

Preuves assistées par ordinateur pour l'analyse
d'atteignabilité de problèmes de contrôle linéaires
sous contraintes bornées

IVAN HASENOHR

Thèse effectuée sous la direction de
CAMILLE POUCHOL, YANNICK PRIVAT,
et CHRISTOPHE ZHANG.

20 novembre 2025



Sommaire

- 1 Théorie du contrôle
- 2 Méthodologie
- 3 Majoration des erreurs de discrétisation
- 4 Exemples de preuves assistées par ordinateur

Sommaire

1 Théorie du contrôle

2 Méthodologie

3 Majoration des erreurs de discrétisation

4 Exemples de preuves assistées par ordinateur

Système de contrôle

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \in X \\ u(t) \in \mathcal{U} \subset U & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (S)$$

qui se reformule en :

$$\forall t \in [0, T], \quad y(t; y_0, u) = e^{tA}y_0 + L_t u.$$

Notons également l'ensemble de contraintes

$$E_u = \{u \in L^2(0, T; U), \quad \forall t \in [0, T], \quad u(t) \in \mathcal{U}\}.$$

Système de contrôle

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \in X \\ u(t) \in \mathcal{U} \subset U & \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (S)$$

qui se reformule en :

$$\forall t \in [0, T], \quad y(t; y_0, u) = e^{tA}y_0 + L_t u.$$

Notons également l'ensemble de contraintes

$$E_u = \{u \in L^2(0, T; U), \quad \forall t \in [0, T], \quad u(t) \in \mathcal{U}\}.$$

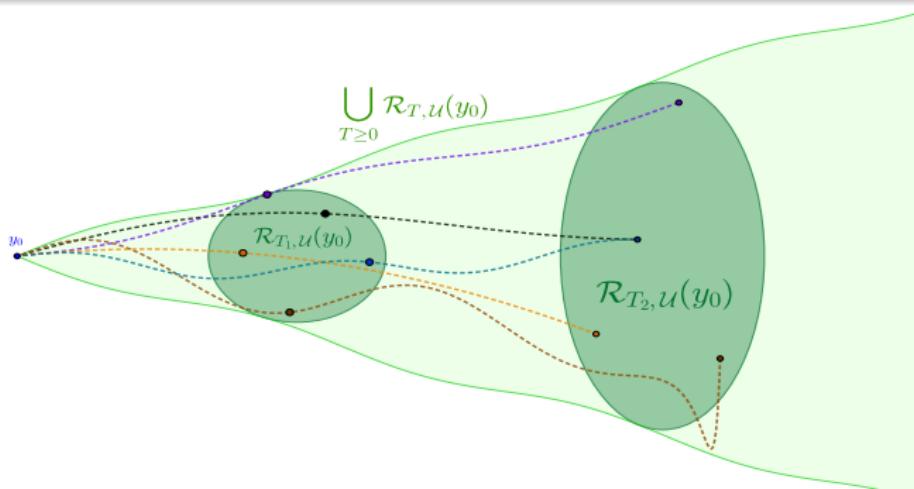
Atteignabilité

Définition

Un ensemble cible \mathcal{Y}_f est \mathcal{U} -atteignable depuis y_0 en temps T si :

$$\exists \mathbf{u} \in E_{\mathcal{U}}, \exists y_f \in \mathcal{Y}_f, \quad y(T; y_0, \mathbf{u}) = y_f.$$

L'ensemble atteignable $\mathcal{R}_{T,\mathcal{U}}(y_0) = e^{TA}y_0 + L_T E_{\mathcal{U}}$ est l'ensemble des points \mathcal{U} -atteignables (depuis y_0 en temps T).



État de l'art

Contrôle des EDOs linéaires :

- contrôlabilité sans contraintes : condition de Kalman,
- contrôlabilité sous contraintes non bornées : SCHÄTTLER et LEDZEWICZ, 2012 (théorie géométrique du contrôle)
- approximations de l'ensemble atteignable sous contraintes bornées : ALTHOFF et al., 2021, WABERSICH et al., 2023.

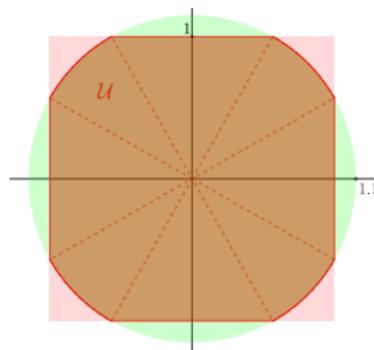
Contrôle des EDPs paraboliques :

- contrôlabilité sans contraintes : LEBEAU et ROBBIANO, 1994, CHEN et ROSIER, 2022, ERVEDOZA et al., 2022,
- contrôlabilité sous contraintes non bornées : LOHÉAC et al., 2017, PIGHIN et ZUAZUA, 2018, POUCHOL et al., 2024,
- résultats d'atteignabilité : BERRAHMOUNE, 2020, CASAS et KUNISCH, 2022.

Motivation

Rendez-vous spatial (équations de Clohessy-Wiltshire) : $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + B\textcolor{orange}{u}(t) \\ y(0) = \textcolor{teal}{y}_0 = 0 \\ \textcolor{orange}{u}(t) \in \mathbb{R}^2 \\ \|\textcolor{orange}{u}(t)\|_2 \leq 1.15 \\ \|\textcolor{orange}{u}(t)\|_\infty \leq 1 \end{cases}$$



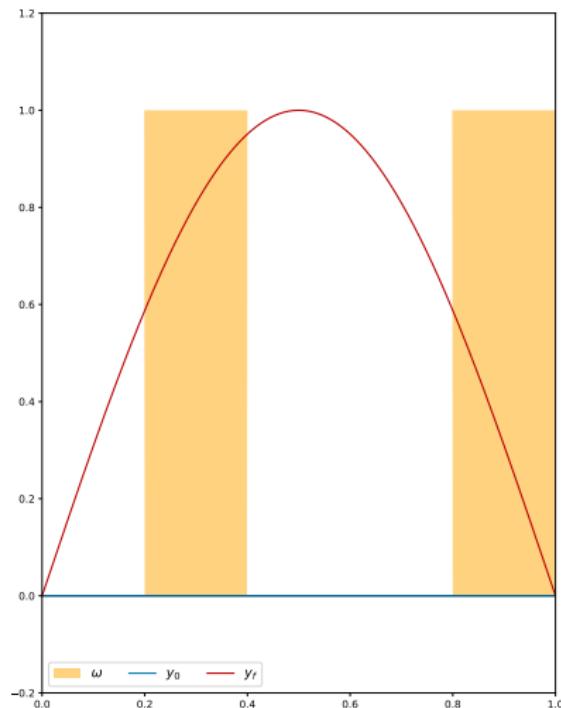
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Motivation

Équation de la chaleur :
 $\forall t, x \in [0, T] \times [0, 1],$

$$\begin{cases} \dot{y}(t, x) = \Delta y(t, x) + \mathbb{1}_\omega u(t, x) \\ y(0, x) = y_0(x) = 0 \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0 \\ 0 \leq u(t, x) \leq 1 \\ y(T, x) = y_f(x) = \sin(\pi x). \end{cases}$$



Contributions

Publications :

1. *Computer-assisted proofs of non-reachability for finite-dimensional linear control systems*, IH, C. Pouchol, Y. Privat, C. Zhang, SIAM Journal on Control and Optimization, Sep. 2025
2. *Computer-assisted proofs of non-reachability for linear parabolic PDEs under bounded control constraints*, IH, C. Pouchol, Y. Privat, C. Zhang, preprint, 2025

Sommaire

1 Théorie du contrôle

2 Méthodologie

3 Majoration des erreurs de discrétisation

4 Exemples de preuves assistées par ordinateur

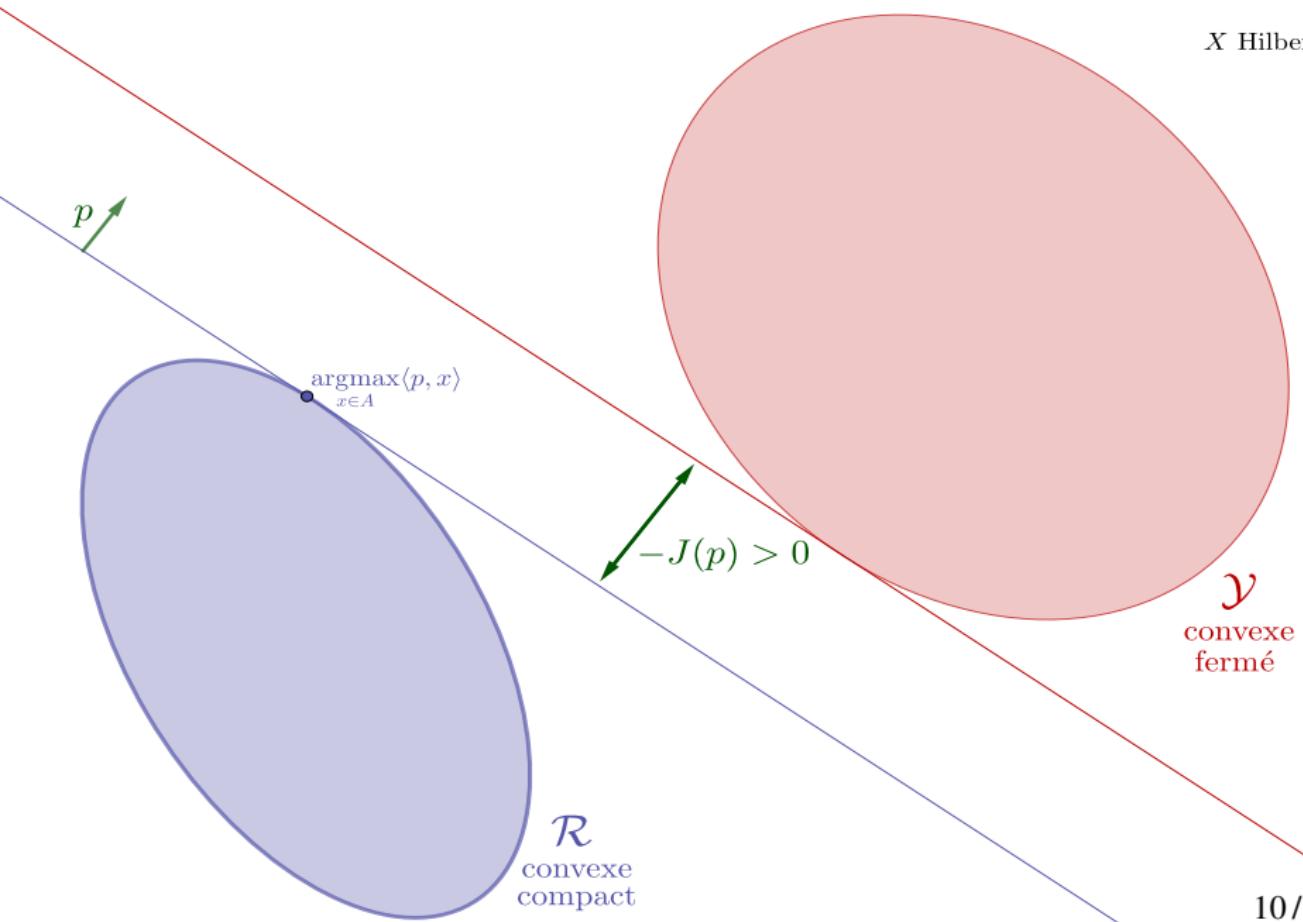
Atteignabilité

\mathcal{Y}_f est \mathcal{U} -atteignable depuis y_0 en temps T si et seulement si

$$\mathcal{R}_{T,\mathcal{U}}(y_0) \cap \mathcal{Y}_f \neq \emptyset.$$

Proposition (LI et YONG, 2012; SCHÄTTLER et LEDZEWICZ, 2012)

Si \mathcal{U} est non-vide, convexe, fermé et borné, alors $\mathcal{R}_{T,\mathcal{U}}(y_0)$ est convexe et faiblement compact.



Fonctionnelle de séparation

En notant

$$J: \textcolor{violet}{p} \mapsto \sigma_{\mathcal{R}}(\textcolor{violet}{p}) + \sigma_{\mathcal{Y}}(-\textcolor{violet}{p}),$$

où

$$\sigma_{\mathcal{R}}: \textcolor{violet}{p} \mapsto \sup_{x \in \mathcal{R}} \langle \textcolor{violet}{p}, x \rangle \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathcal{Y}}: \textcolor{violet}{p} \mapsto \sup_{x \in \mathcal{Y}} \langle \textcolor{violet}{p}, x \rangle$$

Théorème

Supposons \mathcal{R} convexe et compact, \mathcal{Y} convexe et fermé. Alors

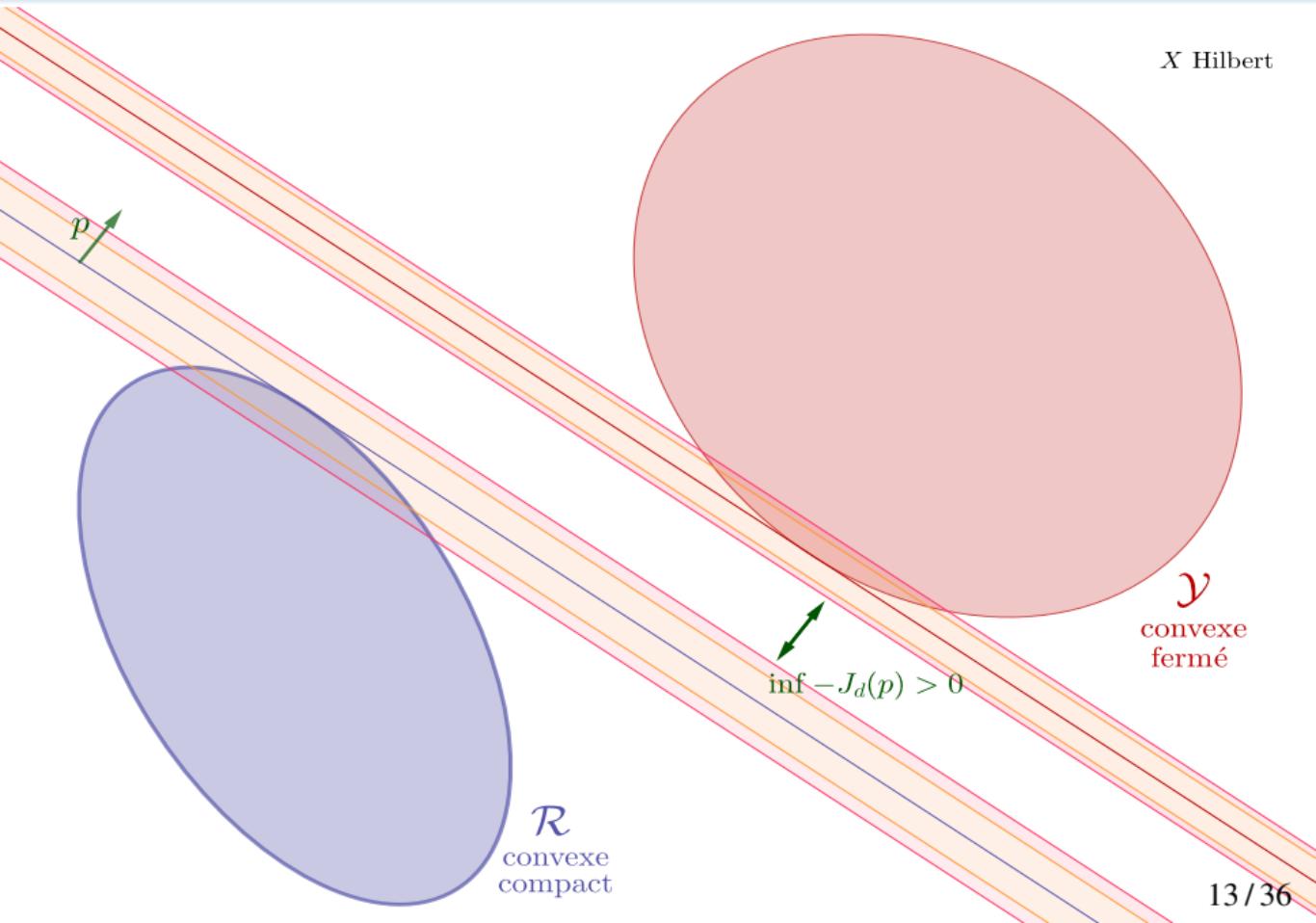
$$\exists \textcolor{violet}{p} \in X, \quad J(\textcolor{violet}{p}) < 0 \quad \iff \quad \mathcal{R} \cap \mathcal{Y} = \emptyset.$$

Évaluation approximative

Fonctionnelles non-explicites :

- \mathcal{R} ou \mathcal{Y} inconnus \implies erreurs d'approximation
- calculs numériques \implies erreurs d'arrondis.

Conséquence : difficile de conclure si $J(\textcolor{violet}{p}) < 0$.



Méthodologie pour prouver que $\mathcal{R} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$

- ➊ Trouver $J_d \simeq J$ évaluable
- ➋ Minimiser J_d pour trouver $\textcolor{violet}{p}$ tel que

$$\text{Eval}(J_d(\textcolor{violet}{p})) < 0,$$

- ➌ Borner explicitement les erreurs d'arrondis avec INTLAB (RUMP, 1999) :

$$|\text{Eval}(J_d(\textcolor{violet}{p})) - J_d(\textcolor{violet}{p})| \leq e_r(\textcolor{violet}{p}),$$

- ➍ Borner explicitement les erreurs d'approximation :

$$|J_d(\textcolor{violet}{p}) - J(\textcolor{violet}{p})| \leq e_a(\textcolor{violet}{p}),$$

- ➎ Vérifier que $J_d(\textcolor{violet}{p}) + e_r(\textcolor{violet}{p}) + e_a(\textcolor{violet}{p}) < 0$, donc que $J(\textcolor{violet}{p}) < 0$ et

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{Y} = \emptyset.$$

Fonctionnelle de séparation

Dorénavant, \mathcal{U} est supposé non vide, convexe, fermé et borné. Notons

$$J : p_f \mapsto \sigma_{\mathcal{R}_T, \mathcal{U}(y_0)}(p_f) + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-p_f),$$

qui se reformule en :

$$J : p_f \mapsto \sigma_{E_{\mathcal{U}}}(L^* p_f) + \langle p_f, e^{TA} y_0 \rangle + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-p_f).$$

Théorème

S'il existe p_f tel que $J(p_f) < 0$, alors \mathcal{Y}_f n'est pas \mathcal{U} -atteignable depuis y_0 en temps T .

Equation adjointe

Comme le contrôle vérifie

$$\forall t \in [0, T], \quad \textcolor{orange}{u}(t) \in \mathcal{U},$$

on réécrit

$$J(\textcolor{green}{p}_f) = \int_0^T \sigma_B \textcolor{orange}{u}(\textcolor{green}{p}(t)) dt + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-\textcolor{green}{p}_f),$$

où $\textcolor{green}{p}$ vérifie l'équation adjointe :

$$\begin{cases} \dot{\textcolor{green}{p}}(t) = A^* \textcolor{green}{p}(t), \\ \textcolor{green}{p}(T) = p_f. \end{cases} \quad (\mathcal{A})$$

Sommaire

- 1 Théorie du contrôle
- 2 Méthodologie
- 3 Majoration des erreurs de discréétisation
- 4 Exemples de preuves assistées par ordinateur

Erreurs de discrétisation

$$J(\mathbf{p}_f) = \int_0^T \sigma_B \mathbf{u}(\mathbf{p}(t)) dt + \sigma_{\mathcal{Y}_f}(-\mathbf{p}_f),$$

où \mathbf{p} vérifie l'équation adjointe :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(t) = A^* \mathbf{p}(t), \\ \mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_f. \end{cases} \quad (\mathcal{A})$$

Hypothèse sur le problème de contrôle :

- $\sigma_B \mathbf{u}$ et $\sigma_{\mathcal{Y}_f}$ ont des formules explicites,
- $B : \mathbf{U} \rightarrow X$ est borné.

Erreurs de quadrature

$\sigma_B \textcolor{orange}{u}$ de régularité garantie Lipschitz \implies méthode des rectangles :

$$\left| \int_0^T \sigma_B \textcolor{orange}{u}(\textcolor{green}{p}(t)) dt - \Delta t \sum_{k=0}^{N_t-1} \sigma_B \textcolor{orange}{u}(\textcolor{green}{p}(t_k)) \right| \leq \frac{1}{2} \Delta t K T \|A^* \textcolor{green}{p}_f\|,$$

où $K = M \|B\| \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tA^*}\|$.

Majoration de la norme du semi-groupe

- Décomposition spectrale explicite :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|e^{tA^*}\| \leq C \exp(\mu T) Q(T).$$

- Semi-groupe de contractions :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|e^{tA^*}\| \leq 1.$$

Cas dissipatif : hypothèses

Hypothèses sur le problème de contrôle :

- $V \subset X \subset V'$ forment un triplet de Gelfand
- $A : V \rightarrow V'$, tel que $\exists 0 < a_0 \leq a_1$,

$$\forall v, w \in V \times V, \quad \begin{cases} |\langle A^* v, w \rangle| \leq a_1 \|v\|_V \|w\|_V \\ \operatorname{Re}(\langle -A^* v, v \rangle) \geq a_0 \|v\|_V^2. \end{cases}$$

Hypothèse sur l'espace de discrétisation $V_h \subset V$:

$$\forall f \in X, \quad \inf_{v_h \in V_h} \|A^{-1}f - v_h\|_V + \inf_{v_h \in V_h} \|(A^*)^{-1}f - v_h\|_V \leq C_0 h \|f\|.$$

Equation adjointe : discrétisation

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall n \in \{0, \dots, N_t\},$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}(t) = A^* \mathbf{p}(t), \\ \mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_f. \end{cases} \xrightarrow{\text{discrétisation}} \begin{cases} (\text{Id} - \Delta t A_h^*) \mathbf{p}_{h,n} = \mathbf{p}_{h,n+1}, \\ \mathbf{p}_{h,N_t} = \mathbf{p}_{fh}. \end{cases}$$

Proposition (HASENOHR et al., 2025b)

Après discrétisation de (\mathcal{A}) sur V_h avec un schéma d'Euler implicite, sous les hypothèses précédentes : $\forall (\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_{fh}) \in X \times V_h, \quad \forall n \in \{0, \dots, N_t\}$,

$$\|\mathbf{p}(t_n) - \mathbf{p}_{h,n}\| \leq C_1 \|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_{fh}\| + (C_2 h^2 + C_3 \Delta t) \|A^* \mathbf{p}_f\|,$$

où C_1, C_2 et C_3 sont connues explicitement et ne dépendent que de a_0 et a_1 .

Erreurs sur J

Soit

$$\begin{aligned} J_{\Delta t, h}(\textcolor{green}{p}_{fh}) &= \Delta t \sum_{n=1}^{N_t} \sigma_B \textcolor{orange}{u}((\text{Id} - \Delta t A_h^*)^{-n} \textcolor{green}{p}_{fh}) \\ &\quad - \langle \textcolor{red}{y}_f, \textcolor{green}{p}_{fh} \rangle + \langle \textcolor{blue}{y}_0, (\text{Id} - \Delta t A_h^*)^{-N_t} \textcolor{green}{p}_{fh} \rangle. \end{aligned}$$

Théorème (HASENOHR et al., 2025b)

Pour tous $p_f \in \mathcal{D}(A^*)$, $\textcolor{green}{p}_{fh} \in V_h$, on a

$$\begin{aligned} |J(p_f) - J_{\Delta t, h}(\textcolor{green}{p}_{fh})| &\leq \frac{1}{2} M T \|B\| \Delta t \|A^* p_f\| \\ &\quad + (\|\textcolor{blue}{y}_0\| + M T \|B\|) \left(C_2 h^2 + C_3 \Delta t \right) \|A^* p_f\| \\ &\quad + ((\|\textcolor{blue}{y}_0\| + M T \|B\|) C_1 + \|\textcolor{red}{y}_f\|) \|p_f - \textcolor{green}{p}_{fh}\|. \end{aligned}$$

Sommaire

- 1 Théorie du contrôle
- 2 Méthodologie
- 3 Majoration des erreurs de discrétisation
- 4 Exemples de preuves assistées par ordinateur

Méthodologie

Théorème

S'il existe p_f tel que $J(p_f) < 0$, alors \mathcal{Y}_f n'est pas \mathcal{U} -atteignable depuis y_0 en temps T .

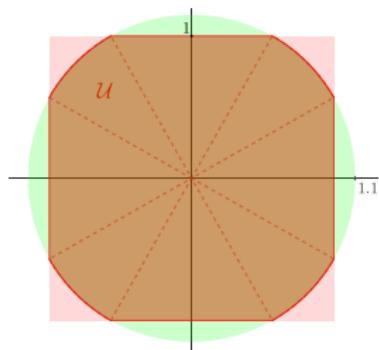
Méthodologie d'application du théorème :

- ① discrétisation de J en $J_{\Delta t, h} \simeq J$ évaluable en $\text{Eval}(J_{\Delta t, h})$,
- ② trouver p_{fh} tel que $\text{Eval}(J_{\Delta t, h}(p_{fh})) < 0$,
- ③ associer p_{fh} à $p_f \in \mathcal{D}(A^*)$ et vérifier que $J(p_f) < 0$:
 - borner les erreurs de discrétisation $e_d(p_f)$,
 - borner les erreurs d'arrondis $e_r(p_{fh})$ avec INTLAB (RUMP, 1999),
 - vérifier que $\text{Eval}(J_{\Delta t, h}(p_{fh})) + e_d(p_f) + e_r(p_{fh}) < 0$.

Rendez-vous spatial

Considérons le système : $\forall t \in [0, T]$,

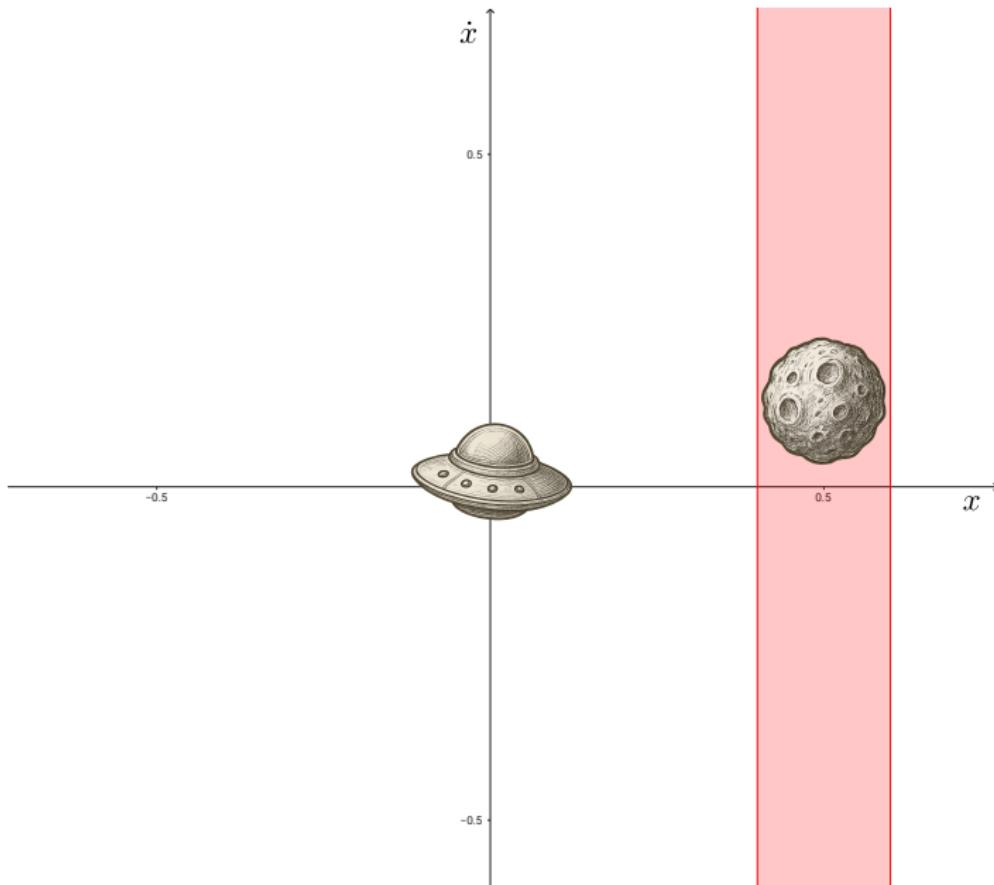
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + B\textcolor{orange}{u}(t), \\ y(0) = \textcolor{teal}{y}_0 = 0, \\ \textcolor{orange}{u}(t) \in \mathbb{R}^2, \\ \|\textcolor{orange}{u}(t)\|_2 \leq 1.15, \\ \|\textcolor{orange}{u}(t)\|_\infty \leq 1. \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un ensemble dangereux non borné



Un ensemble dangereux non borné

Proposition (HASENOHR et al., 2025a)

Considérons une cible centrée en $(0.5, 0.5)$ et de rayon $\varepsilon = 0.1$, indépendamment de la vitesse, autrement dit le cylindre

$$\mathcal{Y}_f = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4, \quad \|(z_1, z_2) - (0.5, 0.5)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \varepsilon\}.$$

Cette cible est non-atteignable en temps $T = 1$ en partant de $(0, 0, 0, 0)$. En effet,

$$J(\textcolor{green}{p}_f) \in [-0.1146, -0.0717], \text{ où } \textcolor{green}{p}_f = (0.62, 0.78, 0, 0)^T.$$

Calcul de temps minimal

Proposition

Si $y_0 = 0$ ou $y_f = 0$, et si $\text{Ker}(B) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, il existe un temps minimal d'atteignabilité $t^ \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :*

$\forall t < t^*, \quad y_f$ est non- \mathcal{U} -atteignable,
 $\forall t \geq t^*, \quad y_f$ est \mathcal{U} -atteignable.

Temps minimaux pour le rendez-vous spatial



Bornes inférieures certifiées de temps minimal d'atteignabilité
(HASENOHR et al., 2025a)

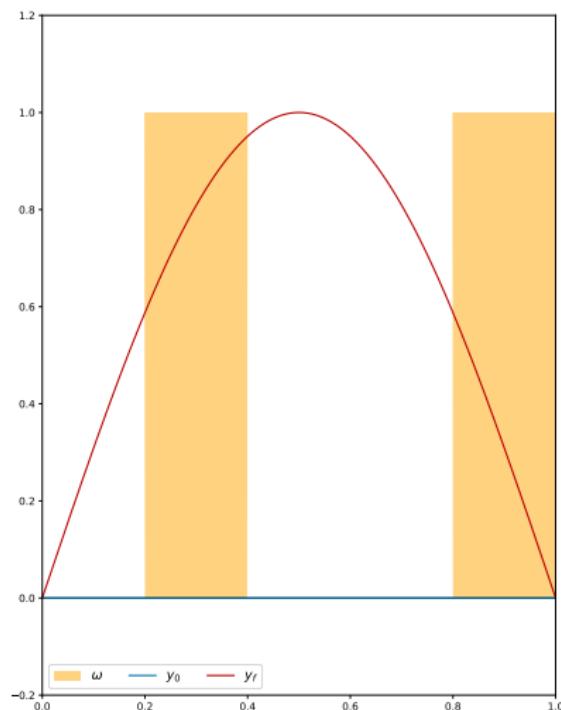


Temps minimaux approchés par Gekko (BEAL et al., 2018)

Équation de la chaleur

$\forall t, x \in [0, T] \times [0, 1]$,

$$\begin{cases} \dot{y}(t, x) = \Delta y(t, x) + \mathbb{1}_\omega u(t, x) \\ y(0, x) = y_0(x) = 0 \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0 \\ 0 \leq u(t, x) \leq 1 \\ y(T, x) = y_f(x) = \sin(\pi x). \end{cases}$$



Discrétisation spatiale

Ici on a donc :

- $X = L^2(0, 1)$ l'espace d'états
- $V = H_0^1(0, 1)$ et $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$.

$$|J(\textcolor{teal}{p}_f) - J_{\Delta t, h}(\textcolor{teal}{p}_{fh})| \leq \left(C_1 h^2 + C_2 \Delta t \right) \|A^* \textcolor{teal}{p}_f\| + C_3 \|p_f - \textcolor{teal}{p}_{fh}\|.$$

Deux possibilités :

1. $V_h \subset \mathcal{D}(A^*)$ (splines cubiques, méthodes spectrales...):
 - Avantages : pas besoin d'interpolation, moins d'erreurs de discrétisation,
 - Inconvénients : pas de formule explicite, calculs coûteux.
2. $V_h \not\subset \mathcal{D}(A^*)$ (éléments finis \mathbb{P}_1, \dots):
 - Avantages : formules explicites, calculs simples,
 - Inconvénients : nécessite une interpolation dans $\mathcal{D}(A^*)$
 \implies facile pour des \mathbb{P}_1 avec des splines cubiques.

Exemples de non-atteignabilité pour l'équation de la chaleur

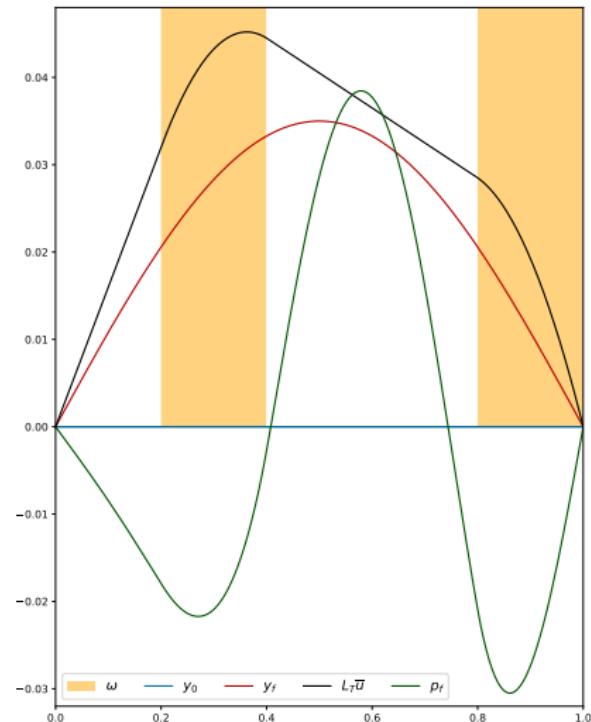
$$\forall t, x \in [0, T] \times [0, 1]$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t, x) = \Delta y(t, x) + \mathbb{1}_\omega u(t, x), \\ y(0, x) = y_0(x) = 0, \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \\ 0 \leq u(t, x) \leq 1, \\ y_f(x) = 0.035 \sin(\pi x). \end{cases}$$

Proposition (HASENOHR et al., 2025b)

y_f n'est pas \mathcal{U} -atteignable depuis y_0 en temps $T = 1$. En effet,

$$J(p_f) \in [-0.00072, -0.00011] < 0.$$



Exemples de non-atteignabilité pour l'équation de la chaleur

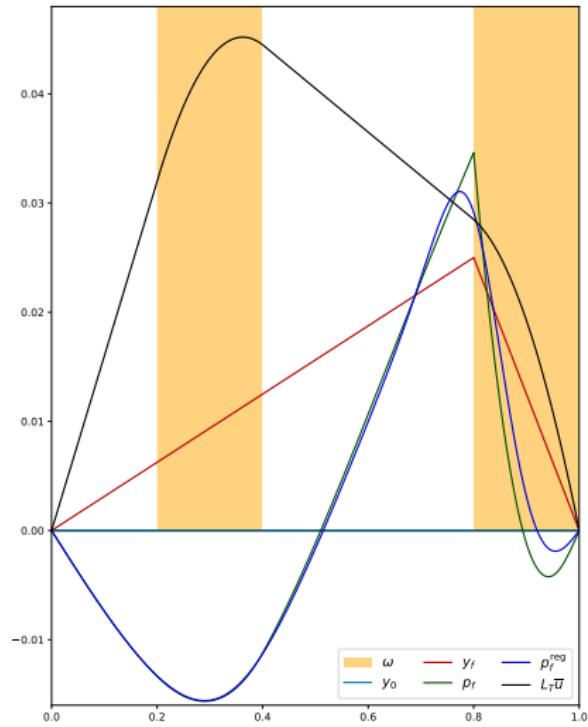
$$\forall t, x \in [0, T] \times [0, 1]$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t, x) = \Delta y(t, x) + \mathbb{1}_\omega u(t, x), \\ y(0, x) = y_0(x) = 0, \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \\ 0 \leq u(t, x) \leq 1, \\ y_f(x) = 0.025(1 - |2x - 1|). \end{cases}$$

Proposition (HASENOHR et al., 2025b)

y_f n'est pas \mathcal{U} -atteignable depuis y_0 en temps $T = 1$. En effet,

$$J(p_f^{reg}) \leq \begin{cases} \text{Eval}(J_d(p_{fh}^{reg})) &= -0.0013 \\ + e_r(p_{fh}^{reg}) &\leq 0.0002 < 0. \\ + e_d(p_f^{reg}) &\leq 0.00018 \end{cases}$$



Contributions

Contributions :

- Méthode générale de preuves assistées par ordinateur pour la non-atteignabilité de systèmes linéaires de contrôle
- Majoration optimisée et explicite des erreurs de discrétisation dans divers cas

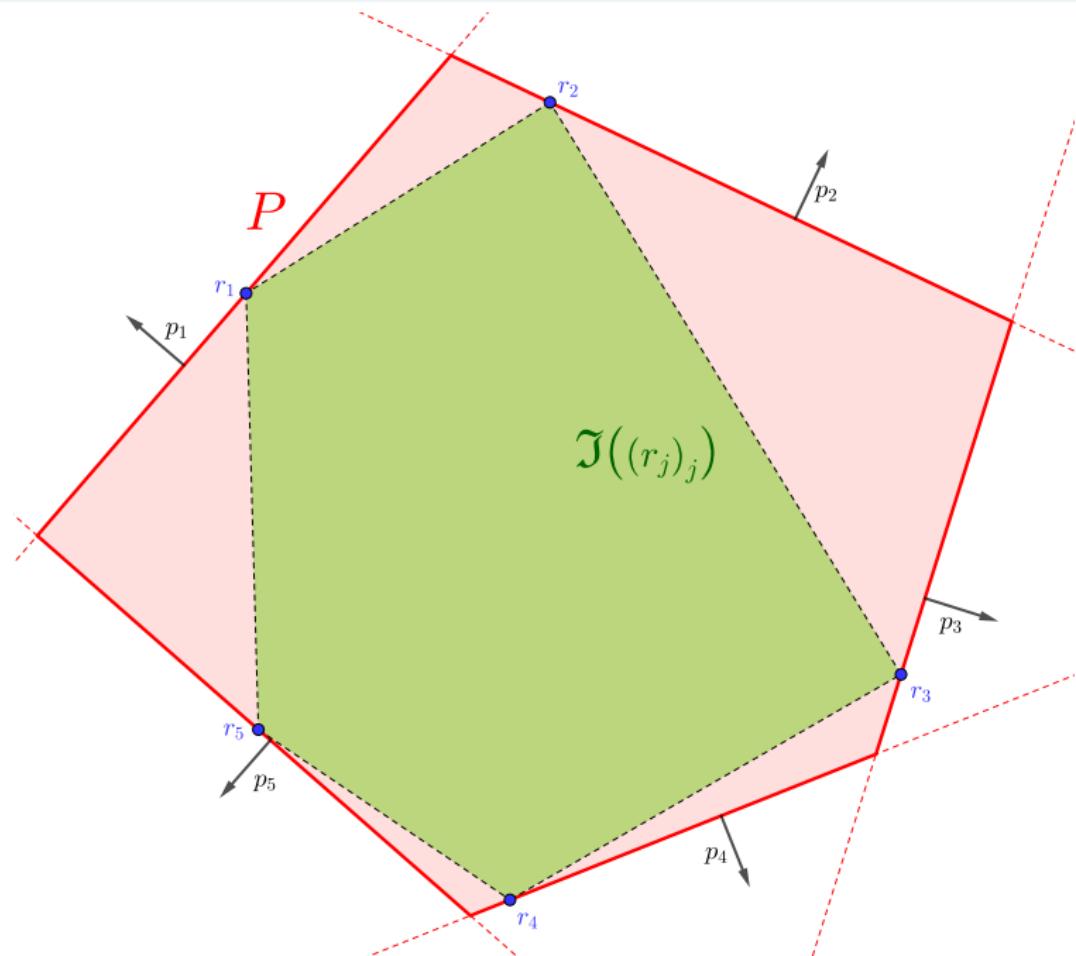
Publications :

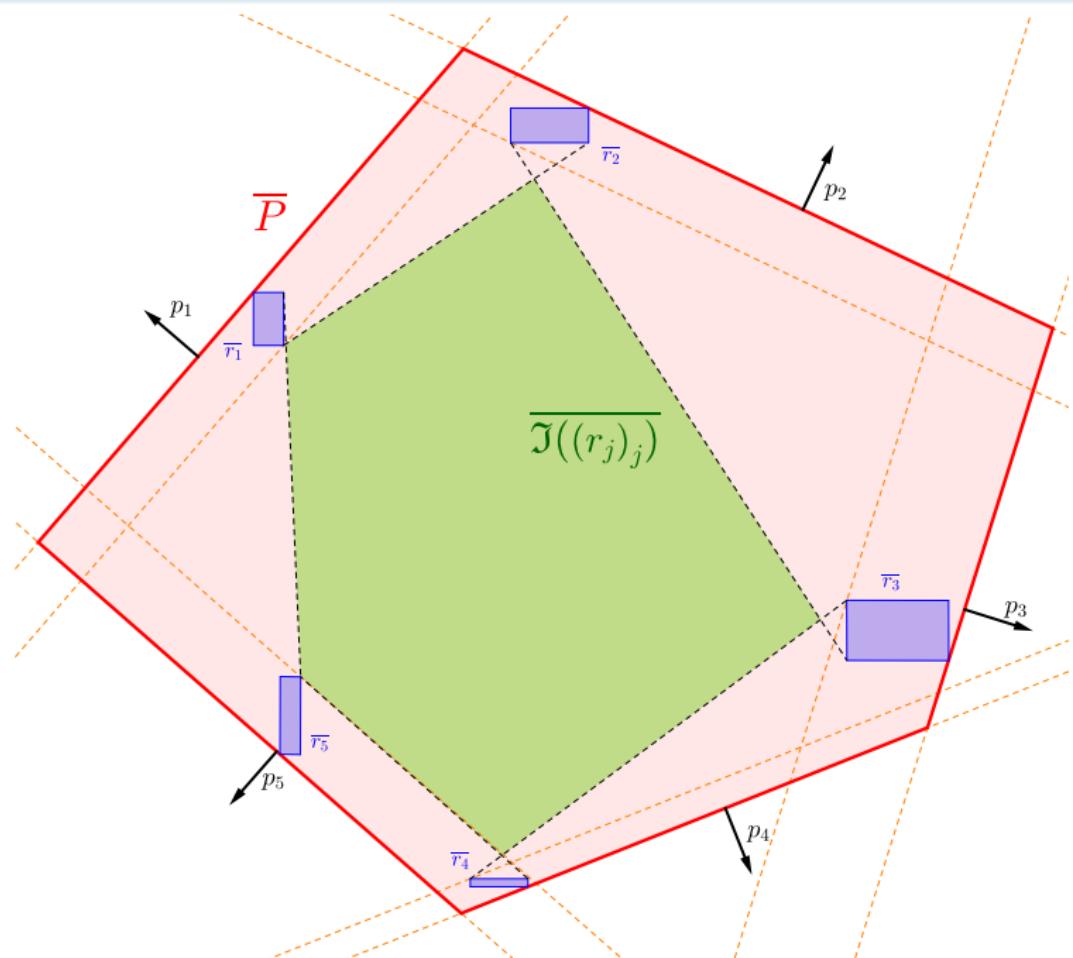
1. *Computer-assisted proofs of non-reachability for finite-dimensional linear control systems*, IH, C. Pouchol, Y. Privat, C. Zhang, SIAM Journal on Control and Optimization, Sep. 2025
2. *Computer-assisted proofs of non-reachability for linear parabolic PDEs under bounded control constraints*, IH, C. Pouchol, Y. Privat, C. Zhang, preprint, 2025

Perspectives

Perspectives :

- Extension de la méthode à :
 - d'autres classes d'EDOs et d'EDPs
 - d'autres types de contraintes (contrôle samplé)
- en dimension finie, développer des preuves assistées par ordinateur d'atteignabilité





Merci pour votre attention !



Bibliographie I



HASENOHR, I., POUCHOL, C., PRIVAT, Y., & ZHANG, C.

(2025a). Computer-Assisted Proofs of Nonreachability for Finite-Dimensional Linear Control Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 63(5), 3272-3296 (cf. p. 31, 33).

HASENOHR, I., POUCHOL, C., PRIVAT, Y., & ZHANG, C. (2025b, novembre). *Computer-assisted proofs of non-reachability for linear parabolic PDEs under bounded control constraints* [preprint].

(Cf. p. 25, 26, 36, 37).

ALTHOFF, M., FREHSE, G., & GIRARD, A. (2021). Set Propagation Techniques for Reachability Analysis [Publisher : Annual Reviews].

Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems, 4, 369-395 (cf. p. 7).

BEAL, L. D. R., HILL, D. C., MARTIN, R. A., & HEDENGREN, J. D. (2018). GEKKO Optimization Suite. *Processes*, 6(8) (cf. p. 33).



Bibliographie II

BERRAHMOUNE, L. (2020). A variational approach to constrained null controllability for the heat equation. *European Journal of Control*, 52, 42-48 (cf. p. 7).

CASAS, E., & KUNISCH, K. (2022). Boundary Control of Semilinear Parabolic Equations with Non-Smooth Point-wise-Integral Control Constraints in Time-Space. *2022 American Control Conference (ACC)*, 284-289 (cf. p. 7).

CHEN, M., & ROSIER, L. (2022). Reachable states for the distributed control of the heat equation [Publisher : Académie des sciences, Paris]. *Comptes Rendus. Mathématique*, 360, 627-639 (cf. p. 7).

ERVEDOZA, S., LE BALC'H, K., & TUCSNAK, M. (2022). Reachability results for perturbed heat equations [Publisher : Elsevier]. *Journal of Functional Analysis*, 283(10), 109666 (cf. p. 7).



Bibliographie III

- LEBEAU, G., & ROBBIANO, L. (1994). Contrôle exact de l'équation de la chaleur [Publisher : Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques]. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)*, 1-11 (cf. p. 7).
- LI, X., & YONG, J. (2012). *Optimal control theory for infinite dimensional systems*. Springer Science & Business Media. (Cf. p. 12).
- LOHÉAC, J., TRÉLAT, E., & ZUAZUA, E. (2017). Minimal controllability time for the heat equation under unilateral state or control constraints [Publisher : World Scientific]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 27(09), 1587-1644 (cf. p. 7).
- PIGHIN, D., & ZUAZUA, E. (2018). Controllability under positivity constraints of semilinear heat equations. *Mathematical Control and Related Fields*, 8(3&4), 935-964 (cf. p. 7).



Bibliographie IV

- POUCHOL, C., TRÉLAT, E., & ZHANG, C. (2024). Approximate control of parabolic equations with on-off shape controls by Fenchel duality. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, 1-43 (cf. p. 7).
- RUMP, S. M. (1999). INTLAB—interval laboratory. In *Developments in reliable computing* (p. 77-104). Springer. (Cf. p. 17, 28).
- SCHÄTTLER, H., & LEDZEWCZ, U. (2012). *Geometric optimal control : theory, methods and examples* (T. 38). Springer. (Cf. p. 7, 12).
- WABERSICH, K. P., TAYLOR, A. J., CHOI, J. J., SREENATH, K., TOMLIN, C. J., AMES, A. D., & ZEILINGER, M. N. (2023). Data-Driven Safety Filters : Hamilton-Jacobi Reachability, Control Barrier Functions, and Predictive Methods for Uncertain Systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 43(5), 137-177 (cf. p. 7).