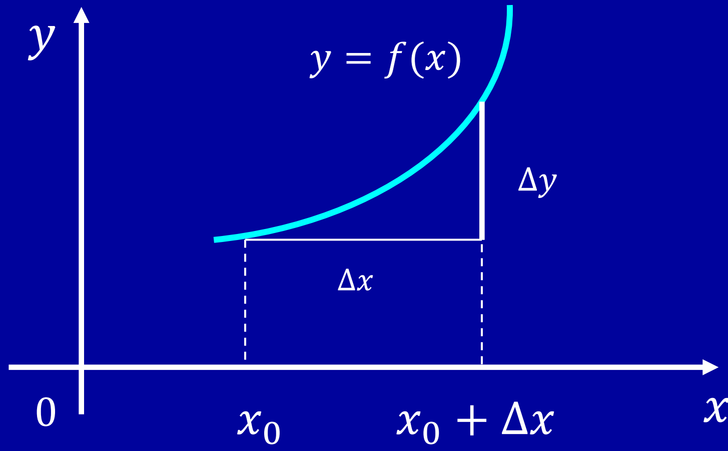
第七节
函数的连续性与间断点

一、 函数连续性的定义

二、 函数的间断点

一、连续函数的概念

1.　函数的增量



函数：$y=f(x)$

x_0点附近的点：$x=x_0+\Delta x$

自变量的增量：$\Delta x=x-x_0$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$　**为函数在点 x_0 的增量.**

2．函数连续性的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 点某邻域内有定义,如果 $\Delta x\to 0$ 时,

也有 $\Delta y\to 0$,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)]=0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

连续的等价定义：
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

定义: 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 连续.

可见，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续必须具备下列条件:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

若 $f(x)$ 在某区间上每一点都连续，则称它在该区间上连续，或称它为该区间上的**连续函数**.

在闭区间 $[a\,,b]$ 上的连续函数的集合记作 $C[\,a\,,b\,]$.

例如, $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ （有理整函数）

在 $(-\infty\,,+\infty)$ 上连续.

又如, 有理分式函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

在其定义域内连续.

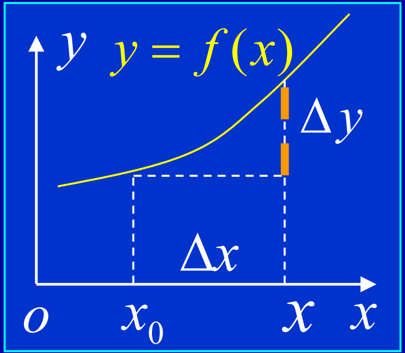
只要 $Q(x_0)\neq 0$，都有 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=R(x_0)$

对自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$，有函数的增量

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续有下列等价命题:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \rightleftarrows \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$



$$\rightleftarrows \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\rightleftarrows f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$$

左连续　　右连续

$\rightleftarrows \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| = |\Delta x| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| < \varepsilon$$

例. 证明函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证: $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$|\Delta y|=2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|$$

$$\le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot 1=|\Delta x|\xrightarrow{\Delta x\to 0}0$$

即 $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

这说明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

同样可证: 函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

二、 函数的间断点

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，则下列情形

之一函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义；

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

这样的点 x_0 称为**间断点**.

间断点分类:

第一类间断点:

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在,

若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, 称 x_0 为可去间断点.

若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$, 称 x_0 为跳跃间断点.

第二类间断点:

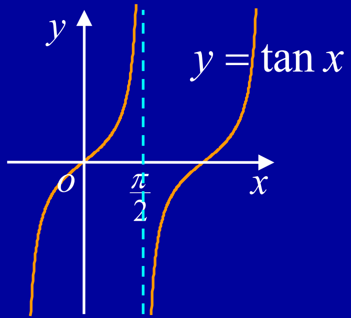
$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中至少一个不存在,

若其中有一个为∞, 称 x_0 为**无穷间断点**.

若其中有一个为振荡, 称 x_0 为**振荡间断点**.

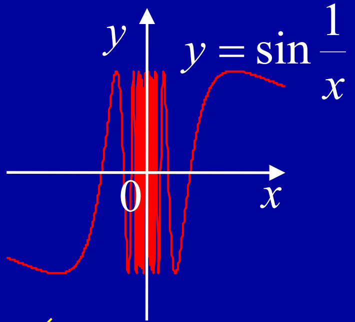
例如:

(1) $y = \tan x$



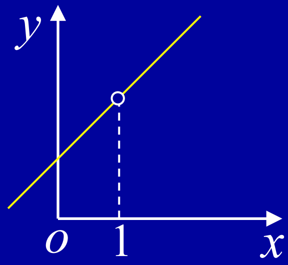
$x = \dfrac{\pi}{2}$ 为其无穷间断点 .

(2) $y = \sin \dfrac{1}{x}$



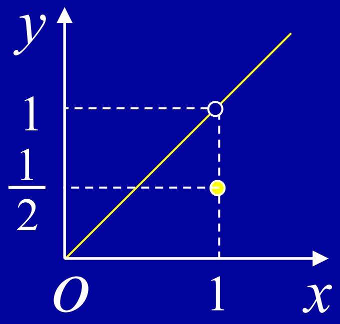
$x = 0$ 为其振荡间断点 .

(3) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$



$x = 1$ 为可去间断点 .

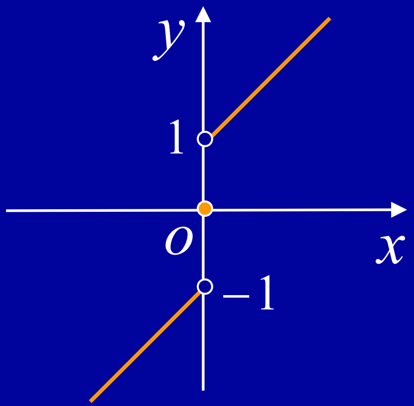
(4) $y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$



显然 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1)$

$x = 1$ 为其可去间断点 .

(5) $y = f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$

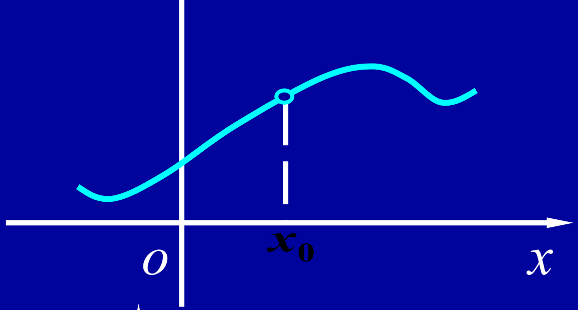


$f(0^-) = -1, \qquad f(0^+) = 1$

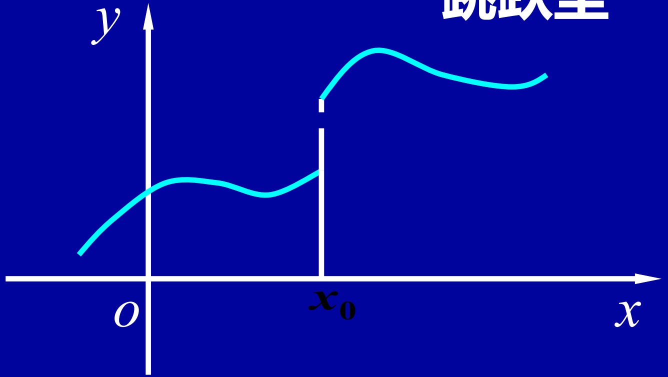
$x = 0$ 为其跳跃间断点 .

第一类间断点

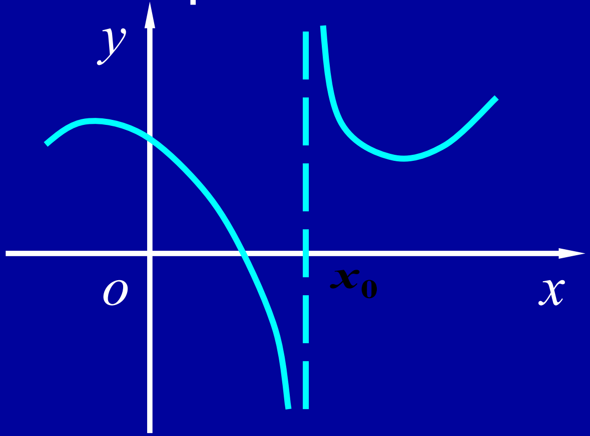
可去型



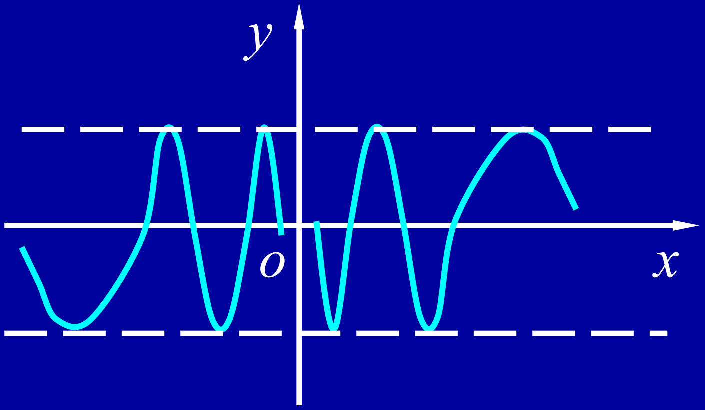
跳跃型



第二类间断点



无穷型



振荡型

内容小结

1. $f(x)$ 在点 x_0 连续的等价形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \rightleftarrows \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

$$\rightleftarrows \underbrace{f(x_0^-)=f(x_0)}_{\text{左连续}}\hspace{-2.5em}\overbrace{}^{}\hspace{0em} \underbrace{=f(x_0^+)}_{\text{右连续}}$$

2. $f(x)$ 在点 x_0 间断的类型

第一类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{可去间断点}\\ \text{跳跃间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限都存在

第二类间断点 $\left\{\begin{array}{l}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{array}\right\}$ 左右极限至少有一个不存在

思考与练习

1. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 间断点的类型.

答案: $x=1$ 是第一类可去间断点，

$x=2$ 是第二类无穷间断点 .

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x<0 \\ a+x^2, & x\geq 0 \end{cases}$，$a=$ __0__ 时 $f(x)$ 为连续函数.

提示: $f(0^-)=0$，$f(0^+)=f(0)=a$

备用题 确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 间断点的类型.

解: 间断点 $x=0,\ x=1$

$\because\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, $\therefore\ x=0$ 为无穷间断点;

当 $x\to 1^-$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to +\infty$, $\therefore\ f(x)\to 0$

当 $x\to 1^+$ 时, $\dfrac{x}{1-x}\to -\infty$, $\therefore\ f(x)\to 1$

故 $x=1$ 为跳跃间断点.

在 $x\neq 0,1$ 处, $f(x)$ 连续.