2. Feladat

November 30, 2024

0 Előkészületek

0.1 Szükséges könyvtárak importálása

[6]:
```
%reset -f

import pandas as pd
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
import statsmodels.api as sm
from scipy import stats
from statsmodels.stats.outliers_influence import variance_inflation_factor
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

0.2 Adatok beolvasása

[7]:
```
# Oszlopok definiálása
cols = ['Y', 'X_1', 'X_2']

# Adatok beolvasása string-ként
with open('data/bead2.csv', 'r') as file:
    lines = file.readlines()

# Az első sor elhagyása (mivel az az oszlopokat tartalmazza)
# Az értékek átalakítása soronként listává
data = [list(map(float, line.strip().strip('"').split(','))) for line in lines[1:
↪]]

# DataFrame létrehozása
df = pd.DataFrame(data, columns=cols)

# Adatok szétválasztása
X = df[['X_1', 'X_2']]  # magyarázó változók
y = df['Y']             # eredményváltozó

# Alapvető statisztikák
print("\nAlapvető statisztikák:")
```

```
print(df.describe())
```

```
Alapvető statisztikák:
               Y        X_1        X_2
count  50.000000  50.000000  50.000000
mean    6.130800   4.994800   5.082600
std     4.188834   2.909244   2.786417
min     0.000000   0.520000   0.340000
25%     1.335000   2.557500   2.612500
50%     7.915000   4.945000   5.130000
75%    10.000000   7.552500   7.927500
max    10.000000   9.900000   9.400000
```

1 Becslések

1.1 Az együtthatók pontbecslése

1.1.1 Regressziós együtthatók pontbecslése

[8]:
```
# Modell illesztése
model = LinearRegression()
model.fit(X, y)

# Együtthatók és tengelymetszet
print("\nRegressziós együtthatók:")
print(f"$b_0$ (tengelymetszet) = {model.intercept_:.4f}")
print(f"$b_1$ (küzdőképesség) = {model.coef_[0]:.4f}")
print(f"$b_2$ (gumimaci pontszám) = {model.coef_[1]:.4f}")
```

```
Regressziós együtthatók:
$b_0$ (tengelymetszet) = 4.1082
$b_1$ (küzdőképesség) = 1.0282
$b_2$ (gumimaci pontszám) = -0.6124
```

1.1.2 Standardizált regressziós együtthatók pontbecslése

[9]:
```
# Standardizálás
scaler = StandardScaler()
X_scaled = scaler.fit_transform(X)
y_scaled = StandardScaler().fit_transform(y.values.reshape(-1, 1)).ravel()

# Standardizált modell illesztése
model_scaled = LinearRegression()
model_scaled.fit(X_scaled, y_scaled)

# Standardizált együtthatók
```

```
print("\nStandardizált regressziós együtthatók:")
print(f"$b_1$* (küzdőképesség) = {model_scaled.coef_[0]:.4f}")
print(f"$b_2$* (gumimaci pontszám) = {model_scaled.coef_[1]:.4f}")
```

```
Standardizált regressziós együtthatók:
$b_1$* (küzdőképesség) = 0.7141
$b_2$* (gumimaci pontszám) = -0.4074
```

1.1.3 Lineáris modell:

OLS Lineáris regresszió

1.1.4 Eredmények értelmezése

Az együtthatók közvetlenül összehasonlíthatók, mert azonos skálán vannak.
Látható, hogy az X_1 változó hatása erősebb az Y-ra, mint X_2-é.

1.2 Előrejelzés készítése

[10]:
```
# Új megfigyelés
X_new = pd.DataFrame({
    'X_1': [85],
    'X_2': [8.5]
})

# Előrejelzés
prediction = model.predict(X_new)

print("\nElőrejelzés eredménye:")
print(f"Input értékek:")
print(f"- Küzdőképesség ($X_1$) = {X_new['X_1'].values[0]}")
print(f"- Gumimaci pontszám ($X_2$) = {X_new['X_2'].values[0]}")
print(f"\nBecsült erő (Y) = {prediction[0]:.4f}")
```

```
Előrejelzés eredménye:
Input értékek:
- Küzdőképesség ($X_1$) = 85
- Gumimaci pontszám ($X_2$) = 8.5

Becsült erő (Y) = 86.2962
```

1.3 Konfidenciaintervallum az együtthatókra

1.3.1 Kód és eredmény

[11]:
```python
X_sm = sm.add_constant(X)
model_sm = sm.OLS(y, X_sm).fit()

# 95%-os konfidencia intervallumok az együtthatókra
conf_int = model_sm.conf_int(alpha=0.05)
print("Egy R-szerű summary:")
print(model_sm.summary())
print("\n")
print(conf_int)
print("\nEgyütthatók 95%-os konfidencia intervallumai:")
print("-" * 50)
print("$b_0$ (tengelymetszet):")
print(f"[{conf_int.iloc[0,0]:.4f}, {conf_int.iloc[0,1]:.4f}]")
print("\n$b_1$ (küzdőképesség):")
print(f"[{conf_int.iloc[1,0]:.4f}, {conf_int.iloc[1,1]:.4f}]")
print("\n$b_2$ (gumimaci pontszám):")
print(f"[{conf_int.iloc[2,0]:.4f}, {conf_int.iloc[2,1]:.4f}]")
```

```
Egy R-szerű summary:
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      Y   R-squared:                       0.708
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.695
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     56.88
Date:                Sat, 30 Nov 2024   Prob (F-statistic):           2.81e-13
Time:                        21:31:19   Log-Likelihood:                -111.32
No. Observations:                  50   AIC:                             228.6
Df Residuals:                      47   BIC:                             234.4
Df Model:                           2
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const          4.1082      0.912      4.506      0.000       2.274       5.942
X_1            1.0282      0.114      9.041      0.000       0.799       1.257
X_2           -0.6124      0.119     -5.158      0.000      -0.851      -0.374
==============================================================================
Omnibus:                        2.782   Durbin-Watson:                   1.569
Prob(Omnibus):                  0.249   Jarque-Bera (JB):                1.544
Skew:                          -0.087   Prob(JB):                        0.462
Kurtosis:                       2.157   Cond. No.                         21.6
==============================================================================

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly
```

```
specified.


              0         1
const  2.273973  5.942342
X_1    0.799377  1.256950
X_2   -0.851320 -0.373576

Együtthatók 95%-os konfidencia intervallumai:
--------------------------------------------------
$b_0$ (tengelymetszet):
[2.2740, 5.9423]

$b_1$ (küzdőképesség):
[0.7994, 1.2570]

$b_2$ (gumimaci pontszám):
[-0.8513, -0.3736]
```

1.3.2 Eredmények értelmezése

A konfidencia intervallumok jelentése: 95%-os valószínűséggel a valódi együttható értéke a megadott intervallumon belül van. Az intervallum szélessége a becslés pontosságát jelzi (minél szélesebb, annál bizonytalanabb a becslés).
Ha az intervallum nem tartalmazza a 0-t, akkor az adott változó hatása szignifikáns ($\alpha = 0.05$ mellett).

Következtetések: A változók szignifikánsak.

1.4 Előrejelzési intervallum

[12]:
```python
# Konstans hozzáadása, csupa 1-es
X_new_sm = sm.add_constant(X_new, has_constant='add')

# Előrejelzési intervallum számítása
prediction = model_sm.get_prediction(X_new_sm)
pred_summary = prediction.summary_frame(alpha=0.05)

print("\nElőrejelzés és intervallumok:")
print("-" * 50)
print(f"Pontbecslés: {pred_summary['mean'].values[0]:.4f}")
print(f"95%-os előrejelzési intervallum:")
print(f"[{pred_summary['obs_ci_lower'].values[0]:.4f},␣
↪{pred_summary['obs_ci_upper'].values[0]:.4f}]")
```

```
Előrejelzés és intervallumok:
--------------------------------------------------
```

```
Pontbecslés: 86.2962
95%-os előrejelzési intervallum:
[67.3380, 105.2545]
```

2 Illeszkedésdiagnosztika

2.1 Determinációs együttható (R^2) és korrigált R^2

2.1.1 Kód és eredmények

[13]:
```python
r2 = model_sm.rsquared
adj_r2 = model_sm.rsquared_adj

print("\nDeterminációs együtthatók:")
print("-" * 50)
print(f"R² = {r2:.4f}")
print(f"Korrigált R² = {adj_r2:.4f}")
print(f"Különbség = {(r2-adj_r2):.4f}")
```

```
Determinációs együtthatók:
--------------------------------------------------
R² = 0.7077
Korrigált R² = 0.6952
Különbség = 0.0124
```

2.1.2 Értelmezés

R^2 (Determinációs együttható):

A determinációs együttható értéke 0.7077, ami a modell által magyarázott variancia arányát mutatja.
Az R^2 a teljes varianciához viszonyítva fejezi ki a modell által megmagyarázott hányadot.
Értéke 0 és 1 közé esik, ahol 0 esetén a modell semmit nem magyaráz, 1 esetén tökéletes az illeszkedés.
Az $R^2 = 1$ - (SSE/SST) képlettel számolható, ahol SSE a hiba szórásnégyzetösszeg, SST a teljes szórásnégyzetösszeg.

Korrigált R^2:

A korrigált R^2 értéke 0.6952, ami figyelembe veszi a magyarázó változók számát is.
A korrigált $R^2 = 1$ - (1-R^2)*(n-1)/(n-k-1) képlettel számolható, ahol n a mintaelemszám, k a magyarázó változók száma.
Ez a mutató bünteti a felesleges magyarázó változók bevonását.
Értéke mindig kisebb vagy egyenlő, mint az R^2.

A két mutató jelentősége:

Az R^2 érték sosem csökken új változó bevonásakor, akkor sem, ha az valójában nem javít a modellen.
A korrigált R^2 ezzel szemben csökkenhet, ha nem hasznos változót vonunk be a modellbe.

Modellek összehasonlítására ezért a korrigált R^2 alkalmasabb.
Ha nagy a különbség a két érték között, az felesleges változók jelenlétére utalhat.

Értékelés:

A kapott $R^2 = 0.7077$ azt jelenti, hogy modellünk a variancia 70.77%-át magyarázza meg. A korrigált $R^2 = 0.6952$ érték a modell tényleges magyarázó erejét mutatja.

3 Modelldiagnosztika

3.1 Modelldiagnosztikai tesztek

3.1.1 Kód és eredmények

[14]:
```
# F-próba statisztikái
f_stat = model_sm.fvalue
f_pvalue = model_sm.f_pvalue
df_reg = 2  # magyarázó változók száma
df_res = len(df)-3  # n-k-1, ahol k a magyarázó változók száma
f_crit = stats.f.ppf(0.95, df_reg, df_res)

print(f"F-statisztika: {f_stat:.4f}")
print(f"p-érték: {f_pvalue}")
print(f"Kritikus érték (F0.95({df_reg},{df_res})): {f_crit:.4f}")
```

```
F-statisztika: 56.8848
p-érték: 2.808718819001525e-13
Kritikus érték (F0.95(2,47)): 3.1951
```

3.1.2 Értelmezés

Hipotézisek:

H_0: A modell nem magyarázza az eredményváltozó varianciáját ($X_1 = X_2 = 0$)
H_1: A modell szignifikánsan magyarázza az eredményváltozó varianciáját (X_i $\neq$ 0)
Szignifikanciaszint: $\alpha = 0.05$

F-próba eredménye:

F-statisztika értéke: 56.8848
p-érték: 2.808718819001525e-13
Kritikus érték (F0.95(2,47)): 3.1951

Döntés:

Az F-próba p-értéke (2.808718819001525e-13) kisebb, mint $\alpha = 0.05$.
Elvetjük a nullhipotézist.

Következtetés:

A kapott eredmények alapján a modellünk szignifikáns.
Ez azt jelenti, hogy a küzdőképesség és gumimaci pontszám együttesen magyarázzák szignifikánsan a mesehős erejét.
A modell alkalmas előrejelzésre és további elemzésre.
Az eredmény összhangban van a korábban számolt R^2 értékkel.

A teszt jelentősége:

Az F-próba a modell egészének magyarázó erejét vizsgálja.
Azt teszteli, hogy a magyarázó változók együttesen szignifikáns hatással vannak-e az eredményváltozóra.
Az F-próba a determinációs együttható nullától való eltérését vizsgálja.
A teszt a regressziós modell gyakorlati használhatóságáról ad információt.

3.2 Változók szignifikanciájának tesztelése

3.2.1 Kód és eredmények

[15]:
```
# Kritikus érték meghatározása (kétoldali próba)
df_res = len(df) - 3  # szabadságfok: n-k-1
t_crit = stats.t.ppf(0.975, df_res)  # 0.975 a kétoldali próba miatt

print("\nKritikus érték:")
print(f"t_krit = ±{t_crit:.4f} (szabadságfok = {df_res})")
print("\nEgyütthatók tesztjei:")
print(model_sm.summary().tables[1])
```

```
Kritikus érték:
t_krit = ±2.0117 (szabadságfok = 47)

Együtthatók tesztjei:
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const          4.1082      0.912      4.506      0.000       2.274       5.942
X_1            1.0282      0.114      9.041      0.000       0.799       1.257
X_2           -0.6124      0.119     -5.158      0.000      -0.851      -0.374
==============================================================================
```

3.2.2 Értelmezés

Hipotézispárok:

Tengelymetszet (b_0):
H_0: $b_0 = 0$
H_1: $b_0 \neq 0$

Küzdőképesség (b_1):
H_0: $b_1 = 0$
H_1: $b_1 \neq 0$

Gumimaci pontszám (b_2):
H_0: $b_2 = 0$
H_1: $b_2 \neq 0$

Eredmények:

Tengelymetszet (b_0):
|t-érték| = 4.506 > 2.0117 (t_krit)
Döntés: 5%-os szignifikanciaszinten elvetjük H_0-t

Küzdőképesség (b_1):
|t-érték| = 9.041 > 2.0117 (t_krit)
Döntés: 5%-os szignifikanciaszinten elvetjük H_0-t

Gumimaci pontszám (b_2):
|t-érték| = 5.158 > 2.0117 (t_krit)
Döntés: 5%-os szignifikanciaszinten elvetjük H_0-t

Következtetések:

A t-próba kritikus értéke ±2.0117 (47 szabadságfok mellett, 5%-os szignifikanciaszinten).
A tengelymetszet |t| = 4.506 értéke meghaladja a kritikus értéket, ami azt jelenti, hogy amikor mindkét magyarázó változó 0, akkor a várható Y érték (4.1082) szignifikánsan különbözik nullától.
A küzdőképesség |t| = 9.041 értéke jelentősen meghaladja a kritikus értéket, tehát erős szignifikáns hatást mutat.
A gumimaci pontszám |t| = 5.158 értéke szintén meghaladja a kritikus értéket, így ez a hatás is szignifikáns.
Mindhárom változó esetében elvetjük a nullhipotézist, ami azt jelenti, hogy mindegyik hatása szignifikáns.

3.3 Multikollinearitás vizsgálata

3.3.1 Kód és eredmények

[16]:
```
vif_data = pd.DataFrame()
vif_data["Változó"] = X.columns
vif_data["VIF"] = [variance_inflation_factor(X.values, i) for i in range(X.
↪shape[1])]

print("\nVIF értékek:")
print(vif_data)
```

```
VIF értékek:
  Változó       VIF
```

```
0      X_1  2.273206
1      X_2  2.273206
```

3.3.2 Értelmezés

Döntési szabály:

VIF > 5: erős multikollinearitás
VIF > 10: súlyos multikollinearitás
VIF ≈ 1: nincs multikollinearitás

VIF érték:

A VIF érték: 2.273206
A VIF érték azt mutatja, hogy egy változó mennyire magyarázható a többi magyarázó változóval.
VIF = 1/(1-R^2), ahol R^2 az adott változónak a többi magyarázó változóval vett determinációs együtthatója.
A kapott VIF értékek alapján nincs jelentős multikollinearitás a modellben.

Miért probléma a multikollinearitás?

A multikollinearitás növeli az együtthatók standard hibáját. Bizonytalanabbá teszi a paraméterek becslését. Nehézzé teszi az egyes változók egyedi hatásának elkülönítését. Instabillá teheti a modellt: kis változás az adatokban nagy változást okozhat az együtthatókban.

3.4 Hibatagok vizsgálata

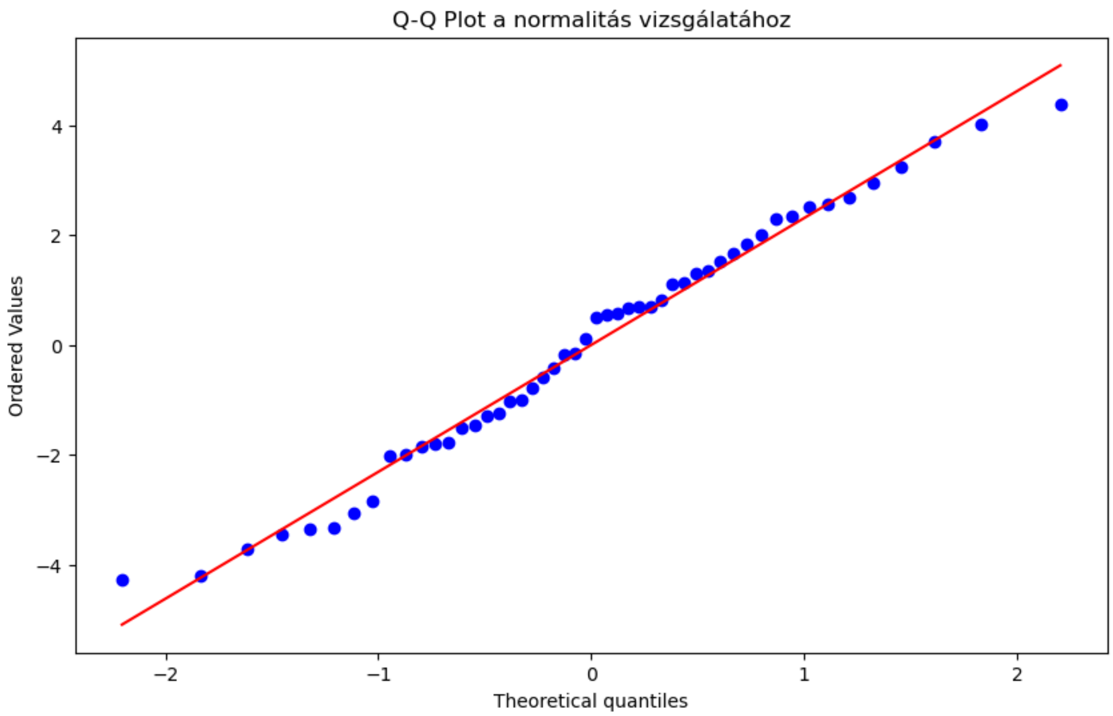
3.4.1 Kód és eredmények

[17]:
```python
# Reziduálisok kiszámítása
residuals = model_sm.resid

# 1. Várható érték vizsgálata
resid_mean = np.mean(residuals)
resid_std = np.std(residuals, ddof=len(X_sm.columns))
t_stat = resid_mean / (resid_std/np.sqrt(len(residuals)))
p_value_mean = 2 * stats.t.cdf(-abs(t_stat), len(residuals)-1)

# 2. Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk teszt)
shapiro_stat, shapiro_p = stats.shapiro(residuals)

# 3. Függetlenség vizsgálata (Durbin-Watson teszt)
dw_stat = sm.stats.stattools.durbin_watson(residuals)

# 4. Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt)
bp_test = sm.stats.diagnostic.het_breuschpagan(residuals, X_sm)

# 5. Variancia becslése
variance = np.var(residuals, ddof=len(X_sm.columns))
```

```
print("\nHibatagok vizsgálata:")
print("-" * 50)

print("\nVárható érték vizsgálata:")
print(f"Átlag (várható érték becslése): {resid_mean}")
print(f"t-statisztika: {t_stat}")
print(f"p-érték: {p_value_mean}")

print("\nNormalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk):")
print(f"Teszt statisztika: {shapiro_stat:.4f}")
print(f"p-érték: {shapiro_p:.4f}")

print("\nFüggetlenség vizsgálata (Durbin-Watson):")
print(f"DW statisztika: {dw_stat:.4f}")

print("\nHomoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan):")
print(f"Teszt statisztika: {bp_test[0]:.4f}")
print(f"p-érték: {bp_test[1]:.4f}")

print("\nVariancia becslése:")
print(f"Becsült variancia: {variance:.4f}")

plt.figure(figsize=(10, 6))
stats.probplot(residuals, dist="norm", plot=plt)
plt.title('Q-Q Plot a normalitás vizsgálatához')
plt.show()
```

```
Hibatagok vizsgálata:
--------------------------------------------------

Várható érték vizsgálata:
Átlag (várható érték becslése): -4.263256414560601e-16
t-statisztika: -1.3035784262394252e-15
p-érték: 0.9999999999999989

Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk):
Teszt statisztika: 0.9779
p-érték: 0.4678

Függetlenség vizsgálata (Durbin-Watson):
DW statisztika: 1.5689

Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan):
Teszt statisztika: 1.3786
p-érték: 0.5019
```

```
Variancia becslése:
Becsült variancia: 5.3478
```



3.4.2 Értelmezés

Várható érték vizsgálata:

H_0: $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$
H_1: $\mathrm{E}(\varepsilon) \neq 0$
t-statisztika értéke: -1.3036e-15
p-érték: 1.0000
Döntés: $1.0000 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0-t
A lineáris regresszióban, ha a modell tartalmaz konstans tagot (interceptet), akkor a reziduálisok összege nulla lesz, és így az átlaguk is nulla, ezért ez nem túlzottan meglepő.

Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk teszt):

H_0: A hibatagok normális eloszlásúak
H_1: A hibatagok nem normális eloszlásúak
Teszt statisztika: 0.9779
p-érték: 0.4678
Döntés: $0.4678 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0-t

Függetlenség vizsgálata (Durbin-Watson teszt):

H_0: A hibatagok függetlenek
H_1: A hibatagok autokorreláltak
DW statisztika: 1.5689
Kritikus értékek 5%-os szinten: dL = 1.46, dU = 1.63 (DW táblázatból: https://www3.nd.edu/~wevans1/econ30331/durbin_watson_tables.pdf)
Döntés: 1.5689 beleesik az [1.46, 1.63] intervallumba, így nem tudunk egyértelmű döntést hozni

Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt):

H_0: A hibatagok homoszkedasztikusak
H_1: A hibatagok heteroszkedasztikusak
Teszt statisztika: 1.3786
p-érték: 0.5019
Döntés: $0.5019 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0-t

Variancia becslése:

A hibatagok becsült varianciája: 5.3478
A variancia a reziduálisok szóródását méri a regressziós egyenes körül.

Összefoglaló értékelés:

A várható érték feltétel teljesül.
A normalitás feltétele teljesül.
A függetlenség feltételéről nem tudunk egyértelmű döntést hozni.
A homoszkedaszticitás feltétele teljesül (a szórás állandó).