

# **Лабораторная работа №6. Модель эпидемии SIR].**

**Вариант №28**

Евдокимов Иван Андреевич. НФИбд-01-20

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>4</b>
1.1	Цель лабораторной работы: . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Задание[1]</b>	<b>5</b>
2.1	Задания лабораторной работы: . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Ход выполнения лабораторной работы:</b>	<b>6</b>
3.1	Теоретические сведения[2]: . . . . .	6
3.2	Теоретические сведения . . . . .	7
3.3	Теоретические сведения . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Задача[1]</b>	<b>8</b>
4.1	Условие задачи: . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Код программы</b>	<b>9</b>
5.1	Код программы на Julia общий: [3] . . . . .	9
5.2	Код программы на OpenModelica: . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Результаты работы</b>	<b>15</b>
6.1	Результаты работы на Julia: . . . . .	15
6.2	Результаты работы на OpenModelica: . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Выводы</b>	<b>18</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>19</b>

## Список иллюстраций

6.1	Графики численности в случае $I(0) \leq I^*$ . . . . .	15
6.2	Графики численности в случае $I(0) > I^*$ . . . . .	16
6.3	Графики численности в случае $I(0) \leq I^*$ . . . . .	16
6.4	Графики численности в случае $I(0) > I^*$ . . . . .	17

# 1 Цель работы

## 1.1 Цель лабораторной работы:

Изучить простейшую модель эпидемии  $SIR$ . Используя условия из варианты, задать в уравнение начальные условия и коэффициенты. После построить графики изменения численностей трех групп в двух случаях.

## 2 Задание[1]

### 2.1 Задания лабораторной работы:

1. Изучить модель эпидемии
2. Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп.
3. Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случае:  $I(0) \leq I^*$ ,  $I(0) > I^*$

## 3 Ход выполнения лабораторной работы:

### 3.1 Теоретические сведения[2]:

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из  $N$  особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через  $S(t)$ . Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их  $I(t)$ . А третья группа, обозначаемая через  $R(t)$  – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения  $I^*$ , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда  $I(t) > I^*$ , тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа  $S(t)$  меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & , \text{если } I(t) > I^* \\ 0 & , \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

## 3.2 Теоретические сведения

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится. Т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & , \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I & , \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

## 3.3 Теоретические сведения

Рассмотрим скорость изменения выздоравливающих особей, которые при этом приобретают иммунитет к болезни:

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности  $\alpha, \beta$  - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени  $t = 0$  нет особей с иммунитетом к болезни  $R(0) = 0$ , а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей  $I(0)$  и  $S(0)$  соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая:  $I(0) \leq I^*$  и  $I(0) > I^*$

## 4 Задача[1]

### 4.1 Условие задачи:

На одном небольшом острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ( $N = 11400$ ) в момент начала эпидемии ( $t = 0$ ) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции)  $I(0) = 250$ . Число здоровых людей с иммунитетом к болезни  $R(0) = 47$ . Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени  $S(0) = N - I(0) - R(0)$ . Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае: 1.  $I(0) \leq I^*$  2.  $I(0) > I^*$



## 5 Код программы

### 5.1 Код программы на Julia общий: [3]

```
# Вариант 28
using Plots
using DifferentialEquations

N = 11400
I0 = 250
R0 = 47
a = 0.01
b = 0.02
S0 = N - I0 - R0

function fn_1(du, u, p, t)
    S0, I0, R0 = u
    du[1] = 0
    du[2] = -b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end

function fn_2(du, u, p, t)
    S0, I0, R0 = u
```

```

        du[1] = -a*u[1]
        du[2] = a*u[1] - b*u[2]
        du[3] = b*u[2]
    end

    v0 = [S0, I0, R0]
    tspan = (0, 100)
    prob = ODEProblem(fn_1, v0, tspan)
    sol = solve(prob, dtmax=0.01)

    S = [u[1] for u in sol.u]
    I = [u[2] for u in sol.u]
    R = [u[3] for u in sol.u]
    T = [t for t in sol.t]

    plt = plot(
        dpi=300,
        title="Решение уравнения",
        legend=false)

    plot!(
        plt,
        T,
        S,
        color=:blue)

    plot!(
        plt,
        T,

```

```

I,
color=:red)

plot!(
plt,
T,
R,
color=:green)

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0, 100)
prob = ODEProblem(fn_2, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.01)

S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(
    dpi=300,
    title="Решение уравнения",
    legend=false)

plot!(
    plt2,
    T,
    S,
    color=:blue)

```

```
plot!(
    plt2,
    T,
    I,
    color=:red)
```

```
plot!(
    plt2,
    T,
    R,
    color=:green)
```

```
savefig(plt, "lab06_1.png")
savefig(plt2, "lab06_2.png")
```

## 5.2 Код программы на OpenModelica:

```
model laba_6_1

    parameter Real N(start=11400);
    parameter Real I0(start=250);
    parameter Real R0(start=47);
    parameter Real a( start=0.01);
    parameter Real b( start=0.02);
    parameter Real S0 = N - I0 - R0;
    Real S(start=S0);
    Real I(start=I0);
```

```

    Real R(start=R0);

equation

    der(S) = 0;
    der(I) = -b*I;
    der(R) = b*I;

    annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-
6, Interval=0.01));

end laba_6_1;

model laba_6_2

    parameter Real N(start=11400);
    parameter Real I0(start=250);
    parameter Real R0(start=47);
    parameter Real a( start=0.01);
    parameter Real b( start=0.02);
    parameter Real S0 = N - I0 - R0;
    Real S(start=S0);
    Real I(start=I0);
    Real R(start=R0);

equation

    der(S) = -a*S;
    der(I) = a*S-b*I;
    der(R) = b*I;

```

```
    annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=100, Tolerance=1e-  
6, Interval=0.01));
```

```
end laba_6_2;
```

## 6 Результаты работы

### 6.1 Результаты работы на Julia:

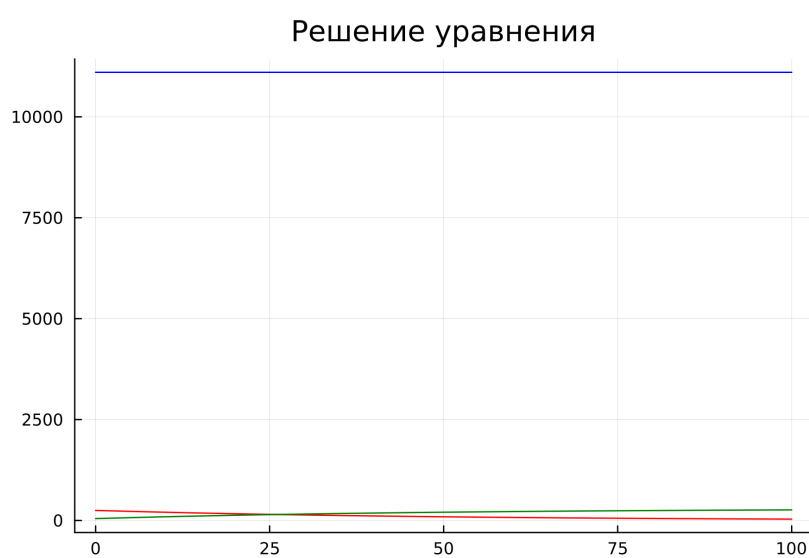


Рис. 6.1: Графики численности в случае  $I(0) \leq I^*$

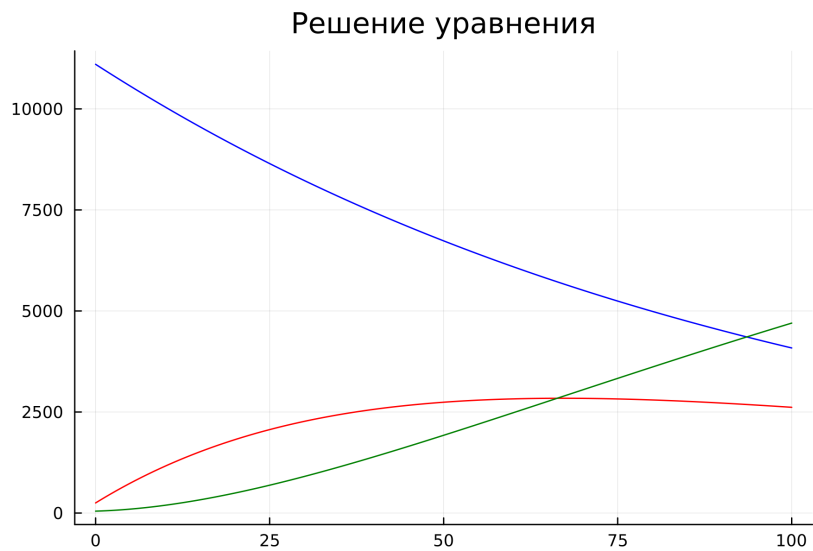


Рис. 6.2: Графики численности в случае  $I(0) > I^*$

## 6.2 Результаты работы на OpenModelica:

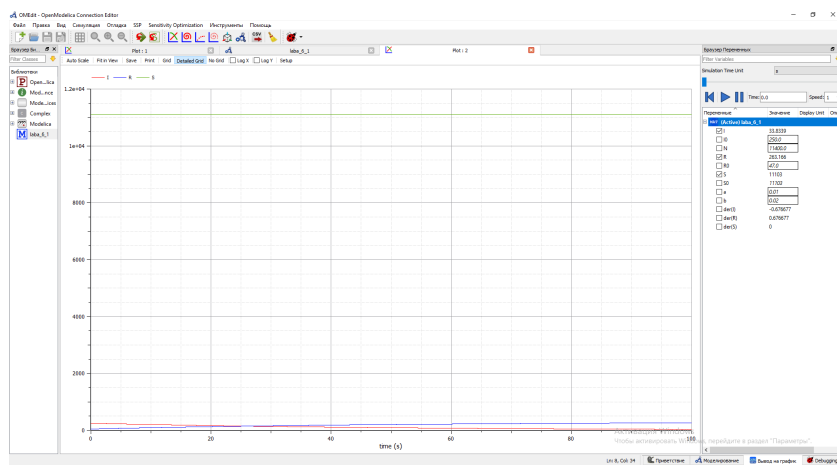


Рис. 6.3: Графики численности в случае  $I(0) \leq I^*$



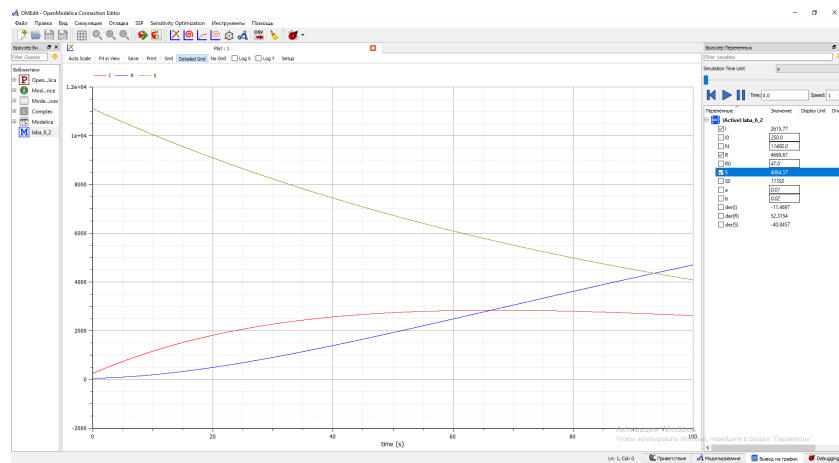


Рис. 6.4: Графики численности в случае  $I(0) > I^*$

## 7 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена простейшая модель эпидемии и построены графики на основе условий задачи и начальных данных, которые были описаны в варианте лабораторной работы.

## Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №6 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: [https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971665/mod\\_resource/content/2/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BA%20%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B5%20%E2%84%96%207%20%283%29.pdf](https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971665/mod_resource/content/2/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5%20%D0%BA%20%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9%20%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B5%20%E2%84%96%207%20%283%29.pdf).
2. Лабораторная работа №6 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: [https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971664/mod\\_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%205.pdf](https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971664/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%205.pdf).
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/>.