

3. Feladat

November 30, 2024

0 Előkészületek

0.1 Szükséges könyvtárak importálása

```
[112]: %reset -f
import pandas as pd
import numpy as np
import statsmodels.api as sm
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.metrics import mean_squared_error, mean_absolute_error, r2_score
from scipy import stats
from statsmodels.tsa.holtwinters import SimpleExpSmoothing
from statsmodels.graphics.tsaplots import plot_acf, plot_pacf
from statsmodels.tsa.stattools import adfuller
from statsmodels.tsa.arima.model import ARIMA
from statsmodels.stats.diagnostic import acorr_ljungbox
from statsmodels.graphics.gofplots import qqplot
```

0.2 Adatok beolvasása

```
[113]: # Oszlopok definiálása
cols = ['Idő', 'Érték']

# Adatok beolvasása string-ként
with open('data/bead3.csv', 'r', encoding='latin-1') as file:
    lines = file.readlines()

# Az első sor elhagyása és értékek átalakítása
data = [list(map(float, line.strip().strip('"').split(','))) for line in lines[1:
↪]]

# DataFrame létrehozása
df = pd.DataFrame(data, columns=cols)
```

1 Determinisztikus modell illesztése

1.1 Kód és eredmények

```
[120]: # Modellek összehasonlítása
max_degree = 10
selected_degree = 3 # a kiválasztott fokszám
results = []

# Különböző fokszámú modellek összehasonlítása
for degree in range(0, max_degree):
    X = np.vander(df['Idő'], degree + 1)
    model = sm.OLS(df['Érték'], X).fit()
    r2 = r2_score(df['Érték'], model.fittedvalues)

    results.append({
        'Fokszám': degree,
        'R2': r2,
        'AIC': model.aic,
        'BIC': model.bic
    })

# Eredmények kiírása
results_df = pd.DataFrame(results)
print("\nModellek összehasonlítása:")
print(results_df)

# Kiválasztott fokszámú polinom illesztése
X = np.vander(df['Idő'], selected_degree + 1)
model = sm.OLS(df['Érték'], X).fit()

# Eredmények kiírása
print(f"\n{n{selected_degree}}. fokú polinom illesztése:")
print(model.summary().tables[0])
print(model.summary().tables[1])

# Reziduálisok vizsgálata
residuals = model.resid

# 1. Várható érték vizsgálata
resid_mean = np.mean(residuals)
resid_std = np.std(residuals, ddof=selected_degree+1)
t_stat = resid_mean / (resid_std/np.sqrt(len(residuals)))
p_value_mean = 2 * stats.t.cdf(-abs(t_stat), len(residuals)-1)

# 2. Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk teszt)
shapiro_stat, shapiro_p = stats.shapiro(residuals)
```

```

# 3. Függelenség vizsgálata (Durbin-Watson teszt)
dw_stat = sm.stats.stattools.durbin_watson(residuals)

# 4. Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt)
bp_test = sm.stats.diagnostic.het_breuschpagan(residuals, model.model.exog)

print("\nHibatagok vizsgálata - eredmények:")
print("-" * 50)
print(f"1. Várható érték vizsgálata:")
print(f"Átlag (várható érték becslése): {resid_mean:.6f}")
print(f"t-statisztika: {t_stat}")
print(f"p-érték: {p_value_mean}")

print(f"\n2. Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk):")
print(f"Teszt statisztika: {shapiro_stat:.6f}")
print(f"p-érték: {shapiro_p:.6f}")

print(f"\n3. Függelenség vizsgálata (Durbin-Watson):")
print(f"DW statisztika: {dw_stat:.6f}")

print(f"\n4. Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan):")
print(f"Teszt statisztika: {bp_test[0]:.6f}")
print(f"p-érték: {bp_test[1]:.6f}")

# Előrejelzés a következő 10 időpontra
future_points = np.arange(len(df) + 1, len(df) + 11)
X_future = np.vander(future_points, selected_degree + 1)
predictions = model.predict(X_future)

print("\nElőrejelzések:")
for i, pred in enumerate(predictions):
    print(f"{future_points[i]}. időpont: {pred:.2f}")

# Ábrázolás
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.scatter(df['Idő'], df['Érték'], color='blue', label='Tényleges értékek')
plt.plot(df['Idő'], model.fittedvalues, color='red', label='Illesztett görbe')
plt.plot(future_points, predictions, color='green', linestyle='--',
        label='Előrejelzés')
plt.xlabel('Idő')
plt.ylabel('Érték')
plt.title(f'{selected_degree}. fokú polinom illesztése és előrejelzés')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

Modellek összehasonlítása:

	Fokszám	R ²	AIC	BIC
0	0	0.000000	387.062930	388.974953
1	1	0.062344	385.844343	389.668389
2	2	0.902997	274.412442	280.148511
3	3	0.921054	266.113215	273.761307
4	4	0.986175	180.999703	190.559818
5	5	0.987419	178.285939	189.758077
6	6	0.988357	176.408735	189.792896
7	7	0.988364	178.381243	193.677427
8	8	0.994452	143.342890	160.551097
9	9	0.992497	156.440981	171.737165

3. fokú polinom illesztése:

OLS Regression Results

Dep. Variable:	Érték	R-squared:	0.921
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.916
Method:	Least Squares	F-statistic:	178.9
Date:	Sat, 30 Nov 2024	Prob (F-statistic):	2.30e-25
Time:	17:10:13	Log-Likelihood:	-129.06
No. Observations:	50	AIC:	266.1
Df Residuals:	46	BIC:	273.8
Df Model:	3		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
x1	0.0006	0.000	3.244	0.002	0.000	0.001
x2	0.0064	0.016	0.412	0.682	-0.025	0.038
x3	-2.0320	0.342	-5.935	0.000	-2.721	-1.343
const	9.5845	2.036	4.707	0.000	5.486	13.683

Hibatagok vizsgálata - eredmények:

1. Várható érték vizsgálata:

Átlag (várható érték becslése): 0.000000

t-statisztika: 3.9543447227832004e-13

p-érték: 0.9999999999999686

2. Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk):

Teszt statisztika: 0.971069

p-érték: 0.255692

3. Függetlenség vizsgálata (Durbin-Watson):

DW statisztika: 0.160960

4. Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan):

Teszt statisztika: 16.254783

p-érték: 0.001005

Előrejelzések:

51. időpont: 8.67

52. időpont: 12.46

53. időpont: 16.46

54. időpont: 20.69

55. időpont: 25.14

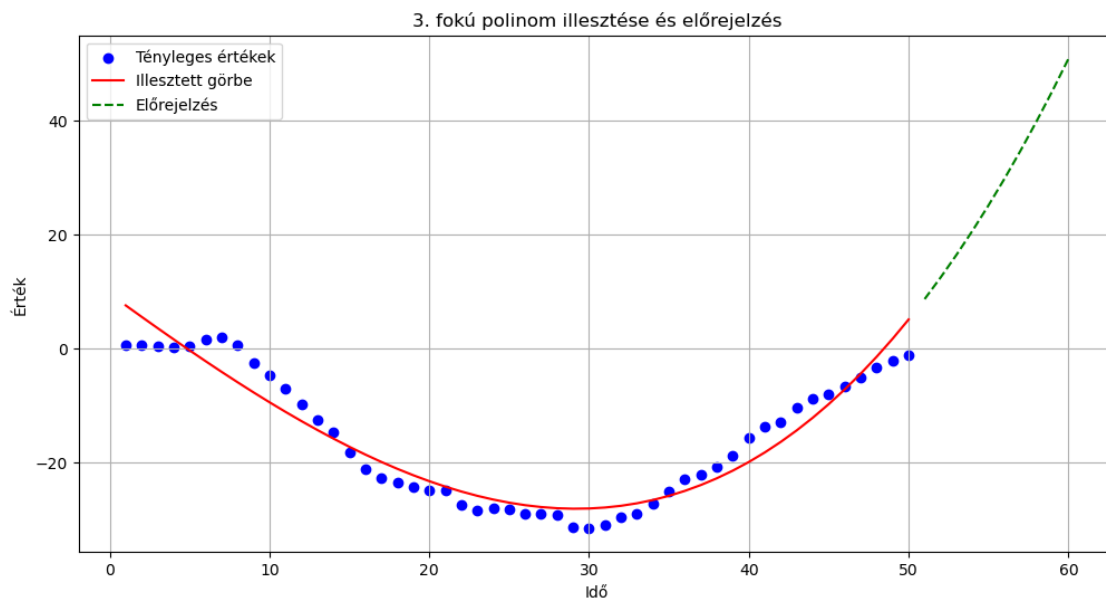
56. időpont: 29.81

57. időpont: 34.72

58. időpont: 39.86

59. időpont: 45.24

60. időpont: 50.86



1.2 Értelmezés $\epsilon = 0.05$ szignifikanciaszint mellett

1.2.1 Modellválasztás

Az AIC és BIC értékek alapján a 8. fokú polinom adná a legjobb illeszkedést, azonban a 3. fokú polinom mellett döntöttem az előrejelzés robusztussága miatt.

1.2.2 Várható érték vizsgálata

$$H_0: E(\epsilon) = 0$$

$$H_1: E(\epsilon) \neq 0$$

t-statisztika értéke: 0.0000

p-érték: 0.9999

Döntés: $0.9999 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

1.2.3 Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk teszt)

H_0 : A hibatagok normális eloszlásúak

H_1 : A hibatagok nem normális eloszlásúak

Teszt statisztika: 0.9711

p-érték: 0.2557

Döntés: $0.2557 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

1.2.4 Függelenség vizsgálata (Durbin-Watson teszt)

H_0 : A hibatagok függetlenek

H_1 : A hibatagok autokorreláltak

DW statisztika: 0.1610

Döntés: A DW statisztika 0-hoz közeli értéke erős pozitív autokorrelációt jelez

1.2.5 Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt)

H_0 : A hibatagok homoszkedasztikusak

H_1 : A hibatagok heteroszkedasztikusak

Teszt statisztika: 16.2548

p-érték: 0.0010

Döntés: $0.0010 < 0.05$, tehát elvetjük H_0 -t

1.2.6 Összefoglaló értékelés

A hibatagok diagnosztikai vizsgálata alapján:

- A várható érték feltétel teljesül (az átlag gyakorlatilag 0).
- A normalitás feltétele teljesül (a hibatagok normális eloszlásúak).
- A függetlenség feltétele nem teljesül, erős pozitív autokorreláció van jelen.
- A homoszkedaszticitás feltétele nem teljesül, a hibatagok heteroszkedasztikusak.

2 Exponenciális simítás alkalmazása

2.1 Kód és eredmények

```
[115]: # Exponenciális simítás (optimális alpha meghatározása)
model = SimpleExpSmoothing(df['Érték']).fit()
alpha = model.model.params['smoothing_level']

# Illesztett értékek és előrejelzések
fitted_values = model.fittedvalues
forecast = model.forecast(5)

# Illeszkedés vizsgálata
mae = mean_absolute_error(df['Érték'], fitted_values)
mse = mean_squared_error(df['Érték'], fitted_values)
```

```

rmse = np.sqrt(mse)

# Reziduálisok vizsgálata
residuals = df['Érték'] - fitted_values

# 1. Várható érték vizsgálata
resid_mean = np.mean(residuals)
resid_std = np.std(residuals, ddof=1)
t_stat = resid_mean / (resid_std / np.sqrt(len(residuals)))
p_value_mean = 2 * stats.t.cdf(-abs(t_stat), len(residuals) - 1)

# 2. Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk teszt)
shapiro_stat, shapiro_p = stats.shapiro(residuals)

# 3. Függelenség vizsgálata (Durbin-Watson teszt)
dw_stat = sm.stats.stattools.durbin_watson(residuals)

# 4. Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt)
exog = sm.add_constant(fitted_values)
bp_test = sm.stats.diagnostic.het_breuschpagan(residuals, exog)

# Eredmények kiírása
print("\nIlleszkedési mutatók:")
print(f"MAE = {mae:.4f}")
print(f"MSE = {mse:.4f}")
print(f"RMSE = {rmse:.4f}")
print(f"Smoothing level (alpha) = {alpha:.4f}")

print("\nHibatagok vizsgálata - eredmények:")
print("-" * 50)
print("1. Várható érték vizsgálata:")
print(f"Átlag: {resid_mean:.6f}")
print(f"t-statisztika: {t_stat:.6f}")
print(f"p-érték: {p_value_mean:.6f}")

print("\n2. Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk):")
print(f"Teszt statisztika: {shapiro_stat:.6f}")
print(f"p-érték: {shapiro_p:.6f}")

print("\n3. Függelenség vizsgálata (Durbin-Watson):")
print(f"DW statisztika: {dw_stat:.6f}")

print("\n4. Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt):")
print(f"Teszt statisztika: {bp_test[0]:.6f}")
print(f"p-érték: {bp_test[1]:.6f}")

print("\nElőrejelzések:")

```

```

for i, pred in enumerate(forecast, 1):
    print(f"{len(df) + i}. időpont: {pred:.2f}")

# Ábrázolás
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.scatter(df['Idő'], df['Érték'], color='blue', label='Eredeti adatok')
plt.plot(df['Idő'], fitted_values, 'r-', label=f'Simított ( $\alpha={alpha:.4f}$ )')

future_points = np.arange(len(df), len(df) + len(forecast))
plt.plot(future_points, forecast, 'g--', label='Előrejelzés')

plt.title('Exponenciális simítás és előrejelzés')
plt.xlabel('Idő')
plt.ylabel('Érték')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Reziduálisok ábrázolása
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.scatter(fitted_values, residuals)
plt.axhline(y=0, color='r', linestyle='--')
plt.xlabel('Illesztett értékek')
plt.ylabel('Reziduálisok')
plt.title('Reziduálisok az illesztett értékek függvényében')
plt.grid(True)
plt.show()

```

Illeszkedési mutatók:

MAE = 1.3446

MSE = 2.7510

RMSE = 1.6586

Smoothing level (alpha) = 1.0000

Hibatagok vizsgálata - eredmények:

1. Várható érték vizsgálata:

Átlag: -0.035400

t-statisztika: -0.149436

p-érték: 0.881823

2. Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk):

Teszt statisztika: 0.961779

p-érték: 0.105540

3. Függetlenség vizsgálata (Durbin-Watson):

DW statisztika: 0.376660

4. Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt):

Teszt statisztika: 0.487821

p-érték: 0.484901

Előrejelzések:

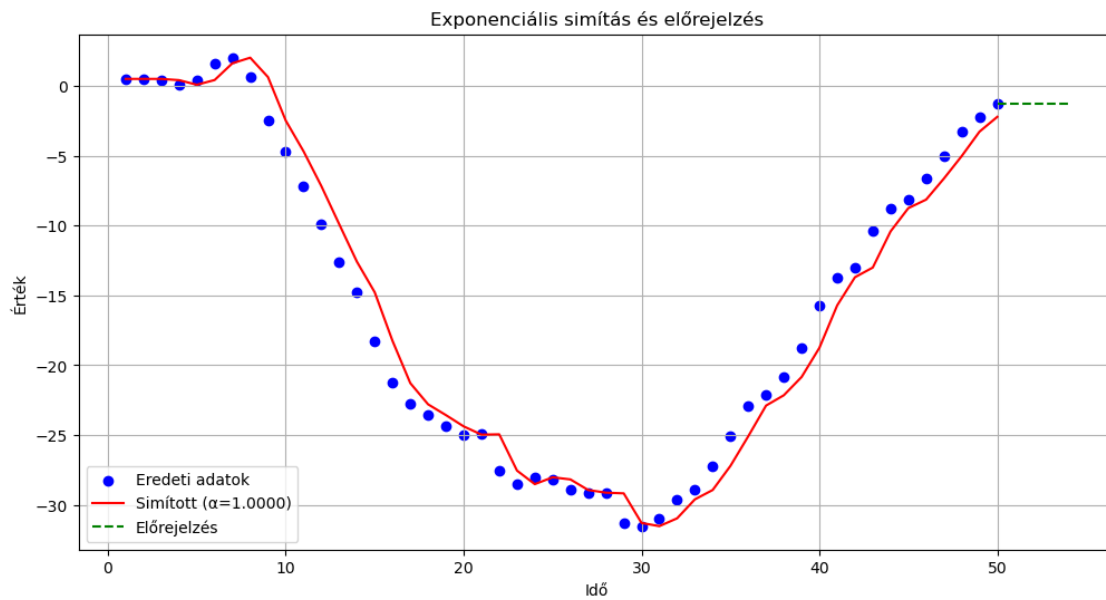
51. időpont: -1.25

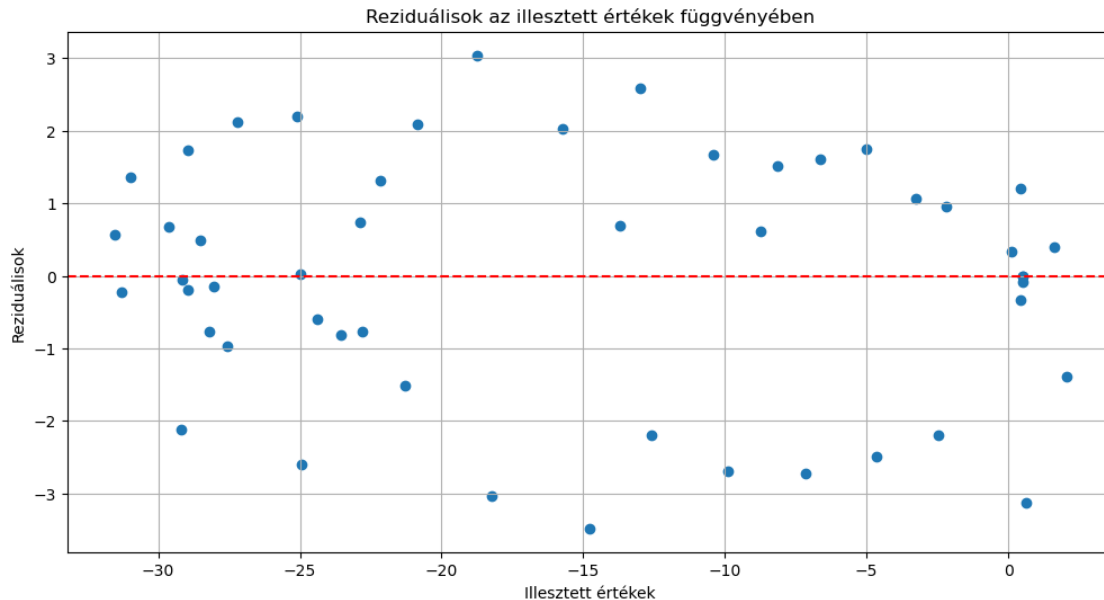
52. időpont: -1.25

53. időpont: -1.25

54. időpont: -1.25

55. időpont: -1.25





2.2 Exponenciális simítás eredményei

2.2.1 Modell specifikációk

A modellben a SimpleExpSmoothing függvény által optimalisan meghatározott $\alpha = 1.0000$ simítási paramétert használtuk.

2.2.2 Illeszkedési mutatók

MAE (Mean Absolute Error): 1.3446

Az átlagos abszolút hiba azt mutatja, hogy az előrejelzéseink átlagosan 1.3446 egységgel térnek el a tényleges értékektől. Ez a hiba mértéke közepesnek tekinthető, ami arra utal, hogy a modell nem biztosít kiemelkedően pontos illeszkedést az adatokhoz.

MSE (Mean Squared Error): 2.7510

Az átlagos négyzetes hiba az előrejelzési hibák négyzetének átlaga, jelen esetben 2.7510. Ez a mutató érzékeny a nagyobb eltérésekre, mivel a hibákat négyzetre emeli.

RMSE (Root Mean Squared Error): 1.6586

A négyzetes átlaggyök hiba az MSE négyzetgyöke, ami az előrejelzési hibák átlagos nagyságát adja meg az eredeti mértékegységben. Az 1.6586-os érték megerősíti, hogy az előrejelzések átlagosan körülbelül 1.66 egységgel térnek el a tényleges értékektől.

Simítási paraméter (alpha): 1.0000

Az alpha értéke 1.0, ami azt jelenti, hogy a modell teljes mértékben az utolsó megfigyelésre támaszkodik az előrejelzés során. Ebben az esetben a modell nem simítja az adatokat, hanem minden előrejelzés az utolsó ismert érték lesz.

2.3 Hibatagok tulajdonságainak vizsgálata $\varepsilon = 0.05$ szignifikanciaszint mellett

2.3.1 Várható érték vizsgálata

H_0 : $E(\varepsilon) = 0$

H_1 : $E(\varepsilon) \neq 0$

t-statisztika értéke: -0.1494

p-érték: 0.8818

Döntés: $0.8818 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

2.3.2 Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk teszt)

H_0 : A hibatagok normális eloszlásúak

H_1 : A hibatagok nem normális eloszlásúak

Teszt statisztika: 0.9618

p-érték: 0.1055

Döntés: $0.1055 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

2.3.3 Függetlenség vizsgálata (Durbin-Watson teszt)

H_0 : A hibatagok függetlenek

H_1 : A hibatagok autokorreláltak

DW statisztika: 0.3767

Döntés: A DW statisztika 0-hoz közeli értéke erős pozitív autokorrelációt jelez, ami azt sugallja, hogy a modell nem kezeli megfelelően az időbeli függőségeket, és az előrejelzési hibák egymással korreláltak.

2.3.4 Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt)

H_0 : A hibatagok homoszkedasztikusak

H_1 : A hibatagok heteroszkedasztikusak

Teszt statisztika: 0.4878

p-érték: 0.4849

Döntés: $0.4849 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

2.4 Összefoglaló értékelés

A hibatagok diagnosztikai vizsgálata alapján:

- A várható érték feltétel teljesül (az átlag gyakorlatilag 0)
- A normalitás feltétele teljesül (a hibatagok normális eloszlásúak)
- A függetlenség feltétele nem teljesül, erős pozitív autokorreláció van jelen
- A homoszkedaszticitás feltétele teljesül (a szórás állandó)

3 Box-Jenkins modell

3.1 Kód és eredmények

```
[121]: # Idősor stacionaritásának vizsgálata (ADF teszt)
adf_result = adfuller(df['Érték'])
print('\nADF Teszt eredménye:')
print(f'ADF Statisztika: {adf_result[0]:.4f}')
print(f'p-érték: {adf_result[1]:.4f}')

# ACF és PACF ábrák a paraméterek meghatározásához
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 8))
plot_acf(df['Érték'], ax=ax1)
plot_pacf(df['Érték'], ax=ax2)
plt.tight_layout()
plt.show()

# ARIMA modell illesztése
p, d, q = 1, 1, 1
model = ARIMA(df['Érték'], order=(p, d, q))
results = model.fit()

# Illesztett értékek és előrejelzések
fitted_values = results.fittedvalues
forecast = results.forecast(steps=5)

# Reziduálisok vizsgálata
residuals = results.resid

# 1. Várható érték vizsgálata
resid_mean = np.mean(residuals)
resid_std = np.std(residuals, ddof=1)
t_stat = resid_mean / (resid_std/np.sqrt(len(residuals)))
p_value_mean = 2 * stats.t.cdf(-abs(t_stat), len(residuals)-1)

# 2. Normalitás vizsgálata
shapiro_stat, shapiro_p = stats.shapiro(residuals)

# 3. Függetlenség vizsgálata
dw_stat = sm.stats.stattools.durbin_watson(residuals)

# 4. Homoszkedaszticitás vizsgálata
exog = sm.add_constant(fitted_values)
bp_test = sm.stats.diagnostic.het_breuschpagan(residuals, exog)

print('\nModell eredmények:')
print(results.summary().tables[0])
print(results.summary().tables[1])
```

```

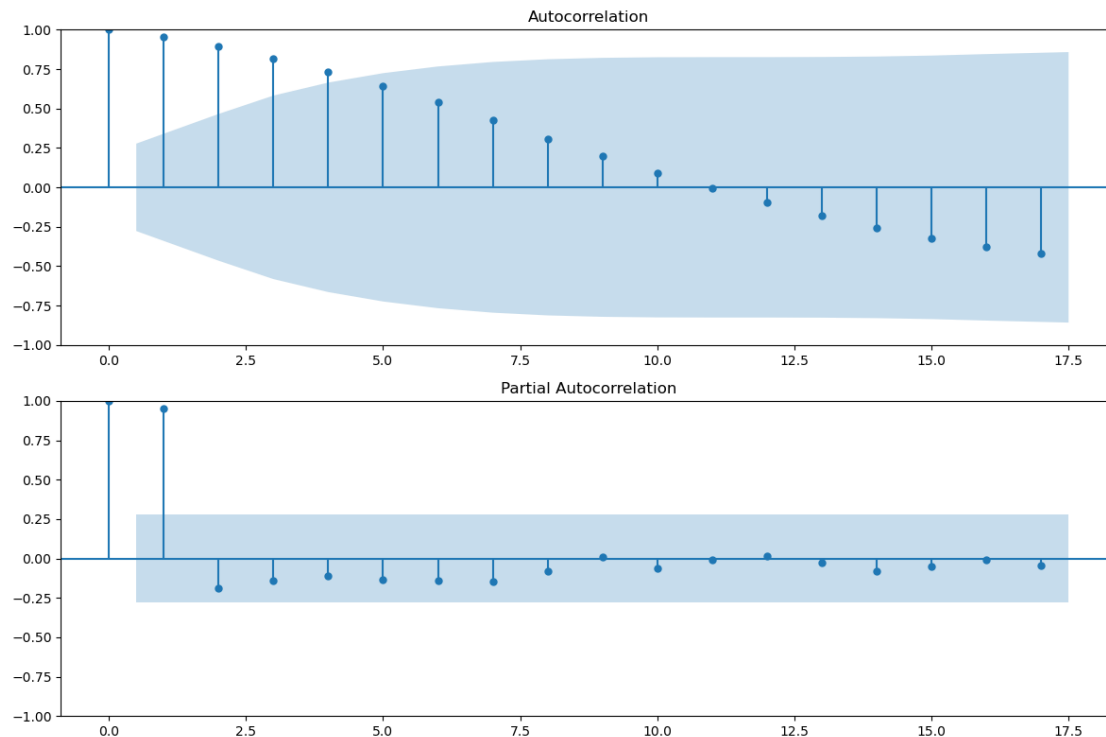
print('\nHibatagok vizsgálata:')
print(f'Várható érték teszt p-érték: {p_value_mean:.4f}')
print(f'Shapiro-Wilk teszt p-érték: {shapiro_p:.4f}')
print(f'Durbin-Watson statisztika: {dw_stat:.4f}')
print(f'Breusch-Pagan teszt p-érték: {bp_test[1]:.4f}')

print('\nElőrejelzések:')
for i, pred in enumerate(forecast, 1):
    print(f'{len(df) + i}. időpont: {pred:.2f}')

# Ábrázolás
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(df['Idő'], df['Érték'], 'b.', label='Eredeti adatok')
plt.plot(df['Idő'], fitted_values, 'r-', label=f'ARIMA({p},{d},{q})')
future_points = np.arange(len(df), len(df) + 5)
plt.plot(future_points, forecast, 'g--', label='Előrejelzés')
plt.title('ARIMA modell és előrejelzés')
plt.xlabel('Idő')
plt.ylabel('Érték')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

ADF Teszt eredménye:
 ADF Statisztika: -2.5644
 p-érték: 0.1006



Modell eredmények:

SARIMAX Results

```
=====
Dep. Variable:          Érték    No. Observations:          50
Model:                 ARIMA(1, 1, 1)  Log Likelihood            -68.798
Date:                  Sat, 30 Nov 2024  AIC                        143.597
Time:                  17:17:04    BIC                       149.272
Sample:                0          HQIC                         145.750
                        - 50
Covariance Type:       opg
=====
```

```
=====
              coef    std err          z      P>|z|      [0.025      0.975]
-----
ar.L1          0.8688     0.090     9.658     0.000     0.692     1.045
ma.L1         -0.2181     0.159    -1.372     0.170    -0.530     0.094
sigma2         0.9504     0.193     4.913     0.000     0.571     1.329
=====
```

Hibatagok vizsgálata:

Várható érték teszt p-érték: 0.8523

Shapiro-Wilk teszt p-érték: 0.0627

Durbin-Watson statisztika: 1.8668

Breusch-Pagan teszt p-érték: 0.5577

Előrejelzések:

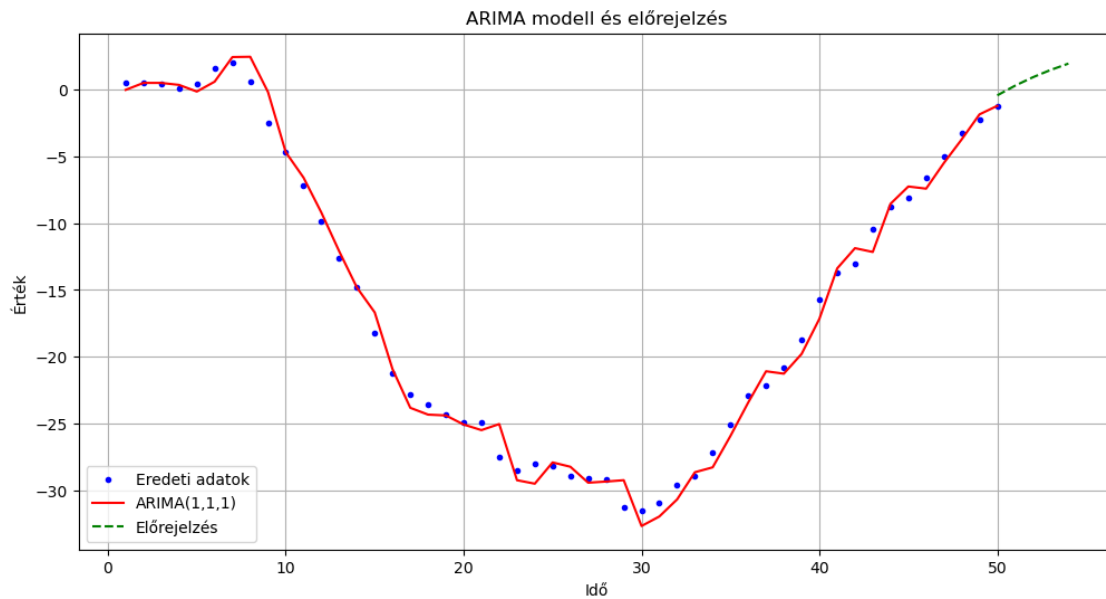
51. időpont: -0.41

52. időpont: 0.31

53. időpont: 0.94

54. időpont: 1.49

55. időpont: 1.97



3.2 Box-Jenkins (ARIMA) modell eredményei

3.2.1 ADF teszt eredménye

H_0 : Az idősor nem stacionárius

H_1 : Az idősor stacionárius

ADF Statisztika: -2.5644

p-érték: 0.1006

Döntés: $0.1006 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t, az idősor nem stacionárius

3.2.2 Modell paraméterek

ARIMA(1,1,1) modellt illesztettünk, ahol:

- $p = 1$ (autoregresszív tag): 0.8688

- $d = 1$ (differenciálás rendje)

- $q = 1$ (mozgóátlag tag): -0.2181

3.2.3 Paraméterek szignifikanciája

- AR(1) tag: $p\text{-érték} = 0.000 < 0.05$, szignifikáns
- MA(1) tag: $p\text{-érték} = 0.170 > 0.05$, nem szignifikáns

3.2.4 Modell illeszkedési mutatók

AIC: 143.597

BIC: 149.272

Log Likelihood: -68.798

3.3 Hibatagok tulajdonságainak vizsgálata

3.3.1 Várható érték vizsgálata

$p\text{-érték}: 0.8523 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

3.3.2 Normalitás vizsgálata (Shapiro-Wilk teszt)

$p\text{-érték}: 0.0627 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

3.3.3 Függelenség vizsgálata (Durbin-Watson teszt)

DW statisztika: 1.8668

Döntés: A DW statisztika közel van 2-höz, a függetlenség feltétele teljesül

3.3.4 Homoszkedaszticitás vizsgálata (Breusch-Pagan teszt)

$p\text{-érték}: 0.5577 > 0.05$, tehát nem vetjük el H_0 -t

3.4 Összefoglaló értékelés

- A modell diagnosztikája megfelelő:
 - A várható érték feltétel teljesül
 - A hibatagok normális eloszlásúak
 - A függetlenség feltétele teljesül
 - A homoszkedaszticitás feltétele teljesül
- Az AR(1) tag szignifikáns, míg az MA(1) tag nem
- Az előrejelzések növekvő trendet mutatnak