DZ5

0036513702
IVAN KLABUČAR

1.

a) $x[n] = 2^n \mu[n] \;/\mathcal{Z}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n \mu[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (2 \cdot z^{-1})^n = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad \text{uz } |2z^{-1}| < 1$$

kauzalni signal
jer $x[n] = 0$ za $n < 0$

$$\left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

RoC: $\boxed{2 < |z|}$

$x[n]$ nema DTFT jer RoC ne sadrži jediničnu kružnicu!

b) $x[n] = 2^{-n} \mu[n] \rightarrow$ kauzalni signal

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n} \mu[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2z)^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}}$$

uz $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$

RoC: $\left|\frac{1}{2}\right| < |z|$

$x[n]$ ima DTFT jer RoC sadrži jediničnu kružnicu.

c) $x[n] = 2^n \mu[-n] \rightarrow$ antikauzalni signal

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^n \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} (2z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cdot z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}}$$

uz $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$

RoC: $|z| < 2$

signal ima DTFT jer RoC sadrži jediničnu kružnicu.

DZ 5

0036513702
IVAN KLABUČAR

1. d) $x[n] = 2^{-n} \mu[-n] \rightarrow$ anti kauzalan signal

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} 2^{-n} \mu[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{-n} \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n} z^{n} =$$

$$= \frac{1}{1-(2z)} \qquad |2z| < 1$$

$$RoC: |z| < \frac{1}{2}$$

$\downarrow$

signal nema DTFT jer RoC ne sadrži jediničnu kružnicu

0036513702 DZ 5.

IVAN KLABUČAR ne kauzalan signal

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad |q|<1}$$

1. e) $x[n] = 2^{-|n|}$

$$\mathcal{Z}\left[x[n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} \cdot z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n} \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cdot z^{-n} - \underbrace{2^{-|0|} \cdot z^{-0}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} - 1$$

uvjet $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ uvjet $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$

ako je presjek prazan onda $\mathcal{Z}$ transformacija

RoC: ne postoji → ako nije onda postoji

$\frac{1}{2} < |z| < 2$

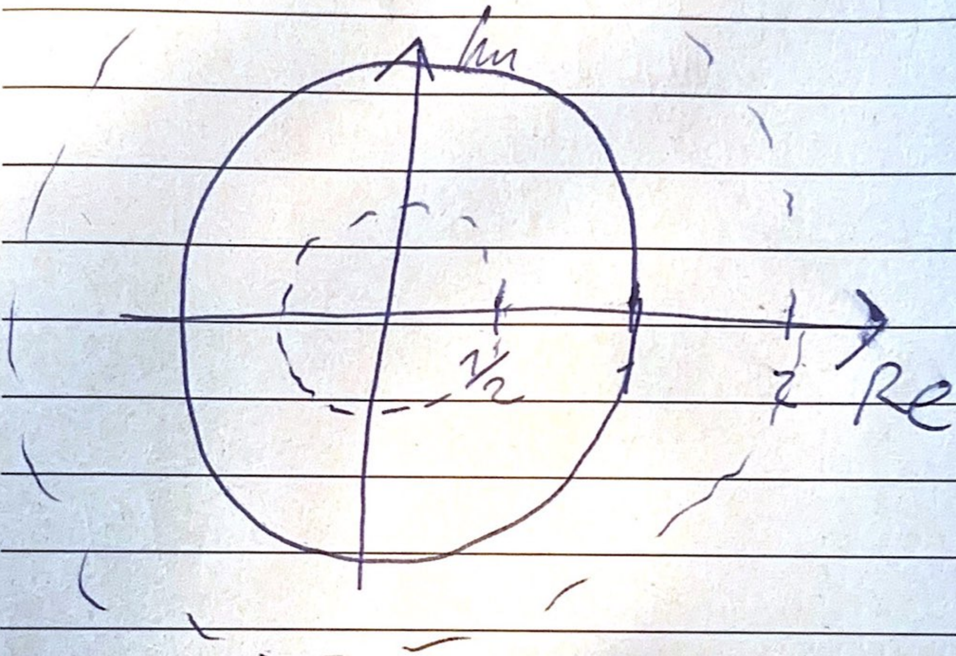
$\mathcal{Z}$ transformacija postoji

DZ 5.

0036513702
IVAN KLABUČAR

1. e) nastavak

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} - 1 = \frac{}{\left(1-\frac{1}{2}z\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$



RoC sadrži jediničnu kružnicu $\Leftrightarrow$ DTFT postoji

DZ 5

0036513702
IVAN
KLABUČAR

(2.) a) $y[n]+2y[n-1]=x[n] \,/\, \mathcal{Z}$ → jednostrana

$y[-1]$ je početni uvjet

$$Y(z)+2z^{-1}Y(z)=X(z)$$

$+2y[-1]$

Ako riješimo jednadžbu
s jednostranim $\mathcal{Z}$ transformacijom
onda pretpostavljamo kauzalnost
signala i
RoC $r<|z|$

Ako riješimo jednadžbu
obostranom onda pretpostavljamo

$$r_1<|z|<r_2$$

Ako riješimo jednadžbu DTFT-om
pretpostavljamo signale ograničene
energije

nastavak DZ 5 0036513702 IVAN KLABUČAR

2 a) $\rightarrow$ $Y(z) + 2(z^{-1}Y(z) + y[-1]) = X(z)$

$Y(z)(1 + 2z^{-1}) = X(z) - 2y[-1]$

$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{1+2z^{-1}}}_{H(z)} X(z) + \frac{-2y[-1]}{1+2z^{-1}}$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$\mathcal{Z}[h[n]] = H(z) \cdot 1$

b) $H(z) = \frac{1 \cdot z^{-0}}{1 \cdot z^{-0} + 2z^{-1}} = \frac{1}{1+2z^{-1}}$

$\boxed{\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{C}{1-a \cdot z^{-1}}\right] = C \cdot a^n \cdot \mu[n]}$ $\rightarrow$ Zapamti!

c) $h[n] = C \cdot (-2)^n \cdot \mu[n]$

imaš u formuli!

d) $Y(z) = H(z) \cdot X(z) + \frac{-2y[-1]}{1+2z^{-1}}$

DZ5

0036513702
IVAN KLABUČAR

2. e)

$$y[n]+2y[n-1]=\underbrace{x[n]}_{2\mu[n]}, \quad y[-1]=1$$

$$Y(z)=\frac{1}{1+2z^{-1}}\cdot\underbrace{X(z)}_{\frac{2}{1-z^{-1}}}+\frac{-2\cdot \cancel{y[-1]}^{1}}{1+2z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{1+2z^{-1}}\cdot\frac{2}{1-z^{-1}}+\frac{-2}{1+2z^{-1}}=$$

$$=\frac{2-2(1-z^{-1})}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}=$$

$$=\frac{2z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}=$$

$$=\frac{A=-\frac{2}{3}}{1+2z^{-1}}+\frac{B=\frac{2}{3}}{1-z^{-1}}+?$$

ništa jer je red polinoma u nazivniku strogi

DZ 5

0036513702
IVAN KLABUČAR

2.e) nastavak

$$z^{-1} \to \frac{1}{2} \; \cancel{(1+2z^{-1})} \frac{2z^{-1}}{\cancel{(1+2z^{-1})}(1-z^{-1})} = A + \underbrace{(1+2z^{-1})}_{\to 0}(\ldots)$$

$$A = \lim_{z^{-1} \to \frac{1}{2}} (1+2z^{-1}) \frac{2z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-2}{3}$$

$$B = \frac{2 \cdot 1}{1+2 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

$$Y(z) = \frac{-\frac{2}{3}}{1+2z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-z^{-1}}$$

$$y[n] = -\frac{2}{3}(-2)^n \mu[n] + \frac{2}{3} \cdot 1^n \cdot \mu[n]$$

$$y[n] = -\frac{2}{3}(-2)^n + \frac{2}{3} \cdot 1^n \quad \text{za } n \geq 0$$

A što se događalo za $n<0$ to ne znamo jer smo koristili jednostranu Z transformaciju

DZ 5

0036513702
IVAN KLABUČAR

3

2) $4y[n] + 4y[n-1] + y[n-2] = x[n]$

$\mathcal{Z}$

a) $4Y(z) + 4(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + (z^{-2}Y(z) + y[-2] + z^{-1}y[-1])$
$= X(z)$

$Y(z)(4 + 4z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}) = X(z) - 4y[-1] - y[-2]$
$- z^{-1} y[-1]$

$Y(z) = \frac{1}{4 + 4z^{-1} + z^{-2}} \cdot X(z) + \frac{y[-1](-4 - z^{-1}) - y[-2]}{4 + 4z^{-1} + z^{-2}}$

b) $H(z) = \frac{1}{4 + 4z^{-1} + z^{-2}}$ $\quad z_{1,2} = -\frac{1}{2}$

c) $H(z) = \frac{1}{4(1 + \frac{1}{2}z^{-1})^2}$

Iz formula:

$\frac{z^2}{(z-a)^2} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1}{(1 - az^{-1})^2}$

$h[n] = (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$