

Mathematik 2
Open-Book-Klausur im WS 2021/2022
Dienstag, 8. Februar 2021

Dauer der Prüfung:	90 Minuten
Hilfsmittel:	Open-Book

Hinweise:

- Tragen Sie auf JEDEM Ihrer Lösungsblätter zur Klausur Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, den Namen der Klausur, das Klausurdatum sowie Ihre Unterschrift ein!
- Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an! Reine Ergebnisse ohne erkennbaren und korrekten Lösungsweg werden nicht gewertet.
- Sie können insgesamt maximal 100 Punkte in dieser Klausur erreichen.

Aufgabe 1 (20 Punkte)
Funktionsuntersuchung

Bestimmen Sie für die folgende gebrochen-rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3}{x^3 - 9x}$$

- (a) den Definitionsbereich und die gegebenenfalls vorhandene Nullstellen. (3 Punkte)
- (b) evtl. vorhandenen Polstellen und hebbare Definitionslücken. (7 Punkte)
- (c) die Gleichung der Asymptoten. (10 Punkte)

Hinweis: Bei den stetig hebbaren Definitionslücken ist die stetig ergänzte Funktion sowie der Lückenwert anzugeben. Bei Polstellen ist deren Art durch Untersuchung des Vorzeichenverhaltens von f zu charakterisieren.

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Ableitungen

Bestimmen Sie jeweils die 1. Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \frac{1}{6}x^5 + 7\sqrt[5]{x^6} - \frac{1}{x^{11}}$ (2 Punkte)

(b) $f(x) = \frac{1}{6}(3x^5 + 2)^{11}$ (3 Punkte)

(c) $f(x) = x^3 \log_3 x$ (3 Punkte)

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ (3 Punkte)

(e) $f(x) = \frac{x^4}{e^x + 3}$ (4 Punkte)

(f) $f(x) = \sin^7 x^3$ (5 Punkte)

Hinweis: Die durchgeführten Rechenschritte müssen nachvollziehbar hingeschrieben werden. Für ein Ergebnis ohne Rechenweg gibt es keine Punkte!

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Kurvendiskussion

Untersuchen Sie die folgende, parameterabhängige Funktion auf lokale Extrema und Wendepunkte.

$$f_t(x) = x^3 - 4tx^2 + 4t^2x \quad t > 0$$

- (a) auf lokale Extrema. (10 Punkte)
- (b) auf Wendepunkte. (10 Punkte)

Hinweis: Sowohl die lokalen Extrema als auch die Wendepunkte müssen mit ihren Koordinaten angegeben und ihrer Art nach beschrieben werden. Insbesondere ist bei den Wendepunkten das Krümmungsverhalten zu untersuchen.

Die durchgeführten Rechenschritte müssen nachvollziehbar hingeschrieben werden. Für ein Ergebnis ohne Rechenweg gibt es keine Punkte!

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Unbestimmte Integrale Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a)

$$\int \left(\frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{3\sqrt[7]{x^6}} \right) dx$$

(6 Punkte)

(b)

$$\int (8x^3 - 4x) \sqrt[4]{x^4 - x^2} dx$$

(6 Punkte)

(c)

$$\int (x^2 + 1) \sin x dx$$

(8 Punkte)

Hinweis: Die durchgeführten Rechenschritte müssen nachvollziehbar hingeschrieben werden. Für ein Ergebnis ohne Rechenweg gibt es keine Punkte!

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Flächenberechnung Gegeben seien die beiden folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^4 - x^2 - 4x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = x^4 - x^3 - 3$$

- (a) Berechnen Sie die von den beiden Funktionen eingeschlossene Fläche. (20 Punkte)

Hinweis: Die durchgeführten Rechenschritte müssen nachvollziehbar hingeschrieben werden. Für ein Ergebnis ohne Rechenweg gibt es keine Punkte!

Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{konst.}$	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x	1	$\log_a x, a > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$
$x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$	ax^{a-1}	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\frac{1}{x^a}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$	$-\frac{a}{x^{a+1}}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^x	$x^x(\ln x + 1)$		

Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$	$\tan x$	$-\ln \cos x + C$
$a^x, a > 0$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\cot x$	$\ln \sin x + C$
$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
		$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$