第七节

连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

二、初等函数的连续性

一、连续函数的运算法则

定理1. 在某点连续的有限个函数经有限次和 , 差 , 积 , 商(分母不为 0) 运算, 结果仍是一个在该点连续的函数 .

(利用极限的四则运算法则证明)

例如, $\sin x$, $\cos x$ 连续

$\Longrightarrow$ $\tan x$, $\cot x$ 在其定义域内连续

定理2. 连续单调递增 (递减) 函数的反函数也连续单调递增 (递减).　(证明略)

例如, $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续单调递增,

其反函数 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上也连续单调递增.

又如, $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续 单调 递增,

其反函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上也连续单调递增.

定理3. 连续函数的复合函数是连续的.

证: 设函数 $u=\phi(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $\phi(x_0)=u_0$.

函数 $y=f(x)$ 在点 u_0 连续, 即 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$.

于是

$$\lim_{x\to x_0} f[\phi(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f[\phi(x_0)]$$

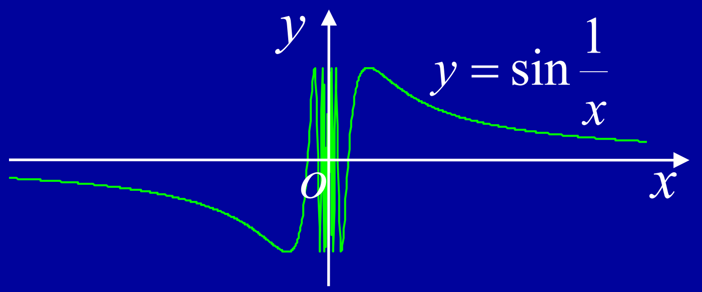
故复合函数 $f[\phi(x)]$ 在点 x_0 连续.

例如, $y=\sin\frac{1}{x}$ 是由连续函数链

$$y=\sin u,\quad u\in(-\infty,+\infty)$$

$$u=\frac{1}{x},\qquad x\in R^*$$

复合而成，因此 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\in R^*$ 上连续 .



例1. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 证明函数

$$\varphi(x) = \max\{ f(x), g(x) \}$$

$$\psi(x) = \min\{ f(x), g(x) \}$$

也在 $[a, b]$ 上连续.

证: $\because$ $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\left| f(x) - g(x) \right| + f(x) + g(x) \right]$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) - \left| f(x) - g(x) \right| \right]$$

根据连续函数运算法则, 可知 $\varphi(x), \psi(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续.

二、初等函数的连续性

$\left.\begin{array}{l}\text{基本初等函数在定义区间内连续}\\ \text{连续函数经四则运算仍连续}\\ \text{连续函数的复合函数连续}\end{array}\right\}$

$\boxed{\text{一切初等函数在定义区间内连续}}$

例如,

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$ (端点为单侧连续)

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi)$, $n\in Z$

而 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2n\pi$, $n\in Z$

因此它无连续点

基本初等函数的连续性

1. 利用 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) = 0$$

2. 由 $\sin x$, $\cos x$, a^x 的连续性及反函数的连续性可知

$\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$, $log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 连续

3. 由复合函数的连续性知，$x^a = e^{a\ln x}$ 连续

4. $y = C$ 连续

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解: 令 $t=a^x-1$, 则 $x=\log_a(1+t)$,

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a$

说明: 当 $a=e,\ x\to 0$ 时, 有

$\ln(1+x)\sim x \qquad e^x-1\sim x$

幂指函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a > 0$， $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$， 则

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = a^b = \left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}$$

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x) = -\infty\ (+\infty)$ ，则

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = 0\ (+\infty)$$

例

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{x}\cdot 2x} = e^6$$

说明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+u(x)\right]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln[1+u(x)]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)u(x)}$$

例5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+4, & x>1 \end{cases}$

讨论复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的连续性 .

解:

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} \varphi^2(x), & \varphi(x)\le 1 \\ 2-\varphi(x), & \varphi(x)>1 \end{cases}=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -2-x, & x>1 \end{cases}$$

$x\ne 1$时 $f[\varphi(x)]$ 为初等函数, 故此时连续; 而

$$\lim_{x\to 1^-} f[\varphi(x)]=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f[\varphi(x)]=\lim_{x\to 1^+}(-2-x)=-3$$

故 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x=1$ 不连续　$x=1$为第一类间断点 .

内容小结

基本初等函数**在定义区间内**连续

连续函数的**四则运算**的结果连续

连续函数的**反函数**连续

连续函数的**复合函数**连续

$\Bigg\}$ 初等函数在定义区间内连续

说明： 分段函数在界点处是否连续需讨论其左、右连续性.

思考与练习

若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 问 $f^2(x), |f(x)|$ 在 x_0 是否连续? 反之是否成立?

提示: "反之" 不成立 反例

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ -1, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

$f(x)$ 处处间断, $f^2(x), |f(x)|$ 处处连续 .