^7)=0$$

得

$$5y^4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-21x^6=0$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

因 $x=0$ 时 $y=0$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$

例2. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点$(\,2\,,\frac{3}{2}\sqrt{3}\,)$处的切线方程.

解: 椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

$$\therefore\ y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为 $y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

即 $\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$

例3. 求 $y = x^{\sin x}\ (x>0)$ 的导数 .

解: 两边取对数 , 化为隐式

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\Big\downarrow \text{两边对 } x \text{ 求导}$$

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \quad y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

说明:

1) 对幂指函数 $y = u^v$ 可用对数求导法求导 :

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{u' v}{u}$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{u' v}{u} \right)$$

注意: $y' = \underline{u^v \ln u \cdot v'} + \underline{v u^{v-1} \cdot u'}$

按指数函数求导公式

按幂函数求导公式

2) 有些显函数用对数求导法求导很方便 .

例如, $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a>0, b>0, \frac{a}{b}\neq 1)$

$\Downarrow$ 两边取对数

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a[\ln b - \ln x] + b[\ln x - \ln a]$$

$\Downarrow$ 两边对 x 求导

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right)$$

又如， $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

$\Downarrow$ 两边取对数

$$\boxed{(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

$\Downarrow$ 对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\;[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}]$$

二、由参数方程确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 可确定一个 y 与 x 之间的函数

关系, $\varphi(t), \psi(t)$ 可导, 且 $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$, 则

$\varphi'(t) \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$\psi'(t) \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

(此时看成 x 是 y 的函数)

若上述参数方程中$\varphi(t), \psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$,

则由它确定的函数$y = f(x)$ 可求二阶导数 .

利用新的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \end{cases}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \Big/ \varphi'(t)$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

注意：已知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\neq\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'$?

例4. 设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=t\,f'(t)-f(t) \end{cases}$, 且 $f''(t)\neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t\,f''(t)}{f''(t)}=t$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{f''(t)}$

练习: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t^2 \\ y=1-t \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{t};\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\cancel{\frac{\frac{1}{t^2}}{t}}=\frac{1}{t^3}$$

例5. 抛射体运动轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

解: 先求速度大小:

速度的水平分量为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_1$, 垂直分量为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_2 - gt$,

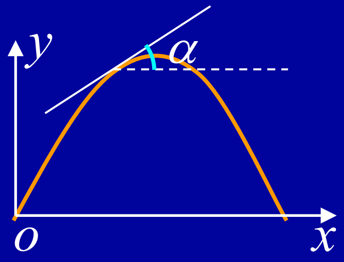
故抛射体速度大小

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + (v_2 - gt)^2}$$

再求速度方向 (即轨迹的切线方向):

设 α 为切线倾角, 则

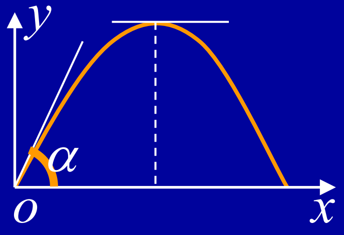
$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \bigg/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_2 - gt}{v_1}$$



抛射体轨迹的参数方程 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

速度的水平分量 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_1$，垂直分量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_2 - gt$，

速度的方向 $\tan\alpha = \dfrac{v_2 - gt}{v_1}$



在刚射出 (即 $t = 0$)时, 倾角为 $\alpha = \arctan\dfrac{v_2}{v_1}$

达到最高点的时刻 $t = \dfrac{v_2}{g}$，高度 $y\Big|_{t=\frac{v_2}{g}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{v_2^{\;2}}{g}$

落地时刻 $t = \dfrac{2v_2}{g}$，抛射最远距离 $x\Big|_{t=\frac{2v_2}{g}} = \dfrac{2v_1 v_2}{g}$

例6. 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$

确定函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: 方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \varepsilon \cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2(t+1) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}$$

例：求曲线 $r = a\sin 2\theta$（a 为常数）在 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线及法线方程.

三、相关变化率

$x = x(t)\,,\ y = y(t)$ 为两可导函数

$x\,,\,y$ 之间有联系 $\Longrightarrow$ $\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{\text{称为相关变化率}}$ 之间也有联系

相关变化率问题解法:

找出相关变量的关系式

$\Big\downarrow$ 对 t 求导

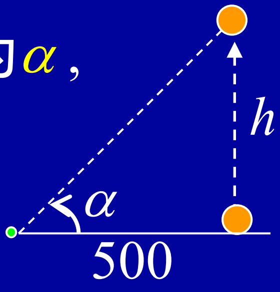
得相关变化率之间的关系式

$\Big\downarrow$

求出未知的相关变化率

例7. 一气球从离开观察员500 m 处离地面铅直上升，其速率为 140 m/min，当气球高度为 500 m 时，观察员视线的仰角增加率是多少?

解: 设气球上升 t 分后其高度为h，仰角为α，



则
$$\tan\alpha = \frac{h}{500}$$

$\downarrow$ 两边对 t 求导

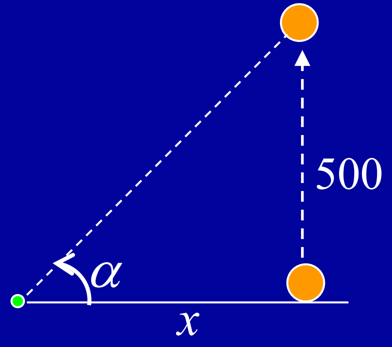
$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{500}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha}$$

已知 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 140\,\mathrm{m/min}$，$h = 500\mathrm{m}$ 时，$\tan\alpha = 1$，$\sec^2\alpha = 2$，

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{500}\cdot 140 = 0.14\ (\mathrm{rad/min})$$

思考题: 当气球升至500 m 时停住，有一观测者以 100 m / min 的速率向气球出发点走来，当距离为500 m 时，仰角的增加率是多少？



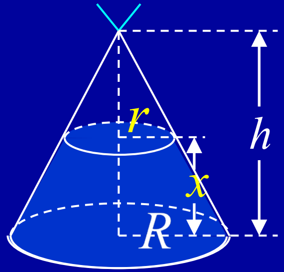
提示: $\tan\alpha = \dfrac{500}{x}$

$\Big\downarrow$ 对 t 求导

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{500}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

已知 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 100\,\mathrm{m/min}$，$x = 500\,\mathrm{m}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$.

例8. 有一底半径为 R cm，高为 h cm 的圆锥容器，今以 $25\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 自顶部向容器内注水，试求当容器内水位等于锥高的一半时水面上升的速度.



解: 设时刻 t 容器内水面高度为 x，水的体积为 V，则

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h-\frac{1}{3}\pi r^2(h-x)=\frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3-(h-x)^3]$$

两边对 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi R^2}{h^2}\cdot(h-x)^2\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \text{而}\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=25\,(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$$

故 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{25h^2}{\pi R^2(h-x)^2},\ \text{当}\ x=\frac{h}{2}\ \text{时},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{100}{\pi R^2}\,(\mathrm{cm}/\mathrm{s})$$

内容小结

1. 隐函数求导法则 —— 直接对方程两边求导

2. 对数求导法： 适用于幂指函数及某些用连乘, 连除表示的函数

3. 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

求高阶导数时,从低到高每次都用参数方程求导公式

4. 相关变化率问题

列出依赖于 t 的相关变量关系式

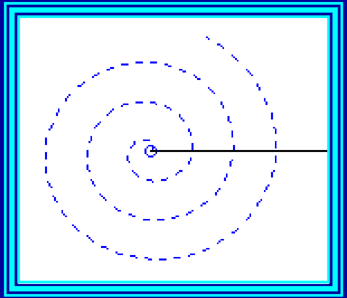
$\downarrow$ 对 t 求导

相关变化率之间的关系式

思考与练习

1. 求螺线 $r=\theta$ 在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

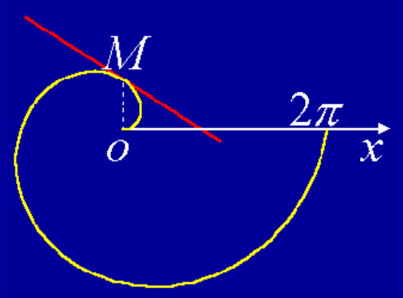
解: 化为参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases}$



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时对应点 $M(0,\frac{\pi}{2})$,

斜率 $k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$



$\therefore$ 切线方程为 $y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

2. 设 $y=\underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1}+\underbrace{\frac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_2}$，求 y'.

提示: 分别用对数微分法求 y_1', y_2'.

答案:

$$y' = y_1' + y_2'$$

$$= (\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x\cdot\ln\sin x + 1)$$

$$+\frac{1}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(2+x)^2}}\left[1-2\ln x-\frac{x}{3(2-x)}-\frac{2x}{3(2+x)}\right]$$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 确定，求 $y'(0)$，$y''(0)$.

解: 方程两边对 x 求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0 \qquad ①$$

再求导，得

$$e^y y'^2+(e^y+x)y''+2y'=0 \qquad ②$$

当 $x=0$ 时，$y=1$，故由 ① 得

$$y'(0)=-\frac{1}{e}$$

再代入 ② 得 $\quad y''(0)=\frac{1}{e^2}$

作业

P102:　75, 79,81(3),85,87,94

备用题

1. 设 $y = x + e^x$，求其反函数的导数 .

解：方法1 $\because \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + e^x$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+e^x}$$

方法2 等式两边同时对 y 求导

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + e^x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+e^x}$$

2. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解： 方程组两边同时对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ e^y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \sin t + e^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}$$