computational mathematics

Prof. Dr. S. Sauter
Institut für Mathematik
Universität Zürich

Numerik I – 2. Übung

Abgabe: 05.03.2013 bis 13 Uhr

Hinweis: Bitte verwenden Sie keine vorimplementierten Matlab-Funktionen zur Berechnung der Polynome.

Aufgabe 1 (8 Pkt.) (Programmieraufgabe)
Sei $d > 0$. Die Funktion $f : [-d, d] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := \frac{\cos x}{1+x^2}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $p_{d,n} \in \mathbb{P}_n$ das Interpolationspolynom mit der Eigenschaft

$$p_{d,n}(x_i) = f(x_i) \quad \text{für die Stützstellen} \quad x_i = -d + \frac{2d}{n} i \quad 0 \leq i \leq n.$$

(a) Stellen Sie für $d = 6$ und $n = 2, 4, 6, 8, 10$ die Funktionen f und $p_{d,n}$ graphisch dar. Tragen Sie den Fehler

$$E_{d,n} := \max_{0 \leq i \leq 1000} \left| (f - p_{d,n})\Big(-d + \frac{2d}{1000} i \Big) \right|$$

in Abhängigkeit von n in eine Tabelle ein. Kommentieren Sie die Beobachtungen.

(b) Wiederholen Sie Teilaufgabe a) für $d = 1$. Lesen Sie aus Ihrer Tabelle (ungefähr) ab, wie schnell der Fehler gegen Null konvergiert bei Erhöhung der Zahl n der Stützstellen.

(c) Bestimmen Sie für Teilaufgabe b) durch Computerexperimente für $n = 2, 4, 6, 8, 10$ einen (ungefähren) Wert d_{max}, so dass für $d \leq d_{max}$ das Interpolationspolynom $p_{d,n}$ auf $[-d, d]$ konvergiert. Stellen Sie den Logarithmus des Fehlers, $\log(E_{d,n})$, für $d = d_{max}/2$ in Abhängigkeit von n graphisch dar. Verwenden Sie die Graphik, um die Konstanten C_1, β in der Fehlerabschätzung

$$E_{d,n} \leq C_1 e^{-\beta n}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 2 (8 Pkt.) (Programmieraufgabe)

(a) Implementieren Sie für gegebene Stützstellenmengen Θ_n, $0 \leq n \leq N$, die rekursiv aufgebaut sind:

$$\Theta_0 = \{x_0\} \quad \text{und für} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 : \quad \Theta_{n+1} = \Theta_n \cup \{x_{n+1}\}$$

die Newtonsche Darstellung (d.h. die Koeffizienten b_i aus Satz 2.5) mittels Newtonscher dividierter Differenzen (Formel (2.7), Beispiel 2.7).

(b) Implementieren Sie den adaptiven Verfeinerungsalgorithmus aus Kapitel 2.2 der Vorlesung.

(c) Wenden Sie den adaptiven Verfeinerungsalgorithmus an, um die Funktion

$$f(x) := (x+1)^{1/4}, \quad x \in [-1,1]$$

zu approximieren. Wählen Sie $\alpha = 0.95$, 0.5, 0.2 und stoppen Sie den Algorithmus, sobald $n_\ell \geq 30$ gilt. Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar und vergleichen Sie es (Genauigkeit) mit der Approximation mit 30 äquidistanten Stützstellen bzw. mit den Stützstellen

$$x_i = d\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right) \quad 0 \leq i \leq n$$

mit $n = 29$ und $d = 1$.