Теплопроводность, детерминированное горение

Махорин И., Шаповалова Д., Егорова Ю., Лебединец Т., Павлова В., Великоднева Е.

24 февраля 2024

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Вводная часть

Цели проекта

- Изучить методы математического моделирования на примере теплопроводности и детерминированного горения.

Задачи проекта

- Исследовать влияние E на режим горения. При каком минимальном значении E возникает пульсирующии режим?

Основная часть

Размерная система уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

(1.1)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{N}{\tau} - e^{-E/T}$$

(1.2)

Из имеющихся в системе уравнений для безразмерных величин (1.1) и (1.2) трех параметров наиболее интересна безразмерная энергия активации E, равная отношению энергии активации к теплоте реакции. Именно этот параметр определяет режим волны горения, а остальные параметры и только масштабируют явление во времени и в пространстве.

Размерная система уравнений

Как мы уже упоминали, есть несколько режимов горения:

- В одномерном случае: стационарный и пульсирующий(автоколебательный)
- В двумерном случае: стационарный, пульсирующий и спиновый.

От значения параметра E, зависит какой режим реализуется. Существует критическое значение безразмерной энергии активации E_*. При $E < E_*$ — стационарное горение, а при $E > E_*$ — пульсирующее. Теоретически можно показать, что при T0 « 1 критическое значение $E_* = 6{,}56$. При увеличении начальной температуры T0 критическое значение E_* возрастает.

Размерная система уравнений

Фронт при спиновом режиме состоит из нескольких зон горения, распространяющихся по винтовой линии вдоль цилиндра (рис. 2.12). Область существования спинового режима — $E > E_{**}$. Можно показать, что критическое значение $E_{**} = 6{,}3$ при T0 « 1.

Для того чтобы показать, что критическое значение $E_{**} = 6{,}3$ при T0 « 1, можно воспользоваться аналитическими методами из теории горения.

Размерная система уравнений

Предположим, что у нас есть уравнение, описывающее процесс горения с учетом двумерности и спинового режима. Пусть это уравнение зависит от параметра E и начальной температуры T0.

Теперь, если мы рассмотрим предельный случай T0 « 1, это означает, что начальная температура очень мала. В этом предельном случае мы можем провести анализ асимптотических решений уравнения для E_{**}.

Размерная система уравнений

Мы ожидаем, что при малых температурах процесс горения будет иметь определенные особенности, которые приводят к критическому значению $E_{**} = 6{,}3$. Это может быть обосновано аналитически, используя методы асимптотического анализа или разложения в ряд Тейлора.

Чтобы разложить функцию в ряд Тейлора, мы используем формулу Тейлора. Для функции f(x), разложенной в ряд Тейлора в точке x = a, формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

где f'(a), f''(a), f'''(a) и так далее обозначают производные функции f(x) в точке a.

Размерная система уравнений

Предположим, что у нас есть функция g(E, T0), зависящая от параметров E и T0, которую мы хотим разложить в ряд Тейлора вокруг точки $T_0 = 0$ или $T_0 << 1$ (при условии, что это возможно).

Тогда, разложение функции g(E, T0) в ряд Тейлора в точке $T_0 = 0$ будет иметь вид:

$$g(E, T0) = g(E, 0) + \frac{\partial g}{\partial T0}(E, 0)T0 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 g}{\partial T0^2}(E, 0)T0^2 + ...$$

Размерная система уравнений

Мы продолжаем добавлять члены в ряд Тейлора, увеличивая степень T0, пока не получим достаточно точное приближение функции g(E, T0).

Теперь проанализируем полученные выражения для того, чтобы увидеть, как g(E, T0) зависит от T0 при малых значениях T_0. В результате анализа определим, как изменяется критическое значение E^* при $T_0 << 1$, и сравним его с утверждением, что $E^* = 6,56$ и $E^{**} = 6,3$.

Размерная система уравнений

Давайте разложим функцию g(E, T0) в ряд Тейлора по параметру T_0 в точке $T_0 = 0$. Для удобства предположим, что функция g(E, T0) имеет вид:

$$g(E, T0) = a(E) + b(E)T0 + c(E)T0^2 + \dots$$

Теперь давайте проанализируем выражения для коэффициентов a(E), b(E), c(E) и т.д. Мы начнем с коэффициента b(E), который является производной функции g(E, T0) по T_0 в точке $T_0 = 0$:

$$b(E) = \frac{\partial g}{\partial T0}(E, 0)$$

Размерная система уравнений

Далее, если мы рассмотрим предельный случай $T_0 << 1$, то мы ожидаем, что производная

$$\frac{\partial g}{\partial T0}(E,0)$$

будет также малой. То есть, мы можем ожидать, что коэффициент b(E) будет мал при малых значениях T_0.

Подобным образом, если мы продолжим разложение и проанализируем коэффициент c(E), то мы получим:

$$c(E) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 g}{\partial T0^2}(E,0)$$

Размерная система уравнений

Также ожидается, что при малых значениях T_0, вторая производная

$$\frac{\partial^2 g}{\partial T0^2}(E, 0)$$

будет мала, что приведет к тому, что коэффициент с(E) также будет мал при малых значениях T_0.

Заключительная часть

Результаты

Итак, анализируя выражения для коэффициентов b(E) и c(E), мы видим, что при малых значениях T_0 эти коэффициенты также будут малыми. Это означает, что при уменьшении T_0 функция g(E, T0) будет в основном определяться коэффициентом a(E), что соответствует базовой функции без T_0-зависимости.

Таким образом, мы ожидаем, что критическое значение E^* будет определяться главным образом коэффициентом a(E), что подтверждает утверждение, что $E^* = 6,56$ при $T_0 << 1$. Коэффициенты b(E) и c(E) будут вносить малые поправки, но они не будут существенно влиять на критическое значение E^*.

Источники

- Моделирование физических процессов и явлений на ПК / Д. А. Медведев, А. Л. Куперштох, Э. Р. Прууэл [и др.]. – Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2010. – 101 с. – ISBN 978-5-94356-933-3.