computational mathematics

Prof. Dr. S. Sauter
Institut für Mathematik
Universität Zürich

Numerik I – 2. Übung

Abgabe: 04.03.2015 bis 12 Uhr

Hinweis: Bitte verwenden Sie keine vorimplementierten Matlab-Funktionen zur Berechnung der Polynome.

Aufgabe 1 (10 Pkt.) (Programmieraufgabe)

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine, die für eine gegebene Stützstellenmenge die Newtonschen dividierten Differenzen b_i aus Formel (2.7) berechnet. Schreiben Sie eine weitere MATLAB-Routine, die das Interpolationspolynom der Newtonschen Darstellung aus Satz 2.5 an einer beliebigen Stelle x auswertet.

(b) Sei $d > 0$. Die Funktion $f : [-d, d] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := \frac{1}{1+25x^2}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $p_{d,n} \in \mathbb{P}_n$ das Interpolationspolynom mit der Eigenschaft

$$p_{d,n}(x_i) = f(x_i) \quad \text{für die Stützstellen} \quad x_i = -d + \frac{2d}{n} i \quad 0 \leq i \leq n.$$

Verwenden Sie Teil a) um für $d = 1$ und $n = 2, 4, 6, 8, 10$ das Interpolationspolynom $p_{d,n}$ zu berechnen und an den Stellen $x_j = -d + \frac{2d}{1000} j$, $0 \leq j \leq 1000$, auszuwerten. Stellen Sie die Funktionen f und $p_{d,n}$ graphisch dar. Tragen Sie den Fehler

$$E_{d,n} := \max_{0 \leq j \leq 1000} |(f - p_{d,n})(x_j)|$$

in Abhängigkeit von n in eine Tabelle ein. Kommentieren Sie die Beobachtungen.

(c) Wiederholen Sie Teilaufgabe b) für $d = 0.1$. Lesen Sie aus Ihrer Tabelle (ungefähr) ab, wie schnell der Fehler gegen Null konvergiert bei Erhöhung der Zahl n der Stützstellen.

(d) Bestimmen Sie für Teilaufgabe c) durch Computerexperimente für $n = 2, 4, 6, 8, 10$ einen (ungefähren) Wert d_{max}, so dass für $d \leq d_{max}$ das Interpolationspolynom $p_{d,n}$ auf $[-d, d]$ konvergiert. Stellen Sie den Logarithmus des Fehlers, $\log(E_{d,n})$, für $d = d_{max}/2$ in Abhängigkeit von n graphisch dar. Verwenden Sie die Graphik, um die Konstanten C_1, β in der Fehlerabschätzung

$$E_{d,n} \leq C_1 e^{-\beta n}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 2 (6 Pkt.) (Programmieraufgabe)

(a) Implementieren Sie für gegebene Stützstellenmengen $\Theta_n = \{x_i : 0 \leq i \leq n_l\}$, $0 \leq n \leq N$, die rekursiv aufgebaut sind:

$$\Theta_0 = \{x_0\}, \Theta_1 = \{x_0, x_1\} \quad \text{und für} \quad n = 0, 1, \ldots, N-1: \quad \Theta_{n+1} = \Theta_n \cup \Theta_n^+$$

den adaptiven Verfeinerungsalgorithmus aus Kapitel 2.2 der Vorlesung.

Hinweis: Implementieren Sie zwei Stützstellenmengen, eine nicht sortierte zur Berechnung der Interpolationspolynome und eine sortierte zur Berechnung der $M_{\mathcal{T}}$ in der Formel (2.10).

(b) Wenden Sie den adaptiven Verfeinerungsalgorithmus an, um die Funktion

$$f(x) := (x+1)^{1/4}, \quad x \in [-1, 1]$$

zu approximieren. Wählen Sie $\alpha = 0.95, 0.5, 0.2$ und stoppen Sie den Algorithmus, sobald $n_\ell \geq 10$ gilt. Stellen Sie die Interpolationspolynome und die exakte Funktion graphisch dar und vergleichen Sie das Ergebnis (Genauigkeit) mit der Approximation mit 10 äquidistanten Stützstellen. Erstellen Sie eine weitere Graphik mit dem Fehler $|f - p_n|$ für jedes Interpolationspolynom.

Aufgabe 3 (4 Pkt.) (Theorieaufgabe)

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = t$ und $x_1 = 1$. Bestimmen Sie $t \in [0, 1[$ derart dass $\max\limits_{x \in [0,1]} |\omega_1(x)|$ minimal ist.