Сравнение быстродействия алгоритмов точного и численного решения систем линейных алгебраических уравнений

И.И. Сергеев, И.Д. Фёдоров

научный руководитель А.В. Фаворская

МФТИ, 23 ноября 2016

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассматриваемая система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n = f_1 \\ \ldots \\ a_{n1}u_1 + \ldots + a_{nn}u_n = f_n \end{cases}$$

Матричная запись:

$$Au = f$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

- Прямой ход

  С помощью вычитания строк матрица приводится к верхнетреугольному виду

- Обратный ход

  По очереди разрешаются уравнения, начиная с последнего

- Выбор главного элемента ⇒ повышение точности

  На i-ом шаге i-ая строка переставляется со строкой, содержащей наибольшее значение в i-ом столбце

Итерационные методы

Метод Якоби

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j^k\right)$$

Метод Гаусса-Зейделя

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j^k\right)$$

Метод релаксации

$$u_i^{k+1} = (1-\tau)u_i^k + \frac{\tau}{a_{ii}}\left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}u_j^k\right)$$

Цели

- Сравнение быстродействия методов

- Изучение зависимости скорости работы
    1. от параметра τ (для методов релаксации)
    2. от числа обусловленности μ

Генерирование матриц с числом обусловленности, точно равным заданному

- Число обусловленности по определению

$$\mu = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

- Норма матрицы

$$A = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Алгоритм генерации:
  1. B – целиком случайная, ортогонализованная по Грамму-Шмидту
  2. C – случайная диагональная, фиксированы минимум – 1, максимум -- μ
  3. $A = B'C$

Генерирование матриц с числом обусловленности, точно равным заданному

- Преимущества:

1. Точное значение μ

- Недостатки:

1. Сложность процесса ортогонализации – $O(n^3)$
2. Отсутствие диагонального преобладания

Генерирование матриц с числом обусловленности, приблизительно равным заданному

- Оценочная формула:

$$\mu \geq \frac{\max\limits_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|}{\min\limits_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|}$$

- Алгоритм генерации:
  1. Ниже диагонали – симметрично
  2. По диагонали – фиксированы минимум 1, максимум μ
  3. Выше диагонали – случайные

Генерирование матриц с числом обусловленности, приблизительно равным заданному

- Преимущества:

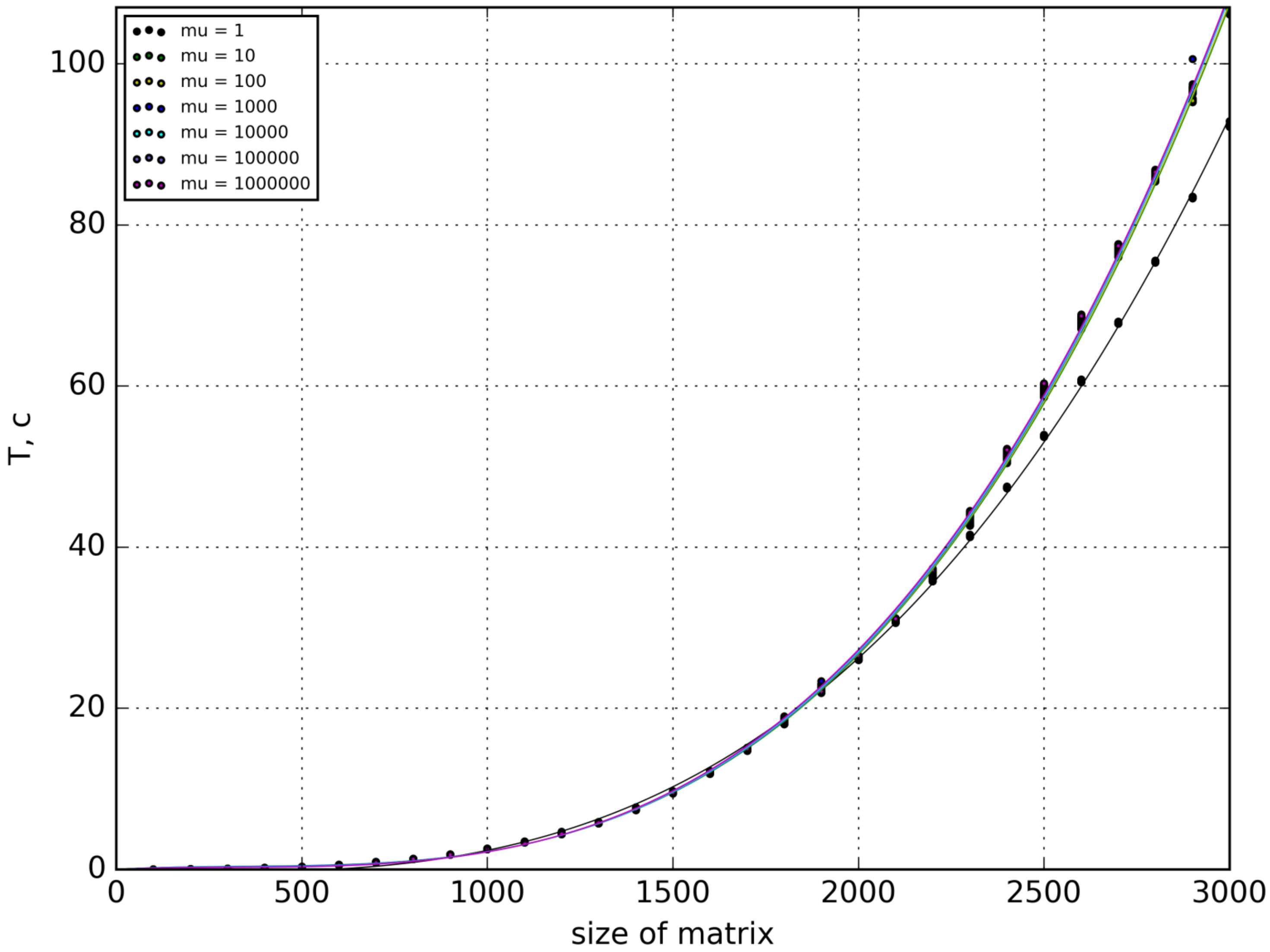
1. Сложность -- $O(n^2)$
2. Диагональное преобладание

- Недостатки

1. Узкий класс матриц
2. Неточное значение μ (отклонение <0.3%)

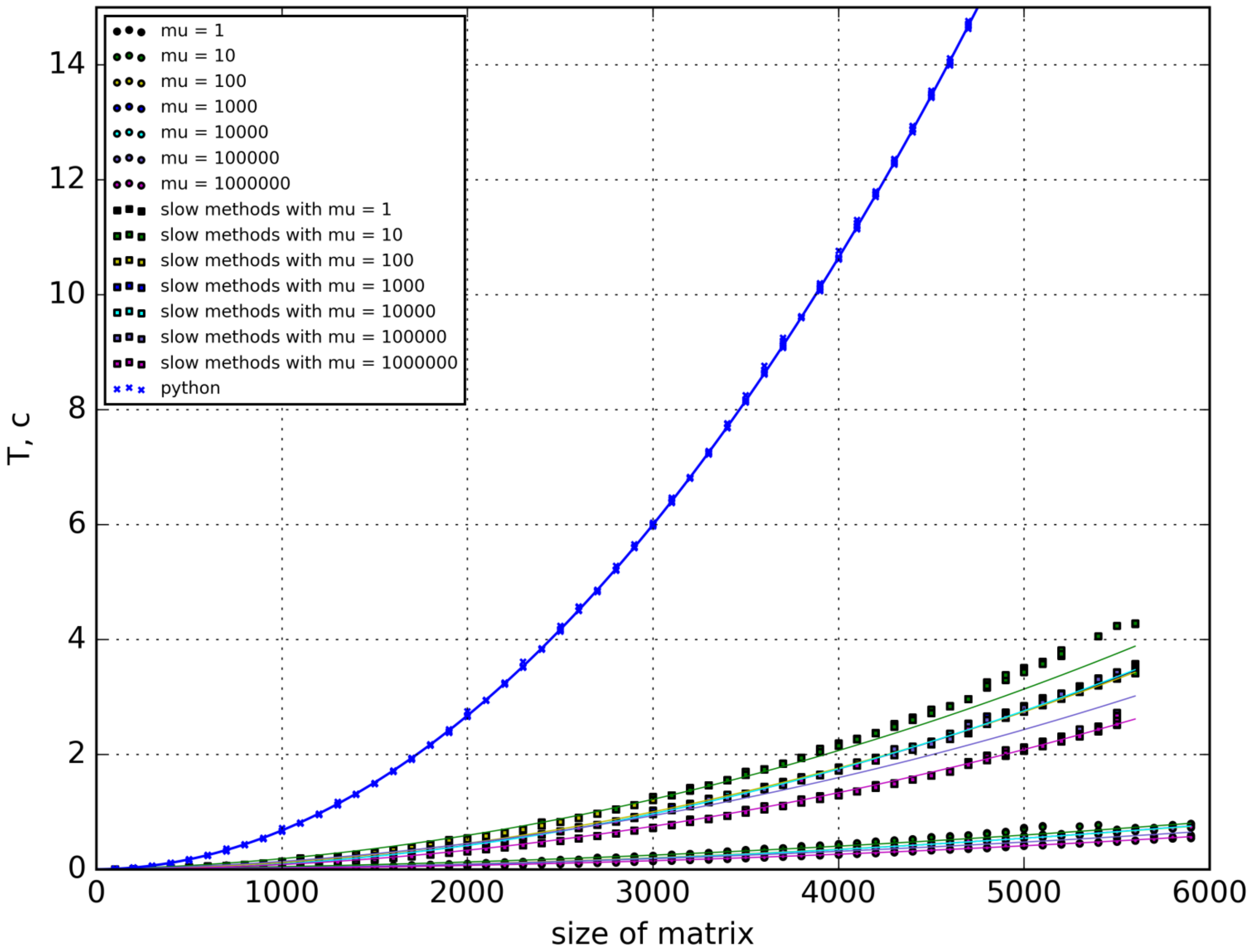
Результаты

Скорость работы метода Гаусса



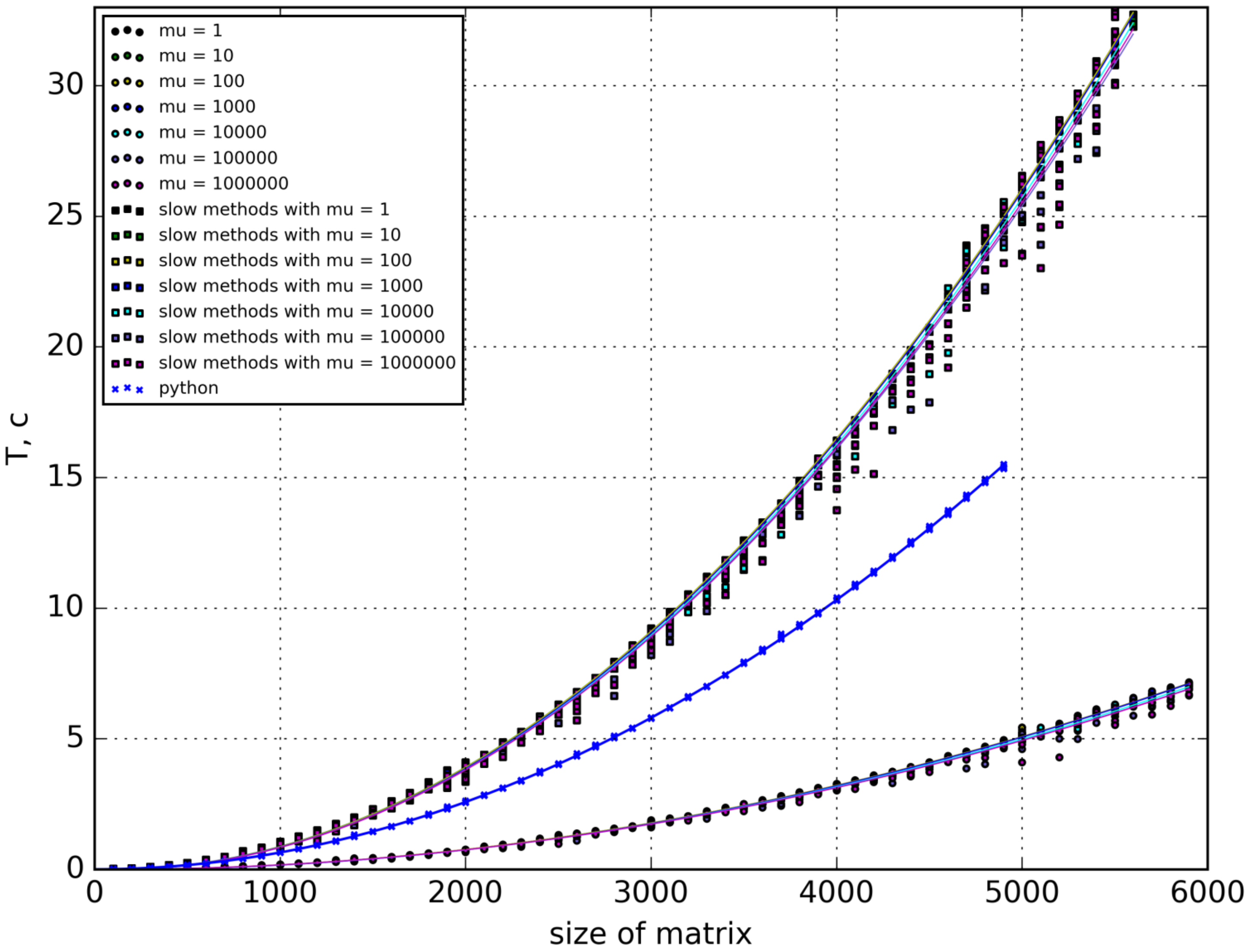
Результаты

Скорость работы метода Якоби



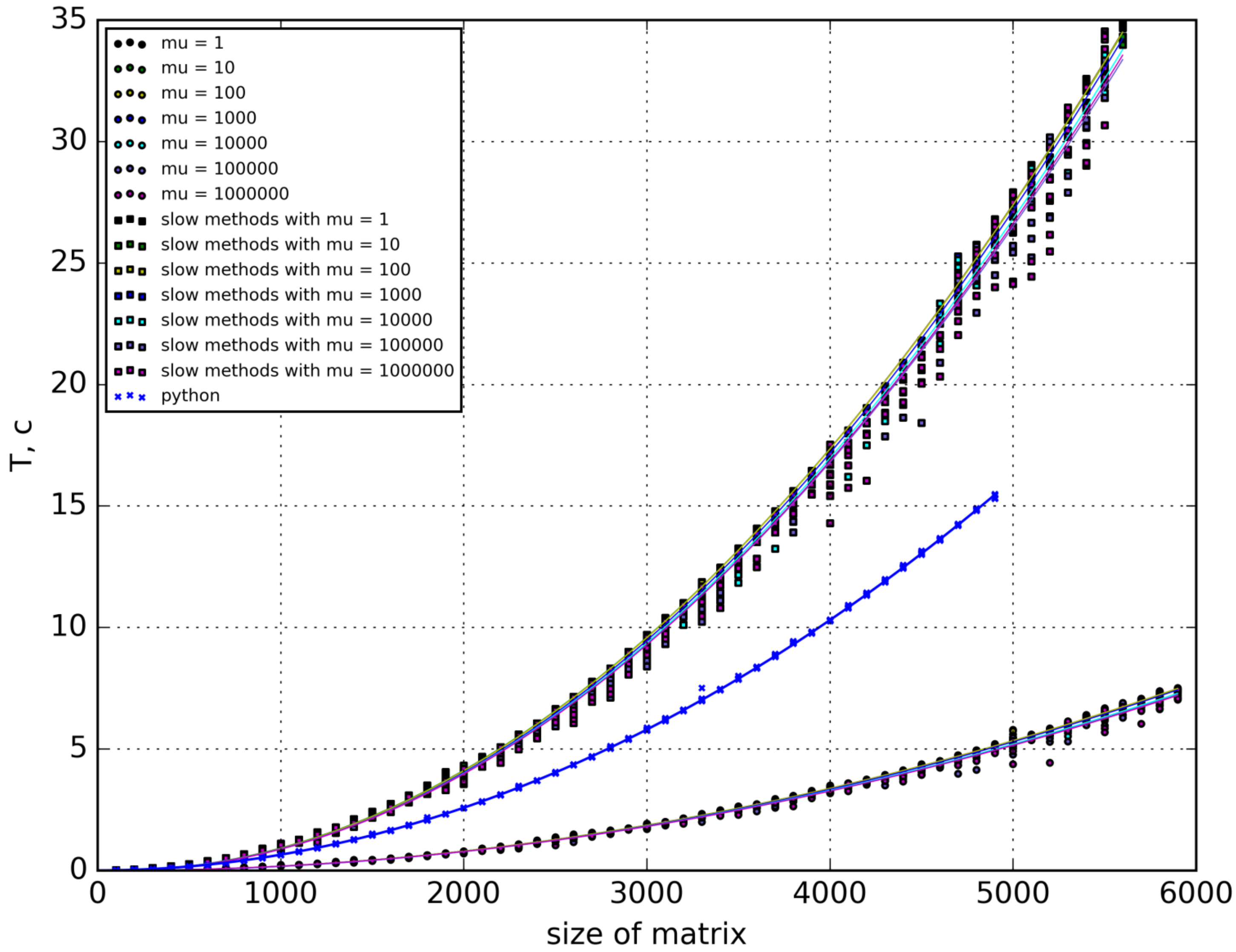
Результаты

Скорость работы метода нижней релаксации



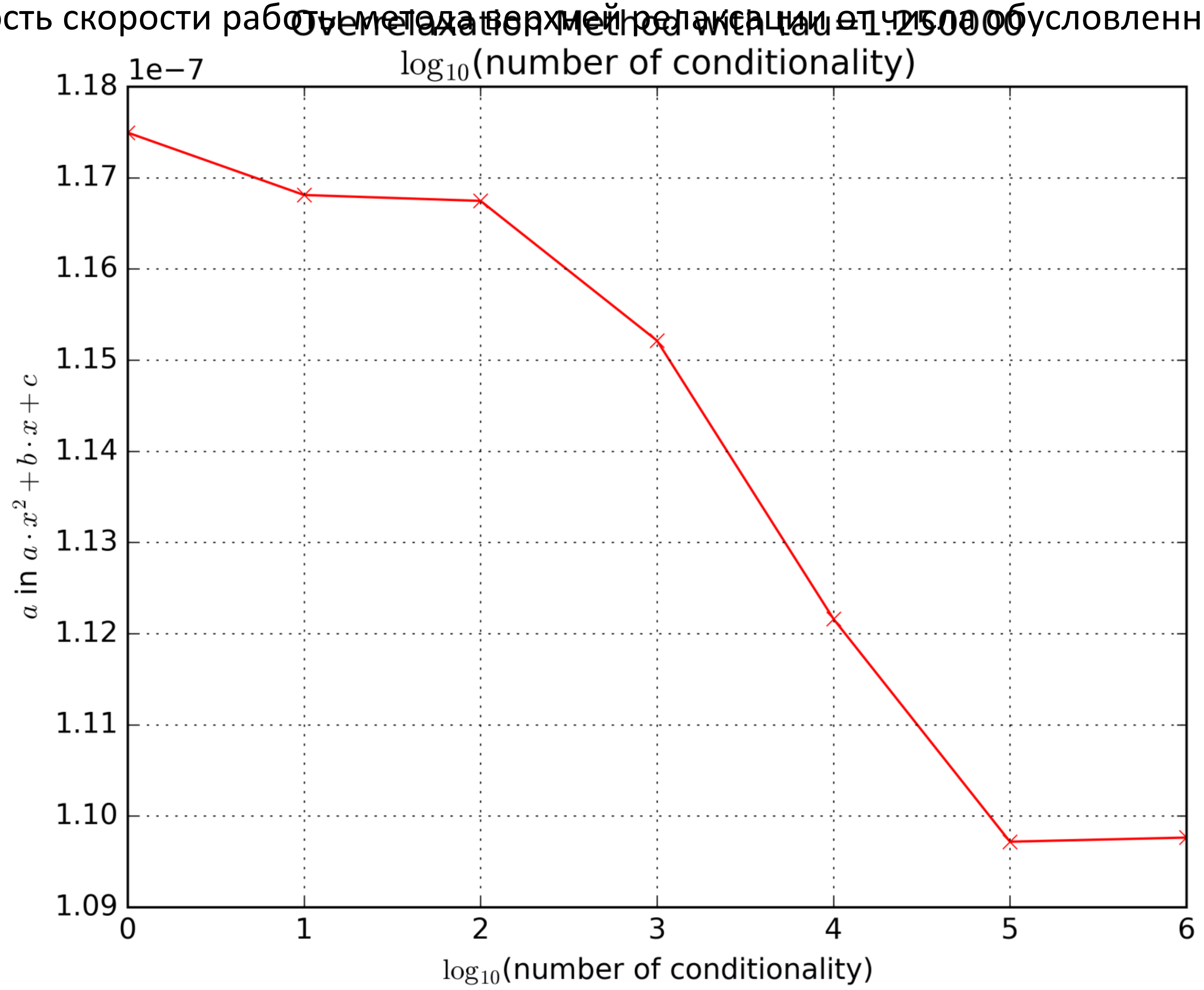
Результаты

Скорость работы метода верхней релаксации, $\tau = 1.5$



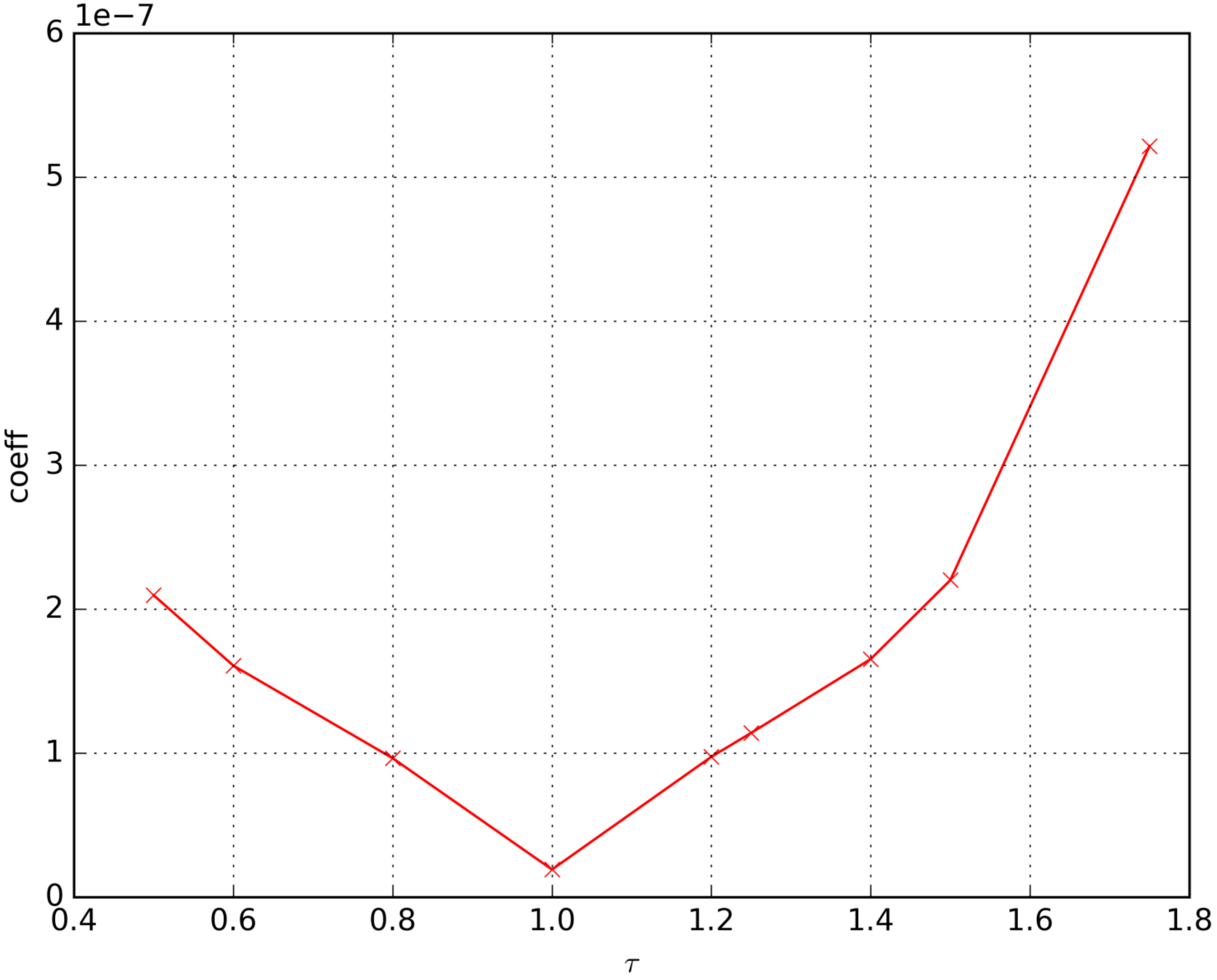
Результаты

Зависимость скорости работы метода верхней релаксации от числа обусловленности, $\tau = 1.25$



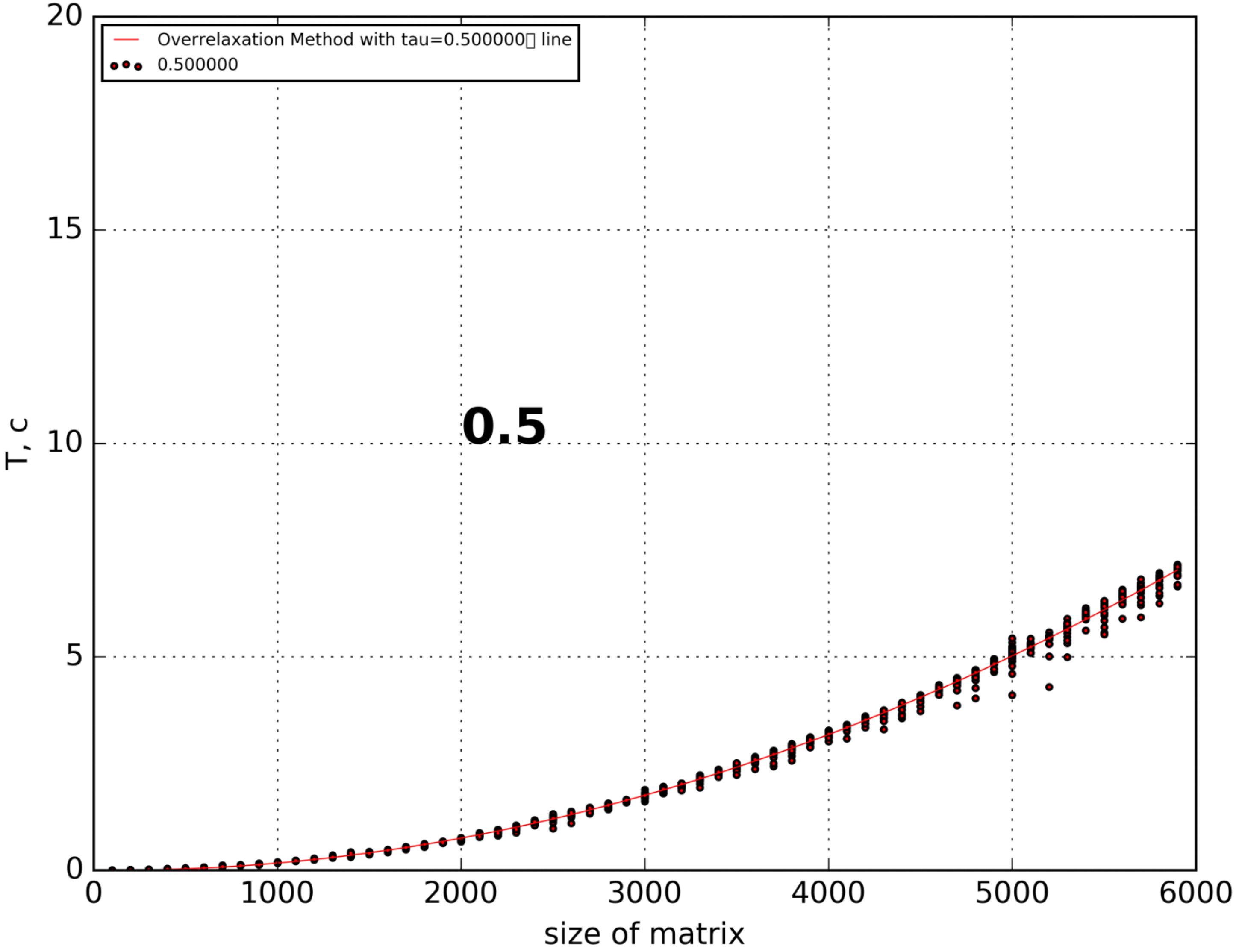
Результаты

Зависимость скорости работы метода релаксации при различных τ от числа обусловленности



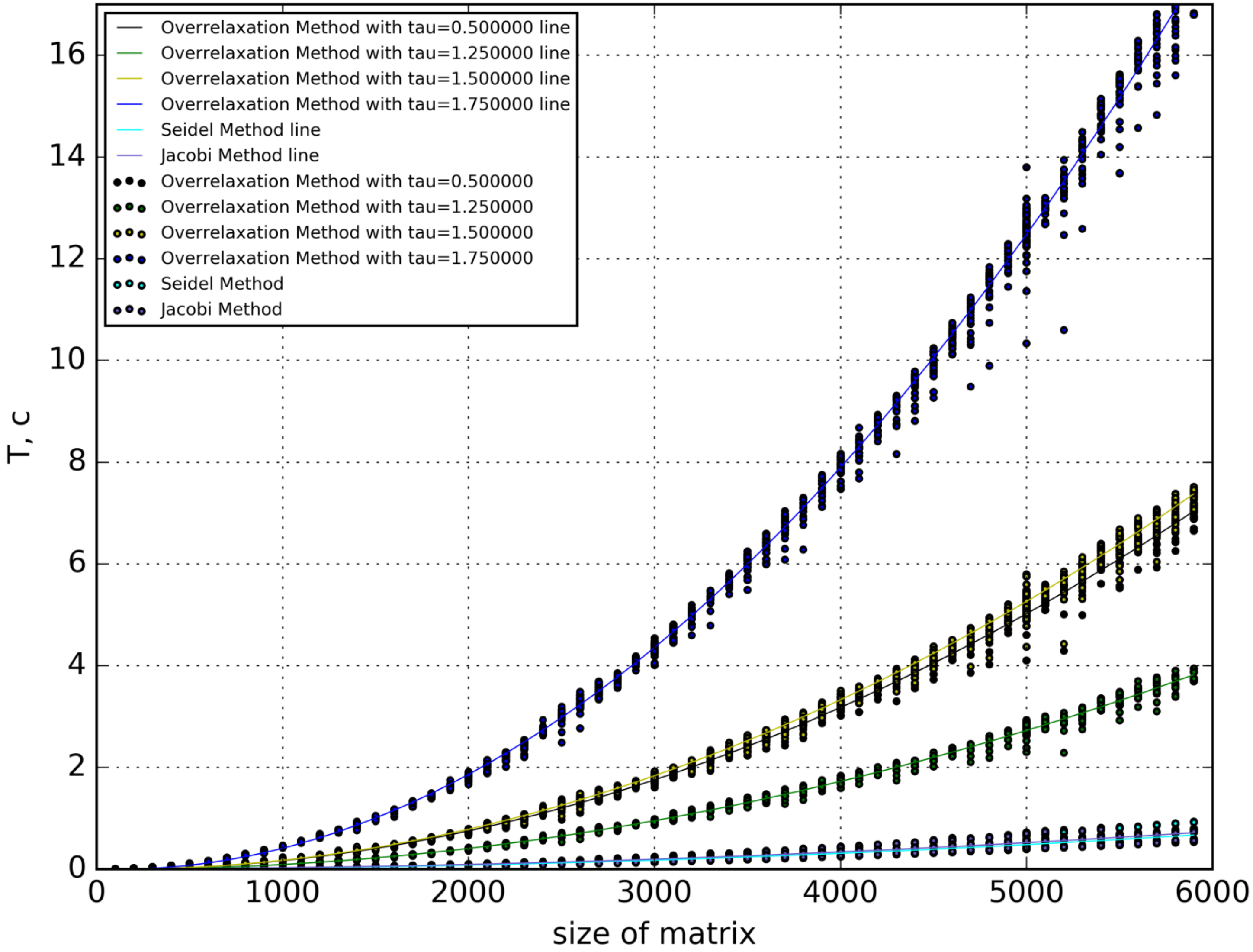
Результаты

Зависимость скорости работы метода релаксации от τ



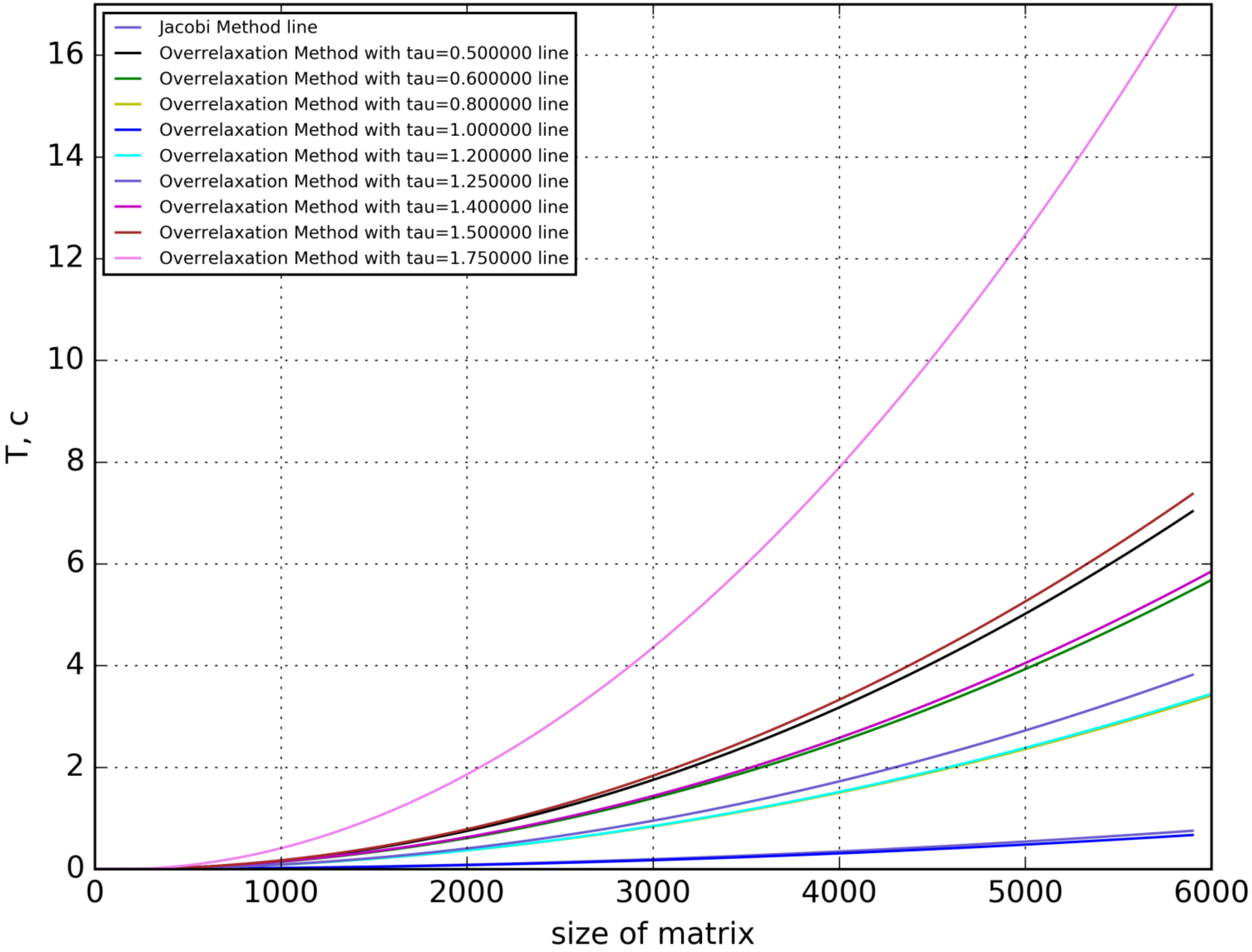
Результаты

Сравнительный график для всех методов



Результаты

Сравнительный график для всех методов без экспериментальных точек



Результаты и выводы

- Была реализована программа, осуществляющая сравнение методов решения СЛАУ
- Теоретическая сложность методов совпала с экспериментальной
  - Для прямого метода Гаусса – $O(n^3)$
  - Для численных методов – $O(n^2)$
- Наибольшей производительностью обладают
  1. Метод Гаусса-Зейделя ($\tau = 1$)
  2. Метод Якоби
- Быстродействие падает с ростом числа обусловленности
- Оптимальное значение параметра релаксации $\tau_{opt} \in (1.0; 1.2)$

Дальнейшее развитие

- Увеличение количества сравниваемых алгоритмов
- Увеличение собираемой статистики
- Нахождение τ_{opt} для верхней релаксации

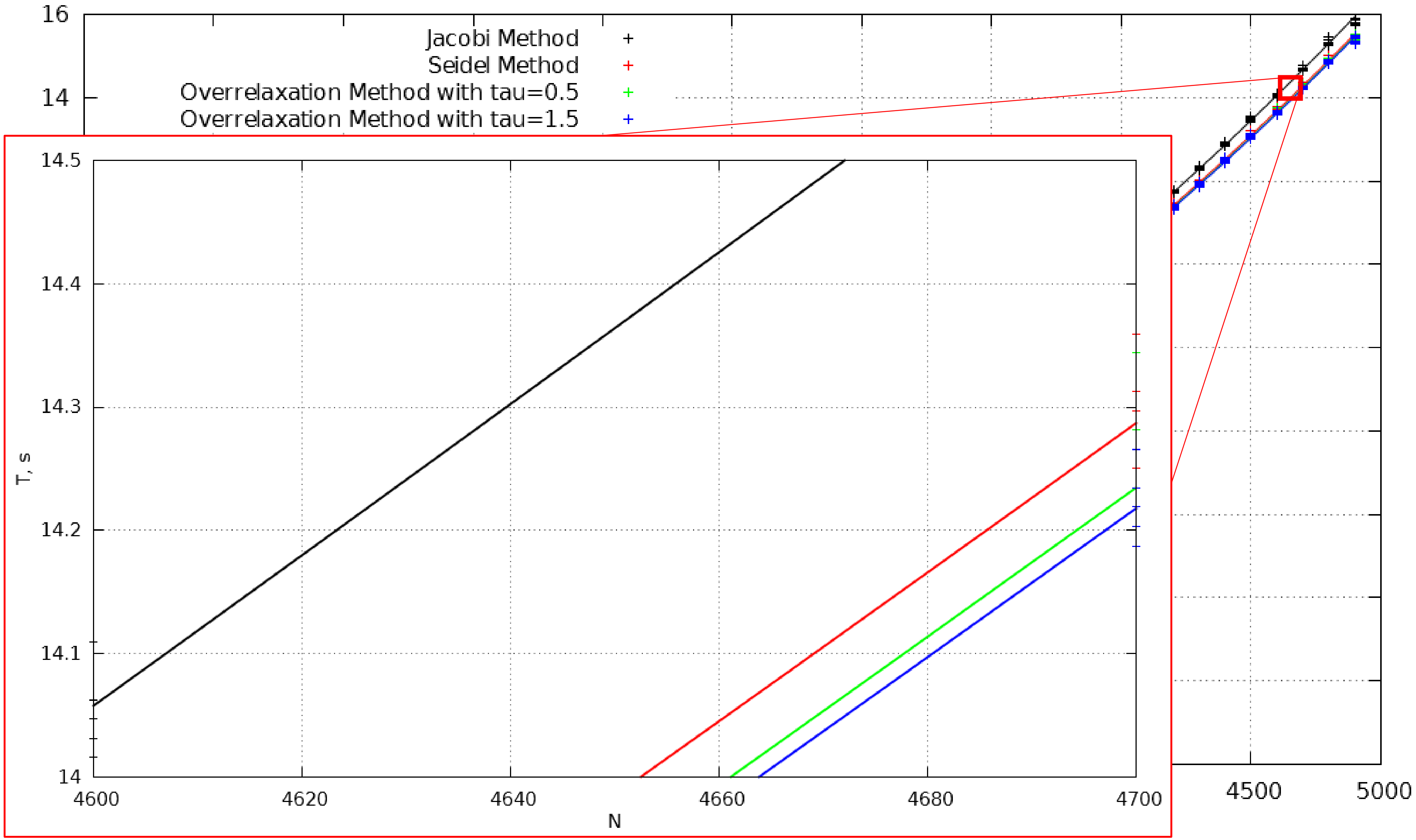
- Демонстрация к курсу «Вычислительная математика» github.com/Ivan-Sergeyev/slae_alg_comp

Литература

1. *Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. М.: Бином, 2006. – 523 с.
2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. *O. Axelsson.* A survey of preconditioned iterative methods for linear systems of algebraic equations. // BIT, 1985. V. 25, N. 165. P. 165–187.

Дополнительная часть

Результаты (Python)



This repository | Search | Pull requests | Issues | Gist

Ivan-Sergeyev / **slae_alg_comp**

Unwatch 2 | Star 0 | Fork 0

Code | Issues 4 | Pull requests 0 | Projects 0 | Wiki | Pulse | Graphs | Settings

No description or website provided. — Edit

232 commits | 1 branch | 0 releases | 2 contributors

Branch: master | New pull request | Create new file | Upload files | Find file | Clone or download

Ivan-Sergeyev fixed a mistake in README — Latest commit 903ea1f 11 seconds ago

presentations	updated pdf version of the latest presentation	24 minutes ago
results	moved graphs_python/ to results/	5 minutes ago
src	changed names of two directories, expanded README	37 minutes ago
telegram	a lot of improves	19 hours ago
test	changed names of two directories, expanded README	37 minutes ago
.gitignore	added python cache to .gitignore	23 hours ago
Makefile	changed names of two directories, expanded README	37 minutes ago
README.md	fixed a mistake in README	10 seconds ago
data_analyser.py	improve a(mu)	19 minutes ago
main.cpp	changed names of two directories, expanded README	37 minutes ago

README.md