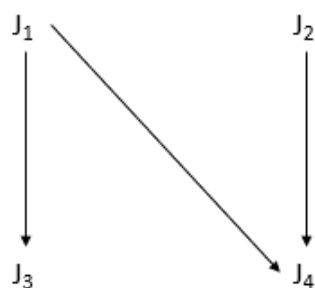


## 一、問題定義

- 給定一組 linearly ordered people set " $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ "，其中可能依年齡身高來做排序的依據，得到  $P_1 < P_2 < \dots < P_n$ 。
- 給定一組 partially ordered jobs set " $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ "。
- 定義一指派工作函數 " $f: P \rightarrow J$ "，其具有以下性質，若  $f(P_i) \leq f(P_j)$ ，則  $P_i \leq P_j$ ，且保證若  $i \neq j$ ，則  $f(P_i) \neq f(P_j)$ 。
- 指派工作的過程中會產生一成本，這邊定義  $C_{ij}$  表示  $P_i \rightarrow J_j$  所產生的成本，並定義  $X_{ij}$ ，若  $P_i \rightarrow J_j$ ，則  $X_{ij} = 1$ ，否則  $X_{ij} = 0$ 。
- 解  $\min \sum C_{ij}X_{ij}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，也就是求解指派工作的過程中，所產生的做小成本。
- 這一問題為最佳化問題，經過證明得出這問題屬於 NP-hard。

## 二、解法敘述

先回顧 Topological Sorting，下圖為一 Partial ordering of jobs 和 topologically sorted sequences。



A partial ordering of jobs

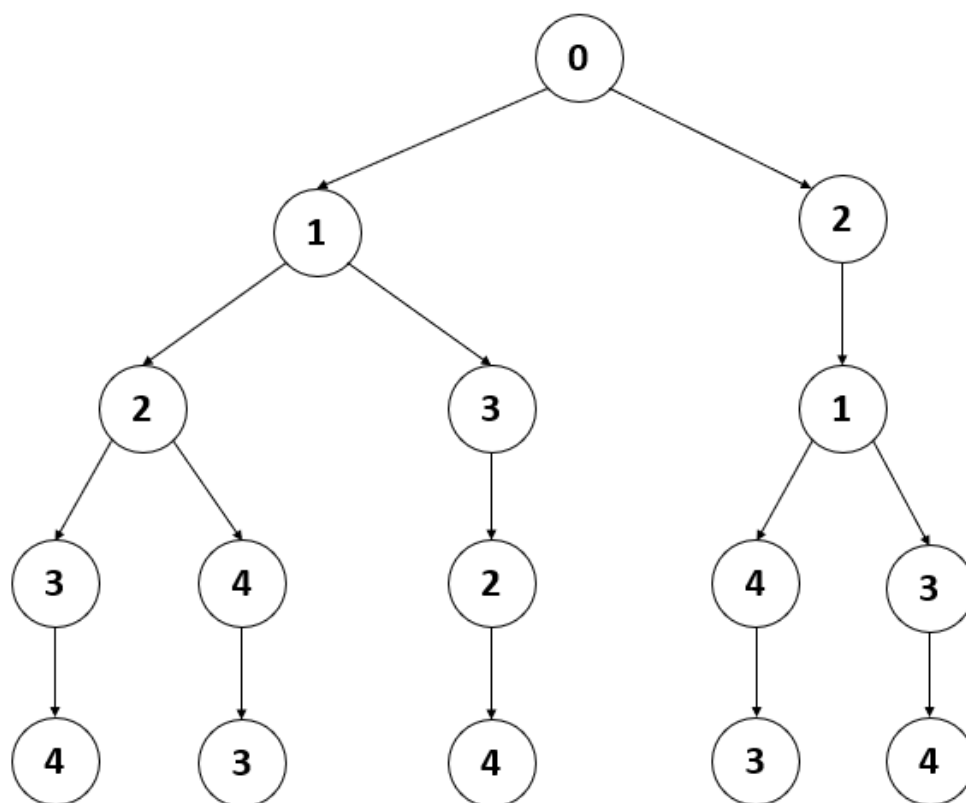
$J_1, J_2, J_3, J_4$   
 $J_1, J_2, J_4, J_3$   
 $J_1, J_3, J_2, J_4$   
 $J_2, J_1, J_3, J_4$   
 $J_2, J_1, J_4, J_3$

Topologically sorted sequences

每一組 sequence 表示一個可行的工作指派順序，以  $J_1, J_2, J_3, J_4$  來說，也就是  $P_1 \rightarrow J_1, P_2 \rightarrow J_2, P_3 \rightarrow J_3, P_4 \rightarrow J_4$ ，我們可以將所有 topologically sorted sequences 經由以下步驟：

- (1) 選取一個 in-degree 為零的節點，代表這個工作沒有前繼的工作
- (2) 將此節點選為所有拓撲排序結果的元素
- (3) 自工作集中將此元素刪去，剩下的工作集合依然為部分排序狀態

畫成一顆 tree 來表示他，若下圖所示。



A tree of all topologically sorted sequences

之後我們對這棵樹採取 branch-and-bound 策略找出最佳解，步驟如下：

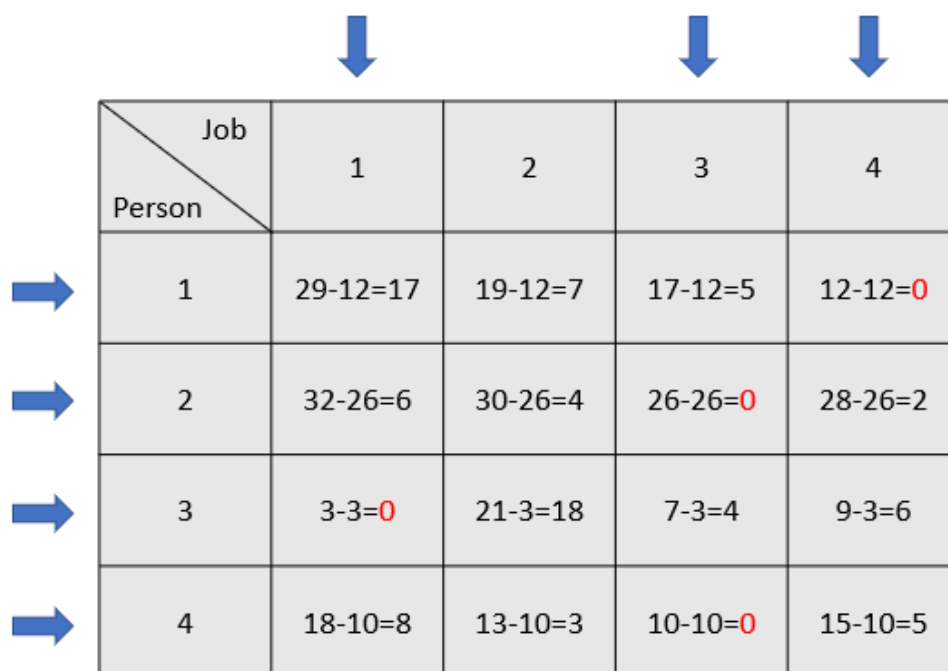
- (1) 給定一個 cost matrix，對每一 row 與 col 減去該行和該列的最小值，

使得每一行和每一列至少有一個 0，得到 reduced cost matrix，之後便將

矩陣中所有元素加總，即為給定工作排序的 lower bound，如下圖所示。


Job \ Person	1	2	3	4
1	29	19	17	12
2	32	30	26	28
3	3	21	7	9
4	18	13	10	15

A cost matrix for a personnel assignment problem



Job \ Person	1	2	3	4
1	$29-12=17$	$19-12=7$	$17-12=5$	$12-12=0$
2	$32-26=6$	$30-26=4$	$26-26=0$	$28-26=2$
3	$3-3=0$	$21-3=18$	$7-3=4$	$9-3=6$
4	$18-10=8$	$13-10=3$	$10-10=0$	$15-10=5$

After row operation



Person \ Job	1	2	3	4
	1	2	3	4
1	17	$7-3=4$	5	0
2	6	$4-3=1$	0	2
3	0	$18-3=15$	4	6
4	8	$3-3=0$	0	5

After col operation

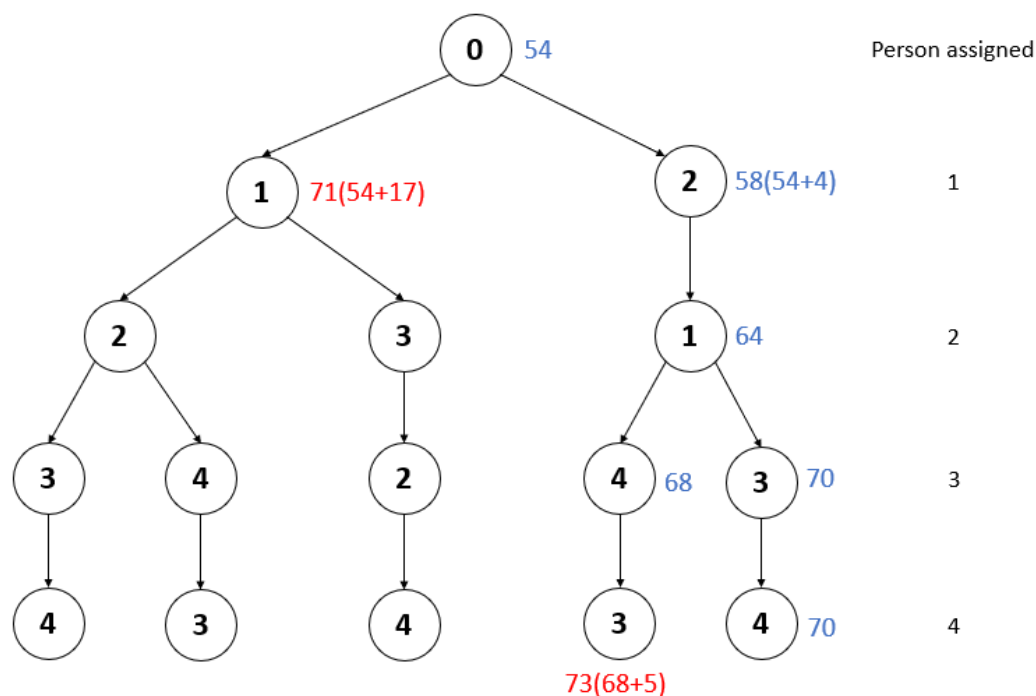
Person \ Job	1	2	3	4
	1	2	3	4
1	17	4	5	0
2	6	1	0	2
3	0	15	4	6
4	8	0	0	5

$$\text{Total Cost} = 17+4+5+\dots+8+5 = 54$$

A reduced cost matrix

(2) 根據 reduced cost matrix，將剩下的 cost 補上並畫出一棵樹，如下

圖。



之後我們先找尋一組解，例如  $J_2, J_1, J_3, J_4$ ，經過 reduced cost matrix 計算得到的 Total cost 為 70，接著找尋其他分支如  $J_2, J_1, J_4, J_3$  或是  $J_1, J_3, J_2, J_4$ ，在選擇某些節點時發現總體成本已經超過一開始所找到的成本，代表此分支可以被刪去，若發現另外一組解的成本小於一開始的，則更新最低成本。

### 三、讀後心得

讀完後發現其實這樣的問題在很多場合都適用，例如飛機排班，或是礦場排班都符合條件需求，藉由 topologically sorted 後找到可能的解，再由分支界定法(branch-and-bound)來找出最佳解，我認為是一個非常實

用的方法，希望在未來的生活裡，遇到一些類似的難題，我也能運用此方式來最佳化。