1 Collatz-Problem

1.1 Ablauf der Zahlenfolge

Suche dir eine zufällige Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

1. Wenn $n \bmod 2 = 0 \rightarrow n$ nimmt $\frac{n}{2}$ an
2. Wenn $n \bmod 2 = 1 \rightarrow n$ nimmt $3n + 1$ an
3. Vorgang wiederholen

1.2 Beispiele

$5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow$ ... (ungerade Zahl mit den wenigsten Schritten)
$8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow$ ...

1.3 Folgerung

Jede mögliche Zahl endet im Folgeschema $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow$ ...
Aber: Nicht beweisbar

1.4 Statistiken

[Statistiken einfügen]

1.5 Collatz-Graph einer Funktion

$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ bildet den Collatz-Graphen einer zahlentheoretischen Funktion ab.

1.5.1 Nachfolgerabbildung

Die einfachste dieser Funktionen ist die Nachfolgerabbildung

$$s : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ s(n) = n + 1$$

2 Probleme mit 0

2.1 Teilen durch 0

2.1.1 Grenzwertbetrachtung

Durch die Definition einer Funktion $f(x) = \frac{n}{x}$ für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{n}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{n}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{n}{x} \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{n}{x}$$

$$-\infty \neq +\infty$$

$$\implies \frac{n}{0} = n.d.$$

2.2 0 als Potenzbasis mit 0 im Exponenten

2.2.1 Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^x = 1$$
$$\Longrightarrow 0^0 = 1$$

2.2.2 Reversibles potenzieren

$$5^3 = \frac{5^4}{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$5^2 = \frac{5^3}{5} = 5 \cdot 5 = 25$$
$$5^1 = \frac{5^2}{5} = 5 = 5$$
$$5^0 = \frac{5}{5} = 1$$
$$0^0 = \frac{0}{0} = n.d.$$

3 Primzahlen

3.1 Definition

Für eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;\,1\}$ gilt $N \in \mathbb{P}$, wenn für jede Zahl $n_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\,;\,1\,;\,N\}$ gilt:

$$N \bmod n_j \neq 0$$

3.2 Erschließung/Errechnung

3.2.1 Mersennesche Zahlen

Für eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ der Form

$$N = 2^n - 1;\, n \in \mathbb{N}$$

kann $N \in \mathbb{P}$ nur dann gelten, wenn $n \in \mathbb{P}$ gilt.

$\Longrightarrow$ Zahlen der Form

$$M_p := 2^p - 1;\, p \in \mathbb{P}$$

heißen $Mersennesche\,Zahlen$, die allerdings nicht zwingend Teil der Menge $\mathbb{P}$ sind.

3.2.2 Beispiele für Mersennesche Primzahlen

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$M_3 = 2^3 - 1 = 7$$
$$M_5 = 2^5 - 1 = 31$$
$$M_7 = 2^7 - 1 = 127$$

3.2.3 Beispiele für Mersennesche Nicht-Primzahlen

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 23 \cdot 89 = 2047$$
$$M_{23} = 2^{23} - 1 = 47 \cdot 178481 = 8388607$$

3.2.4 Fermatsche Zahlen

Für eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ der Form

$$N = 2^n + 1;\ n \in \mathbb{N}$$

kann $N \in \mathbb{P}$ nur gelten, wenn $n = 2^m$; $m \in \mathbb{N}$ gilt.
$\Longrightarrow$ Zahlen der Form

$$F_n := 2^{2^n} + 1$$

heißen *Fermatsche Zahlen*, die allerdings nicht zwingend Teil der Menge $\mathbb{P}$ sind.

3.2.5 Beispiele für Fermatsche Primzahlen

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$
$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$$

3.2.6 Beispiel für Fermatsche Nicht-Primzahlen

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417 = 4294967297$$
$$F_6 = 2^{64} + 1 = 274177 \cdot 67280421310721 = 1,844674407 \cdot 10^{19}$$

4 Riemannsche Vermutung

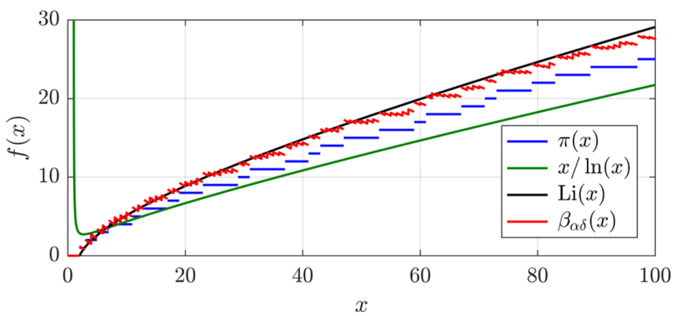
4.1 Pifunktion

Die Pifunktion $\pi(x)$ beschreibt für x_n die Anzahl an Primzahlen, die Teil des Intervalls $[0; x_n]$ sind.

4.1.1 Näherungen

$$\frac{x}{\ln(x)}$$

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\,t}{\ln t}$$



$\Longrightarrow$ Asymptotisch äquivalent

4.2 Primzetafunktion

4.3 Riemannsche Zetafunktion

Für eine Zahl $s \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(s) > 1$ gilt:

$$P(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}$$
$$P(s) = \log(\zeta(s))$$

4.3.1 Eulersche Produktformel

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 1$ gilt

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Beweisidee : Für eine feste Primzahl $p \in \mathbb{P}$ kann der Faktor in obigen Produkt in eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{nz}}$$

entwickelt werden. Wenn also $p_1, p_2, ...p_n$ die ersten n Primzahlen sind, so ist

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{{p_k}^z}} &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{{p_1}^{k_1 z}} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{{p_2}^{k_2 z}} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{{p_n}^{k_n z}} \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{({p_1}^{k_1} \cdots {p_n}^{k_n})^z} \\ &= \cdots\end{aligned}$$

4.3.2 Zetafunktion für negative Werte

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) < 0$ gilt

$$\zeta(1 - z) = \pi^{-z} \cdot 2^{1-z} \cdot \Gamma(z) \cdot \left(\frac{\pi z}{2}\right) \cdot \zeta(z)$$

Außerdem ist die Gammafunktion durch

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \cdot n^z}{\prod\limits_{k=0}^{\infty} (z + k)}$$

definiert.

4.3.3 Triviale Nullstellen

Triviale Nullstellen N_j sind solche, für die $\mathrm{Re}(N_j) < 0$, $\mathrm{Im}(N_j) = 0$ und $N_j \bmod 2 = 0$ gilt.

4.3.4 Komplexe Nullstellen

Komplexe Nullstellen N_j sind solche, für die $\mathrm{Re}(N_j) = \frac{1}{2}$ gilt.

4.3.5 Vermutung

Es gibt keine Nullstellen anderer Art und alle nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion liegen auf einer Geraden parallel zur imaginären Achse.
Aber: Nicht bewiesen