

Отчёт по лабораторной работе №5

Математическое моделирование

Модель хищник-жертва. Вариант №59

Выполнил: Махорин Иван Сергеевич,
НПИбд-02-21, 1032211221

Содержание

1	Цель работы	4
2	Теоретическое введение	5
3	Задачи	7
4	Задание	8
5	Выполнение лабораторной работы	9
5.1	Построение математической модели. Решение с помощью программ	9
5.1.1	Julia	9
5.1.2	Результаты работы кода на Julia	13
5.2	OpenModelica	14
5.2.1	Результаты работы кода на OpenModelica	16
6	Анализ полученных результатов. Сравнение языков.	18
7	Вывод	19
8	Список литературы. Библиография	20

Список иллюстраций

5.1	График численности хищников от численности жертв	13
5.2	График численности жертв и хищников от времени	13
5.3	Стационарное состояние	14
5.4	График численности хищников от численности жертв	16
5.5	График численности жертв и хищников от времени	16
5.6	Стационарное состояние	17

1 Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

2 Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, $-b$ – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

3 Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

4 Задание

Вариант 59:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.48x(t) + 0.053y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.52y(t) - 0.048y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 6$, $y_0 = 21$ Найдите стационарное состояние системы.

5 Выполнение лабораторной работы

5.1 Построение математической модели. Решение с помощью программ

5.1.1 Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 6
y0 = 21

a = 0.48
b = 0.053
c = 0.52
d = 0.048

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
```

```

end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=300,
    legend=false)

plot!(
    plt,
    X,
    Y,
    color=:blue)

savefig(plt, "lab5_julia_1.png")

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,

```

```

X,
label="Численность жертв",
color=:red)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

savefig(plt2, "lab5_julia_2.png")

```

Код программы для стационарного состояния:

```

using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.48
b = 0.053
c = 0.52
d = 0.048

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

```

```

end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(
    dpi=300,
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    T,
    X,
    label="Численность жертв",
    color=:red)

plot!(
    plt2,
    T,
    Y,
    label="Численность хищников",
    color=:green)

savefig(plt2, "lab5_julia_3.png")

```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = \text{some function}$ будет представлять собой точку.

5.1.2 Результаты работы кода на Julia

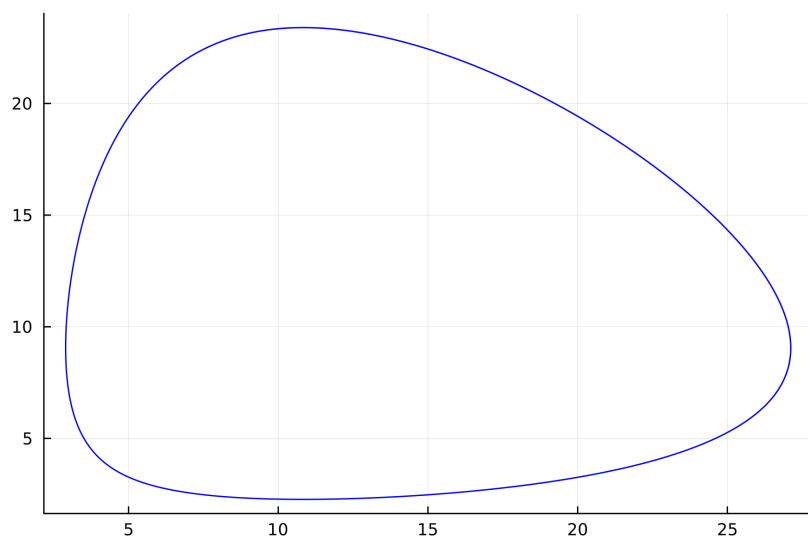


Рис. 5.1: График численности хищников от численности жертв

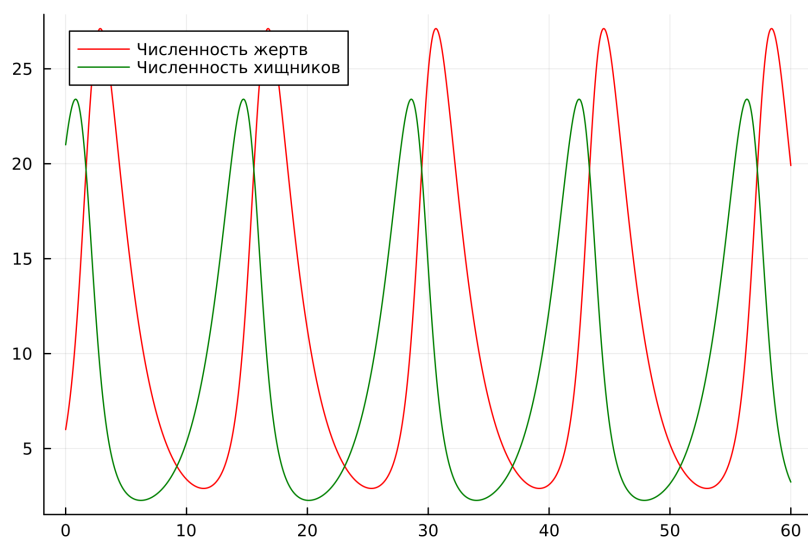


Рис. 5.2: График численности жертв и хищников от времени

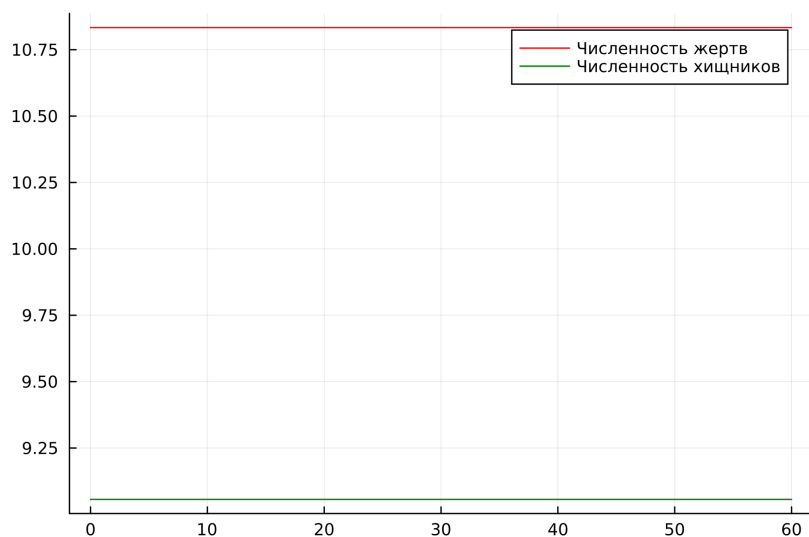


Рис. 5.3: Стационарное состояние

5.2 OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab5_1
  Real a = 0.48;
  Real b = 0.053;
  Real c = 0.52;
  Real d = 0.048;
  Real x;
  Real y;
  initial equation
  x = 6;
  y = 21;
  equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_1;
```

Код программы для стационарного состояния:

```
model lab5_2
Real a = 0.48;
Real b = 0.053;
Real c = 0.52;
Real d = 0.048;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_2;
```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = \text{some function}$ будет представлять собой точку.

5.2.1 Результаты работы кода на OpenModelica

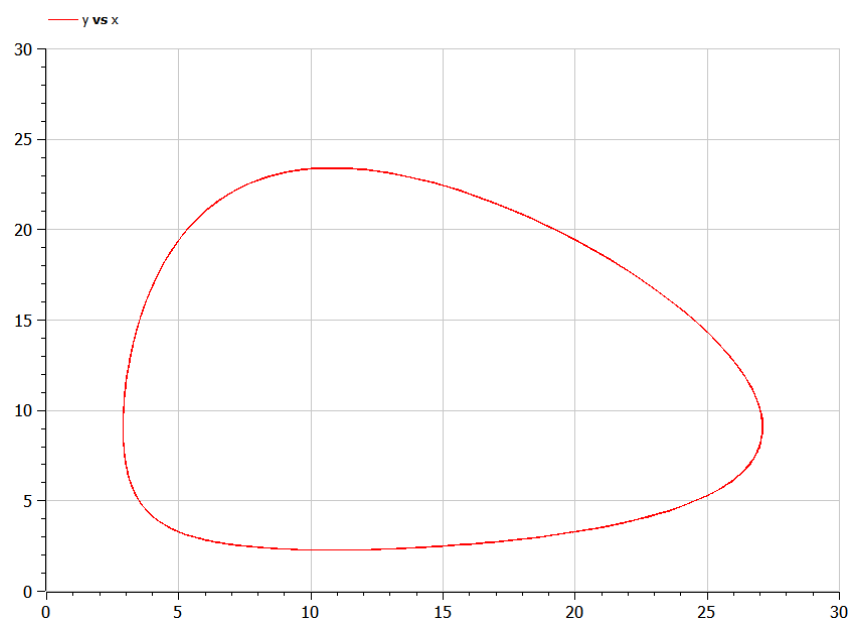


Рис. 5.4: График численности хищников от численности жертв

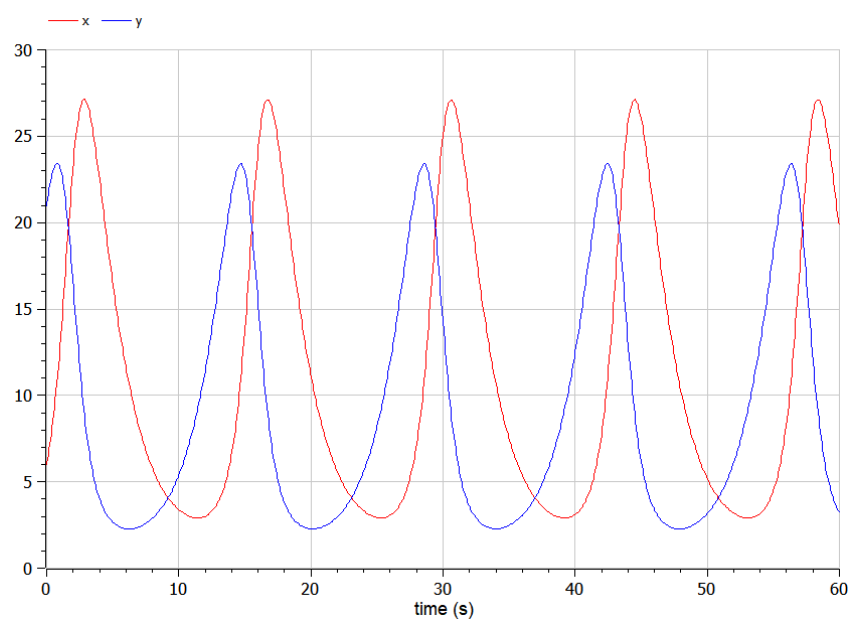


Рис. 5.5: График численности жертв и хищников от времени

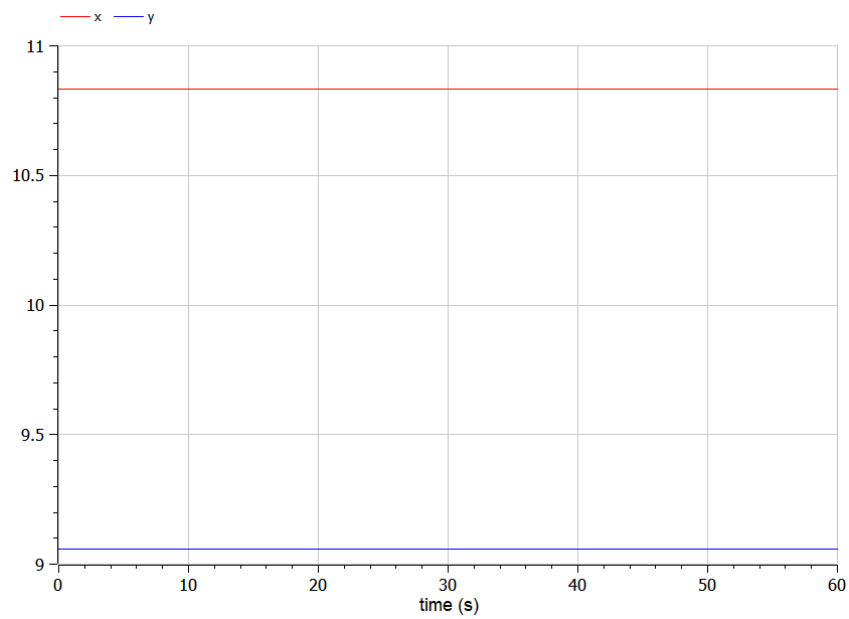


Рис. 5.6: Стационарное состояние

6 Анализ полученных результатов.

Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

7 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

8 Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: <https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/L>