Лабораторная работа №4. Модель гармонических колебаний.

Вариант №28

Евдокимов Иван Андреевич. НФИбд-01-20

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить уравнение гармонического осцилятора без затухания. Записать данное уравнение и построить фазовый портрет гармонических и свободных колебаний.

2 Задание[1]

1. Построить решение уравнения гармонического осциллятора без затухания
2. Записать уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием, построить его решение. Построить фазовый портрет гармонических колебаний с затуханием.
3. Записать уравнение колебаний гармонического осциллятора, если на систему действует внешняя сила, построить его решение. Построить фазовый портрет колебаний с действием внешней силы.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретические сведения[2]

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в разных науках при определенных предположениях можно описать одним дифференциальным уравнением. Это уравнение в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 = 0$$

где:

- x - переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.),
- γ - параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре),
- ω - собственная частота колебаний. Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(\dot{t}_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x = y \\ y = -\omega^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

3.2 Теоретические сведения

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

3.3 Условие задачи и пункты:

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 4.7x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 0.5\dot{x} + 7x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 7\dot{x} + 0.5x = 0.5 \sin 0.7t$

На итнтервале $t \in [0; 56]$, шаг 0.05, $x_0 = 0.9, y_0 = 1.9$

3.4 Код программы на Julia общий для трёх случаев[3]:

```
# Вариант 28
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 0.9
y0 = 1.9

function fn_1(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = u[2]
    du[2] = -4.7*u[1]
end

function fn_2(du, u, p, t)
    x, y = u
```

```
    du[1] = u[2]
    du[2] = -7*u[1] - 0.5*u[2]

end

function fn_3(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = u[2]
    du[2] = -0.5*u[1] - 7*u[2] + 0.5*sin(0.7t)

end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0, 56)
prob = ODEProblem(fn_1, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

X1 = [u[1] for u in sol.u]
Y1 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
  dpi=300,
  title="Решение уравнения",
  legend=false)

plot!(
  plt,
  T,
```

```
  X1,
  color=:blue)

plot!(
  plt,
  T,
  Y1,
  color=:red)

plt2 = plot(
  dpi=300,
  title="Фазовый портрет",
  legend=false)

plot!(
  plt2,
  X1,
  Y1,
  color=:blue)

v0 = [x0, y0]
tspan = (0, 56)
prob = ODEProblem(fn_2, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

X2 = [u[1] for u in sol.u]
Y2 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
```

```
plt3 = plot(
  dpi=300,
  title="Решение уравнения",
  legend=false)

plot!(
  plt3,
  T,
  X2,
  color=:blue)

plot!(
  plt3,
  T,
  Y2,
  color=:red)

plt4 = plot(
  dpi=300,
  title="Фазовый портрет",
  legend=false)

plot!(
  plt4,
  X2,
  Y2,
  color=:blue)

v0 = [x0, y0]
```

```
tspan = (0, 56)
prob = ODEProblem(fn_3, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)

X3 = [u[1] for u in sol.u]
Y3 = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt5 = plot(
  dpi=300,
  title="Решение уравнения",
  legend=false)

plot!(
  plt5,
  T,
  X3,
  color=:blue)

plot!(
  plt5,
  T,
  Y3,
  color=:red)

plt6 = plot(
  dpi=300,
  title="Фазовый портрет",
  legend=false)
```

```
plot!(
  plt6,
  X3,
  Y3,
  color=:blue)


savefig(plt, "lab04_1_1.png")
savefig(plt2, "lab04_1_2.png")
savefig(plt3, "lab04_2_1.png")
savefig(plt4, "lab04_2_2.png")
savefig(plt5, "lab04_3_1.png")
savefig(plt6, "lab04_3_2.png")
```

3.5 1. В системе отсутствуют потери энергии (колебания без затухания)

Получаем уравнение

$$\ddot{x} + \omega x = 0$$

3.6 Код программы на OpenModelica:

```
model laba4_1

  Real x(start=0.9);
  Real y(start=1.9);
  parameter Real w( start=4.7);
```

```
equation
  der(x)= y;
  der(y)= -w*x;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=56, Tolerance=1e-
6, Interval=0.05));


end laba4_1;
```

3.7 Результат:

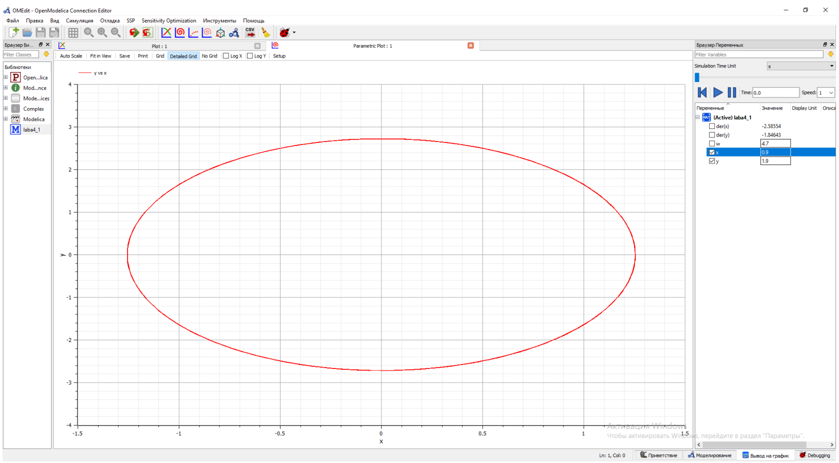

Рис. 3.1: Фазовый портрет для случая 1 на OpenModelica

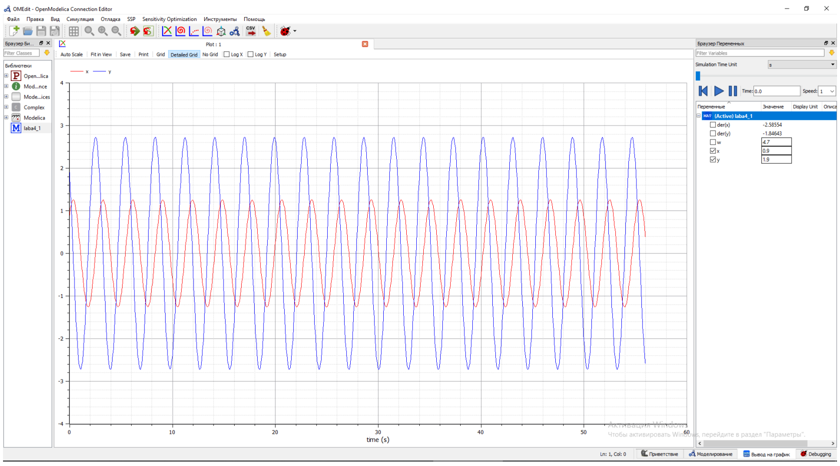

Рис. 3.2: График решения для случая 1 на OpenModelica

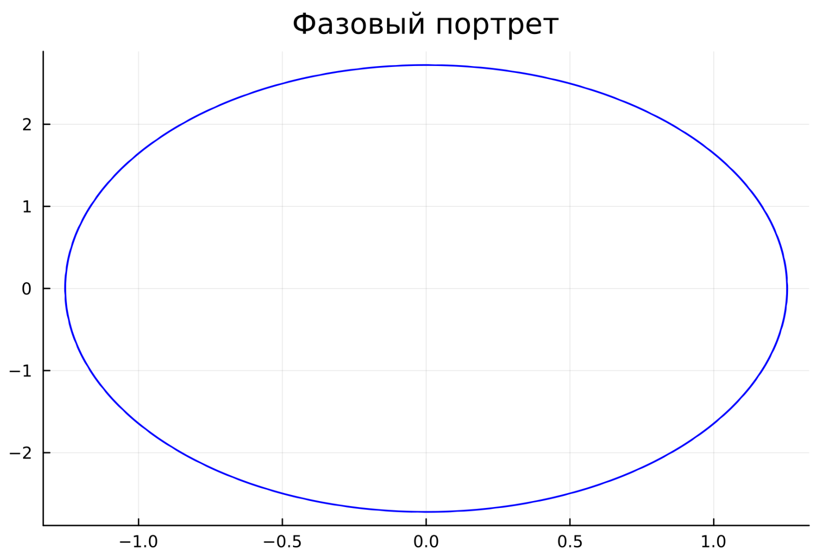

Рис. 3.3: Фазовый портрет для случая 1 на Julia

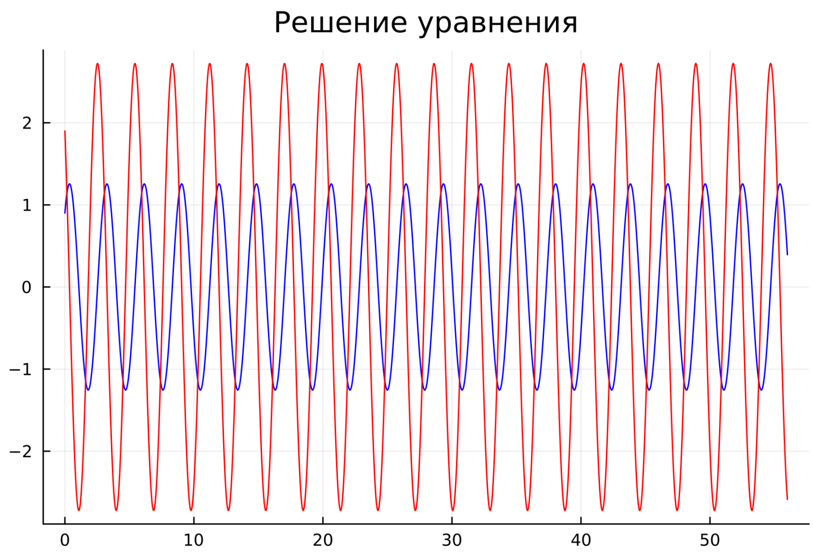

Рис. 3.4: График решения для случая 1 на Julia

3.8 2. В системе присутствуют потери энергии (колебания с затуханием)

Получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

3.9 Код программы на OpenModelica:

```
model laba4_2

  Real x(start=0.9);
  Real y(start=1.9);
  parameter Real w( start=7);
  parameter Real g( start=0.5);
```

```
equation

  der(x)= y;
  der(y)= -w*x-g*y;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=56, Tolerance=1e-
6, Interval=0.05));

end laba4_2;
```

3.10 Результаты:

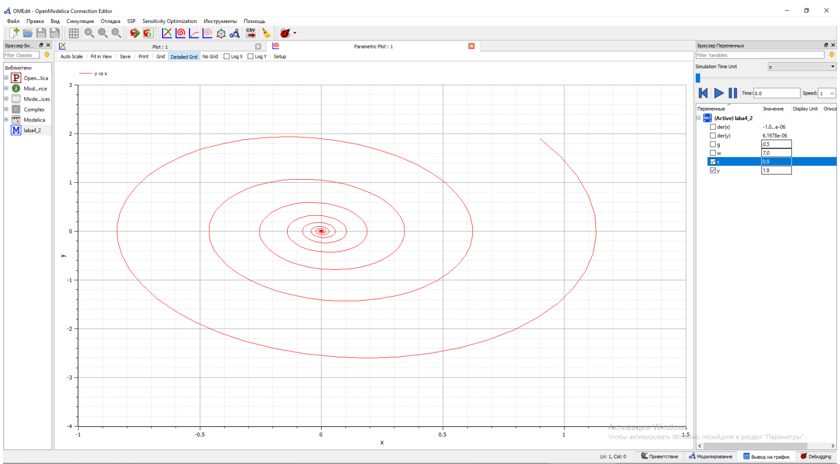

Рис. 3.5: Фазовый портрет для случая 2 на OpenModelica

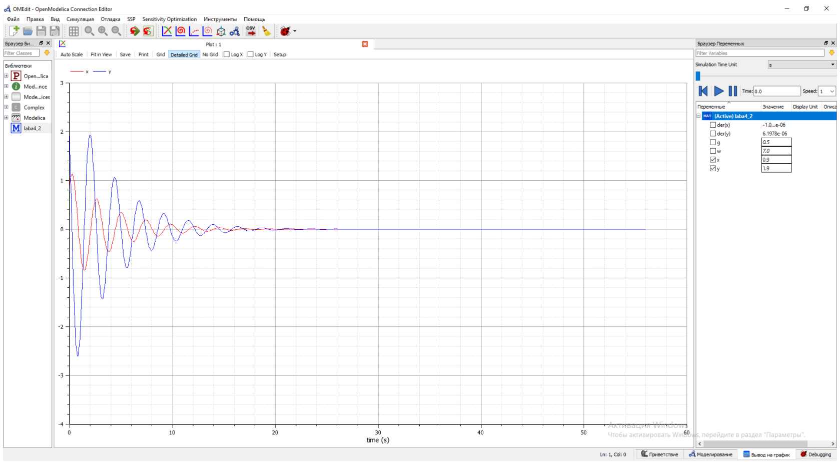

Рис. 3.6: График решения для случая 2 на OpenModelica

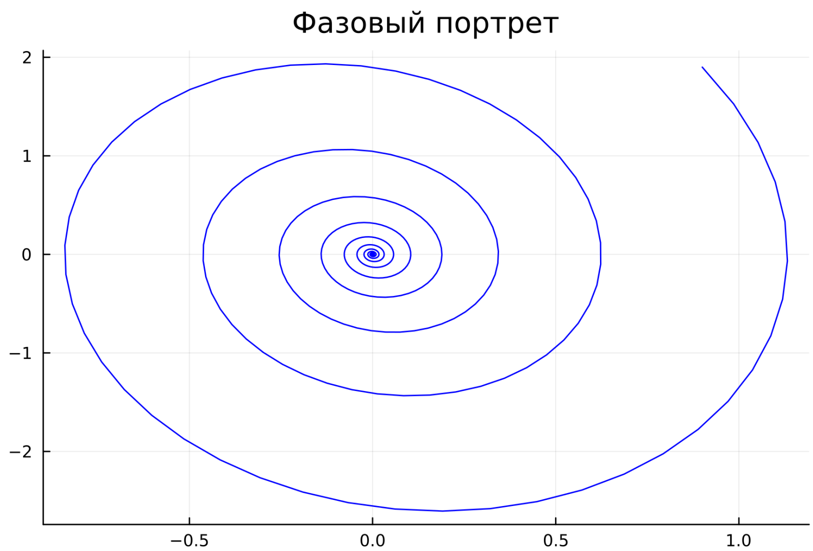

Рис. 3.7: Фазовый портрет для случая 2 на Julia

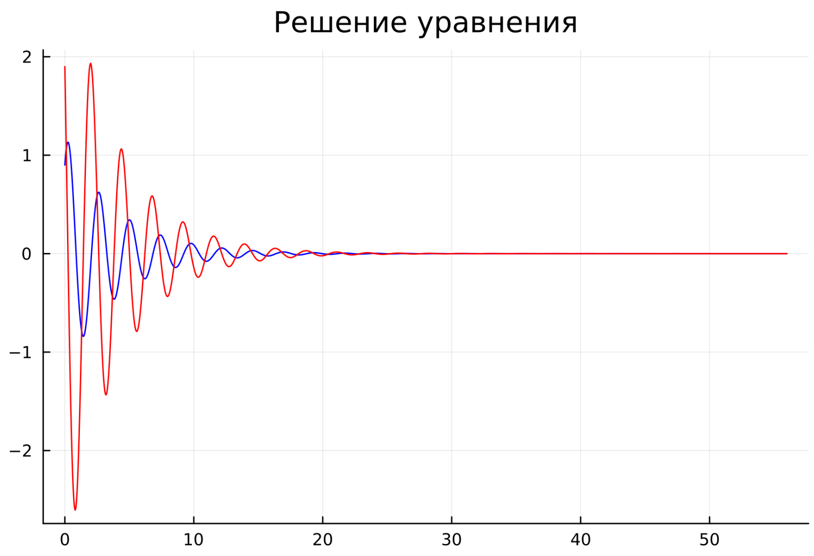

Рис. 3.8: График решения для случая 2 на Julia

3.11 3. На систему действует внешняя сила.

Получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F(t)$$

3.12 Код программы на OpenModelica:

```
model laba4_3


  Real x(start=0.9);
  Real y(start=1.9);
  parameter Real w( start=0.5);
  parameter Real g( start=7);


equation
```

```
  der(x)= y;
  der(y)= -w*x-g*y+0.5*sin(0.7*time);

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=56, Tolerance=1e-
6, Interval=0.05));

end laba4_3;
```

3.13 Результаты:

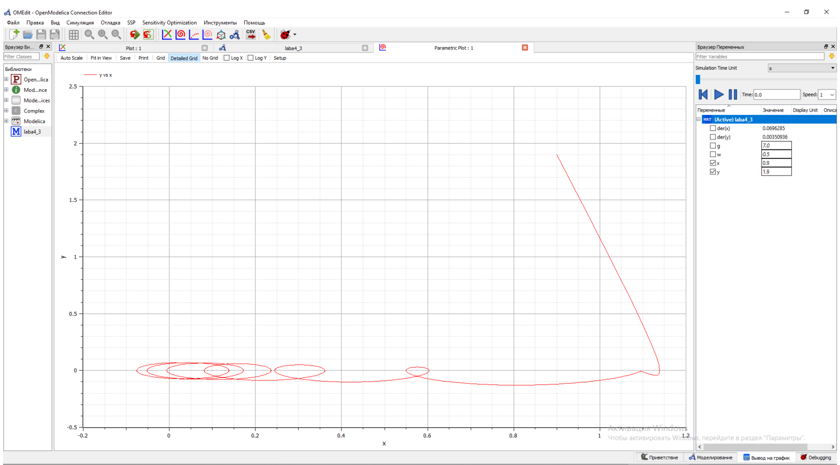

Рис. 3.9: Фазовый портрет для случая 3 на OpenModelica

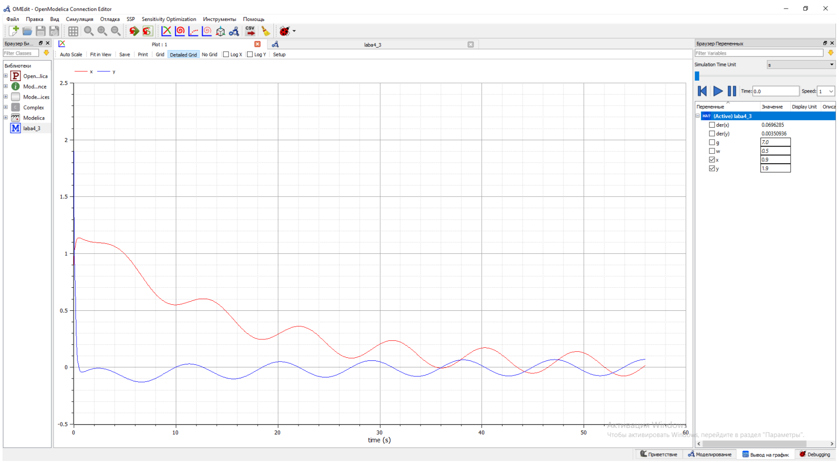

Рис. 3.10: График решения для случая 3 на OpenModelica

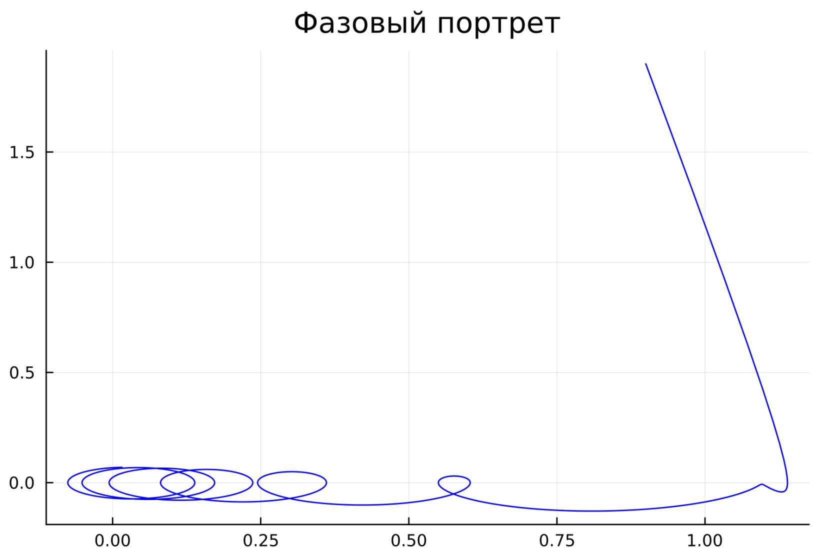

Рис. 3.11: Фазовый портрет для случая 3 на Julia

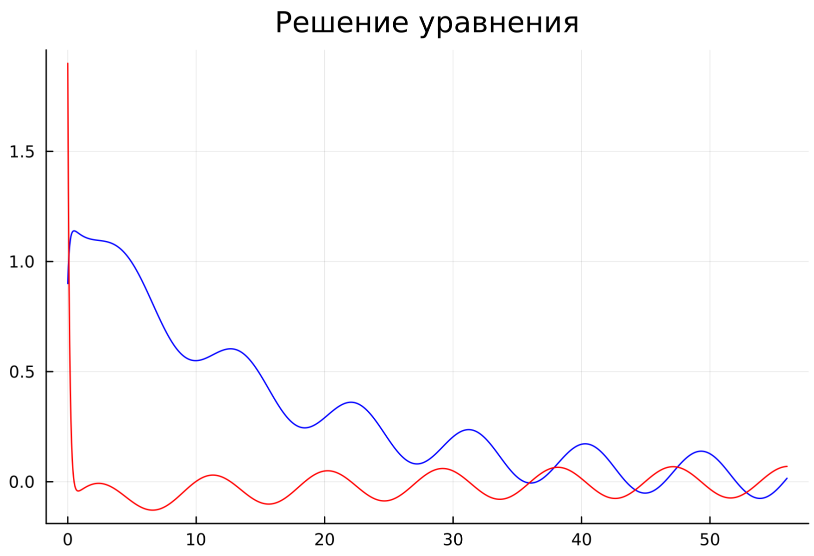

Рис. 3.12: График решения для случая 3 на Julia

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были построены решения уравнений гармонического осциллятора, а также фазовые портреты для трех случаев: 1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы 2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы 3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Список литературы

1. Задания к лабораторной работе №4 (по вариантам) [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971653/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf.
2. Лабораторная работа №4 [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971656/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%203.pdf.
3. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia [Электронный ресурс]. 2023. URL: https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/.