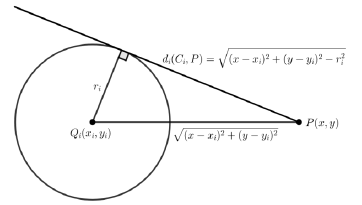
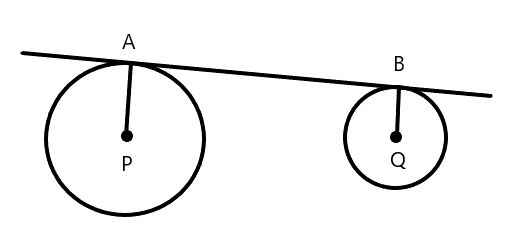
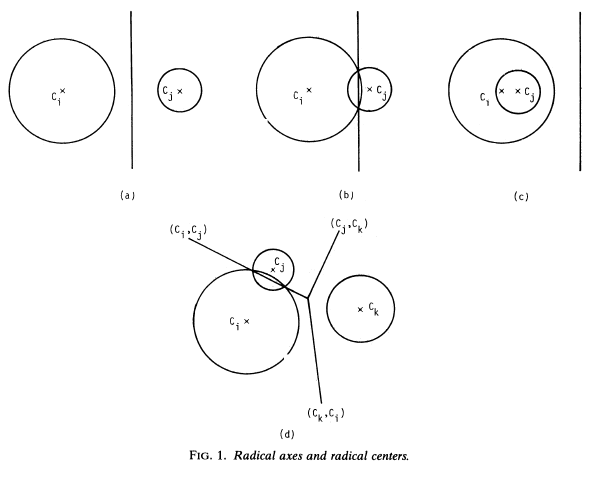
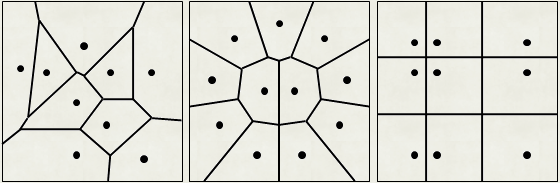
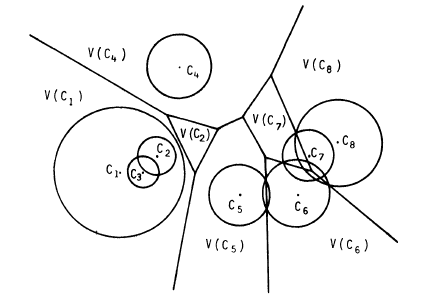
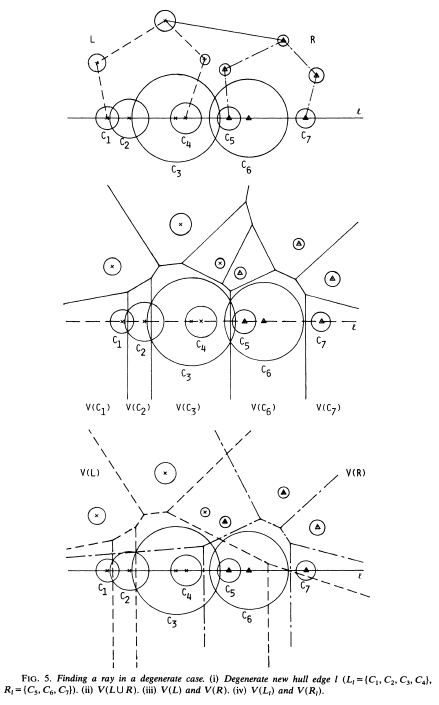
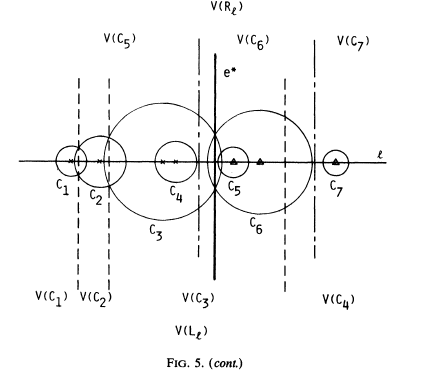
1. **前情提要**
2. Laguerre geometry  
   考慮三維向量空間，定義兩點、 之間距離為，將點從Laguerre geometry轉換到Euclidean geometry，可以表示為在Euclidean geometry下，一個圓心為且半徑為的directed circle，這樣一來考慮圓，其中為圓心座標且半徑為，點與之間的距離可以表示為，如下圖表示。  
   註：若在之外，則，若在之內，則，否則。  
      
   也就是說，兩點在Laguerre geometry上的距離可以換作是在Euclidean geometry上兩圓公切線點到點的距離，如下圖所示。  
   
3. Radical axes and radical centers  
   令與為平面上相異兩圓，它們的半徑分別是與。那麼同平面上對此兩圓的冪相同（也就是對兩圓的切線段等長）的點的軌跡，是一條垂直連心線的直線，稱作這兩圓的根軸，如下圖所示。  
   
4. Voronoi diagram  
   平面上散布許多點。平面上每一處，各自歸類於最近的點；自然而然的，形成了分界線。Voronoi Diagram是分界線組成的集合。Voronoi是發明者的姓氏。簡單來說，鄰近的點的中垂線，形成Voronoi diagram。  
   
5. Construction of the Voronoi diagram in Euclidean geometry  
   以下演算法為Shamos and Hoey所提出的，使用的技巧為divide-and-conquer，在Euclidean geometry給定n個平面上相異點集合，依照x軸做排序後，重新給定下標並分為和兩個子集合，再對L、R的點集合建構Voronoi diagram，稱之為，之後再merge，這一步驟可以再完成，此演算法的time complexity為。
6. Definition of the Voronoi diagram in the Laguerre geometry  
   給定n個在平面上的圓，根據上述距離的定義，我們可以將定義在Laguerre geometry的Voronoi diagram為，如下圖所示。  
   註：將平面切割為兩塊，為convex、可能為空(trivial)、可能不與相交(improper)。  
   註：Voronoi polygon的頂點稱為Voronoi point，Voronoi polygon的邊稱為Voronoi edge。  
     
   根據上述定義可以得知以下三個LEMMA：
7. LEMMA1
8. LEMMA2  
   給定n個點，在Laguerre geometry下的Voronoi diagram，其Voronoi point與Voronoi edge的space complexity為。
9. LEMMA3  
   若圓心位在所組成的convex hull的角上，則和 。若若在非convex hull的角上，則或。其餘情況下，或。
10. **問題定義**本篇論文主要講解如何在Laguerre geometry的定義下，建構出Voronoi diagram，以及給出這樣定義下的Voronoi diagram可以使用time complexity為和space complexity為的演算法處理以下問題。
11. 給定n個平面上的圓，判斷任意一點是否包含於其交集中。
12. 求解這些圓交集部分所形成的圖形的連通分量。
13. 找出平面中n個給定圓的交集輪廓。
14. **解法敘述**在Euclidean geometry建構Voronoi diagram時，分割時，存在一條分界線，使得在建構圖時不用考慮分界線另外一側的，此條分界線具有以下性質。

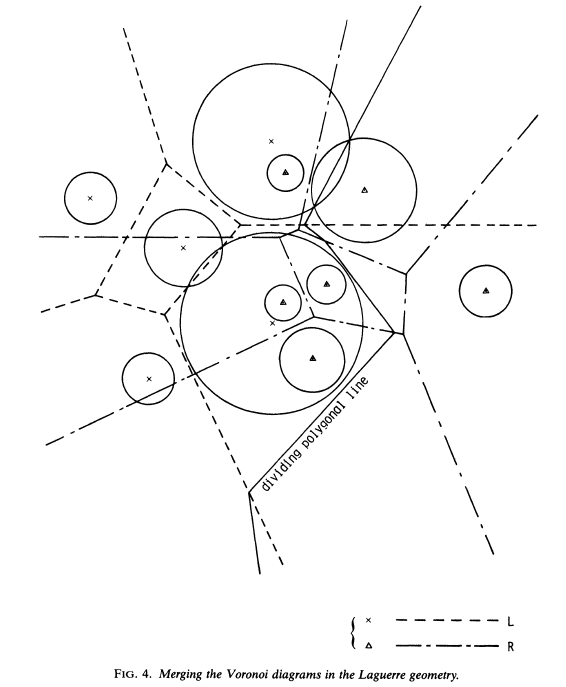
* LEMMA4  
  分界線由延伸到無限的兩條射線和一些有限的線段組成。對於和的一對，每個元素(射線或線段)包含在中的和中的的交點處，並且是與的垂直平分線。
* LEMMA5  
  兩條射線必為點集所形成的convex hull()邊界上一對連續點的垂直平分線，使得一條在L中，另一條在R中。

透過得知如何在Euclidean geometry建構Voronoi diagram後，作者透過一些手法更動後，便可以在Laguerre geometry下建構Voronoi diagram，步驟如下。  
StepⅠ：將依x軸排序後，分成兩個子集得到與，則兩個子集中的等距點所形成的軌跡即為分界線，與Euclidean geometry下的分界線有一樣的性質，並具有LEMMA6的性質。

* LEMMA6  
  分割的多邊形的線是單曲線，由兩條射線和幾個有限的線段。該折線的左(右)的每個點（in Laguerre geometry）比R[L]中的任何一個圓更接近L[R]中的某個圓。

StepⅡ：利用Voronoi Edge為直線的性質，順時針掃描方式找到分界線。  
StepⅢ：由於convex hull的邊緣可能為一直線，在Laguerre geometry上，有些在Euclidean geometry的性質不成立，如下圖所示。  
  
因此在LEMMA5的部分要做些修改，得出LAMME7。

* LEMMA7  
  考慮convex hull退化成直線的l的狀況下，將L和R中圓心位在此線上的集合標為和，將中所對應的Voronoi Edge 的圓分別標為和。則即為與的根軸，便是所求的射線，如下圖所示。  
  

StepⅣ：Merge L and R  
如下圖所示，找出分界線後，即可merge原先分隔開來的兩個子集合R與L，此步驟與Shamos and Hoey所提出的演算法極為相似，也是在Time complexity為可完成。  


綜合上述，在Laguerre geometry下建構n個圓的Voronoi diagram可以在Time complexity為的情況下完成。

1. **讀後心得**最後一次作業可以說是最難的一次，一大坨的數學證明，一大坨的應用問題，到底人類的腦袋要怎麼想出這些?我到現在還是沒有任何頭緒。看完這篇後，甚至有了畢業就好的心態，因為我完全不知道論文要怎麼寫才能寫出這麼有深度、有理論和有實際應用的文章?   
   文章中給出了三個應用場景，隨然說是有點引人入勝，但說真的這些在我的日常生活中可能也用不太到，可能進入業界十年後回頭來看這篇，或許會有不同感觸吧!?