2. Domaća zadaća

Iva Tutiš

**1.**

**Iz skupa od 8 točaka u projektivnoj ravnini PG(2,7) iz Primjera 1. izaberite po volji 6 točaka te ih označite, u bilo kojem redoslijedu, s ABCDEF. To će biti šesterovrh upisan krivulji iz istog primjera.**

* 1. **Odredite sjecišta parova pravaca AB i DE, BC i EF te CD i FA.**
  2. **Provjerite da su ta tri sjecišta kolinearne točke.**
  3. **Pronađite u skriptama teorem koji je najsličniji ovoj tvrdnji!**
  4. **Pronađite u literaturi teorem kojim je iskazano općenito svojstvo šesterovrha upisanog krivulji 2. reda.**

Rješenje:

Prvo o odaberimo 6 proizvoljnih točaka koje će činiti naš šesterovrh (iz primjera 1):

A(1 : 2 : 3), B(1 : 3 : 2), C(1 : 1 : 6), D(1 : 6 : 1), E(1 : 4 : 5) i F(1 : 5 : 4)

(nismo uzeli točke (0:1:0) i (0:0:1) iz primjera jer se one nalaze na „neizmjerno dalekom pravcu“, tj u beskonačnosti). Naše točke šesterovrha su, dakle, nultočke polinoma (mod 7).

1.1)

Primjetimo da vektor predstavnik pravca koji prolazi kroz dvije točke mora biti okomit na vektore predstavnike tih točaka. Iz toga slijedi da parametre pravca, npr. pravca AB, možemo „dobiti“ vektorskim umnoškom vektora predstavnika točaka A i B:

Pa su parametri pravca *AB*[2 : 1 : 1]. Analognim računom, dobivamo:

*DE[1 : 2 : 1], BC[6 : 2 : 1], EF[5 : 1 : 1], CD[0 : 1 : 1], FA[0 : 1 : 4]*

Na isti način se, dualno, računaju zajedničke točle dva pravca:

* X(1 : 1 : 4) kao sjecište od AB i DE
* Y(1 : 6 : 3) kao sjecište od BC i EF
* Z(1 : 0 : 0) kao sjecište od FA i CD

1.2)

Točke X, Y i Z leže na istom pravcu *ako i samo ako* je skup njihovih ”vektora predstavnika” linearno zavisan, pa računamo determinantu matrice njihovih vektora predstavnika:

Dakle, X, Y i Z su kolinearne.

1.3)

Teorem u pitanju je Teorem 5.21 (*Papposov teorem)*:

*Parovi nasuprotnih stranica Papposovog šesterovrha sijeku se u trima kolinearnim točkama. Pravac na kojem leže ta tri sjecišta naziva se Papposovim pravcem dotičnog Papposovog šesterovrha.*

Međutim, sjetimo se da je *Papposov šesterovrh* A'B'C'D'E'F' posebna konfiguracija šesterovrha takva da su po tri toke naizmjenično kolinearne: npr. A', C' i E' leže na pravcu M, a B', D' i F' na pravcu L, gdje su M i L različiti pravci.

Znamo prema konstrukciji da nikoje tri točke našeg šesterovrha nisu kolinearne (budući su one nultočke ireducibilnog homogenog polinoma stupnja 2) pa ABCDEF *nije* Papposov šesterovrh.

1.4)

Tu je riječ o *Pascalovom teoremu*:

*Sjecišta parova nasuprotnih stranica svakog šesterovrha upisanog u koniku su kolinearna, gdje je konika (tj. krivulja drugog reda) skup nultoaka nekog homogenog polinoma drugog stupnja.*

Kako je naš šesterovrh *ABCDEF* upisan u koniku opisanu sa , kolinearnost od X, Y i Z u 1.2 zapravo slijedi direktno iz Pascalovog teorema.

**2.**

**Na trening košarkaškog kluba došlo je samo 8 igračica. Trener želi formirati četveročlane timove tako da dva tima igraju međusobno, a da se pritom svake tri igračice nađu zajedno u timu jednako mnogo puta.**

**Koliki je najmanji broj četvorki košarkašica potreban za to i koliko će se susreta odigrati?**

**Sastavite jedan takav plan (dizajn).**

Rješenje:

U našem dizajnu će broj vrhova predstavljati broj igračica (8) , a broj blokova broj četveročlanih timova (k=4, b=?).

Dakle, bit će riječ o 3 − (8, 4, ) dizajnu, gdje je prirodan broj.

To je, po teoremu 2.4 i 0 − (8, 4, ) dizajn, gdje je

Također, vrijedi da budući je broj blokova u kojima je sadržan prazan skup, a svaki blok je takav:

*b* je očito višekratnik broja 14, to jest najmanji broj četvorki košarkašica je 14.

Pokušajmo konstruirati dizajn s parametrima 3 − (8, 4, 1), gdje je, dakle, , pa je.

Označimo vrhove znamenkama od 1 do 8, te neka su nam 1234 i 5678 dva početna bloka.

Oba početna bloka možemo podijeliti na parove medjusobno komplementarnih (dvočlanih) blokova na tri načina:

= {{12, 34}, {13, 24}, {14, 23}} i = {{56, 78}, {57, 68}, {58, 67}}.

Sada je očito moguće napraviti bijekciju F: (znamo da sigurno postoji jer su skupovi jednakog kardinaliteta)

Ako je te vrijedi F( slijedi da parova medjusobno komplementarnih (dvočlanih) blokova *card*() = 3, to jest ako bi smo označili , za svako uparivanje dobivamo 4 jedinstvena četveročlana komplementarna bloka: ac, bd, ad, bc.

Dakle, time smo konstruirali četveročlanih blokova, što sa dva početna bloka čini ukupno 14 blokova, to jest konstruirali smo dizajn 0 − (8, 4, ).

Za neku konkretnu bijekciju F::

F({13, 24})={57, 68}

F({12, 34})={56, 78}

F({14, 23})={58, 67}

Primjer 0 − (8, 4, ) dizajna bi bio:

{1234, 5678

1357,1368,2457,2468,

1256,1278,3456,3478,

1458,1467,2358,2367}

Preostalo je samo provjeriti da je to zaista ekvivalentno 3-dizajnu 3 − (8, 4, 1), to jest da svaki proizvoljni tročlani podskup vrhova nalazi u samo jednom bloku. To je trivijalno za pročitati iz samog ispisa dizajna, ali možemo promatrati i kombinatorno:

1. Slučaj: Ako je su svi elementi tročlanog podskupa vrhova ujedno elementi nekog od početnih blokova, po definiciji od i , te bijekcije F slijedi da se ne mogu nalaziti u jednom od preostalih 12 konstruiranih blokova.
2. Slučaj: Ako su nisu svi elementi tročlanog podskupa vrhova ujedno elementi od nekog od početnih blokova, znači da su točno 2 vrha u jednom početnom bloku, a točno jedan je u drugom početnom bloku.

Dva vrha koja su u istom početnom bloku mogu biti element samo jednog od parova medjusobno komplementarnih (dvočlanih) blokova u pripadnom , to jest su element samo jednog elementa u , nazovimo ga . Tada iz definicije funkcije F će slijediti F(, a budući se treći vrh može nalaziti u samo jednom od elemenata od , slijedi da će samo jedan od konstruiranih 12 blokova sadržavati sva tri vrha.

Preostalo je odrediti broj susreta koji će se odigrati, to jest broj parova međusobno komplementarnih blokova. Opet, označimo vrhove brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Lako vidimo da u dizajnu s 8 vrhova i 4 vrha u bloku može postojati najviše jedan komplementaran blok svakom bloku u dizajnu, to jest maksimalno ih je b=14/2=7. No da li postoji točno jedan komplementarni blok za svaki blok u našem dizajnu?

Neka se svake tri igračice nađu u timu jednom (). Pretpostavimo suprotno, tj. bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je 1234 blok u dizajnu koji nema svoj komplement, to jest 5678 nije element dizajna 3 − (8, 4, ). Tada slijedi, iz toga što se svake tri igračice nađu zajedno u timu jednom, da su:

𝞺(1)678, 𝞺(2)578, 𝞺(3)678 i 𝞺(4)568 elementi dizajna,

gdje je 𝞺:{1,2,3,4}{1,2,3,4} neka permutacija.

Po definiciji, bar jedan blok mora sadržavati trojku 𝞺(1)𝞺(2)8 - neka je to blok 𝞺(1)𝞺(2)8**X**.

Taj blok različit je od blokova 1234, 𝞺(1)678, 𝞺(2)578, 𝞺(3)678 i 𝞺(4)568, ali koji god **X** uzeli, neka trojka pojavit će se dvaput, što nas dovodi do kontradikcije!

Zaključujemo da za svaki blok u dizajnu za postoji komplementarni blok, to jest odigrati će se 7susreta.

**3.**

**Konstruirajte Hadamardov 3-(32,16,7) dizajn.**

***(Opišite detaljno konstrukciju, ne treba sve ispisivati, a može se poslužiti blok-matricama).***

Rješenje:

Poznata je Hadamardova matrica reda 2:

Sjetimo se da je Kroneckerov produkt dvije Hadamardove matrice također Hadamardova matrica, pa je npr. =

Očito je da je svaki gornji Kroneckerov produkt sastavljen samo od matričnih elemenata -1 i 1 (, te da su mu u prvom redu i stupcu isključivo (pozitivne) jedinice.

Sada konstruirajmo traženi 3-(32,16,7) dizajn; neka su vrhovi dizajna brojevi od 1 do 32.

Sada želimo konstruirati blokove od 16 vrhova, pa nam je zgodno primjetiti da se u stupcima (osim prvog) od pojavljuje vrijednost +1 točno 16 puta, te -1 točno 16 puta, pa možemo to promatrati kao dva bloka. Definiramo:

Gdje , te je i .

Lako je primjetiti da takvih blokova ima , gdje se u svakom nalazi 16 vrhova. Incidencijska relacija će nam biti relacija

Nadalje, iz zapisa , kada ga rastavimo, vidimo:

Gdje se predznak od izmjenjuje sukladno pravilima Kroneckerovog produkta i činjenice da je

Još je samo preostalo razmotriti da li je broj blokova koji prolaze kroz 2 vrha zbilja sedam, kao i da li je dizajn doista Hadamardov.

Možemo primjetiti da je za proizvoljnu trojku vrhova vrijedi da su , istog predznaka (to jest da su u istom bloku) točno osam puta, jer to slijedi slično kao što se pokazalo da je red Hadamardove matrice dijeljiv s 4. (također je važno primjetiti da to što se Hadamardove matrice množe sa -1 ne igra nikakvu ulogu, jer je to analogon „zamjeni“ uloga blokova i gdje .).

Također, budući je jedno od tih „podudaranja“ u u prvom stupcu, koji „ne računamo“ u blokove, ukupno ima 7 blokova u kojima se nalazi neka trojka vrhova, čineći to zaista 3 − (32, 16, 7) dizajnom.

Ako ovom dizajnu oduzmemo proizvoljan vrh i zamijenimo sve blokove oblika i koji sadržavaju sa i za sve dobit ćemo tzv. *derivirani dizajn* s parametrima koji je oblika

to jest simetrični Hadamardov dizajn.

**4.**

**Kvadratna matrica C reda *n* naziva se konferencijska matrica ako na dijagonali ima samo nule, koeficijenti izvan dijagonale mogu biti 1 ili -1 te vrijedi CCt = (*n* - 1 )I (I je jedinična matrica).**

**(a) Ako je C antisimetrična konferencijska matrica, onda je I + C Hadamardova matrica.**

**(b) Ako je C simetrična konferencijska matrica, onda je matrica reda 2n**

**oblika [ I + C - I + C // - I + C - I – C ] Hadamardova matrica.**

**Dokažite obje tvrdnje.**

**(c) Konsturirajte konferencijsku matricu reda 8.**

Rješenje:

a)

Elementi matrice su očito elementi skupa {-1, 1}, budući je matrica identitete vrijednosti jedan samo na dijagonali, a nula svugdje drugdje.

Iz činjenice o transponiranju matrice i antisimetričnosti matrice C slijedi

Pa zaključujemo da je Hadamardova matrica.

b)

Opet, dovoljno je pokazati da je:

Sjetimo se:

* za množenje 2x2 blok matrica odgovarajućih dimenzija vrijedi sljedeća formula analogna onoj za množenje 2x2 matrica
* transponirana 2x2 blok matrica je jednaka

Iz toga i činjenice da je C simetrična, pa je , slijedi:

=

Iz čega slijedi da je matrica Hadamardova.

c) koristit ćemo teorem:

*Neka je n red konferencijske matrice.*

*Ako n ≡ 2 (mod 4) onda je konferencijska matrica simetrična;*

*Ako je n ≡ 0 (mod 4) tada je konferencijska matrica antisimetrična.*

(izvor Conference matrices Peter J. Cameron CSG, 7 October 2011)

Nadalje, isti izvor spominje:

*Let C be a “skew conference matrix”. By changing the sign of the first column, we can ensure that C really is skew: that is, = −C. Now (C+I)(+I) = nI, so H = C + I is a Hadamard matrix. By similar abuse of language, it is called a skew-Hadamard matrix: apart from the diagonal, it is skew. Conversely, if H is a skew-Hadamard matrix, then H −I is a skew conference matrix.*

Iz toga slijedi „obrat“ tvrdnje pod (a), pa je gdje je antisimetrična Hadamardova matrica.

Iz toga slijedi: (donja stranica, jer MS Word onemogućuje pravilno pisanje).

Primjer „antisimetrične“ Hadamardove matrice, kako je nađen na <https://rangevoting.org/SkewHad.html>

= {

1 1 1 1 1 1 1 1

-1 1 -1 1 -1 1 -1 -1

-1 -1 1 1 1 -1 1 -1

-1 -1 -1 1 1 1 -1 1

-1 1 -1 -1 1 1 1 -1

-1 -1 1 -1 -1 1 1 1

-1 1 -1 1 -1 -1 1 1

-1 1 1 -1 1 -1 -1 1

}

Pa je:

= {

0 1 1 1 1 1 1 1

-1 0 -1 1 -1 1 -1 -1

-1 -1 0 1 1 -1 1 -1

-1 -1 -1 0 1 1 -1 1

-1 1 -1 -1 0 1 1 -1

-1 -1 1 -1 -1 0 1 1

-1 1 -1 1 -1 -1 0 1

-1 1 1 -1 1 -1 -1 0

}