

Mathematik 1

OpenBook-Klausur im WS 2021/2022

Mittwoch, 02. Februar 2022

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang (bitte ankreuzen)	<input type="checkbox"/> Wirt.-Ing. <input type="checkbox"/> Wirt.-Ing. EuG <input type="checkbox"/> Int. Wirt.-Ing. <input type="checkbox"/> Wirt.-Inf. <input type="checkbox"/> Int. Wirt.-Inf., <input type="checkbox"/> BWL <input type="checkbox"/> Int.-BWL

Dauer der Prüfung:	90 Minuten
Hilfsmittel:	OpenBook-Klausur mit nicht-programmierbarem Taschenrechner

Hinweise:

- Geben Sie stets den vollständigen, ausführlichen Rechenweg an! Eine Lösung ohne korrekten und nachvollziehbaren Rechenweg wird nicht gewertet.
- Sie können maximal 100 Punkte bei dieser Klausur erreichen. Es gibt 5 Aufgaben mit je 20 Punkten. Ab einer Punktzahl von 50 Punkten haben Sie die Klausur bestanden.

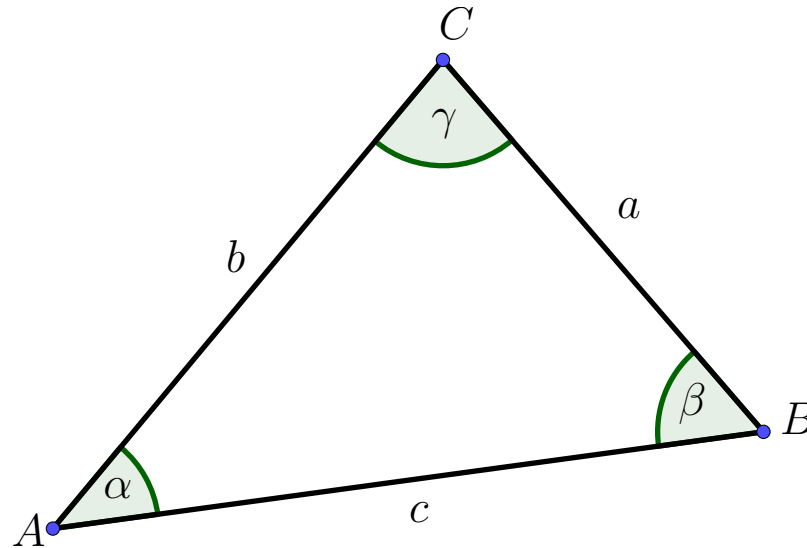
Aufgabe 1 (20 Punkte)

Vektorrechnung und analytische Geometrie

Hinweis: Geben Sie stets den vollständigen Rechenweg an!

Die Punkte $A(1/0/1)$ und $B(0/1/1)$ bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. Der Punkt C

liegt vom Punkt A aus in Richtung des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1 LE entfernt.



- (a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C ! (1 Punkt)
- (b) Bestimmen Sie die Länge der Seite c . (3 Punkte)
- (c) Wie groß sind die Winkel α und β ? (4 Punkte)
- (d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks! (3 Punkte)
- (e) Geben Sie eine Gleichung derjenigen Geraden an, die durch die Punkte A und B verläuft! (3 Punkte)
- (f) Geben Sie (in Normalenform) eine Gleichung derjenigen Ebene an, in der das Dreieck liegt. (6 Punkte)

**Aufgabe 2 (20 Punkte)****Lineare Gleichungssysteme**

Für welches c hat das folgende lineare Gleichungssystem

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2y + 2z = 3$$

$$x + y + (c - 1)^2 z = c + 1$$

- (a) unendlich viele Lösungen? (6 Punkte)
- (b) keine Lösung? (4 Punkte)
- (c) genau eine Lösung? (4 Punkte)
- (d) Wie lautet die Lösung/die Lösungen des LGS für $c = 1$. (6 Punkte)

Aufgabe 3 (20 Punkte)

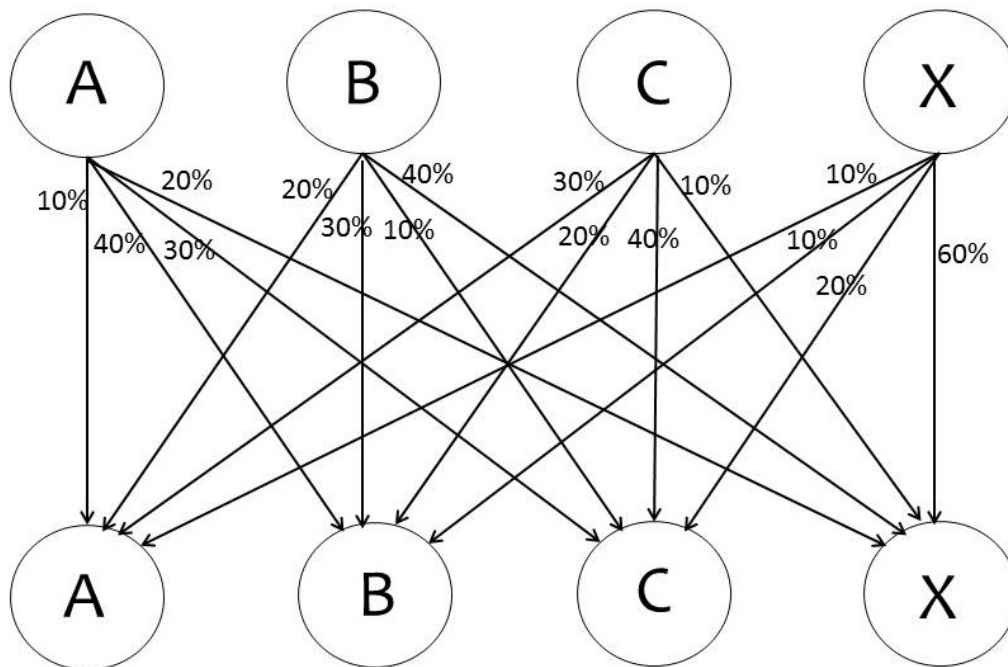
Anwendung der Matrizenrechnung

Auf einem Markt konkurrieren drei Markenprodukte A, B und C miteinander.

Im Monat Januar hat Produkt A einen Marktanteil von 30%, B hat einen Marktanteil von 10% und C hat einen Anteil von 40%.

20 % der potentiellen Käufer kaufen keines der 3 Markenprodukte.

Das Verhalten der Käufer von einem Monat zum nächsten, einer Marke treu zu bleiben, zu einer anderen Marke zu wechseln oder keine der Marken zu kaufen, wird durch folgende Abbildung beschrieben, in der das X für keine der Marken steht.



- Erstellen Sie eine Übergangsmatrix U , mit der die Änderung des Kaufverhaltens beschrieben wird. (5 Punkte)
- Was bedeutet der Eintrag u_{23} ? (5 Punkte)
- Welche Marktanteile haben die drei Marken im Monat Februar? Formulieren Sie einen Antwortsatz! (10 Punkte)



Aufgabe 4 (20 Punkte) Folgen und Reihen

Für den Bau des U-Bahn-Tunnels in Düsseldorf wurde ein Bohrer eingesetzt, der für die ersten 50-Meter-Abschnitt des Tunnels 50 Tage gebraucht hat, für jeden weiteren 50-Meter Abschnitt allerdings einen Tag mehr als für den jeweiligen vorherigen 50-Meter-Abschnitt.

Der erste Abschnitt des Tunnels kostete 500.000 Euro, jeder weitere Abschnitt 10% mehr als der jeweilige vorherige Abschnitt.

- (a) Geben Sie ein Bildungsgesetz für die Folge an, die den Zeitbedarf pro 50-Meter-Abschnitt beschreibt. (2 Punkte)
- (b) Wie lange dauerte die Bohrung des siebten 50-Meter-Abschnitts des Tunnels? (2 Punkte)
- (c) Wie lange dauert die Fertigstellung des insgesamt 5 Kilometer langen Tunnels? (5 Punkte)
- (d) Geben Sie ein Bildungsgesetz für die Folge an, die die Kosten pro Abschnitt beschreibt. (3 Punkte)
- (e) Wie teuer war der siebte 50-Meter-Abschnitt (3 Punkte)
- (f) Welche Kosten sind für die gesamte Bohrung des insgesamt 5 Kilometer langen Tunnels angefallen? (5 Punkte)

Aufgabe 5 (20 Punkte)
Finanzmathematik

Für Ihre Rentenversorgung zahlen Sie über einen Zeitraum von 30 Jahren jedes Jahr am Anfang des Jahres einen Betrag von 2.000 Euro ein. Nach diesen 30 Jahren möchten Sie sich von dem daraus inklusive Zinsen entstandenen Betrag jährlich einen festen Betrag auszahlen lassen.

- (a) Welchen Betrag haben Sie nach den ersten 30 Jahren inklusive Zinsen angespart, wenn Sie von einem Zinssatz von 5 % ausgehen? (8 Punkte)
- (b) Nach diesen 30 Jahren möchten Sie den angesparten Betrag durch jährliche Auszahlungen aufbrauchen.

Wie lange (auf ganze Jahre gerundet) können Sie sich am Jahresende jeweils 15.000 Euro auszahlen lassen, wenn der Zinssatz in der Auszahlungsphase 10 % beträgt?

(12 Punkte)

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil a) nicht gelöst haben, können Sie hier (fälschlicherweise) davon ausgehen, dass Sie nach 30 Jahren in Aufgabe a) 80.000 Euro angespart haben.

Wichtige Formeln

Vektorrechnung

Produkte von Vektoren

Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Winkel α zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

Normalenform einer Ebene $E : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$

$$E : (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$$

Folgen und Reihen

Arithmetische Folgen

Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

n-te Partialsumme

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Geometrische Folgen

Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

n-te Partialsumme

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_1 q^{i-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Finanzmathematik

Rentenendwert vorschüssig:

$$E_n^V = Rq \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rentenendwert nachschüssig:

$$E_n^N = R \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rentenbarwert vorschüssig:

$$B_n^V = Rq \frac{1}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rentenbarwert nachschüssig:

$$B_n^N = R \frac{1}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rechenregeln für Logarithmen

$$\log_a uv = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a (u^c) = c \log_a u$$

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$$