МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Фаломкина Олеся Владимировна

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ НЕЧЕТКИХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Ю. П. Пытьев

Москва
2006 г.

Введение

Для последних нескольких десятилетий характерен возрастающий интерес к математическим моделям неясности, неопределености и т.п., характеризующим неполноту знаний, их недостоверность, и — нечеткости, случайности, и т.п., относящихся к их содержанию.

Как известно, теория вероятностей, как математическая основа моделирования случайности и неопределенности, на практике неэффективна чаще всего в связи с невероятностной природой последних, но и в тех случаях, когда стохастический характер нечеткости и неопределенности очевиден, принципиальные трудности, как правило, возникают при эмпирическом построении вероятности [1].

С этим связано появление ряда фундаментальных математических работ, посвященных невероятностым методам моделирования нечеткости, случайности и неясности. Субъективная вероятность Сэведжа [2] как мера неуверенности субъекта, суждения которого удовлетворяют определенным условиям «рациональности»; верхние и нижние вероятности Демпстера [3], характеризующие неполноту наблюдений и отражающие неопределенность в теории вероятностей, моделируемую многозначными отображениями; правдоподобие и доверие Шеффера [4], обобщающие конструкции Демпстера в теории принятия решений; возможность Заде [5], основанная на его теории нечетких множеств [6], — далеко не полный перечень таких работ. Следует отметить также работы [7]–[9], теории возможностей [10], [11] и [12]. Отметим также работы [14],[15], непосредственно не связанные с проблемой моделирования нечеткости и неопределенности, но в которых полученные результаты и разработанный формализм могут быть успешно применены для решения этой проблемы [16] .

Остановимся подробнее на работах [11], [12] остановимся подробнее, поскольку представленная в них теория возможностей используется в диссертации.

В [11], [12] возможность принимает значения в ранговой шкале $\mathcal{L} = ([0, 1], \leqslant, +, \bullet)$, в которой сложение «+» определено как «max», а умножение «•» определено как «min». Тот факт, что $\mathcal{L}$ имеет обширную группу Γ автоморфизмов, порожденную непрерывными строго монотонными преобразованиями отрезка [0, 1] в себя, оставляющими неподвижными точки 0 и 1, в [11], [12] использован для формулировки *принципа относительности возможности*, согласно которому каждый исследователь может использовать для представления результатов исследований свою шкалу, все шкалы считаются эквивалентными, а содержательно истолкованы могут быть лишь результаты, не зависящие от выбора шкалы. Последнее существенно отличает вариант теории возможностей, рассмотренный в [11], [12] от перечисленных выше.

В частности, принцип относительности позволил построить стохастические модели возможности, и, как следствие, решить проблему эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности, что существенно расширяет класс стохастических объектов, математические модели которых могут быть получены эмпирически, и т.д. В [1] показано, что при эмпирическом построении теоретико-возможностной модели стохастического объекта его теоретико-вероятностная модель в течение всего времени наблюдений может произвольно эволюционировать в пределах одного из известных классов, в то время как при эмпирическом построении его теоретико-вероятностной модели последняя, как известно, должна быть неизменна в течение времени наблюдений. Более того, при достаточно слабых ограничениях на характер эволюции вероятностей теоретико-возможностная модель может быть построена почти наверное безошибочно на основании конечного числа наблюдений, тогда как теоретико-вероятностная модель этого же стохастического объекта эмпирически не может быть построена принципиально. Наконец, принцип относительности позволяет определять возможность и на основе экспертных оценок.

В диссертации представлены результаты двух направлений научных исследований.

Первое направление посвящено исследованию варианта теории возможностей, фрагментарно рассмотренного в [11], в котором возможность принимает значения в шкале $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \leqslant, +, \bullet)$, где сложение «+» определено как «max», умножение «•» — как «обычное» умножение «·», который далее будем называть вторым вариантом теории возможностей, в отличие от варианта, которому в основном посвящена монография [11]. В [11] для второго варианта приведены лишь основы теории и закон больших чисел. Вне рассмотрения остались принцип относительности возможности, методы оптимального оценивания, анализа и интерпретации данных, эмпирического построения теоретико-возможностных моделей.

Одной из целей диссертации является исследование принципа относительности для этого варианта возможности, его стохастических моделей, методов анализа и интерпретации данных и т.д. В диссертации приведены результаты этих исследований, в частности, разработан принцип относительности и построена стохастическая модель возможности, для случая априори известной упорядоченности вероятностей элементарных исходов стохастического эксперимента разработан метод эмпирического построения его теоретико-возможностной модели, рассмотрен метод анализа и интерпретации данных и т.д.

Второе направление посвящено исследованиям по неопределенной нечеткой (НН) математике [12], в частности, — математическим методам и алгоритмам анализа и интерпретации данных для неопределенных нечетких (НН) моделей; разработке математических методов моделирования и анализа неопределенных стохастических объектов.

В работах, посвященных моделированию случайности, нечеткости, неясности и неопределенности, и имеющих непосредственное отношение к этому направлению исследований, выделим фундаментальные математические конструкции, ориентированные на моделирование неопределенности, обусловленной неполнотой знаний. Это мера правдоподобия Фридмана и Халперна [17], обобщающая доверие Демпстера-Шеффера, возможность Заде и нечеткая мера Сугено [18], верхнее и нижнее предвидение Вэлли [19], обобщающие вероятность, возможность Заде и доверие Демпстера-Шеффера, контекстная модель Гебхардта и Круза [20], использующаяся для описания нечеткости и неопределенности, позволившая дать альтернативную формулировку теории Демстера -Шеффера, и, наконец, мера правдоподобия (доверия) возможности (необходимости) Пытьева [12], имеющая непосредственное отношение ко второму направлению исследований в диссертации.

Среди всех рассмотренных публикаций (кроме уже упомянутых, это — [23]–[45]) не удалось обнаружить работ, кроме [12], в которых методы моделирования содержали бы математические средства для формального выражения как мнений исследователя по поводу адекватности используемой модели и основанных на ней выводов, так и эволюции этих мнений, обусловленной получением новых данных. В разработанных в [12] неопределенных нечетких (НН) моделях нечеткость, неточность формулировок, относящаяся к содержанию информации, охарактеризована в терминах значений мер возможности и (или) необходимости, а достоверность формулировок, истинность которых не может быть абсолютной в силу принципиальной неполноты знаний, охарактеризована в терминах значений мер правдоподобия и (или) доверия.

Принцип построения НН модели в [12] состоит в следующем: на классе теоретико-возможностных моделей объекта задается распределение правдоподобий, что позволило разработать правила принятия решений, в которых критерии оптимальности решения основаны на значениях правдоподобия (доверия) возможности и (или) необходимости ошибки решения, при этом возможность и (или) необходимость определяют содержательную характеристику качества решения, тогда как правдоподобие тех или иных значений возможности (необходимости) ошибки, показывающее, в какой степени им следует доверять, является дополнительной характеристикой качества.

В диссертационной работе по этому направлению предложены и исследованы новые правила принятия решений для НН моделей и, в частности, два новых критерия оптимальности, разработана и исследована неопределенная стохастическая (НС) модель идентификации и построен критерий качества идентификации для этой модели.

Цель работы.

Одной из целей диссертационной работы является исследование второго варианта теории возможностей:

1. разработка принципа относительности возможности, построение ее стохастической модели и разработка математических методов эмпирического построения возможности;

2. разработка математических методов анализа и интерпретации данных для обоих вариантов теории возможностей, разработка и реализация программного комплекса на базе платформы Matlab, позволяющего решать широкий спектр задач анализа и интерпретации данных, проверять адекватность модели и выводов.

В направлении исследований по НН математике целью является

1. разработка и исследование новых методов принятия решений для НН моделей, в которых в критерии оптимальности решения, основанном на значении меры правдоподобия возможности (и, или необходимости) ошибки решения, либо правдоподобие является основной, а возможность (необходимость) — дополнительной характеристикой качества, либо возможность (необходимость) и правдоподобие являются равноценными характеристиками качества;

2. разработка и реализация программного комплекса на базе платформы Matlab для решения задач редукции измерений, восстановления функциональной зависимости для НН моделей, позволяющего исследователю вести интеллектуальный диалог с компьютером, в том числе изменять параметры модели и наблюдать, как эти изменения влияют на выводы и на адекватность как НН модели, так и основанных на ней выводов; проведение на его базе вычислительного эксперимента для сравнения теоретико-возможностных и НН методов моделирования анализа и интерпретации данных;

3. построение неопределенной стохастической модели идентификации и правила идентификации, в котором критерий качества основан на значении правдоподобия вероятности ошибки идентификации, вероятность ошибки — основная характеристика качества идентификации, правдоподобие — дополнительная.

На защиту выносятся

1. Принцип относительности во втором варианте теории возможностей (гл. 2, § 1, с. 33–

36) и его следствия — стохастическая модель возможности (гл. 2, § 2, с. 37–45) и метод ее эмпирического восстановления (гл. 2, § 3, с. 45–51).

2. Новый метод оптимальных решений для эмпирически восстановленных теоретико-возможностных моделей во втором варианте теории возможностей (гл. 2, § 3, с. 51).

3. Новые методы принятия решений для НН моделей, в том числе новые критерии оптимальности решения, и методы решения задач анализа и интерпретации данных (гл. 3, § 4–7, с. 67–93).

4. Комплекс программ для решения задач теоретико-возможностного и НН моделирования, анализа и интерпретации данных, проверки адекватности модели и пользовательский интерфейс исследователя (гл. 3, § 7, с. 86–93, и гл. 4).

Научная новизна.

В диссертационной работе по второму варианту теории возможностей получены следующие новые результаты:

1. разработан принцип относительности, построена стохастическая модель возможности, для случая априори известного упорядочения вероятностей элементарных исходов стохастического эксперимента разработан и исследован метод эмпирического построения его теоретико-возможностной модели;

2. разработаны теоретико-возможностные методы анализа и интерпретации данных;

3. для обоих вариантов теории возможностей разработан и реализован на базе платформы Matlab программный комплекс для решения задач редукции измерений, восстановления функциональной зависимости и прогнозирования.

По неопределенной нечеткой математике получены следующие новые результаты:

1. предложены и исследованы новые правила принятия решений для НН моделей и, в частности, новые критерии оптимальности, основанные на значении меры правдоподобия возможности (необходимости) ошибки, в которых основной характеристикой качества решения является правдоподобие, дополнительной — возможность или необходимость, и критерии, в которых одинаково важны как возможность (необходимость), так и правдо-

подобие;

2. разработан и реализован программный комплекс на базе платформы Matlab для решения задач редукции измерений, восстановления функциональной зависимости для НН моделей, позволяющий исследователю вести интеллектуальный диалог с компьютером, в частности, изменять параметры модели и наблюдать, как эти изменения влияют на выводы, на адекватность НН модели и основанных на ней выводов, и выполнен вычислительный эксперимент, в котором продемонстрирован существенно более широкий арсенал средств НН моделирования по сравнению с теоретико-возможностным моделированием решений задач анализа и интерпретации данных;

3. разработана и исследована неопределенная стохастическая (НС) модель идентификации и построен критерий качества идентификации, основанный на значении правдоподобия вероятности ошибки идентификации.

Практическая ценность и апробация работы

1. Для второго варианта возможности, который занимает «промежуточное» положение между вероятностью и возможностью [11], разработан метод эмпирического построения стохастически измеримой возможности и соответствующей теоретико-возможностной модели объекта исследований. Этот результат позволяет существенно расширить класс стохастических объектов, математическая модель которых может быть построена эмпирически.

2. Практическая ценность разработанных в диссертации новых правил принятия решений для НН моделей состоит в том, что разработан новый инструмент для научных исследований и решения прикладных задач, который

• позволяет при построении и при использовании модели и основанных на ней выводов отражать мнение исследователя об адекватности модели и полученных выводов, и выражать его эволюцию, обусловленную получением новых знаний;

• позволяет исследователю при решении задач реализовывать свои предпочтения, выбирая тот или иной критерия качества решения.

Практическая ценность разработанного на основе новых правил принятия решений и реализованного на базе платформы Matlab программного комплекса заключается в том, что исследователь получил новые средства интеллектуалного диалога с компьютером, в частности

• возможность реализовать свои предпочтения при выборе того или иного критерия качества решения,

• возможность формально выражать свое мнение по поводу адекватности модели и основанных на ней выводов,

• возможность изменять модель и наблюдать, как эти изменения влияют на выводы, на адекватность НН модели и основанных на ней выводов.

Результаты диссертационной работы доложены на конференциях «Ломоносов-2000», «Математические методы распознавания образов-10», «Медицинская физика - 2001» I-го Евразийского конгресса по медицинской физике и инженерии, «Ломоносов - 2003», «Математические методы распознавания образов - 11», «Математические методы распознавания образов - 12» (доклад удостоен 2-й премии на конкурсе докладов молодых ученых), и на научных семинарах кафедры «Математической теории интеллектуальных систем» (механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова) и Компьютерных методов физики (физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова).

Публикации по теме диссертации. По теме диссертации опубликовано 11 работ — 3 статьи в журналах, 8 — в трудах конференций.

Личный вклад. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Глава 1

Теория возможностей и неопределенная нечеткая математика. Концепции, факты.

В этой вводной главе дан обзор основных понятий и результатов варианта теории возможностей [11] и неопределенного нечеткого (НН) моделирования [12], которые используются в работе. Дополнительные сведения по НН моделированию приводятся в § 3 главы 3 «Правила решения для неопределенных нечетких и неопределенных стохастических моделей» в связи с полученными там результатами.

§ 1. Элементы теории возможностей [11]

В отличие от известных моделей возможности, см., например, [5], [7] – [9], [10], [24, 25], [30, 31], в рассматриваемом в [11] варианте теории возможностей конкретные численные значения возможностей не важны, имеет смысл лишь их упорядоченность. Достигнуто это в [11] введением специальной шкалы $\mathcal{L}$ значений возможности: это отрезок $[0,1]$ числовой прямой с естественной упорядоченностью, определенной неравенством "$\leqslant$", и двумя правилами композиции: сложением "$+$": $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, понимаемым как "max": $a+b \triangleq \max(a,b)$, $a,b\in[0,1]$, и умножением "$\bullet$": $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, понимаемым как "min": $a\bullet b \triangleq \min(a,b)$, $a,b\in[0,1]$. Обе операции изотонны[1]) по каждому аргументу: для любых $a,b,c\in[0,1]$, $a\leqslant b \Rightarrow a+c\leqslant b+c$, $a\bullet c\leqslant b\bullet c$; 0 и 1 являются нейтральными элементами $\mathcal{L}: a+0=a,\ a\bullet 0=0,\ a\bullet 1=a,\ a+1=1$.

[1]) т. е. сохраняют упорядоченность

Шкала $\mathcal{L}$ имеет обширную группу Γ автоморфизмов, которую составляют все непрерывные строго монотонно возрастающие функции $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, оставляющие неподвижными нейтральные элементы: $\gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = 1$. Групповая операция $\gamma' \circ \gamma(\cdot)$ определена как композиция: $\gamma' \circ \gamma(a) \triangleq \gamma'(\gamma(a)),\ a \in [0,1],\ \gamma'(\cdot),\ \gamma(\cdot) \in \Gamma$. Каждая функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ определяет отображение[1] $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, которое является автоморфизмом (по определению), поскольку для любой функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$

1. $\gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = 1,\ a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b),\ a, b \in [0,1]$;

2. $\gamma(a + b) = \gamma(a) + \gamma(b),\ \gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b),\ a, b \in [0,1]$; $\qquad (*)$

3. $\gamma(\underset{\lambda\in\Lambda}{+} f_\lambda) = \underset{\lambda\in\Lambda}{+} \gamma(f_\lambda),\ \gamma(\underset{\lambda\in\Lambda}{\bullet} f_\lambda) = \underset{\lambda\in\Lambda}{\bullet} \gamma(f_\lambda),\ f_\lambda \in [0,1],\ \lambda \in \Lambda$, где $\underset{\lambda\in\Lambda}{+} f_\lambda \triangleq \sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, $\underset{\lambda\in\Lambda}{\bullet} f_\lambda \triangleq \inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.

Как показано в [11], условия $(*)$ определяют единственные в классе непрерывных симметричных функций $[0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ операции $+$ и $\bullet$, то есть группа автоморфизмов Γ определяет все свойства шкалы значений возможности и свойства самой возможности, которые в [11] сформулированы в виде принципа относительности возможности, согласно которому все определения, доводы, утверждения, задачи, данные и т.п. должны во всех шкалах выглядеть одинаково, любые определения, доводы, и т.д., формулировки которых в некоторых шкалах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ различны, считаются *эквивалентными*, если *существует шкала*[2] $\mathcal{L} = \gamma_1\mathcal{L}_1 = \gamma_2\mathcal{L}_2$, в которой их формулировки *совпадают*, если же формулировки *совпадают во всех шкалах*, то соответствующие определения, доводы, и т. д. могут быть *содержательно истолкованы*, ибо их смысл не зависит от шкалы, и, следовательно, одинаков для всех исследователей.

Аналогично вероятностному пространству в теории вероятностей, в [11] пространством с возможностью названа тройка $(Y, \mathcal{A}, P)$, где Y — множество элементарных событий, $\mathcal{A}$ — сигма-алгебра событий, $P : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ — возможность. Соответственно как в теории

---

[1]) Далее Γ обозначает как множество функций $\gamma(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, так и множество соответствующих отображений $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

[2]) т. е. если существуют такие преобразования $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, при которых $\gamma_1\mathcal{L}_1 = \gamma_2\mathcal{L}_2$.

вероятностей стохастической моделью назвается вероятностное пространство, в теории возможностей [11] нечеткой моделью называется пространство с возможностью. Как показано в [11], $P(\cdot) : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ всегда может быть продолжена с любой $\sigma-$алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Y на алгебру $\mathcal{P}(Y)$ всех подмножеств Y с сохранением всех ее свойств и определена своими значениями на одноточечных подмножествах Y:

$$P(\{y\}) \triangleq f(y),\ y \in Y, \quad P(A) = \sup_{y \in A} f(y),\ A \in \mathcal{P}(Y),$$

$f(\cdot) : Y \to [0,\, 1]$ распределение возможности P.

Свойства возможности существенно отличаются от свойств вероятности, в частности

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \max(P(A), P(B)),\ A, B \in \mathcal{P}(Y)$ (аддитивность);

— для любой последовательности $\{A_j\},\ j \in J,\ A_j \in \mathcal{P}(Y), \quad j \in J, \quad P(\bigcup_{j \in J} A_j) = \underset{j \in J}{+} P(A_j) = \sup_j P(A_j)$ (полная аддитивность);

— $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$ (монотонность);

— $P(\varnothing) = 0,\ P(Y) = 1$ (нормировка), наконец

— если $A = \lim A_j$, т.е. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j \geqslant n} A_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j \geqslant n} A_j$, то $P(A) \leqslant \sup_n \inf_{j \geqslant n} P(A_j)$ (полунепрерывность снизу).

Наконец, события A и B называются независимыми в теоретико-возможностном смысле, если $P(A \cap B) = \min(P(A), P(B))$.

Одним из фундаментальных в теории возможностей [11] является понятие нечеткого элемента - аналог случайного элемента в теории вероятностей. В [11], [12] введено понятие канонического для пространства с возможностью $(Y, \mathcal{P}(Y), P)$ нечеткого элемента η, определенного на $(Y, \mathcal{P}(Y))$ и принимающего значения в Y. Возможность $P(A)$ события $A \in \mathcal{P}(Y)$ тогда определяется как возможность включения η в A,

$$P^{\eta}(\eta \in A) \equiv P^{\eta}(A) \triangleq P(A), \qquad A \in \mathcal{P}(Y), \tag{1.1}$$

а значение $f(y)$ — как возможность равенства $\eta = y$

$$f(y) \equiv f^{\eta}(y) \triangleq P^{\eta}(\eta \in \{y\}), \qquad y \in Y. \tag{1.2}$$

Пространство $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$ называется моделью η, функция $f^{\eta}(\cdot) : Y \to [0, 1]$ — рас-

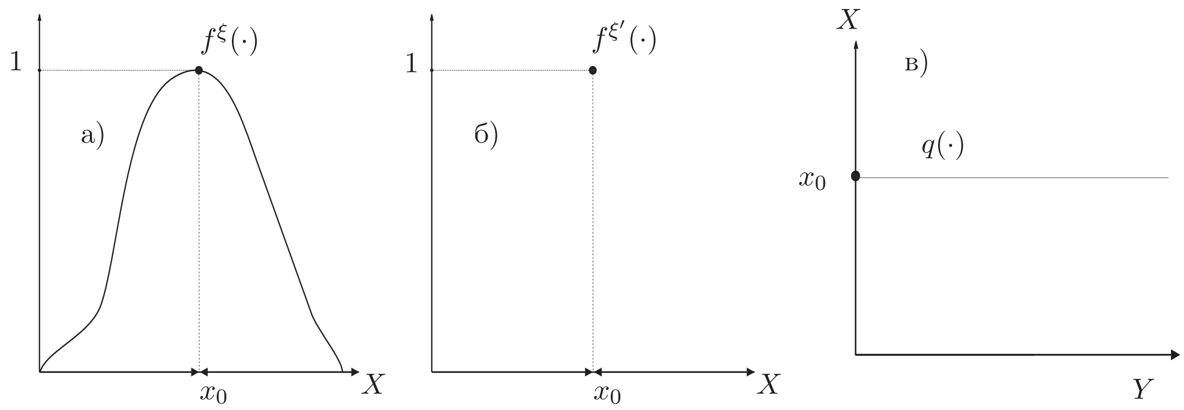


Рис. 1.1. а) График распределения возможностей значений нечеткого элемента $\xi \in X$; б) график распределения возможностей значений четкого элемента $\xi' = x_0 \in X$; в) график функции $q(\cdot)$: $X \to Y$, определяющей четкий элемент $\xi' \in X$.

пределением возможности $P^{\eta}(\cdot)$, или — распределением возможностей значений η (короче — распределением η).

Если X — произвольное множество, то любая функция $q(\cdot) : Y \to X$ определит канонический для пространства $(X, \mathcal{P}(X), P^{\xi})$ нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$, принимающий значения в X, где для любого[1] $A \in \mathcal{P}(X)$ $\quad P^{\xi}(A) \triangleq P^{\xi}(\xi \in A) = P^{\eta}(\eta \in q^{-1}(A))$; $P^{\xi}(X) = 1$. Возможность $P^{\xi}(\cdot)$ определена распределением

$$f^{\xi}(x) \triangleq P^{\xi}(\{\xi = x\}) = P^{\eta}(\eta \in q^{-1}(\{x\})),\ x \in X, \tag{1.3}$$

а именно, $P^{\xi}(A) = \sup\limits_{x \in A} f^{\xi}(x),\ A \in \mathcal{P}(X)$.

Функция $f^{\xi}(\cdot) :\ X \to [0, 1]$ является распределением возможности $P^{\xi}(\cdot)$ и распределением канонического для $(X, \mathcal{P}(X), P^{\xi})$ нечеткого элемента ξ.

На рисунке 1.1 для сравнения приведены график распределения возможностей $f^{\xi}(\cdot)$: $X \to [0,\ 1]$ значений нечеткого элемента $\xi \in X$ (а)), график распределения возможностей $f^{\xi'}(\cdot) : X \to [0,\ 1]$ значений четкого элемента $\xi' = x_0 \in X$ (б)). На рис.1.1 в) представлен график функции $q(\cdot) : Y \to X$, определяющей четкий элемент $\xi' = q(\eta) = x_0 \in X$, $\eta \in Y$.

В [11] введено еще одно фундаментальное понятие — понятие нечеткого множества.

---

[1]) $q^{-1}(A) \triangleq \{y \in Y,\ q(y) \in A\},\ q^{-1}(X) = Y.$

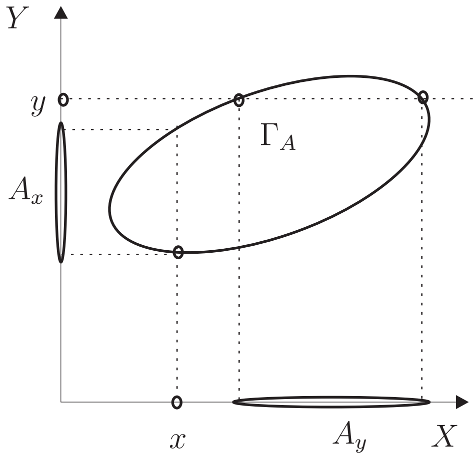


Рис. 1.2. Отображение $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, его график $\Gamma_A \subset Y \times X$ и обратное к $A^{\cdot}$ отображение $A_{\cdot} : X \to \mathcal{P}(Y)$.

Пусть $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in Y$ множество $A^y \in \mathcal{P}(X)$, $A_{\cdot} : X \to \mathcal{P}(Y)$ — многозначное отображение, обратное к $A^{\cdot}$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ множество

$$A_x \triangleq \{y \in Y,\ x \in A^y\},$$

и

$$\Gamma_A \triangleq \{(y, x) \in Y \times X,\ x \in A^y\},$$

множество в $Y \times X$, называемое графиком отображения $A^{\cdot}$, см. рис. 1.2.

Согласно данным определениям для любых $x \in X$ и $y \in Y$ включения $x \in A^y$, $y \in A_x$ и $(y, x) \in \Gamma_A$ эквивалентны.

Пусть $*$ – произвольная бинарная операция над множествами — объединение $\bigcup$, пересечение $\bigcap$, или разность $\setminus$ множеств. Одноименная операция $*$ над многозначными отображениями $A^{\cdot}$ и $B^{\cdot}$ определяется равенством

$$(A * B)^y \triangleq A^y * B^y,\ y \in Y,$$

и, как следствие,

$$(A * B)_x \triangleq A_x * B_x,\ x \in X, \quad \Gamma_{A*B} = \Gamma_A * \Gamma_B.$$

Определение 1.1. Нечетким множеством, определенным на $(Y, \mathcal{P}(Y), P^{\eta})$ и принимающим значения в $\mathcal{P}(X)$, называется образ A^η нечеткого элемента η при отображении $A^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$, график Γ_A отображения $A^\cdot$ называется графиком нечеткого множества A^η. Индикаторной функцией (одноточечного покрытия) A^η называется функция $f^{A^\eta}(x) = P^\eta(x \in A^\eta) \equiv P^\eta(\eta \in A_x)$, $x \in X$, где $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\}$, $x \in X$, — многозначное отображение из X в $\mathcal{P}(Y)$, обратное $A^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$. Значение $f^{A^\eta}(x)$ — возможность покрытия $x \in X$ нечетким множеством A^η.

В диссертации в связи с понятиями нечеткого элемента и нечеткого множества используются понятия независимости нечетких элементов, нечетких элементов и нечетких множеств. Пусть $q_i(\cdot) : Y \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные функции.

Определение 1.2. Нечеткие элементы $\xi_i = q_i(\eta)$, $i = 1, \ldots, n$, со значениями соответственно в X_i, $i = 1, \ldots, n$, называются взаимно независимыми, или — независимыми в совокупности, если для любых $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, возможность системы равенств $\xi_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$f^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \min_{1 \le i \le n} f^{\xi_i}(x_i), \tag{1.4}$$

где

$$f^{\xi_i}(x_i) = \sup\{f^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) | x_1 \in X_1, \ldots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \ldots x_n \in X_n\},\ x_i \in X_i,$$

— маргинальное распределение ξ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Как показано в [12], если нечеткие элементы ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, взаимно независимы и $z_i(\cdot) : X_i \to Z_i$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольные функции, то взаимно независимы и нечеткие элементы $\zeta_i = z_i(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $A_i^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, — многозначные отображения, $q_j(\cdot) : Y \to X'_j$, $j = 1, \ldots, m$, — функции.

Определение 1.3. Нечеткие множества A_i^η, $i = 1, \ldots, n$, и нечеткие элементы $\xi_j = q_j(\eta)$, $j = 1, \ldots, m$, называются

- взаимно независимыми, если для любых множеств $A_i \in \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и $A'_j \in$

$\mathcal{P}(X_j'),\ j=1,\ldots,m,$

$$P^\eta(A_1^\eta{\cap}A_1=\varnothing, A_1^\eta\neq\varnothing; A_2^\eta{\cap}A_2\neq\varnothing;\ldots;A_n^\eta{\cap}A_n=\varnothing, A_n^\eta\neq\varnothing, \xi_1\in A_1^{'},\ldots,\xi_m\in A_m^{'})=$$
$$=\min(P^\eta(A_1^\eta\cap A_1=\varnothing,\ A_1^\eta\neq\varnothing),\ P^\eta(A_2^\eta\cap A_2\neq\varnothing),\ldots,P^\eta(A_n^\eta\cap A_n=\varnothing,\ A_n^\eta\neq\varnothing)),$$
$$P^r(\xi_1\in A_1^{'}),\ldots,P^\eta(\xi\in A_m^{'}))\quad(1.5)$$

при любых комбинациях «$=\varnothing$», «$\neq\varnothing$»;

- взаимно независимы в смысле одноточечного покрытия, если для любых $x_i\in X_i$, $i=1,2,\ldots,n$, и $x_j^{'}\in X_j^{'},\ j=1,\ldots,m$,

$$P^\eta(x_1\in A_1^\eta, x_2\notin A_2^\eta,\ldots,x_n\in A_n^\eta;\xi_1=x_1^{'},\ldots,\xi_m=x_m^{'})=$$
$$\min(f^{A_1^\eta}(x_1), f^{X_2\setminus A_2^\eta}(x_2^{'}),\ldots,f^{A_n^\eta}(x_n), f^{\xi_1}(x_1^{'}),\ldots,f^{\xi_m}(x_m^{'}))\quad(1.6)$$

для любых комбинаций «$\in$» и «$\notin$».

Если нечеткий элемент $\xi=q(\eta)$ и нечеткое множество A^η независимы в смысле одноточечного покрытия, то, как показано в [12], возможность включения $\xi=q(\eta)$ в A^η дается выражением

$$P^\eta(\xi\in A^\eta)=\sup_{x\in X}\min(f^\xi(x), f^{A^\eta}(x)),\tag{1.7}$$

в котором $f^\xi(\cdot)$ определено выражением (1.3).

Поскольку для любого события $A\in\mathcal{P}(Y)$ возможности $P^\eta(A)$ и $P^\eta(Y\setminus A)$ априори связаны лишь условием нормировки $1=P^\eta(Y)=\max(P^\eta(A),P^\eta(Y\setminus A))$, в теории возможностей любое событие $A\in\mathcal{P}(Y)$ охарактеризовано значениями двух мер — возможности $P^\eta(A)$ и дуальной возможности P^η необходимости N^η,

$$N^\eta(A)\triangleq\theta(P^\eta(Y\setminus A)),\quad A\in\mathcal{P}(Y),\tag{1.8}$$

принимающей значения в дуально изоморфной $\mathcal{L}$ шкале $\widetilde{\mathcal{L}}=\theta\mathcal{L}=([0,\,1],\widetilde{\lesseqgtr},\widetilde{+},\widetilde{\bullet})$ с упорядоченностью, обратной естественной, и операциями $\widetilde{+}$ и $\widetilde{\bullet}$, понимаемыми как «min» и «max» соответственно. Здесь и далее $\theta(\cdot):\ [0,1]\to[0,1]$ — произвольная непрерывная, строго монотонно убывающая функция, удовлетворяющая условиям $\theta(0)=1,\ \theta(1)=0,\ a\in[0,1]$. Мера $N^\eta(\cdot):\mathcal{P}(Y)\to[0,1]$ обладает следующими свойствами:

- $N^\eta(A \bigcap B) = \min(N^\eta(A),\ N^\eta(B)),\ A, B \in \mathcal{P}(Y)$ (аддитивность);

- $N^\eta(\bigcap\limits_{j \in J} A_j) = \inf\limits_j N^\eta(A_j),\ A_j \in \mathcal{P}(Y),\ j \in J$ (полная аддитивность);

- $A \subset B \Rightarrow N^\eta(A) \leqslant N^\eta(B)$ (монотонность);

- $N^\eta(\varnothing) = 0,\ N^\eta(X) = 1$ (нормировка);

- $N^\eta(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j \geqslant n} A_j) \geqslant \inf\limits_n \sup\limits_{j \geqslant n} N^\eta(A_j),\ A_j \in \mathcal{P}(Y),\ j \in J$ (полунепрерывность сверху).

Выражение (1.8) определяет необходимость в полном соответствии с аристотелевой семантикой: согласно (1.8) нечто необходимо, если противоположное ему невозможно.

Значения возможности и необходимости связаны следующими неравенствами: для любого $A \in \mathcal{P}(Y)$

$$P^\eta(A) < 1 \Rightarrow N^\eta(A) = 0 \quad \text{и} \quad N^\eta(A) > 0 \Rightarrow P^\eta(A) = 1 \text{ [11]}.$$

Поскольку при решении задач оптимального оценивания, анализа и интерпретации эксперимента исследователь может использовать пару дуально изоморфных шкал $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$, в [13] приведена формулировка принципа относительности возможности для этого случая: если исследователь использует пару дуально изоморфных шкал $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ то они должны преобразовываться одновременно по следующему правилу: $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, где $\widetilde{\gamma} \in \Delta_\gamma \triangleq \{\theta \circ \gamma \circ \theta^{-1},\ \theta \in \Theta\}$, $\gamma \in \Gamma$, и при этом *все определения, модели, выводы и т.п., допускающие содержательное толкование, должны формулироваться одинаково в любой паре шкал* $\gamma\mathcal{L}$, $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{\gamma} \in \Delta_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$.

В монографии [11] фрагментарно рассмотрен еще один вариант теории возможностей, в котором возможность принимает значения в шкале $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \leqslant, +, \bullet)$, где сложение «$+$» определено как «$\max$», умножение «$\bullet$» — как «обычное» умножение «$\cdot$», который далее будем называть вторым вариантом теории возможностей, в отличие от варианта, которому в основном посвящена монография [11], и который далее будет называться первым. В [11] для второго варианта приведены лишь основы теории и закон больших чисел.

Вне рассмотрения остались методы оптимального оценивания, анализа и интерпретации данных, стохастического моделирования и эмпирического построения возможности.

Во втором варианте теории возможностей правила композиции $+ : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ и $\bullet : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ определены следующим образом:

$$a \boldsymbol{+} b \triangleq \max(a,\ b), \quad a \bullet b \triangleq ab,\ a,\ b \in [0,1], \tag{1.9}$$

Они коммутативны, ассоциативны, дистрибутивны: $a \bullet (b \boldsymbol{+} c) = (a \bullet b) \boldsymbol{+} (a \bullet c)$, $a, b, c \in [0,1]$, но, в отличие от взаимной дистрибутивности правил композиции $\boldsymbol{+} \sim \max$, $\bullet \sim \min$, в рассматриваемом случае, вообще говоря, $a \boldsymbol{+} (b \bullet c) \neq (a \boldsymbol{+} b) \bullet (a \boldsymbol{+} c)$. В определенной таким образом шкале $\widehat{\mathfrak{L}} = \big([0,1],\ \le,\ \boldsymbol{+},\ \bullet\big)$ нейтральные элементы суть «ноль» ~ 0, «единица» ~ 1.

Группа $\widehat{\Gamma} = \big\{\widehat{\gamma}(\cdot) \colon [0,1] \to [0,1]\big\}$ изотонных автоморфизмов шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ определяется условиями

$$\begin{matrix} \widehat{\gamma}(a) < \widehat{\gamma}(b) \Leftrightarrow a < b, & \widehat{\gamma}(0) = 0,\ \widehat{\gamma}(1) = 1, \\ \widehat{\gamma}(a \boldsymbol{+} b) = \widehat{\gamma}(a) \boldsymbol{+} \widehat{\gamma}(b), & \widehat{\gamma}(a \bullet b) = \widehat{\gamma}(a) \bullet \widehat{\gamma}(b), \end{matrix} \quad a,\ b \in [0,1]. \tag{1.10}$$

В [11] показано, что группу $\widehat{\Gamma}$ автоморфизмов $\widehat{\mathfrak{L}}$ образуют все преобразования $a \to a^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $a \in [0,1]$, то есть в рассматриваемом варианте теории возможностей, как и в первом варианте, численные значения возможности не важны, но в отличие от первого варианта, шкала $\widehat{\mathfrak{L}}$ *имеет (максимальный) инвариант* $I(a,b) = \ln a / \ln b$, $a,\ b \in [0,1]$, *значения которого не изменяются при преобразованиях* $a \to a^{\alpha}$, $b \to b^{\alpha}$, а условие $I(a,b) = \alpha \ge 0$, $a, b \in [0,1]$, влечет равенство $a = b^{\alpha}, a, b \in [0,1]$.

Дуально изоморфная $\widehat{\mathfrak{L}}$ шкала $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}} = ([0,\ 1], \widetilde{\lessgtr}, \widetilde{+}, \widetilde{\bullet})$ значений необходимости получается преобразованием $\theta : \widehat{\mathfrak{L}} \to \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, $\theta \in \Theta$, где Θ — класс строго монотонно убывающих функций $\theta(\cdot) : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, при этом

$$a \le b \Leftrightarrow \theta(a) \ge \theta(b) \Leftrightarrow \theta(a) \widetilde{\le} \theta(b),$$

$$a \widetilde{+} b \triangleq \theta^{-1}\big((\theta(a)) + (\theta(b))\big) = \min(a,\ b),\ a,\ b \in [0,1], \tag{*}$$

$$\theta(a \widetilde{\bullet} b) = \theta(a + b - ab) = \theta(a)\theta(b),\ a, b \in [0,\ 1],\ \theta \in \Theta. \tag{**}$$

Условие (*) выполняется при любом $\theta \in \Theta$.

Определим функцию θ из соотношения (**), согласно которому дуальной умножению в шкале $\widehat{\mathfrak{L}}$ в шкале $\widetilde{\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}}$ является операция сложения в шкале значений вероятности [11]. Дифференцируя его по a и полагая $a = 0$, получим задачу Коши для определения функции $\theta(\cdot) : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$

$$(1-b)\theta'(b) = \theta'(0)\theta(b),\ b \in (0,1),\ \theta(0) = 1.$$

Ее решение

$$\theta(b) = (1-b)^{\alpha},\ b \in [0,\, 1], \tag{1.11}$$

где $\alpha = -\theta'(0) > 0$, удовлетворяет граничным условиям $\theta(1) = 0,\ \theta(0) = 1$; соответственно $\theta^{-1}(b) = 1 - b^{1/\alpha},\ b \in [0,\, 1]$.

В первом параграфе второй главы «Стохастическая модель и эмпирическое построение возможности, принимающей значения в шкале $\widehat{\mathfrak{L}} = ([0,\, 1], \leqslant, \max, \cdot)$» для этого варианта возможности сформулирован принцип относительности: если исследователь использует пару дуально изоморфных шкал $\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}} = \theta\widehat{\mathfrak{L}}$, $\theta \in \widehat{\Theta} = \{\theta(a) = e^{-\ln|a|^{-\alpha}},\ \alpha > 0,\ a \in [0,\, 1]\}$, то они должны преобразовываться одновременно по следующему правилу: $\widehat{\mathfrak{L}} \to \widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}} \to \widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}}$, где $\widetilde{\widehat{\gamma}} \in \Delta_{\widehat{\gamma}} \triangleq \{\theta \circ \widehat{\gamma} \circ \theta^{-1},\ \theta \in \widehat{\Theta}\}$, $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$, и при этом *все определения, модели, выводы и т.п., допускающие содержательное толкование, должны формулироваться одинаково в любой паре шкал* $\widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}}$., $\widetilde{\widehat{\gamma}} \in \Delta_{\widehat{\gamma}}$, $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$. Новый результат состоит в определении специфического класса функций $\widehat{\Theta}$.

Во втором параграфе второй главы на основе принципа относительности построена стохастическая модель второго варианта возможности. Как показано в [1], на основе стохастической модели первого варианта возможности можно эмпирически восстанавливать теоретико-возможностную модель стохастического объекта, при этом его теоретико-вероятностная модель в течение времени наблюдений может произвольно эволюционировать в пределах одного из известных классов, в то время как при эмпирическом построении его теоретико-вероятностной модели последняя, как известно, должна быть неизменна в течение всего времени наблюдений. Более того, при достаточно слабых ограничениях на характер эволюции вероятностей теоретико-возможностная модель может быть построена почти наверное безошибочно на основании конечного числа наблюдений, тогда как теоретико-вероятностная модель такого стохастического объекта эмпирически не может быть построена принципиально.

Как показано в третьем параграфе этой главы, в отличие от первого варианта, во втором варианте теории возможностей на основании *конечного* числа наблюдений взаимно независимых результатов стохастического эксперимента можно безошибочно восстановить не неприводимую теоретико-возможностную модель, а лишь определенное семейство таких моделей. В этом смысле второй вариант теории возможностей существенно «ближе» к теории вероятностей по сравнению с первым. В этом параграфе также показано, что на основе эмпирически восстанавливаемого семейства теоретико-возможностных моделей можно эффективно решать задачу оценивания нечеткого элемента.

В основе второго варианта теории возможностей лежит конструкция линейного счетно-аддитивного относительно операций (1.9) интеграла $p(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$, определенного на классе $\widehat{\mathcal{L}}(X)$ всех функций $f(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$, принимающего значения в $\widehat{\mathcal{L}}$,

$$\begin{gathered} p((a \bullet f)(\cdot) \boldsymbol{+} (b \bullet g)(\cdot)) = (a \bullet p(f(\cdot))) \boldsymbol{+} (b \bullet p(g(\cdot))), \\ a, b \in [0,1],\ f(\cdot),\, g(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \\ p\left(\left(\underset{j\in J}{\boldsymbol{+}} f_j\right)(\cdot)\right) = \underset{j\in J}{\boldsymbol{+}} p(f_j(\cdot)),\ \{f_j(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X),\ j \in J. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Если, в частности, $p(f(\cdot)) = p_h(f(\cdot)) \triangleq \sup\limits_{x\in X}(h(x)f(x)),\ \sup\limits_{x\in X} h(x) = 1$, то

$$\begin{aligned} &p_h(af(\cdot) \boldsymbol{+} bg(\cdot)) = ap_h(f(\cdot)) \boldsymbol{+} bp_h(g(\cdot)),\ a, b \in [0,1], \\ &p_h(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\boldsymbol{+}}} f_n(\cdot)) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\boldsymbol{+}}} p_h(f_n(\cdot)). \end{aligned}$$

В (1.12) $\widehat{\mathcal{L}}(X)$ — класс функций, замкнутый относительно операций «$\boldsymbol{+}$», «$\bullet$», «$\boldsymbol{+}_1^\infty$» и «θ», согласованных с операциями (1.9): $f(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X) \Rightarrow \theta \circ f(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X),\ f(\cdot), g(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X) \Rightarrow (f \boldsymbol{+} g)(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X),\ (f \bullet g)(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X),\ \{f_n(\cdot)\} \subset \widehat{\mathcal{L}}(X) \Rightarrow (\sup\limits_n f_n)(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$, где $(f \boldsymbol{+} g)(x) = f(x) \boldsymbol{+} g(x),\ (f \bullet g)(x) \triangleq f(x) \bullet g(x),\ (\theta \circ f)(x) \triangleq \theta f(x),\ x \in X$, и вместе с каждой функцией $f(\cdot)$ содержащий функцию $af(\cdot)\colon (af)(x) = af(x),\ x \in X,\ a \in [0,1]$.

Так как $\theta \max(\theta \circ f(x),\, \theta \circ g(x)) = \min(f(x),\, g(x)),\ x \in X$, то из $\{f_n(\cdot)\} \subset \mathcal{L}(X)$ следует, что и $\left(\inf\limits_n f_n\right)(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$, $\limsup\limits_n f_n(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$, $\liminf\limits_n f_n(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс подмножеств X, $\widehat{\mathfrak{L}}(X)$ — минимальный класс, содержащий «кусочно-постоянные» функции

$$\mathop{\boldsymbol{+}}_{j=1}^{n}\Big(c_j\cdot\chi_{A_j}(x)\Big)=\max_{1\le j\le n}\Big(c_j\cdot\chi_{A_j}(x)\Big),\ x\in X,\quad A_j\in\mathcal{A},\ A_i\cap A_j=\varnothing,$$

$$i\neq j,\ i,\ j=1,\ldots,n,\ n=1,2,\ldots.$$

Поскольку для $c\in[0,1]$ $\min(c,\chi_A(x))=c\dot{\chi}_A(x)$ и $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)$, $x\in X$, нетрудно показать, что последовательности

$$\underline{f}_n(x)=\mathop{+}_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^{(n)}\chi_{A_k}^{(n)}(x)),\ n=1,2,\ldots,\ x\in X,$$
$$\bar{f}_n(x)=\mathop{+}_{k=1}^{\infty}(\alpha_{k-1}^{(n)}\chi_{A_k}^{(n)}(x)),\ n=1,2,\ldots,\ x\in X \tag{1.13}$$

равномерно сходятся к $f(x)$, $x\in X$, если $A_1^{(n)}=\{x\in X,\ a_1^{(n)}\le f(x)\le a_0^{(n)}\}$, $A_k^{(n)}=\{x\in X,\ a_k^{(n)}\le f(x)<a_{k-1}^{(n)}\}$, $k=2,3,\ldots,n$, $1=a_0^{(n)}>a_1^{(n)}>\ldots>a_n^{(n)}=0$, и $\varepsilon^{(n)}=\max\limits_{1\le k\le n}\left(a_{k-1}^{(n)}-a_k^{(n)}\right)\to 0$ при $n\to\infty$. При этих условиях $\sup\limits_{x\in X}\big(f(x)-\underline{f}_n(x)\big)\le\varepsilon^{(n)}$, $\sup\limits_{x\in X}\big(\overline{f}_n(x)-f(x)\big)\le\varepsilon^{(n)}$. Для интеграла $p(\cdot)$ справедлива теорема 1.1 [11], сформулированная в терминах операций сложений и умножения (1.9), а именно, интеграл $p(\cdot)$ монотонно неубывает, непрерывен относительно сходимости монотонно неубывающей последовательности, полунепрерывен снизу, непрерывен в точке $f(\cdot)=1(\cdot)$, $1(x)=1$, $x\in X$; для возможности

$$P(A)=p(\chi_A(\cdot)),\ A\in\mathcal{A}, \tag{1.14}$$

справедлива теорема 2.1 [11], а именно, возможность $P(A)$ полунепрерывна снизу, непрерывна относительно сходимости монотонно неубывающей последовательности событий, непрерывна при $A=X$. При этом

$$P(A\cup B)=P(A)\boldsymbol{+}P(B),\ A,B\in\mathcal{A},\ P(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)=\mathop{\boldsymbol{+}}_{j=1}^{\infty}P(A_j),A_j\in\mathcal{A},\ j=1,2,\ldots \tag{1.15}$$

Если $h(\cdot)\in\widehat{\mathfrak{L}}(X)$, $\sup\limits_{x\in X}h(x)=1$, то $P_h(A)=\sup\limits_{x\in A}h(x)$ — возможность $A\in\mathcal{A}$, $h(\cdot)$ — ее распределение.

Интеграл $p(\cdot):\widehat{\mathfrak{L}}\to\widehat{\mathfrak{L}}(X)$ можно представить как интеграл Лебега по возможности

$P(\cdot)$, определенной равенством (1.14).

Для любой функции $f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$ $\mathop{+}\limits_{k=1}^{n}(a_k^{(n)}\chi_{A_k^{(n)}}(x)) \triangleq \underline{f}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{f}_n(x) \triangleq \mathop{+}\limits_{k=1}^{n}(a_{k-1}^{(n)}$ $\chi_{A_k^{(n)}}(x))$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и вследствие линейности и монотонности $p(\cdot)$

$$\mathop{+}\limits_{k=1}^{n}(a_k^{(n)}P(A_k^{(n)}) = p(\underline{f}_n(\cdot)) \leq p(f(\cdot)) \leq p(\overline{f}_n(\cdot)) = \mathop{+}\limits_{k=1}^{n}(a_{k-1}^{(n)}P(A_k^{(n)})), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.16}$$

где левое и правое выражения называются лебеговскими P-интегральными суммами функции $f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}$.

Определение 1.4. Функция $f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$ называется P-интегрируемой на X по Лебегу, если для любой последовательности разбиений $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k^{(n)}, n = 1, 2, \ldots$, порожденной последовательностью $1 = a_0^{(n)} > a_1^{(n)} >, \ldots > a_n^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon^{(n)} = \max\limits_{1 \leq k \leq n}(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, левая и правая части (1.16) стремятся к одному пределу. Этот предел называется интегралом Лебега функции $f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$ по возможности $P(\cdot)$ (P-интегралом Лебега).

Теорема 1.1. *Любая функция* $f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$ P*-интегрируема по Лебегу.*

Доказательство. Действительно, для любых $x, y, z \geqslant 0$ $(x+y)z = xz+yz$, поэтому $a_{k-1}^{(n)}P(A_k)^{(n)} = a_k^{(n)}P(A_k)^{(n)} + (a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)})P(A_k)^{(n)}$, и $0 \leqslant \max\limits_{1 \leq k \leq n}(a_{k-1}^{(n)}\ P(A_k^{(n)})) - \max\limits_{1 \leq k \leq n}(a_k^{(n)}$ $P(A_k^{(n)})) \leqslant \max\limits_{1 \leq k \leq n}(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)})\ P(A_k^{(n)})) \leqslant \varepsilon^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Таким образом между функциями $p(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$, и $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, установлено взаимно однозначное соответствие: $p(f(\cdot))$ есть интеграл Лебега функции $f(\cdot)$ по $P(\cdot)$, $P(A) = p(\chi_A(\cdot))$, $\chi_A(\cdot)$ — и.ф. $A \in \mathcal{A}$.

Возможность $P(\cdot)$ может быть продолжена на класс $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X, а интеграл $p(\cdot)$ — на класс $\overline{\widehat{\mathfrak{L}}}(X)$ всех функций $f(\cdot)\colon X \to [0, 1]$, по схеме, рассмотренной в §§9—11 [11]. При этом продолженная на $\mathcal{P}(X)$ возможность $\overline{P}(\cdot)$ определится распределением $h(x) \triangleq \overline{P}(\{x\})$, $x \in X$, $\overline{P}(A) = \sup\limits_{x \in A} h(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, а $\overline{p}(f(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X}\big(f(x)h(x)\big)$ для любой функции $f(\cdot)\colon X \to [0, 1]$.

Так как интеграл $\overline{p}(\cdot) : \overline{\widehat{\mathfrak{L}}}(X) \to [0, 1]$ линеен и вполне аддитивен, т.е.

$$\overline{p}(\alpha \cdot f(\cdot)) = \alpha\overline{p}(f(\cdot)),\ \alpha \in [0, 1],\ f(\cdot) \in \overline{\mathfrak{L}}(X),\ \overline{p}(\mathop{+}\limits_{j \in J} f_j(\cdot)) = \mathop{+}\limits_{j \in J}\overline{p}(f_j(\cdot)), \tag{1.17}$$

где $f_j(\cdot)$, $j \in J$, — произвольное семейство функций из $\overline{\overline{\mathcal{L}}}(X)$, а любая функция $f(\cdot) \in \overline{\overline{\mathcal{L}}}(X)$ может быть представлена равенством

$$f(x) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} (\alpha \chi_\alpha(x)) \equiv \underset{\alpha \in [0,1]}{+} (\alpha \chi_\alpha(x)), x \in X,$$

где $\chi_\alpha(\cdot)$ — и.ф. множества $A_\alpha = \{x \in X, f(x) = \alpha\}$, то согласно (1.17) $\overline{p}(f(\cdot)) = \overline{p}(\underset{\alpha \in [0,1]}{+}(\alpha \chi_\alpha(\cdot))) = \underset{\alpha \in [0,1]}{+}(\alpha P(A_\alpha))$ — P-интеграл Лебега.

Дуальный $p(\cdot)$ интеграл $n(\cdot)$ задан равенством

$$n(f(\cdot)) = \theta p(\theta^{-1} \circ f(\cdot)),\ f \in \widetilde{\mathcal{L}}(X),$$

согласно которому $n(\cdot)$ — линейный счетно-аддитивный интеграл со значениями в $\widetilde{\mathcal{L}}$, если считать, что

$$(f \,\widetilde{+}\, g)(x) = \min(f(x),\, g(x)),$$

и $(f \,\widetilde{\bullet}\, g)(\cdot) = \theta^{-1} \circ [(\theta \circ f) \bullet (\theta \circ g)](\cdot)$. Класс $\widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}(X) = \left\{\theta \circ f(\cdot),\ f(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)\right\}$ функций $\theta \circ f(\cdot)\colon X \to \widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}$, дуальный $\widehat{\mathcal{L}}(X) = \left\{\theta \circ f(\cdot),\ f(\cdot) \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)\right\}$, наделен упорядоченностью $\widetilde{\le}$: $f(\cdot) \,\widetilde{\le}\, g(\cdot) \Leftrightarrow f(\cdot) \geqslant g(\cdot)$, и двумя правилами композиции $\widetilde{+}$ и $\widetilde{\bullet}$: $(f \,\widetilde{+}\, g)(x) \triangleq f(x) \,\widetilde{+}\, g(x), (f \,\widetilde{\bullet}\, g)(x) \triangleq f(x) \,\widetilde{\bullet}\, g(x)$, $\quad x \in X$, согласованными с одноименными правилами композиции в $\widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}$. Если $\theta a = (1-a)^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$, то

$$(f \,\widetilde{\bullet}\, g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x),$$

$$c \,\widetilde{\bullet}\, f(x) = c + f(x) - cf(x),\ x \in X, c \in [0,1], \alpha \in (0,\infty).$$

Соответственно

$$N(A) \triangleq n(\chi_A(\cdot)) = \theta(p(\theta^{-1} \circ \chi_A(\cdot))) = \theta(P(X \backslash A)).$$

Для интегралов $n(\cdot)$ и $N(\cdot)$ справедливы теоремы 4.1 и 4.2 [11]. Так как $1 = P(X) = \max(P(A),\, P(X \setminus A))$, то $P(A) < 1 \Rightarrow P(X \setminus A) = 1 \Leftrightarrow N(A) = 0$; $N(A) > 0 \Leftrightarrow P(X \setminus A) < 1 \Rightarrow P(A) = 1$.

Понятия независимости и условной возможности становятся теперь несколько ближе к теоретико-вероятностным. А именно, теперь события A и B объявляются P-независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A) \bullet P(B). \tag{1.18}$$

В этом случае значения $P(A)$ и $P(B)$ согласно (1.15) и (1.18) определяют значения $P(A\cup B)$ и $P(A\cap B)$.

Соответственно события A и B объявляются N-независимыми, если

$$N(A\cup B) \triangleq N(A)\tilde{\bullet} N(B) = N(A)+N(B)-N(A)N(B). \tag{1.19}$$

А так как $N(A\cap B) = \min(N(A), N(B)) \triangleq N(A)\widetilde{+} N(B)$, то в случае N-независимости A и B значения $N(A)$и $N(B)$ определяют значения $N(A\cup B)$ и $N(A\cap B)$.

Условие (1.19) N-независимости A и B эквивалентно P-независимости $X\setminus A$ и $X\setminus B$ $P(X\backslash(A\cup B)) \equiv P((X\backslash A)\cap(X\backslash B)) = P(X\backslash A)P(X\backslash B)$.

Условная возможность $P(A|B)$ события A при условии B определяется как решение уравнения: $P(A|B)P(B) = P(A\cap B), A, B\in\mathcal{A}$, т.е.

$$P(A|B) = \begin{cases} P(A\cap B)/P(B), & \text{если } P(B)>0,\\ \text{любое число из } [0,1], & \text{если } P(B)=0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Но если $P(B)=0$, то и $P(A\cap B)=0$, и, следовательно, $P(A)P(B) = P(A\cap B)$, то есть A и B P-независимы.

Соответственно для определения условной необходимости найдем

$$N(A|B) = \begin{cases} \frac{N(A\cup B)-N(B)}{1-N(B)}, & \text{если } N(B)<1,\\ \text{любое число из } [0,1], & \text{если } N(B)=1. \end{cases}$$

Условная необходимость, дуальная условной возможности (1.20)

$$N(A|X\backslash B) = \begin{cases} \frac{N(A)\cup(X\backslash B))-N(X\backslash B)}{1-N(X\backslash B)}, & \text{если } N(X\backslash B)<1,\\ \text{любое число из } [0,\ 1], & \text{если } N(X\backslash B)=1, \end{cases} \tag{1.21}$$

§ 2. Основные понятия неопределенной нечеткой математики

При построении нечетких моделей всегда остается неясность, связанная с неполнотой знания модели, и формально исследователь вынужден это обстоятельство игнорировать. В [12] разработана теория неопределенного нечеткого моделирования, содержащая формальные средства, позволяющие учитывать мнение исследователя об адекватности используемой модели. В этом параграфе приведены общие сведения по неопределенному нечеткому моделированию, используемые в диссертации.

Одним из фундаментальных в [12] является понятие неопределенного нечеткого (НН) элемента, который при неопределенном нечетком моделировании играет такую же роль, какую играет случайный элемент при стохастическом моделировании и нечеткий элемент при нечетком моделировании.

Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}), \mathrm{P}l^{\widetilde{u}}(\cdot))$ — *пространство с правдоподобием* [12], состоящее из множества $\mathcal{U}$ элементарных высказываний, σ-алгебры $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ всех подмножеств (высказываний), и функции $\mathrm{P}l^{\widetilde{u}}(\cdot) : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to [0,\, 1]$, называемой мерой правдоподобия. Аналогично возможности $\mathrm{P}^{\eta}(\cdot)$, правдоподобие $\mathrm{P}l^{\widetilde{u}}(\cdot)$ определяется распределением правдоподобий $g^{\widetilde{u}}(\cdot) : \mathcal{U} \to [0,\, 1]$ значений канонического для $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}), \mathrm{P}l^{\widetilde{u}}(\cdot))$ неопределенного элемента $\widetilde{u} : (\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U})) \to \mathcal{U}$

$$\mathrm{P}l^{\widetilde{u}}(A) \triangleq \mathrm{P}l^{\widetilde{u}}(\widetilde{u} \in A) = \sup_{u \in A} g^{\widetilde{u}}(u),\ A \in \mathcal{P}(\mathcal{U}),$$

и обладает такими же свойствами: счетной аддитивностью и полунепрерывностью снизу относительно операций $+ \sim \max$ и $\bullet \sim \min$.

Определение 2.1 ([12]). Неопределенным нечетким (НН) элементом, принимающим значения в X, называется образ $\widetilde{\xi} \triangleq q(\eta, \widetilde{u})$ (упорядоченной) пары $(\eta, \widetilde{u})$ — нечеткого η и неопределенного $\widetilde{u}$ элементов при отображении $q(\cdot, \cdot) : Y \times \mathcal{U} \to X$.

Функция $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) = p) = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \;\middle|\; u \in \mathcal{U},\ f^{\xi_u}(x) = p\right\},\ x \in X,\ p \in [0,\, 1]$, называется распределением правдоподобия возможностей значений НН элемента $\widetilde{\xi}$, или короче - распределением $\widetilde{\xi}$. Ее значение $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$ определяет правдоподобие истинности «элементарного» высказывания, согласно которому p — возможность равенства $\widetilde{\xi} = x \in X$.

На рисунках 1.3, 1.4 для сравнения представлены графики распределений правдоподобия возможностей определенного нечеткого (ОН) элемента $\widetilde{\xi}' \in X$ (рис. 1.3, а)), распределение которого задано выражением $\tau_x^{\widetilde{\xi}'}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f(x), \\ 0, & \text{если } p \neq f(x), \end{cases}$ $x \in X,\ p \in [0,\, 1]$, согласно которому вполне правдоподобно только распределение $f(\cdot) : X \to [0,\, 1]$ возможностей его значений, любые другие — вполне неправдоподобны, и НН элемента $\widetilde{\xi} \in X$ (рис. 1.4, а)), и графики сечений их распределений при разных значениях правдоподобия. Для ОН элемента вполне неправдоподобна любая возможность $p \neq f(x)$ равенства $\widetilde{\xi}' = x$ (рис. 1.3, б)), вполне правдоподобна возможность $p = f(x)$ равенства $\widetilde{\xi}' = x$, $x \in X$, (рис. 1.3, г)), где $f(\cdot) : X \to [0, 1]$ — заданная функция, и не существует сомнительно правдоподобных возможностей этого равенства (рис. 1.3, в)). Для НН элемента вполне неправдоподобна любая возможность $p \in [0, 1]$ равенства $\widetilde{\xi} = x$ такая, что пара (x, p) принадлежит заштрихованной области (рис. 1.4, б)), существует множество сомнительно правдоподобных (рис. 1.4, в)) и вполне правдоподобных (рис. 1.4, г)) возможностей $p \in [0, 1]$ равенства $\widetilde{\xi} = x$, $x \in X$.

Правдоподобия высказываний, согласно которым возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ не меньше или соответственно не больше p, выражаются через правдоподобия «элементарных» высказываний следующим образом:

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) = \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) \geqslant p) = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \mid u \in \mathcal{U},\ f^{\xi_u}(x) \geqslant p\right\} = \sup_{a \geqslant p} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(a),$$

$$\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) = \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) \leqslant p) = \sup\left\{g^{\widetilde{u}}(u) \mid u \in \mathcal{U},\ f^{\xi_u}(x) \leqslant p\right\} = \sup_{a \leqslant p} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(a),\ x \in X.$$

В [12] введено понятие неопределенного нечеткого (НН) множества, а также понятия независимости НН элементов, НН элементов и НН множеств, которые использованы в диссертации.

Пусть как при определении НН элемента $(Y, \mathcal{P}(Y), P^\eta)$ и $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}), \mathrm{P}l^{\widetilde{u}})$ — базовые пространства, $f^\eta(\cdot) :\ Y \to [0, 1]$ и $g^{\widetilde{u}}(\cdot) :\ \mathcal{U} \to [0, 1]$ — распределения мер возможности P^η и правдоподобия $\mathrm{P}l^{\widetilde{u}}$ и $Q(\cdot, \cdot) :\ Y \times \mathcal{U} \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение $Y \times \mathcal{U}$ в множество $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X.

О п р е д е л е н и е 2.2. Неопределенным нечетким (НН) множеством называется образ $\widetilde{A} = Q(\eta, \widetilde{u})$ нечеткого η и неопределенного $\widetilde{u}$ элементов, канонических соответственно для $(Y, \mathcal{P}(Y), P^\eta)$ и $(\mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{U}), \mathrm{P}l^{\widetilde{u}})$, при отображении $Q(\cdot, \cdot) :\ Y \times \mathcal{U} \to \mathcal{P}(X)$.

При фиксированном $\widetilde{u} = u$ $A_u = Q(\eta, u) = Q(\eta, \widetilde{u})|_{\widetilde{u}=u}$ — нечеткое множество, значе-

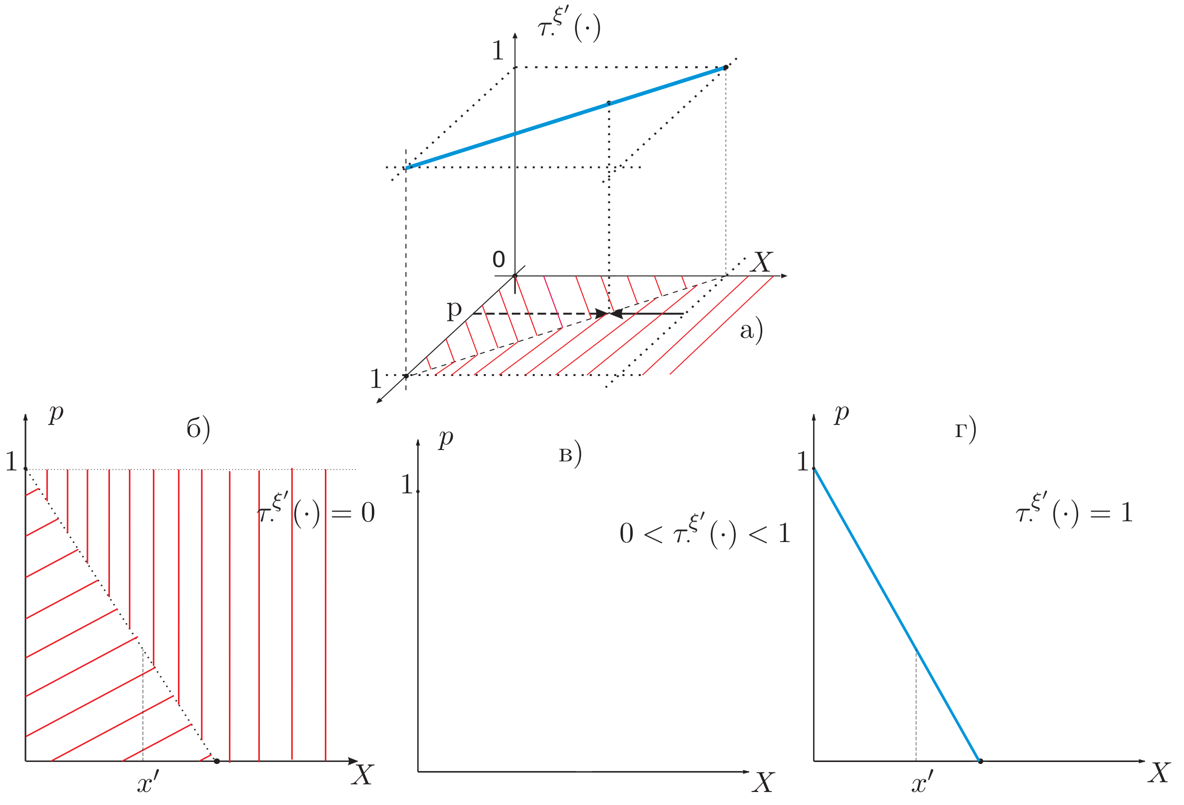


Рис. 1.3. а) График распределения правдоподобия возможностей $\tau_x^{\widetilde{\xi}'}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = f(x), \\ 0, & \text{если } p \neq f(x), \end{cases}$ $x \in X$, $p \in [0,\, 1]$, определенного нечеткого элемента $\widetilde{\xi}' \in X$; б) график сечения поверхности $\tau_x^{\widetilde{\xi}'}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\, 1]$, при $\tau_\cdot^{\widetilde{\xi}'}(\cdot) = 0$; в) график сечения поверхности $\tau_x^{\widetilde{\xi}'}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\, 1]$, при $0 < \tau_\cdot^{\widetilde{\xi}'}(\cdot) < 1$; г) график сечения поверхности $\tau_x^{\widetilde{\xi}'}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\, 1]$, при $\tau_\cdot^{\widetilde{\xi}'}(\cdot) = 1$.

ние $u \in \mathfrak{U}$ определяет его модель; при фиксированном $\eta = y$ $\widetilde{A}_y = Q(y,\, \widetilde{u}) = Q(\eta,\, \widetilde{u})|_{\eta = y}$ — неопределенное множество, значение $y \in Y$ определяет его модель.

Пусть $x \in X$ и $\widetilde{u} = u \in \mathfrak{U}$. Тогда индикаторная функция A_u $P^\eta(x \in Q(\eta,\, u)) = \sup\{f^\eta(y)|\ y \in Y,\, x \in Q(y,\, u)\} = f^{A_u}(x)$ — возможность покрытия $x \in X$ нечетким множеством A_u, и

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{u}}(P(x \in Q(\eta,\, \widetilde{u})) = p) = \sup\{g^{\widetilde{u}}(u)|\ u \in \mathfrak{U},\ f^{A_u}(x) = p\} = \tau_x^{\widetilde{A}}(p), \quad p \in [0,\, 1],\ x \in X. \tag{2.1}$$

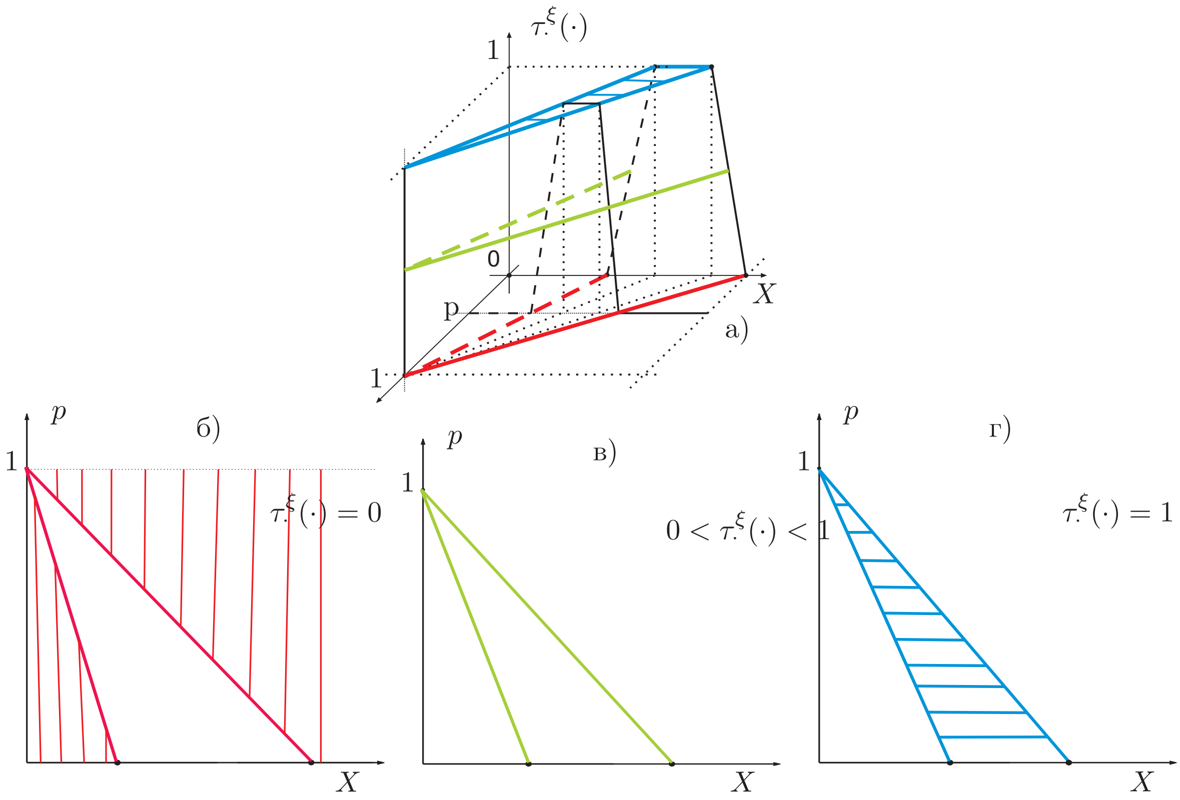


Рис. 1.4. а) График распределения правдоподобия возможностей $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\,1]$, неопределенного нечеткого элемента $\widetilde{\xi} \in X$; б) график сечения поверхности $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\,1]$, при $\tau_\cdot^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = 0$; в) график сечения поверхности $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\,1]$, при $0 < \tau_\cdot^{\widetilde{\xi}}(\cdot) < 1$; г) график сечения поверхности $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\,1]$, при $\tau_\cdot^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = 1$.

Функция $\tau_\cdot^{\widetilde{A}}(\cdot) : X \times [0,1] \to [0,1]$ *называется индикаторной функцией (одноточечного покрытия)* НН *множества* $\widetilde{A}$, *ее значение* $\tau_x^{\widetilde{A}}(p)$ *есть правдоподобие истинности высказывания, согласно которому возможность покрытия* $x \in X$ *НН множеством* $\widetilde{A}$ *равна* $p \in [0,\,1]$.

Рассмотрим пару НН элементов $\widetilde{\xi}_i = q_i(\eta_i,\, \widetilde{u}_i)$, $i = 1,\,2$. Пусть как нечеткие элементы η_1 и η_2, так и неопределенные элементы $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{u}_2$, независимы, т.е. пусть

$$\begin{gathered} f^{\eta_1,\,\eta_2}(y_1,\,y_2) = \min(f^{\eta_1}(y_1),\, f^{\eta_2}(y_2)),\ y_1 \in Y_1,\, y_2 \in Y_2, \\ g^{\widetilde{u}_1,\,\widetilde{u}_2}(u_1,\,u_2) = \min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\, g^{\widetilde{u}_2}(u_2)),\ u_1 \in \mathfrak{U}_1,\, u_2 \in \mathfrak{U}_2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Определение 2.3. Если выполнены условия (2.2), то НН элементы $\widetilde{\xi}_1 = q_1(\eta_1, \widetilde{u}_1)$ и

$\widetilde{\xi}_2 = q_2(\eta_2, \widetilde{u}_2)$ называются независимыми (при любых функциях $q_1(\cdot,\,\cdot) : Y_1 \times \mathcal{U}_1 \to X_1$ и $q_2(\cdot,\,\cdot) : Y_2 \times \mathcal{U}_2 \to X_2$).

В случае независимых НН элементов $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ правдоподобия истинности высказываний $P(\widetilde{\xi}_1 = x_1$ и $\widetilde{\xi}_2 = x_2) = p$ и $P(\widetilde{\xi}_1 = x_1$ или $\widetilde{\xi}_2 = x_2) = p$ могут быть выражены через правдоподобия истинности элементарных высказываний относительно НН элементов $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\xi}_2$ [12]:

$$\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1 \text{ и } \widetilde{\xi}_2 = x_2) = p) = (\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \wedge \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p), \tag{2.3}$$

$$\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1 \text{ или } \widetilde{\xi}_2 = x_2) = p) = (\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \vee \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p), \tag{2.4}$$

где

$$(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \wedge \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(a_1),\ \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(a_2)) |\ a_1, a_2 \in [0,1],\ \min(a_1, a_2) = p\}, \tag{2.5}$$

$$(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1} \vee \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2})(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(a_1),\ \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(a_2)) |\ a_1, a_2 \in [0,1],\ \max(a_1, a_2) = p\}, \tag{2.6}$$

$$\tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i}(p) = \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi}_i = x_i) = p),\ i = 1, 2;\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ p \in [0,1].$$

Пусть $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n$ — НН элементы, принимающие значения в $X_1, \ldots, X_n$, $\tau_{x_1,\ldots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}(p)$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\,1]$, — распределение правдоподобия возможностей их значений, $\tau_{x_1,\ldots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n = x_n) = p)$ — правдоподобие возможности p системы равенств $\widetilde{\xi}_1 = x_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n = x_n$.

Определение 2.4. НН элементы $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n$ называются взаимно независимыми (в широком смысле), если

$$\tau_{x_1,\ldots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n *}(p) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i *}(p),$$

$$\tau_{x_1,\ldots,x_n *}^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}(p) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \tau_{x_i *}^{\widetilde{\xi}_i}(p),\ x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\,1]. \tag{2.7}$$

Здесь

$$\tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i}(p) = \Big(\bigvee_{\substack{x_s \in X_s, \\ s = 1, \ldots, n, \\ s \neq i}} \tau_{x_1,\ldots,x_n}^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}\Big)(p),\ x_i \in X_i,\ p \in [0,\,1], \tag{2.8}$$

— маргинальное распределение $\widetilde{\xi}_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Определение 2.5. Вариантом условного (в широком смысле) распределения правдоподобия возможностей значений НН элементов $\xi_1, \ldots, \widetilde{\xi}_k$ при условии $\widetilde{\xi}_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \widetilde{\xi}_n =$

x_n называется любое решение $\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\,\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n*}_{x_1,\ldots,x_k|\,x_{k+1},\ldots,x_n}(p)$, $\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\,\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_k|\,x_{k+1},\ldots,x_n*}(p)$ уравнений

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n*}_{x_1,\ldots,x_n}(p) = \min\bigl(\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\,\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n*}_{x_1,\ldots,x_k|\,x_{k+1},\ldots,x_n}(p),\ \tau^{\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n*}_{x_{k+1},\ldots,x_n}(p)\bigr), \tag{2.9}$$

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_n*}(p) = \max\bigl(\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\,\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_k|\,x_{k+1},\ldots,x_n*}(p),\ \tau^{\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_{k+1},\ldots,x_n*}(p)\bigr), \tag{2.10}$$

$$x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\,1],$$

где

$$\tau^{\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_{k+1},\ldots,x_n}(p) = \Bigl(\bigvee_{\substack{x_1\in X_1,\ldots,\\ x_k\in X_k}} \tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_n}\Bigr)(p),\ x_{k+1} \in X_{k+1}, \ldots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\,1], \tag{2.11}$$

— маргинальное распределение $\widetilde{\xi}_{k+1}, \ldots, \widetilde{\xi}_n$;

$$\tau^{\widetilde{\xi}_1,\ldots,\widetilde{\xi}_k|\,\widetilde{\xi}_{k+1},\ldots,\widetilde{\xi}_n}_{x_1,\ldots,x_k|\,x_{k+1},\ldots,x_n}(p) = \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi}_1 = x_1, \ldots, \widetilde{\xi}_k = x_k|\ \widetilde{\xi}_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \widetilde{\xi}_n = x_n) = p), \tag{2.12}$$

$x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n,\ p \in [0,\,1]$.

Пусть $(Y_1 \times Y_2,\, \mathcal{P}(Y_1 \times Y_2),\, P^{\eta_1,\,\eta_2})$ и $(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2,\, \mathcal{P}(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2),\, \mathrm{P}l^{\widetilde{u}_1,\,\widetilde{u}_2})$ — пространства с возможностью и с правдоподобием,

$$\begin{aligned} f^{\eta_1,\eta_2}(y_1,\,y_2) &= \min(f^{\eta_1}(y_1),\, f^{\eta_2}(y_2)), \quad (y_1,\,y_2) \in Y_1 \times Y_2,\\ g^{\widetilde{u}_1,\,\widetilde{u}_2}(u_1,\,u_2) &= \min(g^{\widetilde{u}_1}(u_1),\, g^{\widetilde{u}_2}(u_2)), \quad (u_1,\,u_2) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

— распределения $P^{\eta_1,\,\eta_2}$ и $\mathrm{P}l^{\widetilde{u}_1,\,\widetilde{u}_2}$ соответственно, и

$$q(\cdot,\,\cdot):\ Y_1 \times \mathcal{U}_1 \to X, \quad Q(\cdot,\,\cdot):\ Y_2 \times \mathcal{U}_2 \to \mathcal{P}(X).$$

О п р е д е л е н и е 2.6. Пусть выполнены условия (2.13), тогда независимыми называются

- любой НН элемент $\widetilde{\xi} = q(\eta_1,\, \widetilde{u}_1)$ и любое НН множество $\widetilde{A} = Q(\eta_2,\, \widetilde{u}_2)$, и
- любые НН множества $\widetilde{A}_i = Q_i(\eta_i,\, \widetilde{u}_i)$, $i = 1,\,2$.

Как показано в [12], правдоподобие возможности $p \in [0,\,1]$ НН события $\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}$ (включения НН элемента $\widetilde{\xi}$ в НН множество $\widetilde{A}$) при условии их независимости в смысле определения 2.6

$$\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}) = p) \triangleq \sup\{\inf_{x\in X}(\tau^{\widetilde{\xi}}_x \wedge \tau^{\widetilde{A}}_x)(p_x)|\ p_\cdot:\ X \to [0,\,1],\, \sup_{x\in X} p_x = p\} = \Bigl(\bigvee_{x\in X}(\tau^{\widetilde{\xi}}_x \wedge \tau^{\widetilde{A}}_x)\Bigr)(p), \tag{2.14}$$

где

$$\left(\tau_x^{\tilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}}\right)(q) \triangleq \sup\{\min(\tau_x^{\tilde{\xi}}(a),\ \tau_x^{\widetilde{A}}(b))|\ a,\ b \in [0,1],$$
$$\min(a,\ b) = q\} \triangleq \tau_x(q),\ x \in X,\ q \in [0,1]. \quad (2.15)$$

В главе 3 «Правила решения для неопределенных нечетких и неопределенных стохастических моделей» при построении неопределенной нечеткой модели измерения используется понятие переходного распределения правдоподобия возможности [12].

Интеграл и мера правдоподобия возможности в [12] определены в соответствие со схемой построения меры и интеграла, принятой в [11], на основе формулы (2.14).

О п р е д е л е н и е 2.7. Интегралом pl называется функция, определенная на классе $\mathcal{T}(X)$ всех функций $t.(\cdot) : X \times [0,1] \to [0,1]$, со значениями в $\mathcal{T}$, $\mathrm{pl}(\cdot)(\cdot) : \mathcal{T}(X) \to [0,1]$, согласно формуле

$$\mathrm{pl}(t.(\cdot))(p) = \left(\bigvee_{x \in X} (t_x \wedge \pi_x)\right)(p),\ t.(\cdot) \in \mathcal{T}(X),\ p \in [0,1], \quad (2.16)$$

в которой $t.(\cdot)$ — произвольная, $\pi.(\cdot)$ —фиксированная функция из $\mathcal{T}(X)$, первая является аргументом pl, вторая — определяет pl.

Мерой правдоподобия возможности, или короче — правдоподобием возможности, называется функция $\mathrm{P}l(\cdot)(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{T}$, определенная формулой (см. (2.14))

$$\mathrm{P}l(A)(p) = \left(\bigvee_{x \in A} \pi_x\right)(p),\ A \in \mathcal{P}(X),\ p \in [0,1], \quad (2.17)$$

которая получена из (2.16) при $t_x(p) = \begin{cases} 1, \text{если } p = \chi_A(x), \\ 0, \text{если } p \neq \chi_A(x), \end{cases}$ $x \in X,\ p \in [0,1]$, где $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \in X \backslash A, \end{cases}$ $x \in X$, — индикаторная функция множества $A \in \mathcal{P}(X)$.

Функция $\pi.(\cdot) : X \to \mathcal{T}$ называется распределением правдоподобия возможности (2.17).

Если в (2.16) $t_x(p) = \tau_x^{\widetilde{A}}(p),\ x \in X,\ p \in [0,1]$, — индикаторная функция (одноточечного покрытия) НН множества $\widetilde{A}$, $\pi_x(p) = \tau_x^{\tilde{\xi}}(p),\ x \in X,\ p \in [0,1]$, — распределение НН элемента $\widetilde{\xi}$, то в (2.16)

$$\mathrm{pl}(\tau_{\cdot}^{\widetilde{A}}(\cdot)) = \left(\bigvee_{x\in X} (\tau_x^{\widetilde{A}} \wedge \tau_x^{\widetilde{\xi}})\right)(p),\ p \in [0,\,1], \tag{2.18}$$

и интеграл (2.18) «определен» НН элементом $\widetilde{\xi}$ (см. [12]).

Если $A \in \mathcal{P}(X)$ — «обычное», определенное четкое множество, $\chi_A(\cdot) : X \to \{0,1\}$ — его индикаторная функция, то согласно (2.18) в (2.17)

$$\mathrm{P}l(A)(p) = \left(\bigvee_{x\in A} \tau_x^{\widetilde{\xi}}\right)(p) = \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) = p),\ p \in [0,\,1]. \tag{2.19}$$

Поэтому распределение $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) : X \times [0,\,1] \to [0,\,1]$ НН элемента $\widetilde{\xi}$, рассматриваемое как функция $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) : X \to \mathcal{T}$, является распределением правдоподобия возможности (2.19).

О п р е д е л е н и е 2.8. Отображение $\mathrm{P}l(\cdot|\cdot)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \times X_2 \to \mathcal{T}$ называется переходным правдоподобием возможности на $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$, $(X_2, \mathcal{P}(X_2))$, если при каждом $x_2 \in X_2$ $\mathrm{P}l(\cdot|x_2)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \to \mathcal{T}$ есть правдоподобие возможности на $(X_1, \mathcal{P}(X_1))$; функция $\pi_{\cdot|\cdot}(\cdot) : X_1 \times X_2 \to \mathcal{T}$ называется распределением переходного правдоподобия возможности $\mathrm{P}l(\cdot|\cdot)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \times X_2 \to \mathcal{T}$, если при каждом $x_2 \in X_2$ $\pi_{\cdot|x_2}(\cdot) : X_1 \to \mathcal{T}$ есть распределение правдоподобия возможности $\mathrm{P}l(\cdot|x_2)(\cdot) : \mathcal{P}(X_1) \to \mathcal{T}$, т. е. если для любых $A_1 \in \mathcal{P}(X_1)$, $x_2 \in X_2$

$$\mathrm{P}l(A_1|x_2)(p) = \left(\bigvee_{x_1\in A_1} \pi_{x_1|x_2}\right)(p),\ p \in [0,\,1]. \tag{2.20}$$

Дальнейшие сведения по неопределенной нечеткой математике приведены в §3 главы 3 «Правила решения для неопределенных нечетких и неопределенных стохастических моделей».

Глава 2

Стохастическая модель и эмпирическое построение возможности, принимающей значения в шкале $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,\ 1], \leqslant, \max, \cdot)$

§ 1. Принцип относительности возможности

Группе $\widehat{\Gamma}$ изотонных автоморфизмов шкалы $\widehat{\mathcal{L}}$ соответствуют две изоморфных ей группы автоморфизмов: группа $\widehat{\Gamma}\circ$ изотонных автоморфизмов класса $\widehat{\mathcal{L}}(X)$, определенных равенством $(\widehat{\gamma}\circ f)(x) \equiv \widehat{\gamma}\circ f(x) \triangleq \gamma(f(x)), x \in X, f(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X), \widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$, устанавливающим взаимно однозначное соответствие $\widehat{\Gamma}\circ \ni \widehat{\gamma}\circ \Leftrightarrow \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$, и группа $\widehat{\Gamma}*$ автоморфизмов класса $\widehat{\mathcal{L}}(\widehat{\mathcal{L}}(X))$ интегралов $p(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$,

$$(\widehat{\gamma} * p)(f(\cdot)) \equiv \widehat{\gamma} * p(f(\cdot)) \triangleq \widehat{\gamma}\Big(p(\widehat{\gamma}^{-1}\circ f(\cdot))\Big),\ f(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X),\ \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}. \tag{1.1}$$

При этом также имеет место взаимно однозначное соответствие $\widehat{\Gamma}* \ni \widehat{\gamma}* \Leftrightarrow \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$.

Что касается группы $\widehat{\Gamma}\circ$, то $f(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X) \Leftrightarrow \widehat{\gamma}\circ f(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X)$, то есть $f(\cdot) \le g(\cdot) \Leftrightarrow (\widehat{\gamma}\circ f) \le (\widehat{\gamma}\circ g)(\cdot)$; $\widehat{\gamma}\circ(f \boldsymbol{+} g)(\cdot) = \Big((\widehat{\gamma}\circ f) \boldsymbol{+} (\widehat{\gamma}\circ g)\Big)(\cdot)$; $\widehat{\gamma}\circ(f \bullet g)(\cdot) = ((\widehat{\gamma}\circ f) \bullet (\widehat{\gamma}\circ g))(\cdot)$. Отсюда и из условий (1.12) следует, что

$$(\widehat{\gamma} * p)\big((a \bullet f)(\cdot) \boldsymbol{+} (b \bullet g)(\cdot)\big) = a \bullet (\widehat{\gamma} * p)(f(\cdot)) \boldsymbol{+} b \bullet (\widehat{\gamma} * p)(g(\cdot)), \tag{1.2}$$

а также, что для любого класса функций $f_j(\cdot) \in \widehat{\mathcal{L}}(X),\ j \in J$,

$$(\widehat{\gamma} * p)\left(\Big(\boldsymbol{+}_{j\in J} f_n\Big)(\cdot)\right) = \boldsymbol{+}_{j\in J}(\widehat{\gamma} * p)(f_n(\cdot)). \tag{1.3}$$

Равенства (1.2) и (1.3) показывают, что $(\widehat{\gamma} * p)(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$ — интеграл для любого $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$. Равенство (1.1) называется условием *эквивариантности* интеграла $p(\cdot)$ по отношению к преобразованию $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$ шкалы его значений $\widehat{\mathfrak{L}}$. Заметим, что если вместе с преобразованием $\widehat{\gamma}(\cdot)$ шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ соответственно преобразуется аргумент интеграла: $f(\cdot) \to (\widehat{\gamma} \circ f)(\cdot)$, то условие (1.1) следует записать в виде

$$(\widehat{\gamma} * p)(\widehat{\gamma} \circ f(\cdot)) = \widehat{\gamma}(p(f(\cdot))), \tag{1.1*}$$

определяющем *эквивариантность* интеграла $p(\cdot)$ относительно одновременных преобразований: $\widehat{\gamma}(\cdot)$ шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widehat{\gamma}\circ$ его аргумента: $f(\cdot) \to \widehat{\gamma} \circ f(\cdot)$.

Если, в частности, в (1.1) $f(x) = \chi_A(x)$, $x \in X$, — индикаторная функция (четкого) множества A, то условие (1.1) дает формулу для преобразования возможности $P(\cdot)$

$$P(A) \triangleq p(\chi_A(\cdot)) \to \widehat{\gamma} * p(\chi_A(\cdot)) = \widehat{\gamma}(p(\chi_A(\cdot))) = \widehat{\gamma}(P(A)) \triangleq \widehat{\gamma} * P(A) \tag{1.1**}$$

(ибо $\widehat{\gamma}^{-1} \circ \chi_A(\cdot) = \chi_A(\cdot))$), индуцированного преобразованием $\widehat{\gamma}(\cdot)$ шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$, называемую условием *эквивариантности возможности* $P(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathfrak{L}}$.

Согласно принципу относительности возможности $P(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ и $\widetilde{P}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ считаются эквивалентными (равно как и пространства $(X, \mathcal{P}(X), P)$ и $(X, \mathcal{P}(X), \widetilde{P})$), если существует преобразование $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$, такое, что $P(A) = \widehat{\gamma}(P(A))$ для любого $A \in \mathcal{P}(X)$.

Далее интегралы $n(\cdot)$ и $p(\cdot)$ будем считать связанными условиями дуальности:

$$\begin{aligned} n(f(\cdot)) &= (\theta * p)(f(\cdot)) \triangleq \theta(p(\theta^{-1} \circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \widetilde{\mathfrak{L}}(X), \\ p(f(\cdot)) &= (\theta^{-1} * n)(f(\cdot)) \triangleq \theta(n(\theta \circ f(\cdot))), \quad f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\theta(\cdot)$ — некоторое преобразование из Θ.

Рассмотрим преобразования шкалы $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, класса функций $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X)$ и класса $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X))$ интегралов $n(\cdot)$, индуцированные преобразованиями шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$. Заметим прежде всего, что группа $\widehat{\Gamma}$ всех изотонных автоморфизмов шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ является таковой и для шкалы $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$ и ей соответствуют группы $\widehat{\Gamma}\circ$ и $\widehat{\Gamma}*$ изотонных автоморфизмов класса $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X)$ функций $f(\cdot) : X \to \widehat{\mathfrak{L}}$ и класса $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X))$ интегралов $n(\cdot) : \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X) \to \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, определенных равенствами

$(\widetilde{\widehat{\gamma}} \circ f)(x) \equiv \widetilde{\widehat{\gamma}} \circ f(x) \triangleq \widetilde{\widehat{\gamma}}(f(x))$, $x \in X$, $\widetilde{\widehat{\gamma}} \in \widehat{\Gamma}$, $f(\cdot) \in \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X)$, и, соотвественно,

$$(\widetilde{\widehat{\gamma}} * n)(f(\cdot)) \equiv \widetilde{\widehat{\gamma}} * n(f(\cdot)) \triangleq \widetilde{\widehat{\gamma}}(n(\widetilde{\widehat{\gamma}}^{-1} \circ f(\cdot))), \ f(\cdot) \in \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X), \ \widetilde{\widehat{\gamma}} \in \widehat{\Gamma}. \tag{1.5}$$

Хотя шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, классы $\widehat{\mathfrak{L}}(X)$ и $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X)$ и интегралы $p(\cdot)\colon \widehat{\mathfrak{L}}(X) \to \widehat{\mathfrak{L}}$ и $n(\cdot)\colon \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X) \to \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$ связывают условия дуальности (1.4), преобразования $\widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}\circ, \widehat{\gamma}*$ и соответственно $\widetilde{\widehat{\gamma}}, \widetilde{\widehat{\gamma}}\circ, \widetilde{\widehat{\gamma}}*$ могут быть согласованы многими способами. Пусть [1]) $a \in \widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, причем $\widetilde{a}$ — образ a: $\widetilde{a} = \theta a$. Если $a \to \widehat{\gamma} a, \widetilde{a} \to \widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{a}$, то $\widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{a}$ — образ $\widehat{\gamma} a$: $\widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{a} = \theta_{\widetilde{\gamma}\gamma}\gamma a$, где $\theta_{\widetilde{\widehat{\gamma}}\widehat{\gamma}}\colon \widehat{\gamma}\mathfrak{L} \to \widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{\mathfrak{L}}$. Отсюда, в силу произвольности $a \in \widehat{\mathfrak{L}}$, следует, что преобразования $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}, \widetilde{\widehat{\gamma}} \in \widehat{\Gamma}$, $\theta \in \Theta$ и $\theta_{\widehat{\gamma}\widetilde{\widehat{\gamma}}} \in \Theta$ связаны условием

$$\widetilde{\widehat{\gamma}}^{-1} \circ \theta_{\widehat{\gamma}\widetilde{\widehat{\gamma}}} = \theta \circ \widehat{\gamma}^{-1}. \tag{1.6}$$

Если определить $\widehat{\gamma} = \widetilde{\widehat{\gamma}}$, считая, что шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$ должны преобразовываться одинаково, то согласно условию (1.6) $\theta_{\widetilde{\widehat{\gamma}}\widehat{\gamma}} \equiv \theta_{\widehat{\gamma}} = \widehat{\gamma}\theta\widehat{\gamma}^{-1}$. В этом случае дуальный изоморфизм $\theta : \widehat{\mathfrak{L}} \to \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$ преобразуется вместе с преобразованиями шкал $\widehat{\gamma} : \widehat{\mathfrak{L}} \to \widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widehat{\gamma}} : \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}} \to \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, а именно, $\theta \to \theta_{\widehat{\gamma}\widehat{\gamma}} \triangleq \widehat{\gamma}\theta\widehat{\gamma}^{-1}$. Если же исходить из неизменности θ, связывающего шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, считая, что $\theta_{\widetilde{\widehat{\gamma}}\widehat{\gamma}} = \theta$, то согласно условию (1.6) $\widetilde{\widehat{\gamma}} = \theta\widehat{\gamma}\theta^{-1}$. В этом случае фиксирована связь между шкалами $\widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}} = \theta\widehat{\mathfrak{L}}$, но правила преобразования шкал различны: $\widehat{\mathfrak{L}} \to \widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}} \to \widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$, где $\widetilde{\widehat{\gamma}} = \theta\widehat{\gamma}\theta^{-1}$.

Расссмотрим подробнее последний случай, в котором исследователь использует некоторую пару дуально изоморфных шкал $\widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}} = \theta\widehat{\mathfrak{L}}$, связь которых фиксирована значением $\theta \in \Theta$, определяющим следующее правило преобразования

$$\widehat{\mathfrak{L}} \to \widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}, \ \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}} \to \widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}, \ \text{где}\ \widetilde{\widehat{\gamma}} = \theta \circ \widehat{\gamma} \circ \theta^{-1}, \ \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}.$$

В этом случае, как нетрудно проверить, для любого $a \in \widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widetilde{a} = \theta a \in \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}$: $a \to \widehat{\gamma} a$, $\widetilde{a} \to \widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{a} = \theta \circ \widehat{\gamma} a$; для любой функции $f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X)$ и $\widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ f(\cdot) \in \widetilde{\widehat{\mathfrak{L}}}(X)$: $f(\cdot) \to \widehat{\gamma} \circ f(\cdot)$, $\widetilde{f}(\cdot) \to \widetilde{\widehat{\gamma}} \circ \widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ \widehat{\gamma} f(\cdot)$, а эквивариантность связанных условиями (1.4) интегралов $p(\cdot)$ в $(1.1)^*$ и $n(\cdot)$ в (1.4) по отношению к преобразованиям $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$ и $\widetilde{\widehat{\gamma}} = \theta \circ \widehat{\gamma} \circ \theta^{-1}$ определяют

[1]) Для краткости $\widehat{\gamma}(a)$ записывается как $\widehat{\gamma} a$, $\widetilde{\widehat{\gamma}}(\widetilde{a})$ — как $\widetilde{\widehat{\gamma}}\widetilde{a}$, $\theta(a)$ — как θa, и т.д.

равенства

$$p(f(\cdot)) \to (\widehat{\gamma} * p)(f(\cdot)) \triangleq \widehat{\gamma}(p(\widehat{\gamma}^{-1} \circ f(\cdot))) =$$

$$= \theta^{-1}((\widetilde{\widetilde{\gamma}} * n)(\theta \circ f(\cdot))),\ f(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{L}}(X);$$

$$n(\widetilde{f}(\cdot)) \to (\widetilde{\widetilde{\gamma}} * n)(\widetilde{f}(\cdot)) \triangleq \widetilde{\widetilde{\gamma}}(n(\widetilde{\widetilde{\gamma}}^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))) =$$

$$= \theta((\widehat{\gamma} * p)(\widetilde{\theta}^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))),\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}}(X).$$

Однако такие правила преобразований годятся лишь «для внутреннего пользования», поскольку другие исследователи не знают конкретный дуальный изоморфизм $\theta \in \Theta$, связывающий шкалы $\widehat{\mathfrak{L}}$ и $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}}$. Поэтому, на самом деле, при преобразовании $\widehat{\mathfrak{L}} \to \widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}} \to \widetilde{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}}$ удобно использовать пару никак не связанных преобразований $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$ и $\theta \in \Theta$.

Найдем класс функций, определяющих правило преобразования пары шкал $\widehat{\mathfrak{L}} \to \widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}} \to \widetilde{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}}$, $\widetilde{\widetilde{\gamma}} = \theta\widehat{\gamma}\theta^{-1}$. Условие $\widetilde{\widetilde{\gamma}} = \theta \circ \widehat{\gamma} \circ \theta^{-1}$ с учетом вида функций $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$ имеет вид

$$\theta(x^{\alpha}) = (\theta(x))^{\beta},\ \beta = \beta(\alpha),\ x \in [0,\,1]. \tag{1.7}$$

Действуя по аналогии с тем, как было получено выражение (1.11) в главе 1, дифференцируя равенство (1.7) по α и по x и исключая производную $\theta'(x^{\alpha}) = \frac{\theta(x^{\alpha})}{d(x^{\alpha})}$, получаем задачу Коши для $\theta(x)$, решением которой является искомый класс преобразований $\{\theta(a) = e^{-\ln|a|^{-\alpha}},\ \alpha > 0,\ a \in [0,\,1]\}$. Обозначим этот класс $\widehat{\Theta}$. Принцип относительности во тором варианте теории возможностей формулируется следующим образом: если исследователь использует пару дуально изоморфных шкал $\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}} = \theta\widehat{\mathfrak{L}}$, $\theta \in \widehat{\Theta} = \{\theta(a) = e^{-\ln|a|^{-\alpha}},\ \alpha > 0,\ a \in [0,\,1]\}$, то они должны преобразовываться одновременно по следующему правилу: $\widehat{\mathfrak{L}} \to \widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}} \to \widetilde{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}}$, где $\widetilde{\widetilde{\gamma}} \in \Delta_{\widehat{\gamma}} \triangleq \{\theta \circ \widehat{\gamma} \circ \theta^{-1},\ \theta \in \widehat{\Theta}\}$, $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$, и при этом *все определения, модели, выводы и т.п., допускающие содержательное толкование, должны формулироваться одинаково в любой паре шкал* $\widehat{\gamma}\widehat{\mathfrak{L}}$, $\widetilde{\widetilde{\gamma}}\widetilde{\widetilde{\mathfrak{L}}}$., $\widetilde{\widetilde{\gamma}} \in \Delta_{\widehat{\gamma}}$, $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$, т.е. должны быть инвариантны относительно одновременных преобразований всех их компонентов: $f(\cdot) \to \widehat{\gamma} \circ f(\cdot)$, $p(\cdot) \to \widehat{\gamma} * p(\cdot)$, $\widetilde{f}(\cdot) \to \widetilde{\widetilde{\gamma}} \circ \widetilde{f}(\cdot)$, $n(\cdot) \to \widetilde{\widetilde{\gamma}} * n(\cdot)$ *и т.п., где* $\widetilde{\widetilde{\gamma}} \in \Delta_{\widehat{\gamma}}$, $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$. Эта формулировка вполне аналогична формулировке принципа относительности для первого варианта теории возможностей.

§ 2. Стохастическая модель возможности

Обозначим $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{Pr})$ вероятностное пространство, моделирующее стохастический эксперимент Э, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ — множество элементарных исходов Э, $\mathcal{P}(\Omega)$ — класс всех подмножеств Ω, представляющих все исходы Э, $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$ — вероятность, определенная равенством

$$\mathrm{Pr}(A) \triangleq \sum_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{2.1}$$

в котором значения вероятностей $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, элементарных исходов Э подчинены условиям упорядоченности и нормировки

$$1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \qquad \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1, \tag{2.2}$$

а в остальном произвольны. Класс всех вероятностей, распределенных согласно (2.2), обозначим $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Сопоставим Э также пространство с возможностью $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{P})$, где $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$ — возможность, определенная выражением

$$\mathrm{P}(A) \triangleq \sup_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{p}_i, \quad A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{2.3}$$

в котором значения $\mathrm{p}_i \triangleq \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1,\, 2,\, \ldots$, возможностей элементарных исходов Э упорядочены аналогично (2.2):

$$1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Равенство $\mathrm{p}_1 = 1$ является условием нормировки. Класс всех возможностей, распределения[1]) которых удовлетворяют (2.4), обозначим $\mathbb{P}$.

Определение 2.1. Возможность $\mathrm{P}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$ назовем максимально согласованной с вероятностью $\mathrm{Pr}(\cdot) : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\, 1]$, $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, если для всех $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ выполняется система равенств

$$\mathrm{P}(A) = \sup_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{p}_i = \bar{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) = \bar{\gamma}\Big(\sum_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i\Big), \tag{2.5}$$

[1]) Распределением возможности P названа функция $\mathrm{p}_\cdot : \{1, 2, \ldots\} \to [0,\, 1]$ и ее значения $\mathrm{p}_1 = \mathrm{P}(\{\omega_1\}), \mathrm{p}_2 = \mathrm{P}(\{\omega_2\}), \ldots$

где функция $\bar{\gamma}(\cdot)$ принадлежит классу монотонно неубывающих, определенных и принимающих значения на отрезке $[0,\,1]$ функций $\bar{\Gamma} \triangleq \bar{\Gamma}(\mathrm{Pr})$, удовлетворяющих условиям $\bar{\gamma}(a)=0 \Leftrightarrow a=0,\ \bar{\gamma}(1)=1$. Класс $\bar{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ определяется конкретной верятностью Pr, контролирующей исходы Э и инвариантен относительно преобразований из группы $\widehat{\Gamma}$: $\forall \widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}\ \bar{\Gamma}(\mathrm{Pr}) = \{\widehat{\gamma} \circ \bar{\gamma}(\cdot),\ \bar{\gamma}(\cdot) \in \bar{\Gamma}(\mathrm{Pr})\}$. Максимально согласованная с вероятностью Pr возможность P называется Pr-измеримой.

Формально определение 2.1 масимальной согласованности возможности с вероятностью совпадает с определением максимальной согласованности в первом варианте теории возможностей, данным в [22]. Однако в связи с требованием инвариантности относительно степенных преобразований отрезка $[0,\,1]$ в себя класс функций $\bar{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ состоит из функций, определенных следующим образом: на интервалах $\Delta_1, \Delta_2, \ldots,$

$$\Delta_i \triangleq [\mathrm{pr}_i, 1-\mathrm{pr}_1-\cdots-\mathrm{pr}_{i-1}],\ i=1,2,\ldots, \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\bar{\gamma}(0)=0,\ \bar{\gamma}(x)=\mathrm{p}_i,\ x\in\Delta_i,\ \mathrm{p}_1=1,\\ \mathrm{p}_i>\mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i\cap\Delta_{i+1}=\varnothing,\ \mathrm{p}_i=\mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i\cap\Delta_{i+1}\neq\varnothing,\\ \mathrm{p}_i=\left(\frac{(1-\mathrm{pr}_1)(1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)\ldots(1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{i-1})}{\mathrm{pr}_1\,\mathrm{pr}_2\ldots\mathrm{pr}_{i-1}}\right)^{\alpha},\ \alpha>0,\ i=2,3,\ldots,\end{gathered} \tag{2.7}$$

а в промежутках между интервалами $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, т.е. на множестве $[0,1]\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i$

$$\begin{gathered}\bar{\gamma}(x)=(q_i x)^{\alpha},\ x\in[1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_i,\mathrm{pr}_i],\ \text{если}\ \Delta_i\cap\Delta_{i+1}=\varnothing,\ \alpha>0,\ i=1,2,\ldots,\\ q_1=\frac{1}{\mathrm{pr}_1},\ q_i=\frac{(1-\mathrm{pr}_1)(1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)\ldots(1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{i-1})}{\mathrm{pr}_1\,\mathrm{pr}_2\ldots\mathrm{pr}_i},\ i=2,3,\ldots\end{gathered} \tag{2.8}$$

Поскольку в равенстве (2.5) функция $\bar{\gamma}(\cdot)$ может быть любой функцией из класса $\bar{\Gamma}(\mathrm{Pr})$, определенного выражениями (2.7), (2.8), максимальная согласованность возможности P с вероятностью Pr устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$ вероятностей и классами $\mathbb{P}_{(\beta)}$ эквивалентных возможностей согласно следующему выражению:

$$\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}^{\beta_i} \Leftrightarrow \frac{1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{i-1}}{\mathrm{pr}_{i-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1-\mathrm{pr}_1}{\mathrm{pr}_1} = \\ = \left(\frac{1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_i}{\mathrm{pr}_i} \cdot \ldots \cdot \frac{1-\mathrm{pr}_1}{\mathrm{pr}_1}\right)^{\beta_i}, \; i = 2, 3, \ldots, \quad (2.9)$$

$\beta \triangleq \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$, $\beta_i \in [0,\, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$ — последовательность констант, определяющих степенные соотношения между значениями возможностей элементарных исходов Э. Класс всех таких последовательностей обозначим $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots,\ \beta_i \in [0,\, 1],\ i = 1, 2, \ldots\}$.

Рассмотрим взаимно однозначное соответствие, определенное в (2.9), подробно. Согласно (2.9) каждому классу возможностей $\mathbb{P}_{(\beta)}$ сопоставлен класс вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$, распределения которых удовлетворяют условиям в (2.9), причем так, что любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(\beta)}$ максимально согласована со всеми вероятностями $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$ и только с ними, поскольку взаимно однозначно

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)} \triangleq \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ \mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \mathbb{P}_{(\beta)}\},$$
$$\mathbb{P}_{(\beta)} \triangleq \{\mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) = \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}\}, \quad \beta \in [0, 1],$$

где

$$\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \{\widehat{\gamma} * \mathrm{P}(\cdot),\ \widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma},\ \mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}\}, \quad \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}, \quad (2.10)$$

— класс всех возможностей, максимально согласованных с вероятностью Pr,

$$\mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\}, \quad \mathrm{P} \in \mathbb{P}, \quad (2.11)$$

класс всех вероятностей, с каждой из которых возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ максимально согласована.

Формула (2.10) определяет многозначное отображение $\mathbb{P}(\cdot) : \mathbb{P}\mathrm{r} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$, формула (2.11) — обратное к $\mathbb{P}(\cdot)$ отображение $\mathbb{P}\mathrm{r}(\cdot) : \mathbb{P} \to \mathcal{P}(\mathbb{P}\mathrm{r})$.

Классы возможностей $\mathbb{P}_{(\beta)}$ образуют разбиение класса всех возможностей $\mathbb{P}$, распределенных согласно (2.4):

$$\mathbb{P} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathbb{P}_{(\beta)}. \quad (2.12)$$

В самом деле, как показано в [22], класс $\mathbb{P}$ можно представить в виде объединения непересекающихся классов $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in [0, 1]$, эквивалентных относительно преобразований $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$

возможностей,

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in [0,\,1]} \mathbb{P}_{(e)},\ e \in [0,\,1], \tag{2.13}$$

где $\widetilde{\Gamma}$ — класс всех монотонно неубывающих функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\ :\ [0,1] \to [0,1],\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = 1$. В (2.13) $e = 0.e_1e_2\ldots$ — двоичная запись числа из $[0,1]$, определяющего упорядоченность распределения возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, заданную отношениями (см. [22]) $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow e_i = 0,\ \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow e_i = 1,\ i = 1,2,\ldots$. Из разбиения (2.13) в свою очередь следует (см. [22]) разбиение

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in [0,\,1]} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)},\ e \in [0,\,1], \tag{2.14}$$

класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей, распределенных согласно (2.2)

Зафиксируем число $e \in [0,\,1]$, определяющее конкретную упорядоченность значений возможностей элементарных исходов в (2.13), и рассмотрим класс $\mathcal{B}_{(e)}$ последовательностей $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$, обладающих следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Leftrightarrow \beta_i \in [0,1), \\ &e_i = 0 \Leftrightarrow \beta_i = 1,\ i = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.15}$$

Лемма 2.1. *Классы возможностей $\mathbb{P}_{(\beta)},\ \beta \in \mathcal{B}_{(e)},\ e \in [0,\,1]$, образуют разбиение класса $\mathbb{P}_{(e)}$:*

$$\mathbb{P}_{(e)} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_{(e)}} \mathbb{P}_{(\beta)},\ e \in [0,\,1]. \tag{2.16}$$

Доказательство. В самом деле, рассмотрим произвольную возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $e \in [0,\,1]$. Так как

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}, \\ &e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1},\ i = 1,2,\ldots, \end{aligned}$$

то всегда можно выбрать $\beta_i \in [0,1]$: $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}^{\beta_i},\ i = 1,2,\ldots$, т.е. $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(\beta)},\ \beta \in \mathcal{B}_{(e)}$, $e \in [0,\,1]$. С другой стороны, любая возможность P из некоторого класса $\mathbb{P}_{(\beta)},\ \beta \in \mathcal{B}_{(e)}$, принадлежит классу $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in [0,\,1]$, согласно определению класса $\mathcal{B}_{(e)}$, $e \in [0,\,1]$. □

Отсюда и из (2.10), (2.11) следует, что разбиение (2.16) класса возможностей $\mathbb{P}_{(e)}$ ин-

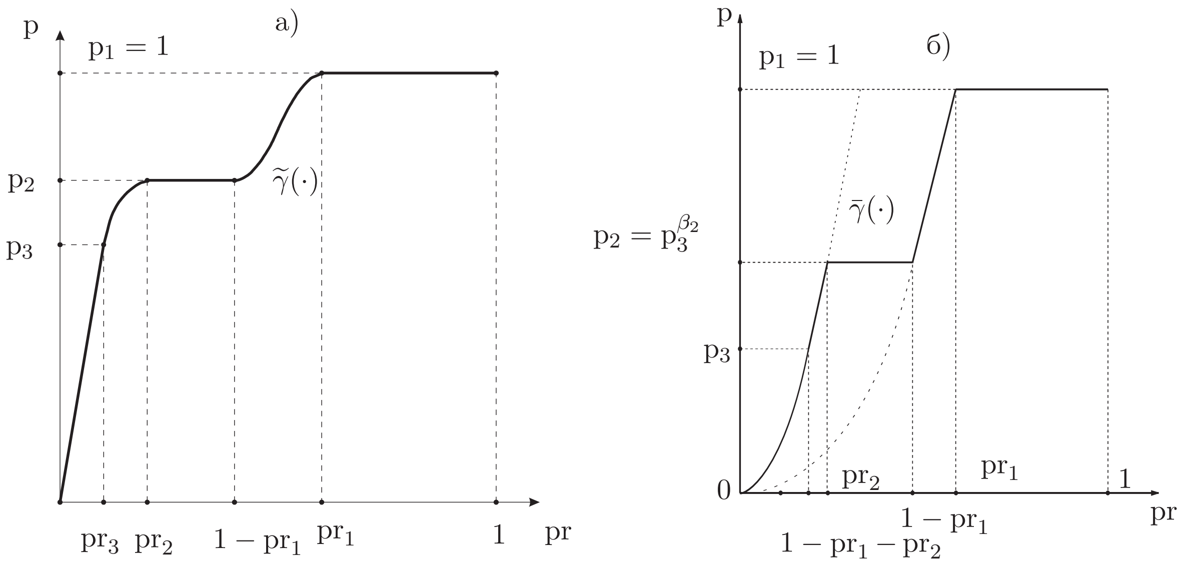


Рис. 2.1. Графики функций $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ (см. [22]) (а)) и $\bar{\gamma}(\cdot) \in \bar{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ (см. (2.7), (2.8)) (б)), иллюстрирующие зависимость некоторой возможности P, максимально согласованной с вероятностью Pr, от этой вероятности, для первого и второго варианта возможности соответственно в случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$, $i = 1, 2$, $\beta_2 \in [0, 1]$.

дуцирует разбиение класса вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}_{(e)}} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}, \ e \in [0, 1], \tag{2.17}$$

поскольку $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta')} = \varnothing$, если $\beta \neq \beta'$, и если некоторая вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$ не содержалась бы ни в одном классе $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$, то для нее любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ не содержалась бы ни в одном классе $\mathbb{P}_{(\beta)}$, $\beta \in \mathcal{B}_{(e)}$, $e \in [0, 1]$ что невозможно. Отсюда в свою очередь следует, что классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$ образуют разбиение класса всех вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}$, распределенных согласно (2.2):

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}. \tag{2.18}$$

На рисунке 2.1 для случая $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$, $i = 1, 2$, (см. (2.6)) представлены графики функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ (рис. 2.1, а)) и $\bar{\gamma}(\cdot)$ (рис. 2.1, б)), иллюстрирующие зависимость некоторой возможности P, максимально согласованной с вероятностью Pr, от этой вероятности, для первого и второго варианта теории возможностей соответственно. Как показано в [22], функция $\widetilde{\gamma}(\cdot)$, как и $\bar{\gamma}(\cdot)$, непрерывна, монотонно возрастает на отрезке $[0,\,1]$, и удовлетворяет следующим условиям:

$$\widetilde{\gamma}(0)=0,\ \widetilde{\gamma}(x)=\mathrm{p}_i,\ x\in\Delta_i,\ i=1,2,\ldots,$$

$$\mathrm{p}_i>\mathrm{p}_{i+1}\Leftrightarrow\Delta_i\cap\Delta_{i+1}=\varnothing,\ \mathrm{p}_i=\mathrm{p}_{i+1}\Leftrightarrow\Delta_i\cap\Delta_{i+1}\neq\varnothing,\ i=1,2,\ldots,$$

но, в отличие от $\bar{\gamma}(\cdot)$, $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ — произвольная строго монотонно возрастающая функция в промежутках между интервалами Δ_i, $i=1,2,\ldots$

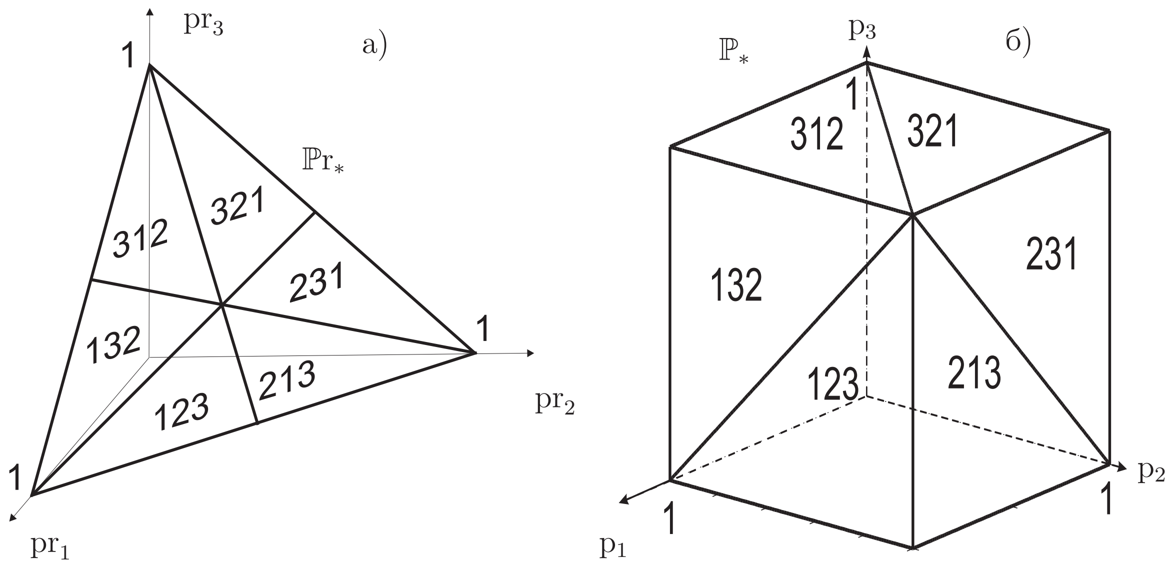


Рис. 2.2. а) «Треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_*=\bigcup\limits_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\neq k\neq i}}\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$, выделенный в пространстве $\mathcal{R}_3$ условием $\mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+\mathrm{pr}_3=1$, $\mathrm{pr}_i\geqslant 0$, $i=1,2,3$, тройка ijk обозначает упорядоченность $\mathrm{pr}_i\geqslant\mathrm{pr}_j\geqslant\mathrm{pr}_k$, определяющую «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$; б) «куб всех возможностей» $\mathbb{P}_*=\bigcup\limits_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\neq k\neq i}}\mathbb{P}^{ijk}$, тройка ijk обозначает упорядоченность $1=\mathrm{p}_i\geqslant\mathrm{p}_j\geqslant\mathrm{p}_k$, определяющую «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{ijk}$, $i\neq j\neq k\neq i$, $i,\,j,\,k=1,\,2,\,3$.

На рисунке 2.2 а) изображен «треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_*=\bigcup\limits_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\neq k\neq i}}\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$, выделенный в пространстве $\mathcal{R}_3$ условием $\mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+\mathrm{pr}_3=1$, $\mathrm{pr}_i\geqslant 0$, $i=1,2,3$, тройка ijk обозначает упорядоченность $\mathrm{pr}_i\geqslant\mathrm{pr}_j\geqslant\mathrm{pr}_k$, определяющую «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$. Класс $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей, распределенных согласно (2.2), соответствует «треугольнику вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{123}$. На рисунке 2.2 б) изображен «куб всех возможностей» $\mathbb{P}_* = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k \\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}^{ijk}$, тройка ijk обозначает упорядоченность $1 = \mathrm{p}_i \geqslant \mathrm{p}_j \geqslant \mathrm{p}_k$, определяющую «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{ijk}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, классу возможностей $\mathbb{P}$, распределенных согласно (2.4), соответствует «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{123}$.

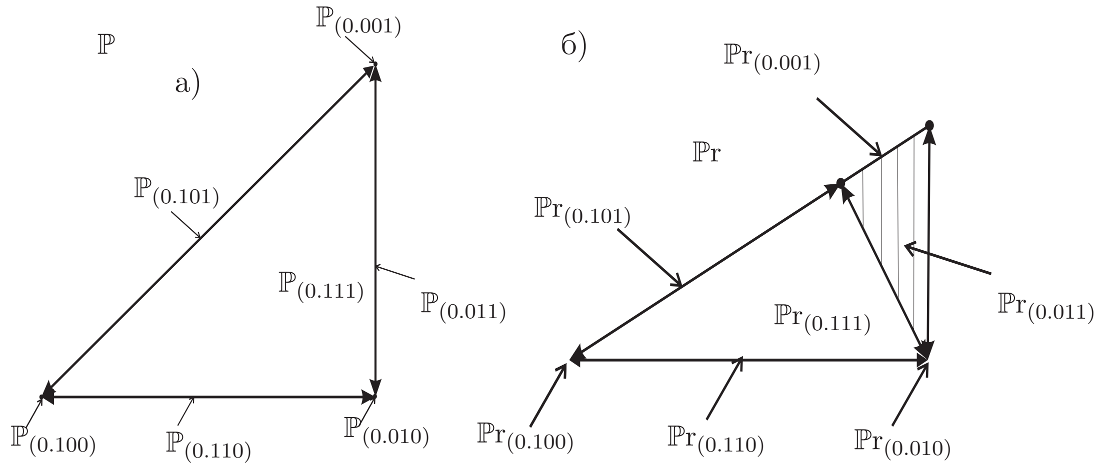


Рис. 2.3. а) «Треугольник возможностей» $\mathbb{P}$ и семь классов распределений $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0.100)} \cup \mathbb{P}_{(0.010)} \cup \ldots \cup \mathbb{P}_{(0.111)}$ (2.13) и определяющих семь попарно различных неприводимых классов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ эквивалентных относительно преобразований $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ возможностей. б) «Треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{123} = \mathbb{P}\mathrm{r}$ и семь его подмножеств-прообразов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение (2.13). При этом $\mathbb{P}_{(0.100)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}$, $\ldots$, $\mathbb{P}_{(0.111)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$; классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.100)}$, $\ldots$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, образуют разбиение (2.14) треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r}$.

На рисунке 2.3 «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{123} = \mathbb{P}\mathrm{r}$ и «треугольник возможностей» $\mathbb{P}$ рассмотрены более детально. На рис. 2.3 а) показано разбиение (2.13) класса возможностей $\mathbb{P}$ на семь классов $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ эквивалентных относительно преобразований $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ возможностей. На рис. 2.3 б) показано разбиение (2.14) класса вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}$

на семь классов $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, являющихся прообразами для классов возможностей $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$.

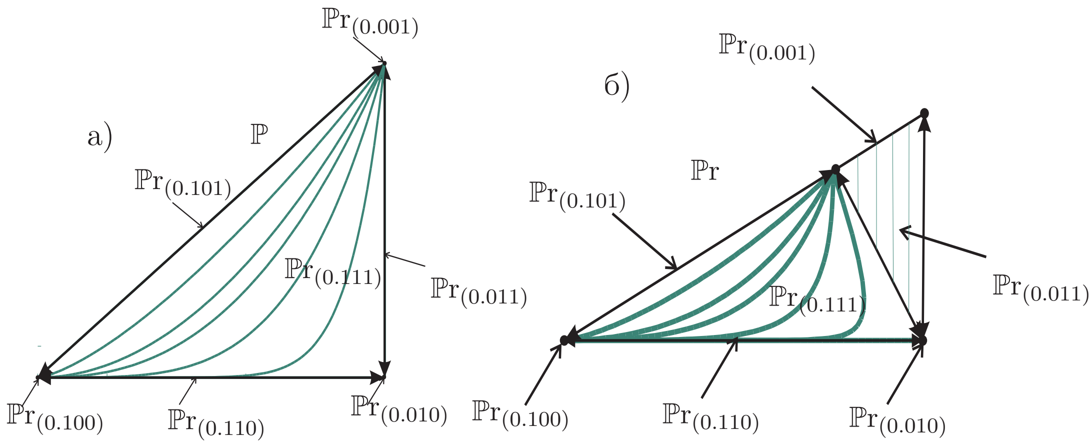


Рис. 2.4. а) «Треугольник возможностей» $\mathbb{P}$, классы $\mathbb{P}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующие разбиение $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0.100)} \cup \mathbb{P}_{(0.010)} \cup \ldots \cup \mathbb{P}_{(0.111)}$ (2.13) и некоторые из несчетного числа классов $\mathbb{P}_{(\{0,\beta_2\})}$, $\beta_2 \in (0,1)$ (зеленые кривые) эквивалентных относительно преобразований $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$ возможностей, образующих разбиение $\mathbb{P}_{(0.111)} = \bigcup\limits_{\beta_2 \in (0,1)} \mathbb{P}_{(\{0,\beta_2\})}$ (2.16). б) «Треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{123} = \mathbb{P}\mathrm{r}$, классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, и некоторые из несчетного числа классов вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\{0,\beta_2\})}$, $\beta_2 \in (0,1)$ (выделены красным), образующих разбиение $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \bigcup\limits_{\beta_2 \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\{0,\beta_2\})}$ (2.17).

На рис. 2.4 кроме разбиений (2.13),(2.14) классов $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}$ соответственно показано разбиение (2.16) класса $\mathbb{P}_{(0.111)}$ на несчетное число классов возможностей $\mathbb{P}_{(\{0,\beta_2\})}$, $\beta_2 \in (0,1)$, эквивалентных относительно преобразований $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$, в котором каждый класс — зеленая кривая (приведены классы $\mathbb{P}_{(\{0,\beta_2\})}$ только для некоторых значений $\beta_2 \in (0,1)$), и индуцированное им разбиение (2.17) класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ на несчетное число классов вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\{0,\beta_2\})}$, $\beta_2 \in (0,1)$, выделенных также зелеными кривыми $\beta_2 \in (0,1)$ (показаны классы $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\{0,\beta_2\})}$ только для некоторых значений $\beta_2 \in (0,1)$, соответствующих значениям, при которых приведены классы возможностей $\mathbb{P}_{(\{0,\beta_2\})}$).

Наконец, на рис. 2.5 представлена «картина в целом»: разбиение «треугольника всех

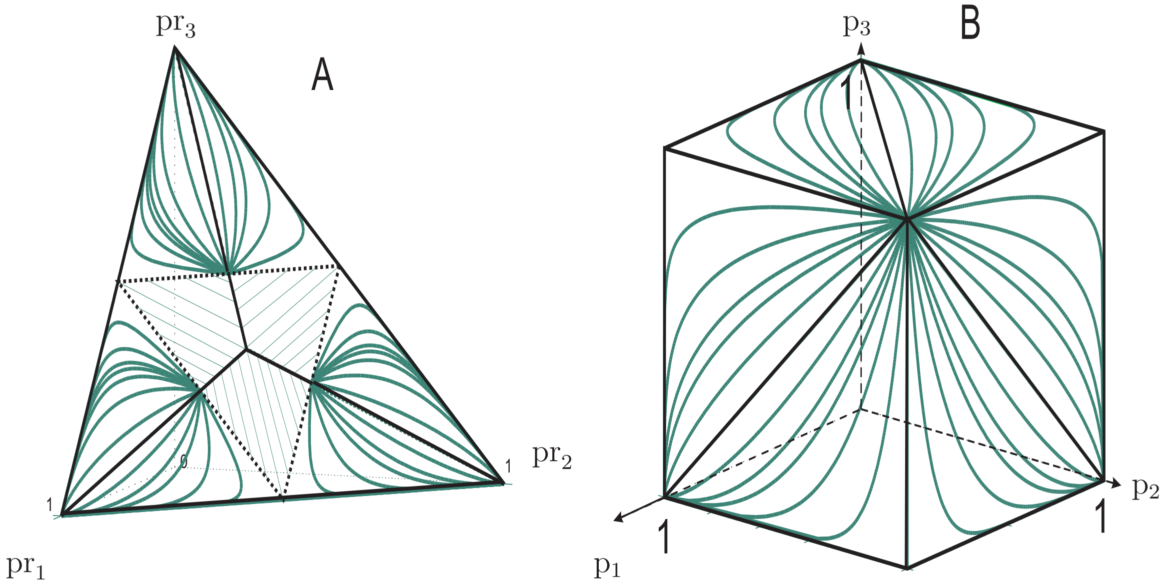


Рис. 2.5. Разбиение «треугольника всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ (а)) на классы вероятностей, которым взаимно однозначно соответствуют классы эквивалентных относительно преобразований $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$ возможностей, образующих разбиение «куба всех возможностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ (б)).

вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ (а)), индуцированное разбиением «куба всех возможностей» $\mathbb{P}_*$ (б)) на классы эквивалентных относительно преобразований $\widehat{\gamma}(\cdot) \in \widehat{\Gamma}$ возможностей (на обоих рисунках показаны только некоторые из классов вероятностей и возможностей соответственно, взаимно однозначно соответствующих друг другу.).

§ 3. Эмпирическое построение стохастически измеримой возможности

В этом параграфе для случая априори известной упорядоченности вероятностей элементарных исходов стохастического эксперимента разработан метод эмпирического построения его теоретико-возможностной модели для второго варианта теории возможностей.

3.1. Эмпирическое восстановление стохастически измеримой возможности. Как известно, событийно-частотная интерпретация вероятности основана на законах больших чисел (З. Б. Ч.) [46]. Пусть $\nu^{(N)}(A)$ — частота события $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ в серии N взаимно независимых испытаний $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})^N$, тогда вероятность любого уклонения частоты $\nu^{(N)}(A)$ любого исхода $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ от его вероятности $\mathrm{Pr}(A)$ стремится к нулю при $N \to \infty$. Точнее $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}^\infty(|\nu^{(N)}(A) - \mathrm{Pr}(A)| > \varepsilon) = 0 \tag{3.1}$$

(слабый З.Б.Ч.). Более того $\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}^\infty(\sup_{n\geqslant N} |\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}(A)| > \varepsilon) = 0, \tag{3.2}$$

т.е. частота $\nu^{(n)}(A)$ с увеличением n приближается и остается близкой к $\mathrm{Pr}(A)$, ибо согласно (3.2) $\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ с Pr^∞-вероятностью единица (п.н.) $|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}(A)| > \varepsilon$ лишь для конечного числа $n = 1, 2, \ldots$ испытаний (усиленный З.Б.Ч.).

Условия (3.1) и (3.2) определяют сходимость $\nu^{(N)}(A)$ к $\mathrm{Pr}(A)$ по Pr^∞-вероятности и с Pr^∞-вероятностью единица (почти наверное, п.н.) соответственно. Вероятность $\mathrm{Pr}^\infty : B^\infty \to [0,\, 1]$ определена на σ-алгебре B^∞ борелевских множеств бесконечных последовательностей испытаний, [1].

Законы больших чисел определяют эмпирическую событийно-частотную интерпретацию вероятности, согласно которой вероятность любого исхода испытания (стохастического эксперимента Э) сколь угодно точно оценивает его частоту в достаточно длинной последовательности взаимно независимых испытаний, и наоборот, — при этих условиях частота любого исхода Э сколь угодно точно оценивает его вероятность, а, следовательно, — и стохастическую модель Э.

Рассмотрим случай, когда априори известно, какому из классов $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in [0,\, 1]$, принадлежит вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$. Условие максимальной согласованности P с Pr определяется следующими эквивалентностями

$$\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}^{\beta_i} \Leftrightarrow \frac{1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}}{\mathrm{pr}_{i-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \mathrm{pr}_1}{\mathrm{pr}_1} = \\ = \left(\frac{1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_i}{\mathrm{pr}_i} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \mathrm{pr}_1}{\mathrm{pr}_1} \right)^{\beta_i}, \ \beta_1 = 0,\ \beta_i \in [0,\, 1],\ i = 2, 3, \ldots \tag{3.3}$$

Задача состоит в том, чтобы, наблюдая за исходами независимо повторяемого Э, решить, при каких значениях $\beta_i \in [0,\, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, выполняются равенства (3.3), связывающие вероятности элементарных исходов $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, и тем самым определить связь возможностей элементарных исходов

$$\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}^{\beta_i},\ i = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

Пусть $\mathrm{pr}_j \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_j\})$ — вероятность и $\nu_j^{(n)} \triangleq \nu^{(n)}(\{\omega_j\})$ — частота элементарного исхода ω_j в последовательности n взаимно независимых повторений Э, $j = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots$. Так как для каждого $j = 1, 2, \ldots$ при $n \to \infty$ $\nu_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathrm{pr}_j$, то, согласно (3.2) для любого $m = 1, 2, \ldots$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon, m)$, такой, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon, m)$

$$\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{|\nu_j^{(n)} - \mathrm{pr}_j\,| < \varepsilon, \ldots, |\nu_m^{(n)} - \mathrm{pr}_m\,| < \varepsilon\ \}) = 1. \tag{3.5}$$

Таким образом, при достаточно большом $n \geqslant N(\varepsilon, m)$ последовательность частот $\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \ldots$ с вероятностью единица окажется в некоторой ε-окрестности вероятности Pr, контролирующей исходы эксперимента Э, а это в свою очередь означает, что для любого $m = 1, 2, \ldots$ на основе конечного числа $n(m)$ наблюдений с вероятностью единица точно восстанавливатеся лишь множество $\bigcup\limits_{\substack{\beta \in \mathcal{B},\\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)} \cap O_{(\varepsilon)} \neq \varnothing}} \mathbb{P}_\beta$ классов возможностей, где $O_{(\varepsilon)}(\mathrm{Pr})$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке Pr.

Рассмотрим последовательность взаимно независимых испытаний $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1)$, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_2), \ldots$ Стохастической моделью последовательности n таких испытаний является вероятностное пространство $(\Omega \times \ldots \times \Omega, \mathcal{P}(\Omega \times \cdots \times \Omega), \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n)$.

Пусть A — некоторое событие, $\nu^{(n)}(A)$ — его частота. В этом случае усиленный З.Б.Ч. (3.2) формулируется следующим образом: $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \mathrm{Pr}^{\infty}\left(\sup_{n \geqslant N} \left|\nu^{(n)}(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A)\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{3.2*}$$

Пусть в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ лишь конечное число k различных вероятностей, скажем, $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, и A — некоторое событие. Тогда в (3.2*)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\mathrm{Pr}^s(A) \triangleq \mathrm{Pr}_{(n)}(A), \tag{3.6}$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность Pr^s встречается в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \ldots, \mathrm{Pr}_n$, $s = 1, \ldots, k$, $n_1/n + \ldots + n_k/n = 1$. Поскольку с увеличением n частóты n_s/n, $s = 1, \ldots, k$, изменяются, вообще говоря, произвольно, оставаясь в пределах отрезка $[0, 1]$ и удовлетворяя условию $n_1/n + \ldots + n_k/n = 1$, значение $\mathrm{Pr}_{(n)}(A)$ произвольно "блуждает" по отрезку $[\min\limits_{1 \leqslant s \leqslant k} \mathrm{Pr}^s(A), \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant k} \mathrm{Pr}^s(A)]$, и за ним при $n \to \infty$ согласно З.Б.Ч. (3.2*) все более точно следует частота $\nu^{(n)}(A)$.

В этом случае *знание вероятностей* $\mathrm{Pr}^1(A), \ldots, \mathrm{Pr}^k(A)$ *не позволяет оценить частоту* $\nu^{(n)}(A)$, *а наблюдение за частотой* $\nu^{(n)}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, *не позволяет восстановить стохастическую модель наблюдений*, но, как будет показано далее, может быть восстановлено семейство неприводимых теоретико-возможностных моделей Э.

Рассмотрим последовательность $Э_1, Э_2, \ldots$ взаимно независимых стохастических экспериментов, в моделях $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{Pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, которых $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ и среди вероятностей $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ конечное число k различных, обозначим их $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, заданных распределениями $\mathrm{pr}_i^s \triangleq \mathrm{Pr}^s(\{\omega_i\})$, $s = 1, \ldots, k$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими следующим условиям

$$\frac{1 - \mathrm{pr}_1^s - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}^s}{\mathrm{pr}_{i-1}^s} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \mathrm{pr}_1^s}{\mathrm{pr}_1^s} = \left(\frac{1 - \mathrm{pr}_1^s - \ldots - \mathrm{pr}_i^s}{\mathrm{pr}_i^s} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \mathrm{pr}_1^s}{\mathrm{pr}_1^s}\right)^{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \ldots \tag{3.7}$$

для каждого $s = 1, \ldots, k$, последовательность чисел $\{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ фиксирована, и определяет класс вероятностей $\mathbb{P}r_{(\beta)}$, в котором содержатся все вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$. Иными словами, предположим, что *существует возможность* P, *максимально согласованная с каждой вероятностью* $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$. Ее распределение $\mathrm{p}_i \triangleq \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, определяется условиями (3.4).

Условия максимальной согласованности распределения (3.4) со всеми распределениями в (3.7) определяются следующими эквивалентностями

$$\beta_i \in [0,\, 1] \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}^{\beta_i} \Leftrightarrow \frac{1 - \mathrm{pr}_1^s - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}^s}{\mathrm{pr}_{i-1}^s} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \mathrm{pr}_1^s}{\mathrm{pr}_1^s} = \left(\frac{1 - \mathrm{pr}_1^s - \ldots - \mathrm{pr}_i^s}{\mathrm{pr}_i^s} \cdot \ldots \cdot \frac{1 - \mathrm{pr}_1^s}{\mathrm{pr}_1^s}\right)^{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \ldots \tag{3.8}$$

Так как для всех $s = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, m$ при $n \to \infty$ $\nu_j^{(n_s)} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathrm{pr}_j^s$, то для любых $\varepsilon >$

$0,\ k, m$ существует число $N = N(\varepsilon, k, m)$, такое, что для всех $s = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m$, с вероятностью единица для всех $n \geqslant N(\varepsilon, k, m)$ $|\nu_j^{(n_s)} - \mathrm{pr}_j^s| < \varepsilon$, откуда следует, что для любых $\varepsilon > 0,\ j = 1, \ldots, m$ и п.н. для всех $n \geqslant N(\varepsilon, k, m)$

$$|\nu_j^{(n)} - \mathrm{pr}_j^{(n)} \leqslant \sum_{s=1}^{k} n_s/n|\nu_j^{(n_s)} - \mathrm{pr}_j^s| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Поскольку последовательность величин $\mathrm{pr}_1^{(n)}, \mathrm{pr}_2^{(n)}, \ldots$ «блуждает» в множестве $\{\mathrm{Pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots),\ Pr = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \mathrm{Pr}^s,\ \sum_{s=1}^{k} \lambda_s = 1,\ s = 1, \ldots, k$, являющемся выпуклой оболочкой, натянутой на вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, согласно (3.9) начиная с номера $N(\varepsilon, k, m)$ последовательность величин $\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \ldots$ с вероятностью единица окажется в монжестве $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{\substack{\mathrm{Pr} \in \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{Pr}^i,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\\ \lambda_i \in (0,1),\ i=1,\ldots,k.}} O_{(\varepsilon)}(\mathrm{Pr})$, где $O_{(\varepsilon)}(\mathrm{Pr})$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке Pr. Таким образом, и в этом случае на основе конечного числа наблюдений результатов стохастического эксперимента можно восстановить лишь множество $\bigcup\limits_{\beta \in \mathcal{B}'} \mathbb{P}_{(\beta)}$ классов возможностей, где $\mathcal{B}' = \{\beta \in \mathcal{B},\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)} \cap \mathcal{D} \neq \varnothing\}$.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 3.1. *Если вероятность* Pr*, контролирующая исходы стохастического эксперимента* Э*, принадлежит одному из классов* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$*,* $\beta \in \mathcal{B}$*, то* $\forall\ \varepsilon > 0$ *п.н. безошибочно на основании наблюдений результатов конечного числа* $n(\varepsilon)$ *взаимно независимых повторений* Э *восстанавливается множество* $\bigcup\limits_{\substack{\beta \in \mathcal{B},\\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)} \cap O_{(\varepsilon)} \neq \varnothing}} \mathbb{P}_{(\beta)}$ *классов возможностей, где* $O_{(\varepsilon)}$ *— замкнутый шар радиуса* ε *с центром в точке* Pr.

Теорема 3.2. *Пусть* $\text{Э}_1, \text{Э}_2, \ldots$ *— последовательность взаимно независимых стохастических экспериментов* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1), (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_2), \ldots$*, причем среди вероятностей* $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2,\ \ldots$ *конечное число различных, например,* $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$*. Если существует возможность* P*, максимально согласованная с вероятностями* $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$*, каждая из которых принадлежит классу* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)}$*,* $\beta \in \mathcal{B}$*, то на основании наблюдений результатов конечного числа экспериментов* $\text{Э}_1, \text{Э}_2, \ldots\ \forall\ \varepsilon > 0$ *п.н. безошибочно может быть восстановлено множество* $\bigcup\limits_{\beta \in \mathcal{B}'} \mathbb{P}_{(\beta)}$ *классов возможностей, где* $\mathcal{B}' = \{\beta \in \mathcal{B},\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\beta)} \cap \mathcal{D} \neq \varnothing\}$*,*

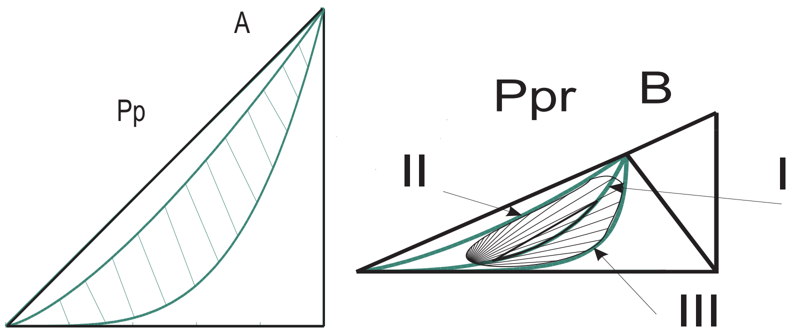


Рис. 2.6. а) «Треугольник возможностей» $\mathbb{P}$, на котором заштриховано семейство классов эквивалентных возможностей, восстановленное на основе наблюдений результатов испытаний, представленных на рисунке б); б) «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}$, на котором выделен черным участок кривой I, содержащий вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^s$, контролирующие исходы испытаний, криволинейный треугольник, содержащий все выпуклые комбинации $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^s$, и заштрихованная окрестность этого треугольника, содержащая соответствующие выпуклые комбинации частот, в том числе наблюдаемые частоты.

$\mathcal{D} = \bigcup\limits_{\substack{\mathrm{Pr} \in \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{Pr}^i, \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \\ \lambda_i \in (0,1), \; i=1,\ldots,k.}} O_{(\varepsilon)}(\mathrm{Pr})$, *где* $O_{(\varepsilon)}(\mathrm{Pr})$ *— замкнутый шар радиуса* ε *с центром в точке* Pr.

Таким образом показано, что в отличие от варианта, расмотренного в [11], во втором варианте теории возможностей на основании *конечного* числа наблюдений результатов стохастического эксперимента можно восстановить лишь семейство теоретико-возможностных моделей. В этом смысле второй вариант теории возможностей оказался существенно «ближе» к теории вероятностей по сравнению с вариантом, которому в основном посвящена монография [11]. На рис. 2.6 для случая $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ а) представлен «треугольник возможностей» $\mathbb{P}$ (а)), на котором заштриховано семейство классов эквивалентных возможностей, восстановленное на основе наблюдений результатов испытаний, представленных на рис. 2.6 б), на котором выделен черным участок кривой I, содержащий вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^s$, контролирующие исходы испытаний. Криволинейный треугольник на рис. 2.6 б) содержит все выпуклые комбинации $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^s$, его окрестность (заштрихована) —

соответствующие выпуклые комбинации частот, в том числе наблюдаемые частоты.

3.2. Правило принятие решения для эмпирически восстановленной модели. Поскольку эмпирически восстанавливается не отдельная неприводимая теоретико-возможностная модель, а их семейство, рассмотрим задачу оптимального оценивания ненаблюдаемого нечеткого элемента $\xi \in X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Пусть распределение возможностей $\varphi^\xi(\cdot) : X \to [0,\, 1]$ значений ξ неизвестно, но известен их класс Φ. Качество оценивания охарактеризуем величиной возможности ошибки оценивания, обусловленной использованием элемента $y \in X$ в качестве оценки ξ

$$\mathrm{P}(\varphi^\xi(\cdot), y) = \sup_{x \in X} (\varphi^\xi(x) l(x, y)), \tag{3.10}$$

где $l(x, y) = 0,\ x = y,\ l(x, y) > 0,\ x \neq y$, т.е. ошибка невозможна только при совпадении оценки и оцениваемого элемента.

Для определения оптимальной оценки $y^* \in X$ решим минимаксную задачу

$$\max_{\varphi^\xi(\cdot) \in \Phi} \mathrm{P}(\varphi^\xi(\cdot), y) \sim \min_{y \in X}. \tag{3.11}$$

Как нетрудно видеть, решением задачи (3.11) является решение задачи

$$\mathrm{P}(\widetilde{\varphi}^\xi(\cdot), y) \sim \min_{y \in X}.$$

при самом «плохом» распределении $\widetilde{\varphi}^\xi(\cdot)$, удовлетворяющем условию

$$\widetilde{\varphi}^\xi(x) \geqslant \varphi^\xi(x),\ x \in X,\ \varphi^\xi(\cdot) \in \Phi \tag{3.12}$$

Поскольку в рамках второго варианта распределение $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ любой возможности должно удовлетворять условиям (2.9), для последовательностей $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ условие (3.12) принимает вид

$$\widetilde{\beta}_i \geqslant \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

Таким образом эмпирически восстановленная теоретико-возможностная модель может быть использована для эффективного решения задачи оценивания.

На рис. 2.6 а) класс эквивалентных «самых плохих» распределений — кривая, ограничивающая восстановленное семейство классов эквивалентных возможностей.

Глава 3

Правила решения для неопределенных нечетких и неопределенных стохастических моделей

§ 1. Теоретико-возможностная модель интерпретации данных

Постановка задачи интерпретации данных. Пусть в эксперименте измеряется

$$\xi = Af + \nu, \tag{1.1}$$

— искаженный шумом $\nu \in \mathcal{R}_n$ выходной сигнал Af прибора A, на вход которого поступил неизвестный сигнал $f \in \mathcal{F}$, $A : \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}_n$ — заданный оператор, который моделирует измерительный прибор, $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}_m$ — множество, априори содержащее f, $\mathcal{R}_m$, $\mathcal{R}_n$ — конечномерные евклидовы пространства, m, n — их размерности. В задаче интерпретации измерения требуется на основании измерения, полученного по схеме (1.1), оценить параметр исследуемого объекта $u = Uf \in \mathcal{U}$, то есть требуется определить правило оценивания (интерпретации) $d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{U}$ так, чтобы элемент $d(\xi)$ можно было считать наиболее точной версией значения Uf параметра исследуемого объекта. Предварительно следует убедиться, что результаты измерений, выполненных по схеме (1.1), не противоречат модели эксперимента.

Линейный оператор $U : \mathcal{R}_m \to \mathcal{U}$ моделирует идеальный измерительный приборо, он определяет связь между сигналом f и параметром u исследуемого объекта, не возмущенного измерением: на его выходе исследователь получает значение параметра исследуемого объекта, свойственные его состоянию, неискаженному измерением. Рассматриваемая задача называется задачей редукции измерения к идеальному прибору [11, 48].

Рассмотрим теоретико-возможностную *модель эксперимента*, заданную совместным распределением возможностей значений следующих нечетких элементов: выходного сигнала ξ, входного сигнала φ, и параметра η исследуемого объекта

$$\pi^{\xi,\varphi,\eta}(x,f,u),\ (x,f,u)\in\mathcal{R}_n\times\mathcal{F}\times\mathcal{U}. \tag{1.2}$$

Значение $\pi^{\xi,\varphi,\eta}(x,f,u)$ равно возможности равенств $\xi=x,\ \varphi=f,\ \eta=u$. Маргинальное распределение

$$\pi^{\xi,\eta}(x,u)=\sup_{f\in\mathcal{F}}\pi^{\xi,\varphi,\eta}(x,f,u),\ (x,u)\in\mathcal{R}_n\times\mathcal{U}, \tag{1.3}$$

определяет модель интерпретации измерения, позволяющую, в частности, получить оценку значения параметра $\eta=u$, основанную на результате измерения $\xi=x$. При этом, исходя из априорного распределения сигнала ξ

$$\pi^{\xi}(x)=\sup_{u\in\mathcal{U}}\pi^{\xi,\eta}(x,u),\quad x\in\mathcal{R}_n, \tag{1.4}$$

можно оценить и состоятельность модели эксперимента. Если, например, $\xi=x$ — результат измерения и $\pi^{\xi}(x)=0$, то модель (1.2) следует признать неадекватной.

Для получения распределения (1.2), определяющего модель эксперимента, заметим, что модель измерения, связывающая нечеткие элементы ξ,φ естественно задать распределением переходной возможности, см. гл. 1,

$$\pi^{\xi|\varphi}(x|f),\ x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F}, \tag{1.5}$$

определяющей зависимость распределения нечеткого элемента ξ от значения $f\in\mathcal{F}$ нечеткого элемента φ, и распределением

$$\pi^{\varphi}(f),\quad f\in\mathcal{F}, \tag{1.6}$$

представляющим априорную информацию о возможных значениях сигнала φ. Равенство

$$\pi^{\xi,\varphi}(x,f)=\min(\pi^{\xi|\varphi}(x|f),\pi^{\varphi}(f)),\ (x,f)\in\mathcal{R}_n\times\mathcal{F}, \tag{1.7}$$

определит совместное распределение ξ,φ, т.е. *модель измерения*, см гл. 1.

Аналогично модель интерпретации входного сигнала измерительной компоненты удобно охарактеризовать распределением переходной возможности

$$\pi^{\eta|\varphi}(u|f),\ u \in \mathcal{U},\ f \in \mathcal{F}, \tag{1.8}$$

и априорным распределением (1.6). При этом *модель интерпретации входного сигнала* измерительной компоненты будет задана совместным распределением

$$\pi^{\varphi,\eta}(f,u) = \min(\pi^{\eta|\varphi}(u|f), f^{\varphi}(f)), \quad (f,u) \in \mathcal{F} \times \mathcal{U}. \tag{1.9}$$

А поскольку, как нетрудно увидеть, распределение переходной возможности

$$\pi^{\xi|\varphi,\eta}(x|f,u) = \pi^{\xi|\varphi}(x|f),\ x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F},\ u \in \mathcal{U}, \tag{1.10}$$

не зависит от u, распределение (1.2)

$$\begin{gathered}\pi^{\xi,\varphi,\eta}(x,f,u) = \min(\pi^{\xi|\varphi}(x|f), \pi^{\varphi,\eta}(f,u)) = \\ = \min(\pi^{\xi|\varphi}(x|f), \pi^{\eta|\varphi}(u|f), \pi^{\varphi}(f)),\ x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F},\ u \in \mathcal{U}.\end{gathered} \tag{1.11}$$

В рассматриваемом случае состоятельность модели эксперимента совпадает с состоятельностью модели измерения, определяемой возможностью $\pi^{\xi}(x) = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \pi^{\xi,\varphi}(x,f)$ результата измерения $\xi = x \in \mathcal{R}_n$.

Пусть в схеме измерения $\xi = A\varphi + \nu$ ν — нечеткий элемент $\mathcal{R}_n$, $\pi^{\nu}(\cdot)\colon \mathcal{R}_n \to [0,1]$ — его распределение. Тогда для распределения переходной вероятности (1.5), (1.10) найдем

$$\pi^{\xi|\varphi}(x|f) = \pi^{\nu}(x - Af), \quad x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F}. \tag{1.12}$$

Если $\pi^{\varphi}(\cdot)\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ — априорное распределение (1.6), то $\pi^{\xi,\varphi}(x,f) = \min(\pi^{\nu}(x - Af), \pi^{\varphi}(f)),\ x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F}$, — модель измерения (1.7). Если в (1.8) связь между $f \in \mathcal{F}$ и $u \in \mathcal{U}$ «четкая» и задана равенством

$$\pi^{\eta|\varphi}(u|f) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = Uf, \\ 0, & \text{если } u \neq Uf,\ f \in \mathcal{F},\ u \in \mathcal{U}, \end{cases} \tag{1.13}$$

то $\pi^{\varphi,\eta}(f,u) = \min(\pi^{\eta|\varphi}(u|f), \pi^{\varphi}(f)) = \begin{cases} \pi^{\varphi}(f), & \text{если } u = Uf, \\ 0, & \text{если } u \neq Uf, \end{cases}$ $f \in \mathcal{F},\ u \in \mathcal{U}$, — модель интерпретации входного сигнала (1.9). Согласно (1.12), (1.13) для модели эксперимента

(1.11) найдем

$$\pi^{\xi,\varphi,\eta}(x,f,u)=\min(\pi^{\nu}(x-Af),\pi^{\eta|\varphi}(u|f),\pi^{\varphi}(f))=\begin{cases}\min(\pi^{\nu}(x-Af),\pi^{\varphi}(f)), & \text{если } u=Uf,\\ 0, & \text{если } u\neq Uf,\end{cases}$$

$x\in\mathcal{R}_n$, $f\in\mathcal{F}$, $u\in\mathcal{U}$. Поэтому в (1.3) $\pi^{\xi,\eta}(x,u)=\sup\limits_{f\in\mathcal{F}\ \ u=Uf}\min(\pi^{\nu}(x-Af),\pi^{\varphi}(f))$, $x\in\mathcal{R}_n$, $u\in\mathcal{U}$, и в (1.4) $\pi^{\xi}(x)=\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}\min(\pi^{\nu}(x-Af),\pi^{\varphi}(f))$, $x\in\mathcal{R}_n$.

Задачу интерпретации измерения можно понимать как задачу оптимального оценивания значения Uf параметра u исследуемого объекта [11].

Рассмотрим вкратце теоретико-возможностные методы оптимального оценивания нечетких элементов, основанные на минимизации возможности или необходимости ошибки оценивания. В общем случае выражение для возможности ошибки оценивания ненаблюдаемого нечеткого элемента β значением функции $d(\alpha)$ наблюдаемого нечеткого элемента α имеет следующий вид:

$$P(d(\cdot))=\sup_{a,b\in X\times Y}\min(\pi^{\alpha,\beta}(a,b),l(b,d(a))), \tag{1.14}$$

где применительно к рассматриваемым далее задачам $\alpha\in X$ - нечеткий вектор наблюдений, $\beta\in Y$ - нечеткий вектор параметров, которые нужно оценить на основании зарегистрированного значения α, $\pi^{\alpha,\beta}(\cdot,\cdot):X\times Y\to[0,1]$ - совместное распределение возможностей значений наблюдений и оцениваемых параметров, которое предполагается заданным. В (1.14) $l(\cdot,\cdot):Y\times Y\to[0,1]$ – известная функция, ее значение $l(f,y)$ — возможность ошибки, обусловленной использованием $y\in Y$ вместо $f\in Y$ (аналог функции потерь в статистической теории оценивания). В равенстве (1.14) функция $d(\cdot):X\to Y$ каждому наблюдению α ставит в соответствие нечеткий вектор $\widehat{\beta}=d(\alpha)\in Y$ в качестве оценки β и называется правилом оценивания. Если согласно принятым в теории возможностей правилам композиции «min» в (1.14) понимать как «умножение», а «sup» — как «интегрирование», то нетрудно заметить, что выражение (1.14) — аналог средних потерь в статистической теории оценивания (см., например,[58]).

Необходимость $N(d(\cdot))$ ошибки оценивания, сопутствующей правилу $d(\cdot)$, дается выражением:

$$N(d(\cdot)) = \inf_{a,b\in X\times Y} \max(\theta \circ \pi^{\alpha,\beta}(a,b), l(b,d(a))),$$

где $\theta \circ \pi^{\alpha,\beta}(a,b) \triangleq \theta(\pi^{\alpha,\beta}(a,b))$, $\theta(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ строго монотонно убывает, непрерывна, $\theta(0) = 1, \theta(1) = 0$.

Если качество оценивания вектора β с помощью правила $d(\cdot) : X \to Y$ охарактеризовать величиной возможности или необходимости ошибки оценивания, то оптимальное правило определится соответственно из условия

$$P(d^*(\cdot)) = \min_{d(\cdot):X\to Y} P(d(\cdot)), \tag{1.15}$$

или

$$N(d_*(\cdot)) = \min_{d(\cdot):X\to Y} N(d(\cdot)). \tag{1.16}$$

В задаче интерпретации данных возможность и необходимость ошибки оценивания вектора параметров $U\varphi$ определяются равенствами:

$$P(d(\cdot)) = \sup_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}} \min(\pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf,d(x))), \tag{1.17}$$

и соответственно

$$N(d(\cdot)) = \inf_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}} \max(\vartheta \circ \pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf,d(x))). \tag{1.18}$$

Функция $l(\cdot,\cdot)$ далее всюду удовлетворяет условию

$$l(u,v) = \begin{cases} 0, & u = v \\ > 0, & u \neq v, \quad u,v \in \mathcal{U}, \end{cases} \tag{1.19}$$

согласно которому ошибка невозможна только при точном совпадении оценки и оцениваемого элемента.

Оптимальное правило оценивания $d_*(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{U}$ определено как решение задачи на минимум необходимости ошибки оценивания (1.18)

$$\inf_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}} \max(\vartheta \circ \pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf,d(x))) \sim \min_{d(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}}. \tag{1.20}$$

В работе [11] показано, что задача (1.20) сводится к более простой задаче

$$\inf_{f\in\mathcal{F}} \max(\vartheta \circ \pi^{\xi,\varphi}(x,f), l(Uf,d)) \sim \min_{d\in\mathcal{U}}, \tag{1.21}$$

в которой требуется найти элемент $d_* = d_{x*} \in \mathcal{U}$, а не функцию $d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{U}$; в задаче (1.21) x — фиксированный результат наблюдений. Для функций $l(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющих условиям (1.19), задача (1.21) упрощается и принимает вид

$$\pi^{\xi,\varphi}(x, f) \sim \max_{f \in \mathcal{F}}. \tag{1.22}$$

Следовательно, $d_* = d_{x*} = Uf_{x*}$, где f_{x*} — оценка f максимальной возможности: $\pi^{\xi,\varphi}(x, f_{x*}) = \max\limits_{f \in \mathcal{F}} \pi^{\xi,\varphi}(x, f)$. Для найденной оценки $Uf_{x*} \in \mathcal{U}$ необходимость ошибки оценивания $N(d_*(\cdot)) = \inf\limits_{x \in \mathcal{R}_n} (\theta \circ \pi^{\xi,\varphi}(x, f_{x*})) = 0$. Что касается адекватности модели, то если для найденной оценки $f_{x*} \in \mathcal{F}$ возможность $\pi^{\xi,\varphi}(x, f_{x*}) = 0$, то модель эксперимента следует признать противоречащей результату измерения.

Для того, чтобы решить задачу (1.22), необходимо знать совместное распределение $\pi^{\xi,\varphi}(\cdot,\cdot)$ и класс $\mathcal{F}$.

Пусть класс $\mathcal{F}$ известен, и

$$\pi^{\nu}(n) = \rho\left(\frac{\|\Sigma^{-1/2} n\|}{\sigma}\right), \tag{1.23}$$

где $\Sigma : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n$ — положительно определенный оператор, $\rho(\cdot) : \mathcal{R}_+ \to [0, 1]$ — произвольная непрерывная строго монотонно убывающая на отрезке $[0, 1]$ функция, $\rho(0) = 1$, $\rho(s) = 0$, $s \in [1, \infty]$, σ — «масштабный» коэффициент для ν, определяющий область его возможных значений: возможность того, что $\nu = n$ равна 0 для $\|\Sigma^{-1/2} n\| \geqslant \sigma$. Согласно этому распределению чем больше ошибка измерения, тем меньше ее возможность, причем возможность ошибки n, не удовлетворяющей условию $\|\Sigma^{-1/2} n\| < \sigma$, равна 0. Что касается распределения $\pi^{\varphi}(\cdot)$, то в случае, когда о сигнале f априори ничего не известно, все значения φ будем считать априори равновозможными, т.е. $\pi^{\varphi}(f) = 1$, $f \in \mathcal{F}$. При этих условиях согласно (1.7), (1.12), задача (1.22) отыскания оценки максимальной возможности принимает вид

$$\|\Sigma^{-1/2}(x - Af)\| \sim \min_{f \in \mathcal{F}}. \tag{1.24}$$

Решение задачи (1.24) дано в следующей теореме [11].

Т е о р е м а 1.1. *Пусть в схеме измерения* (1.1) $A : \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}_n$ *— заданный линейный* *оператор, f — априори произвольный элемент $\mathcal{F}$, ν — нечеткий элемент $\mathcal{R}_n$, распределение возможностей его значений определяется выражением* (1.23)*. Оптимальной оценкой Uf, где $U : \mathcal{R}_n \to \mathcal{U}$ — заданный линейный оператор, является любой нечеткий элемент*

$$d_*(\xi) = U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}\Sigma^{-1/2}\xi + Ua(\xi), \tag{1.25}$$

минимизирующий необходимость ошибки оценивания (1.18)*, где функция $l(\cdot,\cdot) : \mathcal{U}\times\mathcal{U} \to [0,\,1]$ удовлетворяет условию* (1.19)*. В* (1.25) *$a(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{N}(A)$ — произвольная функция; если (и только если) $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(U)$, оптимальной оценкой Uf является единственный нечеткий элемент*

$$d_*(\xi) = U(\Sigma^{-1/2}A)^{-}\Sigma^{-1/2}\xi. \tag{1.26}$$

Для любой оценки (1.25) *необходимость ошибки оценивания равна нулю.*

§ 2. Неопределенная нечеткая модель в задаче интерпретации данных

Пусть исследователь сомневается в истинности используемой теоретико-возможностной модели схемы измерения (1.1). На практике его сомнение выражается в том, что в (**??**) вместо распределений возможностей $\pi^{\nu}(\cdot) : \mathcal{R}_n \to [0,\,1]$ и $\pi^{\varphi}(\cdot) : \mathcal{F} \to [0,\,1]$ значений шума и входного сигнала соответственно он использует классы распределений, и по поводу каждого распределения в соответствующем классе высказывается, насколько, по его мнению, правдоподобно и (или) заслуживает доверия утверждение о том, что эта модель (шума или сигнала) адекватно отражает реальное положение вещей.

В этом случае естественно для формулировки модели использовать средства неопределенной нечеткой математики [12], в частности, считать в схеме (1.1) ошибку измерения и входной сигнал неопределенными нечеткими (НН) векторами $\widetilde{\nu} \in \mathcal{R}_n$, $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{F}$ с распределениями $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}}(\cdot) : \mathcal{R}_n \times [0,\,1] \to [0,\,1]$, $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\varphi}}(\cdot) : \mathcal{F} \times [0,\,1] \to [0,\,1]$ (см. гл. 1) соответственно. Схема измерений (1.1) принимает вид

$$\widetilde{\xi} = A\widetilde{\varphi} + \widetilde{\nu}, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{\xi} \in \mathcal{R}_n$ — НН вектор, значения которого $x \in \mathcal{R}_n$ наблюдаются в эксперименте. В задаче интерпретации измерения требуется оценить параметр $u \in \mathcal{U}$ исследуемого объекта, являющийся значением НН элемента $\widetilde{\eta} = U\widetilde{\varphi} \in \mathcal{U}$, то есть требуется определить правило (интерпретации) $d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{U}$, которое каждому наблюдению $\widetilde{\xi} \in \mathcal{R}_n$ ставит в соответствие оценку $\widehat{U\widetilde{\varphi}} = U\widehat{\widetilde{\varphi}} = d(\widetilde{\xi}) \in \mathcal{U}$ НН элемента $U\widetilde{\varphi} \in \mathcal{U}$.

Неопределенная нечеткая модель. Неопределенная нечеткая (НН) *модель эксперимента* определена совместным распределением правдоподобия возможностей (см. гл. 1)

$$\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}_{\cdot,\cdot,\cdot}(\cdot) : \mathcal{R}_n \times \mathcal{U} \times \mathcal{F} \times [0,\, 1] \to [0,\, 1], \tag{2.2}$$

модель интерпретации измерения — маргинальным распределением

$$\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}_{\cdot,\cdot}(\cdot) : \mathcal{R}_n \times \mathcal{U} \times [0,\, 1] \to [0,\, 1],\ \tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}_{x,u}(p) = \left(\bigvee_{f \in \mathcal{F}} \tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}_{x,u,f}\right)(p),\ x \in \mathcal{R}_n,\ u \in \mathcal{U},\ p \in [0,\, 1]. \tag{2.3}$$

Априорное распределение НН вектора $\widetilde{\xi}$, которое понадобится при проверке адекватности модели, имеет вид

$$\tau^{\widetilde{\xi}}_{\cdot}(\cdot) : \mathcal{R}_n \times [0,\, 1] \to [0,\, 1],\ \tau^{\widetilde{\xi}}_{x}(p) = \left(\bigvee_{\substack{f \in \mathcal{F},\\ u \in \mathcal{U}}} \tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}_{x,u,f}\right)(p),\ x \in \mathcal{R}_n,\ p \in [0,\, 1]. \tag{2.4}$$

Переходное распределение (см. гл. 1) НН вектора $\widetilde{\xi}$ при $\widetilde{\varphi} = f$ $\tau^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi}}_{\cdot|f}(\cdot) : \mathcal{R}_n \times [0,\, 1] \to [0,\, 1]$, $f \in \mathcal{F}$, которое согласно схеме (2.1) определено выражением

$$\tau^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi}}_{x|f}(p) = \tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af}(p),\ p \in [0,\, 1], \tag{2.5}$$

и априорное распределение

$$\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\cdot}(\cdot) : \mathcal{F} \times [0,\, 1] \to [0,\, 1] \tag{2.6}$$

НН вектора $\widetilde{\varphi}$ определяют совместное распределение

$$\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}_{x,f}(p) = (\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af} \wedge \tau^{\widetilde{\varphi}}_{f})(p),\ x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F},\ p \in [0,\, 1], \tag{2.7}$$

— *модель измерения.*

Модель интерпретации входного сигнала охарактеризована переходным распределением НН элемента $\widetilde{\eta}$ при $\widetilde{\varphi} = f$:

$$\tau^{\widetilde{\eta}|\widetilde{\varphi}}_{\cdot|f}(\cdot) : \mathcal{U} \times [0,\, 1] \to [0,\, 1], \tag{2.8}$$

и априорным распределением (2.6):

$$\tau_{\cdot,\cdot}^{\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}(\cdot):\mathcal{U}\times\mathcal{F}\times[0,\,1]\to[0,\,1],\ \tau_{u,f}^{\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}(p)=(\tau_{u|f}^{\widetilde{\eta}|\widetilde{\varphi}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}})(p),\ u\in\mathcal{U},\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1]. \qquad (2.9)$$

Наконец, поскольку переходное распределение

$$\tau_{\cdot|f,u}^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi},\widetilde{\eta}}(\cdot):\mathcal{R}_n\times[0,\,1]\to[0,\,1],\ \tau_{x|f,u}^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi},\widetilde{\eta}}(p)=\tau_{x|f}^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi}}(p),\ x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F},\ u\in\mathcal{U},\ p\in[0,\,1], \qquad (2.10)$$

не зависит от u, распределение (2.2) имеет вид:

$$\tau_{x,f,u}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi},\widetilde{\eta}}(p)=(\tau_{x|f}^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi}}\wedge\tau_{u,f}^{\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}})=(\tau_{x|f}^{\widetilde{\xi}|\widetilde{\varphi}}\wedge\tau_{u|f}^{\widetilde{\eta}|\widetilde{\varphi}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}})(p),\ x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F},\ u\in\mathcal{U},\ p\in[0,\,1]. \qquad (2.11)$$

Пусть аналогично (1.13) связь между $\widetilde{\eta}\in\mathcal{U}$ и $\widetilde{\varphi}\in\mathcal{F}$ в (2.8) « определенная четкая», а именно, вполне правдоподобна лишь равная 1 возможность равенства $\widetilde{\eta}=u$ при $u=Uf$:

$$\tau_{u|f}^{\widetilde{\eta}|\widetilde{\varphi}}(p)=\begin{cases}1,\ \text{если } p=1,\ u=Uf,\\[2mm] 0,\ \text{если } 0\leqslant p<1,\ u=Uf,\\[2mm] 0,\ \text{если } 0\leqslant p\leqslant 1,\ u\neq Uf,\end{cases}\ f\in\mathcal{F},\ u\in\mathcal{U},\ p\in[0,\,1]. \qquad (2.12)$$

В этом случае, согласно (2.5)

$$\tau_{x,u,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}(p)=\begin{cases}\left(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}}\right)(p), & u=Uf,\\ 0, & u\neq Uf,\end{cases}\quad x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1], \qquad (2.13)$$

$$\tau_{x,u}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(p)=\bigvee_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ u=Uf}}\left(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}}\right)(p),\ u\in\mathcal{U},\ x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1], \qquad (2.14)$$

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)=\bigvee_{f\in\mathcal{F}}\left(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}\wedge\tau_f^{\widetilde{\varphi}}\right)(p),\ x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1]. \qquad (2.15)$$

НН модель ошибки $\widetilde{\nu}$ задана распределением возможностей нечеткого вектора $\nu_u=\widetilde{\nu}|_{\widetilde{u}=u}$ для каждого значения $u\in R_+$ неопределенного элемента $\widetilde{u}$ равенством [12]

$$f^{\nu_u}(x)=h(\|\Sigma^{-1/2}x\|^2,\,u)=\begin{cases}1-\dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{u}, & \text{если } 0\leqslant\|\Sigma^{-1/2}x\|^2\leqslant u,\\[2mm] 0, & \text{если } \|\Sigma^{-1/2}x\|^2>u,\ u>0,\ x\in\mathcal{R}_n;\end{cases} \qquad (2.16)$$

$$f^{\nu_0}(0)=h(0,0)=\quad 1,$$

см.рис. 3.1(a), где $\Sigma:\mathcal{R}_n\to\mathcal{R}_n$ — положительно определенный оператор. В (2.16) значение $\widetilde{u}=u$ определяет верхнюю границу возможных значений погрешности $\|\nu_u\|$ и, тем самым,

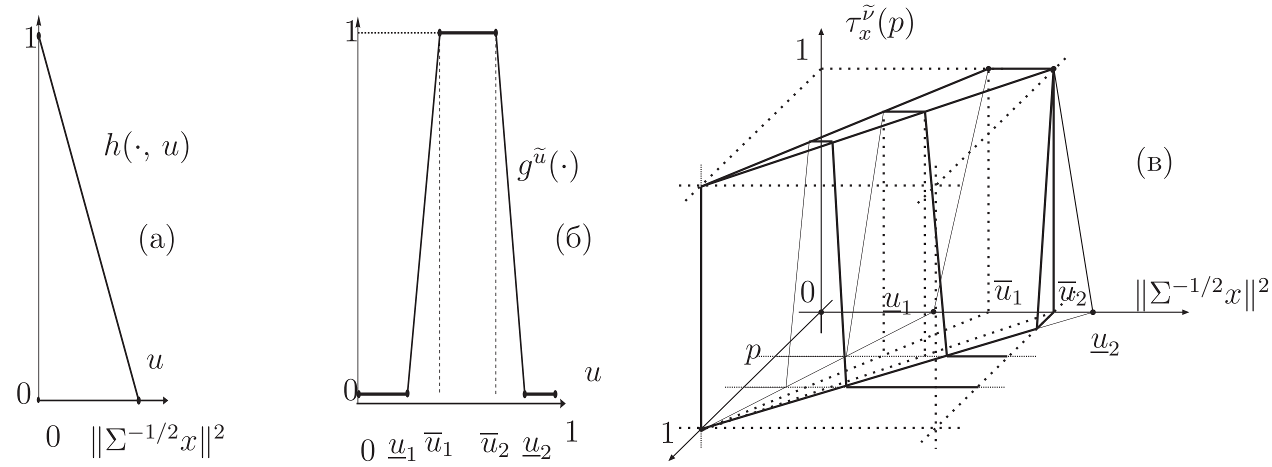


Рис. 3.1. Графики функций: (а) $h(\|\Sigma^{-1/2}\cdot\|^2,\, u) : R_+ \to [0,\,1]$, $u \in R_+$ — фиксировано; (б) $g^{\widetilde{u}}(\cdot) : R_+ \to [0,\,1]$; в) График функции (2.17) (поверхность) $\tau_x^{\widetilde{\nu}}(p)$, $x \in X$, $p \in [0,\,1]$

— распределение возможностей $f^{\widetilde{\nu}}(\cdot)$ (неопределенную функцию). Распределение $g^{\widetilde{u}}(\cdot)$ неопределенного элемента $\widetilde{u}$ представлено на рис.3.1 (б), где $[\overline{u}_1,\, \overline{u}_2]$ — промежуток вполне правдоподобных значений $\widetilde{u}$, значения $\widetilde{u}$, меньшие или равные $\underline{u}_1$ или бóльшие или равные $\underline{u}_2$, — неправдоподобны, а все остальные значения $\widetilde{u}$ в той или иной мере сомнительны.

В таком случае, см. рис. 3.1(в), распределение правдоподобия возможностей значений НН вектора $\widetilde{\nu}$ имеет вид [12]

$$\tau_x^{\widetilde{\nu}}(p) = \sup\{g^{\widetilde{u}}(u)|\; u \in R_+,\; h(\|\Sigma^{-1/2}x\|^2,\, u) = p\} =$$
$$= \begin{cases} g^{\widetilde{u}}\left(\dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{1-p}\right) > 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\; \underline{u}_1 < \dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{1-p} < \underline{u}_2, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\; \begin{cases} \dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{1-p} \leqslant \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \leqslant \dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{1-p}, \end{cases} \\ 1, & \text{если } p = 1,\; \|\Sigma^{-1/2}x\| = 0, \\ 0, & \text{если } p = 1,\; \|\Sigma^{-1/2}x\| > 0, \end{cases} \quad x \in \mathcal{R}_n. \quad (2.17)$$

Что касается НН модели входного сигнала $\widetilde{\varphi}$, распределение правдоподобия возможностей, моделирующее ситуацию, когда о входном сигнале априори ничего не известно, имеет вид

$$\tau_f^{\widetilde{\varphi}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = 1,\ f \in \mathcal{F}, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ f \in \mathcal{F}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Выражение (2.18) означает, что вполне правдоподобно только распределение возможностей значений $\widetilde{\varphi}$, моделирующее полное незнание — все значения $\widetilde{\varphi}$ равновозможны, а остальные распределения возможностей неправдоподобны.

§ 3. Шкала значений правдоподобия возможностей

Шкала значений правдоподобия возможностей определяется четырьмя элементами: множеством $\mathcal{T}$ распределений правдоподобия возможностей, бинарным отношением $\preccurlyeq$ упорядоченности на $\mathcal{T}$ и двумя бинарными операциями — *сложением* $\vee : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ и *умножением* $\wedge : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$.

3.1. Класс $\mathcal{T}$, операции $\vee$, $\wedge$, $+$ и $\bullet$ [12]. В [12] $\mathcal{T} = \{\tau(\cdot) : [0,\,1] \longrightarrow [0,\,1]\}$ — класс функций, определенных на $[0,\,1]$, принимающих значения в $[0,\,1]$, удовлетворяющих *условию нормировки* $\sup\limits_{0\leqslant p\leqslant 1} \tau(p) = 1$ и содержащий:

I *вместе с каждой функцией* $\tau(\cdot)$ *функции*

$$\tau^*(p) = \sup_{a \geqslant p} \tau(a), \qquad \tau_*(p) = \sup_{a \leqslant p} \tau(a); \tag{3.1}$$

II *вместе с каждой парой функций* $\tau_1(\cdot)$ *и* $\tau_2(\cdot)$ *их сумму* $(\tau_1 \vee \tau_2)(\cdot)$ и *произведение* $(\tau_1 \wedge \tau_2)(\cdot)$, *определенные равенствами*

$$\begin{aligned} &(\tau_1 \vee \tau_2)(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_1(a), \tau_2(b)) \,|\, a,\, b \in [0,1],\ \max(a,\, b) = p\}, \\ &(\tau_1 \wedge \tau_2)(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_1(a), \tau_2(b)) \,|\, a,\, b \in [0,1],\ \min(a,\, b) = p\}, \quad p \in [0,\,1]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Интерпретация формул (3.1) и (3.2) в терминах понятий НН элементов и НН множеств такова[1]).

В равенствах (3.1) $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) \geqslant p) = \sup\limits_{a \geqslant p} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(a)$, $\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) \leqslant p) =$

[1]) Интерпретация дана для случая независимых НН элемента $\widetilde{\xi}$ и НН множества $A^{\widetilde{\eta}}$ (см. §. 3 гл. 1).

$\sup\limits_{a\leqslant p}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a)$ суть правдоподобия истинности высказываний, согласно которым возможность равенства $\widetilde{\xi} = x \in X$ не меньше и соответственно не больше $p \in [0, 1]$.

В равенствах (3.2) $q_{x,y}(a, b) \triangleq \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_y^{\widetilde{\eta}}(b))$ — правдоподобие того, что возможности событий $\widetilde{\xi} = x \in X$ И $\widetilde{\eta} = y \in Y$ суть $a \in [0, 1]$ И $b \in [0, 1]$ соответственно, а $(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \vee \tau_y^{\widetilde{\eta}})(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_y^{\widetilde{\eta}}(b))|a, b \in [0, 1], \max(a, b) = p\}$ есть правдоподобие того, что возможность по крайней мере одного из равенств $\widetilde{\xi} = x$ ИЛИ $\widetilde{\eta} = y$ равна $p \in [0, 1]$.

Аналогично $(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_{\overline{x}}^{A^{\widetilde{\eta}}})(p) \triangleq \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a), \tau_{\overline{x}}^{A^{\widetilde{\eta}}}(b))|a, b \in [0, 1], \min(a, b) = p\}$ есть правдоподобие того, что $p \in [0, 1]$ есть возможность равенства $\widetilde{\xi} = x$ И включения $\overline{x} \in A^{\widetilde{\eta}}$; в частности, $(\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{A^{\widetilde{\eta}}})(p)$ — правдоподобие возможности $p \in [0, 1]$ события $\widetilde{\xi} = x \in A^{\widetilde{\eta}}$, $x \in X$.

Основные свойства операций (3.1), (3.2), и, в частности, тот факт, что операции (3.1) и (3.2) сохраняют нормировку, приведены в следующей лемме [12], в которой операции $(\tau_1 + \tau_2)(\cdot)$ и $(\tau_1 \bullet \tau_2)(\cdot)$ определены равенствами

$$\begin{gathered}(\tau_1 + \tau_2)(p) \triangleq \tau_1(p) + \tau_2(p) \triangleq \max(\tau_1(p), \tau_2(p)) \equiv \max(\tau_1, \tau_2)(p),\\ (\tau_1 \bullet \tau_2)(p) \triangleq \tau_1(p) \bullet \tau_2(p) \triangleq \min(\tau_1(p), \tau_2(p)) \equiv \min(\tau_1, \tau_2)(p), \quad p \in [0, 1].\end{gathered} \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. 1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}(\tau_1 \wedge \tau_2)(p) = \max[\min(\tau_1(p), \tau_2^*(p)), \min(\tau_1^*(p), \tau_2(p))] = ((\tau_1 \bullet \tau_2^*) + (\tau_1^* \bullet \tau_2))(p) =\\ = \min[\tau_1^*(p), \tau_2^*(p), \max(\tau_1(p), \tau_2(p))] = (\tau_1^* \bullet \tau_2^* \bullet (\tau_1 + \tau_2))(p),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tau_1 \vee \tau_2)(p) = \max[\min(\tau_1(p), \tau_{2*}(p)), \min(\tau_{1*}(p), \tau_2(p))] = ((\tau_1 \bullet \tau_{2*}) + (\tau_{1*} \bullet \tau_2))(p) =\\ = \min[\tau_{1*}(p), \tau_{2*}(p), \max(\tau_1(p), \tau_2(p))] = (\tau_{1*} \bullet \tau_{2*} \bullet (\tau_1 + \tau_2))(p),\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned}(\tau_1 \vee \tau_2)^*(p) = \max(\tau_1^*(p), \tau_2^*(p)) \triangleq (\tau_1^* + \tau_2^*)(p),\\ (\tau_1 \vee \tau_2)_*(p) = \min(\tau_{1*}(p), \tau_{2*}(p)) \triangleq (\tau_{1*} \bullet \tau_{2*})(p),\\ (\tau_1 \wedge \tau_2)^*(p) = \min(\tau_1^*(p), \tau_2^*(p)) \triangleq (\tau_1^* \bullet \tau_2^*)(p),\\ (\tau_1 \wedge \tau_2)_*(p) = \max(\tau_{1*}(p), \tau_{2*}(p)) \triangleq (\tau_{1*} + \tau_{2*})(p),\end{aligned}\right\} p \in [0, 1]. \tag{3.5}$$

2. *Операции* $\vee$ *и* $\wedge$ *ассоциативны:*

$$\tau(p) \triangleq \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \tau_j\right)(p) = \sup\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \tau_i(a_i)|a_j \in [0,\,1],\ j = 1\,\ldots,\,n,\ \min_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = p\right\} =$$

$$= \max_{1\leqslant k\leqslant n} \min(\tau_1^*(p),\ldots,\tau_{k-1}^*,\tau_k(p),\tau_{k+1}^*(p),\ldots,\tau_n^*(p)) \triangleq \mathop{+}_{k=1}^{n}\left(\tau_k(p)\bullet\left(\mathop{\bullet}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\tau_i^*(p)\right)\right),$$

$$p \in [0,\,1]; \quad (3.6)$$

$$\tau^*(p) = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \tau_k^*(p), \qquad \tau_*(p) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \tau_{k*}(p), \qquad p \in [0,\,1]; \tag{3.7}$$

$$\tau(p) \triangleq \left(\bigvee_{j=1}^{n} \tau_j\right)(p) = \sup\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \tau_i(a_i)|a_j \in [0,\,1],\ j = 1\,\ldots,\,n,\ \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = p\right\} =$$

$$= \max_{1\leqslant k\leqslant n}\min(\tau_{1*}(p),\ldots,\tau_{k-1*},\tau_k(p),\tau_{k+1*}(p),\ldots,\tau_{n*}(p)) \triangleq \mathop{+}_{k=1}^{n}\left(\tau_k(p)\bullet\left(\mathop{\bullet}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}\tau_{i*}(p)\right)\right),$$

$$p \in [0,\,1]; \quad (3.8)$$

$$\tau^*(p) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \tau_k^*(p), \qquad \tau_*(p) = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \tau_{k*}(p), \qquad p \in [0,\,1]. \tag{3.9}$$

3.2. Класс $\mathcal{T}$, эквивалентность $\simeq$, упорядоченность $\preccurlyeq$. Бинарные отношения эквивалентности $\simeq$ и упорядоченности $\preccurlyeq$ на $\mathcal{T}$ можно ввести разными способами, каждый из которых допускает содержательную интерпретацию. Далее будет рассмотрено определение эквивалентности и упорядоченности согласно [12]. Другие способы приведены в § 4, где на их основе формулируются новые критерии оптимальности для неопределенных нечетких моделей.

Определение 3.1 ([12]). Функции $\tau_1(\cdot)$ и $\tau_2(\cdot)$ называются эквивалентными, $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$, если

$$\tau_1^*(\cdot) = \tau_2^*(\cdot), \quad \tau_{1*}(\cdot) = \tau_{2*}(\cdot); \tag{3.10}$$

очевидно, $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot),\ \tau_2(\cdot) \simeq \tau_3(\cdot) \Rightarrow \{\tau_1(\cdot)\} \simeq \{\tau_3(\cdot)\}$.

Если же

$$\tau_1^*(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_{1*}(p) \geqslant \tau_{2*}(p), \qquad p \in [0,\,1], \tag{3.11}$$

то $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$. Очевидно, $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, $\tau_2(\cdot) \preccurlyeq \tau_3(\cdot) \Rightarrow\ \tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_3(\cdot)$.

Эквивалентность $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$ и упорядоченность $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$ можно записывать как $\tau_1(p) \simeq \tau_2(p)$, $p \in [0,\, 1]$, и соответственно, как $\tau_1(p) \preccurlyeq \tau_2(p)$, $p \in [0,\, 1]$.

Как показано в [12], отношение $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$ можно определить условиями

$$\tau_1(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_{1*}(p) \geqslant \tau_2(p), \qquad p \in [0,\, 1], \tag{3.11*}$$

которые эквивалентны условиям (3.11).

Отношение $\preccurlyeq$ *определяет частичную упорядоченность на* $\mathcal{T}$, содержательная интерпретация которой в [12] пояснена в терминах понятия НН элемента. Пусть $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\xi}_2$ — НН элементы, принимающие значения в X, $\tau_\cdot^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot)$, $\tau_\cdot^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$ — их распределения, которые при $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ не эквивалентны ($\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \not\simeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$) и удовлетворяют условию $\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$. Если в (3.11*) $\tau_1(\cdot) = \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot)$, $\tau_2(\cdot) = \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$ и, для простоты, точные верхние грани достигаются в (3.1), то неравенства в (3.11*) означают соответственно, что

$$\forall p \in [0,\, 1]: \; \exists p' \geqslant p: \; \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p) \leqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p') \text{ и } \exists p'' \leqslant p: \; \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p'') \geqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p),$$

т.е. для каждого значения возможности p найдутся значение p', не меньшее p, и p'', не большее p, такие, что возможность p' равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ более правдоподобна, чем возможность p равенства $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, и возможность p'' равенства $\widetilde{\xi}_1 = x_1$ более правдоподобна, чем возможность p равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$.

Так как неравенства $p' \leqslant p$ и $p'' \geqslant p$, $p, p', p'' \in [0,\, 1]$, инвариантны относительно строго монотонного преобразования шкалы значений возможности, можно сказать, что неравенства в (3.11*) означают соответственно, что *большие* возможности равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$, как и *малые* возможности равенства $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, более правдоподобны. Соотношение $\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$ свидетельствует в пользу равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ как более надежного, более вероятного, чем $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, и в силу сказанного выше возможность является более важной характеристикой равенств $\widetilde{\xi}_i = x_i$, $i = 1, 2$, значение которой позволяет предпочесть одно равенство другому, тогда как правдоподобие играет дополнительную, подтверждающую роль.

Что касается НН множеств $\widetilde{A}_1 \equiv A^{\widetilde{\eta}_1}$ и $\widetilde{A}_2 \equiv A^{\widetilde{\eta}_2}$, то отношение $\tau_{x_1}^{\widetilde{A}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{A}_2}(\cdot)$, означающее, что $\tau_{x_1}^{\widetilde{A}_1 *}(p) \leqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{A}_2 *}(p)$, $\tau_{x_1 *}^{\widetilde{A}_1}(p) \geqslant \tau_{x_2 *}^{\widetilde{A}_2}(p)$, $p \in [0,\, 1]$, свидетельствует в пользу высказывания о включении $x_2 \in \widetilde{A}_2$ как более надежного, более вероятного, чем высказывание, согласно которому $x_1 \in \widetilde{A}_1$, поскольку

- более правдоподобны бóльшие возможности включения $x_2 \in \widetilde{A}_2$, чем $x_1 \in \widetilde{A}_1$,
- более правдоподобны мéньшие возможности включения $x_1 \in \widetilde{A}_1$, чем $x_2 \in \widetilde{A}_2$.

В [12] на классе $\widetilde{\mathcal{T}}$ всех функций $\tau(\cdot) : [0, 1] \to [0, 1]$ определен оператор $T : \widetilde{\mathcal{T}} \to \widetilde{\mathcal{T}}$,

$$(T\tau)(p) \triangleq \sup\{\min(\tau(p_1), \tau(p_2))|p_1, p_2 \in [0, 1], \ p_1 \leqslant p \leqslant p_2\} = \\ = \min(\tau_*(p), \tau^*(p)) \triangleq (\tau_* \bullet \tau^*)(p), \qquad p \in [0, 1], \quad (3.12)$$

являющийся проектором,

$$(T\widehat{\tau})(\cdot) = \widehat{\tau}(\cdot),$$

и рассмотрен класс $\mathring{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$ тех функций $\tau(\cdot) \in \mathcal{T}$, которые являются «неподвижными точками» оператора T

$$\mathring{\mathcal{T}} = \{\tau(\cdot) \in \mathcal{T}, \ (T\tau)(\cdot) \triangleq \min(\tau_*, \tau^*)(\cdot) = \tau(\cdot)\}.$$

Для любой функции $\tau(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}}$ $\tau(p) = \min(\tau^*(p), \tau_*(p))$, $p \in [0, 1]$. Это свойство использовано в § 7 при разработке метода проверки адекватности неопределенных нечетких моделей на основании результатов наблюдений.

В [12] также рассмотрена группа автоморфизмов шкалы $(\mathcal{T}, \preccurlyeq, \vee, \wedge)$ значений правдоподобия возможностей.

Пусть Γ_i — множество преобразований отрезка $[0, 1]$, заданных функциями $\gamma_i(\cdot) : [0, 1] \to [0, 1]$, непрерывными, строго монотонно возрастающими и удовлетворяющими условиям $\gamma_i(0) = 0$, $\gamma_i(1) = 1$; Γ_i — группа относительно правила композиции $(\gamma_i'\gamma_i)(t) \triangleq \gamma_i'(\gamma_i(t))$, $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2$. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ — множество пар $\gamma = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$ и $\Gamma*$ — группа преобразований функций $\tau(\cdot) \in \mathcal{T}$, определенных равенством $(\gamma * \tau)(p) \equiv \gamma * \tau(p) \triangleq \gamma_1(\tau(\gamma_2^{-1}(p)))$, $p \in [0, 1]$.

В [12] показано, что $\Gamma*$ — группа автоморфизмов шкалы $(\mathcal{T}, \preccurlyeq, \vee, \wedge)$.

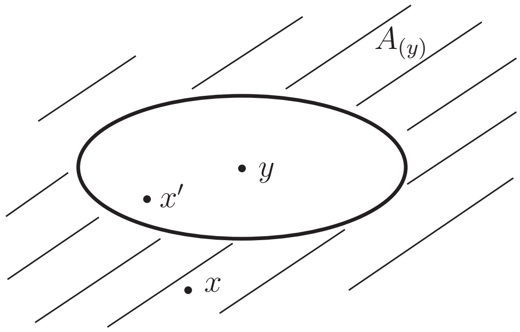


Рис. 3.2. Элемент $x \in X$ покрыт, элемент $x' \in X$ — не покрыт множеством $A_{(y)}$, которое является значением НН множества $\widetilde{A}_{(y)}$ при $y \in Y$,.

§ 4. Оценивание для неопределенной нечеткой модели

4.1. Оценивание неопределенного нечеткого элемента. Для простоты критерии оптимальности сформулированы и исследованы на примере задачи оценивания ненаблюдаемого неопределенного нечеткого элемента. Пусть $\widetilde{\xi}$ — НН элемент, принимающий значения в X, $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) : X \times [0,\,1] \to [0,\,1]$ — распределение правдоподобия возможностей его значений, $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$, — семейство НН множеств, принимающих значения в $\mathcal{P}(X)$, $\tau_{\cdot}^{\widetilde{A}_{(y)}}(\cdot)$ — индикаторная функция множества $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$, и пусть $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{A}_{(y)}$ независимы при любом $y \in Y$ (см. гл. 1). Для каждого $x \in X$ значение $\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)$ правдоподобия возможности $p \in [0,\,1]$ включения $x \in \widetilde{A}_{(y)}$ интерпретируется как значение правдоподобия возможности p ошибки оценивания $x \in X$ значением $y \in Y$ [12] (см. рис. 3.2).

В данном случае

$$\begin{gathered} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) = p), \\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) = \mathrm{P}l(P(x \in \widetilde{A}_{(y)}) = p),\ p \in [0,\,1],\ x \in X, \end{gathered} \tag{4.1}$$

и соответственно правдоподобие возможности p ошибки оценивания НН элемента $\widetilde{\xi}$ значением $y \in Y$ есть правдоподобие возможности p включения $\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}$,

$$\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = p) = \sup\{\inf_{x \in X} \tau_x^{(y)}(q_x) | \sup_{\bar{x} \in X} q_{\bar{x}} = p\} \triangleq \left(\bigvee_{x \in X} \tau_x^{(y)}\right)(p), \quad p \in [0,\,1]. \tag{4.2}$$

Здесь

$$\tau_x^{(y)}(q) = \sup\{\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}}(a),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(b)) |\, a,\, b \in [0,\, 1],\ \min(a,\, b) = q\} \triangleq$$
$$\triangleq (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}})(q), \quad q \in [0,\, 1], \quad (4.3)$$

и считается, что неопределенная функция $P(\widetilde{\xi} = x,\, x \in \widetilde{A}_{(y)})$, $x \in X$, имеет независимые значения при любом[1]) $y \in Y$.

4.2. Критерий оптимальности, в котором возможность является основной характеристикой качества оценивания [12]. Как показано в [12] (см. также предыдущий параграф), если при оценивании НН элемента $\widetilde{\xi} \in X$ возможность — основная, правдоподобие — дополнительная характеристика качества оценивания, оптимальная оценка $\widehat{y} \in Y$ НН элемента $\widetilde{\xi} \in X$ определяется как решение двукритериальной задачи

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) \triangleq \sup_{a \geqslant p} \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = a) \sim \min_{y \in Y}, \\ &\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p) \triangleq \sup_{a \leqslant p} \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = a) \sim \max_{y \in Y}, \end{aligned} \quad p \in [0,\, 1], \qquad (4.4)$$

подробно рассмотренной в [12]. Такая оценка $\widehat{y}$ минимизирует правдоподобие больших и максимизирует правдоподобие малых возможностей ошибки оценивания.

В (4.4)

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) = \sup_{x \in X} \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p)), \\ &\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p) = \inf_{x \in X} \max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)), \end{aligned} \quad p \in [0,\, 1],\ [12].$$

где

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) \geqslant p), \quad \tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} = x) \leqslant p),$$
$$\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(x \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p), \quad \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) \triangleq \mathrm{P}l(P(x \in \widetilde{A}_{(y)}) \leqslant p),$$
$$p \in [0,\, 1],\ x \in X,\ y \in Y.$$

Задача (4.4) инвариантна относительно выбора шкалы значений правдоподобия возможностей (см. гл. 1) и определяет соответственно множества $Y^*(p) \triangleq \{y^*(p) \in Y,\ \sup_{x \in X} \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),$ $\tau_x^{\widetilde{A}_{(y^*(p))}*}(p)) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p),\, \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p))\}$, $Y_*(p) \triangleq \{y_*(p) \in Y,\ \inf_{x \in X} \max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\ \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y_*(p))}}(p)) =$

[1]) В этом случае $\mathrm{P}l(\forall x \in X\ P(\widetilde{\xi} = x,\, x \in \widetilde{A}_{(y)}) = q_x) = \inf_{x \in X} (\tau_x^{\widetilde{\xi}} \wedge \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}})(q_x)$, $q_\cdot : X \to [0,\, 1]$, [12].

$\max\limits_{y \in Y} \inf\limits_{x \in X} \max(\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x*}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p))\},\ p \in [0,\, 1]$.

4.3. Критерий оптимальности, в котором правдоподобие является основной характеристикой качества оценивания. Рассмотрим способ введения бинарных отношений эквивалентности $\simeq$ и упорядоченности $\preccurlyeq$ на классе $\mathcal{T}$, отличный от предложенного в § 3.

Определение 4.1. Функции $\tau_1(\cdot)$ и $\tau_2(\cdot)$ назовем эквивалентными, $\tau_1(\cdot) \simeq \tau_2(\cdot)$, если

$$\tau_1^*(\cdot) = \tau_2^*(\cdot), \quad \tau_1^+(\cdot) = \tau_2^+(\cdot), \tag{4.5}$$

где

$$\tau^+(p) = \inf_{a \geqslant p} \tau(a),\ p \in [0,\, 1]. \tag{4.6}$$

Будем писать $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, если

$$\tau_1^*(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_1^+(p) \leqslant \tau_2^+(p), \qquad p \in [0,\, 1]. \tag{4.7}$$

Отношение $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, заданное в определении 4.1, можно определить условиями

$$\tau_1(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_1^+(p) \leqslant \tau_2(p), \qquad p \in [0,\, 1], \tag{4.7*}$$

которые эквивалентны условиям (4.7). В самом деле, согласно (4.7) $\tau_1^+(p) \leqslant \tau_2^+(p) \leqslant \tau_2(p)$, $p \in [0,\, 1]$, поэтому неравенства (4.7*) следуют из неравенств (4.7). С другой стороны, учитывая, что $\tau_1^+(\cdot)$ монотонно неубывает, исходя из неравенств (4.7*), найдем

$$\tau_1^+(p) = \inf_{a \geqslant p} \tau_1^+(a) \leqslant \inf_{a \geqslant p} \tau_2(a) = \tau_2^+(p), \quad p \in [0,\, 1].$$

Рассмотрим содержательную интерпретацию определения 4.1. Предположим, что точная верхняя и точная нижняя грани в (4.7) достигаются, $\tau_i(\cdot) = \tau_{x_i}^{\widetilde{\xi}_i}(\cdot),\ i = 1, 2$. Неравенства в (4.7*) означают, что

$$\forall p \in [0,\, 1] :\ \exists p'' \geqslant p :\ \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p) \leqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p''),$$

т.е. для каждого значения p найдется значение возможности p'', не меньшее p, такое, что возможность p'' равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ более правдоподобна, чем возможность p равенства

$\widetilde{\xi}_1 = x_1$, и

$$\forall p \in [0,\,1]:\ \exists p' \geqslant p:\ \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p') \leqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p),$$

т.е. для каждого значения p найдется значение возможности p', не меньшее p, такое, что возможность p' равенства $\widetilde{\xi}_1 = x_1$ менее правдоподобна, чем возможность p равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$. Поскольку упорядоченность $\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$ означает, что равенство $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ более предпочтительно, чем равенство $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, в данном случае правдоподобие является более важной характеристикой равенств $\widetilde{\xi}_i = x_i$, $i = 1, 2$, чем возможность.

Основные свойства операции (4.6) даны в следующей лемме:

Лемма 4.1. *Имеют место равенства*

1.

$$\begin{aligned} (\tau_1 \vee \tau_2)^+(p) &= \max(\tau_1^+(p), \tau_2^+(p)) \triangleq (\tau_1^+ + \tau_2^+)(p), \\ (\tau_1 \wedge \tau_2)^+(p) &= \min(\tau_1^+(p), \tau_2^+(p)) \triangleq (\tau_1^+ \bullet \tau_2^+)(p), \end{aligned} \qquad p \in [0,1].$$

2. Если $\tau(p) \triangleq \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \tau_j\right)(p)$, *то* $\tau^+(p) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_k^+(p)$, $p \in [0,\,1]$.

3. Если $\tau(p) \triangleq \left(\bigvee_{j=1}^{n} \tau_j\right)(p)$, *то* $\tau^+(p) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_k^+(p)$, $p \in [0,\,1]$.

Доказательство. Доказательство следует из взаимной дистрибутивности операций $+ \sim$ «max» и $\bullet \sim$ «min». □

Если при решении задачи оценивания НН элемента $\widetilde{\xi}$ правдоподобие — основная, возможность — дополнительная характеристика качества оценивания, оптимальную оценку $y^+ \in Y$ НН элемента $\widetilde{\xi} \in X$ в силу определения 4.1 естественно искать как решение двукритериальной задачи

$$\sup_{a \geqslant p} \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = a) \sim \min_{y \in Y},\ p \in [0,\,1], \tag{4.8}$$

$$\inf_{a \geqslant p} \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = a) \sim \min_{y \in Y},\ p \in [0,\,1]. \tag{4.9}$$

В (4.8), (4.9) согласно лемме 4.1

$$\mathrm{P}l^{+}(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = p) \triangleq \inf_{a \geqslant p} \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = a) =$$
$$= \sup_{x\in X} \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}+}(p),\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}+}(p)),\ \ p \in [0,\ 1], \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_x^{\widetilde{\xi}+}(p) &\triangleq \mathrm{P}l^{+}(P(\widetilde{\xi} = x) = p), \\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}+}(p) &\triangleq \mathrm{P}l^{+}(P(x \in \widetilde{A}_{(y)}) = p), \end{aligned} \quad p \in [0,\ 1],\ x \in X,\ y \in Y.$$

Задача (4.9) определяет множество $Y^{+}(p) \triangleq \{y^{+}(p) \in Y,\ \sup\limits_{x\in X} \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}+}(p),\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y^{+}(p))}+}(p)) = \min\limits_{y\in Y} \sup\limits_{x\in X} \min(\tau_x^{\widetilde{\xi}+}(p),\ \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}+}(p))\}$, $p \in [0,\ 1]$.

Если выбрать в качестве семейства $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$, семейство «определенных четких» (ОЧ) множеств, эквивалентных обычным множествам $A_{(y)}$, $y \in Y = X$, индикаторные функции которых

$$\chi_{A_{(y)}}(x) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \qquad x \in X,\ y \in X, \tag{4.11}$$

то

$$\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = \chi_{A_{(y)}}(x) \\ 0, & \text{если } p \neq \chi_{A_{(y)}}(x) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{cases} p = 1, & x \neq y, \\ p = 0, & x = y, \end{cases} \\ 0, & \text{если } 0 < p < 1, \end{cases} \quad x,\ y \in X. \tag{4.12}$$

$$\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}*}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ x \neq y, \\ 1, & \text{если } p = 0,\ x = y, \\ 0, & \text{если } 0 < p \leqslant 1,\ x = y, \end{cases} \quad \tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}+}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = 1,\ x \neq y, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ x = y, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ x \neq y. \end{cases} \tag{4.13}$$

Согласно (4.13) задача (4.8) обретает следующий вид [12]:

$$\sup_{\substack{x\in X \\ x\neq y}} \tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) \sim \min_{y\in Y},\ p \in [0,\ 1]; \tag{4.14}$$

Поскольку согласно (4.13)

$$\sup_{x\in X}\min(\tau_x^{\widetilde{\xi}+}(p),\tau_x^{\widetilde{A}_{(y)}+}(p))=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{x\in X\\ x\neq y}}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(1), & p=1,\\ 0, & 0\leqslant p<1,\end{cases}\quad x,y\in X, \tag{4.15}$$

задача (4.9) приводит к задаче

$$\sup_{\substack{x\in X\\ x\neq y}}\tau_x^{\widetilde{\xi}}(1)\sim\min_{y\in Y}. \tag{4.16}$$

Из вида задач (4.14) и (4.16) следует, что если разрешима задача (4.14), то разрешима и задача (4.16), причем всякое решение задачи (4.14) является решением задачи (4.16). Таким образом, справедлива следующая лемма

Лемма 4.2. *Пусть $\widetilde{A}_{(y)}$, $y\in Y$ — семейство определенных четких множеств, индикаторные функции которых определены выражением* (4.12). *Тогда, если разрешима задача* (4.8), *то разрешима и задача* (4.9), *всякое решение задачи* (4.8) *является решением и задачи* (4.9).

На рис. 3.3 приведен пример решения задачи оптимального оценивания НН элемента $\widetilde{\xi}$, принимающего значения на отрезке $[-1,1]=X=Y$, распределение правдоподобия возможностей значений которого представлено на рис. 3.3 (а): решение y^* задачи (4.8) совпадает с решением y^+ задачи (4.9) (см. рис.3.3 (б), (в)), является решением двукритериальной задачи (4.8), (4.9) и совпадает с решением $\widehat{y}$ двукритериальной задачи (4.4) [12]. Для наилучшей оценки $y^*=y^+$ вполне правдоподобны лишь значения возможности $p\in[0,\widehat{p}]$ ошибки оценивания. Для любой другой оценки $y\in Y$ вполне правдоподобна, в частности, возможность $p=1$ ошибки оценивания.

4.4. Критерий оптимальности при равноценных возможности и правдоподобии. Рассмотрим еще один способ введения отношения эквивалентности и упорядоченности на классе $\mathcal{T}$.

Определение 4.2. Функции $\tau_1(\cdot)$ и $\tau_2(\cdot)$ назовем эквивалентными, $\tau_1(\cdot)\simeq\tau_2(\cdot)$, если

$$\tau_1^*(\cdot)=\tau_2^*(\cdot),\quad \tau_{1+}(\cdot)=\tau_{2+}(\cdot), \tag{4.17}$$

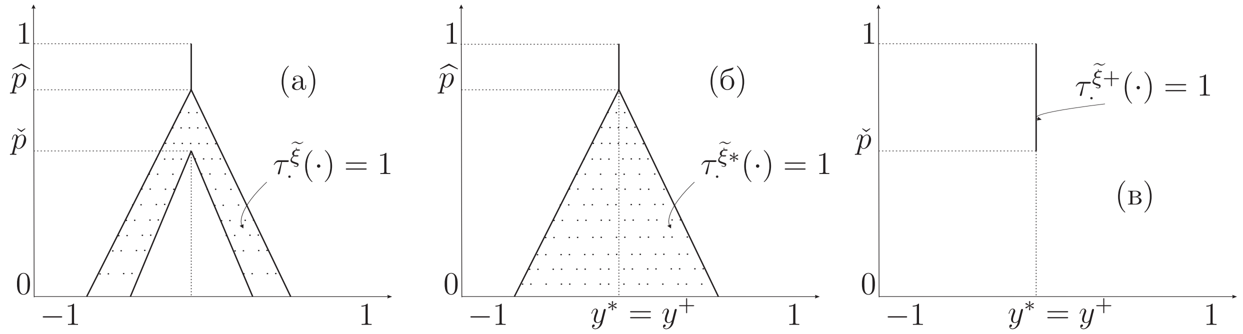


Рис. 3.3. Распределение $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ равно единице всюду в заполненной пунктиром, нулю — в незаполненной пунктиром области, (а), аналогично представлены $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, (б), и $\tau_x^{\widetilde{\xi}+}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, (в); $y^* = y^+$ — оптимальная оценка $\widetilde{\xi}$.

где

$$\tau_+(p) = \inf_{a \leqslant p} \tau(a), \; i = 1, 2, \; p \in [0, 1]. \tag{4.18}$$

Если же

$$\tau_1^*(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_{1+}(p) \leqslant \tau_{2+}(p), \qquad p \in [0, 1], \tag{4.19}$$

то будем писать $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$.

Отношение $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$, заданное в определении 4.2, можно определить условиями

$$\tau_1(p) \leqslant \tau_2^*(p), \qquad \tau_{1+}(p) \leqslant \tau_2(p), \qquad p \in [0, 1], \tag{4.19*}$$

которые эквивалентны условиям (4.19). А именно, согласно (4.19) $\tau_{1+}(p) \leqslant \tau_{2+}(p) \leqslant \tau_2(p)$, $p \in [0, 1]$, поэтому неравенства (4.19*) следуют из неравенств (4.19). С другой стороны, учитывая, что $\tau_{1+}(\cdot)$ монотонно невозрастает, исходя из неравенств (4.19*), найдем

$$\tau_{1+}(p) = \inf_{a \leqslant p} \tau_{1+}(a) \leqslant \inf_{a \leqslant p} \tau_2(a) = \tau_{2+}(p), \qquad p \in [0, 1].$$

Рассмотрим содержательную интерпретацию упорядочености $\tau_1(\cdot) \preccurlyeq \tau_2(\cdot)$. Допустим, что точная верхняя и точная нижняя грани в (4.19) достигаются, $\tau_1(\cdot) = \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot)$, $\tau_2(\cdot) = \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$. Второе неравенство в (4.19*) означает, что

$$\forall p \in [0, 1] : \; \exists p' \leqslant p : \; \tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(p') \leqslant \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(p),$$

т.е. для каждой возможности p найдется такое p', не большее p, что возможность p' равенства $\widetilde{\xi}_1 = x_1$ менее правдоподобна, чем возможность p равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$. Поскольку согласно определению 4.2 упорядоченность $\tau_{x_1}^{\widetilde{\xi}_1}(\cdot) \preccurlyeq \tau_{x_2}^{\widetilde{\xi}_2}(\cdot)$ свидетельствует в пользу равенства $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ по сравнению с равенством $\widetilde{\xi}_1 = x_1$, в данном случае и возможность и правдоподобие являются одинаково важными характеристиками, значения которых позволяют предпочесть равенство $\widetilde{\xi}_2 = x_2$ равенству $\widetilde{\xi}_1 = x_1$.

Рассмотрим основные свойства операции (4.18).

Л е м м а 4.3. *Имеют место равенства*

1.

$$\begin{aligned} (\tau_1 \vee \tau_2)_+(p) &= \max(\tau_{1+}(p), \tau_{2+}(p)) \triangleq (\tau_{1+} + \tau^{2+})(p), \\ (\tau_1 \wedge \tau_2)_+(p) &= \min(\tau_{1+}(p), \tau_{2+}(p)) \triangleq (\tau_{1+} \bullet \tau_{2+})(p), \end{aligned} \quad p \in [0,1].$$

2. Если $\tau(p) \triangleq \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \tau_j \right)(p)$, *то* $\tau_+(p) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_{k+}(p)$, $p \in [0,\, 1]$.

3. Если $\tau(p) \triangleq \left(\bigvee_{j=1}^{n} \tau_j \right)(p)$, *то* $\tau_+(p) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_{k+}(p)$, $p \in [0,\, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из взаимной дистрибутивности операций $+ \sim$ «max» и $\bullet \sim$ «min». $\square$

Согласно сказанному выше, если при оценивании НН элемента $\widetilde{\xi}$ возможность и правдоподобие являются одинаково важными характеристиками качества оценивания, то оптимальную оценку НН элемента $\widetilde{\xi} \in X$ естественно определять, решая двукритериальную задачу

$$\mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) \geqslant p) \sim \min_{y \in Y},\ p \in [0,\, 1], \tag{4.20}$$

$$\mathrm{P}l_+(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = p) \sim \min_{y \in Y},\ p \in [0,\, 1], \tag{4.21}$$

в которой согласно лемме 4.3

$$\mathrm{P}l_+(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = p) \triangleq \inf_{a \leqslant p} \mathrm{P}l(P(\widetilde{\xi} \in \widetilde{A}_{(y)}) = a) =$$

$$= \sup_{x \in X} \min(\tau_{x+}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x+}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)),\ \ p \in [0,\, 1], \quad (4.22)$$

$$\tau_{x+}^{\widetilde{\xi}}(p) \triangleq \mathrm{P}l_+(P(\widetilde{\xi} = x) = p),$$

$$\tau_{x+}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) \triangleq \mathrm{P}l_+(P(x \in \widetilde{A}_{(y)}) = p),\ \ p \in [0,\, 1],\ \ x \in X,\ \ y \in Y.$$

Задача (4.21) определяет множество $Y_+(p) \triangleq \{y_+(p) \in Y,\ \sup\limits_{x \in X} \min(\tau_{x+}^{\widetilde{\xi}}(p),\ \tau_{x+}^{\widetilde{A}_{(y_+(p))}}(p)) = \min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} \min(\tau_{x+}^{\widetilde{\xi}}(p),\, \tau_{x+}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p))\}$, $p \in [0,\, 1]$.

Если $\widetilde{A}_{(y)}$, $y \in Y$ — семейство ОЧ множеств,

$$\tau_{x+}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = 0,\ x = y, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ x \neq y, \\ 0, & \text{если } 0 < p \leqslant 1,\ x = y. \end{cases}$$

В таком случае

$$\sup_{x \in X} \min(\tau_{x+}^{\widetilde{\xi}}(p), \tau_{x+}^{\widetilde{A}_{(y)}}(p)) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in X} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0), & x = y, \\ 0, & 0 < p \leqslant 1, \end{cases} \quad x, y \in X, \quad (4.23)$$

и задача (4.21) принимает вид

$$\tau_y^{\widetilde{\xi}}(0) \sim \min_{y \in Y}. \quad (4.24)$$

В общем случае задачи (4.14) и (4.24), могут не иметь общего решения, соответственно и двукритериальная задача (4.20), (4.21) может не иметь решения. В таком случае можно рассматривать, например, только задачу (4.14), и получить решение, минимизрующее правдоподобие больших возможностей ошибки оценивания.

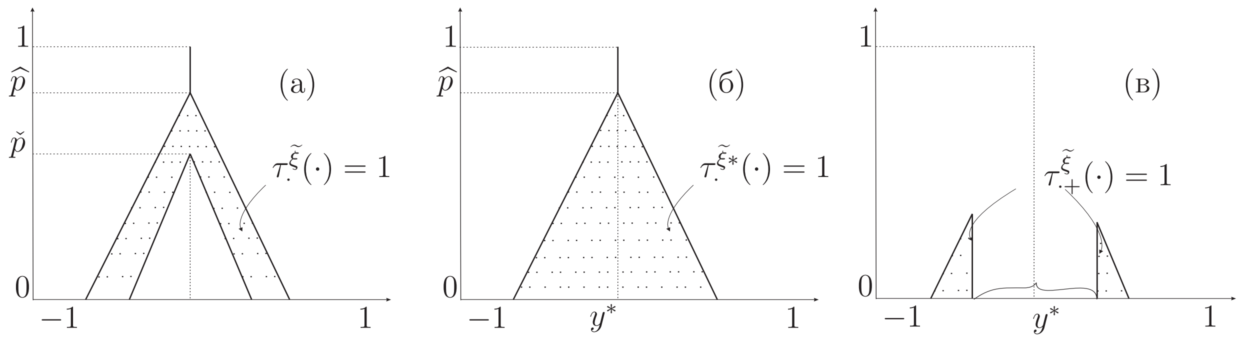
На рис. 3.4 приведен пример решения задачи оптимального оценивания НН элемента $\widetilde{\xi}$ с распределением правдоподобия возможностей, представленным на рис. 3.3 (а): решение y^* задачи (4.14) принадлежит множеству $Y_+(0)$ решений задачи (4.24) (см. рис. 3.4 (б), (в)), и является решением двукритериальной задачи (4.20), (4.21). Для наилучшей оценки h! 

Рис. 3.4. Распределение $\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ равно единице всюду в заполненной пунктиром, нулю — в незаполненной пунктиром области, (а), аналогично представлены $\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, (б), и $\tau_{x+}^{\widetilde{\xi}}(p)$, $(x, p) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, (в); фигурной скобкой выделено множество $Y_+(0)$, $y^* \in Y_+(0)$ — оптимальная оценка $\widetilde{\xi}$.

y^* вполне правдоподобны значения возможности $p \in [0, \widehat{p}]$ ошибки оценивания, при этом для нее вполне неправдоподобна возможность 0 равенства $\widetilde{\xi} = y^*$.

§ 5. Новые критерии оптимальности интерпретации данных для неопределенной нечеткой модели

5.1. Критерий, в котором необходимость является основной характеристикой качества интерпретации. Согласно [12], правдоподобие возможности p ошибки оценивания НН элемента $U\widetilde{\varphi}$ НН элементом $d(\widetilde{\xi}) \in \mathcal{U}$ дается выражением

$$\mathrm{P}l(P(d(\cdot)) = p) = \sup\{\inf_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \tau_f^{(d(x))}(q_{f,x})| \sup_{\substack{\bar f\in\mathcal{F},\\ \bar x\in\mathcal{R}_n}} q_{\bar f,\bar x} = p\} \triangleq \left(\bigvee_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \tau_f^{(d(x))}\right)(p),\ p \in [0, 1], \quad (5.1)$$

где

$$\tau_f^{(d(x))}(q) = \sup\{\min(\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(a), \tau_{Uf}^{\widetilde{A}_{(d(x))}}(b))|\, a, b \in [0, 1],\ \min(a, b) = q\} \triangleq$$
$$\triangleq (\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}} \wedge \tau_{Uf}^{\widetilde{A}_{(d(x))}})(q), \quad q \in [0, 1], \quad (5.2)$$

и считается, что неопределенная функция $P((\widetilde{\xi} = x,\ \widetilde{\varphi} = Uf),\ Uf \in \widetilde{A}_{(d(x))})$, $Uf \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{F}$, имеет независимые значения при любом $x \in \mathcal{R}_n$ и $d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{U}$.

Для того, чтобы получить выражение для правдоподобия необходимости ошибки оценивания $\mathrm{P}l(N(d(\cdot)) = n)$, отметим, что правдоподобие возможности p ошибки оценивания НН элемента $U\widetilde{\varphi}$ значением $d(x) \in \mathcal{U}$ (x — результат измерения), см. [12],

$$\mathrm{P}l(P(U\widetilde{\varphi} \in \widetilde{A}_{(d(x))}) = p) = \sup\{\inf_{f\in\mathcal{F}} \tau_f^{(d(x))}(q_f)|\ \sup_{f\in\mathcal{F}} q_f = p\} \triangleq$$
$$\triangleq \left(\bigvee_{f\in\mathcal{F}} \tau_f^{(d(x))}\right)(p), \quad p \in [0,\,1]. \quad (5.3)$$

Соответственно правдоподобие необходимости n ошибки оценивания $U\widetilde{\varphi}$ значением $d(x) \in \mathcal{U}$, есть

$$\mathrm{P}l(N(U\widetilde{\varphi} \in \widetilde{A}_{(d(x))}) = n) = \mathrm{P}l(P(U\widetilde{\varphi} \notin \widetilde{A}_{(d(x))}) = \theta(n)),\ n \in [0,\,1],\ d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{U}, \quad (5.4)$$

где $\theta(\cdot) : [0,\,1] \to [0,\,1]$ — непрерывная, строго монотонная функция, $\theta(0) = 1,\ \theta(1) = 0,\ \theta(\theta(a)) = a,\ a \in [0,\,1]$.

Поэтому

$$\mathrm{P}l(N(d(\cdot)) = n) = \sup\{\inf_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))}(q_{f,x})|\ \sup_{\substack{\bar{f}\in\mathcal{F},\\ \bar{x}\in\mathcal{R}_n}} q_{\bar{f},\bar{x}} = \theta(n)\} \triangleq$$
$$\triangleq \left(\bigvee_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))}\right)(\theta(n)), \quad \theta(n) \in [0,\,1], \quad (5.5)$$

где

$$\widehat{\tau}_f^{(d(x))}(q) = \sup\{\min(\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(a),\, \tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d(x))}}(b))|\, a,\, b \in [0,\,1],\ \min(a,\,b) = q\} \triangleq$$
$$\triangleq (\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}} \wedge \tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d(x))}})(q), \quad q \in [0,\,1], \quad (5.6)$$

и правдоподобие больших и малых необходимостей ошибки оценивания

$$\mathrm{P}l(N(d(\cdot)) \geqslant n) \triangleq \sup_{a \geqslant n} \mathrm{P}l(N(d(\cdot)) = a) =$$

$$= \sup\{ \inf_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))}(q_{f,x}) | \sup_{\substack{\bar f\in\mathcal{F},\\ \bar x\in\mathcal{R}_n}} q_{\bar f,\bar x} \leqslant \theta(a)\} = \sup_{\substack{0\leqslant q_{f,x}\leqslant\theta(n),\\ f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \inf_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))}(q_{f,x}) =$$

$$= \inf_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_{f*}^{(d(x))}(\theta(n)) \triangleq \left(\bigvee_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))} \right)_* (\theta(n)) =$$

$$= \inf_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}} \max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde\xi,\,\widetilde\varphi}(\theta(n)),\ \tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde A_{(d(x))}}(\theta(n))),\ \theta(n)\in[0,\,1], \quad (5.7)$$

и соотвественно

$$\mathrm{P}l(N(d(\cdot)) \leqslant n) \triangleq \sup_{a \leqslant n} \mathrm{P}l(N(d(\cdot)) = a) = \sup\{ \inf_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))}(q_{f,x}) | \sup_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} q_{f,x} \geqslant \theta(a)\} =$$

$$= \sup_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))*}(\theta(n)) \triangleq \left(\bigvee_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ x\in\mathcal{R}_n}} \widehat{\tau}_f^{(d(x))} \right)^* (\theta(n)) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}} \min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde\xi,\,\widetilde\varphi*}(\theta(n)),\ \tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde A_{(d(x))}*}(\theta(n))),\ \theta(n)\in[0,\,1]. \quad (5.8)$$

В (5.6)–(5.8) $\tau_{\cdot}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde A_{(d(x))}}(\cdot) : \mathcal{U}\times[0,\,1] \to [0,\,1]$ — индикаторная функция НН множества $\mathcal{U}\setminus\widetilde A_{(d(x))}$, дополнительного к НН множеству $\widetilde A_{(d(x))}$, $x\in\mathcal{R}_n,\ d(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}$.

Если необходимость — основная характеристика качества интерпретации, правдоподобие — дополнительная, оптимальное правило интерпретации $d^+(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}$ определяется как решение двукритериальной задачи

$$\left.\begin{aligned} &\inf_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}} \max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde\xi,\,\widetilde\varphi}(\theta(n)),\ \tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde A_{(d(x))}}(\theta(n))) \sim \min_{d(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}},\\ &\sup_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}} \min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde\xi,\,\widetilde\varphi*}(\theta(n)),\ \tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde A_{(d(x))}*}(\theta(n))) \sim \max_{d(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}}, \end{aligned}\right. \theta(n)\in[0,\,1], \quad (5.9)$$

Решение задачи (5.9) будет найдено, если при каждом фиксированном результате измерения $\widetilde{\xi} = x$ будет решена задача

$$\begin{aligned} &\inf_{f\in\mathcal{F}} \max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\ \tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(\theta(n))) \sim \min_{d\in\mathcal{U}}, \\ &\sup_{f\in\mathcal{F}} \min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}*}(\theta(n)),\ \tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}*}(\theta(n))) \sim \max_{d\in\mathcal{U}}, \end{aligned} \quad \theta(n) \in [0,\,1], \tag{5.10}$$

в которой требуется найти не функцию $d(\cdot)$, а ее значение $d = d(x)$ при каждом $x \in \mathcal{R}_n$, не противоречащем модели схемы измерения (2.1) (см. § 6).

Будем считать семейство НН множеств $\widetilde{A}_{(d)},\ d \in \mathcal{U}$, семейством определенных четких множеств. В таком случае

$$\tau_{Uf}^{\widetilde{A}_{(d)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{cases} p = 1, & Uf \neq d, \\ p = 0, & Uf = d, \end{cases},\ Uf, d \in \mathcal{U}, \\ 0, & \text{если } 0 < p < 1, \end{cases} \quad p \in [0,\,1], \tag{5.11}$$

$$\tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \begin{cases} p = 1, & Uf = d, \\ p = 0, & Uf \neq d, \end{cases},\ Uf, d \in \mathcal{U}, \\ 0, & \text{если } 0 < p < 1, \end{cases} \quad p \in [0,\,1], \tag{5.12}$$

$$\tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}*}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ Uf = d, \\ 1, & \text{если } p = 0,\ Uf \neq d, \\ 0, & \text{если } 0 < p \leqslant 1,\ Uf \neq d, \end{cases} \quad Uf, d \in \mathcal{U},\ p \in [0,\,1], \tag{5.13}$$

$$\tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ Uf \neq d, \\ 1, & \text{если } p = 1,\ Uf = d, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ Uf = d, \end{cases} \quad Uf, d \in \mathcal{U},\ p \in [0,\,1], \tag{5.14}$$

Поскольку согласно (5.13), (5.14)

$$\begin{aligned} &\inf_{f\in\mathcal{F}} \max(\tau_{x,f*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\ \tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(\theta(n))) = \tau_{x,f*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\ Uf = d, \\ &\sup_{f\in\mathcal{F}} \min(\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}*}(\theta(n)),\ \tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}*}(\theta(n))) = \tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}*}(\theta(n)),\ Uf = d, \end{aligned} \quad f \in \mathcal{F},\ d \in \mathcal{U},\ \theta(n) \in [0,\,1],$$

вместо (5.10) речь теперь пойдет о задаче

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{x,f*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(\theta(n)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\\&\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}*}(\theta(n)) \sim \max_{f\in\mathcal{F}},\end{aligned}\right.\quad \theta(n)\in[0,\,1]. \tag{5.15}$$

5.2. Критерий, в котором правдоподобие является основной характеристикой качества интерпретации. Значение величины $\mathrm{P}l^{+}(N(d(\cdot))=n)$ определяется согласно (5.1), (5.2) и лемме 4.1 следующим образом

$$\mathrm{P}l^{+}(N(d(\cdot))=n)=\inf_{a\geqslant n}\mathrm{P}l(N(d(\cdot))=a)=$$
$$=\sup_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}}\min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}+}(\theta(n)),\,\tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d(x))}+}(\theta(n))),\;\theta(n)\in[0,\,1]. \tag{5.16}$$

Оптимальное правило интерпретации $\widetilde{d}(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}$ определяется как решение двукритериальной задачи

$$\left.\begin{aligned}&\inf_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}}\max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\,\tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d(x))}}(\theta(n)))\sim\min_{d(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}},\\&\sup_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}}\min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}+}(\theta(n)),\,\tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d(x))}+}(\theta(n)))\sim\min_{d(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}},\end{aligned}\right.\quad\theta(n)\in[0,\,1], \tag{5.17}$$

если правдоподобие является основной характеристикой качества интерпретации, необходимость — дополнительной. Решение задачи (5.17) будет найдено, если при каждом фиксированном результате измерения $\widetilde{\xi}=x$ будет решена задача

$$\left.\begin{aligned}&\inf_{f\in\mathcal{F}}\max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\,\tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(\theta(n)))\sim\min_{d\in\mathcal{U}},\\&\sup_{f\in\mathcal{F}}\min(\tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}+}(\theta(n)),\,\tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}+}(\theta(n)))\sim\min_{d\in\mathcal{U}},\end{aligned}\right.\quad\theta(n)\in[0,\,1]. \tag{5.18}$$

Пусть $\widetilde{A}_{(d)},\ d\in\mathcal{U},$ — семейство определенных четких множеств, индикаторные функции которых определяются выражением (5.11). Поскольку

$$\tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}+}(p)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant p\leqslant 1,\ Uf\neq d,\\ 1, & \text{если } p=1,\ Uf=d,\\ 0, & \text{если } 0\leqslant p<1,\ Uf=d,\end{cases}\quad Uf,d\in\mathcal{U},\ p\in[0,\,1], \tag{5.19}$$

и

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\min(\tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}+}(\theta(n)),\, \tau_{Uf}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(y)}+}(\theta(n))) =$$

$$= \begin{cases} \tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}+}(\theta(n)), & \text{если } \theta(n)=1,\ Uf=d, \\ 0, & \text{если } 0\leqslant\theta(n)<1, \end{cases} \quad f\in\mathcal{F},\ d\in\mathcal{U}, \theta(n)\in[0,\,1],$$

вместо (5.18) речь теперь пойдет о задаче

$$\begin{aligned} \tau_{x,f*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(\theta(n)) &\sim \min_{f\in\mathcal{F}}, \\ \tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}+}(1) &\sim \min_{f\in\mathcal{F}}, \end{aligned} \quad \theta(n)\in[0,\,1]. \tag{5.20}$$

5.3. Критерий, в котором необходимость и правдоподобие — равноценные характеристики качества. Значение величины $\mathrm{P}l_+(N(d(\cdot))=n)$ определяется согласно (5.1), (5.2) и лемме 4.3 выражением

$$\mathrm{P}l_+(N(d(\cdot))=n) = \inf_{a\leqslant n}\mathrm{P}l(N(d(\cdot))=a) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}}\min(\tau_{x,\,f+}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\, \tau_{Uf+}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d(x))}}(\theta(n))),\ \theta(n)\in[0,\,1]. \tag{5.21}$$

Если необходимость и правдоподобие — одинаково важные характеристики качества НН интерпретации, оптимальное правило $\bar{d}(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}$ — решение двукритериальной задачи

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}}\max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\, \tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(y(x))}}(\theta(n))) &\sim \min_{y(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}}, \\ \sup_{\substack{x\in\mathcal{R}_n,\\ f\in\mathcal{F}}}\min(\tau_{x,\,f+}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\, \tau_{Uf+}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(y(x))}}(\theta(n))) &\sim \min_{y(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}}, \end{aligned} \quad \theta(n)\in[0,\,1], \tag{5.22}$$

решение которой будет найдено, если при каждом результате измерения $\widetilde{\xi}=x$ будет решена задача

$$\begin{aligned} \inf_{f\in\mathcal{F}}\max(\tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\, \tau_{Uf*}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(\theta(n))) &\sim \min_{d\in\mathcal{U}}, \\ \sup_{f\in\mathcal{F}}\min(\tau_{x,\,f+}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\, \tau_{Uf+}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(\theta(n))) &\sim \min_{d\in\mathcal{U}}. \end{aligned} \quad \theta(n)\in[0,\,1]. \tag{5.23}$$

Если $\widetilde{A}_{(d)},\ d \in \mathcal{U}$ — семейство определенных четких множеств, индикаторные функции которых определены условием (5.11),

$$\tau_{Uf+}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(d)}}(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ Uf = d, \\ 1, & \text{если } p = 0,\ Uf \neq d, \\ 0, & \text{если } 0 < p \leqslant 1,\ Uf \neq d, \end{cases} \qquad Uf, d \in \mathcal{U},\ p \in [0,\,1], \tag{5.24}$$

и задача (5.23) приводит к задаче

$$\begin{gathered} \tau_{x,f*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(\theta(n)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}}, \\ \sup_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ Uf\neq d}} \tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(0) \sim \min_{d\in\mathcal{U}}, \end{gathered} \qquad \theta(n) \in [0,\,1], \tag{5.25}$$

поскольку

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \min(\tau_{x,f+}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(\theta(n)),\, \tau_{Uf+}^{\mathcal{U}\setminus\widetilde{A}_{(y)}}(\theta(n))) = \begin{cases} \sup\limits_{Uf\neq y} \tau_{x,f+}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(\theta(n)), & \text{если } \theta(n) = 0, \\ 0, & \text{если } 0 < \theta(n) \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.26}$$

§ 6. Решение задачи интерпретации без априорной информации о входном сигнале.

Согласно равенству (2.7), леммам 3.1, 4.1, 4.3

$$\begin{aligned} \tau_{x,\,f*}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(p) &= \max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(p),\, \tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(p)), \\ \tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}*}(p) &= \min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p),\, \tau_{f}^{\widetilde{\varphi}*}(p)), \\ \tau_{x,\,f}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}+}(p) &= \min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}+}(p),\, \tau_{f}^{\widetilde{\varphi}+}(p)), \\ \tau_{x,\,f+}^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}(p) &= \min(\tau_{x-Af+}^{\widetilde{\nu}}(p),\, \tau_{f+}^{\widetilde{\varphi}}(p)), \end{aligned} \qquad x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F},\ p \in [0,\,1]. \tag{6.1}$$

Когда об оцениваемом НН элементе $\widetilde{\varphi}$ априори ничего не известно, распределение правдоподобия возможностей его значений дается выражением (2.18), при этом

$$\begin{aligned} \tau_{x,f}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p) &= (\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}} \wedge \tau_{f}^{\widetilde{\varphi}})(p) \triangleq \\ &\triangleq \sup\{\min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}(a_1), \tau_{f}^{\widetilde{\varphi}}(a_2)) | a_1, a_2 \in [0,\,1],\ \min(a_1, a_2) = p\} = \\ &= \tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}(p),\ x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F},\ p \in [0,\,1]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

В таком случае

$$\left.\begin{aligned}\tau^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}_{x,\,f*}(p) &= \tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af*}(p),\\ \tau^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}*}_{x,\,f}(p) &= \tau^{\widetilde{\nu}*}_{x-Af}(p),\\ \tau^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}+}_{x,\,f}(p) &= \tau^{\widetilde{\nu}+}_{x-Af}(p),\\ \tau^{\widetilde{\xi},\,\widetilde{\varphi}}_{x,\,f+}(p) &= \tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af+}(p)\end{aligned}\right.\quad x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1].$$

Задачи (5.15), (5.20), (5.26) упрощаются и принимают соответственно вид

$$\left.\begin{aligned}\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af*}(\theta(n)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\\ \tau^{\widetilde{\nu}*}_{x-Af}(\theta(n)) \sim \max_{f\in\mathcal{F}},\end{aligned}\right.\quad \theta(n)\in[0,\,1], \tag{6.3}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af*}(\theta(n)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\\ \tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af}(1) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\end{aligned}\right.\quad \theta(n)\in[0,\,1], \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af*}(\theta(n)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\\ \sup_{f\in\mathcal{F},Uf\neq d}\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af}(0) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\end{aligned}\right.\quad \theta(n)\in[0,\,1]. \tag{6.5}$$

Согласно равенству (2.17)

$$\tau^{\widetilde{\nu}*}_{x}(p) = \begin{cases}1, & \text{если } p \leqslant 1 - \dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{\overline{u}_2},\\ \tau^{\widetilde{\nu}}_{x}(p), & \text{если } p > 1 - \dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{\overline{u}_2},\end{cases}\quad x\in\mathcal{R}_n,\ p\in[0,\,1], \tag{6.6}$$

$$\tau^{\widetilde{\nu}}_{x*}(p) = \begin{cases}1, & \text{если } p \geqslant 1 - \dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{\overline{u}_1},\\ \tau^{\widetilde{\nu}}_{x}(p), & \text{если } p < 1 - \dfrac{\|\Sigma^{-1/2}x\|^2}{\overline{u}_1},\end{cases}\quad x\in\mathcal{R}_n,\ p\in[0,\,1], \tag{6.7}$$

поэтому при сделанных предположениях задача (6.3) приводит к задаче на минимум

$$\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\| \sim \min_{f\in F} \tag{6.8}$$

для каждого значения $x\in\mathcal{R}_n$ результата измерения НН элемента $\widetilde{\xi}$, полученного по схеме (2.1). Ее решением является $\widehat{f}=\widehat{f}_x=(\Sigma^{-1/2}A)^{-}\Sigma^{-1/2}x+a(x)$, где $a(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{N}(A)$ — произвольная функция (см. теорему 1.1).

Далее, согласно (2.17)

$$\tau_x^{\widetilde{\nu}+}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = 1,\ \|\Sigma^{-1/2}x\|^2 = 0, \\ 0, & \text{если } 0 < p \leqslant 1,\ \|\Sigma^{-1/2}x\|^2 = 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p \leqslant 1,\ \|\Sigma^{-1/2}x\|^2 > 0, \end{cases} \quad x \in \mathcal{R}_n,\ p \in [0,\,1], \tag{6.9}$$

поэтому решением второй задачи на минимум в (6.4) является любой вектор $f \in \mathcal{R}_m$ такой, что $\|\Sigma^{-1/2}(x - Af)\| > 0$. Таким образом, при сделанных предположениях двукритериальная задача (6.4) не имеет решения.

Наконец, так как согласно равенству (2.17)

$$\sup_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ Uf\neq d}} \tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}}(0) = 1,$$

при любом $d \in \mathcal{U}$, решением задачи (6.5) является любое решение задачи на минимум (6.8).

Для проверки адекватности модели схемы измерений (2.1) понадобится распределение (2.15) НН элемента $\widetilde{\xi}$. Учитывая равенство (6.2), вид задачи (6.3), и то, что функция $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}}(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}}$, имеем

$$\tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \min(\tau_{x-A\widehat{f}}^{\widetilde{\nu}*}(p),\ \tau_{x-A\widehat{f}*}^{\widetilde{\nu}}(p)) = \tau_{x-A\widehat{f}}^{\widetilde{\nu}}(p).$$

Как известно, для того, чтобы проверить адекватность модели наблюдаемого НН элемента $\widetilde{\xi} \in X$, определенной распределением $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot) : X \times [0,\,1] \to [0,\,1]$, можно воспользоваться следующим результатом, полученным в [12].

Т е о р е м а 6.1. *Пусть для любого $x \in X$ выполнены следующие условия:*

$$\sup_{0\leqslant p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1; \tag{6.10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textit{если} \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1,\ \textit{то}\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) < 1; \\ &\textit{если}\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 1,\ \textit{то} \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) < 1. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Тогда:

$$\widehat{X} = \{x \in X,\ \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = 1\} \tag{6.12}$$

— множество тех $x' \in X$, для которых равенство $\widetilde{\xi} = x'$ не свидетельствует против

адекватности модели НН элемента $\widetilde{\xi}$, *хотя и не исключает ее неадекватности, особенно если* $x' \in \widehat{\widehat{X}} \triangleq \{x \in X,\ 0 < \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) < 1\}$;

$$\check{X} = \{x \in X,\ \tau_x^{\widetilde{\xi}}(0) = 1\} \tag{6.13}$$

— *множество тех* $x' \in X$, *для которых равенство* $\widetilde{\xi} = x'$ *свидетельствует против модели НН элемента* $\widetilde{\xi}$, *хотя и не исключает ее адекватности, если* $x' \in \check{\check{X}} \triangleq \{x \in X,\ 0 < \sup\limits_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) < 1\}$;

Множества $\widehat{X}$ *и* $\check{X}$ *инвариантны относительно группы автоморфизмов (см. гл. 1) шкалы значений правдоподобия возможности и при условиях* (6.10), (6.11) $\widehat{X} \cap \check{X} = \varnothing$ *и* $\widehat{X} \cup \check{X} = X$. □

Согласно условию (6.10), модель $\widetilde{\xi}$ должна быть в достаточной степени определенной, т.е. для каждого значения $x \in X$ НН элемента $\widetilde{\xi}$ должно существовать вполне правдоподобное значение $p \in [0,\,1]$. Условие (6.11) исключает модели, для которых вполне правдоподобны возможные и одновременно невозможные значения $\widetilde{\xi}$.

Согласно равенствам (2.17), принятая модель НН погрешности $\widetilde{\nu}$ удовлетворяет условиям (6.10), (6.11), если и только если $X = \{x \in \mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}x\|^2 < \overline{u}_2\}$ и $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 \triangleq \overline{u}$. При этом

$$\begin{aligned}
&\widehat{X} \triangleq \{x \in \mathcal{R}_n,\ \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\nu}}(p) = 1\} = [0, \overline{u}),\\
&\widehat{\widehat{X}} \triangleq \{x \in \mathcal{R}_n,\ 0 < \tau_x^{\widetilde{\nu}}(0) < 1\} = (\underline{u}_1, \overline{u}),\\
&\check{X} \triangleq \{x \in \mathcal{R}_n,\ \tau_x^{\widetilde{\nu}}(0) = 1\} = \{\overline{u}\},\\
&\check{\check{X}} \triangleq \{x \in \mathcal{R}_n,\ 0 < \sup_{0<p\leqslant 1} \tau_x^{\widetilde{\nu}}(p) < 1\} = \varnothing
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Пусть $\widetilde{\xi} = x$ — результат измерения, выполненного по схеме (2.1), и

$$\|z(x)\| = \|\Sigma^{-1/2}(x - Af(x))\| = \min_{f \in F} \|\Sigma^{-1/2}(x - Af)\|, \tag{6.15}$$

где $\widehat{f}_x$ — какое-либо решение задачи (6.8), определяющее искомую оценку $U\widehat{\widetilde{\varphi}} = U\widehat{f}_{\widetilde{\xi}}$ НН элемента $U\widetilde{\varphi}$, равную $U\widehat{f}_x$ при $\widetilde{\xi} = x \in \mathcal{R}_n$.

Согласно равенствам (6.14), (6.15) результат измерения $\widetilde{\xi} = x$

- не противоречит модели $[A, \tau_\cdot^{\widetilde{\varphi}}(\cdot), \tau_\cdot^{\widetilde{\nu}}(\cdot)]$, если $\|z(x)\| \in \widehat{X} = [0, \overline{u})$, но если при этом

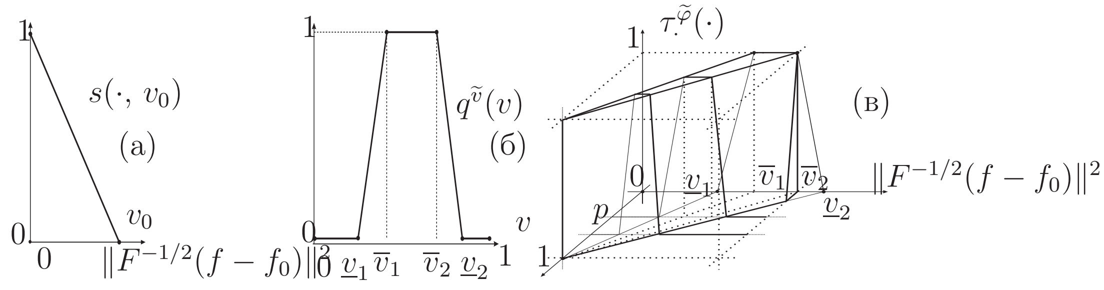


Рис. 3.5. Графики функций: (а) $s(\cdot,\, v_0) : \mathcal{R}_+ \to [0,\, 1]$, $v \in R_+$ — фиксировано; (б) $q^{\widetilde{v}}(\cdot) : \mathcal{R}_+ \to [0,\, 1]$. (в) График функции (7.2) (поверхность) $\tau^{\widetilde{\varphi}}_f(p)$, $f \in \mathcal{F}$, $p \in [0,\, 1]$.

$\|z(x)\| \in \hat{\hat{\hat{X}}} = (\underline{u}_1, \overline{u})$, то адекватность модели может быть подвергнута сомнению;

• противоречит модели $[A, \tau^{\widetilde{\varphi}}_{\cdot}(\cdot), \tau^{\widetilde{\nu}}_{\cdot}(\cdot)]$, если $\|z(x)\| \in \check{X} = \{\overline{u}\}$ и при этом сомнений в неадекватности модели быть не может, поскольку $\check{\check{X}} = \varnothing$.

§ 7. Решение задачи интерпретации при наличии априорной информации о входном сигнале.

Зададим НН модель входного сигнала $\widetilde{\varphi}$ аналогично тому, как определена модель $\widetilde{\nu}$ в (2.16), (2.17) распределением возможностей нечеткого элемента $\varphi_v = \widetilde{\varphi}|_{\widetilde{v}=v}$ для каждого значения $v \in \mathcal{R}_+$ неопределенного элемента $\widetilde{v}$ равенством

$$\rho^{\varphi_v}(f) = s(\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2,\, v) = \\ = \begin{cases} 1 - \dfrac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{v}, & \text{если } 0 \leqslant \|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2 \leqslant v, \\ 0, & \text{если } \|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2 > v,\ v > 0,\ f \in \mathcal{F} = \mathcal{R}_m; \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\rho^{\varphi_0}(0) = s(0, 0) \triangleq 1,$$

см. рис. 3.5(а), где $F : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — положительно определенный оператор, $f_0 \in \mathcal{F}$. В (7.1) значение $\widetilde{v} = v$ определяет «разброс» возможных значений сигнала $|\varphi_v|$ и, тем самым, — распределение возможностей $\rho^{\widetilde{\varphi}}(\cdot)$ (неопределенную функцию). Распределение $q^{\widetilde{v}}(\cdot)$ неопределенного элемента $\widetilde{v}$ представлено на рис.3.5 (б).

В таком случае, см. рис. 3.5(в)

$$\tau_f^{\widetilde{\varphi}}(p) = \sup\{q^{\widetilde{v}}(v) |\ v \in R_+,\ s(\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2,\, v) = p\} =$$
$$= \begin{cases} q^{\widetilde{v}}\left(\dfrac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p}\right) > 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ \underline{v}_1 < \dfrac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} < \underline{v}_2, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant p < 1,\ \begin{cases} \dfrac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} \leqslant \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \leqslant \dfrac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p}, \end{cases} \\ 1, & \text{если } p = 1,\ \|F^{-1/2}(f-f_0)\| = 0, \\ 0, & \text{если } p = 1,\ \|F^{-1/2}(f-f_0)\| > 0, \end{cases} \quad f \in \mathcal{F}. \tag{7.2}$$

Перепишем задачу (5.20) в виде

$$\max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(\theta(n)), \tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(\theta(n))) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\ \theta(n) \in [0,\, 1],$$
$$\min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}+}(1), \tau_f^{\widetilde{\varphi}+}(1)) \sim \min_{f\in\mathcal{F}}.$$

С учетом выражений (2.17) и (7.2) она сводится к задаче

$$\max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(\theta(n)), \tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(\theta(n))) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\ \theta(n) \in [0,\, 1]. \tag{7.3}$$

Задача (5.25) в свою очередь приводит к задаче

$$\max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(\theta(n)), \tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(\theta(n))) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\ \theta(n) \in [0,\, 1],$$
$$\sup_{\substack{f\in\mathcal{F},\\ Uf\neq d}} \min(\tau_{x-Af+}^{\widetilde{\nu}}(0), \tau_{f+}^{\widetilde{\varphi}}(0)) \sim \min_{d\in\mathcal{U}},$$

которая также с учетом выражений (2.17) и (7.2) приводит к задаче (7.3).

Наконец, задача (5.20) принимает вид

$$\max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(\theta(n)), \tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(\theta(n))) \sim \min_{f\in\mathcal{F}},\ \theta(n) \in [0,\, 1], \tag{7.4}$$

$$\min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(\theta(n)), \tau_f^{\widetilde{\varphi}*}(\theta(n))) \sim \max_{f\in\mathcal{F}},\ \theta(n) \in [0,\, 1]. \tag{7.5}$$

7.1. Проверка адекватности модели. Учитывая то, что функции $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}}(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}}$, $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\varphi}}(\cdot) \in \mathring{\mathcal{T}}$, и то, что согласно лемме 3.1 и равенству (2.15)

$$\begin{aligned} &\tau_x^{\widetilde{\xi}*}(p) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p),\, \tau_f^{\widetilde{\varphi}*}(p)), \\ &\tau_{x*}^{\widetilde{\xi}}(p) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(p),\, \tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(p)), \end{aligned} \qquad x \in \mathcal{R}_n,\ f \in \mathcal{F},\ p \in [0,\,1], \tag{7.6}$$

имеем

$$\begin{aligned} \tau_x^{\widetilde{\xi}}(p) = \min\left(\sup_{f \in \mathcal{F}} \min(\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p),\, \tau_f^{\widetilde{\varphi}*}(p)),\ \inf_{f \in \mathcal{F}} \max(\tau_{x-Af*}^{\widetilde{\nu}}(p),\, \tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(p))\right) = \\ = \min(\tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}*}(p),\ \tau_{x,\widehat{f}_x*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p)) = \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p) = (\tau_{x-A\widehat{f}_x}^{\widetilde{\nu}} \wedge \tau_{\widehat{f}_x}^{\widetilde{\varphi}})(p),\ x \in \mathcal{R}_n,\ p \in [0,\,1], \end{aligned} \tag{7.7}$$

$\widehat{f} = f_x \in \mathcal{F}$ — решение задачи (7.4), (7.5), а значит, и задач (5.20), (5.25), при результате наблюдения $\widetilde{\xi} = x$.

Условия (6.10) и (6.11) принимают соответственно вид

$$\sup_{0 \leqslant p \leqslant 1} \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p) = 1, \quad x \in \mathcal{R}_n, \tag{7.8}$$

$$\{\bar{x} \in \mathcal{R}_n,\ \sup_{0 < p \leqslant 1} \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p) = 1\} \cap \{\bar{x} \in \mathcal{R}_n,\ \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(0) = 1\} = \varnothing. \tag{7.9}$$

Пусть $\widetilde{\xi} = x$ — результат наблюдения, $\widehat{f}_x$ — решение задачи (7.4), (7.5). Согласно теореме 5.1 если

$$x \in \widehat{X} \triangleq \{\bar{x} \in \mathcal{R}_n,\ \sup_{0 < p \leqslant 1} \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p) = 1\}, \tag{7.10}$$

то равенство $\widetilde{\xi} = x$ не свидетельствует против модели , но если сверх того

$$x \in \widehat{\widehat{X}} \triangleq \{\bar{x} \in \mathcal{R}_n,\ 0 < \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(0) < 1\}, \tag{7.11}$$

то равенство $\widetilde{\xi} = x$ не противоречит модели, но дает повод сомневаться в ее адекватности. Если же

$$x \in \check{X} \triangleq \{\bar{x} \in \mathcal{R}_n,\ \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(0) = 1\}, \tag{7.12}$$

то наблюдения противоречат модели, хотя и не исключают ее адекватности, если

$$x \in \check{\check{X}} \triangleq \{\bar{x} \in \mathcal{R}_n,\ 0 < \sup_{0 < p \leqslant 1} \tau_{x,\widehat{f}_x}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}(p) < 1\}. \tag{7.13}$$

Поскольку

$$\sup_{0<p\leqslant 1}\sup\{\min(\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(a),\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(b))|\ a,b\in[0,\,1],\ \min(a,b)=p\}=$$

$$=\sup\{\min(\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(a),\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(b))|\ a,b\in[0,\,1],\ 0<\min(a,b)\leqslant 1\}=$$

$$=\sup_{\substack{0<a\leqslant 1,\\ 0<b\leqslant 1}}\{\min(\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(a),\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(b))\}=\min(\sup_{0<a\leqslant 1}\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(a),\ \sup_{0<b\leqslant 1}\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(b))=1,$$

если и только если $\sup\limits_{0<a\leqslant 1}\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(a)=\sup\limits_{0<b\leqslant 1}\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(b))=1$, то область $\widehat{X}=\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \sup\limits_{0<p\leqslant 1}\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(p)=\sup\limits_{0<b\leqslant 1}\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(b)=1\}=\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-A\widehat{f}_x)\|^2<\bar{u}\}\cap\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|F^{-1/2}(\widehat{f}_x-f_0)\|^2<\bar{v}\}$.

Так как $\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}_{x,\widehat{f}_x}(0)=\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}_{x,\widehat{f}_{x*}}(0)=\max(\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_{x*}}(0),\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_{x*}}(0))=\max(\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(0),\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(0))$, то из условия $\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}_{x,\widehat{f}_x}(0)=1$ следует, что либо $\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(0)=1$, либо $\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(0)=1$, либо $\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(0)=\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(0)=1$, $x\in\mathcal{R}_n$. Следовательно, $\check{X}=\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(0)=1$ или $\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(0)=1\}=X\setminus\widehat{X}$, где $X=\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \sup\limits_{0\leqslant p\leqslant 1}\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}_{x,\widehat{f}_x}(p)=1\}=\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-A\widehat{f}_x)\|^2\leqslant\bar{u}\}\cap\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|F^{-1/2}(\widehat{f}_x-f_0)\|^2\leqslant\bar{v}\}$.

Далее, поскольку $\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varphi}}_{x,\widehat{f}_x}(0)=0$ если и только если $\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(0)=\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(0)=0$, $x\in\mathcal{R}_n$, то $\widehat{\widehat{X}}=\widehat{X}\setminus\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(0)=\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(0)=0\}=\widehat{X}\setminus\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-A\widehat{f}_x)\|^2<\underline{u}_1\}\cap\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|F^{-1/2}(\widehat{f}_x-f_0)\|^2<\underline{v}_1\}$. Наконец, $\check{\check{X}}=\check{X}\setminus\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \tau^{\widetilde{\nu}}_{x-A\widehat{f}_x}(0)=0$ или $\tau^{\widetilde{\varphi}}_{\widehat{f}_x}(0)=0\}=\varnothing$.

Таким образом, справедлива следующая теорема

Т е о р е м а 7.1. *Пусть $\widetilde{\xi}=x$ — результат измерения по схеме* (2.1), $\widehat{f}=\widehat{f}_x$ *— решение задачи* (7.4), (7.5). *Модель измерения* (1.1) *допускает проверку ее адекватности, если в НН модели погрешности $\bar{u}_1=\bar{u}_2=\bar{u}$, в НН модели входного сигнала $\bar{v}_1=\bar{v}_2=\bar{v}$, и результат наблюдения $x\in X=\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-A\widehat{f})\|^2\leqslant\bar{u}\}\cap\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|F^{-1/2}(\widehat{f}-f_0)\|^2\leqslant\bar{v}\}$. При этом если $x\in\widehat{X}=\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-A\widehat{f})\|^2<\bar{u}\}\cap\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|F^{-1/2}(\widehat{f}-f_0)\|^2<\bar{v}\}$, то значение $\widetilde{\xi}=x$ не свидетельствует против модели, но если сверх того $x\in\widehat{\widehat{X}}=\widehat{X}\setminus\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|\Sigma^{-1/2}(\bar{x}-A\widehat{f})\|^2<\underline{u}_1\}\cap\{\bar{x}\in\mathcal{R}_n,\ \|F^{-1/2}(\widehat{f}-f_0)\|^2<\underline{v}_1\}$, то значение $\widetilde{\xi}=x$ не противоречит модели, но дает повод сомневаться в ее адекватности. Наконец, если $x\in\check{X}=X\setminus\widehat{X}$, то наблюдение $\widetilde{\xi}=x$ противоречит модели.*

Решения задачи (7.4), (7.5) даны в следующей теореме:

Теорема 7.2. *Пусть* $\widetilde{A}_{(d(x))}$, $d(\cdot):\mathcal{R}_n\to\mathcal{U}$, $x\in\mathcal{R}_n$ — ОЧ *множества, их индикаторные функции определены выражением* (4.12), *распределение ошибки задано выражением* (2.17). 1. *Если распределение* $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\varphi}}(\cdot)$ *НН элемента* $\widetilde{\varphi}$ *задано выражением* (2.18), *то задача НН интерпретации* (5.20) *неразрешима, задача НН интерпретации* (5.25) *разрешима, причем ее решением является любое решение первой задачи на минимум в* (5.25). 2. *Если априорная информация о* $\widetilde{\varphi}$ *задана распределением* (7.2), $x\in\mathcal{R}_n$ — *фиксированный результат измерения, то задачи НН интерпретации* (5.15), (5.20), (5.25)

а) *разрешимы, их решением является любой элемент* $f\in\mathcal{R}_m$, *если* $\{f\in\mathcal{R}_m,\ \|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2\leqslant\bar u\}\cap\{f\in\mathcal{R}_m,\ F^{-1/2}(f-f_0)\|^2\leqslant\bar v\}=\varnothing$;

б) *имеют единственное решение, если* $\{f\in\mathcal{R}_m,\ \|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2\leqslant\bar u\}\cap\{f\in\mathcal{R}_m,\ F^{-1/2}(f-f_0)\|^2\leqslant\bar v\}\neq\varnothing$. *Обозначим*

$$\Delta(x)=\|(I-\Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-)\Sigma^{-1/2}(x-Af_0)\|^2-\|(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(x-Af_0)\|^2.$$

• *если* $\Delta(x)<0$, *то решение задач* (5.15), (5.20), (5.25) *дается выражением* $\widehat{f}_x=f_0+FA^*(AFA^*+\omega(x)\Sigma)^{-1}(x-Af_0)$, *где* $\omega=\omega(x)$ — *корень уравнения* $\omega\|(BB^*+\omega I)^{-1}y\|=\|B^*(BB^*+\omega I)^{-1}y\|$, *в котором* $B=\Sigma^{-1/2}AF^{1/2}$, $y=\Sigma^{-1/2}(x-Af_0)$;

• *если* $\Delta(x)=0$, *то решение задач* (5.15), (5.20), (5.25) *дается выражением* $\widehat{f}_x=f_0+F^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(x-Af_0)$;

• *если* $\Delta(x)>0$, *то решение задачи* (5.15), (5.20), (5.25) $\widehat{f}_x=f_0+F^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AF^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(x-Af_0)+a$, *где* a —*любой элемент* $\mathcal{N}(A)$, *удовлетворяющий условию* $0\leqslant\|F^{1/2}a\|^2<\Delta(x)$.

Доказательство. Утверждения теоремы следуют из того, что

$$\tau^{\widetilde{\nu}}_{x-Af*}(p)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p}\leqslant\underline{u}_1,\\ \delta_1(\frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p}), & \underline{u}_1\leqslant\frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p}<\bar u,\ \ x\in\mathcal{R}_n,\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1],\\ 1, & \frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p}\geqslant\bar u,\end{cases}$$

$$\tau_{f*}^{\widetilde{\varphi}}(p) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} \leqslant \underline{v}_1, \\ \delta_2(\frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p}), & \underline{v}_1 \leqslant \frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} < \bar{v}, \\ 1, & \frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} \geqslant \bar{v}, \end{cases}, \; x \in \mathcal{R}_n, \; f \in \mathcal{F}, \; p \in [0,\, 1],$$

$$\tau_{x-Af}^{\widetilde{\nu}*}(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p} \leqslant \bar{u}, \\ \delta_1'(\frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p}), & \bar{u} < \frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p} < \underline{u}_2, \\ 0, & \frac{\|\Sigma^{-1/2}(x-Af)\|^2}{1-p} \geqslant \underline{u}_2, \end{cases} \; x \in \mathcal{R}_n, \; f \in \mathcal{F}, \; p \in [0,\, 1],$$

$$\tau_{f}^{\widetilde{\varphi}*}(p) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} \leqslant \bar{v}, \\ \delta_2'(\frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p}), & \bar{v} < \frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} < \underline{v}_2, \\ 0, & \frac{\|F^{-1/2}(f-f_0)\|^2}{1-p} \geqslant \underline{v}_2, \end{cases}, \; x \in \mathcal{R}_n, \; f \in \mathcal{F}, \; p \in [0,\, 1],$$

где $\delta_1(\cdot)$ — строго монотонно возрастающая на $[\underline{u}_1, \bar{u}]$, $\delta_2(\cdot)$ — строго монотонно возрастающая на $[\underline{v}_1, \bar{v}]$, $\delta_1'(\cdot)$ — строго монотонно убывающая на $[\bar{u}, \underline{u}_2]$, $\delta_2'(\cdot)$ — строго монотонно убывающая на $[\bar{v}, \underline{v}_2]$, непрерывно дифференцируемая на этом промежутке функция. □

На рис. 3.6 приведен результат численного моделирования решения задачи интерпретации данных, проведенного на основе разработанного на базе платформы Matlab программного комплекса. На рис. 3.6 а) изображен сигнал f, поданный на вход измерительного прибора, аппаратная функция которого изображена на рис. 3.6 б); на рис. 3.6 в) изображен результат измерения $\widetilde{\xi} = x$, полученный по схеме (2.1). В НН моделях погрешности измерения $\widetilde{\nu}$ и входного сигнала $\widetilde{\varphi}$ $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 20$, $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = 10$, $F = \beta^2 I$, $\beta^2 = 10$, I — единичная матрица размера 100×100. На рис. 3.6 г) и рис. 3.6 ж) сплошная линия — оценка входного сигнала $\widehat{f}$, полученная как решение задачи НН интерпретации (5.15), совпадающее с решением задач НН интерпретации (5.20), (5.25), пунктирная линия — входной сигнал f, при $\Sigma = \sigma^2 I$, $\sigma^2 = 10$ и $\sigma^2 = 0.1$ соответственно.

На рисунках 3.6 д),е),з),и) изображены диаграммы, иллюстрирующие проверку адекватности модели измерения. На каждом рисунке изображены области $\widehat{X}$, $\widehat{\widehat{X}}$, $\check{X}$ (см. теорему 7.1), и точка x_0 с координатами $(\|\Sigma^{-1/2}(x - A\widehat{f})\|^2, \|F^{-1/2}(\widehat{f} - f_0)\|^2)$, имеющими

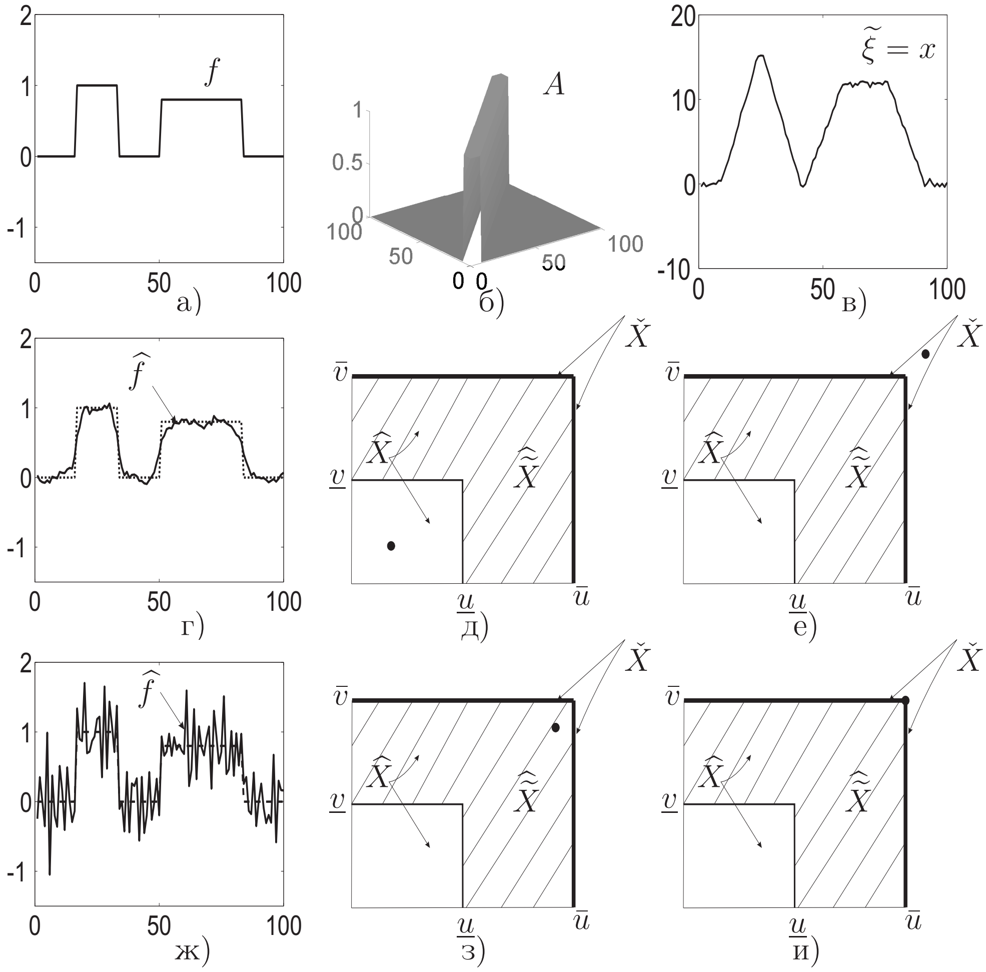


Рис. 3.6.

разные значения на каждом из рис. 3.6 д),е),з),и); значение $\|\Sigma^{-1/2}(x - A\widehat{f})\|^2$ отложено по горизонтальной, значение $\|F^{-1/2}(\widehat{f} - f_0)\|^2$ — по вертикальной оси. Взаимное расположение точки x_0 и областей $\widehat{X}$, $\widehat{\widehat{X}}$, $\check{X}$ позволяет судить об адекватности модели измерения. На рис. 3.6 д) $x_0 \in \widehat{X}$, при этом $x_0 \notin \widehat{\widehat{X}}$, поэтому результат измерения $\widetilde{\xi}$ не противоречит модели, для которой получена оценка $\widehat{f}$ на рис. 3.6 г). На рис. 3.6 е) модель не допускает проверки на адекватность, поскольку $x_0 \notin \widehat{X} \cup \check{X}$ (для такой модели результат интерпретации не приведен). На рис. 3.6 з) модель сомнительна, т.к. $x_0 \in \widehat{\widehat{X}}$ (для этой модели результат интерпретации приведен на рис. 3.6 ж)), причем чем ближе точка x_0 находится к внешней границе области $\widehat{\widehat{X}}$, тем более сомнительна модель, т.к. равная нулю возможность одновременного выполнения равенств $\widetilde{\xi} = x$ И $\widetilde{\varphi} = \widehat{f}$ более правдоподобна. Наконец, на рис. 3.6 и) $x_0 \in \check{X}$, поэтому результат наблюдения $\widetilde{\xi}$ противоречит модели измерения, и ее следует признать неадекватной (результат интерпретации не приведен).

Данных, представленных на рис. 3.6 достаточно, чтобы в диалоге с компьютером получить ответы на любые вопросы о качестве интерпретации и об адекватности модели измерения. Если при решении задачи интерпретации исследователь, получив решение, сталкивается с ситуациями, изображенными на рис. 3.6. е),з),и), он понимает, что нужно изменить параметры модели таким образом, чтобы модель стала непротиворечивой, и программный комплекс предоставляет ему такую возможность.

§ 8. Неопределенная стохастическая модель

При стохастическом моделировании не все составляющие модели можно определить с помощью теории вероятностей, некоторые из них приходится определять на основании волевых решений. Например, в теории проверки статистических гипотез априорное распределение вероятностей гипотез часто задается исследователем. Адекватность используемых моделей также, как правило, декларируется исследователем.

Рассмотренная в предыдущих параграфах схема построения НН модели достаточно общая, и ее можно распространить на те области математического моделирования, в которых моделью объекта является вероятностное пространство. Получаемые таким образом модели называются неопределенными стохастическими (НС).

Проиллюстрируем предложенный принцип на примере стандартной задачи теории статистических решений [67]. Пусть ξ - случайный элемент, принимающий значения в множестве X согласно одному из распределений $\mathrm{pr}(\cdot|1), \ldots, \mathrm{pr}(\cdot|n)$ вероятностей $Pr_1, \ldots, Pr_n$; $pr(\cdot|k)$ - плотность вероятности Pr_k относительно некоторой фиксированной меры μ, $k = 1, \ldots, n$.

Условимся считать, что речь идет о стохастической системе, которая может находиться в одном из n состояний, значение $x \in X$ случайного элемента ξ определяет результат наблюдения за системой, причем если система находится в состоянии с номером k, то значения случайного элемента ξ контролируются распределением $pr(\cdot|k)$, $k = 1, \ldots, n$. В задаче идентификации требуется по наблюдению значения $\xi = x$ принять одно из n решений о состоянии системы.

Задачу идентификации рассмотрим для байесовской модели системы, в которой задано распределение вероятностей $q_k^{\varkappa}$, $k = 1, \ldots, n$, состояний и распределение $pr^{\xi|\varkappa}(\cdot|k) : X \to \mathcal{R}_+$ переходной вероятности наблюдения ξ для каждого состояния $k = 1, \ldots, n$, определяющих совместное распределение ξ и $\varkappa$ равенством $pr^{\xi,\varkappa}(x,k) = pr^{\xi|\varkappa}(x|k)q_k^{\varkappa}$, $x \in X$, $k = 1, \ldots, n$.

Правило принятия решения о состоянии системы состоит в следующем: если наблюдаемое значение $\xi = x \in X_k$, то принимается решение в пользу распределения $pr(\cdot|k)$ случайного элемента ξ, $k = 1, \ldots, n$, где $X_1, \ldots X_n$ — некоторое упорядоченное измеримое разбиение множества X значений ξ: $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j$, $X_i \bigcap X_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Каждое разбиение $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j$, обозначаемое далее $\{X_j\}$, определяет *правило идентификации.*

Обозначим l_{kj} величину потерь, сопутствующих решению в пользу состояния «j», в то время как на самом деле система находится в состоянии «k», $k, j = 1, \ldots, n$. Для правила решения, определенного разбиением $\{X_j\}$, ожидаемый риск

$$L = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{X_j} S_j(x)\mu(\mathrm{dx}) = L(\{X_j\}), \tag{8.1}$$

где

$$S_j(x) = \sum_{k=1}^{n} l_{kj}\,\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k)q_k^{\varkappa},\ x \in X,\ j = 1, \ldots, n. \tag{8.2}$$

Решение задачи

$$L(\{X_j\}) \sim \min_{\{X_j\}} \tag{8.3}$$

дано в теореме (см., например, [67])

Теорема 8.1. *Минимум в* (8.3) *достигается на любом упорядоченном разбиении* $X = X_1^* \bigcup \ldots \bigcup X_n^*$ $(X_i^* \bigcap X_j^* = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n)$, *удовлетворяющем условию* $X_j^* \subset \{x \in$

X, $S_j(x) = S(x) \triangleq \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} S_i(x)\} \triangleq \bar{X}_j$, $j = 1,\ldots,n$. *Минимальное значение риска* (8.2)

$$L^* = L(\{X_j^*\}) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{X_j^*} S_j(x)\mu(\mathrm{dx}) = \int\limits_{X} S(x)\mu(\mathrm{dx}).$$

Заметим, что в теории статистических решений нет ничего такого, что позволило бы рационально определять матрицу потерь $\{l_{kj}\}$, поэтому, определяя $\{l_{kj}\}$, исследователь, как правило, принимает волевое решение. По этой причине достоверность значений l_{kj} всегда сомнительна. Один из способов учесть мнение исследователя в задаче (8.3) - считать элементы l_{kj} матрицы потерь $\{l_{kj}\}$ в (8.2) значениями неопределенных элементов $\widetilde{l}_{kj}$, $k,j = 1,\ldots,n$. В этом случае ожидаемый риск $L(\{X_j\})$ является неопределенной величиной, и правдоподобие истинности высказывания, согласно которому ожидаемый риск равен e, дается выражением

$$\begin{aligned}\mathrm{P}l((L(\{X_j\})) = e) = \sup\{g^{\widetilde{l}_{11},\widetilde{l}_{12},\ldots,\widetilde{l}_{nn}}(l_{11}, l_{12},\ldots,l_{nn}),\ l_{kj}\in[0,\,1],\ k,j = 1,\ldots,n,\\ \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{X_j}\sum_{k=1}^{n} l_{kj}\,\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x,k)\mu(dx) = e)\},\ e\in[0,\,1]\},\end{aligned} \tag{8.4}$$

где $g^{\widetilde{l}_{kj}}(\cdot) : [0,\,1] \to [0,\,1]$ — распределение правдоподобия неопределенного элемента $\widetilde{l}_{kj}$, $k,j = 1,\ldots,n$, имеющее следующий вид: $g^{\widetilde{l}_{kj}}(l_{kj}) = 0$, $l_{kj} \notin [\underline{l}_{kj}, \bar{l}_{kj}]$, $g^{\widetilde{l}_{kj}}(l_{kj}) = 1$, $l'_{kj} = (\underline{l}_{kj} + \bar{l}_{kj}/2)$, $g^{\widetilde{l}_{kj}}(\cdot)$ строго монотонно возрастает на $[\underline{l}_{kj}, l'_{kj}]$, строго монотонно убывает на $[l'_{kj}, \bar{l}_{kj}]$.

Оптимальным будем считать упорядоченное разбиение $X^* = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j^*$, минимизирующее правдоподобие больших и максимизирующее правдоподобие малых значений ожидаемого риска, т.е. решение двукритериальной задачи

$$\begin{gathered}\sup_{a\geqslant e}\mathrm{P}l((L(\{X_j\})) = a) \sim \min_{\{X_j\}},\\ \sup_{a\leqslant e}\mathrm{P}l((L(\{X_j\})) = a) \sim \max_{\{X_j\}},\quad e\in[0,\,1].\end{gathered} \tag{8.5}$$

Задача (8.5) сводится к задаче

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{X_j}\sum_{k=1}^{n} l'_{kj}\,\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x,k)\mu(dx) \sim \min_{\{X_j\}},$$

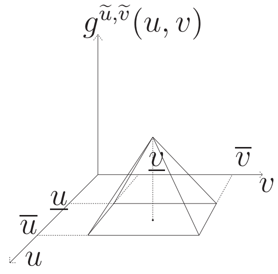


Рис. 3.7.

решением которой согласно теореме 7.1 является любое упорядоченное разбиение $X = X_1^* \bigcup \ldots \bigcup X_n^*$ $(X_i^* \bigcap X_j^* = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n)$, удовлетворяющее условию $X_j^* \subset \{x \in X,\ S_j'(x) = S'(x) \triangleq \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} S_i'(x)\} \triangleq \bar{X}_j,\ j = 1,\ldots,n$, где $S_i'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} l_{kj}' \operatorname{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) q_k^{\varkappa},\ x \in X,\ j = 1,\ldots,n.$

В частности, в случае $n = 2,\ \{l_{lj}\} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{v} \\ \widetilde{u} & 0 \end{pmatrix}$, функции $g^{\widetilde{u},\widetilde{v}}(u,u),\ u,v \in \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+$, представленной на рис. 3.7, задача (8.3) сводится к задаче

$$\int\limits_{X_1} \underline{u} \operatorname{pr}^{\xi,\varkappa}(x,2)\mu(dx) + \int\limits_{X_2} \underline{v} \operatorname{pr}^{\xi,\varkappa}(x,1)\mu(dx) \sim \min_{\{X_j\}}, \tag{8.6}$$

решением которой является любое упорядоченное разбиение $X = X_1^* \bigcup X_2^*,\ X_1^* \bigcap X_2^* = \varnothing$, удовлетворяющее условию (см. рис. 3.7 и теорему 8.1)

$$X_1^* \subset \left\{x \in X,\ \underline{u} \operatorname{pr}^{\xi,\varkappa}(x,2) \leqslant \underline{v} \operatorname{pr}^{\xi,\varkappa}(x,1)\right\},$$

$$X_2^* \subset \left\{x \in X,\ \underline{u} \operatorname{pr}^{\xi,\varkappa}(x,2) \geqslant \underline{v} \operatorname{pr}^{\xi,\varkappa}(x,1)\right\}.$$

Глава 4

Восстановление функциональной зависимости

Введение

В этой главе рассматриваются методы восстановления функциональной зависимости по экспериментальным данным, основанные на нечетких и неопределенных нечетких моделях измерений.

Задача восстановления функциональной зависимости, как правило, возникает на этапе анализа и интерпретации результата эксперимента. В простейшем варианте суть ее состоит в следующем: в эксперименте измеряются пары чисел, которые согласно принятой модели эксперимента являются приближенными значениями некоторой функции, принадлежащей определенному классу функций, и соответственно ее аргумента, и на основании результатов измерений требуется

— проверить гипотезу о том, что в классе функций, определенном моделью эксперимента, такая функция действительно есть, т.е. проверить адекватность модели измерений, и, если модель не противоречит результатам измерений, то

— оценить искомую функцию с максимальной точностью.

Другой вариант задачи восстановления функциональной зависимости, известный как задача редукции измерения [52], формулируется следующим образом: в эксперименте измеряется сигнал (функция) $\xi = Af + \nu$ — искаженный шумом ν выходной сигнал прибора

[1]) A, на вход которого поступил сигнал (функция) f от измеряемого объекта, искаженного в процессе измерения. Задача состоит в том, чтобы

— проверить гипотезу о том, что результат измерения ξ действительно можно представить в виде $Af+\nu$, т.е. проверить адекватность модели измерения, и, если модель не противоречит результату измерения, то

— наиболее точно оценить Uf, где U - заданный оператор, обычно определяющий модель идеального измерительного прибора, Uf — значения параметров исследуемого объекта, не возмущенного измерением, [52].

Рассмотрим некоторые неформальные постановки задачи восстановления функциональной зависимости, основанные на теоретико-вероятностных моделях наблюдений [53],[63]–[66].

0.1. Задача восстановления регрессии. Пусть ξ и η — случайные элементы, принимающие значения в евклидовых пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, пары значений которых $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ наблюдаются в эксперименте. Значения $x_1, \ldots, x_n$ заданы точно, значения $y_1, \ldots, y_n$ получены по схеме

$$\eta = f(\xi) + \nu, \tag{0.1}$$

где $\nu \in \mathcal{Y}$ — случайная ошибка измерения, $M\nu = 0$, случайные элементы ξ и ν независимы, $f(\cdot)$ — неизвестная функция из заданного класса функций $\mathcal{F}$. Совместное распределение $P^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0,1]$ не известно.

Требуется оценить условное математическое ожидание случайного элемента η при условии ξ

$$M(\eta|\xi) = f(\xi) \tag{0.2}$$

по последовательности пар $x_i, y_i, \quad i = 1, \ldots, n$. В этой задаче функция $f(\cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется *функцией регрессии* или просто *регрессией*, а задача восстановления $f(\cdot)$ — задачей восстановления регресии.

[1]) A - заданный оператор

0.2. Задача интерпретации результатов «косвенных» экспериментов. Пусть $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ — множество пар значений случайных элементов $\xi \in \mathcal{X}$ и $\eta \in \mathcal{Y}$. Значения ξ считаются известными точно, значения η — полученными по схеме

$$\eta = F(\xi) + \nu, \tag{0.3}$$

где ν — случайная ошибка измерения, $F(\cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — неизвестная функция из заданного класса $\mathcal{F}_0$. Известно, что $F(\cdot)$ связана операторным уравнением

$$Af(t) = F(x),\ t \in \mathcal{T},\ x \in \mathcal{X}. \tag{0.4}$$

с функцией $f(\cdot) : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ ($\mathcal{T}, \mathcal{M}$ — евклидовы пространства) из заданного класса $\mathcal{F}$, причем значения функции $f(\cdot)$ ненаблюдаемы. В (0.4) $A : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0$ — известный непрерывный оператор, взаимно однозначно отображающий элементы класса $\mathcal{F}$ в элементы класса $\mathcal{F}_0$.

Требуется найти решение уравнения (0.4) в классе $\mathcal{F}$, если известны приближенные значения $y_1, \ldots, y_n$ функции $F(\cdot)$ в точках $x_1, \ldots, x_n$.

Рассмотрим теперь некоторые стандартные методы решения задач восстановления функциональной зависимости.

0.3. Метод наименьших квадратов (МНК) . Пусть $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ — последовательность пар значений случайных элементов $\xi \in \mathcal{X}$ и $\eta \in \mathcal{Y}$, причем значения $x_1, \ldots, x_n$ известны точно, значения $y_1, \ldots, y_n$ получены по схеме

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{0.5}$$

где $\varepsilon_i \in \mathcal{Y}$, $i = 1, \ldots, n$ — ошибки измерений, $f(\cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — неизвестная истинная функциональная зависимость из заданного класса функций $\mathcal{F}$.

Пусть для определенности функция $f(\cdot)$ принадлежит параметрическому классу функций $f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_r f_r(x)$, $x \in \mathcal{X}$, где $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{R}_1$ — параметры, определяющие функции класса $\mathcal{F} = \{f(\cdot) = a_0 f_0(\cdot) + a_1 f_1(\cdot) + \cdots + a_r f_r(\cdot)\}$, $f_0(\cdot), f_1(\cdot), \ldots, f_r(\cdot)$ — заданные функции.

Искомая функциональная зависимость $\widehat{f}(\cdot) = \widehat{a}_0 f_0(\cdot) + \widehat{a}_1 f_1(\cdot) + \ldots + \widehat{a}_r f_r(\cdot)$ определяется вектором параметров $\{\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_r\}$ — решением задачи

$$\min_{a_0, a_1, \ldots, a_r} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \sum_{j=1}^{n} a_j f_j(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_j f_j(x_i))^2, \tag{0.6}$$

и называется оценкой метода наименьших квадратов или мнк-оценкой истинной функциональной зависимости $f(\cdot) \in \mathcal{F}$.

Если $\varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$ в (0.5) — случайные элементы, то при некоторых слабых ограничениях на распределение вероятностей $P^{\varepsilon_i}(\cdot) : \mathcal{Y} \to [0,1]$ ошибок $\varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$ мнк-оценка обладает рядом «хороших» свойств, например, $\widehat{f}(\cdot)$ является несмещенной оценкой $f(\cdot)$, и др., [54].

Недостатком метода наименьших квадратов является то, что в нем минимизируется не ошибка восстановления функциональной зависимости, а невязка (0.6).

0.4. Метод минимизации эмпирического риска [53] . Пусть в задаче восстановления регрессии, рассмотренной в пункте 0.1, $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ — параметрический класс функций, $\alpha \in \mathcal{A}$ — параметр, значение которого $\alpha = a$ определяет функцию $f_a(\cdot)$ из класса $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, $a \in \mathcal{A}$.

Схема измерения (0.1) должна быть переписана следующим образом:

$$\eta = f_{a_0}(\xi) + \nu, \tag{0.7}$$

где $f_{a_0}(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ — неизвестная истинная функция, связывающая случайные элементы ξ и η.

Рассмотрим функционал

$$I(a) = \int (y - f_a(x))^2 p^{\xi,\eta}(x,y) dx dy, \tag{0.8}$$

где $p^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0,1]$— плотность совместного распределения вероятностей случайных элементов $\xi \in \mathcal{X}, \eta \in \mathcal{Y}$. Значение функционала $I(a)$ определяет величину среднего «риска»[1]) при использовании функции $f_a(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ в качестве оценки истинной функции

[1]) Функция $(y - f_a(x))^2$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ не является функцией потерь, поскольку ее значение при фиксированных значениях $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ определяет величину невязки $(y - f_a(x))^2$, а не потери, обусловленные использованием функции $f_a(x)$, $x \in \mathcal{X}$, вместо неизвестной функции

$f_{a_0}(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$. В [53] функционал (0.8) назван функционалом среднего риска.

В качестве решения задачи восстановления регрессии в [53] принимается функция $f_{\widehat{a}}(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, минимизирующая средний «риск», то есть являющаяся решением задачи

$$I(\widehat{a}) = \min_{a \in \mathcal{A}} I(a). \tag{0.9}$$

Запишем выражение (0.8) в виде

$$I(a) = \int ((y - f_{a_0}(x)) - (f_a(x) - f_{a_0}(x)))^2 p^{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int (y - f_{a_0}(x)) p^{\xi,\eta}(x,y)dxdy +$$
$$+ \int (f_a(x) - f_{a_0}(x))^2 p^{\xi}(x)dx - 2\int (f_a(x) - f_{a_0}(x))(y - f_{a_0}(x)) p^{\xi,\eta}(x,y)dxdy. \tag{0.10}$$

Поскольку $M(\eta|\xi = x) = f_{a_0}(x)$, третье слагаемое в (0.10) равно 0, поэтому

$$I(a) = \int (y - f_{a_0}(x))^2 p^{\xi,\eta}(x,y)dxdy + \int (f_a(x) - f_{a_0}(x))^2 p^{\xi}(x)dx, \tag{0.11}$$

где $p^{\xi}(\cdot) : \mathcal{X} \to [0,1]$ — плотность распределения случайного элемента $\xi \in \mathcal{X}$. Поскольку первое слагаемое в (0.11) не зависит от a, то значение $I(\widehat{a}) = \min\limits_{a \in \mathcal{A}} I(a)$ достигается на функции $f_{\widehat{a}}(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ такой, что

$$\int (f_{\widehat{a}}(x) - f_{a_0}(x))^2 p^{\xi}(x)dx = \min_{f_a(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}} \int (f_{\widehat{a}}(x) - f_{a_0}(x))^2 p^{\xi}(x)dx =$$
$$= \min_{f_a(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}} \rho^2_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}(f_a(\cdot), f_{a_0}(\cdot)),$$

где $\rho_{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}}(\cdot,\cdot)$ — расстояние между элементами класса $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ в метрике $\mathcal{L}^2_p$. Однако решить непосредственно задачу (0.9) и получить функцию $f_{\widehat{a}}(\cdot)$ нельзя, поскольку плотность $p^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$ не известна, а известна последовательность пар $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ значений случайных элементов ξ и η.

На основании этой последовательности можно получить оценку $\widehat{p}^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0,1]$ плотности совместного распределения, и вместо задачи (0.9) решить задачу

$$\widehat{I}(a^*_{\text{Э}}) = \min_{a \in \mathcal{A}} \int (y - f_a(x))^2 \widehat{p}^{\xi,\eta}(x,y)dxdy, \tag{0.12}$$

Методы оценивания плотности распределения рассмотрены в [59]. Функцию $f_{a^*_{\text{Э}}}(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, доставляющую минимуму функционалу $\widehat{I}(a) = \int (y - f_{\alpha}(x))^2 \widehat{p}^{\xi,\eta}(x,y)dxdy$, в [59] принимают

$f_{a_0}(x),\ x \in \mathcal{X}$.

как приближенное решение задачи (0.9).

Вместо задачи (0.9) можно также решить задачу

$$I^n_{\text{Э}}(a_{\text{Э}}) = \min_{a\in\mathcal{A}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - f_a(x_i))^2, \tag{0.13}$$

где $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ — последовательность значений случайных элементов ξ, η. Функцию $f_{a_{\text{Э}}}(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, доставляющую минимум функционалу $I^n_{\text{Э}}(a) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - f_a(x_i))^2$, в [53] принимают как оценку решения задачи (0.9). Задача (0.13) называется задачей минимизации эмпирического риска [53].

Для каждого фиксированного $a \in \mathcal{A}$ значение функционала $I^n_{\text{Э}}(a)$ определяет эмпирическое среднее случайной величины $t_a = (\eta - f_a(\xi))^2$, в то время как значение функционала (0.8) определяет математическое ожидание этой случайной величины. Согласно закону больших чисел при достаточно общих условиях [58] $I^n_{\text{Э}}(a) \to I(a)$ по вероятности при $n \to \infty$. Поскольку решение $a_{\text{Э}} \in \mathcal{A}$ задачи (0.13) и соответствующее ему значение $I^n_{\text{Э}}(a_{\text{Э}})$ функционала эмпирического риска — случайные числа, зависящие от выборки конечного объема, найти функцию, гарантированно доставляющую точный минимум функционалу (0.8), решив задачу (0.13), вообще говоря, нельзя.

Определение 0.1. Значение $I(a)$ функционала $I(\cdot)$ называется $\varkappa$-близким к минимальному значению $I(\widehat{a}) = \min\limits_{a} I(a)$, если

$$I(a) - I(\widehat{a}) \leqslant \varkappa, \quad \varkappa \geqslant 0.$$

Определение 0.2. Если для заданного числа $0 < \eta < 1$

$$P\{I(a) - I(\widehat{a}) > \varkappa\} < \eta,$$

то говорят, что случайное $a \in \mathcal{A}$ доставляет функционалу $I(\cdot)$ значение $I(a)$, $\varkappa$-близкое к минимальному значению $I(\widehat{a})$, с вероятностью $1 - \eta$.

Пусть класс функций $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ состоит из конечного числа N функций:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{f_{a_1}(\cdot), f_{a_2}(\cdot), \ldots, f_{a_N}(\cdot)\}.$$

В [53] показано, что для того, чтобы решение $f_{a_{\text{Э}}}(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ задачи (0.13) доставляло функционалу (0.8) значение $I(a_э)$, $\varkappa$ - близкое к минимальному $I(\widehat{a})$, с вероятностью $1-\eta$, достаточно иметь следующую априорную информацию о распределении случайной величины $t_a = (\eta - f_a(\xi))^2$:

1) если известна абсолютная оценка значений случайной величины t_a

$$\sup_{x\in\mathcal{X}, y\in\mathcal{Y}, a\in\mathcal{A}} (y - f_a(x))^2 \leqslant \tau^2_{\text{абс}} \quad \text{с вероятностью 1,} \tag{0.14}$$

то с вероятностью $1-\eta$ для значения $I(a_э)$ справедливо неравенство

$$I_э(a_э) - \tau_{\text{абс}}\sqrt{\frac{\ln N - \ln \eta/2}{2n}} \leqslant I(a_э) \leqslant I_э(a_э) + \tau_{\text{абс}}\sqrt{\frac{\ln N - \ln \eta/2}{2n}},$$

где n — объем выборки;

2) если известна оценка относительной величины дисперсии случайной величины t_a

$$\sup_{a\in\mathcal{A}} \frac{Dt_a}{{Mt_a}^2} \leqslant \tau^2_{\text{отн}}, \tag{0.15}$$

то с вероятностью $1-\eta$ для значения $I(a_э)$ справедливо неравенство

$$I(a_э) \leqslant \left[\frac{I_э(a_э)}{1 - \overline{\tau_{\text{отн}}}\sqrt{3\frac{\ln N - \ln\eta}{n}}}\right]_\infty,$$

где $\overline{\tau_{\text{отн}}}^2 = \begin{cases} \tau^2_{\text{отн}}, & \text{если } \tau^2_{\text{отн}} \geqslant 1, \\ 1, & \tau^2_{\text{отн}} < 1, \end{cases}$ и $[z]_\infty = \begin{cases} z, & z \geqslant 0, \\ \infty, & z < 0. \end{cases}$, n — объем выборки.

Результаты для более сложного случая $N = \infty$ также приведены в [53].

Следует отметить, что ни один из описанных выше классических методов не позволяет решить задачу восстановления функциональной зависимости, если аргумент функции известен с ошибкой.

Другие методы решения задачи восстановления функциональной зависимости описаны в [60] (метод максимальной энтропии), [61] (нелинейный метод наименьших квадратов), [62] (метод наименьших квадратов в случае неточно заданных значений аргумента).

§ 1. Теоретико-возможностная модель восстановления функциональной зависимости [11],[49], [50],[51]

Рассмотрим постановку задачи восстановления функциональной зависимости, в которой как значение функции, так и значение аргумента известны неточно.

Пусть в эксперименте регистрируются пары точек $\widetilde{y}_i \in \mathcal{R}_M,\ \widetilde{x}_i \in \mathcal{R}_K,\ i = 1, \ldots, N$, которые являются искаженными ошибками измерений значениями некоторой (неизвестной) функции $f(\cdot)$ из известного класса функций $\mathcal{F}$, и ее аргумента, и будем считать, что схема измерений, согласно которой получены значения $\widetilde{x}_i,\ \widetilde{y}_i,\ i = 1, \ldots, N$, имеет вид

$$\begin{gathered}\widetilde{x}_i = x_i + m_i,\\ \widetilde{y}_i = y_i + n_i,\\ y_i = f(x_i),\ i = 1, \ldots, N,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $x_i \in \mathcal{R}_K,\ y_i \in \mathcal{R}_M,\ i = 1, \ldots, N$, — ненаблюдаемые в эксперименте значения аргумента и функции, $m_i \in \mathcal{R}_K,\ n_i \in \mathcal{R}_M,\ i = 1, \ldots, N$, — ошибки измерений значений аргумента и функции соответсвенно. Требуется на основании результатов измерений, во-первых, проверить, можно ли допустить, что в классе функций $\mathcal{F}$ есть функция, связывающая ненаблюдаемые значения $x_i,\ y_i,\ i = 1, \ldots, N$, и, во-вторых, восстановить искомую функцию с максимальной точностью.

Рассмотрим теоретико-возможностную модель схемы (1.1). Пусть известно, что чем больше значение ошибки, тем меньше его возможность, причем значения ошибки, бо́льшие некоторой величины, невозможны. Моделью ошибки в этом случае естественно считать нечеткий вектор, а именно, $m_i,\ n_i,\ i = 1, \ldots, N$, будем считать значениями нечетких векторов $\mu_i \in \mathcal{R}_K,\ \nu_i \in \mathcal{R}_M,\ i = 1, \ldots, N$, с распределениями $\pi^{\mu_i}(\cdot) : \mathcal{R}_K \to [0,\, 1],\ \pi^{\nu_i}(\cdot) : \mathcal{R}_M \to [0,\, 1]$, заданными выражениями:

$$\pi^{\mu_i}(m_i) = \rho_1\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}\right),\ \sigma_i > 0, \tag{1.2}$$

$$\pi^{\nu_i}(n_i) = \rho_2\left(\frac{|n_i|}{\tau_i}\right),\ \tau_i > 0,\ i = 1, \ldots, N. \tag{1.3}$$

В (1.2), (1.3) $\rho_1(\cdot) : \mathcal{R}_K \to [0,\, 1]$, $\rho_2(\cdot) : \mathcal{R}_M \to [0,\, 1]$ — произвольные непрерывные строго монотонно убывающие на отрезке $[0,\, 1]$ функции, $\rho_j(0) = 1$, $j = 1, 2$, σ_i, τ_i, $i = 1, \ldots, N$, — «масштабные» коэффициенты для μ_i и ν_i, $i = 1, \ldots, N$, соответственно, определяющие область их возможных значений: возможность того, что $\mu_i = m_i$ и $\nu_i = n_i$ равна 0 для $|m_i| \geqslant \sigma_i$ и $|n_i| \geqslant \tau_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Далее, пусть исследователь может указать, для какой функции из класса $\mathcal{F}$ более возможно, а для какой — менее возможно, что она является истинной функциональной зависимостью, связывающей ненаблюдаемые значения x_i, y_i, $i = 1, \ldots, N$ в (1.1). Например, исследователь может это сделать, если целью решения задачи восстановления функциональной зависимости является экспериментальная проверка некоторого физического закона. Поэтому функции $f(\cdot)$ из класса $\mathcal{F}$ естественно считать значениями нечеткого элемента $\varphi \in \mathcal{F}$, с распределением возможностей $\pi^{\varphi}(\cdot) : \mathcal{F} \to [0,\, 1]$, заданным исследователем. Априорные представления исследователя о классе $\mathcal{F}$ позволяют определить, в каких точках x_i, $i = 1, \ldots, N$, *скорее всего* следует измерять значения $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$, искомой функции, чтобы оценить ее затем с максимальной точностью. Например, чтобы точнее оценить линейную зависимость, нужно измерять ее значения на концах отрезка, на котором она задана. Поэтому будем считать x_i значением нечеткого вектора $\xi_i \in \mathcal{R}_K$ с распределением $\pi^{\xi_i}(\cdot) : \mathcal{R}_K \to [0,\, 1]$, $i = 1, \ldots, N$, также заданным исследователем. В частности, если о классе $\mathcal{F}$ априори ничего не известно, то следует считать все функции из класса $\mathcal{F}$ априори равновозможными, т.е. $\pi^{\varphi}(f(\cdot)) = 1$ для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{F}$, аналогично $\pi^{\xi_i}(x_i) = 1$, $x_i \in \mathcal{R}_K$, $i = 1, \ldots, N$.

Будем также считать, что нечеткие элементы $\mu, \nu; \xi_1, \ldots, \xi_N$, где $\mu, \nu;$ — обозначение для $\mu_1, \nu_1; \ldots; \mu_N, \nu_N$, взаимно независимы в теоретико-возможностном смысле [11], т.е. возможность ошибок в i-м измерении не зависит от того, в каких точках измерены значения функции, и какими были ошибки в других измерениях.

Совокупность распределений $\pi^{\mu_i}(\cdot)$, $\pi^{\nu_i}(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, заданных выражениями (1.2), (1.3), класс $\mathcal{F}$, априорные распределения $\pi^{\varphi}(\cdot)$ и $\pi^{\xi_i}(\cdot)$, $i = 1, \ldots, N$, а также требование независимости нечетких векторов $\mu, \nu; \xi_1, \ldots, \xi_N$, определяют теоретико-возможностную модель схемы измерений (1.1).

§ 2. Восстановление функциональной зависимости методом минимизации необходимости ошибки

Учитывая сказанное, перепишем схему измерения (1.1) в следующем виде

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}_i = \xi_i + \mu_i, \\ \widetilde{\eta}_i = \eta_i + \nu_i, \\ \eta_i = f(\xi_i), \quad i = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.1}$$

В рассматриваемой далее задаче восстановления функциональной зависимости возможность и необходимость ошибки восстановления (см. § 1 гл. 3) определяются равенствами:

$$P(d(\cdot,\cdot)) = \sup_{\widetilde{x} \in (\mathcal{R}_K)^N, \widetilde{y} \in (\mathcal{R}_M)^N, f(\cdot) \in \mathcal{F}} \min(\pi^{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, f(\cdot)), l(f(\cdot), d(\widetilde{x}, \widetilde{y}))), \tag{2.2}$$

и соответственно

$$N(d(\cdot,\cdot)) = \inf_{\widetilde{x} \in (\mathcal{R}_K)^N, \widetilde{y} \in (\mathcal{R}_M)^N, f(\cdot) \in \mathcal{F}} \max(\vartheta \circ \pi^{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, f(\cdot)), l(f(\cdot), d(\widetilde{x}, \widetilde{y}))), \tag{2.3}$$

и надлежит определить правило оценивания $d(\cdot,\cdot) : (\mathcal{R}_K)^N \times (\mathcal{R}_M)^N \to \mathcal{F}$, которое каждому наблюдению $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}$ ставит в соответствие нечеткий элемент $\widehat{\varphi}(\cdot) = d(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$ в качестве оценки $\varphi(\cdot)$. $\pi^{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \varphi}(\cdot,\cdot,\cdot)$ — совместное распределение возможностей наблюдений $\widetilde{\xi} \in (\mathcal{R}_K)^N, \widetilde{\eta} \in (\mathcal{R}_M)^N$ и нечеткого элемента $\varphi(\cdot) \in \mathcal{F}$, его значение $\pi^{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, f(\cdot))$ по определению есть возможность равенств $\widetilde{\xi} = \widetilde{x}, \widetilde{\eta} = \widetilde{y}, \varphi(\cdot) = f(\cdot)$; функция $l(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию (1.19) гл. 2. Оптимальное правило восстановления функциональной зависимости определим как решение задачи на минимум необходимости ошибки восстановления (2.4)

$$\inf_{\widetilde{x} \in (\mathcal{R}_K)^N, \widetilde{y} \in (\mathcal{R}_M)^N, f(\cdot) \in \mathcal{F}} \max(\vartheta \circ \pi^{\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, f(\cdot)), l(f(\cdot), d(\widetilde{x}, \widetilde{y}))) \sim$$

$$\sim \min_{d(\cdot,\cdot) : (\mathcal{R}_K)^N \times (\mathcal{R}_M)^N \to \mathcal{F}}. \tag{2.4}$$

В работе [11] показано, что решение задачи (2.4) можно получить, решив более простую задачу

$$\inf_{f(\cdot)\in\mathcal{F}} \max(\vartheta\circ\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},f(\cdot)), l(f(\cdot),d(\cdot))) \sim \min_{d(\cdot)\in\mathcal{F}}, \tag{2.5}$$

в которой требуется найти функцию $d(\cdot) = d^*(\cdot) \in \mathcal{F}$, минимизирующую (2.5), более простую, чем $d(\cdot,\cdot) \in (\mathcal{R})_K^N \times (\mathcal{R})_M^N \to \mathcal{F}$, как это требуется в задаче (2.4); в задаче (2.5) $\widetilde{x},\widetilde{y}$ — фиксированные результаты измерений. Ее решение $d^*(\cdot) = d^*(\widetilde{x},\widetilde{y}) = f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot)$ — оценка $f(\cdot)$ максимальной возможности:

$$\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot)) = \max_{f(\cdot)\in\mathcal{F}} \pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},f(\cdot)). \tag{2.6}$$

Для найденной оценки $f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot) \in \mathcal{F}$ необходимость ошибки восстановления $N(d^*(\cdot,\cdot)) = \inf\limits_{\widetilde{x},\widetilde{y},f(\cdot)}(\vartheta\circ\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot)) = 0$.

Определим теоретико-возможностную модель схемы измерения. Пусть известны распределения (1.2), (1.3), априорные распределения $\pi^\xi(\cdot),\pi^\varphi(\cdot)$, класс $\mathcal{F}$, причем пусть для определенности $\pi^\xi(x) = 1,\ x \in (\mathcal{R}_K)^N$ (все значения ненаблюдаемого аргумента ξ искомой функции априори одинаково возможны), и $\pi^\varphi(f(\cdot)) = 1$ (все функции из класса $\mathcal{F}$ априори равновозможны); кроме того будем считать, что нечеткие элементы $\mu,\nu;\xi_1,\dots,\xi_N$ и φ, где $\mu,\nu;$ — обозначение для $\mu_1,\nu_1;\dots;\mu_N,\nu_N$, взаимно независимы в теоретико-возможностном смысле [11]. При этих условиях совместное распределение

$$\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\xi,\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},x,f(\cdot)) = \min(\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\xi,\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x,f(\cdot)),\pi^{\xi,\varphi}(x,f(\cdot))) = \pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\xi,\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x,f(\cdot)),$$

где $\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\xi,\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x,f(\cdot))$ - условное распределение $\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}$ при условии $\xi = x,\varphi(\cdot) = f(\cdot)$, [11], причем согласно равенствам (2.1)

$$\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\xi,\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x,f^*(\cdot)) = \pi^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-f(x));$$

Здесь и далее символ $f(x), x \in (\mathcal{R}_K)^N$, означает $f(x) = (f(x_1),\dots,f(x_N)))$, $x_i \in \mathcal{R}_K,\quad i = 1,\dots,N$. Поэтому

$$\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},f(\cdot)) = \sup_{x\in(\mathcal{R}_K)^N} \pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\xi,\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},x,f(\cdot)) =$$

$$= \sup_{x\in(\mathcal{R}_K)^N} \pi^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-f(x)),\ \widetilde{x}\in(\mathcal{R}_K)^N,\quad \widetilde{y}\in(\mathcal{R}_M)^N, f(\cdot)\in\mathcal{F}. \tag{2.7}$$

Пусть $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_M = \mathcal{R}_1$ и

$$\pi^{\mu_i,\nu_i}(m_i,n_i) = \rho\left(\max\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i},\frac{|n_i|}{\tau_i}\right)\right), \quad m_i,n_i \in \mathcal{R}_1, \quad i=1,\ldots,N, \tag{2.8}$$

где функция $\rho(\cdot) : \mathcal{R}_+ \to [0,1]$ непрерывна, равна единице в нуле, строго монотонно убывает на [0,1], равна нулю на $[1,\infty]$, а в остальном произвольна. Поскольку пары $\mu_1,\nu_1;\ldots;\mu_N,\nu_N$ независимы, совместное распределение векторов $\mu = \{\mu_1,\ldots,\mu_N\}$ и $\nu = \{\nu_1,\ldots,\nu_N\}$:

$$\pi^{\mu,\nu}(m,n) = \rho\left(\max_{1\le i\le N}\max\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i},\frac{|n_i|}{\tau_i}\right)\right), \quad m,n \in (\mathcal{R}_1)^N. \tag{2.9}$$

Рассмотрим примеры восстановления функциональных зависимостей для некоторых параметрических классов $\mathcal{F}$, в которых нечеткий элемент $\varphi(\cdot)$ определяется нечетким вектором параметров $\alpha \in \mathbb{A}$, все значения которого априори считаются равновозможными на $\mathbb{A}$.

§ 3. Восстановление линейной и кусочно-линейной зависимостей

Рассмотрим класс линейных функций: $f(x) = a_1x + a_0, x \in \mathcal{R}_1$; $a_1, a_0 \in \mathcal{R}_1$ – параметры, определяющие функции класса $\mathcal{F} = \{f(\cdot) = a_1 \cdot + a_0, a_1, a_0 \in \mathcal{R}_1\}$. При этом для $\alpha = (\alpha_0,\alpha_1) \in \mathcal{R}_2 = \mathbb{A}$ возможность равенств $\alpha_1 = a_1, \alpha_0 = a_0$ считается равной единице для любых $a_1, a_0 \in \mathcal{R}_1$. В задаче восстановления линейной зависимости схема измерений (2.1) обретает вид:

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}_i = \xi_i + \mu_i\ , \\ \widetilde{\eta}_i = \eta_i + \nu_i\ , \\ \eta_i = a_1\xi_i + a_0, \quad i=1,\ldots,N, \end{cases} \tag{3.1}$$

где μ_i, ν_i контролируются распределением (2.8), а решение задачи (2.6) определения функциональной зависимости сводится к отысканию параметров $a_1, a_0 \in \mathcal{R}_1$. Поскольку согласно (2.7)

$$\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x},\widetilde{y},f(\cdot)) = \sup_{x\in(\mathcal{R}_1)^N}(\pi^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-f(x))) =$$

$$= \sup_{m\in(\mathcal{R}_1)^N}\left(\rho\left(\max_{1\le i\le N}\max\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i},\frac{|\widetilde{y}_i-a_1(\widetilde{x}_i-m_i)-a_0|}{\tau_i}\right)\right)\right), \quad (3.2)$$

то задача (2.6) сводится к определению a_1, a_0 из условия:

$$\sup_{m\in(\mathcal{R}_1)^N}\left(\rho\left(\max_{1\le i\le N}\max\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i},\frac{|\widetilde{y}_i-a_1(\widetilde{x}_i-m_i)-a_0|}{\tau_i}\right)\right)\right) \sim \max_{a_1,a_0} \quad (3.3)$$

Так как $\rho(\cdot):\mathcal{R}_+\to[0,1]$ – строго монотонно убывает на [0,1] и равна 0 на $\mathcal{R}_1\backslash[0,1)$, то вместо задачи (3.3) можно рассмотреть задачу

$$q = \max_{1\le i\le N}\max\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i},\frac{|\widetilde{y}_i-a_1(\widetilde{x}_i-m_i)-a_0|}{\tau_i}\right) \sim \min_{a_1,a_0,m} \quad (3.4)$$

Если $\widehat{q} = \min\limits_{a_1,a_0,m} q$ принадлежит отрезку $[0,1)$, то параметры a_1^*, a_0^*, получаемые при решении задачи (3.4), являются решением задачи (3.3). Если же $\widehat{q}\geqslant 1$, то $\rho(\widehat{q})=0$, и модель эксперимента следует признать неадекватной.

Для решения задачи (3.4) введем следующие обозначения:

$$z = \{q, a_0, m_1, \ldots, m_N\} \in \mathcal{R}_{N+2},$$

$$l = \{1, 0, \ldots, 0\} \in \mathcal{R}_{N+2},$$

$$b_i = \{\underbrace{-\tau_i, -1, 0, \ldots, 0, a_1}_{i+2}, 0, \ldots, 0\} \in \mathcal{R}_{N+2},$$

$$c_i = \{\underbrace{-\tau_i, 1, 0, \ldots, 0, -a_1}_{i+2}, 0, \ldots, 0\} \in \mathcal{R}_{N+2},$$

$$d_i = \{\underbrace{-\sigma_i, 0, \ldots, 0, 1}_{i+2}, 0, \ldots, 0\} \in \mathcal{R}_{N+2},$$

$$e_i = \{\underbrace{-\sigma_i, 0, \ldots, 0, -1}_{i+2}, 0, \ldots, 0\} \in \mathcal{R}_{N+2}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Нетрудно заметить,что при фиксированном значении a_1 задача (3.4) сводится к стандартной задаче линейного программирования по переменным $a_0, m_1, \ldots, m_N$, в которой требуется найти минимум линейной функции $q=(l,z)$ на подмножестве $\mathcal{R}_{N+2}$, выделенном линейными неравенствами:

$$(b_i, z) \le -\widetilde{y}_i + a_1\widetilde{x}_i,$$

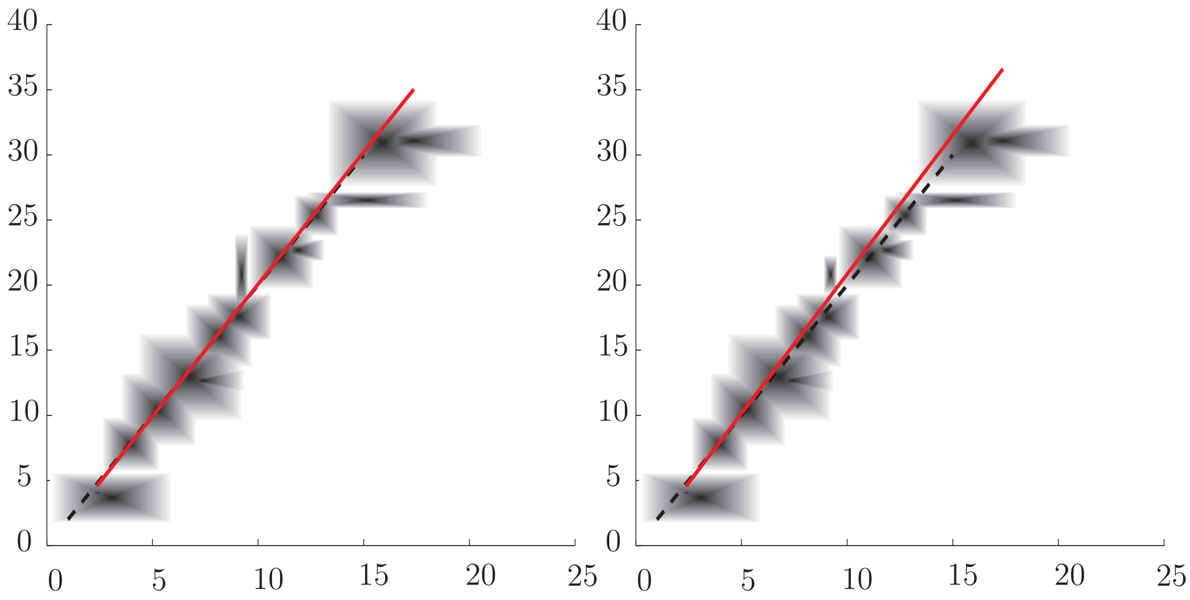


Рис. 4.1. Результат численного моделирования восстановления линейной функции $f(x) = 2x, \quad x = \{1, 2, \ldots, 14, 15\}$. Пунктирными линиями обозначены истинные прямые, сплошными — прямые, полученные в результаты восстановления. В центре каждого прямоугольника находится экспериментально измеренная точка, которая могла быть получена из любой точки прямоугольника добавлением ошибки измерения, но с разной возможностью. Чем темнее точка внутри прямоугольника, тем больше эта возможность. На нижнем рисунке модель противоречит результатам измерений, поскольку некоторые прямоугольники не имеют общих точек с найденной прямой.

$$(c_i, z) \le \widetilde{y}_i - a_1\widetilde{x}_i,$$

$$(d_i, z) \le 0,$$

$$(e_i, z) \le 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Если $m_i(a_1), i = 1, \ldots, N, a_0(a_1), q(a_1)$ – ее решение[1]), то решение задачи (3.4) получается из условия минимизации $\widetilde{q} = q(a_1)$ по $a_1 \in \mathcal{R}_1 : q(\widehat{a}_1) = \min\limits_{a_1} q(a_1)$.

Оценка максимальной возможности искомой линейной функции дается равенством: $f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x) = \widehat{a}_1 x + \widehat{a}_0, x \in \mathcal{R}_1$, где $\widehat{a}_0 = a_0(\widehat{a}_1)$. Что касается адекватности, то если $\rho(\widehat{q}) = 0$, то модель эксперимента следует признать противоречащей результатам измерений и най-

[1]) Все решения, разумеется, зависят от результатов измерений $\widetilde{x}, \widetilde{y}$, но для краткости эти зависимости не отмечаются.

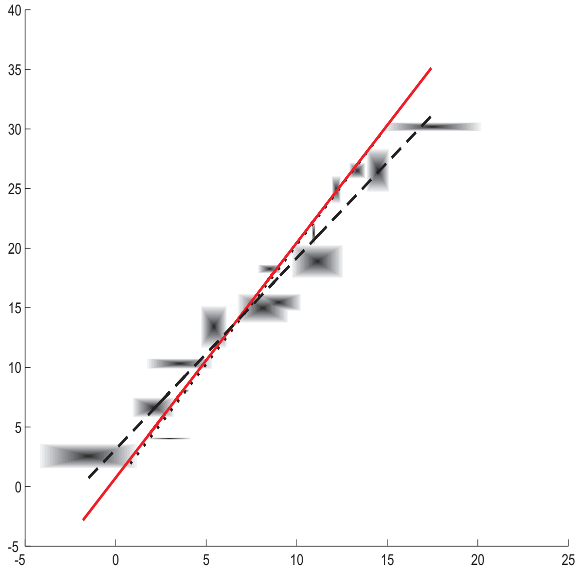


Рис. 4.2. Сплошная линия — результат восстановления методом минимизации необходимости ошибки восстановления, штриховая линия — результат восстановления методом наименьших квадратов; пунктирная линия, практически совпадающая с результатом восстановления методом минимизации необходимости ошибки восстановления — истинная прямая

денную оценку прямой следует считать сомнительной, см. рис. 3. На рис. 4.2 приведен результат восстановления линейной функции стандартным методом наименьших квадратов в сравнении с результатом восстановления методом минимизации необходимости ошибки восстановления.

Рассмотрим теперь более сложный случай, чаще встречающийся на практике, когда $\mathcal{F}$ – параметрический класс кусочно-линейных функций, определенных на $\mathcal{R}_1$, таких, что

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x + a_0, x \in [-\infty, c], \\ b_1 x + b_0, x \in [c, \infty], \end{cases} \tag{3.5}$$

где $a_1, a_0, b_1, b_0, c \in \mathcal{R}_1$ – параметры, определяющие функции класса
$\mathcal{F} = \left\{ f(\cdot) : f(x) = \begin{cases} a_1 x + a_0, x \in [-\infty, c], \\ b_1 x + b_0, x \in [c, \infty], \end{cases} a_1, b_1, a_0, b_0, c \in \mathcal{R}_1 \right\}$, все комбинации значений которых предполагаются априори равновозможными (т.е. $\varphi^\alpha(a_1, a_0, b_1, b_0) = 1, a_1, a_0, b_1, b_0 \in$

$\mathcal{R}_1$). Схема измерения (2.1) в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}_i = \xi_i + \mu_i, \\ \widetilde{\eta}_i = \eta_i + \nu_i, \\ \eta_i = a_1\xi_i + a_0, i = 1, ..., k, \\ \eta_i = b_1\xi_i + b_0, i = k+1, ..., N. \end{cases} \tag{3.6}$$

где $\mu_i, \nu_i, i = 1, \ldots, N$, контролируются распределениями (2.8), k — неизвестный номер, отделяющий наблюдения, соответствующие первой и второй прямым [1]). Задача (2.6) определения кусочно-линейной функции сводится к отысканию параметров a_1, a_0, b_1, b_0, k в задаче

$$\max(\widehat{q}_1(k), \widehat{q}_2(k)) \sim \min_k, \tag{3.7}$$

где $\widehat{q}_1(k), \widehat{q}_2(k)$ для каждого фиксированного $k = 1, \ldots, N-1$ суть соответственно решения задач

$$q_1 = \max \max_{1 \le i \le k} \left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - a_1(\widetilde{x}_i - m_i) - a_0|}{\tau_i} \right) \sim \min_{a_1, a_0, m_1, \ldots, m_k}, \tag{3.8}$$

$$q_2 = \max \max_{k+1 \le i \le N} \left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - b_1(\widetilde{x}_i - m_i) - b_0|}{\tau_i} \right) \sim \min_{b_1, b_0, m_{k+1}, \ldots, m_N}. \tag{3.9}$$

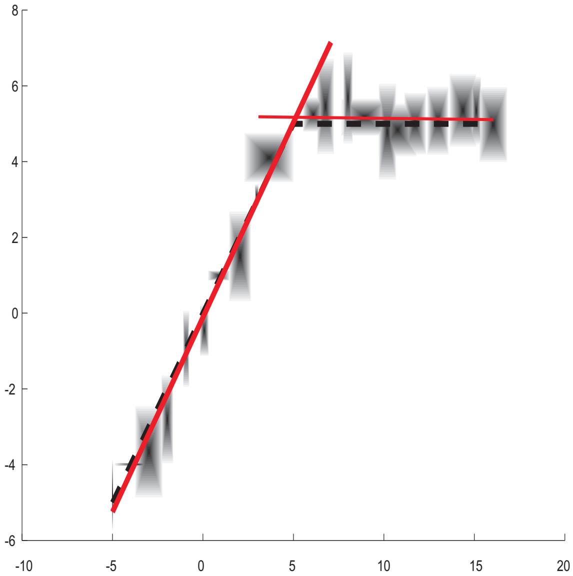
Задачи (3.8), (3.9) при фиксированных a_1 и соответственно b_1 являются задачами линейного программирования. Если $q_1(a_1)$ и $q_2(b_1)$ — решения этих задач, то решения задач (3.8), (3.9) суть соответственно: $\widehat{q}_1(k) = \min\limits_{a_1} q_1(a_1)$, $\widehat{q}_2(k) = \min\limits_{b_1} q_2(b_1)$. Пусть $\widehat{k}$ – решение задачи (3.7). Тогда искомая кусочно-линейная функция в случае адекватности модели дается равенствами $f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x) = \widehat{a}_1 x + \widehat{a}_0, \quad x \in [-\infty, x_{\widehat{k}}], f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x) = \widehat{b}_1 x + \widehat{b}_0, \quad x \in [x_{\widehat{k}+1}, \infty]$, где $\widehat{a}_1 = a_1(\widehat{k}), \widehat{a}_0 = a_0(\widehat{k}), \widehat{b}_1 = b_1(\widehat{k}), \widehat{b}_0 = b_0(\widehat{k})$.

Что касается адекватности модели, то если $\rho(\widehat{q}) = 0$, где

$$\widehat{q} = \max(\widehat{q}_1(\widehat{k}), \widehat{q}_2(\widehat{k})),$$

то использованная модель и данные измерений $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ противоречат друг другу со всеми вытекающими отсюда заключениями. Результаты численного эксперимента в модельной

[1]) т.е. измерения считаются упорядоченными таким образом, что вначале измеряются точки, которые должны лежать на одной прямой, а затем — на другой.



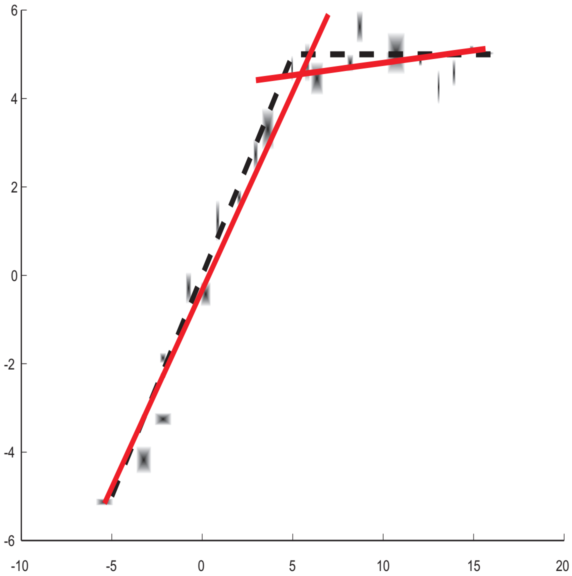


Рис. 4.3. Результат численного моделирования восстановления кусочно-линейной функции $f_1(x) = x, x = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$, $f_2(x) = 5, x = \{5, 6, \ldots, 14, 15\}$. Левый и правый рисунки соответствуют различным моделям эксперимента. На правом рисунке параметры σ_i и $\tau_i, i = 1, \ \ldots, N$, меньше истинных значений ошибок, график восстановленной кусочно-линейной функции пересекает не все прямоугольники и возможность восстановленной кусочно-линейной функции равна 0. Аналогичная рассмотренной ситуация с выбором модели эксперимента иллюстрируется на рисунках (4.4),(4.5)

задаче восстановления кусочно-линейной функции иллюстрируются на рис. 4.3[1]).

§ 4. Восстановление экспоненциальной и кусочно-экспоненциальной зависимостей

В качестве еще одного примера рассмотрим задачу восстановления экспоненциальной зависимости, возникающую, например, при обработке результатов некоторых экспериментов в ядерной физике. Пусть $\mathcal{F}$ – параметрический класс экспонент $f(x) = a_1 e^{a_2 x} + a_3, x \in [a, b]$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{R}_1$ – параметры, определяющие функции класса, $\mathcal{F} = \ \{f(\cdot) = a_1 e^{a_2 \cdot} +$

---

[1]) На всех рисунках в гл. 4, кроме рис. 4.6, 4.7, приняты такие же обозначения, как и на рис. 3

$a_3, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{R}_1\}$. Запишем соответствующую схему измерений:

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}_i = \xi_i + \mu_i, \\ \widetilde{\eta}_i = \eta_i + \nu_i, \\ \eta_i = a_1 e^{a_2 \xi_i} + a_0, \quad i = 1, ..., N \end{cases} \tag{4.1}$$

В (4.1) $\mu_i, \nu_i, i = 1, \ldots, N$, контролируются распределениями (2.8). Совместное распределение измерений и искомой функции имеет вид

$$\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, f(\cdot)) = \sup_{x \in (\mathcal{R}_1)^N} (\pi^{\mu,\nu}(\widetilde{x} - x, \widetilde{y} - f(x))) =$$

$$= \sup_{m \in (\mathcal{R}_1)^N} \left(\rho \left(\max_{1 \le i \le N} \max \left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - a_1 e^{a_2(\widetilde{x}_i - m_i)} - a_3|}{\tau_i} \right) \right) \right) \tag{4.2}$$

и задача (2.6) сводится к задаче:

$$\max_{1 \le i \le N} \max \left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - a_1 e^{a_2(\widetilde{x}_i - m_i)} - a_3|}{\tau_i} \right) \sim \min_{a_1, a_2, a_3, m_1, \ldots, m_N}. \tag{4.3}$$

На практике обычно ошибки измерений значений $x_i, \quad i = 1, \ldots, N$ аргумента искомой функции малы, и можно считать, что

$$e^{a_2(\widetilde{x}_i - m_i)} \approx e^{a_2 \widetilde{x}_i}(1 - a_2 m_i) \tag{4.4}$$

поэтому вместо задачи (4.3), как правило, достаточно решить задачу

$$q = \max \max_{1 \le i \le N} \left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - a_1 e^{a_2 \widetilde{x}_i}(1 - a_2 m_i) - a_3|}{\tau_i} \right) \sim \min_{a_1, a_2, a_3, m_1, \ldots, m_N}. \tag{4.5}$$

При фиксированных $a_2, a_1 \in \mathcal{R}_1$ (4.5) является задачей линейного программирования по переменным $a_3, m_1, \ldots, m_N$. Если $m_i(a_2, a_1), \quad i = 1, \ldots, N$, $a_3(a_2, a_1)$, $q(a_2, a_1)$ – ее решение, то решение задачи (4.5) получается из условия минимизации $q(a_2, a_1)$ по $a_2, a_1 \in \mathcal{R}_1$: $q(\widehat{a}_2) = \min\limits_{a_2, a_1} q(a_2, a_1)$.

Оценка максимальной возможности искомой экспоненциальной зависимости дается равенством $f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x) = \widehat{a}_1 e^{\widehat{a}_2 x} + \widehat{a}_3$, где $\widehat{a}_3 = a_3(\widehat{a}_2, \widehat{a}_1)$. Если $\rho(\widehat{q}) = 0$, где $\widehat{q}$ — минимальное значение в (4.5), то модель эксперимента и результаты измерений противоречат друг другу, и найденную оценку следует признать не вызывающей доверия, см. рис. 4.4.

На практике чаще необходимо восстановить не одну экспоненту, а кусочно-экспоненциальную функцию. В этом случае $\mathcal{F}$ – параметрический класс кусочно-экспоненциальных функций, определенных на $\mathcal{R}_1$, например, таких, что

$$f(x) = \begin{cases} a_1 e^{a_2 x} + a_3, x \in [-\infty, c], \\ b_1 e^{b_2 x} + b_3, x \in [c, \infty], \end{cases} \tag{4.6}$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c \in \mathcal{R}_1$ – параметры, определяющие функции класса $\mathcal{F} = \left\{ f(\cdot) : f(x) = \begin{cases} a_1 e^{a_2 x} + a_3, x \in [-\infty, c] \\ b_1 e^{a_2 x} + b_3, x \in [c, \infty], \end{cases} a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, c \in \mathcal{R}_1 \right\}$, все комбинации их значений априори равновозможны, и схема измерений дается равенствами:

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}_i = \xi_i + \mu_i, \\ \widetilde{\eta}_i = \eta_i + \nu_i, \\ \eta_i = a_1 e^{a_2 \xi_i} + a_0, \quad i = 1, ..., k, \\ \eta_i = b_1 e^{a_2 \xi_i} + b_0, \quad i = k+1, ..., N, \end{cases} \tag{4.7}$$

где, как и в (3.6), $\mu_i, \nu_i, \quad i = 1, \ldots, N$, контролируются распределением (2.8), k — неизвестный номер, отделяющий наблюдения, соответствующие первой и второй экспонентам. Решение задачи определения функциональной зависимости сводится к отысканию параметров $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, k$ в задаче

$$\max(\widehat{q}_1(k), \widehat{q}_2(k)) \sim \min_{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, k}, \tag{4.8}$$

где $\widehat{q}_1(k), \widehat{q}_2(k)$ для каждого фиксированного k суть соответственно решения задач

$$q_1 = \max_{1 \le i \le k} \max \left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - a_1 e^{a_2(\widetilde{x}_i - m_i)} - a_3|}{\tau_i} \right) \sim \min_{a_1, a_2, a_3, m_1, \ldots, m_k} \tag{4.9}$$

$$q_2 = \max_{k+1 \le i \le N} \max \left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - b_1 e^{b_2(\widetilde{x}_i - m_i)} - b_3}{\tau_i} \right) \sim \min_{b_1, b_2, b_3, m_{k+1}, \ldots, m_n}. \tag{4.10}$$

Для малых значений ошибок измерений $m_i, i = 1, \ldots, N$ задачи (4.9) (4.10) при фиксированных a_1, a_2 и соответственно b_1, b_2 являются задачами линейного программирования. Искомая кусочно-экспоненциальная функция дается выражениями

$$f^*_{\widetilde{x}, \widetilde{y}}(x) = \widehat{a}_1 e^{\widehat{a}_2 x} + \widehat{a}_3, \quad x \in [-\infty, x_{\widehat{k}}], \quad f^*_{\widetilde{x}, \widetilde{y}}(x) = \widehat{b}_1 e^{\widehat{b}_2 x + \widehat{b}_3}, \quad x \in [x_{\widehat{k}+1}, \infty], \tag{4.11}$$

$\widehat{a}_i = \widehat{a}_i(\widehat{k}), i = 1, 2, 3, \widehat{b}_i = \widehat{b}_i(\widehat{k}), i = 1, 2, 3,$ — решения задач (4.10), (4.8) при $k = \widehat{k}$. Результаты численного эксперимента по восстановлению кусочно-экспоненциальной зависимости представлены на рис. 4.5.

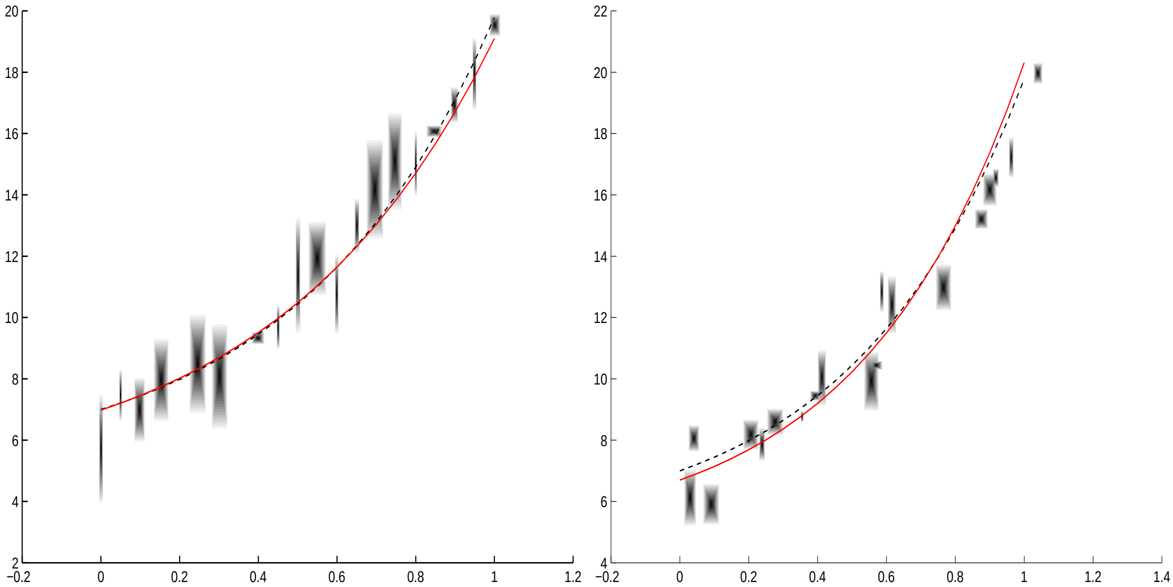


Рис. 4.4. Результат численного моделирования восстановления экспоненциальной функции

$$f(x) = 2e^{2x} + 5, \quad x = \{0, 0.05, \ldots, 0.95, 1\}$$

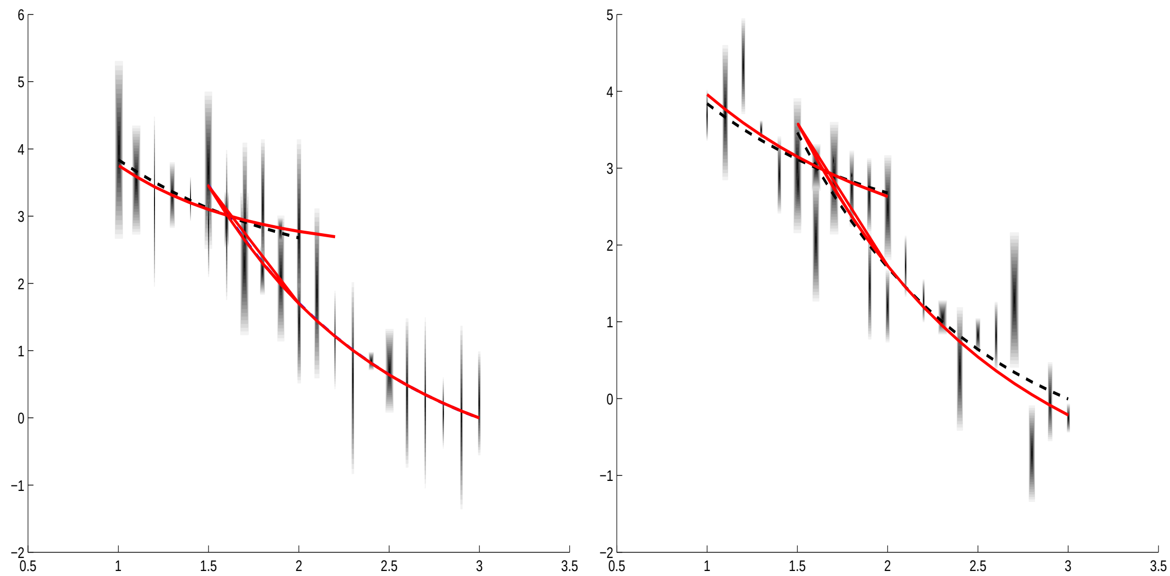


Рис. 4.5. Результат численного моделирования восстановления кусочно-экспоненциальной функции $f_1(x) = 5e^{-x} + 2, x = \{1, 1.1, \ldots, 1.9, 2\}, \quad f_2(x) = 20e^{-x} - 1, x = \{1.5, 1.6, \ldots, 2.9, 3\}$

§ 5. Задача прогнозирования

5.1. Прогноз результата физически нереализуемого эксперимента. Следует отметить, что если на основании измерений (**??**) решить задачу оценивания поверхности

$f_0 \in \Gamma$, то оценка максимальной возможности

$$f^* = arg \max_{f \in \Gamma} \pi^{\widetilde{\zeta}, \varphi}(\widetilde{z}, f),$$

являющаяся решением этой задачи, вообще говоря, отличается от ее оценки $\widehat{f}$, определяющей максимально возможный прогноз $\widehat{z}_0(\widetilde{z})$. Это отличие проиллюстрировано в п. 5.3 этой главы на примере сравнения решений задачи восстановления линейной модели измерений и задачи прогноза отклика прибора, модель которого неизвестна, на известный входной сигнал.

Рассмотрим пример, в котором $Z = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — евклидовы пространства, поверхности $f \in \Gamma \subset Z$ являются множествами $\{(x, f(x)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad x \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (графиками функций $f(\cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ из заданного класса $\mathcal{F}$).

Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{R}_1$, $\widetilde{\zeta}_i = (\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\eta}_i)$, $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$, $\alpha_i = (\mu_i, \nu_i)$, где $\widetilde{\xi}_i, \widetilde{\eta}_i$ — нечеткие элементы, значения которых $\widetilde{x}_i$ и соответственно $\widetilde{y}_i$ наблюдаются в эксперименте по схеме

$$\begin{aligned} &\widetilde{\xi}_i = \xi_i + \mu_i, \\ &\widetilde{\eta}_i = \eta + \nu_i, \\ &\eta_i = f(\xi_i), \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

в которой $f(\cdot)$ — функция, связывающая ненаблюдаемые значения x_i, y_i нечетких элементов ξ_i, η_i, μ_i, ν_i, — нечеткие ошибки измерений, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть функция $f(\cdot)$ принадлежит параметрическому классу линейных функций $\mathcal{F} = \{a_1 x + a_0, \quad x \in \mathcal{X}, \quad a_1, a_0 \in \mathcal{R}_1\}$, где a_1, a_0 — параметры, определяющие функции класса $\mathcal{F}$, распределение

$$\pi^{\mu_i, \nu_i}(m_i, n_i) = \rho\left(\frac{\sqrt{m_i^2 + n_i^2}}{r_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.1}$$

где функция $\rho(\cdot) : \mathcal{R}_+ \to [0, 1]$ — непрерывная, строго монотоннно убывает на $[0, 1)$, равна 0 на $[1, \infty]$. Последнее равенство означает, что значения ошибок m_i, n_i, для которых $\sqrt{m_i^2 + n_i^2} \geqslant r_i$, невозможны.

В рассматриваемом примере

$$\pi^{(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}),\varphi}((\widetilde{x},\widetilde{y}),f(\cdot)) = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{x\in\mathcal{R}_1}\rho\left(\frac{\sqrt{(\widetilde{x}_i-x)^2+(\widetilde{y}_i-f(x))^2}}{r_i}\right),$$

параметры a_1^*, a_0^*, определяющие функцию $f^*(\cdot) = a_1^*\cdot + a_0^*$, для которой возможность прогноза $(\widehat{x}_0, \widehat{y}_0)$ максимальна, являются решением задачи

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\inf_{x\in\mathcal{R}_1}\frac{\sqrt{(\widetilde{x}_i-x)^2+(\widetilde{y}_i-a_1x-a_0)^2}}{r_i} \sim \inf_{\substack{a_1,a_0\in\mathcal{R}_1,\\ (x_0,y_0)\in\mathcal{R}_1\times\mathcal{R}_1,\\ y_0=a_1x_0+a+0}}.$$

5.2. Восстановление линейной модели измерений. Рассмотрим обобщение задачи восстановления прямой — задачу оценивания линейной схемы измерения. В этой задаче требуется на основании тестовых измерений

$$\xi_i = Af_i + a_i + \nu_i, \quad i = 1,\ldots,S, \tag{5.2}$$

известных сигналов $f_1,\ldots,f_S \in \mathcal{R}_M$ с ошибками $\nu_1,\ldots,\nu_S \in \mathcal{R}_N$, выполненных на неточно известном приборе, уточнить его модель — линейный оператор $A : \mathcal{R}_M \to \mathcal{R}_N$ и вектор «смещения» $a \in \mathcal{R}_N$.

Перепишем равенства (5.2) в виде матричного равенства

$$\xi = \widetilde{A}F + \nu, \tag{5.3}$$

в котором $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_S) = \begin{pmatrix}\xi_{11} & \ldots & \xi_{S1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_{1N} & \ldots & \xi_{SN}\end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1M} & a_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{N1} & \ldots & a_{NM} & a_N\end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix}f_1 & \ldots & f_S\\ 1 & \ldots & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_{11} & \ldots & f_{S1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{1N} & \ldots & f_{SN}\end{pmatrix}$, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_S) = \begin{pmatrix}\nu_{11} & \ldots & \nu_{S1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \nu_{1N} & \ldots & \nu_{SN}\end{pmatrix}$.

Равенству (5.3) эквивалентно равенство

$$\xi^* = F^*\widetilde{A}^* + \nu^*, \tag{5.4}$$

где звездочка означает транспонирование.

Запишем равенство (5.4) для каждого из N столбцов матриц ξ^*, $\widetilde{A}^*$ и ν^*:

$$\begin{pmatrix} \xi_{1k} \\ \vdots \\ \xi_{Sk} \end{pmatrix} = \widetilde{A}^* \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kM} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_{1k} \\ \vdots \\ \nu_{Sk} \end{pmatrix}, \ k = 1, \ldots, N. \tag{5.5}$$

Каждый вектор ошибок $\nu_{(k)} = \begin{pmatrix} \nu_{1k} \\ \vdots \\ \nu_{Sk} \end{pmatrix}$ в (5.5) имеет независимые в теоретико-возможностном смысле координаты $(\nu_{1k}, \ldots, \nu_{Sk})$, $k = 1, \ldots, N$, так как ошибки в тестовых измерениях естественно считать независимыми. Если $f^{\nu_{(k)}}(z) = r\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant S} \dfrac{|z_i|}{\sigma_{ik}}\right)$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_S \end{pmatrix}$, — распределение $\nu_{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$, то оптимальное оценивание каждой строки матрицы $\widetilde{A}$ сводится к решению задачи линейного программирования

$$q_k = \max_{1\leqslant i\leqslant S} \frac{|x_{ik} - (F^*(a_{k_1} \ldots a_{k_M} a_k)^*)_i\,|}{\sigma_{ik}} \sim \min_{(a_{k_1} \ldots a_{k_M} a_k)^* \in \mathcal{R}_{M+1}}. \tag{5.6}$$

5.3. Прогноз отклика прибора на сигнал, который реально не может быть подан на его вход. Рассмотрим задачу прогноза измерения, в которой требуется на основании тестовых измерений

$$\xi_i = Af_i + \nu_i, \quad i = 1, \ldots, S, \tag{5.7}$$

известных сигналов $f_1, \ldots, f_S \in \mathcal{R}_M$ с ошибками $\nu_1, \ldots, \nu_S \in \mathcal{R}_N$, выполненных на неточно известном приборе, уточнить его модель — линейный оператор $A : \mathcal{R}_M \to \mathcal{R}_N$, а затем оценить отклик A на входной сигнал f_0, который реально не может быть подан на вход A. Критерием качества уточнения естественно считать точность прогнозирования отклика прибора A на входной сигнал f_0. Оператор A, моделирующий прибор, априори задается как элемент параметрического класса операторов в виде

$$A = \sum_{i=1}^{K} a_i A_i. \tag{5.8}$$

Линейные операторы $A_1, \ldots, A_K$ в (5.8) заданы, а вектор $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_K$ параметров подлежит уточнению.

В схеме измерения (5.7) результаты измерения $\xi_i, i = 1, \ldots, S$ суть нечеткие векторы пространства $\mathcal{R}_N$, ошибки измерения $\nu_i, i = 1, \ldots, S$, — независимые нечеткие векторы $\mathcal{R}_N$ с распределениями $\pi^{\nu_i}(\cdot) : \mathcal{R}_N \to [0,1]$ [1]),

$$\pi^{\nu_i}(n_i) = \rho\left(\frac{|n_i|}{\sigma_i}\right), i = 1, \ldots, S. \tag{5.9}$$

в которых $\rho(\cdot) : \mathcal{R}_N \to [0,1]$ — произвольная непрерывная строго монотонно убывающая на $[0,1]$ функция, $\rho(0) = 1, \rho(1) = 0$, σ_i — «масштабный» коэффициент для ν_i, определяющий область его возможных значений; в частности, возможность того, что $\nu_i = n_i$ равна 0 для $|n_i| \geqslant \sigma_i, i = 1, \ldots, N$. Искомый вектор параметров $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_K$ интерпретируется как значение нечеткого вектора $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_K$ с априорным распределением $\pi^{\alpha}(a) = 1, a \in \mathcal{R}_K$, согласно которому все значения α до измерений считаются равновозможными. С учетом представления (5.8) схема измерений (5.7) может быть переписана в виде схемы измерения нечеткого вектора $\alpha \in \mathcal{R}_K$:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 f_1 & \ldots & A_K f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_1 f_S & \ldots & A_K f_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_S \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

или

$$\xi = T\alpha + \nu, \tag{4*}$$

[1]) Всюду в данном параграфе $|\nu| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \nu_j$ для $\nu \in \mathcal{R}_N$

где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_S \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} A_1 f_1 & \dots & A_K f_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_1 f_S & \dots & A_K f_S \end{pmatrix}$, $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_S \end{pmatrix}$. Соответственно

$$Af_0 = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i A_i f_0 = (A_1 f_0, \dots, A_K f_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix} = U_{f_0} \alpha. \tag{5.11}$$

где

$$U_{f_0} = (A_1 f_0, \dots, A_K f_0)\,.$$

Теоретико-возможностная задача прогноза измерения оказывается идентичной теоретико-возможностной задаче оценивания вектора $U_{f_0}\alpha$ по наблюдению ξ, в которой требуется определить правило оценивания $d(\cdot) : (\mathcal{R}_N)^S \to \mathcal{R}_N$ так, чтобы $d(\xi)$ можно было считать наиболее точной оценкой нечеткого вектора $U_{f_0}\alpha$ [11]. Качество правила $d(\cdot)$ охарактеризуем величиной необходимости ошибки прогноза:

$$N(d(\cdot)) = \inf_{x \in (\mathcal{R}_N)^S,\, a \in \mathcal{R}_K} \max(\vartheta \circ \pi^{\xi,\alpha}(x,a), l(U_{f_0}a, d(x))) \tag{5.12}$$

и оптимальное правило $d^*(\cdot)$ определим из условия

$$N(d^*(\cdot)) = \min_{d(\cdot):(\mathcal{R}_N)^S \to \mathcal{R}_N} N(d(\cdot)). \tag{5.13}$$

Будем считать, что, как и раньше, функция $l(\cdot,\cdot)$ в (5.12) удовлетворяет условию (1.6) гл. 3. При каждом $x \in (\mathcal{R}_N)^S$ задача (5.13) сводится к задаче:

$$\pi^{\xi,\alpha}(x,a) \sim \max_{a \in \mathcal{R}_K}, \tag{5.14}$$

решение которой a_x^* определяет оптимальное правило $d^*(\cdot)$: необходимость ошибки оценивания вектора $U_{f_0}\alpha \in \mathcal{R}_N$ посредством $d^*(x) = U_{f_0}a_x^*$, где x - результат измерения, минимальна.

В силу независимости векторов ошибок $\nu_i, \in \mathcal{R}_K,\ i = 1, \dots, S$, совместное распределение

$$\pi^{\nu_1,\dots,\nu_S}(n_1, \dots, n_S) = \pi^{\nu}(n) = \rho\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant S}\left(\frac{|n_i|}{\sigma_i}\right)\right); \tag{5.15}$$

для совместного распределения (так как любые значения нечеткого вектора α одинаково возможны, $\pi^{\alpha}(a) = 1, a \in \mathcal{R}_K$) $\pi^{\xi,\alpha}(\cdot,\cdot) : (\mathcal{R}_N)^S \times \mathcal{R}_K \to [0,1]$ справедливо равенство [11]:

$$\pi^{\xi,\alpha}(x,a) = \pi^{\xi|\alpha}(x|a) = \pi^{\nu}(x - Ta)$$

(см. (2.7)). Поэтому задача (5.14) сводится к задаче линейного программирования

$$q = \max_{1 \leqslant i \leqslant S} \left(\frac{|x_i - (Ta)_i|}{\sigma_i} \right) \sim \min_{a \in \mathcal{R}_K} . \tag{5.16}$$

Если a_x^* — ее решение, то $U_{f_0} a_x^*$ — искомый прогноз при $\xi = x$. Что касается адекватности модели тестирования (5.7) (5.8) (5.9), то если при $\xi = x$ $\pi^{\xi,\alpha^*}(x, a_x^*) = \max_{a \in \mathcal{R}_K} \pi^{\xi,\alpha}(x,a) = \pi^{\xi}(x) = 0$, то модель эксперимента (4*) ,(5.15) следует признать противоречащей результатам измерения. На рис. 4.6 приведены результаты численного моделирования восстановления модели и прогноза, полученные с помощью разработанного и реализованного на базе платформы Matlab программного комплекса. На верхнем рисунке представлены (слева направо): график матричных элементов матрицы, строки которой — суть тестовые сигналы, график матричных элементов матрицы, строки которой — результаты тестовых измерений, и сигнал f_0, отклик на который нужно получить; на втором сверху рисунке представлены (слева направо): истинный отклик x_0; отклик x_1, полученный с помощью аппаратной функции A_1, являющейся решением задачи восстановления модели; отклик x_2, являющийся решением задачи прогноза при наличии априорной информации, изображенной в виде пунктирного «коридора»; на нижнем рисунке представлены (слева направо): истинная аппаратная функция A; результат решения задачи восстановления модели A_1; аппаратная функция A_2, полученная при прогнозировании при наличии априорной информации об x_0.

§ 6. Восстановление функциональной зависимости методом минимизации условной ошибки

Остановимся кратко на основных фактах минимизации теоретико-возможностной ошибки оценивания [11].

Пусть $\eta \in \mathcal{R}_N$ — нечеткий вектор, значение которого нужно оценить на основании на-

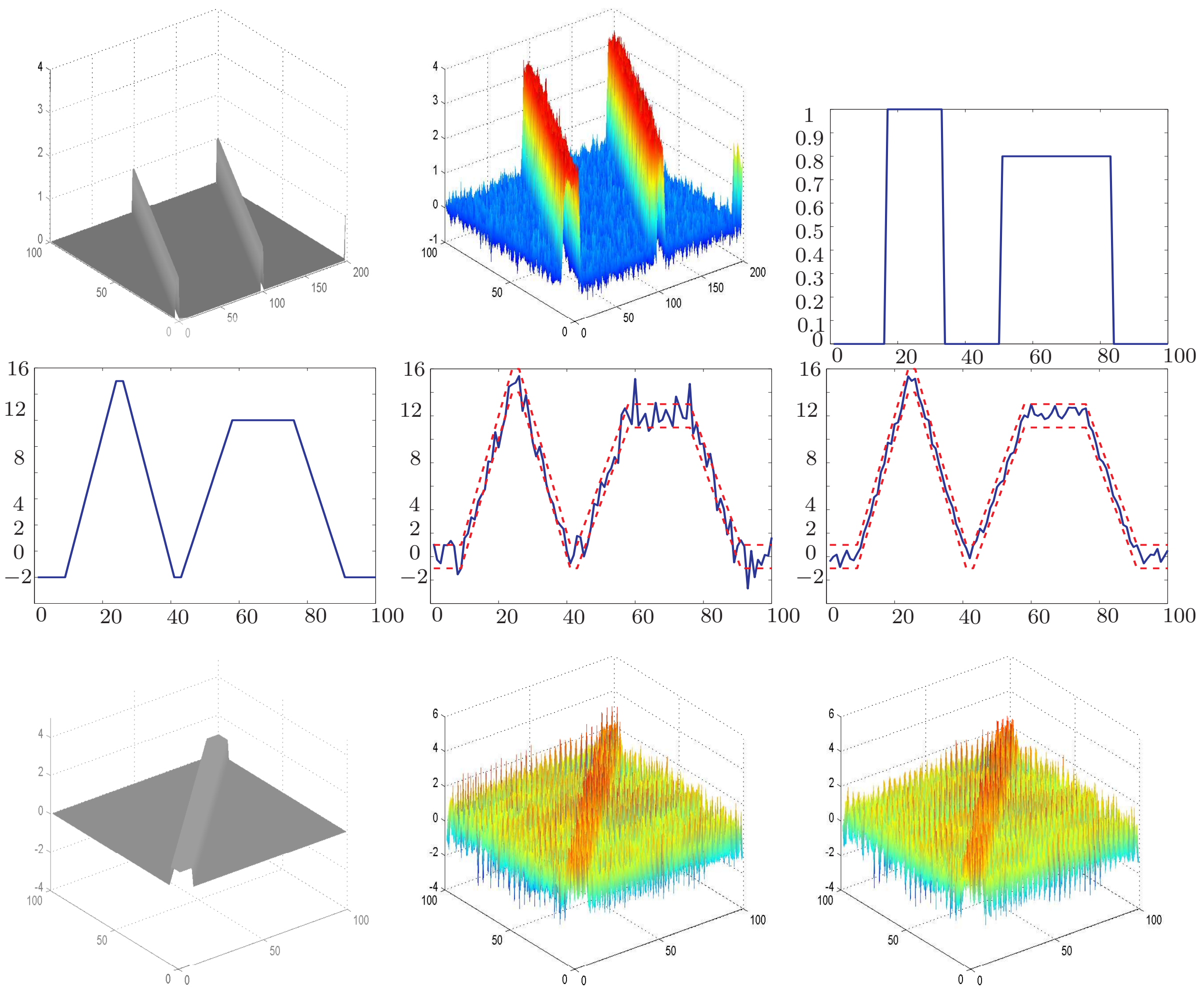


Рис. 4.6.

блюдений нечеткого вектора $\xi \in \mathcal{R}_n$, иначе говоря, требуется определить правило оценивания $d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_N$ оценивания так, чтобы нечеткий вектор $\widehat{\eta} = d(\xi)$ был наилучшей оценкой η. При оценивании будем учитывать только такие комбинации ξ и η, возможность которых не меньше некоторого $t \in [0,1]$, $(\xi, \eta) \in Q_t$, где $Q_t = \{x \in \mathcal{R}_n, y \in \mathcal{R}_N : \varphi^{\xi,\eta}(x,y) \geqslant t\}$ для каждого фиксированнного $t \in [0,1]$. Предположим, что известно совместное распределение $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_N \to [0,1]$, ($\varphi^{\xi,\eta}(x,y)$ есть возможность равенств $\xi = x, \eta = y$), причем функция $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$ полунепрерывна сверху, что эквивалентно условию замкнутости множества Q_t для каждого $t \in [0,1]$. Кроме того, будем считать, что множество Q_t

ограничено при любом $t \in (0,1]$.

Условную нечеткую ошибку оценивания определим равенством

$$\zeta(t) = \|\eta - d(\xi)\|, \quad (\xi,\eta) \in Q_t, \quad d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_N, \tag{6.1}$$

ее максимальное значение при каждом $t \in [0,1]$ и $d(\cdot) : \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_N$

$$z_{d(\cdot)}(t) = \sup\{\|y - d(x)\| | (x,y) \in Q_t\} \tag{6.2}$$

достигает своего минимального значения

$$z_{d_t^*(\cdot)}(t) = \min_{d(\cdot):\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_N} \sup\{\|y - d(x)\| | (x,y) \in Q_t\}, \tag{6.3}$$

называемого условной минимаксной ошибкой, при единственном $d_t^* = d_t^*(\cdot) \in \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_N$. $d_t^*(\cdot)$ называется условным минимаксным правилом оценивания, $t \in [0,1]$.

Рассмотрим еще один класс оценок, определенных условием

$$\min_{d(\cdot):\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_N} P_{d(\cdot)}(\zeta = \|\eta - d(\xi)\| \geqslant z) = P_{\widehat{d}_z(\cdot)}(\zeta = \|\eta - d(\xi)\| \geqslant z), \quad z \in \mathcal{R}_+. \tag{6.4}$$

При каждом $z \in \mathcal{R}_+$ оценка $\widehat{d}_z(\xi)$, полученная из (6.4), минимизирует возможность ошибки $\zeta \geqslant z$. Поскольку $P_{d(\cdot)}(\zeta = \|\eta - d(\xi)\| \geqslant z) = \max\{\varphi^{\xi,\eta}(x,y) | \|y - d(x)\| \geqslant z, x \in \mathcal{R}_n, y \in \mathcal{R}_N\}$, то речь идет о решении задачи

$$\max\{\varphi^{\xi,\eta}(x,y) | \|y - d(x)\| \geqslant z, x \in \mathcal{R}_n, y \in \mathcal{R}_N\} \sim \min_{d(\cdot):\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_N} \tag{6.5}$$

При определенных ограничениях на функцию $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_N \to [0,1]$ между решениями задач (6.3) и (6.5) существует связь, а именно, справедлива следующая лемма [11]:

Лемма 6.1. *Если* $\varphi^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) : \mathcal{R}_n \times \mathcal{R}_N \to [0,1]$ *— непрерывная функция, множество* $Q_t = \{x \in \mathcal{R}_n, y \in \mathcal{R}_N : \varphi^{\xi,\eta}(x,y) \geqslant t\}$ *компактно для любого* $t \in (0,1]$, $d_t^*(\cdot)$ *— решение* (6.3), $z_{d_t^*(\cdot)}(t)$ *— соответствующая условная минимаксная погрешность, то* $d_t^*(\cdot)$ *является и решением задачи* (6.5) *при* $z = z_{d^*(\cdot)_t}(t)$.

Вернемся к задаче восстановления функциональной зависимости. Условная нечеткая ошибка оценивания в этом случае имеет вид

$$\zeta(t) = \|\varphi(\cdot) - d_{(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})}(\cdot)\|, (\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \varphi(\cdot)) \in Q_t, \tag{6.6}$$
$$d_{(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})}(\cdot) \in ((\mathcal{R}_M)^N \times (\mathcal{R}_K)^N) \to \mathcal{F},$$
$$\widetilde{\xi} \in (\mathcal{R}_M)^N, \quad \widetilde{\eta} \in (\mathcal{R}_K)^N, \varphi(\cdot) \in \mathcal{F}.$$

Пусть $\widetilde{\xi} = \widetilde{x} \in (\mathcal{R}_M)^N, \widetilde{\eta} = \widetilde{y} \in (\mathcal{R}_K)^N$ — результаты измерений. Тогда (зависимость $d(\cdot) = d_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}(\cdot)$ от результата измерения $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ для краткости не указывается)

$$\zeta(t) = \|\varphi(\cdot) - d(\cdot)\|,\ \varphi(\cdot) \in Q_t(\widetilde{x}, \widetilde{y}),\ d(\cdot) \in \mathcal{F},\ \widetilde{x} \in (\mathcal{R}_M)^N,\ \widetilde{y} \in (\mathcal{R}_K)^N,\ \varphi(\cdot) \in \mathcal{F}, \tag{6.7}$$

где $Q_t(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \{f(\cdot) \in \mathcal{F} : \pi^{\xi,\eta,\varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, f(\cdot)) \geqslant t\},\ \widetilde{x} \in (\mathcal{R}_M)^N,\ \widetilde{y} \in (\mathcal{R}_K)^N\}$. Ее максимальное значение

$$z_{d(\cdot)}(t) = \max_{f(\cdot) \in Q_t(\widetilde{x},\widetilde{y})} \|f(\cdot) - d(\cdot)\|, \tag{6.8}$$

достигает своего минимального значения

$$z_{d^*(\cdot)}(t) = \min_{d(\cdot)\in\mathcal{F}} \max_{f(\cdot)\in Q_t(\widetilde{x},\widetilde{y})} \|f(\cdot) - d(\cdot)\| \tag{6.9}$$

при единственном $d^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot) \in \mathcal{F}$, которое и будет оптимальной оценкой $f^*_{(\widetilde{x},\widetilde{y})}(\cdot)$ искомой функциональной зависимости.

Рассмотрим применение описанного выше метода для восстановления линейной зависимости.

В данном случае условие $\pi^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\varphi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, f(\cdot)) \geqslant t$ принимает вид (см. (3.2))

$$\sup_{m\in(\mathcal{R}_1)^N} \left(\rho\left(\max_{1\leq i\leq N} \max\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - a_1(\widetilde{x}_i - m_i) - a_0|}{\tau_i}\right)\right)\right) \geqslant t. \tag{6.10}$$

Так как $\rho(\cdot)$ — непрерывная, монотонно убывающая на отрезке $[0, 1]$ функция, то (6.10) эквивалентно условию

$$\inf_{1\leq i\leq N} \max_{m_i\in(\mathcal{R}_1)^N} \max\left(\frac{|m_i|}{\sigma_i}, \frac{|\widetilde{y}_i - a_1(\widetilde{x}_i - m_i) - a_0|}{\tau_i}\right) \leqslant \delta(t). \tag{6.11}$$

Задача (6.3) принимает вид

$$\max_{(a_1,a_0)\in Q_t(\widetilde{x},\widetilde{y})} \|(a_1, a_0) - (d_1, d_0)\| \sim \min_{(d_1,d_0)\in(\mathcal{R}_1)^2}, \tag{6.12}$$

где множество $Q_t(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ является решением неравенства (6.11). Если в (6.12) обозначить S — число пар (a_1, a_0), содержащихся в множестве $Q_t(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, то (6.12) можно переписать

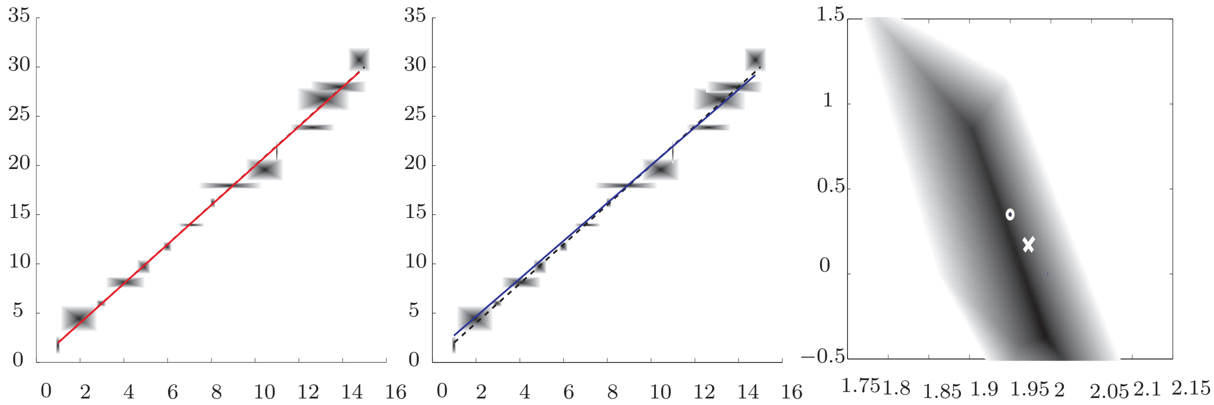


Рис. 4.7.

как стандартную задачу линейного программирования:

$$q = \max_{1 \leqslant i \leqslant S} \max(\|a_{1i} - d_1\|, \|a_{0i} - d_0\|) \sim \min_{d_1 \in \mathcal{R}_1, d_0 \in \mathcal{R}_1},$$
$$(a_{1i}, a_{0i}) \in Q_t(\widetilde{x}, \widetilde{y}), i = 1, \ldots, S.$$

Ее решение $d^* = (d_1^*, d_0^*)$ определяет оптимальную оценку искомой линейной зависимости: $f^*_{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot) = d_1^* \cdot + d_0^*$, см. рис. 4.7. На рис. 4.7 приведен результат численного моделирования восстановления линейной зависимости $f(x) = 2x$, $x = \{1, 2, \ldots, 14, 15\}$ методом минимизации необходимости ошибки восстановления (первый рисунок) в сравнении с результатом восстановления методом минимизации ошибки восстановления (второй рисунок). На третьем рисунке изображена область $Q_t(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, на которой овалом обозначено решение, полученное с помощью второго метода, крестом — решение, полученное первым методом.

§ 7. Неопределенная нечеткая модель восстановления функциональной зависимости

Рассмотрим теперь неопределенную нечеткую (НН) модель схемы измерения (1.1), которая отражает как знания и представления исследователя об изучаемом объекте или явлении, так и его мнение об адекватности построенной модели, обусловленное принципиальной неполнотой знаний.

Запишем схему (1.1) в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}_i &= \widetilde{\xi}'_i + \widetilde{\mu}_i, \\ \widetilde{\eta}_i &= \widetilde{\eta}'_i + \widetilde{\nu}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \\ \widetilde{\eta}'_i &= f(\widetilde{\xi}'_i), \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\widetilde{\xi}_i \in \mathcal{R}_K,\ \widetilde{\eta}_i \in \mathcal{R}_M$ — НН векторы, значения которых $x_i \in \mathcal{R}_K,\ y_i \in \mathcal{R}_M$, наблюдаются в эксперименте, $\widetilde{\xi}'_i \in \mathcal{R}_K,\ \widetilde{\eta}'_i \in \mathcal{R}_M$ — НН векторы, значения которых $x'_i \in \mathcal{R}_K,\ y'_i = f(x'_i) \in \mathcal{R}_M$ есть значение аргумента и соответственно функции $f(\cdot) : \mathcal{R}_K \to \mathcal{R}_M$, не наблюдаемые в эксперименте; $\widetilde{\mu}_i \in \mathcal{R}_K,\ \widetilde{\nu}_i \in \mathcal{R}_N,\ i = 1, \ldots, N,$ — НН векторы ошибок измерения.

Введем обозначения

$$(\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_N) \triangleq \widetilde{\xi} \in (\mathcal{R}_K)^N,\ (\widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_N) \triangleq \widetilde{\eta} \in (\mathcal{R}_M)^N;$$

$$(\widetilde{\mu}_1, \ldots, \widetilde{\mu}_N) \triangleq \widetilde{\mu} \in (\mathcal{R}_K)^N,\ (\widetilde{\nu}_1, \ldots, \widetilde{\nu}_N) \triangleq \widetilde{\nu} \in (\mathcal{R}_M)^N;$$

$$(x_1, \ldots, x_N) \triangleq x \in (\mathcal{R}_K)^N,\ (y_1, \ldots, y_N) \triangleq y \in (\mathcal{R}_M)^N;$$

$$(\widetilde{\xi}'_1, \ldots, \widetilde{\xi}'_N) \triangleq \widetilde{\xi}' \in (\mathcal{R}_K)^N.$$

Задача восстановления функциональной зависимости является частным случаем задачи оптимального оценивания, в которой требуется оценить НН элемент $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{F}$, значения которого ненаблюдаемы, используя значение наблюдаемого НН элемента $\widetilde{\xi} \in X$, то есть требуется определить правило оценивания $y(\cdot) : X \to \mathcal{F}$, которое каждому наблюдению $\widetilde{\xi} \in X$ ставит в соответствие оценку $\widehat{\widetilde{\varphi}} = y(\widetilde{\xi}) \in \mathcal{F}$ НН элемента $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{F}$ (см. гл. 1). В задаче восстановления функциональной зависимости требуется определить правило $d(\cdot, \cdot) : (\mathcal{R}_K)^N \times (\mathcal{R}_M)^N \to \mathcal{F}$, которое каждому наблюдению $(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in (\mathcal{R}_K)^N \times (\mathcal{R}_M)^N$ ставит в соответствие оценку $\widehat{\widetilde{\varphi}} = d(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in \mathcal{F}$ искомой функциональной зависимости.

Правило $d(\cdot, \cdot) : (\mathcal{R}_K)^N \times (\mathcal{R}_M)^N \to \mathcal{F}$, минимизирующее правдоподобие больших необходимостей и максимизирующее правоподобие малых необходимостей ошибки восстановления функциональной зависимости, является решением задачи

$$\begin{aligned} &\inf_{\substack{x\in(\mathcal{R}_K)^N,\\ y\in(\mathcal{R}_M)^N,\\ f\in\mathcal{F}}} \max(\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}_{x,\,y,\,f*}(\theta(n)),\ \tau^{\mathcal{F}\setminus\widetilde{A}_{(d(x,y))}}_{f*}(\theta(n))) \sim \min_{d(\cdot,\cdot)\colon (\mathcal{R}_K)^N\times(\mathcal{R}_M)^N\to\mathcal{F}},\\ &\sup_{\substack{x\in(\mathcal{R}_K)^N,\\ y\in(\mathcal{R}_M)^N,\\ f\in\mathcal{F}}} \min(\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}*}_{x,\,y,\,f}(\theta(n)),\ \tau^{\mathcal{F}\setminus\widetilde{A}_{(d(x,y))*}}_{f}(\theta(n))) \sim \max_{d(\cdot,\cdot)\colon (\mathcal{R}_K)^N\times(\mathcal{R}_M)^N\to\mathcal{F}}, \end{aligned} \quad n\in[0,\,1]. \tag{7.2}$$

Вместо задачи (7.2) можно при фиксированном результате измерений $\widetilde{\xi}=x,\ \widetilde{\eta}=y$ решить более простую задачу

$$\begin{aligned} &\inf_{f\in\mathcal{F}} \max(\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}_{x,\,y,\,f*}(\theta(n)),\ \tau^{\mathcal{F}\setminus\widetilde{A}_d}_{f*}(\theta(n))) \sim \min_{d\in\mathcal{F}},\\ &\sup_{f\in\mathcal{F}} \min(\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}*}_{x,\,y,\,f}(\theta(n)),\ \tau^{\mathcal{F}\setminus\widetilde{A}_d*}_{f}(\theta(n))) \sim \max_{d\in\mathcal{F}}, \end{aligned} \quad n\in[0,\,1], \tag{7.3}$$

в которой требуется найти не функцию $d(\cdot,\cdot)$, а ее значение $d=d(x,y)\in\mathcal{F}$ при каждой паре значений $x\in(\mathcal{R}_K)^N,\ y\in(\mathcal{R}_M)^N$, не противоречащей модели схемы измерения.

Предположим, что НН элементы φ и $\widetilde{\xi}'$ взаимно независимы в широком смысле и о них априори ничего не известно, тогда

$$\tau^{\widetilde{\xi}'}_{x'}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p=1,\ x'\in(\mathcal{R}_K)^N,\\ 0, & \text{если } 0\leqslant p<1,\ x'\in(\mathcal{R}_K)^N, \end{cases} \tag{7.4}$$

при этом в (7.3)

$$\begin{aligned} \tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}'}_{x,y,f,x'}(p) &= (\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}'}_{x,y|f,x'} \wedge \tau^{\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}'}_{f,x'})(p) = \tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\widetilde{\varphi},\widetilde{\xi}'}_{x,y|f,x'}(p) = \\ &= \tau^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}}_{x-x',y-f(x')}(p),\ x,x'\in(\mathcal{R}_K)^N,\ y\in(\mathcal{R}_M)^N,\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1], \end{aligned} \tag{7.5}$$

и

$$\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\varphi}}_{x,y,f}(p) = \left(\bigvee_{x'\in(\mathcal{R}_K)^N} \tau^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}}_{x-x',y-f(x')}\right)(p),\ x\in(\mathcal{R}_K)^N,\ y\in(\mathcal{R}_M)^N,\ f\in\mathcal{F},\ p\in[0,\,1], \tag{7.6}$$

$$\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}_{x,y}(p) = \left(\bigvee_{\substack{x'\in(\mathcal{R}_K)^N,\\ f\in\mathcal{F}}} \tau^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}}_{x-x',y-f(x')}\right)(p),\ x\in(\mathcal{R}_K)^N,\ y\in(\mathcal{R}_M)^N,\ p\in[0,\,1], \tag{7.7}$$

$$\tau^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}*}_{x,y}(p) = \sup_{\substack{x'\in(\mathcal{R}_K)^N,\\ f\in\mathcal{F}}} \tau^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}*}_{x-x',y-f(x')}(p),\ x\in(\mathcal{R}_K)^N,\ y\in(\mathcal{R}_M)^N,\ p\in[0,\,1], \tag{7.8}$$

$$\tau_{x,y*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(p) = \inf_{\substack{x' \in (\mathcal{R}_K)^N, \\ f \in \mathcal{F}}} \tau_{x-x',y-f(x')*}^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}}(p), \; x \in (\mathcal{R}_K)^N, \; y \in (\mathcal{R}_M)^N, \; p \in [0,\, 1]. \tag{7.9}$$

Также будем считать $\widetilde{A}_{(d)}, \; d \in \mathcal{F}$, семейством определенных четких множеств.

При сделанных предположениях задача (7.3) сводится к задаче

$$\left.\begin{aligned} \tau_{x-x',y-f(x')*}^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}}(\theta(n)) &\sim \min_{\substack{f \in \mathcal{F}, \\ x' \in (\mathcal{R}_K)^N}}, \\ \tau_{x-x',y-f(x')}^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}*}(\theta(n)) &\sim \max_{\substack{f \in \mathcal{F}, \\ x' \in (\mathcal{R}_K)^N}}, \end{aligned}\right. \quad n \in [0,\, 1]. \tag{7.10}$$

Зададим распределения возможностей НН элементов $\widetilde{\mu}_i, \; \widetilde{\nu}_i, \; i = 1, \ldots, N$ по схеме, аналогичной схеме получения выражений (2.17) и (6.2) гл. 3. Распределение возможностей значений НН элементов $\widetilde{\mu}_i, \; \widetilde{\nu}_i$ зададим выражениями

$$h_i(x, u_i) = \begin{cases} 1 - \frac{\|x\|}{\sigma_i}, & 0 \leqslant \frac{\|x\|}{\sigma_i} < u_i, \\ 0, \frac{\|x_i\|}{\sigma_i} \geqslant u_i \end{cases} \quad x \in \mathcal{R}_K, \; \sigma_i > 0,$$

$$s_i(x, u_i) = \begin{cases} 1 - \frac{\|x\|}{\tau_i}, & 0 \leqslant \frac{\|x\|}{\tau_i} < v_i, \\ 0, \frac{\|x\|}{\tau_i} \geqslant v_i \end{cases} \quad x \in \mathcal{R}_M, \; \tau_i > 0,$$

соответственно, величины $u_i, \; v_i$ будем считать значениями неопределенных элементов $\widetilde{u}_i, \; \widetilde{v}_i$ с распределениями $g_i^{\widetilde{u}}(\cdot) : \mathcal{R}_+ \to [0,\, 1], \; q_i^{\widetilde{v}}(\cdot) : \mathcal{R}_+ \to [0,\, 1]$, имеющими вид, представленный на рис. 3.1, 3.5 главы 3, с параметрами $\underline{u}_{1i}, \; \bar{u}_{1i}, \; \bar{u}_{2i}, \; \underline{u}_{2i}, \; \underline{v}_{1i}, \; \bar{v}_{1i}, \; \bar{v}_{2i}, \; \underline{v}_{2i}$ соответственно. Поскольку

$$\left.\begin{aligned} \tau_{m,n}^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}*}(p) &= \min_{1 \leqslant i \leqslant N} \min\left(\tau_{m_i}^{\widetilde{\mu}_i*}(p), \; \tau_{n_i}^{\widetilde{\nu}_i*}(p)\right), \\ \tau_{m,n*}^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}}(p) &= \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \max\left(\tau_{m_i*}^{\widetilde{\mu}_i}(p), \; \tau_{n_i*}^{\widetilde{\nu}_i}(p)\right), \end{aligned}\right. \; m_i \in \mathcal{R}_K, \; n_i \in \mathcal{R}_M, \; i = 1, \ldots, N, \; p \in [0,\, 1], \tag{7.11}$$

задача (7.10) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \max\left(\tau_{m_i*}^{\widetilde{\mu}_i}(\theta(n)), \; \tau_{y_i - f(x_i - m_i)*}^{\widetilde{\nu}_i}(\theta(n))\right) &\sim \min_{f \in \mathcal{F}, m_1, \ldots, m_N \in \mathcal{R}_K}, \\ \min_{1 \leqslant i \leqslant N} \min\left(\tau_{m_i}^{\widetilde{\mu}_i*}(\theta(n)), \; \tau_{y_i - f(x_i - m_i)}^{\widetilde{\nu}_i*}(\theta(n))\right) &\sim \max_{f \in \mathcal{F}, m_1, \ldots, m_N \in \mathcal{R}_K}, \end{aligned}\right. \; \theta(n) \in [0,\, 1]. \tag{7.12}$$

Решение задачи (7.12) для случая линейной зависимости и $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_N = \mathcal{R}_1$ совпадает с решением задачи (3.3) § 3. Что касается адекватности модели измерения (7.1), то с учетом

(7.8)–(7.10), (7.12) и принадлежности распределений $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\mu}_i}(\cdot)$, $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\nu}_i}(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$ классу $\mathring{\mathfrak{T}}$ (см. § 3 главы 3) получим следующее выражение:

$$\tau_{x,y}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(p) = \min(\tau_{x,y}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}*}(p), \tau_{x,y*}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(p)) = \tau_{\widehat{m},y-\widehat{a}_1(x-\widehat{m})-\widehat{a}_0}^{\widetilde{\mu},\widetilde{\nu}}(p),\ p \in [0,\,1],$$

где $\widehat{m} \in (\mathcal{R}_1)^N$, $\widehat{a}_1 \in \mathcal{R}_1$, $\widehat{a}_0 \in \mathcal{R}_1$ — решение задачи (7.12). На основе рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 7.1 главы 3, получаем выражения для множеств X, $\widehat{X}$, $\widehat{\widetilde{X}}$, $\check{X}$:

$$X = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in (\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1)^N,\ 0 \leqslant \frac{|\bar{x}_i - \widehat{m}_i|}{\sigma_i} \leqslant \bar{u}_i,\ 0 \leqslant \frac{|\bar{y}_i - \widehat{a}_1(\bar{x}_i - \widehat{m}_i) - \widehat{a}_0|}{\tau_i} \leqslant \bar{v}_i,\ i = 1, \ldots, N\},$$

$$\widehat{X} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in (\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1)^N,\ 0 \leqslant \frac{|\bar{x}_i - \widehat{m}_i|}{\sigma_i} < \bar{u}_i,\ 0 \leqslant \frac{|\bar{y}_i - \widehat{a}_1(\bar{x}_i - \widehat{m}_i) - \widehat{a}_0|}{\tau_i} < \bar{v}_i,\ i = 1, \ldots, N\},$$

$$\check{X} = X \setminus \widehat{X},$$

$$\widetilde{\check{X}} = \varnothing,$$

$$\widehat{\widetilde{X}} = \widehat{X} \setminus \{(\bar{x}, \bar{y}) \in (\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1)^N,$$
$$0 \leqslant \frac{|\bar{x}_i - \widehat{m}_i|}{\sigma_i} \leqslant \underline{u}_{1i},\ 0 \leqslant \frac{|\bar{y}_i - \widehat{a}_1(\bar{x}_i - \widehat{m}_i) - \widehat{a}_0|}{\tau_i} \leqslant \underline{v}_{1i},\ i = 1, \ldots, N\}.$$

Если результат измерения $(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in (\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_1)^N$, полученный по схеме (7.1), не принадлежит множеству X, то модель схемы (7.1) не допускает проверку на адекватность; если $(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in \widehat{X}$, то модель непротиворечива, но если при этом $(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in \widehat{\widetilde{X}}$, то это наблюдение не противоречит модели, но дает повод сомневаться в ее адекватности; наконец, если $(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in \check{X}$, то модель противоречива, причем сомнений в этом быть не может, поскольку $\widetilde{\check{X}} = \varnothing$.

Полученный результат позволяет устранить существенный недостаток обычного моделирования, представленный на рисунках 4.1, 4.3–4.5, иллюстрирующем «бинарный» ответ на вопрос об адекватности модели. Метод восстановления функциональной зависимости для НН модели, позволяет исследователю увидеть все градации адекватности: модель вполне адекватна, сомнительно адекватна, сомнительно неадекватна.

Заключение

Основные результаты работы.

1. Исследован вариант теории возможностей, в котором возможность принимает значения в шкале $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,\,1], \leqslant, \max, \cdot)$:

• разработан принцип относительности, построена стохастическая модель возможности, для случая априори известного упорядочения вероятностей элементарных исходов стохастического эксперимента разработан и исследован метод эмпирического построения его теоретико-возможностной модели;

• разработаны теоретико-возможностные методы анализа и интерпретации данных;

• для обоих вариантов возможности разработан и реализован на базе платформы Matlab программный комплекс для решения задач редукции измерений, восстановления функциональной зависимости и прогнозирования.

2. Разработаны и исследованы новые правила принятия решений для НН моделей, в которых в критерии оптимальности решения, основанном на значении меры правдоподобия возможности (и, или необходимости) ошибки решения, либо правдоподобие является основной характеристикой, а возможность (необходимость) — второстепенной, либо возможность (необходимость) и правдоподобие являются равноценными характеристиками качества;

• разработан и реализован программный комплекс на базе платформы Matlab для решения задач редукции измерений, восстановления функциональной зависимости для НН моделей, позволяющий исследователю вести интеллектуальный диалог с компьютером: изменять параметры модели и наблюдать, как эти изменения влияют на выводы, на адекватность НН модели и основанных на ней выводов, и на его базе проведен вычислительный эксперимент для сравнения теоретико-возможностных и НН методов моделирования анализа и интерпретации данных;

• построена неопределенная стохастическая модели идентификации и правило идентификации, в котором критерий качества основан на значении правдоподобия вероятности ошибки идентификации, вероятность ошибки — более важная характеристика качества идентификации, чем правдоподобие.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Жучко О.В., Пытьев Ю.П. Теоретико-возможностный метод восстановления функциональных зависимостей по экспериментальным данным. // Искусственный интеллект, No.3, 2000, с. 142–148.

2. Pyt'ev Yu. P., Zhuchko O.V. The Methods of the Possibility Theory in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: VII. Reconstruction of Functional Dependences from Experimental Data // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 12, No. 2, 2002, pp.116–129

3. Жучко О.В., Пытьев Ю.П. Восстановление функциональной зависимости теоретико-возможностными методами // Журнал вычислительной математики и математической физики, Т. 43, N 5, 2003, с. 767–783.

4. Жучко О.В., Пытьев Ю.П. Теоретико-возможностный метод восстановления функциональных зависимостей по экспериментальным данным// Труды 5-й Международной конференции "Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии"РОАИ-5-2000, Самара, 2000 г., № 3, с. 110-114.

5. Жучко О.В., Пытьев Ю.П. Теоретико-возможностные методы восстановления функциональных зависимостей по данным измерений с ошибками // Доклады 10-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов», 2001 г., с. 57.

6. Фаломкина О.В. О стохастической модели меры возможности // Доклады 11-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов», Москва 2003, с.

196–198.

7. Фаломкина О.В., Пытьев Ю.П., О критериях оптимальности для неопределенных нечетких моделей. // Доклады 12-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов», Москва 2005, с.222–226.

8. Пытьев Ю.П., Фаломкина О.В., Матвеева Т.В. Неопределенная стохастическая модель. // Доклады 12-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов», Москва 2005, с.219–222.

9. Фаломкина О.В., Пытьев Ю.П., Неопределенные нечеткие, неопределенные стохастические модели и их применения. Сборник трудов международной научно-практической конференции "Современные информационные технологии и ИТ-образование", Москва, 2005, с. 493–500.

10. Жучко О.В. Теоретико-возможностные методы восстановления функциональных зависимостей. // Сборник тезисов 7-й Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-2000», 2000 г., с. 282–285.

11. Фаломкина О.В. Задача оптимального оценивания в теоретико-возможностной модели наблюдения. // Сборник тезисов Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов-2003», 2003г.

Список литературы

1. Пытьев Ю.П. Стохастические и нечеткие модели. Эмпирическое построение и интерпретация. Сборник трудов 1-й международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование», 2005, с. 482–492.

2. Savage L. J. The Foundation of Statistic N.-Y., 1972.

3. Dempster A. P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann. Math. Statist.* **38** (1967) 325–339.

4. Shafer G. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, Princeton N.J., 1976.

5. L. A. Zadeh, Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 3-28.

6. L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Inf. Control* **8** (1965) 338-353.

7. G. de Cooman. Possibility theory I: the measure- and integral- theoretic groundwork. International Journal of General Systems, 25 (1997), pp. 291–323.

8. G. de Cooman. "Possibility Theory II: Conditional Possibility". International Journal of General Systems, 25 (1997), pp. 325–351.

9. G. de Cooman. "Possibility Theory III: Possibilistic Independence". International Journal of General Systems. 25 (1997), pp. 353–371.

10. D. Dubois, H. Prade. Theorie des Possibilities. *Masson*, Paris-Milano-Barselona-Mexico, 1988.

11. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. — Изд-во Эдиториал УРСС. Москва 2000.

12. Пытьев Ю.П. Неопределенные нечеткие модели и их применения. *Интеллектуальные системы* **8** (2004), вып. 1-4, 147–310.

13. Пытьев Ю.П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения. — М.: Физматлит, 2006 (в печати).

14. С. М. Авдошин, В.В. Белов, В.П. Маслов. Математические аспекты синтеза вычислительных сред, М.: МИЭМ, 1984.

15. Г.Л. Литвинов, В.П. Маслов, Г.В. Шпиц. Идемпотентный функциональный анализ: алгебраический подход // Математические заметки, 2001, т. 69, №5, с. 758–797.

16. R. Mesiar, E. Pap. Different Interpretations of triangular norms and related operations. Fuzzy Sets and Systems, 96 (1998) pp. 183–189.

17. N. Friedman, J. Y. Halpern. Plausibility Measures and Default Reasoning. In Proc. National Conference on Artificial Intelligence (AAAI '96).

18. Sugeno. M. Fuzzy Measure and Fuzzy Integral. *Trans. SICE* 1972, 8, №2, pp. 95–102.

19. P. Walley. Measures of uncertainty in expert systems. *Artificial Intelligence*, 83:1-56, 1996.

20. J. Gebhardt and R. Kruse, The context model: An integrating view of vagueness and uncertainty, *International Journal of Approximate Reasoning* **9** (1993) 283–314.

21. Ван-дер-Варден Б.Л. Современная алгебра. М.: Госуд. техн.-теор. изд-во, 1934.

22. Пытьев Ю.П. О стохастических моделях возможности. // Интеллектуальные системы, т.6, вып. 1 – 4, с. 25 – 63, 2002 г.

23. Z. Wang and J. Klir. *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York, 1992.

24. (1998), Handbok of Fuzzy Sets and Possibility Theory, Operations Research and Statistics, Kluwer Academic Publishers.

25. Possibility Theory with Applications to Data Analysis,. Research Studies Press, 1998.

26. M. Goldzsmidt and J. Pearl. Qualitative probabilities for default reasoning, belief revisions and casual modeling. *Artificial Intelligence*, 84:57-112, 1996.

27. W. Spohn. Ordinal conditional functions a dynamic theory of epistemic states. In W. Harper and B. Skyrms, editors, Causation in Decision, Belief Change, and Statistics, vol. 2, pp. 105-134. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1988.

28. P. Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities* (Chapman and Hall, London, 1991).

29. D.V. Lindley, *Making Decisions* (Wiley, London, 1971).

30. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.:Наука, 1981.

31. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. Под ред. Д.А.Поспелова. М.: Наука, 1986.

32. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.:Мир. 1976.

33. Goodman I.R. Fuzzy sets and equivalent classes of random set s. In R.R.Yager (ed.) Fuzzy sets and possibilities theory. Pergamon Press, Oxford, 1982, p.327-343.

34. Прикладные нечеткие системы. Сб. под ред. Т.Тэрано, К.Асан, М.Сугено. М.:Мир, 1993.

35. L. Farinas del Cerro, A. Herzig: A modal analysis of possibility theory, in: Symbolic and Qualitative Approaches to Uncertainty, Lecture Notes in Comput. Sci. 548 (R. Kruse and P. Siegel, Eds.), Springer–Verlag, 58–62, 1991.

36. Joslyn, Cliff: (1995) "Towards an Independent Possibility Theory with an Objective Semantics", in: Proc. 1995 Int. Workshop on Foundations and Applications of Possibility Theory.

37. D. Dubois and H. Prade, "A synthetic view of belief revision with uncertain inputs in the framework of possibility theory,"Int. J. of Approximate Reasoning, vol. 17, no. 2/3, pp. 295–324, 1997.

38. Nikolaidis, E., Haftka, R., and Rosca, R., 1997, "Comparison of Probabilistic and Possibility Theory-Based Methods for Design against Uncertainty", Aerospace and Ocean Engineering Department, Virginia Tech, Blacksburg, VA 24061-0203.

39. D. Cayrac, D. Dubois and H. Prade, "Handling Uncertainty with Possibility Theory and Fuzzy Sets in a Satellite Fault Diagnosis Application", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 4, N. 3 (1996) pp. 251-269.

40. D.Dubois, H.Fargier, H.Prade Possibility Theory in Constraint Satisfaction Problems: Handling Priority,Preference and Uncertainty Applied Intelligence 6, pp. 287-309, 1996

41. D. Dubois and H. Prade (with the collaboration of H. Farreny, R. Martin-Clouaire and C. Testamale) . Possibility Theory: An Approach to Computerised Processing of Uncertainty. Plenum Press, New York. 1998.

42. Dubois D., Prade H. 1997. Constraint satisfaction and decision under uncertainty based on qualitative possibility theory. Proc. of the 6th Int. Conf. on Fuzzy Sytems (FUZZ-IEEE'97), 23-30.

43. К. Танака. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве. // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Ред. Р.Ягер. Радио и связь. М.: 1986.

44. T. Bilgic and I. B. Turksen. Measurement of membership functions: theoretical and empirical work. In H. Prade D. Dubois and H.J. Zimmermann, editors, International Handbook of Fuzzy Sets and Possibility Theory. Kluwer Academic, Norwell, MA, 1998.

45. А. М. Норвич, И. Б. Турксен. Построение функции принадлежности. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Ред. Р.Ягер. Радио и связь. М.: 1986, с. 64- 71.

46. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: «Наука», 1984 г., 582 с.

47. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

48. Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. Изд. 2-е, перераб. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с

49. Жучко О.В., Пытьев Ю.П. Восстановление функциональной зависимости теоретико-возможностными методами. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 5. – с. 767 – 783.

50. Yu. P. Pyt'ev and O. V. Zhuchko. Methods of the Theory of Possibilities in the Problems of Optimal Estimation and Decision Makong VII. Reconstruction of Functional Dependences from Experimental Data // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2002. – Vol. 12, № 2. – pp. 116 – 129.

51. Пытьев Ю.П., Жучко О.В. Теоретико-возможностный метод восстановления функциональных зависимостей по экспериментальным данным. // Искуственный интеллект.– 2000. – № 3. – с. 142 – 148.

52. Пытьев Ю.П. Методы анализа и интерпретации эксперимента. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 288 с

53. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей, ред. Вапник В.Н. — М.: Наука, 1984 г

54. Худсон Д. Статистика для физиков. — М.: Мир.,1970. — 294 с

55. Румшиский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. — М.: Наука, 1971 г.

56. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука 1983.— 200 с

57. Пытьев Ю.П. К теории нелинейных измерительно-вычислительных систем. // Математическое моделирование, 1992, т.4, №2, — с. 76–94

58. Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. — Изд. Моск. Ун-та. 1983 г. — 252 с

59. Боровков А.Л. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. — М.: Наука. 1984

60. Теребиж В.Ю. Восстановление изображений при минимальной априорной информации. // Успехи физических наук, 1995, т.4, №2, — с. 143–175

61. Уфимцев М.В. Методы многомерного статистического анализа. — Изд-во ВМиК МГУ, 1997

62. Кнуренко А.Б., Пытьев Ю.П. Метод наименьших квадратов в случае неточно заданных значений функции и ее аргумента. // Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, Физика, Астрономия, 1992, т.33, №6 — с. 7–11

63. Математическая теория планирования эксперимента./ Под ред. С.М Ермакова. — М.: Наука, 1983. — 392 с

64. Pukelsheim F. On linear regression designs wich maximize information. — J. Statist. Planning and Inference, 1980,4,p.339–364

65. Rao C.R. Estimation of parameters an a linear model. — Ann. Statist., 1976,4,p. 1023–1037

66. Cote R., Manson A.R., Hader K.J. Minimum bias approximation of a general regression model. — J. Amer. Statist. Ass., 1973, 68, №343, p. 633–638

67. Yu. P. Pyt'ev. Statistical and Fuzzy Optimal Decisions. I. Statistical Decisions. // Pattern Recognition and Image Analysis (to be published).

Благодарности

Автор диссертационной работы выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. профессору Ю.П. Пытьеву за интересную тему исследования, за внимательное отношение к работе и полезные консультации, а также официальным оппонентам: д.ф.-м.н. профессору Л.Г. Деденко и д.ф.-м.н. профессору М.И. Киселеву за их труд по изучению диссертации, а также за ценные замечания и пожелания. Автор также благодарит всех сотрудников кафедры компьютерных методов физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за дружескую поддержку, и наконец, мужа Фаломкина И. И. за поддержку.