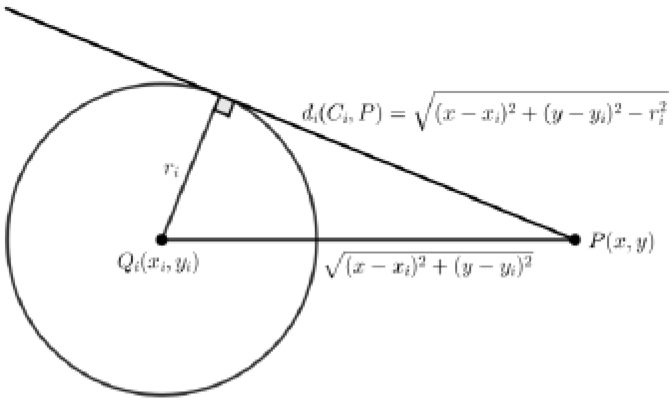
一、 前情提要

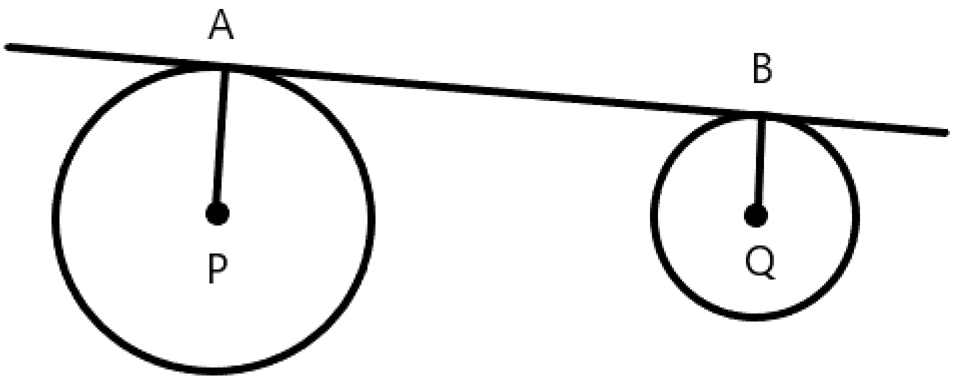
1. Laguerre geometry

考慮三維向量空間 R^3，定義兩點 $\mathrm{p}_{(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_1)}$、$\mathrm{Q}(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_2)$ 之間距離為 $d^2(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = (x1-x2)^2 + (y1-y2)^2 - (z1-z2)^2$，將點 $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ 從 Laguerre geometry 轉換到 Euclidean geometry，可以表示為在 Euclidean geometry 下，一個圓心為(x,y)且半徑為$|\mathrm{z}|$的 directed circle，這樣一來考慮圓$C_i = C_i(Q_i; r_i)$，其中$Q_i = (x_i, y_i)$為圓心座標且半徑為r_i，點$\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$與$C_i$之間的距離可以表示為$d_L^2(C_i,P) = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 - r_i^2$，如下圖表示。

註：若P在C_i之外，則$d_L(C_i,P) > 0$，若P在C_i之內，則$d_L(C_i,P) < 0$，否則$d_L(C_i,P) = 0$。



也就是說，兩點P、Q在 Laguerre geometry 上的距離可以換作是在 Euclidean geometry 上兩圓公切線點到點的距離，如下圖$\overline{\mathrm{AB}}$所示。



2. Radical axes and radical centers

令C_i與C_j為平面上相異兩圓，它們的半徑分別是r_1與r_2。那麼同平面上對此兩圓的冪相同（也就是對兩圓的切線段等長）的點的軌跡，是一條垂直連心線的直線，稱作這兩圓的根軸，如下圖所示。

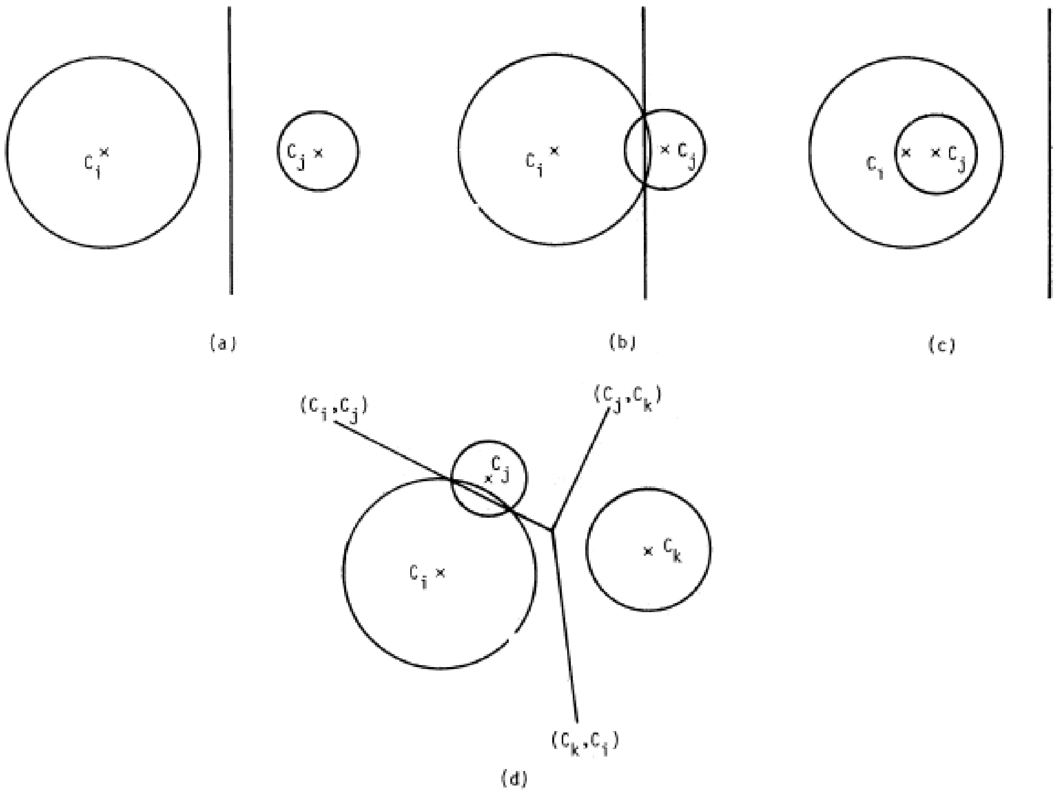
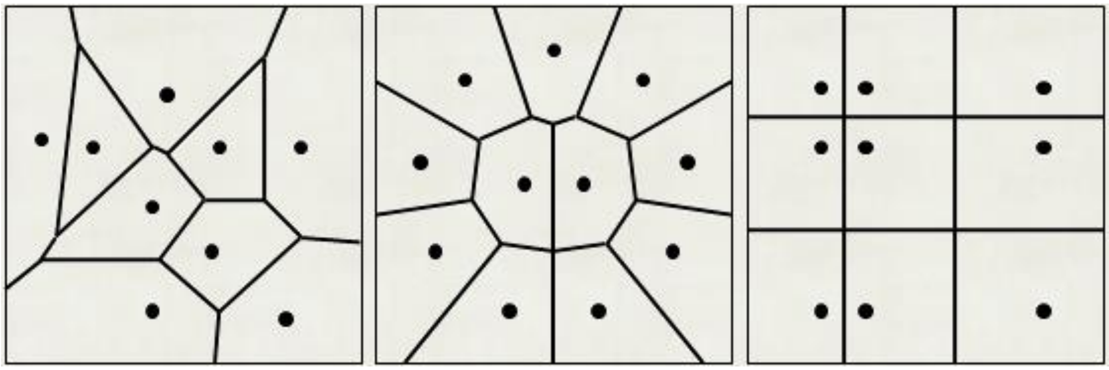


FIG. 1. *Radical axes and radical centers.*

3. Voronoi diagram

平面上散布許多點。平面上每一處，各自歸類於最近的點；自然而然的，形成了分界線。Voronoi Diagram 是分界線組成的集合。Voronoi 是發明者的姓氏。簡單來說，鄰近的點的中垂線，形成 Voronoi diagram。



4. Construction of the Voronoi diagram in Euclidean geometry

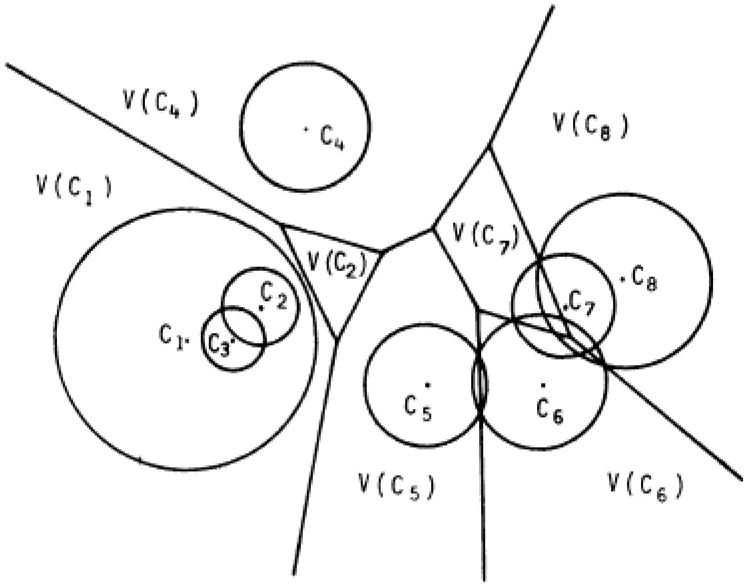
以下演算法為 Shamos and Hoey 所提出的，使用的技巧為 divide-and-conquer，在 Euclidean geometry 給定 n 個平面上相異點集合 $\mathrm{S}=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，依照 x 軸做排序後，重新給定下標並分為$\mathrm{L}=\{P_1,P_2,\cdots,P_{\lfloor n/2\rfloor}\}$和$\mathrm{R}=\{P_{\lfloor n/2\rfloor+1},P_{\lfloor n/2\rfloor+2},\cdots,P_n\}$兩個子集合，再對 L、R 的點集合建構 Voronoi diagram，稱之為$\mathrm{V(R)}$與$\mathrm{V(L)}$，之後再 merge $\mathrm{V(R)}$與$\mathrm{V(L)}$，這一步驟可以再$\mathrm{O(n)}$完成，此演算法的 time complexity 為$\mathrm{O}(\mathrm{n}\log n)$。

5. Definition of the Voronoi diagram in the Laguerre geometry

給定 n 個在平面上的圓$C_i=C_i(Q_i;r_i)(Q_i=(x_i,y_i))$，根據上述距離$d_L(C_i,P)$的定義，我們可以將定義在 Laguerre geometry 的 Voronoi diagram 為$\mathrm{V}(C_i) = \bigcap_{\mathrm{j}}\{P \in R^2 | d_L^2(C_i, P) \leq d_L^2(C_j, P)\}$，如下圖所示。

註：$d_L^2(C_i, P) \leq d_L^2(C_j, P)$將平面切割為兩塊，$\mathrm{V}(C_i)$為 convex、$\mathrm{V}(C_i)$可能為空(trivial)、$C_i$可能不與$\mathrm{V}(C_i)$相交(improper)。

註：Voronoi polygon 的頂點稱為 Voronoi point，Voronoi polygon 的邊稱為 Voronoi edge。



根據上述定義可以得知以下三個 LEMMA：

i. LEMMA1

$$\mathrm{V}(C_i) = \emptyset \rightarrow C_i \in improper$$
$$\forall C_i \in improper \rightarrow \exists \bigcup_{i \neq j} C_j \ contained \ C_i$$

ii. LEMMA2

給定 n 個點，在 Laguerre geometry 下的 Voronoi diagram，其 Voronoi point 與 Voronoi edge 的 space complexity 為$\mathrm{O(n)}$。

iii. LEMMA3

若$C_i(Q_i, r_i)$圓心位在$Q_i, \cdots, Q_n$所組成的 convex hull 的角上，則$\mathrm{V}(C_i) \neq \emptyset$和 $\mathrm{V}(C_i)$為 unbounded。若Q_i若在非 convex hull 的角上，則$\mathrm{V}(C_i)$可能為 unbounded或$\mathrm{V}(C_i) = \emptyset$。其餘情況下，$\mathrm{V}(C_i)$為 bounded或$\mathrm{V}(C_i) = \emptyset$。

二、 問題定義

本篇論文主要講解如何在 Laguerre geometry 的定義下，建構出 Voronoi diagram，以及給出這樣定義下的 Voronoi diagram 可以使用 time complexity 為$\mathrm{O}(\mathrm{n}\log n)$和 space complexity 為$\mathrm{O}(\mathrm{n})$的演算法處理以下問題。

i. 給定 n 個平面上的圓$C_i = C_i(Q_i, r_i)$，判斷任意一點$\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$是否包含於其交集中。

ii. 求解這些圓交集部分所形成的圖形的連通分量。

iii. 找出平面中 n 個給定圓的交集輪廓。

三、 解法敘述

在 Euclidean geometry 建構 Voronoi diagram 時，分割$\mathrm{V}(\mathrm{R})$與 $\mathrm{V}(\mathrm{L})$時，存在一條分界線，使得在建構圖時不用考慮分界線另外一側的，此條分界線具有以下性質。

- LEMMA4

  分界線由延伸到無限的兩條射線和一些有限的線段組成。對於$P_i \in L$和$P_j \in R$的一對，每個元素(射線或線段)包含在$\mathrm{V(L)}$中的$\mathrm{V}(P_i)$和V®中的$\mathrm{V}\left(P_j\right)$的交點處，並且是$P_i$與$P_j$的垂直平分線。

- LEMMA5

  兩條射線必為點集$\mathrm{S} = \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$所形成的 convex hull($\mathrm{CH}(S)$)邊界上一對連續點的垂直平分線，使得一條在 L 中，另一條在 R 中。

透過得知如何在 Euclidean geometry 建構 Voronoi diagram 後，作者透過一些手法更動後，便可以在 Laguerre geometry 下建構 Voronoi diagram，步驟如下。

Step Ⅰ：將$\mathrm{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$依 x 軸排序後，分成兩個子集得到$\mathrm{L} = \{C_1, C_2, \cdots, C_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$與$\mathrm{R} = \{C_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, C_{\lfloor n/2 \rfloor + 2}, \cdots, C_n\}$，則兩個子集中的等距點所形成的軌跡即為分界線，與 Euclidean geometry 下的分界線有一樣的性質，並具有 LEMMA6 的性質。

- LEMMA6

  分割的多邊形的線是單曲線，由兩條射線和幾個有限的線段。該折線的左(右)的每個點（in Laguerre geometry）比 R[L]中的任何一個圓更接近 L[R]中的某個圓。

StepⅡ：利用 Voronoi Edge 為直線的性質，順時針掃描方式找到分界線。

StepⅢ：由於 convex hull 的邊緣可能為一直線，在 Laguerre geometry 上，有些在 Euclidean geometry 的性質不成立，如下圖所示。

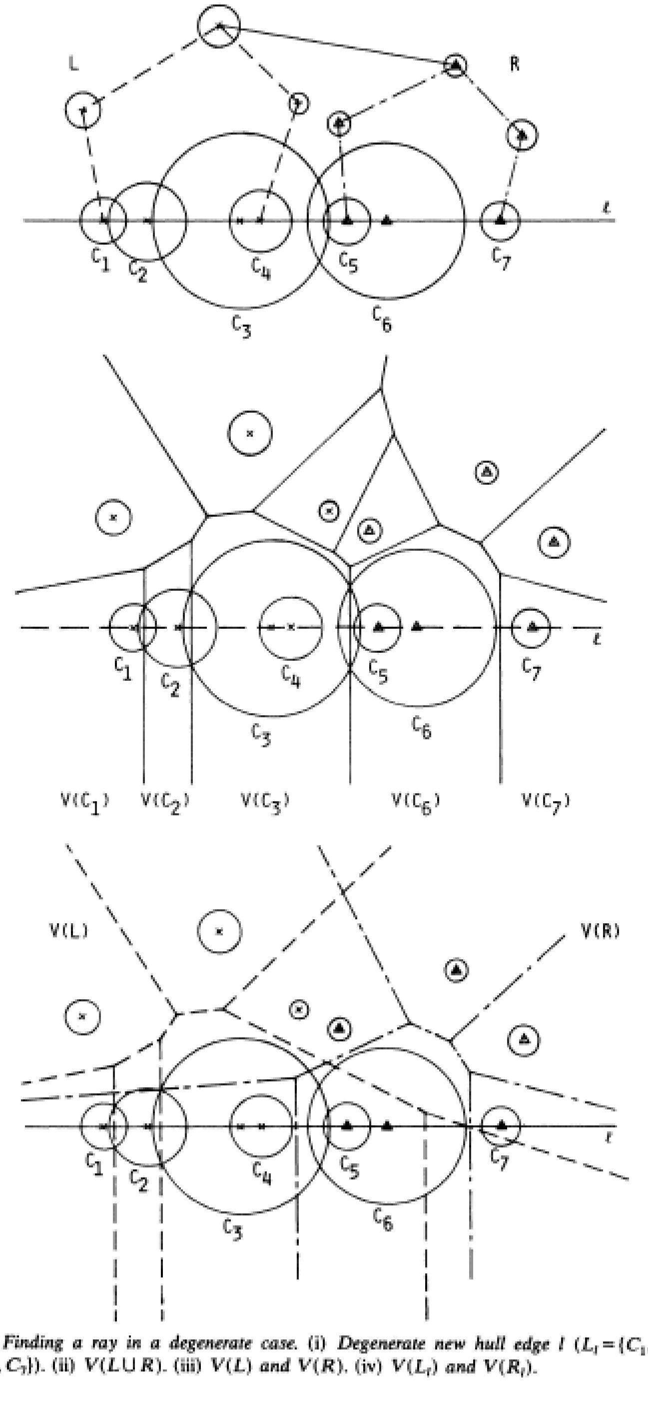


FIG. 5. *Finding a ray in a degenerate case.* (i) *Degenerate new hull edge l* ($L_l=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, $R_l=\{C_5, C_6, C_7\}$). (ii) $V(L\cup R)$. (iii) $V(L)$ *and* $V(R)$. (iv) $V(L_l)$ *and* $V(R_l)$.

因此在 LEMMA5 的部分要做些修改，得出 LAMME7。

- LEMMA7

考慮 convex hull 退化成直線的 l 的狀況下，將 L 和 R 中圓心位在此線上的集合標為L_l和R_l，將$V(L_l \cap R_l)$中所對應的 Voronoi Edge e^*的圓分別標為$C_{i*} \in L_l \subseteq L$和$C_{j*} \in R_l \subseteq R$。則$e^*$即為$C_{i*}$與$C_{j*}$的根軸，便是所求的射線，如下圖所示。

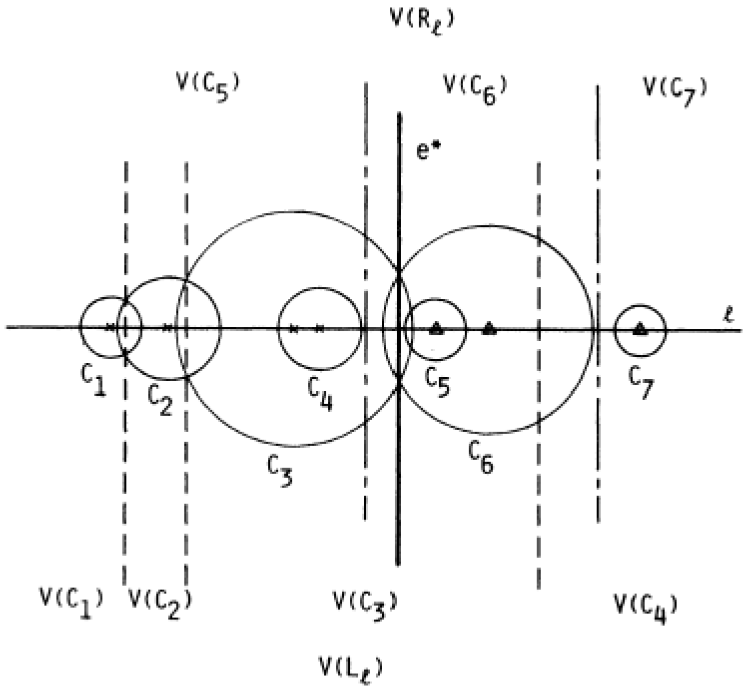


FIG. 5. (*cont.*)

StepIV：Merge L and R

如下圖所示，找出分界線後，即可 merge 原先分隔開來的兩個子集合 R 與 L，此步驟與 Shamos and Hoey 所提出的演算法極為相似，也是在 Time complexity 為$O(n)$可完成。

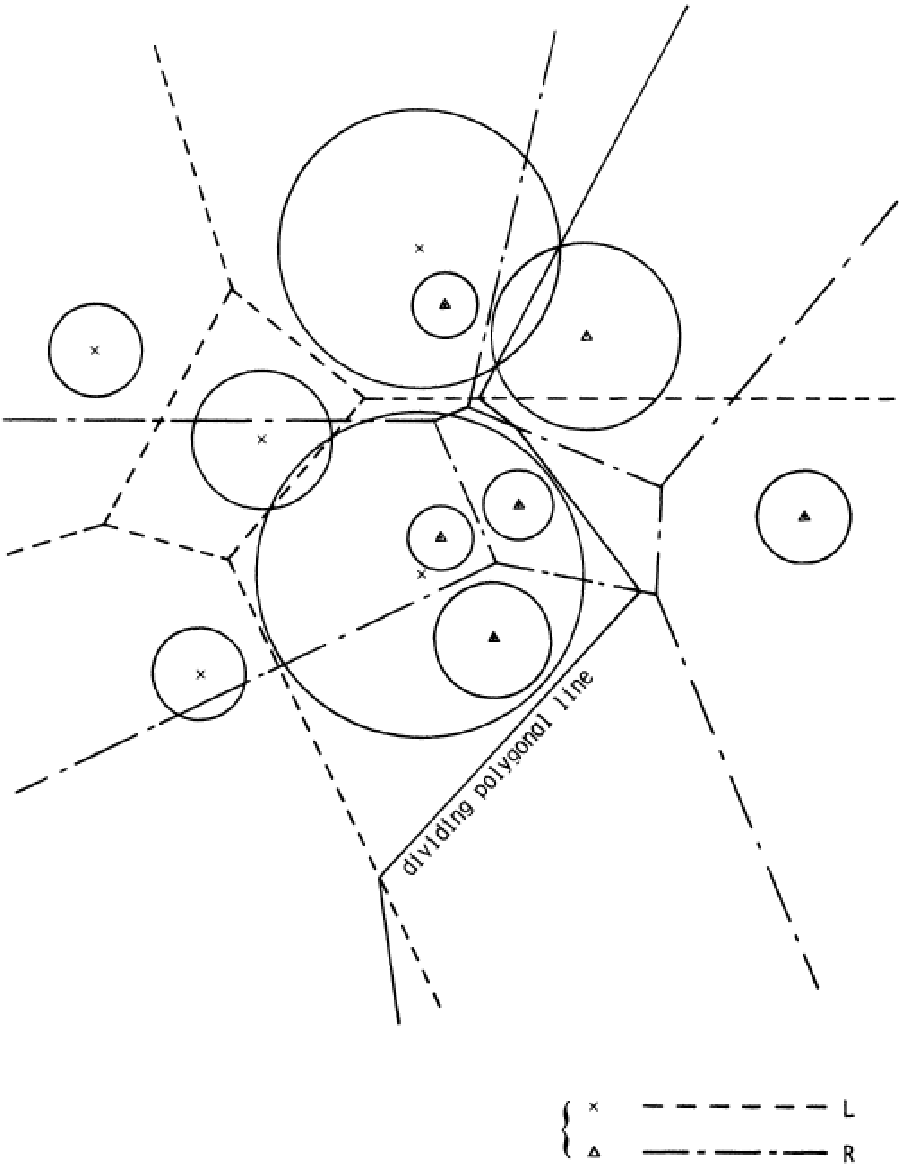


FIG. 4. *Merging the Voronoi diagrams in the Laguerre geometry.*

綜合上述，在 Laguerre geometry 下建構 n 個圓的 Voronoi diagram 可以在 Time complexity 為$O(\mathrm{nlog}\, n)$的情況下完成。

四、 讀後心得

最後一次作業可以說是最難的一次，一大坨的數學證明，一大坨的應用問題，到底人類的腦袋要怎麼想出這些?我到現在還是沒有任何頭緒。看完這篇後，甚至有了畢業就好的心態，因為我完全不知道論文要怎麼寫才能寫

出這麼有深度、有理論和有實際應用的文章?

文章中給出了三個應用場景，隨然說是有點引人入勝，但說真的這些在我的日常生活中可能也用不太到，可能進入業界十年後回頭來看這篇，或許會有不同感觸吧!?