

Сравнение быстродействия алгоритмов точного и численного решения систем линейных алгебраических уравнений

И.И. Сергеев, И.Д. Фёдоров

научный руководитель А.В. Фаворская

МФТИ, 23 ноября 2016

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассматриваемая система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n = f_1 \\ \dots \\ a_{n1}u_1 + \dots + a_{nn}u_n = f_n \end{cases}$$

Матричная запись:

$$Au = f$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

- Прямой ход

С помощью вычитания строк матрица приводится к верхнетреугольному виду

- Обратный ход

По очереди разрешаются уравнения, начиная с последнего

- Выбор главного элемента \Rightarrow повышение точности

На i -ом шаге i -ая строка переставляется со строкой, содержащей наибольшее значение в i -ом столбце

Итерационные методы

Метод Якоби

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right)$$

Метод Гаусса-Зейделя

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right)$$

Метод релаксации

$$u_i^{k+1} = (1 - \tau) u_i^k + \frac{\tau}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^k \right)$$

Цели

- Сравнение быстродействия методов
- Изучение зависимости скорости работы
 1. от параметра τ (для методов релаксации)
 2. от числа обусловленности μ

Генерирование матриц с числом обусловленности, точно равным заданному

- Число обусловленности по определению

$$\mu = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

- Норма матрицы

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- Алгоритм генерации:

1. B – целиком случайная, ортогонализованная по Грамму-Шмидту
2. C – случайная диагональная, фиксированы минимум – 1, максимум -- μ
3. $A = B'C$

Генерирование матриц с числом обусловленности, точно равным заданному

- Преимущества:

1. Точное значение μ

- Недостатки:

1. Сложность процесса ортогонализации – $O(n^3)$
2. Отсутствие диагонального преобладания

Генерирование матриц с числом обусловленности, приблизительно равным заданному

- Оценочная формула:

$$\mu \geq \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|}{\min_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|}$$

- Алгоритм генерации:

1. Ниже диагонали – симметрично
2. По диагонали – фиксированы минимум 1, максимум μ
3. Выше диагонали – случайные

Генерирование матриц с числом обусловленности, приблизительно равным заданному

- Преимущества:

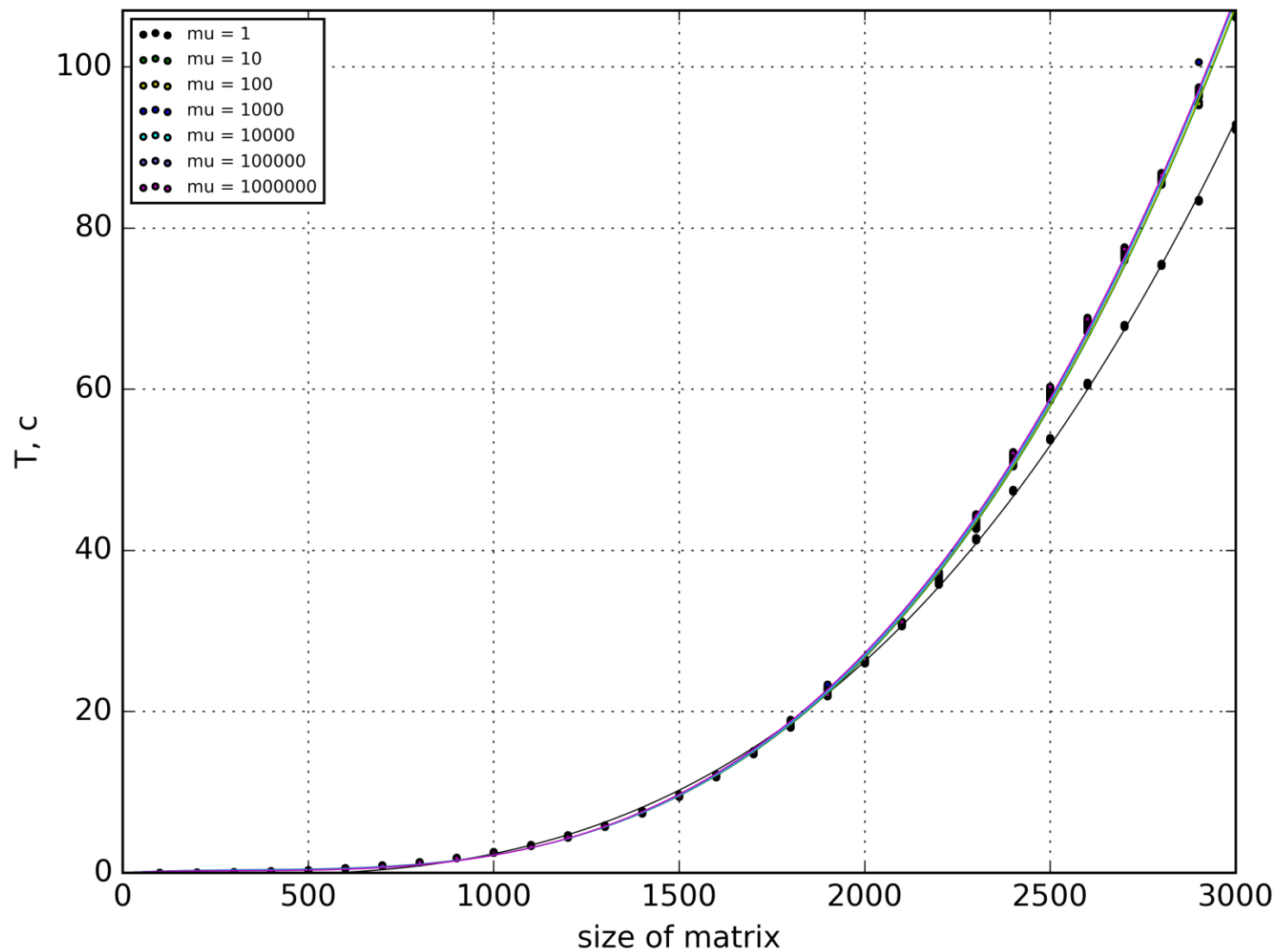
1. Сложность -- $O(n^2)$
2. Диагональное преобладание

- Недостатки

1. Узкий класс матриц
2. Неточное значение μ (отклонение $<0.3\%$)

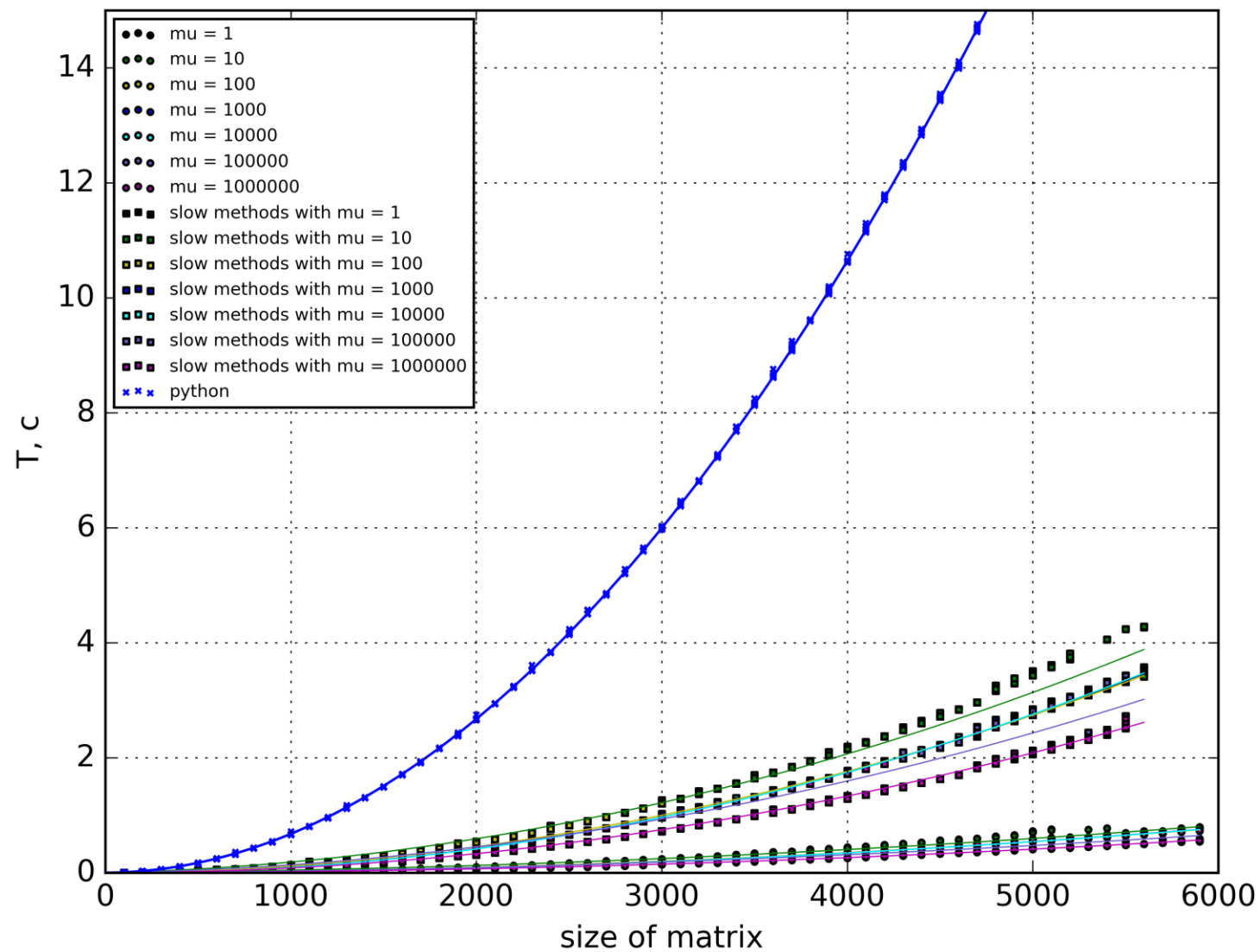
Результаты

Скорость работы метода Гаусса



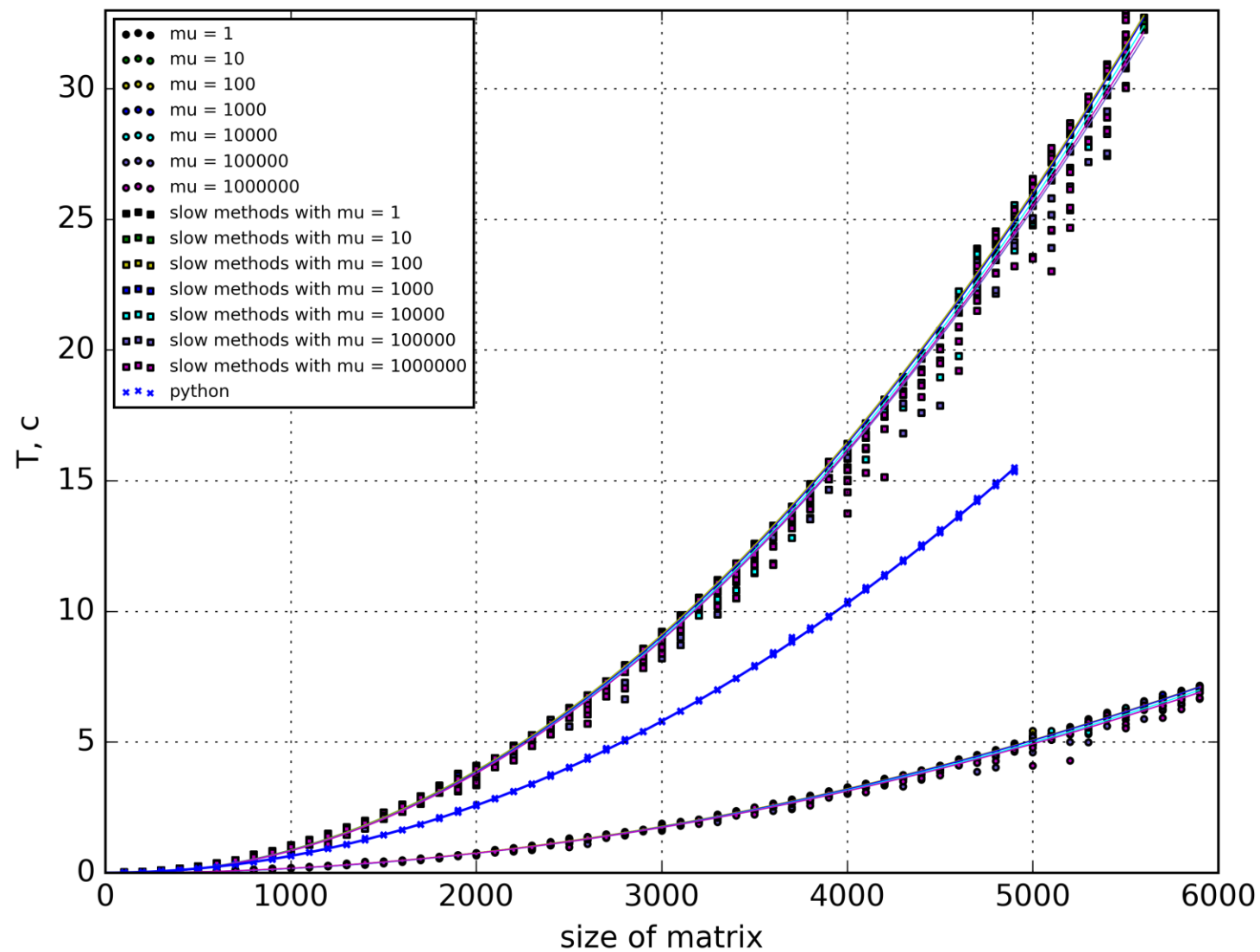
Результаты

Скорость работы метода Якоби



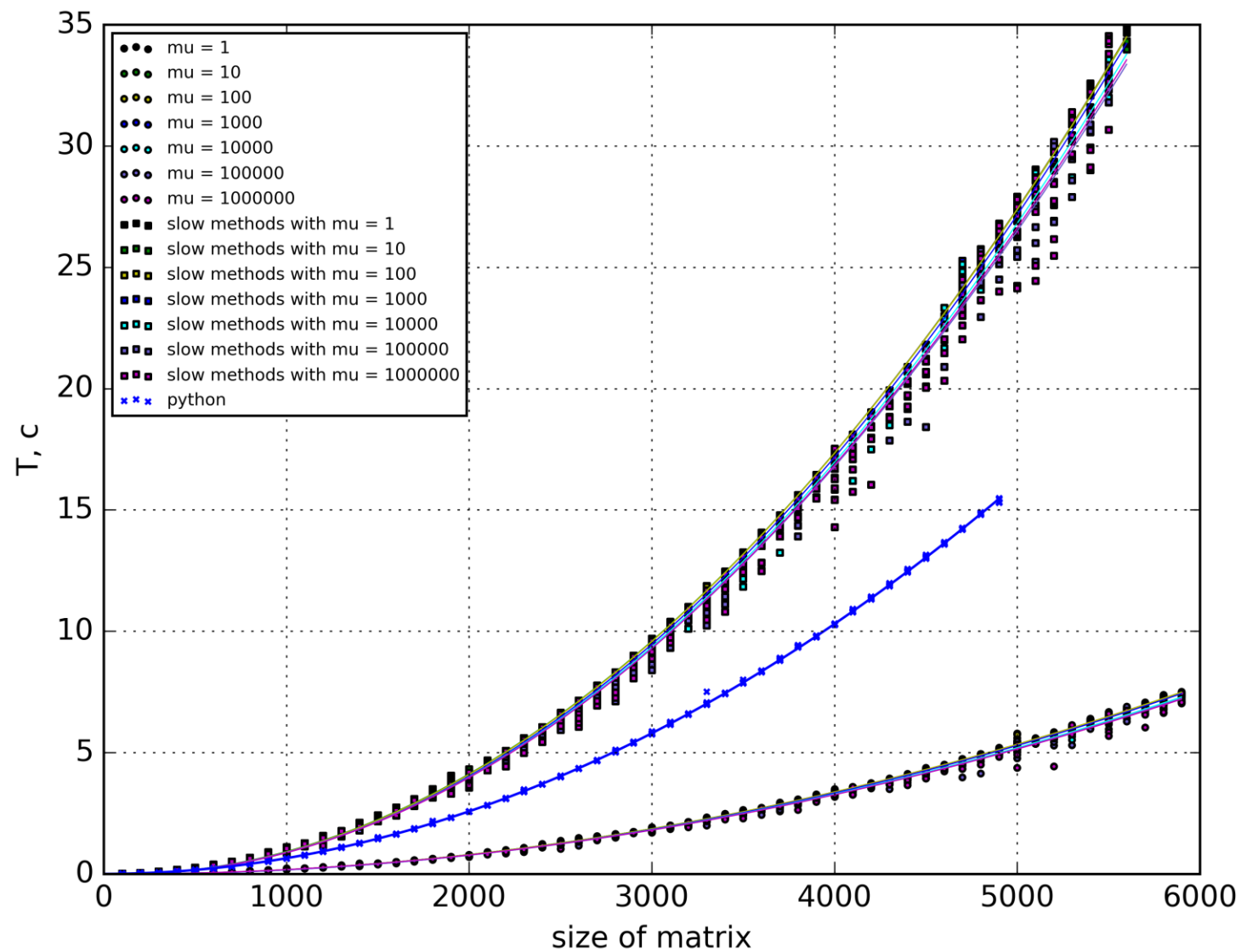
Результаты

Скорость работы метода нижней релаксации



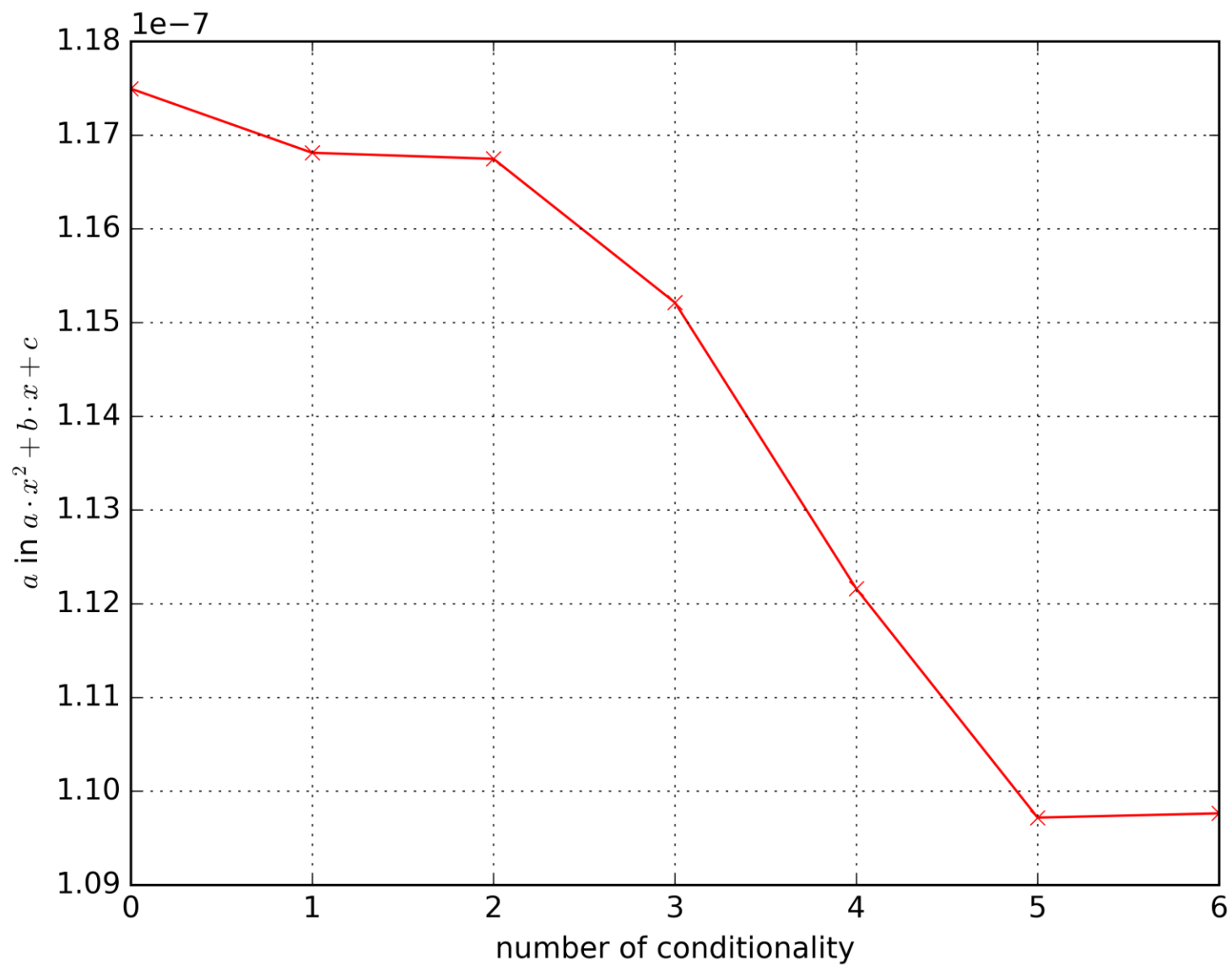
Результаты

Скорость работы метода верхней релаксации, $\tau = 1.5$



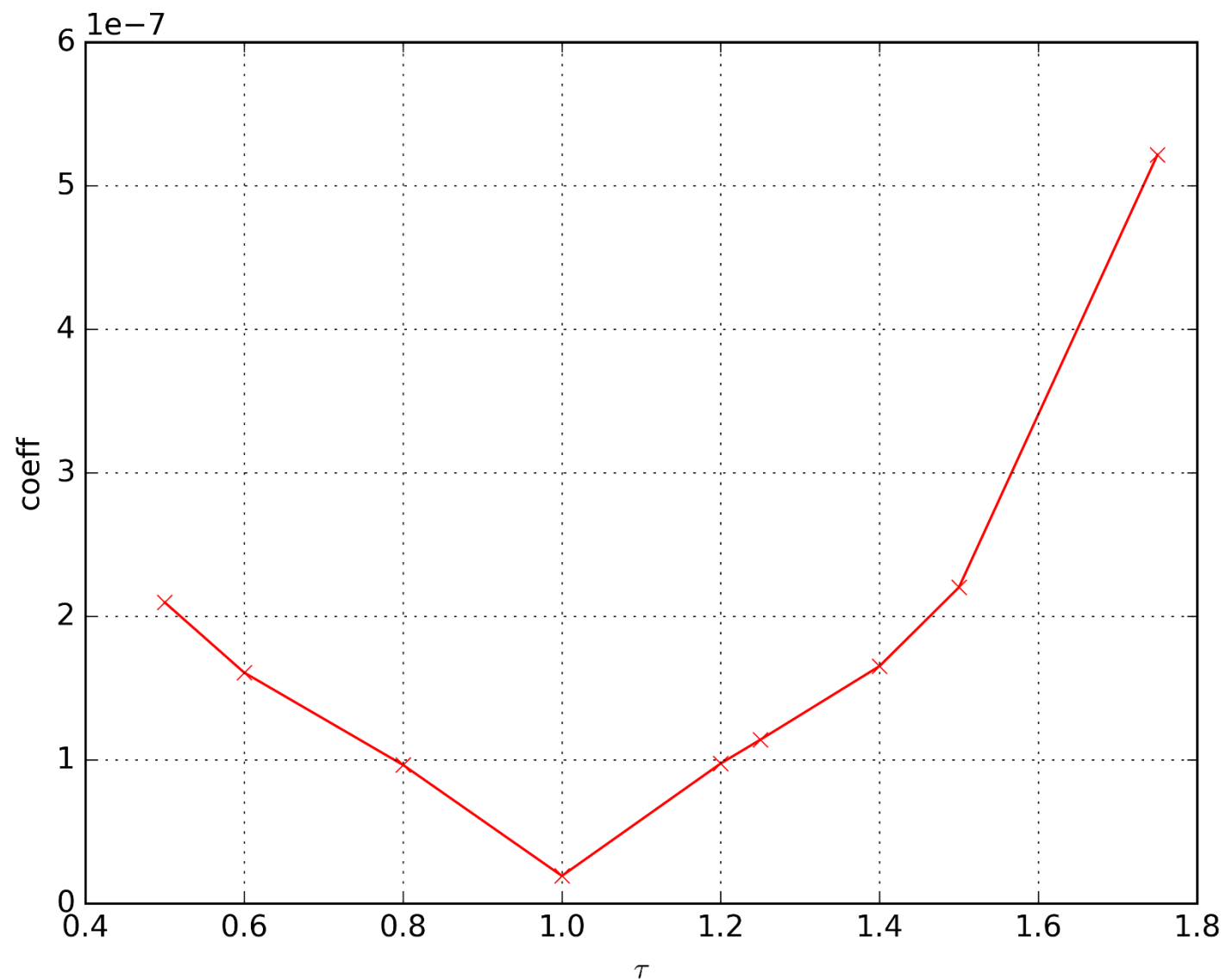
Результаты

Зависимость скорости работы метода верхней релаксации от числа обусловленности, $\tau = 1.25$



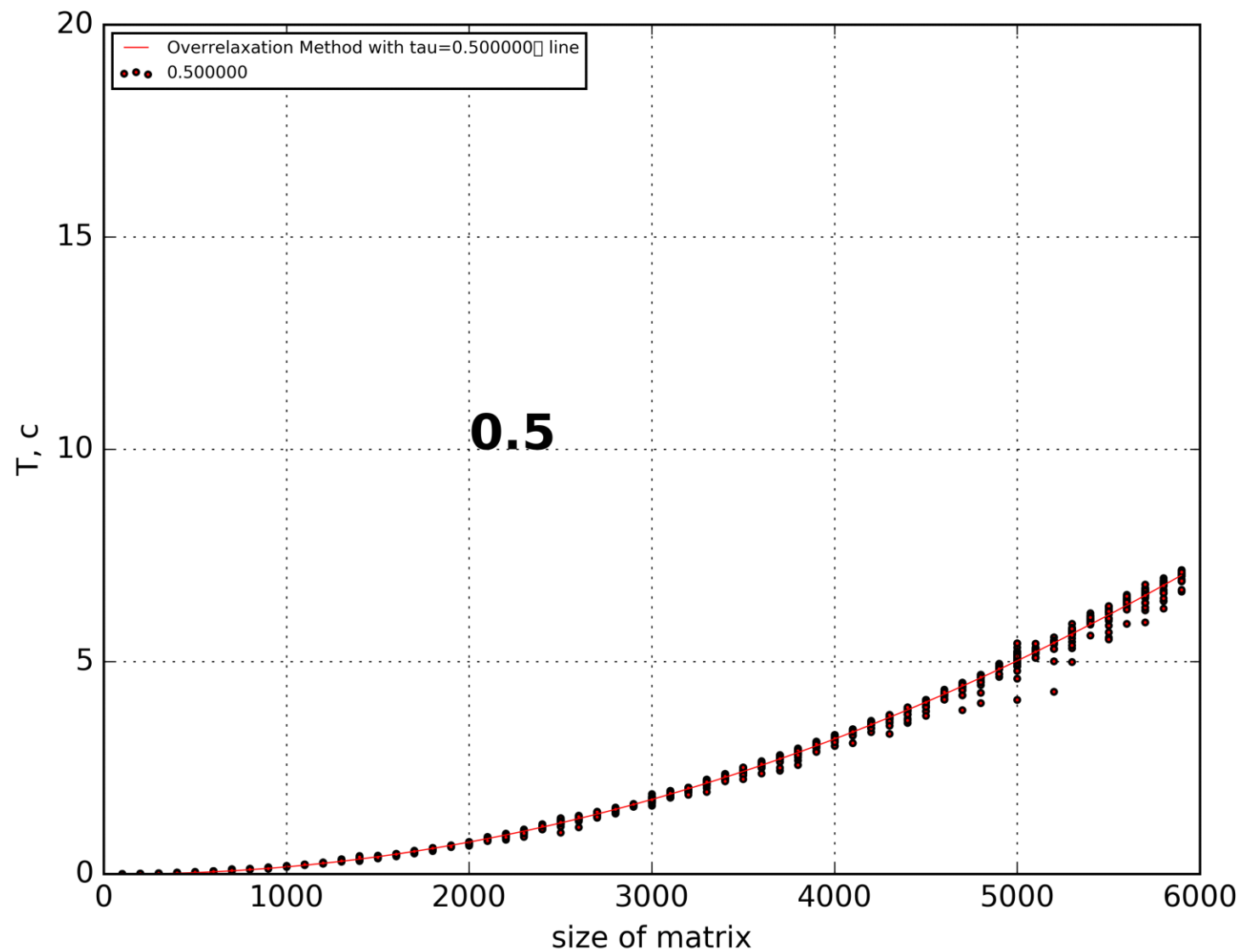
Результаты

Зависимость скорости работы метода релаксации при различных τ от числа обусловленности



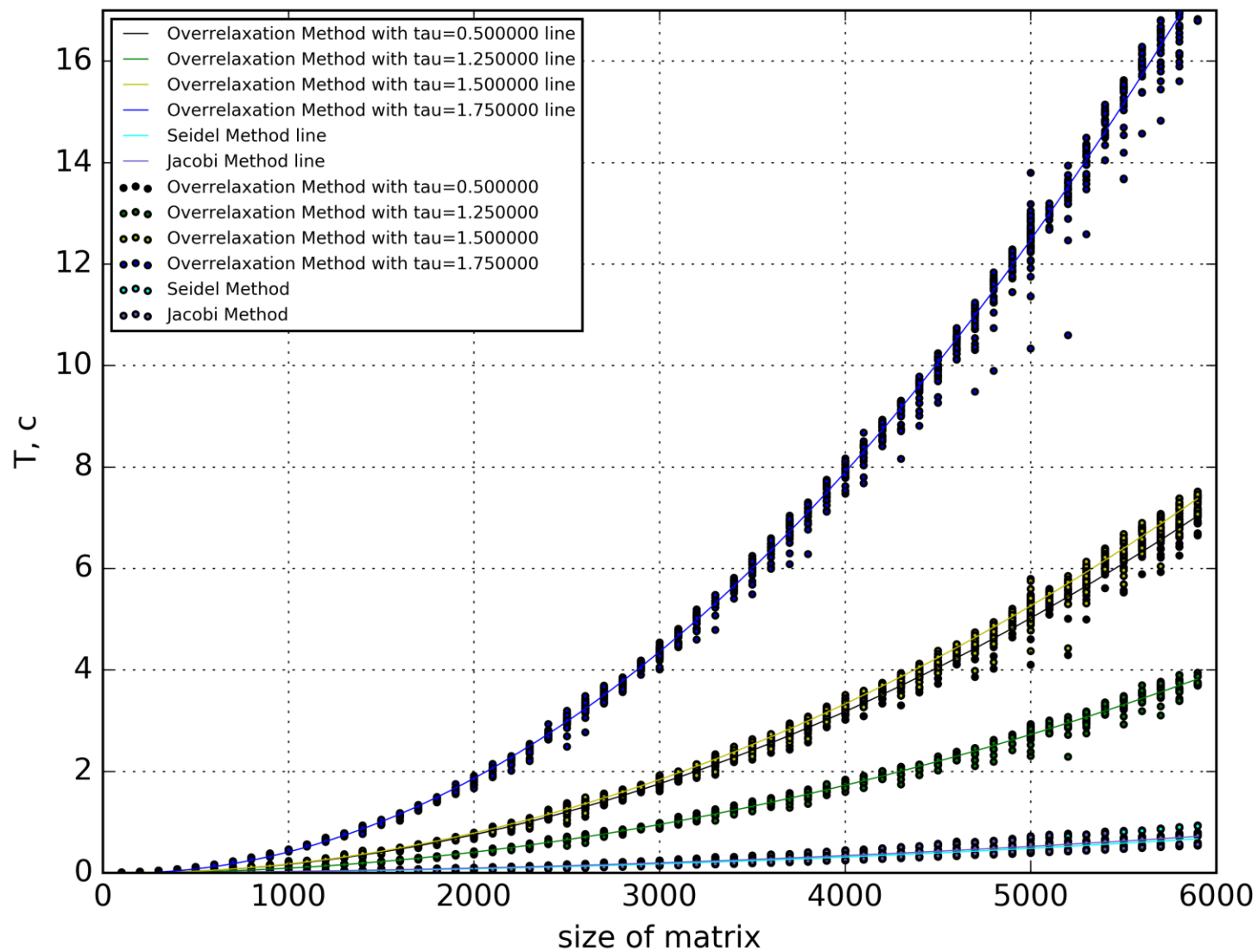
Результаты

Зависимость скорости работы метода релаксации от τ



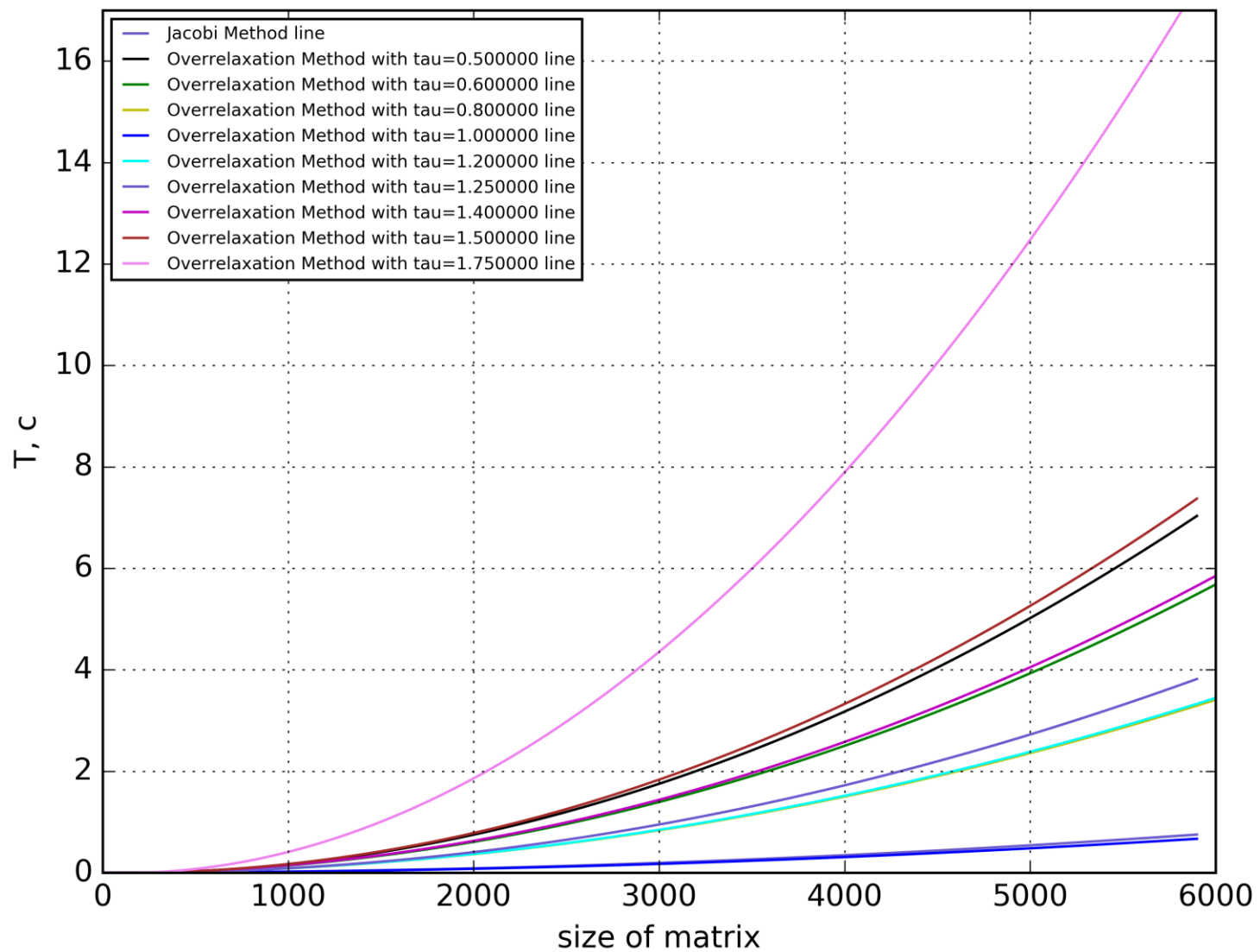
Результаты

Сравнительный график для всех методов



Результаты

Сравнительный график для всех методов без экспериментальных точек



Результаты и выводы

- Была реализована программа, осуществляющая сравнение методов решения СЛАУ
- Теоретическая сложность методов совпала с экспериментальной
 - Для прямого метода Гаусса – $O(n^3)$
 - Для численных методов – $O(n^2)$
- Наибольшей производительностью обладают
 1. Метод Гаусса-Зейделя ($\tau = 1$)
 2. Метод Якоби
- Быстродействие падает с ростом числа обусловленности
- Оптимальное значение параметра релаксации $\tau_{opt} \in (1.0; 2.0)$

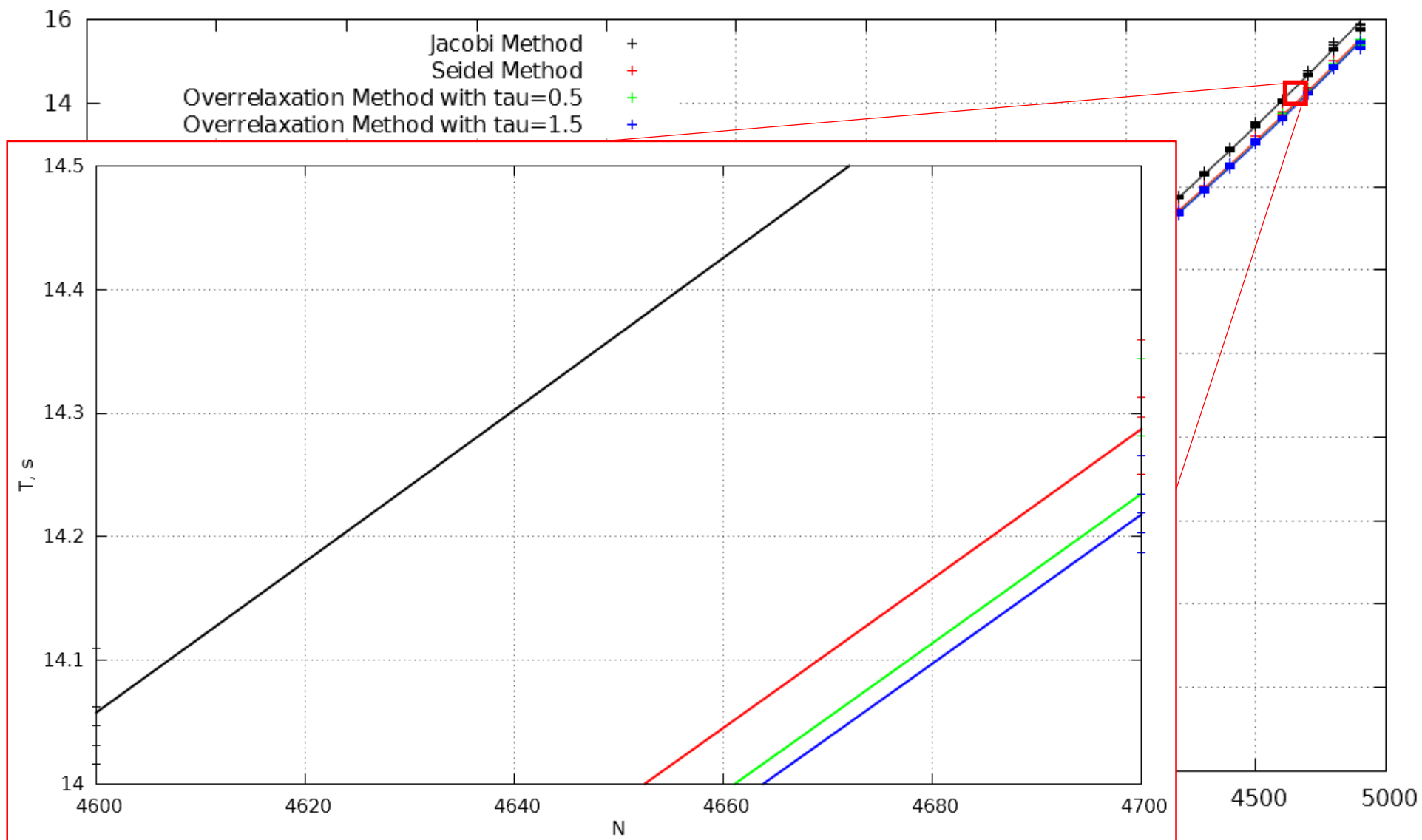
Дальнейшее развитие

- Увеличение количества сравниваемых алгоритмов
- Увеличение собираемой статистики
- Нахождение τ_{opt} для верхней релаксации
- Демонстрация к курсу «Вычислительная математика»

[github.com/Ivan-Sergeyev/slae alg comp](https://github.com/Ivan-Sergeyev/slae_alg_comp)

Дополнительная часть

Результаты (Python)





This repository Search

Pull requests Issues Gist



Ivan-Sergeyev / slae_alg_comp

Unwatch

2

Star

0

Fork

0

Code

Issues 4

Pull requests 0

Projects 0

Wiki

Pulse

Graphs

Settings

No description or website provided. — Edit

232 commits

1 branch

0 releases

2 contributors

Branch: master

New pull request

Create new file

Upload files

Find file

Clone or download



Ivan-Sergeyev fixed a mistake in README

Latest commit 903ea1f 11 seconds ago

presentations

updated pdf version of the latest presentation

24 minutes ago

results

moved graphs_python/ to results/

5 minutes ago

src

changed names of two directories, expanded README

37 minutes ago

telegram

a lot of improves

19 hours ago

test

changed names of two directories, expanded README

37 minutes ago

.gitignore

added python cache to .gitignore

23 hours ago

Makefile

changed names of two directories, expanded README

37 minutes ago

README.md

fixed a mistake in README

10 seconds ago

data_analyser.py

improve $a(\mu)$

19 minutes ago

main.cpp

changed names of two directories, expanded README

37 minutes ago

README.md