ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вероятностные методы традиционно применяются в научных исследованиях для моделирования многих аспектов неясности и неопределенности, отражающих неполноту знаний, их недостоверность, а также — случайности, нечеткости и неточности, характерных для их содержания. Случайность, нечеткость и неточность естественно ассоциируются с вероятностной моделью, неясность и неопределенность обусловлены частичным незнанием последней [1]; возникающие в связи с этим проблемы формулируются в терминах теории статистических решений о неопределенных аспектах модели и о характеристиках объекта исследования [7, 11, 18, 22, 50, 65, 69].

Теория вероятностей как математическая модель феномена случайности используется в теоретических и прикладных исследованиях благодаря двум ее *фундаментальным аспектам*:

► математическому, основанному на теории меры и интеграла, и

► эмпирическому, основанному на простых, математически обоснованных процедурах, позволяющих *при определенных условиях*, с одной стороны, на основе данных событийно-частотных наблюдений получить сколь угодно точную аппроксимацию их вероятностной модели, а с другой — при известной вероятностной модели наблюдений предсказать их событийно-частотные результаты.

Вместе с тем вероятностные методы де-факто оказались неэффективными при моделировании сложных физических, технических, социальных и экономических объектов, субъективных суждений и др. Этим объясняется повышенный интерес к невероятностным моделям случайности, нечеткости и неопределенности, характерный для второй половины прошлого столетия. Субъективная вероятность Севеджа [136], как мера неуверенности субъекта, суждения которого удовлетворяют определенным условиям «рациональности»; верхние и нижние вероятности Демпстера [83, 84], характеризующие неполноту наблюдений и неопределенность в теории вероятностей, моделируемую многозначными отображениями; тесно связанные с емкостью Шоке [77] правдоподобие и доверие Шеффера [138] в теории принятия решений, обобщающие конструкции Демпстера, возможность Заде [159], основанная на его теории нечетких множеств [158] и вызвавшая возрастающий поток публикаций в конце прошлого столетия: [30, 31, 33, 53, 55–60, 78–80, 92, 121, 123–126, 131, 140, 143–145, 152, 155], не убывающий

[1] Неопределенность возникает и при точно известной вероятностной модели наблюдений, если речь идет о предсказании их результатов.

и в настоящее время: [16, 35, 41–43, 46, 48, 51, 52, 54, 62–64, 70, 75, 85–88, 90, 115–117, 119, 127–130, 132–135, 141, 146, 149, 153, 154]. Это, разумеется, далеко не полный перечень фундаментальных математических работ, ориентированных на моделирование случайности, нечеткости и неопределенности невероятностными методами.

Причины неэффективности вероятностных методов обусловлены многими факторами. Прежде всего «эмпирический аспект» теории вероятностей далеко не так фундаментален, как математический, поскольку не содержит критерия вероятностной природы наблюдаемого феномена случайности, и, как следствие, — критерия упомянутых «определенных условий» наблюдения. Поэтому возможно, что случайность и нечеткость, свойственная формулировкам моделей названных объектов, *не может быть охарактеризована в терминах вероятностной случайности*, но теория вероятностей не позволяет ни подтвердить это, ни опровергнуть. С другой стороны, при эмпирическом восстановлении и верификации вероятностной модели сложного, но *заведомо стохастического объекта* [1], как правило, возникают принципиальные трудности. Дело в том, что в этом случае требуются большие объемы данных наблюдений, которые в конечном счете обычно оказываются неполными и противоречивыми, когда за время получения данных объект заметно эволюционирует, его вероятностные характеристики, как правило, непредсказуемо изменяются и их эмпирические оценки оказываются неадекватными. В подобных случаях эмпирическое восстановление стохастической модели объекта невозможно, если данные наблюдений не позволяют оценить эволюцию его стохастических свойств.

Наконец, даже если стохастическая природа объекта и его «статистическая стационарность» не вызывают сомнений, эмпирическое восстановление с приемлемой точностью его вероятностной модели может оказаться либо нереализуемым из-за необходимого объема данных наблюдений, либо модель может оказаться настолько сложной, что на практике используется ее не всегда адекватное приближение [2].

[1] Т. е. такого объекта, математической моделью которого в каждый момент является некоторое вероятностное пространство.

[2] Разумеется, нетрудно привести примеры стохастических объектов, модели которых могут быть априори охарактеризованы математически, а эмпирически лишь уточнены и верифицированы. К этой категории относятся и некоторые сложные стохастические объекты, эволюция моделей которых априори описывается, например, линейными разностными, дифференциальными или интегральными стохастическими уравнениями. Математические модели таких объектов могут быть эмпирически восстановлены на основе временны́х рядов данных наблюдений, и эти же данные позволяют проверять их адекватность, см., например, [12, 20, 39].

Рассмотренные в настоящей монографии варианты [1] теории возможностей лучше, чем теория вероятностей, приспособлены для моделирования упомянутых выше, в том числе стохастических, объектов. Хотя возможность априори не связана с вероятностью, ее математический аспект и схема построения подобны математическому аспекту и схеме построения вероятности, а поскольку в монографии теория возможностей рассматривается как альтернативная теории вероятностей модель случайности, то некоторые аспекты ее содержательной интерпретации, эмпирического построения и приложений охарактеризованы в сравнении с интерпретацией, эмпирическим построением и типичными приложениями теории вероятностей.

В предисловии ограничимся обсуждением мотивации и идеи построения возможности как альтернативной математической модели феномена вероятностной случайности и анализом принципиальных вопросов содержательной интерпретации и эмпирического восстановления возможности, т. е. речь пойдет о математическом и эмпирическом аспектах теории возможностей.

1. Вероятность, возможность и необходимость. Стохастические модели возможности и необходимости

Рассматриваемые в монографии варианты теории возможностей наследуют основные понятия, конструкции и терминологию теории вероятностей. В частности, понятиям вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$, пространства Ω элементарных событий, σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, называемых событиями, и вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ в теории возможностей соответствуют пространство с возможностью [2] $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, пространство Ω элементарных событий, σ-алгебра $\mathcal{A}$, как правило, совпадающая с классом $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств Ω, и возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$. Как и в теории вероятностей, «двойная» терминология, согласно которой $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ и $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ суть модели вероятностного и соответственно возможностного экспериментов, «элементы $\mathcal{A}$ — события», «одноточечные подмножества Ω — элементарные события», отражает два аспекта как вероятности, так и возможности, а именно — как формальных мер на $(\Omega, \mathcal{A})$ и как характеристик реальных событий, включающих их (Pr и P) эмпирические интерпретации.

В монографии возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ *моделирует характеристическое свойство феномена случайности, наблюдаемого в эксперименте со случайным исходом*: *ее значение* $\mathrm{P}(A)$ *при каждом*

[1] В предисловии речь пойдет об «основном» варианте теории возможностей, которому посвящена монография. Другие варианты рассмотрены в § 1.16 гл. 1, в § 2.4.4 гл. 2, в замечании 5.2.6 гл. 5 и в § 6.4.13 гл. 6.

[2] Точнее, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ соответствует (нечеткое) пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}, \mathrm{N})$ с двумя мерами, с возможностью P и необходимостью N, см. § 1.5 предисловия.

испытании оценивает шанс, относительную предопределенность любого исхода $A \in \mathcal{A}$ в сравнении с шансами любых других исходов. В отличие от моделей возможности, рассмотренных в работах [31, 33, 86, 92–94, 140, 152, 153], следующих классической схеме теории возможностей Л. Заде [159], названной в [86, 91] количественной (quantitative, numerical) теорией возможностей, в данном случае *численные значения возможностей* $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, *отличные от нуля и единицы*, как и в качественной (qualitative) теории возможностей [78, 79, 91, 154], *не могут быть содержательно истолкованы, существенна лишь их упорядоченность.* Но рассматриваемая далее теория отличается и от качественной теории возможностей [78, 79, 154], поскольку в ней *любые возможности* $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{P}'(\cdot)$ *считаются эквивалентными, если* $\exists\,\gamma(\cdot) \in \Gamma\ \forall A \in \mathcal{A}\ \gamma(\mathrm{P}(A)) = \mathrm{P}'(A)$, где $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная строго монотонная функция, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, Γ — класс всех таких функций, являющийся группой относительно групповой операции $\gamma \circ \gamma'(a) \triangleq \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$. Соответствующие *пространства с возможностями* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ и $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}')$ *определяют эквивалентные возможностные модели эксперимента* со случайным исходом.

Формально это отличие означает, что $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, где $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \bullet)$ — шкала значений возможности, группа Γ порождает группу $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов $\mathcal{L}$, $\gamma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, как следствие бинарные операции $+$ и $\bullet$ должны удовлетворять условию: $\forall\,\gamma(\cdot) \in \Gamma\ \forall\, a, b \in [0,1]$ $\gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b)$, где $*$ — любая из операций $+$ или $\bullet$, и при условии непрерывности $*\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ и коммутативности отсюда следует, что $+ \sim \max$, $\bullet \sim \min$, подробнее см. теорему в § 1.4.

1.1. Проблемы эмпирического восстановления и интерпретации вероятности. Как известно, эмпирическая интерпретация вероятности, называемая статистической (или событийно-частотной), основана на законах больших чисел (З. Б. Ч.). Если $\nu^{(n)}(A)$ — частота события $A \in \mathcal{A}$ в серии n взаимно независимых испытаний, модель которых $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})^n$, то $\forall\,\varepsilon > 0\ \forall\, A \in \mathcal{A}$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}^\infty\big(\sup_{n\geqslant N} |\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}(A)| > \varepsilon\big) = 0, \tag{1.1}$$

т. е. $\nu^{(n)}(A)$ с увеличением n *приближается и остается близкой* к $\mathrm{Pr}(A)$, ибо согласно (1.1) $|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}(A)| > \varepsilon$ лишь для Pr^∞-почти наверное [1]) (п. н.) конечного числа n испытаний (усиленный З. Б. Ч., $\nu^{(n)}(A) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \mathrm{Pr}(A)$). Этот факт определяет *эмпирическую интерпретацию вероятности, согласно которой вероятность любого собы-*

[1]) Условие (1.1) определяет сходимость $\nu^{(N)}(A)$ к $\mathrm{Pr}(A)$ Pr^∞-почти наверное (п. н.). Pr^∞ — вероятность, определенная на борелевских множествах бесконечных последовательностей испытаний, см. § 3.1 гл. 3.

тия сколь угодно точно прогнозирует его частоту в достаточно длинной последовательности взаимно независимых испытаний, и наоборот, — при этих условиях частота любого события сколь угодно точно оценивает его вероятность, а следовательно, и модель $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ *каждого испытания*, см. § 3.3.3 гл. 3.

Однако если в последовательности испытаний их стохастические свойства *произвольно* изменяются, то *частоты событий, вообще говоря, не оценивают их вероятности и не позволяют восстановить вероятностную модель каждого испытания и их последовательности, а вероятности событий не прогнозируют их частоты.* Дело в том, что если в модели взаимно независимых испытаний $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_n) \times \ldots$ вероятности произвольно изменяются от испытания к испытанию, то $\forall\, A \in \mathcal{A}\ \forall\, \varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}^{\infty}\big(\sup_{n\geqslant N} |\nu^{(n)}(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A)| > \varepsilon\big) = 0, \tag{1.2}$$

т. е. $\nu^{(n)}(A)$ *с увеличением* n *все более точно следует за* $\mathrm{Pr}^{(n)}(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A)$, ибо согласно (1.2) $|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}^{n}(A)| > \varepsilon$ лишь для Pr^{∞}-п. н. конечного числа n испытаний (усиленный З. Б. Ч., $\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}^{(n)}(A) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0$, см. § 3.1.2 гл. 3). Действительно, событие $C_\varepsilon(A) = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geqslant N} \{|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}^{(n)}(A)| > \varepsilon\}$ происходит, если и только если происходит бесконечно много событий среди $\{|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}^{(n)}(A)| > \varepsilon\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно (1.2) $\mathrm{Pr}^{\infty}(C_\varepsilon(A)) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}^{\infty}(\bigcup_{n\geqslant N} \{|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}^{(n)}(A)| > \varepsilon\}) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{Pr}^{\infty}(\{\sup_{n\geqslant N} |\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}^{(n)}(A)| > \varepsilon\}) = 0$.

1.2. Возможность как мера относительной предопределенности исходов стохастического[1] **эксперимента.** Рассмотрим идеи построения меры возможности, напомнив, что $\mathrm{Pr}(A)$ — прогнозируемое значение *частоты* события A в серии независимых испытаний, но не мера предопределенности или *возможности* A при каждом испытании.

Что можно сказать об *относительной предопределенности* исхода стохастического эксперимента (С. Э.), если его моделью является вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$? В частности, что можно сказать о *возможностях событий* $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, в этом случае, — об их *шансах*? Ясно лишь, что *при любом* определении возможности p_i события $\{\omega_i\} \subset \Omega$ как значения меры возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, *при каждом испытании оценивающей*

[1] Стохастическим назовем эксперимент со случайным исходом, моделью которого в каждый момент является некоторое вероятностное пространство и определенная на нем измеримая функция, значение которой определяет его исход, повторения эксперимента назовем испытаниями.

обусловленный свойствами С. Э. *шанс события* $\{\omega_i\}$ *в сравнении с шансами всех других элементарных событий*, естественно считать, что $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{p}_i \geqslant \mathrm{p}_j = \mathrm{P}(\{\omega_j\})$, если $\mathrm{Pr}(\{\omega_i\}) = \mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j = \mathrm{Pr}(\{\omega_j\})$.

В данном случае принципиально то, что для такого заключения *не требуются значения* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, *достаточно знать, как они упорядочены*. Более того, такое заключение остается в силе, если *вероятности* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ *произвольно изменяются от испытания к испытанию*, *оставаясь одинаково упорядоченными*, *например*, *согласно условию*

$$1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots > 0, \quad \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1. \tag{1.3}$$

1.3. Классы эквивалентных возможностей. Рассмотрим $\widetilde{\text{С. Э.}}$, моделью которого является *класс* $\mathcal{P}r = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}), \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}\}$ *дискретных вероятностных пространств*, *где* $\mathbb{P}\mathrm{r}$ — *класс вероятностей* $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, удовлетворяющих условию (1.3). Знания одной лишь упорядоченности (1.3) вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, конечно, недостаточно, чтобы охарактеризовать $\widetilde{\text{С. Э.}}$ в терминах формализма теории вероятностей, а если при условии (1.3) значения $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ *произвольно* изменяются от испытания к испытанию, то вероятностная модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_2) \times \ldots$, $\mathrm{Pr}_i \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, $i = 1, 2, \ldots$, испытаний не может быть восстановлена эмпирически.

В возможностной модели $\widetilde{\text{С. Э.}}$ возможности $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, априори должны быть подчинены условию

$$1 \geqslant \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{1.4}$$

согласованному с условием (1.3) ($\mathrm{p}_1 = 1$, см. (1.8)), а *каждая конкретная упорядоченность* в (1.4), *в которой встречаются только равенства и строгие неравенства*, *определит класс взаимно эквивалентных возможностей* $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\ 1]$, численные значения которых $\mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, произвольны.

Обозначим $\mathbb{P}$ класс возможностей, удовлетворяющих условию (1.4), и $\mathcal{P} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}\}$ — соответствующий класс пространств с возможностью — *возможностную модель* $\widetilde{\text{С. Э.}}$

Представим $\mathbb{P}$ в виде разбиения на *классы взаимно эквивалентных возможностей*. С этой целью заметим, что всякую конкретную упорядоченность значений $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ в (1.4) можно задать двоичным числом $e = 0.e_1 e_2 \ldots \in (0, 1)$, в котором $e_i = 1$, если $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}$, и $e_i = 0$, если $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ Обозначим $\mathbb{P}_{(e)}$ *класс возможностей*, *упорядоченность значений* $\mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, *которых определена значением* $e \in (0, 1)$. Тогда $\mathbb{P}_{(e)} \bigcap \mathbb{P}_{(e')} = \varnothing$, если $e \neq e'$, и

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}_{(e)}. \tag{1.5}$$

Все возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ *попарно эквивалентны*, каждый класс $\mathbb{P}_{(e)}$ определяет *единственную с точностью до эквивалентности* возможностную модель $\mathcal{P}_{(e)} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}\}$. Поэтому проблема эмпирического восстановления возможностной модели $\widetilde{\text{С.Э.}}$ эквивалентна статистической задаче определения $e \in (0,1)$, см. § 3.2.

1.4. Шкала значений возможности. Возможность события. Обозначим

▶ $\mathcal{L}$ *шкалу значений возможности* как интервал $[0,1]$ с естественной упорядоченностью $\leqslant$ и двумя бинарными операциями — сложением $\boldsymbol{+}\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ и умножением $\bullet\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$,

▶ $\overline{\Gamma}$ группу изотонных *автоморфизмов* $\gamma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, шкалы $\mathcal{L}$, порожденную группой [1] Γ строго монотонных непрерывных функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, *сохраняющих каждую конкретную упорядоченность* [2] *в* (1.4).

Поскольку $\overline{\Gamma}$ — группа *автоморфизмов* $\mathcal{L}$, то для любых $a, b \in \mathcal{L}$ и любой функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ должны быть выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &a * b \Longleftrightarrow \gamma(a) * \gamma(b), \quad &&\gamma(a \boldsymbol{+} b) = \gamma(a) \boldsymbol{+} \gamma(b),\\ &\gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b), &&\gamma(0) = 0,\ \ \gamma(1) = 1, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $*$ означает либо $<$, либо $>$, либо $=$.

Шкала $\mathcal{L}$ охарактеризована в следующей теореме, см. § 1.15 гл. 1.

Теорема. *Если* 1) *операции* $\boldsymbol{+}$ *и* $\bullet$ *суть непрерывные отображения из* $[0,1] \times [0,1]$ *на* $[0,1]$, 2) *для любых* $a, b \in [0,1]$

$$\begin{aligned} a \bullet b = b \bullet a, \quad 0 \bullet a = 0, \quad 1 \bullet a = a,\\ a \boldsymbol{+} b = b \boldsymbol{+} a, \ \ 0 \boldsymbol{+} a = a, \ \ 1 \boldsymbol{+} a = 1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

и 3) *для любой функции* $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ *выполнены условия* (1.6), *то* $a \boldsymbol{+} b = \max\{a, b\}$, $a \bullet b = \min\{a, b\}$, $a, b \in [0,1]$, *см.* 1.15.1 *и* [43].

Согласно теореме в шкале $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet\big)$ значений возможности [3] бинарные операции «$\boldsymbol{+}$» и «$\bullet$» коммутативны: $a \boldsymbol{+} b = b \boldsymbol{+} a$, $a \bullet b = b \bullet a$, ассоциативны: $(a \boldsymbol{+} b) \boldsymbol{+} c = a \boldsymbol{+} (b \boldsymbol{+} c)$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ и взаимно дистрибутивны: $a \bullet (b \boldsymbol{+} c) = (a \bullet b) \boldsymbol{+} (a \bullet c)$, $a \boldsymbol{+} (b \bullet c) = (a \boldsymbol{+} b) \bullet (a \boldsymbol{+} c)$, $a, b, c \in [0,1]$.

Операция «$\boldsymbol{+}$» позволяет сформулировать правило, определяющее возможность любого события $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathrm{P}(A) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{p}_i = \sup_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{P}(\{\omega_i\}),\ \mathrm{P}(\Omega) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{i=1}^{\infty} \mathrm{p}_i \overset{\triangle}{=} 1,\ \mathrm{P}(\varnothing) \overset{\triangle}{=} 0, \tag{1.8}$$

---

[1] Относительно групповой операции $\gamma \circ \gamma'(a) = \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$.

[2] $\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma$ $\gamma \circ \mathbb{P}_{(e)} = \{\gamma \circ \mathrm{P},\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}\} = \mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, где $\gamma \circ \mathrm{P}(A) = \gamma(\mathrm{P}(A))$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

[3] Шкала $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet\big)$ — полная дистрибутивная решетка, в которой решеточные операции суть $a \vee b = a \boldsymbol{+} b$, $a \wedge b = a \bullet b$, 0 и 1 суть минимальный и максимальный элементы решетки [6].

аналогичное правилу для вероятности, согласно которому

$$\Pr(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i = \sum_{i:\, \omega_i \in A} \Pr(\{\omega_i\}),\ \Pr(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i = 1,\ \Pr(\varnothing) = 0. \tag{1.8*}$$

Нетрудно убедиться, что согласно (1.8) *конкретная упорядоченность в* (1.4) *конкретно упорядочивает значения возможностей всех подмножеств* Ω, причем для любых $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$: $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \boldsymbol{+} \mathrm{P}(B) = \max\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\}$, $\mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B) = \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\}$, а Р-независимость A и B естественно определить условием $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B)$, поскольку при этом условии значения $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(B)$ определяют значения $\mathrm{P}(A \cup B)$ и $\mathrm{P}(A \cap B)$.

1.5. Необходимость. Шкала значений необходимости. Поскольку возможности противоположных событий связывает лишь равенство $\mathrm{P}(\Omega) = \max\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(\Omega \setminus A)\} = \mathrm{P}(A) \boldsymbol{+} \mathrm{P}(\Omega \setminus A) = 1$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, каждое событие естественно охарактеризовать значениями двух мер — возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ и необходимости [92] $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, принимающей значения в шкале $\widetilde{\mathcal{L}} = (\widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]}, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\boldsymbol{+}}, \widetilde{\bullet})$, в которой $a \,\widetilde{\leqslant}\, b \Leftrightarrow a \geqslant b$, $\widetilde{0} = 1$, $\widetilde{1} = 0$, $\widetilde{0} \,\widetilde{\leqslant}\, \widetilde{1}$, $\widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]} = [0, 1]$, $a \,\widetilde{\boldsymbol{+}}\, b = \min\{a, b\}$, $a \,\widetilde{\bullet}\, b = \max\{a, b\}$, $a, b \in [0, 1]$, и подобно (1.6) $\forall\, a, b \in [0, 1]$ $\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma$

$$a \,\widetilde{\leqslant}\, b \Leftrightarrow \gamma(a) \,\widetilde{\leqslant}\, \gamma(b),\ \gamma(a \,\widetilde{\boldsymbol{+}}\, b) = \gamma(a) \,\widetilde{\boldsymbol{+}}\, \gamma(b),\ \gamma(a \,\widetilde{\bullet}\, b) = \gamma(a) \,\widetilde{\bullet}\, \gamma(b). \tag{1.6*}$$

Определим согласованную с (1.4) упорядоченность

$$0 = n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \tag{1.9}$$

значений $n_i = \mathrm{N}(\Omega \setminus \{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, и соответственно меру $\mathrm{N}(A) = \widetilde{\sum}_{i:\, \omega_i \in \Omega \setminus A} n_i = \inf_{i:\, \omega_i \in \Omega \setminus A} \mathrm{N}(\Omega \setminus \{\omega_i\})$, $\mathrm{N}(\Omega) = \inf_{i:\, \omega_i \in \varnothing} n_i \stackrel{\triangle}{=} 1$, $\mathrm{N}(\varnothing) = \inf_{i:\, \omega_i \in \Omega} n_i = 0$, *характеризующую событие* A *как противоположное* $\Omega \setminus A$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Класс необходимостей, удовлетворяющих условию (1.9), обозначим $\mathbb{N}$. Конкретную упорядоченность в (1.9) зададим двоичным числом $\widetilde{e} = 0.\widetilde{e}_1 \widetilde{e}_2 \ldots \in (0, 1)$ так, чтобы $n_i < n_{i+1}$, если $\widetilde{e}_i = 1$, $n_i = n_{i+1}$, если $\widetilde{e}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\mathbb{N}_{(\widetilde{e})}$ обозначим класс взаимно эквивалентных необходимостей, упорядоченность значений n_i, $i = 1, 2, \ldots$, которых определена числом $\widetilde{e}$. При этом аналогично разбиению (1.5) $\mathbb{N} = \bigcup_{\widetilde{e} \in (0,1)} \mathbb{N}_{(\widetilde{e})}$, где $\mathbb{N}_{(\widetilde{e})} \cap \mathbb{N}_{(\widetilde{e}')} = \varnothing$, $\widetilde{e} \neq \widetilde{e}'$, $\widetilde{e}, \widetilde{e}' \in (0, 1)$.

Как и для возможности, конкретная упорядоченность в (1.9) конкретно упорядочивает значения необходимостей всех событий, причем для любых $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $A \subset B \Rightarrow \mathrm{N}(A) \leqslant \mathrm{N}(B)$, $\mathrm{N}(A \cap B) = \mathrm{N}(A) \,\widetilde{\boldsymbol{+}}\, \mathrm{N}(B) = \min\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\}$, $\mathrm{N}(A \cup B) \,\widetilde{\leqslant}\, \mathrm{N}(A) \,\widetilde{\bullet}\, \mathrm{N}(B) = \max\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\}$, а если A и B N-независимы, то $\mathrm{N}(A \cup B) = \mathrm{N}(A) \,\widetilde{\bullet}\, \mathrm{N}(B)$.

Таким образом, в общем случае *нечеткая модель* объекта определяется как *пространство* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}, \mathrm{N})$ *с двумя мерами*, связь между которыми определяется свойствами объекта. В частности, в нечеткой модели *стохастического объекта* P и N, максимально согласованные с вероятностью Pr в его модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$, *дуально согласованы*, см § 2.3.2 гл. 2, т. е. $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(\Omega \setminus A))$, $n_i = \mathrm{N}(\Omega \setminus \{\omega_i\}) = \theta(\mathrm{P}(\{\omega_i\})) = \theta(\mathrm{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, где Θ — класс непрерывных функций $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, строго монотонных, удовлетворяющих условиям $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$; если при этом $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{N} \in \mathbb{N}_{(\widetilde{e})}$, то $e = \widetilde{e}$. Заметим, что $\widetilde{0} = \theta(0)$, $\widetilde{1} = \theta(1)$, $\theta(a \mathbin{\textbf{+}} b) = \theta(a) \mathbin{\widetilde{\textbf{+}}} \theta(b) = \theta(a) \bullet \theta(b)$, $\theta(a \bullet b) = \theta(a) \mathbin{\widetilde{\bullet}} \theta(b) = \theta(a) \mathbin{\textbf{+}} \theta(b)$, $a, b \in [0,1]$, и если преобразование $\theta(\cdot)$ интерпретировать как «нечеткое отрицание», то «$\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(\Omega \setminus A))$» $\equiv$ «необходимость A» = «невозможность $\Omega \setminus A$».

1.6. Принцип относительности. Обозначим $\gamma\mathcal{L}$ и $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma, \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, шкалы, изоморфные шкалам[1] $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$, элементы которых суть $\gamma(a)$, $a \in [0,1]$ и $\widetilde{\gamma}(a)$, $a \in [0,1]$, операции $\textbf{+}$, $\bullet$ в $\gamma\mathcal{L}$ и $\widetilde{\textbf{+}}$, $\widetilde{\bullet}$ в $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$ определим согласно (1.6) и соответственно (1.6*) и назовем шкалы $\gamma\mathcal{L}$ и $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$ *координатными представлениями* шкал $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma, \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$.

Все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, и все шкалы $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, изоморфны, и *любой исследователь может выбрать любую пару шкал* $\gamma\mathcal{L}$ *и* $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma, \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, *для формулировки нечеткой модели*. При этом будучи сформулированными в некоторых парах шкал $\mathcal{L}', \widetilde{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{L}'', \widetilde{\mathcal{L}}''$ модели *считаются эквивалентными, если существует пара шкал* $\mathcal{L} = \gamma'\mathcal{L}' = \gamma''\mathcal{L}''$, $\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\gamma}'\widetilde{\mathcal{L}}' = \widetilde{\gamma}''\widetilde{\mathcal{L}}''$, $\gamma', \gamma'', \widetilde{\gamma}', \widetilde{\gamma}'' \in \overline{\Gamma}$, *в которых их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть только те из них, формулировки которых не зависят от выбора шкал*[2] $\gamma\mathcal{L}$ *и* $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, *т. е. одинаковы для всех исследователей*. Этот аспект теории возможностей, аналогичный принципу относительности в физике, определил *содержательную интерпретацию* возможности и необходимости, математические методы и алгоритмы их *эмпирического построения*, математический формализм теории и области ее применений.

[1] Преобразования $\gamma(\cdot), \widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(\cdot), \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma$, определяют как автоморфизмы $\gamma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma, \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, так и изоморфизмы $\gamma\colon \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma, \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$, согласно которым $\forall\, a, b \in \mathcal{L}$, $\forall\, \widetilde{a}, \widetilde{b} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma(a) \in \gamma\mathcal{L}$, $\widetilde{\gamma}(\widetilde{a}) \in \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma(a * b) = \gamma(a) * \gamma(b)$, $\widetilde{\gamma}(\widetilde{a} \mathbin{\widetilde{*}} \widetilde{b}) = \widetilde{\gamma}(\widetilde{a}) \mathbin{\widetilde{*}} \widetilde{\gamma}(\widetilde{b})$, $\gamma(\cdot), \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma$, где $*$ и $\widetilde{*}$ суть любые бинарные операции в $\mathcal{L}$ и в $\widetilde{\mathcal{L}}$.

[2] Далее фразу «выбор шкалы $\mathcal{L}$ ($\widetilde{\mathcal{L}}$)» будем считать эквивалентной фразе «выбор координатного представления $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$ ($\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}$) шкалы $\mathcal{L}$ ($\widetilde{\mathcal{L}}$)».

1.7. Возможность и необходимость, максимально согласованные с вероятностью. Стохастические модели возможности и необходимости. Согласно упорядоченностям (1.3), (1.4) и формулам (1.8), (1.8*):
▶ $\forall A_1 \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $\omega_1 \in A_1$, то $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{p}_1 = 1$, $\Pr(A_1) \in \Delta_1 = [\mathrm{pr}_1, 1]$, где Δ_1 — минимальный (по включению) интервал, содержащий $\Pr(A_1)$;
▶ $\forall A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $\omega_2 \in A_2$, $\omega_1 \notin A_2$, то $\mathrm{P}(A_2) = \mathrm{p}_2$, $\Pr(A_2) \in \in \Delta_2 = [\mathrm{pr}_2, 1 - \mathrm{pr}_1]$, где Δ_2 — минимальный интервал, содержащий $\Pr(A_2)$; …
▶ $\forall A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $\omega_i \in A_i$, $\omega_{i-1} \notin A_i$, …, $\omega_1 \notin A_i$, то $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{p}_i$, $\Pr(A_i) \in \Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}]$, где Δ_i — минимальный интервал, содержащий $\Pr(A_i)$, $i = 3, 4, \ldots$

Следовательно, $\exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$: $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\Pr(A))$, где $\widetilde{\Gamma}$ — класс монотонных функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$, а функция $\widetilde{\gamma}(\cdot)$, определяющая *согласованность* P с Pr, удовлетворяет условиям $\widetilde{\gamma}(a) = \mathrm{p}_i$, $a \in \Delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$; возможность P естественно назвать *максимально согласованной* с вероятностью Pr, если (*зависящая* от Pr) функция $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ выбрана так, что $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing \Leftrightarrow f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1$, и $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}$, если $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing \Leftrightarrow f_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\Leftrightarrow$ означает «если и только если». Поэтому каждому классу $\mathbb{P}_{(e)}$ эквивалентных возможностей, $e = 0.e_1e_2\ldots \in (0,1)$, в (1.5) согласно условиям

$$\begin{aligned} e_i = 1 \iff \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \iff \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i = f_i > 1, \\ e_i = 0 \iff \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \iff f_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1.10}$$

взаимно однозначно сопоставлен класс вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, *а разбиению* (1.5) *класса* $\mathbb{P}$ — *разбиение*

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)},\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \varnothing,\ e \neq e',\ e, e' \in (0,1), \tag{1.11}$$

класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей, см. §§ 2.4, 2.5 гл. 2. В (1.11) $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ — *класс вероятностей*, *распределенных* [1]) *согласно условиям* (1.3) и (1.10). Подчеркнем, что условия в (1.10) связывают каждую *конкретную упорядоченность* возможностей в (1.4), определенную значением $e \in (0,1)$, с *множеством* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ *вероятностей*, удовлетворяющих условию (1.3).

Итак, согласно эквивалентностям в (1.10) *для любых* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ и $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ *можно указать монотонно неубывающую непрерывную* на $(0,1]$ *функцию* $\gamma_e(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma_e(0) = 0$, $\gamma_e(1) = 1$, из класса

---

[1]) Нестандартный в русскоязычной литературе термин «распределение вероятности» используется с целью расширения «терминологического единства» теорий вероятностей и возможностей, поскольку в этой книге вероятность и возможность рассматриваются как метафизические понятия, *характеризующие объект исследования* подобно метафизическим понятиям силы, тепла и т. п. в духе пропенситивной интерпретации вероятности К. Поппера [37].

$\Gamma(\mathrm{Pr})$, см. § 2.3 гл. 2, *такую, что для любого* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathrm{P}(A) = \sup_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{p}_i = \gamma_e\Big(\sum_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i\Big) = \gamma_e\big(\mathrm{Pr}(A)\big),\ e \in (0,1). \qquad (1.12)$$

Класс $\Gamma(\mathrm{Pr})$ всех таких функций $\gamma_e(\cdot)$ определяется вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,1)$. В частности, если в последовательности испытаний $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_2) \times \ldots$ вероятности Pr_1, Pr_2, ... произвольно изменяются, оставаясь в пределах некоторого класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, то им отвечает единственная с точностью до эквивалентности возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, но в равенствах (1.12) $\gamma_e(\cdot) = \gamma_{je}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr}_j)$, $j = 1, 2, \ldots$

Любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ *называется максимально согласованной с любой вероятностью* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, факт *максимальной* согласованности P с Pr выразим символом $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, означающим, что среди неравенств $\gamma_e(\mathrm{pr}_1) \geqslant \gamma_e(\mathrm{pr}_2) \geqslant \ldots$, *максимальное* число строгих $>$, $e \in (0,1)$, см. §§ 2.3, 2.4 гл. 2.

Если $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, то каждое событие $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ в $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ можно интерпретировать как событие в $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, а его возможность будет определена его вероятностью равенством (1.12). В этом смысле класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ определяет *стохастическую модель класса* $\mathbb{P}_{(e)}$ и любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, любая вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ определяет *вероятностную модель* любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, а последняя *называется* Pr-*измеримой*. Более того, в силу дуальной согласованности P и N, максимально согласованных с вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, последняя *определяет вероятностную модель и любой необходимости* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}_{(\widetilde{e})} = \mathbb{N}_{(e)}$, ибо существуют функции $\theta(\cdot) \in \Theta$ и $\gamma_e(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ такие, что подобно равенствам в (1.12) для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{N}(A) = \theta \circ \gamma_e(\mathrm{Pr}(\Omega \setminus A))$, $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{N}$.

Другие связи возможности и вероятности установлены в [87, 90, 92, 94] и в § 2.7 гл. 2.

2. Эмпирическая интерпретация и эмпирическое восстановление Pr-измеримой возможности

Рассмотрим *эмпирическую интерпретацию* Pr-измеримой возможности. Пусть $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$. Если для некоторых $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$, то в силу равенств (1.12) $\exists\, \gamma_e(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \gamma_e(\mathrm{Pr}(A)) > \gamma_e(\mathrm{Pr}(B)) \Rightarrow \mathrm{Pr}(A) > \mathrm{Pr}(B)$, а в силу З. Б. Ч. (1.1) $\forall\, \varepsilon \in (0, (\mathrm{Pr}(A) - \mathrm{Pr}(B))/2)$ $\exists\, N(\varepsilon)$ $\forall\, n \geqslant N(\varepsilon)$ $\nu^{(n)}(B) \overset{\text{п. н.}}{\leqslant} \mathrm{Pr}(B) + \varepsilon <$ $< \mathrm{Pr}(A) - \varepsilon \overset{\text{п. н.}}{\leqslant} \nu^{(n)}(A)$. Следовательно, $\forall\, \varepsilon \in (0, (\mathrm{Pr}(A) - \mathrm{Pr}(B))/2)$ $\exists\, N(\varepsilon)$ $\forall\, n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B) \Rightarrow \nu^{(n)}(A) \overset{\text{п. н.}}{>} \nu^{(n)}(B). \qquad (2.1)$$

Этот факт определяет эмпирическую (событийно-частотную!) интерпретацию Pr-измеримой возможности, а именно: *в достаточно длинной последовательности взаимно независимых испытаний упорядоченность возможностей любых событий п. н. точно прогнозирует такую же упорядоченность их частот*: *чем событие возможнее, т. е. чем выше его шанс произойти при каждом испытании, тем оно чаще происходит.*

Задача эмпирического восстановления возможности, *эквивалентная задаче выбора одного из классов взаимно эквивалентных* возможностей $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, в (1.5), в силу однозначного соответствия между классами $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ и $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, в (1.5) и в (1.11), сводится к статистической задаче идентификации, в которой в предположении, что результаты испытаний контролируются, вообще говоря, изменяющейся от испытания к испытанию вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\overset{\circ}{e})}$, требуется на основе результатов испытаний принять решение о значении $\overset{\circ}{e} \in (0,1)$, *фиксированном условиями испытаний*, см. гл. 3.

Задачу эмпирического восстановления Pr-измеримой возможности исследуем в случае конечного $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, когда в (1.10) $\mathrm{pr}_1 \geqslant \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_m \geqslant 0 = \mathrm{pr}_{m+1} = \ldots$, $\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_m = 1$ и соответственно $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_m \geqslant 0 = \mathrm{p}_{m+1} = \ldots$, а разбиения (1.5) и (1.11) суть

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m} \mathbb{P}_{(e)},\ \mathbb{P}_{(e)} \cap \mathbb{P}_{(e')} = \varnothing,\ e \neq e', \tag{2.2}$$

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \varnothing,\ e \neq e', \tag{2.3}$$

где $\mathcal{E}_m = \{0.0\ldots01, \ldots, 0.1\ldots1\}$ — множество $2^m - 1$ значений $e = = 0.e_1 \ldots e_m$, $e_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, m$, кроме $e = 0.0\ldots0$. Каждое двоичное число $e \in \mathcal{E}_m$ определяет конкретную упорядоченность в $1 = = \mathrm{p}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_m \geqslant 0$, класс $\mathbb{P}_{(e)}$ *эквивалентных* возможностей, распределения которых одинаково упорядочены согласно e, и класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ вероятностей, распределения которых удовлетворяют условиям в (1.10). Согласно последним любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ максимально согласована с каждой вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ (Pr-измерима), а классам $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in \mathcal{E}_m$, отвечают *выпуклые множества* в $\{(\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_m) \in \in \mathcal{R}^m,\ 1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_m \geqslant 0,\ \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_m = 1\}$, см. рис. 0.2.1.

Без дополнительных предположений о вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, контролирующей результаты испытаний, согласно (1.10) и З. Б. Ч. (1.2) естественное решение задачи эмпирического определения класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(\overset{\circ}{e})} \ni \mathrm{Pr}$ состоит в следующем: для достаточно большого числа n взаимно независимых испытаний

$$\overset{\circ}{e}_i = 1,\ \text{если}\ \widehat{f}_i^{(n)} > 1,\ \overset{\circ}{e}_i = 0,\ \text{если}\ \widehat{f}_i^{(n)} \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, m, \tag{1.10*}$$

где $\widehat{f}_i^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)}$ и $\nu_i^{(n)} = \nu^{(n)}(\{\omega_i\})$ — частота события $\{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, m$.

Дополнительные предположения (кроме включения $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$) необходимы для эмпирического восстановления Pr-измеримой возможности с *гарантированной точностью.*

Пусть в (1.10) Pr — *вполне регулярная вероятность*, т. е. пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ и выполнены условия, см. § 3.2 гл. 3,

$$\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_m > 0, \ f_k \neq 1, \ k = 1, \ldots, m. \tag{2.4}$$

Покажем, что в этом случае, если $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\overset{\circ}{e})}$, то $\overset{\circ}{e}$ определяется безошибочно на основе данных п. н. конечного числа испытаний.

В самом деле, так как для каждого $i = 1, \ldots, m$ при $n \to \infty$ $\nu_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}_i$, то при $n \to \infty$

$$(\widehat{f}_1^{(n)}, \ldots, \widehat{f}_m^{(n)}) \xrightarrow{\text{п. н.}} (f_1, \ldots, f_m). \tag{2.5}$$

Поэтому согласно (2.5) в силу *полной регулярности* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e_0)}$ (2.4)

$$\begin{aligned} \exists\, N = N(m, \mathrm{Pr}) \quad \forall\, n \geqslant N \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \quad & \widehat{f}_i^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{>} 1 \Leftrightarrow f_i > 1, \\ & \widehat{f}_i^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{<} 1 \Leftrightarrow f_i < 1. \end{aligned} \tag{2.5*}$$

Следовательно, п. н. безошибочно определен класс $\mathbb{P}_{(\overset{\circ}{e})}$ и тем самым — возможностная модель каждого испытания, максимально согласованная с контролирующей исходы испытаний вероятностью, причем класс $\mathbb{P}_{(\overset{\circ}{e})}$ определен *безошибочно на основе п. н. конечного числа испытаний*; вероятность при этих условиях определена лишь с точностью до включения $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(\overset{\circ}{e})}$.

Если в (1.10) Pr — *регулярная вероятность*, т. е. если $\mathrm{pr}_1 \geqslant \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_m \geqslant 0$ и неравенство $\mathrm{pr}_k > 0$ влечет неравенство

$$f_k = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{k-1} + 2\mathrm{pr}_k \neq 1, \ k = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

то в случае $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_k > 0 = \mathrm{pr}_{k+1} = \ldots = \mathrm{pr}_m$ неизвестное значение k может быть определено, ибо

$$\begin{aligned} \exists\, N(\mathrm{Pr}) \quad \forall\, n \geqslant N(\mathrm{Pr}) \quad & \nu_1^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{>} 0, \ldots, \nu_k^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{>} 0 \ \text{ и} \\ & \forall\, n = 1, 2, \ldots \ \nu_{k+1}^{(n)} = \ldots = \nu_m^{(n)} = 0. \end{aligned} \tag{2.6*}$$

Согласно (2.6*) в $e = 0.e_1 \ldots e_m$ определены значения $e_{k+1} = \ldots = e_m = = 0$, поскольку $\mathrm{p}_{k+1} = \ldots = \mathrm{p}_m = 0 \Rightarrow f_{k+1} = \ldots = f_m = 1$, а значения $e_1, \ldots, e_k$ определятся безошибочно на основе п. н. конечного числа данных, как в случае вполне регулярной Pr. Следовательно, в случае регулярной вероятности при $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_k > 0 = \mathrm{pr}_{k+1} = \ldots = \mathrm{pr}_m$ задача восстановления возможности *может быть сведена* к задаче для *вполне регулярной вероятности редуцированием* $m \to k$.

Что касается редуцирования $m \to k$, то заключение $\mathrm{pr}_{k+1} = \ldots \ldots = \mathrm{pr}_m = 0$, основанное на наблюдении $\nu_{k+1}^{(n)} = \ldots = \nu_m^{(n)} = 0$, может быть ошибочным с вероятностью $\Pr(\nu_{k+1}^{(n)} = \ldots = \nu_m^{(n)} = 0;$ $\mathrm{pr}_m \geqslant \delta > 0) = \Pr(\nu_{k+1}^{(n)} = \ldots = \nu_m^{(n)} = 0;\ \mathrm{pr}_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_m \geqslant \delta >$ $> 0) = (1 - (\mathrm{pr}_{k+1} + \ldots + \mathrm{pr}_m))^n \leqslant (1 - (m-k)\delta)^n$, если на самом деле $\mathrm{pr}_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_m \geqslant \delta > 0$. При этом для любого $\delta \in$ $\in (0, 1/(m-k)]$ вероятность ошибки $\leqslant (1-(m-k)\delta)^n \leqslant \beta$, если $n \geqslant \max\left\{\dfrac{\ln(1/\beta)}{\ln(1/(1-(m-k)\delta))}, N(\Pr)\right\}$.

Разумеется, эти факты определяют лишь принципиальную разрешимость задачи эмпирического восстановления Pr-измеримой возможности и не могут быть использованы непосредственно для ее эмпирического восстановления, поскольку в (2.5*) и в (2.6*) значения $N(m, \Pr)$ и $N(\Pr)$ неизвестны.

Задачу эмпирического восстановления Pr-измеримой возможности для вполне регулярной вероятности $\Pr \in \mathbb{Pr}$ поставим как статистическую задачу проверки гипотезы, согласно которой на основе значений частот $\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}$ элементарных событий $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_m\}$, наблюдаемых в последовательности $n = 1, 2, \ldots$ взаимно независимых испытаний, для каждого $i = 1, \ldots, m$ требуется принять одну из гипотез

$$\text{либо } e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1, \quad (*)$$
$$\text{либо } e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow f_i < 1, \quad (**)$$

причем каждое решение должно быть верным с вероятностью $\geqslant 1 - \alpha$.

Следующий алгоритм, рассмотренный в гл. 3, решает поставленную задачу: для всех $i = 1, \ldots, m$

1. если $\widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n)}$, то считать, что $e_i = 1$,
2. если $\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n)}$, то считать, что $e_i = 0$, $(***)$
3. если $|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n)}$, то продолжить испытания, $n = 1, 2, \ldots$,

где $\widehat{f}_i^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^{n} + 2\nu_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, m$, $\delta^{(n)} = \left(\dfrac{2}{n} \ln \dfrac{1}{\alpha}\right)^{1/2}$, α — верхняя граница вероятности ошибочных решений 1, 2, и, как показано в § 3.4 гл. 3, *условие* 3 *выполняется для п. н. конечного числа испытаний*. Поэтому алгоритм $(***)$ согласно условиям $(*)$, $(**)$ на основе п. н. конечного числа испытаний восстанавливает значение $e = 0.e_1 \ldots e_m$, совпадающее с его истинным значением с вероятностью $\geqslant 1 - m\alpha$, см. § 3.4 гл. 3.

Заметим, что для класса $\mathbb{Pr}'$ вполне регулярных вероятностей, удовлетворяющих условиям (2.4), разбиения (2.2), (2.3) должны быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m} \mathbb{P}'_{(e)},\ \mathbb{P}'_{(e)} \cap \mathbb{P}'_{(e')} = \varnothing,\ e \neq e', \\ &\mathbb{Pr}' = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_m} \mathbb{Pr}'_{(e)},\ \mathbb{Pr}'_{(e)} \cap \mathbb{Pr}'_{(e')} = \varnothing,\ e \neq e', \end{aligned} \tag{2.7}$$

где всем $\mathbb{Pr}'_{(e)}$, $e \in \mathcal{E}_m$, отвечают открытые выпуклые множества в $\{(\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_m) \in \mathcal{R}^m,\ \mathrm{pr}_1 \geqslant 0, \ldots, \mathrm{pr}_m \geqslant 0,\ \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_m = 1\}$.

В случае регулярных вероятностей разбиения (2.2), (2.3) записываются в виде, см. рис. 0.2.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}'' &= \bigcup_{e\in\mathcal{E}_m} \mathbb{P}''_{(e)},\ \mathbb{P}''_{(e)} \cap \mathbb{P}''_{(e')} = \varnothing,\ e \neq e', \\ \mathbb{P}\mathrm{r}'' &= \bigcup_{e\in\mathcal{E}_m} \mathbb{P}\mathrm{r}''_{(e)},\ \mathbb{P}\mathrm{r}''_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}''_{(e')} = \varnothing,\ e \neq e', \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\mathbb{P}\mathrm{r}''$ — класс вероятностей, удовлетворяющих условиям (2.6).

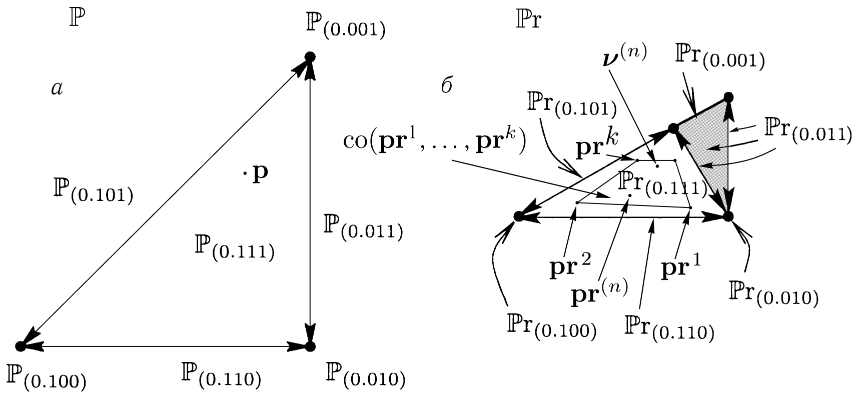


Рис. 0.2.1. Для случая $m = 3$: *а*) «треугольник возможностей» $\mathbb{P}$, «представленный» их распределениями как точками $\mathbf{p} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$, $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \mathrm{p}_3 \geqslant 0$, и семь классов $\mathbb{P}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, «представленных» распределениями эквивалентных возможностей, образующих эти классы, соответственно $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0.001)} \cup \mathbb{P}_{(0.011)} \cup \ldots \cup \mathbb{P}_{(0.111)}$ (2.2); *б*) «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}$, «представленный» их распределениями как точками $\mathbf{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3)$, $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1$, и семь его подмножеств $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, «представленных» распределениями составляющих их вероятностей и образующих разбиение (2.3). Всем вероятностям $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ соответствует единственная с точностью до эквивалентности возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, $e = 0.001, \ldots, 0.111$; обозначения $\mathbf{pr}^s = (\mathrm{pr}_1^s, \mathrm{pr}_2^s, \mathrm{pr}_3^s)$, $\mathrm{pr}_i^s = \mathrm{Pr}^s(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$, $s = 1, \ldots, k$, $\mathbf{pr}^{(n)} = \sum\limits_{s=1}^{k} (n_s/n)\mathbf{pr}^s$, $\boldsymbol{\nu}^{(n)} = (\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \nu_3^{(n)})$ и выпуклая оболочка $\mathrm{co}(\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k)$, при любом $n = 1, 2, \ldots$ содержащая $\mathbf{pr}^{(n)}$, определены в следующем параграфе, см. рис. 2.0.1, 2.0.2, 2.4.2 гл. 2

На рис. 0.2.1 в разбиениях (2.7) $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.111)} = \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.101)} = \varnothing$, $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.001)} = \varnothing$, $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.100)} = \varnothing$, $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.110)} = \varnothing$, $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.010)} = \varnothing$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.011)} = \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)} \setminus \{$граница $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}\}$, т. е. $\mathbb{P}\mathrm{r}' = \mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.111)} \cup \mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.011)}$, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}'_{(0.111)} \cup \mathbb{P}'_{(0.011)}$, причем любой из двух классов $\mathbb{P}'_{(0.111)}$ и $\mathbb{P}'_{(0.011)}$ восстанавливается безошибочно на основе п. н. конечного числа испытаний.

На рис. 0.2.1 в разбиениях (2.8) $\mathbb{P}\mathrm{r}'' = \mathbb{P}\mathrm{r}''_{(0.111)} \cup \mathbb{P}\mathrm{r}''_{(0.110)} \cup \mathbb{P}\mathrm{r}''_{(0.100)} \cup \cup \mathbb{P}\mathrm{r}''_{(0.011)} \equiv \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} \cup \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)} \cup \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)} \cup \mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.011)}$ и $\mathbb{P}'' = \mathbb{P}_{(0.111)} \cup \cup \mathbb{P}_{(0.110)} \cup \mathbb{P}_{(0.100)} \cup \mathbb{P}_{(0.011)}$, где из четырех классов взаимно эквивалентных возможностей $\mathbb{P}''_{(0.111)}$ и $\mathbb{P}''_{(0.011)}$ восстанавливаются безошибочно на основе п. н. конечного числа испытаний, а $\mathbb{P}''_{(0.100)}$ и $\mathbb{P}''_{(0.110)}$ восстанавливаются безошибочно с вероятностями, с которыми принимаются решения $\mathrm{pr}_1 = 1$, $\mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3 = 0$ и $1/2 < \mathrm{pr}_1 < 1$, $\mathrm{pr}_3 = 0$, основанные на наблюдениях значений $\nu_1^{(n)} = 1$, $\nu_2^{(n)} = \nu_3^{(n)} = 0$ и $1/2 < \nu_1^{(n)} < 1$, $\nu_3^{(n)} = 0$ соответственно.

3. Эмпирическая интерпретация и эмпирическое восстановление Pr^1-, …, Pr^k-измеримой возможности

Пусть теперь в последовательности взаимно независимых испытаний вероятность может изменяться от испытания к испытанию. Стохастической моделью n таких испытаний является вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n)$. Определим на нем случайные величины $\xi_i^A(\cdot)\colon \Omega^n \to \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, $\xi_i^A(\omega^1, \ldots, \omega^n) = = \chi_A(\omega^i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega^i \in A, \\ 0, & \text{если } \omega^i \in \Omega \backslash A, \end{cases}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, где $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ — некоторое событие, его частоту обозначим $\nu^{(n)}(A) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_A(\omega^i)$.

Пусть для простоты среди $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ *конечное число k различных вероятностей, скажем*, $\mathrm{Pr}^1 \in \mathbb{P}\mathrm{r}, \ldots, \mathrm{Pr}^k \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, тогда в (1.2)

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n) \mathrm{Pr}^s(A), \tag{3.1}$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность Pr^s встречается в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \ldots, \mathrm{Pr}_n$, $s = 1, \ldots, k$, $n_1/n + \ldots + n_k/n = 1$. Поскольку с увеличением n частóты n_s/n, $s = 1, \ldots, k$, изменяются произвольно, значение $\mathrm{Pr}^{(n)}(A)$ *произвольно* «блуждает» в пределах отрезка $[\min\limits_{1 \leqslant s \leqslant k} \mathrm{Pr}^s(A), \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant k} \mathrm{Pr}^s(A)]$ и за ним при $n \to \infty$ согласно З. Б. Ч. (1.2) все более точно следует частота $\nu^{(n)}(A)$.

В этом случае *знание вероятностей* $\mathrm{Pr}^1(A), \ldots, \mathrm{Pr}^k(A)$, вообще говоря, *не позволяет оценить частоту* $\nu^{(n)}(A)$, *а наблюдение за частотой* $\nu^{(n)}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, *не позволяет восстановить стохастическую модель испытаний.*

На рисунке 0.2.1, *б* вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot) = \sum\limits_{s=1}^{k} (n_s/n) \mathrm{Pr}^s(\cdot)$ в (3.1) «представлена» точкой $\mathbf{pr}^{(n)} = \sum\limits_{s=1}^{k} (n_s/n) \mathbf{pr}^s \in \mathrm{co}\,(\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k) \subset \subset \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\mathrm{co}\,(\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k)$ — выпуклая оболочка точек $\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k$, «представляющих» вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$.

Замечание 3.1. Если вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$ появляются в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ с определенной закономерностью, например, с (неизвестными) вероятностями $\mathrm{r}^1, \ldots, \mathrm{r}^k$, $\mathrm{r}^1 + \ldots + \mathrm{r}^k = 1$, то речь идет о модели испытаний, в которой при $n \to \infty$ $n_s/n \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{r}^s$, $s = 1, \ldots, k$, и $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{Pr}^{(n)}(A) = \sum\limits_{s=1}^{k} (n_s/n)\mathrm{Pr}^s(A) \xrightarrow{\text{п. н.}} \sum\limits_{s=1}^{k} \mathrm{Pr}^s(A)\mathrm{r}^s$. В этом случае при $n \to \infty$ $\nu^{(n)}(A) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{Pr}(A) = \sum\limits_{s=1}^{k} \mathrm{Pr}^s(A)\mathrm{r}^s$. Если же $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, где $m \geqslant k$, то эмпирически может быть восстановлена и модель испытаний [1] $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}^{\varkappa_1}) \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}^{\varkappa_2}) \times \ldots$, в которой $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ — последовательность взаимно независимых копий случайной величины $\varkappa$, принимающей значения $1, \ldots, k$ с неизвестными вероятностями $\mathrm{r}^1, \ldots, \mathrm{r}^k$, если оценить последние, решив следующую задачу линейного программирования:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \nu^{(n)}(\omega_i) - \sum_{s=1}^{k} \mathrm{pr}^{(n)}(s)\mathrm{Pr}^s(\{\omega_i\}) \right| = \\ = \min_{q \in Q} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \nu^{(n)}(\omega_i) - \sum_{s=1}^{k} q_s \mathrm{Pr}^s(\{\omega_i\}) \right|, \quad (*)$$

где $Q = \{q = (q_1, \ldots, q_k),\ 0 \leqslant q_s,\ s = 1, \ldots, k,\ q_1 + \ldots + q_k = 1\}$. Если $\mathrm{pr}^{(n)}(s)$, $s = 1, \ldots, k$, — единственное решение задачи $(*)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\mathrm{pr}^{(n)}(s) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{п. н.}} \mathrm{r}^s$, $s = 1, \ldots, k$.

3.1. Эмпирическая интерпретация. Если существует $e \in (0, 1)$, такое, что вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$ содержатся в классе $\mathbb{Pr}_{(e)}$, то любой возможности P из $\mathbb{P}_{(e)}$, которая называется Pr^1-, ..., Pr^k-измеримой, можно дать событийно-частотную интерпретацию, такую же, как в случае неменяющейся вероятности. Заметим прежде всего, что

$$\nu^{(n)}(A) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\nu^{(n_s)}(A), \tag{3.2}$$

где $\nu^{(n_s)}(A)$ — частота события A в подпоследовательности последовательности n испытаний, в которой исходы испытаний контролируются вероятностью Pr^s, причем согласно усиленному З. Б. Ч. (1.1) при $n \to \infty$

$$\nu^{(n_s)}(A) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{Pr}^s(A),\ s = 1, \ldots, k. \tag{3.3}$$

Условия $\mathrm{Pr}^s \approx> \mathrm{P}$, $s = 1, \ldots, k$, означают, что как в (1.12) существуют функции $\gamma_e^s(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}^s)$, $s = 1, \ldots, k$, такие, что для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \gamma_e^1(\mathrm{Pr}^1(A)) = \ldots = \gamma_e^k(\mathrm{Pr}^k(A))$. Поэтому согласно (3.3) при $n \to \infty$ $\gamma_e^s(\nu^{(n_s)}(A)) \xrightarrow{\text{п. н.}} \gamma_e^s(\mathrm{Pr}^s(A)) = \mathrm{P}(A)$, $s = 1, \ldots, k$,

[1] Но не каждого испытания.

и, следовательно, если $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$, то $\mathrm{Pr}^s(A) > \mathrm{Pr}^s(B)$, $s = 1, \ldots, k$, а это означает, что существует число $N(A, B)$, такое, что $\nu^{(n_s)}(A) \overset{\text{п. н.}}{>} \nu^{(n_s)}(B)$ для всех $n > N(A, B)$ и $s = 1, \ldots, k$. Отсюда согласно равенству (3.2) следует, что как в (2.1) и *в случае изменяющейся вероятности неравенство* $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$ *влечет неравенство* $\nu^{(n)}(A) \overset{\text{п. н.}}{>} \nu^{(n)}(B)$ *для всех* $n > N(A, B)$.

3.2. Эмпирическое восстановление. Покажем теперь, что при условии *полной регулярности*[1] *вероятностей* $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, *содержащихся в некотором классе* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, *данные п. н. конечного числа испытаний позволяют безошибочно восстановить возможностную модель* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, *каждого испытания*. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_m\}$, вероятности $\mathrm{Pr}^s\big(\{\omega_i\}\big) = \mathrm{pr}_i^s$, $i = 1, \ldots, m$, для каждого $s = 1, \ldots, k$ упорядочены согласно условию

$$\mathrm{pr}_1^s \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_m^s > 0, \ \ \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_m^s = 1, \tag{3.4}$$

и существует $e \in (0, 1)$ такое, что $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $s = 1, \ldots, k$. Это означает, что для любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ значения $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$ и $\mathrm{pr}_i^s = \mathrm{Pr}^s(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, k$, для вполне регулярных $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$ удовлетворяют условиям: для всех $s = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i^s = \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^s + 2\mathrm{pr}_i^s > 1, \\ &e_i = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Longleftrightarrow f_i^s < 1, \ i = 1, \ldots, m-1, \ f_m^s > 1, \ e_m = 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Согласно условиям (3.5) любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ максимально согласована с каждой вероятностью Pr^s, $s = 1, \ldots, k$, и, как следствие, максимально согласована с каждой вероятностью $\overline{\mathrm{Pr}} = \sum\limits_{s=1}^{k} \mu_s \mathrm{Pr}^{(s)}$, $\mu_s \geqslant 0$, $s = 1, \ldots, k$, $\sum\limits_{s=1}^{k} \mu_s = 1$. Действительно, если $\overline{\mathrm{pr}}_i = \sum\limits_{s=1}^{k} \mu_s \mathrm{pr}_i^s$, $i = 1, \ldots, m$, то в силу выпуклости класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$

$$\begin{aligned} &\forall\, s = 1, \ldots, k \quad f_j^s > 1 \ (< 1) \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \overline{f}_j = \overline{\mathrm{pr}}_1 + \ldots + \overline{\mathrm{pr}}_{j-1} + 2\overline{\mathrm{pr}}_j > 1 \ (< 1), \ j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Пусть

$$\mathrm{pr}_j^{(n)} = \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega_j\}) = \sum_{s=1}^{k} (n_s / n) \mathrm{pr}_j^s, \ j = 1, \ldots, m; \tag{3.7}$$

$$\nu_j^{(n)} = \nu^{(n)}(\{\omega_j\}) = \sum_{s=1}^{k} (n_s / n) \nu_j^{(n_s)}, \ j = 1, \ldots, m. \tag{3.8}$$

---

[1] Полная регулярность вероятностей $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$ в случае счетного Ω означает, что $\mathrm{pr}_i^s > 0$, $\mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^s + 2\mathrm{pr}_i^s \neq 1$, $i = 1, 2, \ldots$, $s = 1, \ldots, k$.

Так как при $n \to \infty$ для всех $s = 1, \ldots, k$ $\left(\nu_1^{(n_s)}, \ldots, \nu_m^{(n_s)}\right) \xrightarrow{\text{п. н.}}$ $\xrightarrow{\text{п. н.}} (\mathrm{pr}_1^s, \ldots, \mathrm{pr}_m^s)$, то согласно (3.7), (3.8) при $n \to \infty$ $\nu_j^{(n)} - \mathrm{pr}_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, $j = 1, \ldots, m$, и, следовательно, при $n \to \infty$

$$\widehat{f}_j^{(n)} - f_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0, \ j = 1, \ldots, m, \tag{3.9}$$

где $f_j^{(n)} = \mathrm{pr}_1^{(n)} + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1}^{(n)} + 2\mathrm{pr}_j^{(n)}$, $\widehat{f}_j^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{j-1}^{(n)} + 2\nu_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, m$.

Согласно (3.7), (3.6) если для каждого $s = 1, \ldots, k$

$$f_j^s = \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1}^s + 2\mathrm{pr}_j^s < 1 \ (f_j^s > 1), \ j = 1, \ldots, m,$$

то для всех $n = 1, 2, \ldots$ в (3.9) $f_j^{(n)} < 1$ $(f_j^{(n)} > 1)$, $j = 1, \ldots, m$. Поэтому в (3.9) $f_1^{(n)}, \ldots, f_m^{(n)}$ при каждом $n = 2, 3, \ldots$ содержатся в интервалах $(0, 1)$ или $(1, 2)$ с некоторыми *независящими от* n окрестностями, а из сходимости в (3.9) следует, что *возможностная модель* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, каждого испытания *восстанавливается безошибочно на основе п. н. конечного числа наблюденных значений* $\widehat{f}_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, m$. Дело в том, что поскольку при $n \to \infty$ $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \left|\widehat{f}_j^{(n)} - f_j^{(n)}\right| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, то и $\widehat{f}_1^{(n)}, \ldots, \widehat{f}_m^{(n)}$ при всех достаточно больших n п. н. окажутся в $(0, 1)$ или в $(1, 2)$ вместе с соответствующими $f_1^{(n)}, \ldots, f_m^{(n)}$.

Сказанное проиллюстрируем для $e = 0.111$ и $m = 3$, обратившись к рис. 0.2.1, *б* и условившись считать, что на нем точками $\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k$ «представлены» вероятности $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, а «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ отождествлен с треугольником, точками которого «представлены» вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$. Короче говоря, пусть на рис. 0.2.1, *б* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \{\mathbf{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3),\ 1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0,$ $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1,\ 2\mathrm{pr}_1 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1\}$ — выпуклое открытое подмножество треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r} = \{\mathbf{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2,$ $\mathrm{pr}_3),\ 1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1\}$, где $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$, и согласно (3.1)

$$\mathbf{pr}^{(n)} = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\mathbf{pr}^s \in \mathrm{co}(\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k) \subset \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}, \tag{3.10}$$

где $\mathrm{co}(\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k)$ — выпуклая оболочка точек $\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k$. Поскольку согласно (3.2)

$$\boldsymbol{\nu}^{(n)} = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n)\boldsymbol{\nu}^{(n)s}, \text{ где } \boldsymbol{\nu}^{(n)s} = (\nu^{(n_s)}(\omega_1), \nu^{(n_s)}(\omega_2), \nu^{(n_s)}(\omega_3)),$$

$s = 1, \ldots, k$, $\boldsymbol{\nu}^{(n)} = (\nu^{(n)}(\omega_1), \nu^{(n)}(\omega_2), \nu^{(n)}(\omega_3))$ и согласно З. Б. Ч. (1.2) $\boldsymbol{\nu}^{(n)s} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \mathbf{pr}^s$, $\boldsymbol{\nu}^{(n)} - \mathbf{pr}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0$, то $\exists N\ \forall n \geqslant N$ $\boldsymbol{\nu}^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{\in} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, ибо в (3.10) $\mathrm{co}(\mathbf{pr}^1, \ldots, \mathbf{pr}^k)$ — замкнутое, а $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ — открытое подмножества $\mathbb{P}\mathrm{r}$. В этом случае вероятностная модель испытаний восстанавливается как отвечающая классу $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$; подробнее см. § 3.2 гл. 3, где рассмотрен *алгоритм эмпирического восстановления* Pr^1-, …, Pr^k-*измеримой возможности.*

4. Заключение

Приведенные результаты иллюстрируют одно из принципиальных отличий моделирований феномена *вероятностной* случайности вероятностными и возможностными методами: *в то время как при эмпирическом восстановлении вероятностной модели* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ *стохастического объекта последняя должна быть неизменна в течение всего времени наблюдений, при эмпирическом восстановлении возможностной модели* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ *этого же объекта его вероятностная модель во время наблюдений может произвольно эволюционировать в пределах одного из классов* $\{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\}$, $e \in [0,1]$. *Это отличие* [1] *существенно расширяет класс стохастических объектов, математические модели которых могут быть восстановлены эмпирически, расширяет за счет включения стохастических объектов, возможностные модели которых могут быть восстановлены эмпирически, а вероятностные — нет.*

Это расширение для случая $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ можно наглядно проиллюстрировать на рис. 0.2.1. Вероятностная модель стохастического объекта, которую можно оценить эмпирически, определяется точкой в треугольнике 0.2.1, *б*, *неподвижной в течение всего времени наблюдений*, причем при любом конечном числе испытаний вероятностная модель будет восстановлена приближенно. При эмпирическом восстановлении любой из четырех возможностных моделей, определяемых классами $\mathbb{P}_{(0.011)}$, $\mathbb{P}_{(0.101)}$, $\mathbb{P}_{(0.110)}$, $\mathbb{P}_{(0.111)}$, отмеченными на треугольнике 0.2.1, *а*, вероятность, контролирующая результаты наблюдений, может *произвольно изменяться от наблюдения к наблюдению, оставаясь в пределах одного из классов* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.101)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$.

Если выполнены условия полной регулярности (3.4), (3.5) вероятностей $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$: $\mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^s + 2\mathrm{pr}_i^s \neq 1$, $i = 1,2,3$, $\mathrm{pr}_3^s > 0$, $s = 1, \ldots, k$, то согласно (3.5) в треугольнике 0.2.1, *б* остаются класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ и класс $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.011)}$ ($\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ без его границы с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$). Любая из возможностных моделей, отвечающих одному из классов $\mathbb{P}_{(0.111)}$ или $\mathbb{P}'_{(0.011)}$, определится безошибочно на основе п. н. конечного числа наблюдений, если последние контролируются априори конечным числом различных вероятностей, содержащихся в $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ или $\mathbb{P}\mathrm{r}'_{(0.011)}$.

[1] Условие «устойчивости частот» для эмпирического восстановления вероятности заменяется на условие стохастической $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримости возможности P, $e \in (0,1)$.

Не следует думать, что возможностное моделирование непременно ориентировано на исследование стохастических объектов. На самом деле возможностные модели характерны для нечетких, но не стохастических объектов, см., например, [92]. Вместе с тем следует отметить, что возможностное моделирование оказалось эффективным в областях, характерных для вероятностного моделирования, таких, например, как оптимизация решений, прогнозирование, анализ и интерпретация данных измерительного эксперимента и т. п., см. гл. 6, 7, а также [16].

Возможностное моделирование нестохастических объектов рассмотрено в §§ 3.9, 3.10 гл. 3. Пространства с мерами *правдоподобия* и *доверия*, формально эквивалентными мерам возможности и необходимости, рассмотрены в §§ 5.2, 5.3 гл. 5 в связи с моделированием *субъективных суждений* в исследовательской и творческой деятельности.

Второе издание существенно переработано в целом. Новые результаты, полученные в процессе исследований по проектам РФФИ 08-07-00133-а и 11-07-00722, представлены в §§ 1.5.1–1.5.3, 1.16.1–1.16.6 гл. 1, в §§ 2.2.2, 2.3.2, 2.4.2, 2.4.4 гл. 2, в §§ 3.3.2–3.3.4, 3.4.1, 3.4.2, 3.6.1, 3.6.2, 3.9.1, 3.9.2, 3.10 гл. 3, в §§ 4.1.1–4.1.3, 4.4 гл. 4, в §§ 5.2.1–5.2.9, 5.3.1–5.3.4, 5.4.1–5.4.3 гл. 5, в §§ 6.2.1–6.2.3, 6.4.11–6.4.13, 6.5.1–6.5.6 гл. 6 и в § 7.4 гл. 7.

В заключение мне приятно еще раз выразить признательность моим ученикам и коллегам Е. Шалашникову, О. Мондрус, О. Фаломкиной, Д. Новицкому, А. Зубюку, А. Чуличкову и Д. Кольцову, принимавшим деятельное участие в обсуждении результатов, представленных в первом издании, и помогавшим оформить компьютерный вариант его рукописи.

За неоценимую помощь при подготовке компьютерного варианта рукописи второго издания, за обсуждение и компьютерное моделирование новых результатов, представленных во втором издании, моя искренняя благодарность Ю. Нагорному и Д. Балакину.

За компьютерное редактирование второго издания я благодарен О. Мондрус, А. Мошенцевой, Ю. Нагорному, С. Папилину и О. Фаломкиной.

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Хорошо известны два пути построения теории меры и интеграла, образующей математический фундамент теории вероятностей. Первый путь, известный как схема Лебега, начинается с конструкций меры, измеримого множества и измеримой функции и завершается построением интеграла на классе измеримых суммируемых функций. Другой путь, известный как схема Даниэля, начинается с конструкции элементарного интеграла, определенного на классе элементарных функций, затем последний расширяется, а интеграл продолжается на более широкий класс функций (см., например, [73]).

Математическим фундаментом теории возможностей, элементы которой представлены в этой главе, также является теория меры и интеграла, построенная по схеме, подобной схеме Даниэля, за основу которой взята конструкция «линейного счетно-аддитивного (абстрактного) интеграла».

В §§ 1.1–1.15 рассмотрены конструкции интеграла и меры, не вполне естественные для теории возможностей, но позволяющие проследить ее аналогии и различия с теорией вероятностей. Более короткий и вполне адекватный теории возможностей путь построения интеграла и меры рассмотрен в § 1.16 и в § 5.2 гл. 5.

1.1. Шкала значений возможности. Интеграл

Назовем шкалой $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, +, \bullet\big)$ (значений возможности) отрезок $[0,1]$ с естественной упорядоченностью, определенной бинарным отношением $\leqslant$, и с бинарными операциями сложения «$+$» и умножения «$\bullet$», определенными [1] равенствами

$$a + b = \max\{a,b\} \triangleq \max(a,b),\ a \bullet b = \min\{a,b\} \triangleq \min(a,b),\ a,b \in [0,1].$$

Так определенные операции коммутативны: $a + b = b + a$, $a \bullet b = b \bullet a$, ассоциативны: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, взаимно

[1] $\max(\cdot,\cdot)\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $\max(a,b) \triangleq \max\{a,b\}$, $\min(\cdot,\cdot)\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, $\min(a,b) \triangleq \min\{a,b\}$, $a,b \in [0,1]$. Шкала $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, +, \bullet\big)$ — полная дистрибутивная решетка, в которой решеточные операции суть $a \vee b = a + b$, $a \wedge b = a \bullet b$ [6].

дистрибутивны:

$$a \bullet (b \boldsymbol{+} c) = \min\{a, \max\{b, c\}\} = \\ = \max\{\min\{a, b\},\ \min\{a, c\}\} = (a \bullet b) \boldsymbol{+} (a \bullet c); \tag{1.1.1}$$

$$a \boldsymbol{+} (b \bullet c) = \max\{a, \min\{b, c\}\} = \\ = \min\{\max\{a, b\},\ \max\{a, c\}\} = (a \boldsymbol{+} b) \bullet (a \boldsymbol{+} c)$$

и монотонны:

$$a \leqslant b \Rightarrow \begin{cases} a \bullet c \leqslant b \bullet c, \\ a \boldsymbol{+} c \leqslant b \boldsymbol{+} c, \end{cases} \quad a,\ b,\ c \in \mathcal{L}. \tag{1.1.2}$$

Последовательность $\{a_n\} \subset \mathcal{L}$ назовем сходящейся, если $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \overset{\triangle}{=} \sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} a_n = \inf\limits_N \sup\limits_{n\geqslant N} a_n \overset{\triangle}{=} \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$, число a назовем ее пределом, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Заметим, что

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} (\mathop{\bullet}\limits_{k=n}^{\infty} a_k) = \mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{k=n}^{\infty} a_k)$;
- операции сложения «$\boldsymbol{+}$» и умножения «$\bullet$» непрерывны: если $a = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то

$$a \boldsymbol{+} b = \lim_{m,n\to\infty} (a_m \boldsymbol{+} b_n),\ a \bullet b = \lim_{m,n\to\infty} (a_m \bullet b_n);$$

- для любых $\{a_1, a_2, \ldots\}, \{b_1, b_2, \ldots\} \subset [0, 1]$

$$\mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} (a_m \boldsymbol{+} b_n)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} (\mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} (a_m \boldsymbol{+} b_n)) = (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} a_m) \boldsymbol{+} (\mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} b_n),$$

$$\mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} (a_m \bullet b_n)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} (\mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} (a_m \bullet b_n)) = (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} a_m) \bullet (\mathop{\bullet}\limits_{n=1}^{\infty} b_n),$$

$$\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} (a_m \bullet b_n)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} (a_m \bullet b_n)) = (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{m=1}^{\infty} a_m) \bullet (\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} b_n)$$

и т. п.

Обозначим Γ класс непрерывных строго монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, удовлетворяющих условиям $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, *являющийся группой относительно групповой операции* $\gamma \circ \gamma'(a) \overset{\triangle}{=} \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0, 1]$. Шкала $\mathcal{L}$ инвариантна относительно преобразований $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ в следующем смысле: для любой функции $\gamma(\cdot) \in \Gamma$:

$$a \in [0, 1] \Leftrightarrow \gamma(a) \in [0, 1],\ a \leqslant b \Leftrightarrow \gamma(a) \leqslant \gamma(b), \\ \gamma(a \boldsymbol{+} b) = \gamma(a) \boldsymbol{+} \gamma(b),\ \gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b),\ a, b \in [0, 1]; \tag{1.1.3}$$

0 и 1 суть наименьший и наибольший элементы шкалы, поскольку

$$0 \bullet a = \min\{0, a\} = 0,\quad 0 \boldsymbol{+} a = \max\{0, a\} = a, \\ 1 \bullet a = \min\{1, a\} = a,\quad 1 \boldsymbol{+} a = \max\{a, 1\} = 1,\ a \in [0, 1]. \tag{1.1.4}$$

Согласно свойствам (1.1.3) группа Γ преобразований $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to$ $\to [0,1]$ *определяет группу* $\overline{\Gamma}$ *автоморфизмов* $\gamma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ *шкалы* $\mathcal{L}$. Каждый автоморфизм $\gamma \in \overline{\Gamma}$ определяет *изоморфизм* $\gamma\colon \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ *шкалы* $\mathcal{L}$ *на шкалу* $\gamma\mathcal{L}$, согласно которому $\mathcal{L} \ni a \to \gamma(a) \in \gamma\mathcal{L}$, а отношение упорядоченности и бинарные операции в $\gamma\mathcal{L}$ *определены* в (1.1.3). Все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, разумеется, попарно изоморфны (эквивалентны).

Обозначим $\mathcal{L}(X)$ класс функций, определенных на X, со значениями в $\mathcal{L}$, содержащий:

1) вместе с каждой функцией $f(\cdot)$ функции $(a \bullet f)(\cdot)$, $a \in [0,1]$, $(a \bullet f)(x) \triangleq \min\{a, f(x)\} = a \bullet f(x)$, $x \in X$;

2) вместе с каждой парой функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ их сумму $(f_1 \mathbin{\boldsymbol{+}} f_2)(\cdot)$ и произведение $(f_1 \bullet f_2)(\cdot)$,

$$\left.\begin{aligned} (f_1 \mathbin{\boldsymbol{+}} f_2)(x) &\triangleq f_1(x) \mathbin{\boldsymbol{+}} f_2(x) = \max\{f_1(x),\ f_2(x)\}, \\ (f_1 \bullet f_2)(x) &\triangleq f_1(x) \bullet f_2(x) = \min\{f_1(x),\ f_2(x)\}, \end{aligned}\right\} \quad x \in X, \tag{1.1.5}$$

и, следовательно, любую их «линейную комбинацию» $\big((a_1 \bullet f_1) \mathbin{\boldsymbol{+}}$ $\mathbin{\boldsymbol{+}} (a_2 \bullet f_2)\big)(\cdot)$, $a_1, a_2 \in [0,1]$;

3) вместе с любой последовательностью функций $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot), \ldots$ функции

$$(\sup_n f_n)(x) \triangleq \left(\mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) \triangleq \mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x),$$
$$(\inf_n f_n)(x) \triangleq \left(\mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty} f_n\right)(x) \triangleq \mathop{\bullet}_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \inf_n f_n(x), \ x \in X, \tag{1.1.6}$$

и, следовательно, ее верхний $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_N \sup\limits_{n \geqslant N} f_n(x)$ и нижний $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} f_n(x)$, $x \in X$, пределы, а также — ее предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$, если последний существует;

4) вместе с каждой функцией $f(\cdot)$ функции $\gamma \circ f(\cdot)$, $\theta \circ f(\cdot)$, $\gamma \circ f(x) \triangleq \gamma(f(x))$, $\theta \circ f(x) \triangleq \theta(f(x))$, $x \in X$, где $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\theta(\cdot) \in \Theta$.

Определим на $\mathcal{L}(X)$ отношение упорядоченности, считая, что $f_1(\cdot) \leqslant f_2(\cdot)$, если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $x \in X$ [1)].

Определение 1.1.1. *Интеграл* $\mathrm{p}(\cdot)$ (p-интеграл) определим как *линейную счетно-аддитивную функцию* на $\mathcal{L}(X)$, принимающую значения в $\mathcal{L}$, т. е. такую, что $\forall\, a_1, a_2 \in \mathcal{L}$, $\forall\, f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$

$$\mathrm{p}\Big(\big((a_1 \bullet f_1) \mathbin{\boldsymbol{+}} (a_2 \bullet f_2)\big)(\cdot)\Big) = (a_1 \bullet \mathrm{p}(f_1(\cdot))) \mathbin{\boldsymbol{+}} (a_2 \bullet \mathrm{p}(f_2(\cdot))) \tag{1.1.7}$$

[1)] Класс $\mathcal{L}(X)$, как частично упорядоченное множество функций $f(\cdot)\colon X \to$ $\to [0,1]$, является полной дистрибутивной решеткой относительно решеточных операций $(f_1 \vee f_2)(\cdot) = (f_1 \mathbin{\boldsymbol{+}} f_2)(\cdot)$, $(f_1 \wedge f_2)(\cdot) = (f_1 \bullet f_2)(\cdot)$ [6, 8].

и $\forall\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots\} \subset \mathcal{L}(X)$

$$\mathrm{p}((\sup_n f_n)(\cdot)) = \mathrm{p}((\mathop{+}_{n=1}^{\infty} f_n)(\cdot)) = \mathop{+}_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \sup_n \mathrm{p}(f_n(\cdot))\,. \qquad (1.1.8)$$

Класс всех интегралов $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$.

Рассмотрим *свойства интеграла* $\mathrm{p}(\cdot)$. Пусть $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $h(x) = \max\{f_1(x),\ f_2(x)\}$, $x \in X$. Согласно условию (1.1.7) $\mathrm{p}(h(\cdot)) = \max\{\mathrm{p}(f_1(\cdot)),\ \mathrm{p}(f_2(\cdot))\}$. Следовательно, если $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, $x \in X$, то

$$\mathrm{p}(h(\cdot)) = \mathrm{p}(f_1(\cdot)) = \max\{\mathrm{p}(f_1(\cdot)), \mathrm{p}(f_2(\cdot))\} \geqslant \mathrm{p}(f_2(\cdot)), \qquad (1.1.9)$$

т. е. $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — *монотонно неубывающая функция.*

Пусть $\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots\} \subset \mathcal{L}(X)$ — *монотонно неубывающая* последовательность, т. е. $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$. Она поточечно сходится, ее предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sup\limits_n f_n(x)$, $x \in X$, содержится в $\mathcal{L}(X)$, а условия (1.1.8) и (1.1.9) фиксируют *непрерывность* $\mathrm{p}(\cdot)$ относительно такой сходимости: $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}((\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)) = \mathrm{p}((\sup\limits_n f_n)(\cdot)) = \sup\limits_n \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$. Последнее равенство следует из монотонности $\mathrm{p}(\cdot)$ (1.1.9).

Пусть $\{f_n(\cdot)\}$ — произвольная последовательность из $\mathcal{L}(X)$. Поскольку согласно (1.1.9) для любого $k \geqslant N$ $\mathrm{p}(f_k(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}((\inf\limits_{n\geqslant N} f_n)(\cdot))$, $N = 1, 2, \ldots$, то

$$\inf_{k\geqslant N} \mathrm{p}(f_k(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}((\inf_{n\geqslant N} f_n)(\cdot)), \quad N = 1, 2, \ldots, \qquad (1.1.10)$$

и, следовательно, в силу (1.1.8) и (1.1.10), $\sup\limits_N \mathrm{p}((\inf\limits_{n\geqslant \mathrm{N}} f_n)(\cdot)) = \mathrm{p}((\sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} f_n)(\cdot)) \equiv \mathrm{p}((\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)) \leqslant \sup\limits_N \inf\limits_{n\geqslant N} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$.

Аналогично, $\forall N = 1, 2, \ldots$ $\sup\limits_{k\geqslant N} \mathrm{p}(f_k(\cdot)) = \mathrm{p}((\sup\limits_{k\geqslant N} f_k)(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}((\inf\limits_N \sup\limits_{k\geqslant N} f_k)(\cdot))$ и, следовательно, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}((\limsup\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot))$.

В частности, *для всякой сходящейся последовательности* $f_n(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\mathrm{p}((\lim_{n\to\infty} f_n)(\cdot)) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)), \qquad (1.1.11)$$

т. е. $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — *полунепрерывная снизу функция.*

Итак, интеграл $\mathrm{p}(\cdot)$ обладает следующими свойствами.

Теорема 1.1.1. *Функция* $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$

1. *монотонно не убывает*: $f_1(\cdot) \geqslant f_2(\cdot) \Rightarrow \mathrm{p}(f_1(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(f_2(\cdot))$; *в частности,* $\mathrm{p}((f_1 \bullet f_2)(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(f_1(\cdot)) \bullet \mathrm{p}(f_2(\cdot))$, *хотя* $\mathrm{p}((f_1 \bullet f_2)(\cdot)) = f_1 \bullet \mathrm{p}(f_2(\cdot))$, *если* $f_1(x) = f_1 = \mathrm{const}$, $x \in X$;

2. *непрерывна относительно сходимости монотонной последовательности*: $f_n(\cdot) \leqslant f_{n+1}(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\Rightarrow$ $\mathrm{p}((\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$;
3. *полунепрерывна снизу*: $\mathrm{p}((\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$; $\mathrm{p}((\limsup\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$; *если, в частности,* $f(\cdot) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$, *то* $\mathrm{p}(f(\cdot)) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot))$;
4. *непрерывна в «точке»* $f(\cdot) = 1(\cdot), 1(x) = 1$, $x \in X$, : *если* $1(\cdot) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \mathrm{p}(1(\cdot))$; *далее будем считать, что* $\mathrm{p}(1(\cdot)) = 1$ (*условие нормировки*), $\mathrm{p}(0(\cdot)) = 0$.

Доказательство. Следует проверить лишь непрерывность $\mathrm{p}(\cdot)$ в «точке» $1(\cdot)$. Пусть при $n \to \infty$ $f_n(\cdot) \to 1(\cdot)$, тогда в силу монотонности $\mathrm{p}(\cdot)$ $f_n(\cdot) \leqslant 1(\cdot) \Rightarrow \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(1(\cdot))$ и, следовательно, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(1(\cdot))$. С другой стороны, в силу полунепрерывности $\mathrm{p}(\cdot)$ снизу $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}(1(\cdot))$, поэтому $\liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}(f_n(\cdot)) = \mathrm{p}(1(\cdot))$. ■

Интеграл $\mathrm{p}_Q(\cdot)$ по подмножеству $Q \subset X$, индикаторная функция которого $\chi_Q(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, определим равенством $\mathrm{p}_Q(f(\cdot)) = \mathrm{p}(\chi_Q \bullet f(\cdot))$.

Отметим следующие свойства интеграла $\mathrm{p}_Q(\cdot)$: $\forall\, \chi_A(\cdot)$, $\chi_B(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$

$$\mathrm{p}_Q(f(\cdot)) = \mathrm{p}((\chi_Q \bullet f)(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(\chi_Q(\cdot)) \bullet \mathrm{p}(f(\cdot));$$

$$\mathrm{p}_{A\bigcup B}(f(\cdot)) = \mathrm{p}(((\chi_A \boldsymbol{+} \chi_B) \bullet f)(\cdot)) = \mathrm{p}_A(f(\cdot)) \boldsymbol{+} \mathrm{p}_B(f(\cdot));$$

$$\mathrm{p}_{A\bigcap B}(f(\cdot)) = \mathrm{p}(((\chi_A \bullet \chi_B) \bullet f)(\cdot)) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{p}((\chi_A \bullet f)(\cdot)) \bullet \mathrm{p}((\chi_B \bullet f)(\cdot)) = \mathrm{p}_A(f(\cdot)) \bullet \mathrm{p}_B(f(\cdot)).$$

Отметим также, что $\forall\, f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ *интеграл* $\mathrm{p}_Q(f(\cdot))$ *есть счетно-аддитивная функция множества* Q: $\mathrm{p}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n}(f(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}_{Q_n}(f(\cdot))$, где $\chi_{Q_n}(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n}(\cdot) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{Q_n}(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$. Действительно, $\mathrm{p}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n}(f(\cdot)) = \mathrm{p}\left(\left(\left(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{Q_n}\right) \bullet f\right)(\cdot)\right) = \mathrm{p}\left(\left(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} (\chi_{Q_n} \bullet f)\right)(\cdot)\right) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{p}_{Q_n}(f(\cdot))$.

Наконец, нетрудно убедиться, что $\forall\, \gamma(\cdot) \in \Gamma$ $(\gamma * \mathrm{p})(f(\cdot)) \triangleq \gamma(\mathrm{p}((\gamma^{-1} \circ f)(\cdot)))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, есть p-интеграл, ибо, как нетрудно проверить, $(\gamma * \mathrm{p})((f_1 \boldsymbol{+} f_2)(\cdot)) = (\gamma * \mathrm{p})(f_1(\cdot)) \boldsymbol{+} (\gamma * \mathrm{p})(f_2(\cdot))$,

$(\gamma * \mathrm{p})((a \bullet f)(\cdot)) = a \bullet (\gamma * \mathrm{p})(f(\cdot))$ и $(\gamma * \mathrm{p})((\mathop{+}\limits_{n=1}^{\infty} f_n)(\cdot)) =$ $= \mathop{+}\limits_{n=1}^{\infty} (\gamma * \mathrm{p})(f_n(\cdot))$, $f(\cdot), f_i(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $i = 1, 2, \ldots$, $a \in [0, 1]$.

Пример 1.1.1. Пусть $\mathcal{L}(X)=\overline{\mathcal{L}}(X)$ — *класс всех функций* $X \to [0, 1]$ с бинарными операциями, определенными в (1.1.5). Определим интеграл $\mathrm{p}(f(\cdot))=\mathrm{p}_g(f(\cdot))$ как «скалярное произведение» фиксированной функции $g(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ на [1] $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$:

$$\mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min\{f(x), g(x)\} = \mathop{+}_{x \in X} (f(x) \bullet g(x)), \quad f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X). \tag{1.1.12}$$

$\mathrm{p}_g(\cdot)$ — линейная функция [2], ибо $\forall\ a_1, a_2 \in \mathcal{L}$, $\forall\ f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_g(((a_1 \bullet f_1) + (a_2 \bullet f_2))(\cdot)) &= \mathop{+}_{x \in X} \left[((a_1 \bullet f_1(x)) + (a_2 \bullet f_2(x))) \bullet g(x)\right] = \\
&= \mathop{+}_{x \in X} ((a_1 \bullet f_1(x) \bullet g(x)) + (a_2 \bullet f_2(x) \bullet g(x))) = \\
&= (\mathop{+}_{x \in X} (a_1 \bullet f_1(x) \bullet g(x))) + (\mathop{+}_{x \in X} (a_2 \bullet f_2(x) \bullet g(x))) = \\
&= (a_1 \bullet (\mathop{+}_{x \in X} (f_1(x) \bullet g(x)))) + (a_2 \bullet (\mathop{+}_{x \in X} (f_2(x) \bullet g(x)))) = \\
&= a_1 \bullet \mathrm{p}_g(f_1(\cdot)) + a_2 \bullet \mathrm{p}_g(f_2(\cdot)),
\end{aligned}$$

и *вполне аддитивная*, поскольку $\mathrm{p}_g\Big(\mathop{+}\limits_{j \in J} f_j(x)\Big) = \sup\limits_{x \in X} \min\big\{\sup\limits_{j \in J} f_j(x),$ $g(x)\big\} = \sup\limits_{j \in J} \sup\limits_{x \in X} \min\{f_j(x),\ g(x)\} = \sup\limits_{j \in J} \mathrm{p}_g(f_j(\cdot)) = \mathop{+}\limits_{j \in J} \mathrm{p}_g(f_j(\cdot))$, где $f_j(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, $j \in J$, — произвольное семейство функций.

Вместе с тем интеграл $\mathrm{p}_g(\cdot)$, как и в общем случае $\mathrm{p}(\cdot)$, лишь полунепрерывен снизу:

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_g\left((\liminf_{n \to \infty} f_n)(\cdot)\right) &= \sup_{x \in X} \min\left\{\sup_N \inf_{n \geqslant N} f_n(x),\ g(x)\right\} \leqslant \\
&\leqslant \sup_N \inf_{n \geqslant N} \left(\sup_{x \in X} \min\{f_n(x),\ g(x)\}\right) = \liminf_{n \to \infty} \mathrm{p}_g\,(f_n(\cdot)).
\end{aligned}$$

Наконец, согласно условию нормировки интеграла $\mathrm{p}(\cdot)$ функция $g(\cdot)$ в (1.1.12) должна удовлетворять условию $\sup\limits_{x \in X} g(\cdot) = 1$.

В § 1.9 будет показано, *что для продолженного на класс* $\overline{\mathcal{L}}(X)$ *интеграла* $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ *равенство* (1.1.12) *представляет его общее выражение*, *см. также пример* 1.2.2 и замечание 1.2.1.

---

[1] И, следовательно, $\mathrm{p}_{gQ}(f(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min\{\chi_Q(x), f(x), g(x)\} = \sup\limits_{x \in Q} \min\{f(x),$ $g(x)\}$.

[2] Содержательная интерпретация линейности $\mathrm{p}_g(\cdot)$ дана в § 1.12.2.

Заметим, что $\gamma * \mathrm{p}_g(f(\cdot)) \triangleq \gamma(\sup_{x\in X}\min\{\gamma^{-1}\circ f(x), g(x)\}) = \sup_{x\in X}\min\{f(x), \gamma\circ g(x)\} = \mathrm{p}_{\gamma\circ g}(f(\cdot))$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, $\mathrm{p}_{\underset{j\in J}{+} g_j}(f(\cdot)) = \underset{j\in J}{+}\mathrm{p}_{g_j}(f(\cdot))$ и $\mathrm{p}_{\underset{j\in J}{\bullet} g_j}(f(\cdot)) \leqslant \underset{j\in J}{\bullet}\mathrm{p}_{g_j}(f(\cdot))$, $f(\cdot)\in\overline{\mathcal{L}}(X)$.

1.2. Мера возможности. Определение, свойства

Чтобы определить меру возможности, следует конкретизировать содержимое класса $\mathcal{L}(X)$, включив в него индикаторные функции некоторых подмножеств X.

Лемма 1.2.1. *Пусть $\mathcal{A}_0$ — конечная или счетная совокупность некоторых подмножеств X, $\mathcal{A} = \sigma\mathcal{A}_0$ — минимальная σ-алгебра подмножеств X, содержащая все подмножества из $\mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}$ — σ-замыкание $\mathcal{A}_0$), $\mathcal{L}(X)$ — минимальный по включению класс функций $f(\cdot)\colon X\to[0,1]$, содержащий индикаторные функции $\chi_A(\cdot)\colon X\to\{0,1\}$ всех множеств $A\in\mathcal{A}_0$. Тогда $\mathcal{L}(X)$ — класс всех $\mathcal{A}$-измеримых функций $f(\cdot)\colon X\to[0,1]$.*

Доказательство. Так как для любых множеств $A_i\in\mathcal{A}_0$, $i=1,2,\ldots$, $\chi_{A_i}(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$, $i=1,2,\ldots$, то и индикаторные функции $\chi_{X\setminus A_i}(\cdot) = \theta\circ\chi_{A_i}(\cdot)$, $i=1,2,\ldots$, $\chi_{\bigcup_{i\in I}A_i}(\cdot) = (\overset{\infty}{\underset{i=1}{+}}\chi_{A_i})(\cdot)$, $\chi_{\bigcap_{i\in I}A_i}(\cdot) = (\overset{\infty}{\underset{i=1}{\bullet}}\chi_{A_i})(\cdot)$, где $I\subset\{1,2,\ldots\}$, содержатся в $\mathcal{L}(X)$, т. е. $\mathcal{L}(X)$ содержит индикаторные функции $\chi_A(\cdot)$ всех множеств $A\in\mathcal{A}$.

Следовательно, $\mathcal{L}(X)$ содержит и все $\mathcal{A}$-измеримые кусочно-постоянные функции $f_n(\cdot) = (\overset{n}{\underset{i=1}{+}}(c_i^{(n)}\bullet\chi_{A_i^{(n)}}))(\cdot)$, где $c_i^{(n)}\in[0,1]$, $A_i^{(n)}\in\mathcal{A}$, $A_i^{(n)}\cap A_j^{(n)}=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,\ldots,n$, $\bigcup_{i=1}^{n}A_i^{(n)} = X\in\mathcal{A}$, $n=1,2,\ldots$, а также $(\sup_n f_n)(\cdot)$, $(\inf_n f_n)(\cdot)$, $(\liminf_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$, $(\limsup_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$.

Чтобы увидеть, что $\mathcal{L}(X)$ — класс $\mathcal{A}$-измеримых функций, определенных на X и принимающих значения в $[0,1]$, заметим, что всякую $\mathcal{A}$-измеримую функцию $f(\cdot)$ можно представить в виде предела равномерно сходящейся последовательности кусочно-постоянных $\mathcal{A}$-измеримых функций. Например, последовательности

$$\underline{f}_n(x) = \overset{n}{\underset{k=1}{+}}\big(a_k^{(n)}\bullet\chi_{A_k^{(n)}}(x)\big),\ \overline{f}_n(x) = \overset{n}{\underset{k=1}{+}}\big(a_{k-1}^{(n)}\bullet\chi_{A_k^{(n)}}(x)\big),$$
$$\underline{f}_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}_n(x),\ n=1,2,\ldots,\ x\in X, \quad (1.2.1)$$

равномерно сходятся к $f(x)$, $x\in X$, если $A_1^{(n)} = \{x\in X,\ a_1^{(n)}\leqslant f(x)\leqslant a_0^{(n)}\}$, $A_k^{(n)} = \{x\in X,\ a_k^{(n)}\leqslant f(x) < a_{k-1}^{(n)}\}$, $k=2,3,\ldots,n$, $1=a_0^{(n)} > a_1^{(n)} > \ldots > a_n^{(n)} = 0$, и $\varepsilon^{(n)} = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\big(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}\big)\to 0$ при

$n \to \infty$, поскольку $\sup\limits_{x \in X} \big(f(x) - \underline{f}_n(x)\big) \leqslant \varepsilon^{(n)}$, $\sup\limits_{x \in X} \big(\overline{f}_n(x) - f(x)\big) \leqslant \varepsilon^{(n)}$. Поэтому $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, ибо $A_k^{(n)} \in \mathcal{A}$, $k = 1, \ldots, n$, и, следовательно, $\underline{f}_n(\cdot), \overline{f}_n(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$

Для завершения доказательства осталось заметить, что для любой последовательности $\mathcal{A}$-измеримых функций $\{f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots\} \subset \mathcal{L}(X)$ функции $(\sup\limits_n f_n)(\cdot)$, $(\inf\limits_n f_n)(\cdot)$, $(\liminf\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$ и $(\limsup\limits_{n\to\infty} f_n)(\cdot)$ $\mathcal{A}$-измеримы и принадлежат $\mathcal{L}(X)$. ■

Всякое множество $A \in \mathcal{A}$ назовем *событием*; последнее можно задать его индикаторной функцией (и. ф.) $\chi_A(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Определение 1.2.1. Мерой возможности, или, короче, возможностью, назовем функцию $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, определенную равенством $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{A}$, ее значение $\mathrm{P}(A) \in [0,1]$ назовем возможностью события $A \in \mathcal{A}$, шкалу $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet\big)$ назовем *шкалой значений возможности.*

Теорема 1.2.1. *Возможность* $\mathrm{P}(A)$*,* $A \in \mathcal{A}$*, обладает следующими свойствами.*

1. *Для любых* $A, B \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{p}((\chi_A \boldsymbol{+} \chi_B)(\cdot)) = \mathrm{P}(A) \boldsymbol{+} \mathrm{P}(B), \tag{1.2.2}$$

и, как следствие $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, *если* $A \subset B$ (*монотонность возможности*), *в частности*, $\mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \min\{\mathrm{P}(A),\ \mathrm{P}(B)\} = \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B)$*,* $A, B \in \mathcal{A}$*.*

2. *Возможность* $\mathrm{P}(\cdot)$ *счетно-аддитивна*: *для любой последовательности событий* $A_1, A_2, \ldots$

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sup_n \mathrm{P}(A_n) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n). \tag{1.2.3}$$

Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *и* $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, *то, как следствие счетной аддитивности и монотонности* $\mathrm{P}(\cdot)$, *получаем непрерывность* $\mathrm{P}(\cdot)$ *относительно такой сходимости*: $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_n \mathrm{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

3. $\mathrm{P}(\overline{A}) \leqslant \inf\limits_N \mathrm{P}\Big(\bigcup\limits_{n \geqslant N} A_n\Big) = \lim\limits_{N\to\infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup\limits_{n \geqslant N} A_n\Big) = \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *где* $\overline{A} = \bigcap\limits_N \bigcup\limits_{n \geqslant N} A_n$ — *верхний предел последовательности* $A_1, A_2, \ldots$; $\overline{A}$ — *событие, каждая точка которого принадлежит бесконечно многим из* $A_1, A_2, \ldots$;
$\mathrm{P}(\underline{A}) = \sup\limits_N \mathrm{P}\Big(\bigcap\limits_{n \geqslant N} A_n\Big) = \lim\limits_{N\to\infty} \mathrm{P}\Big(\bigcap\limits_{n \geqslant N} A_n\Big) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *где* $\underline{A} = \bigcup\limits_N \bigcap\limits_{n \geqslant N} A_n$ — *нижний предел последовательности* $A_1, A_2, \ldots$;

$\underline{A}$ — *событие, каждая точка которого принадлежит всем* $A_1, A_2, \ldots$, *исключая, быть может, конечное их число.*

Так как $\underline{A} \subset \overline{A}$, *то* $\mathrm{P}(\underline{A}) \leqslant \mathrm{P}(\overline{A})$.

Если последовательность $A_1, A_2, \ldots$ *сходится* [1)] *и* $A = \underline{A} = \overline{A} \stackrel{\triangle}{=} \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, *то* $\mathrm{P}(A) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *то есть возможность* $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ *полунепрерывна снизу. В частности, если* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, *то* $A = \bigcap\limits_n A_n$ *и* $\mathrm{P}(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *но если* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, *то* $A = \bigcup\limits_n A_n$ *и* $\mathrm{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

4. *Для любой сходящейся к* X *последовательности* $A_1, A_2, \ldots$ (*т. е. такой, что* $X = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n\geqslant N} A_n = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n\geqslant N} A_n$) *последовательность* $\mathrm{P}(A_1), \mathrm{P}(A_2), \ldots$ *сходится, и ее предел равен* $\mathrm{P}(X)$, $\mathrm{P}(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *ибо согласно свойству* 3. $\mathrm{P}(X) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, *а в силу монотонности* 1. $\mathrm{P}(\cdot)$ $\mathrm{P}(A_n) \leqslant \mathrm{P}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и поэтому* $\mathrm{P}(X) \geqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

В соответствии с соглашением о нормировке $\mathrm{p}(\cdot)$, *принятым в теореме* 1.1.1, $\mathrm{P}(X) = \mathrm{p}(1(\cdot)) = 1$ *и, следовательно,* $\forall A \in \mathcal{A}$ $\max\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(X \setminus A)\} = \mathrm{P}(A \cup (X \setminus A)) = \mathrm{P}(X) = 1$ *и* $\mathrm{P}(\varnothing) \stackrel{\triangle}{=} 0$.

Все утверждения 1.–4. этой теоремы следуют соответственно из утверждений 1.–4. теоремы 1.1.1. ■

Третье свойство возможности означает, что значение $\mathrm{P}(\varnothing)$ нельзя определить по непрерывности, поскольку возможность $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, не непрерывна при $A = \varnothing$; если $\varnothing = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, то $\mathrm{P}(\varnothing) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$, а при условии $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, и $A_n \downarrow \varnothing$, $n \to \infty$, получим $\mathrm{P}(\varnothing) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$. *Значение* $\mathrm{P}(\varnothing)$ *можно определить любым числом из* $[0, \inf\limits_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{P}(A)]$. При этом $\forall A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}(A \cup \varnothing) = \max\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(\varnothing)\} = \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A \cap \varnothing) \leqslant \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(\varnothing)\} = \mathrm{P}(\varnothing)$. Далее, если не оговорено противное, полагаем $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

Любую функцию $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, *обладающую свойствами, перечисленными в теореме* 1.2.1, *будем называть возможностью.*

Тройку $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *назовем пространством с возможностью.*

[1)] Последовательность $A_1, A_2, \ldots$ называется сходящейся, если ее *нижний предел* $\underline{A}$ совпадает с *ее верхним пределом* $\overline{A}$, $A = \underline{A} = \overline{A}$ называется ее пределом. Это определение эквивалентно определению поточечной сходимости последовательности индикаторных функций $\chi_{A_1}(\cdot), \chi_{A_2}(\cdot), \ldots$: $(\liminf\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n})(\cdot) \equiv \chi_{\underline{A}}(\cdot) = \chi_{\overline{A}}(\cdot) \equiv (\limsup\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n})(\cdot)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(\cdot) = \chi_A(\cdot)$.

Пример 1.2.1. Возвращаясь к интегралу $\mathrm{p}(\cdot) = \mathrm{p}_g(\cdot)$ (1.1.12), заметим, что в этом случае $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X и

$$\mathrm{P}_g(A) = \mathrm{p}_g(\chi_A(\cdot)) = \sup_{x\in A} g(x), \quad \mathrm{P}_g(\varnothing) = \sup_{x\in\varnothing} g(x) \overset{\triangle}{=} 0. \tag{1.2.4}$$

Здесь $g(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, причем $\sup\limits_{x\in X} g(x) = 1$. Согласно (1.2.4) $g(\cdot)$ естественно назвать *распределением* (*вполне аддитивной*) *возможности* $\mathrm{P}_g(\cdot)$, поскольку $g(x) = \mathrm{P}_g(\{x\})$, $x \in X$, а $\mathrm{p}_g(f(\cdot))$ назвать *значением* p-*интеграла от функции* $f(\cdot)$ *относительно меры* $\mathrm{P}_g(\cdot)$ *возможности.* В § 1.6 будет показано, что $\mathrm{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, является интегралом Лебега относительно возможности $\mathrm{P}(\cdot)$, определенной равенством $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{A}$. В § 1.9 будет показано, что *возможность* $\mathrm{P}(\cdot)$ *всегда может быть продолжена на алгебру* $\mathcal{P}(X)$ *всех подмножеств* X *и задана как* $\mathrm{P}_g(\cdot)$ *в* (1.2.4).

Пример 1.2.2. Если $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, то для любого $A \subset X$ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\bigcup\limits_{i:\, x_i\in A} \{x_i\}) = \sup\limits_{i:\, x_i\in A} \mathrm{P}(\{x_i\})$, а так как любую функцию $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ можно представить в виде $f(x) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} (f(x_i) \bullet \chi_{\{x_i\}}(x)) = \sup\limits_i \min\{f(x_i), \chi_{\{x_i\}}(x)\}$, $x \in X$, то, согласно определению 1.1.1,

$$\mathrm{p}(f(\cdot)) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} (f(x_i) \bullet \mathrm{p}(\chi_{\{x_i\}}(\cdot))) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{+}} (f(x_i) \bullet \mathrm{P}(\{x_i\})) = \mathrm{p}_g(f(\cdot)) \tag{1.2.5}$$

— общий вид интеграла $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to [0,1]$, (1.1.12), $g(\cdot) = \mathrm{P}(\{\cdot\})$.

Замечание 1.2.1. Если p-интеграл определить *априори* на классе $\overline{\mathcal{L}}(X)$ всех функций $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ как линейную, см. (1.1.7), и *вполне* аддитивную функцию: $\mathrm{p}((\sup\limits_{j\in J} f_j)(\cdot)) = \sup\limits_{j\in J} \mathrm{p}(f_j(\cdot))$, где X и J — произвольные множества, ср. с (1.1.8), то, поскольку $\forall f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ $f(x) = \sup\limits_{y\in X} \min\{f(y), \chi_{\{y\}}(x)\}$, $x \in X$, p-интеграл $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}(\sup\limits_{x\in X} \min\{f(x), \chi_{\{x\}}(\cdot)\}) = \sup\limits_{x\in X} \min\{f(x), \mathrm{p}(\chi_{\{x\}}(\cdot))\} = \sup\limits_{x\in X} \min(f(x), \mathrm{P}_g(\{x\})) = \mathrm{p}_g(f(\cdot))$, где $g(x) = \mathrm{P}_g(\{x\})$, $x \in X$, и $\mathrm{P}_g(A) = \mathrm{P}_g(\chi_A(\cdot)) = \sup\limits_{x\in A} g(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, см. примеры 1.1.1, 1.2.1. Такой путь построения интеграла и меры использован в § 1.16 при построении второго варианта теории возможностей и в § 5.2 при построении мер правдоподобия, доверия и интегралов.

Заметим в заключение, что $(\gamma * \mathrm{p})(\chi_A(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \gamma(\mathrm{p}((\gamma^{-1} \circ \chi_A)(\cdot))) = \gamma(\mathrm{p}(\chi_A(\cdot))) = \gamma(\mathrm{P}(A))$, $A \in \mathcal{A}$, и, в частности, $(\gamma * \mathrm{p}_g)(\chi_A(\cdot)) = \mathrm{P}_{\gamma\circ g}(A) = \sup\limits_{x\in A}(\gamma \circ g(x))$, $A \in \mathcal{P}(X)$.

1.3. Нечеткие множества, элементы, события

В 1965 г. Л. А. Заде предложил новый подход к моделированию нечеткости, основанный на понятии нечеткого множества [158]. Как известно, любое подмножество A множества X можно задать его индикаторной функцией (и. ф.) $\chi_A(\cdot)\colon X \to \{0,1\}$, определив $\chi_A(x)=1$ для $x\in A$ и $\chi_A(x)=0$ для $x\in X\setminus A$, $x\in X$. Нечеткое (под)множество A в [158] также определяется его и. ф. $\mu_A(\cdot)\colon X\to[0,1]$, названной *функцией принадлежности* (ф. п.), значение которой $\mu_A(x)\in[0,1]$ интерпретируется как «степень включения» $x\in X$ в A. Тот факт, что любой элемент $x\in X$ может принадлежать нечеткому множеству A лишь «отчасти», позволяет моделировать сложные объекты в терминах характеристик, значения которых свойственны им лишь «до некоторой степени», «частично».

На связь теории нечетких множеств с теорией возможностей впервые указал Л. Заде в работе [159].

В теории нечетких множеств Л. А. Заде операции над нечеткими множествами определены как операции над их ф. п. согласно следующим правилам:

а) $\mu_A(x)=\mu_B(x)\colon A=B$;
б) $\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\colon A\subset B$;
в) $\mu_{X\setminus A}(x)=1-\mu_A(x)$;
г) $\mu_{A\cup B}(x)=\max\{\mu_A(x),\,\mu_B(x)\}$;
д) $\mu_{\bigcup\limits_\alpha A_\alpha}(x)=\sup\limits_\alpha \mu_{A_\alpha}(x)$;
е) $\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\,\mu_B(x)\}$;
ж) $\mu_{\bigcap\limits_\alpha A_\alpha}(x)=\inf\limits_\alpha \mu_{A_\alpha}(x),\ x\in X$. (1.3.1)

Здесь A, B — нечеткие (под)множества X, значения функций принадлежности, записанных в левых частях равенств и *определяющих теоретико-множественные операции* $A=B$, $A\subset B$, $X\setminus A$, $A\bigcup B,\ldots$ $\ldots,\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ *над нечеткими множествами*, определяются в правых.

Заметим, что в теории нечетких множеств Л. А. Заде принимаются следующие условия (нормировки): $\mu_X(x)=1$, $\mu_\varnothing(x)=0$, $x\in X$, хотя согласно правилам (1.3.1) $\mu_{(X\setminus A)\cup A}(x)\leqslant 1$, $\mu_{(X\setminus A)\cap A}(x)\geqslant 0$, $x\in X$, т. е., вообще говоря, $(X\setminus A)\cup A\neq X$, $(X\setminus A)\cap A\neq\varnothing$.

Обсудим вкратце вопрос о моделировании нечеткости методами теории возможностей, рассматриваемой в монографии, предваряя более детальное обсуждение этого вопроса в §§ 1.10 – 1.12.

1.3.1. Нечеткие множества. Нечеткость может быть охарактеризована в терминах возможности, если значение $\mu_A(x)$ интерпретировать как величину $g^A(x)$ «возможности покрытия» элемента $x\in X$ нечетким множеством A, т. е. если считать, что $g^A(x)\triangleq \mathrm{P}(x\in A)$ — возможность нечеткого события $x\in A$, а $g^A(\cdot)\colon X\to[0,1]$ — индикаторная функция (одноточечного покрытия). При такой интерпретации нечеткое множество следует рассматривать как аналог случайного множества в теории вероятностей. В общих чертах эту точку зрения можно пояснить следующим образом. Пусть $(Y,\mathcal{B},\mathrm{P}_Y)$ — пространство с возможностью, $A^{\cdot}: Y \to \mathcal{A}$ — отображение, ставящее в соответствие каждому $y \in Y$ множество $A^y \subset X$, причем так, что для любого $x \in X$ множество $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\} \in \mathcal{B}$ (измеримо); A_x — множество тех $y \in Y$, при которых элемент $x \in X$ покрывается множеством [1] A^y, $g^A(x) \triangleq \mathrm{P}_Y(A_x)$, $x \in X$.

Поскольку, с одной стороны, множество тех $x \in X$, при которых $A_x \in \mathcal{B}$, вообще говоря, может оказаться пустым, а с другой стороны, как показано в § 1.9, возможность P_Y в $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}_Y)$ всегда может быть продолжена на класс $\mathcal{P}(Y)$ всех подмножеств Y, далее, рассматривая нечеткие множества, условимся считать, что $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$ и, как следствие, не будем касаться вопросов $\mathcal{B}$- и $\mathcal{A}$-измеримости множеств $A_x \subset Y$, $x \in X$, и $A^y \subset X$, $y \in Y$, не относящихся к существу дела.

Отображение $A^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$ *назовем нечетким множеством, определенным на* $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y)$, *принимающим значения в* $\mathcal{P}(X)$, *возможность* [2] $g^{A^{\cdot}}(x) = \mathrm{P}_Y(A_x)$, *как функцию* $x \in X$, $g^{A^{\cdot}}(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, *назовем его индикаторной функцией отдноточечного покрытия* (*и. ф. о. п.*), *ее значение* $g^{A^{\cdot}}(x)$ *будем интерпретировать как возможность* (*нечеткого*) *события* $x \in A^{\cdot}$, *т. е. как возможность покрытия элемента* $x \in X$ *нечетким множеством* $A \subset X$.

Пусть $A^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$, $B^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$ — нечеткие множества, тогда $A^{\cdot} \cup B^{\cdot} = C^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$, где $C^y = A^y \cup B^y$, $y \in Y$, $A^{\cdot} \cap B^{\cdot} = D^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$, $D^y = A^y \cap B^y$, $y \in Y$, суть, по определению, их объединение и, соответственно, пересечение, причем $C_x = \{y \in Y,\ x \in A^y \cup B^y\} = A_x \cup B_x$, $D_x = \{y \in Y,\ x \in A^y \cap B^y\} = A_x \cap B_x$, $x \in X$. Следовательно, как в (1.3.1, *г*), $g^{C^{\cdot}}(x) = \mathrm{P}(A_x \cup B_x) = \max\{\mathrm{P}(A_x), \mathrm{P}(B_x)\} = \max\{g^{A^{\cdot}}(x), g^{B^{\cdot}}(x)\}$ — возможность, по крайней мере, одного из покрытий $x \in A^{\cdot}$ или $x \in B^{\cdot}$, но, в отличие от (1.3.1, *е*), возможность того, что $x \in A^{\cdot}$ и $x \in B^{\cdot}$, $g^{D^{\cdot}}(x) = \mathrm{P}(A_x \cap B_x) \leqslant \min\{\mathrm{P}(A_x), \mathrm{P}(B_x)\} = \min\{g^{A^{\cdot}}(x), g^{B^{\cdot}}(x)\}$, $x \in X$.

Нечеткое множество $A^{\cdot}$ содержится в нечетком множестве $B^{\cdot}$, $A^{\cdot} \subset B^{\cdot}$, если для каждого $y \in Y$ $A^y \subset B^y$. Так как при этом для каждого $x \in X$ событие $x \in A^{\cdot}$ влечет событие $x \in B^{\cdot}$, $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\} \subset \{y \in Y,\ x \in B^y\} = B_x$, то $g^{A^{\cdot}}(x) \leqslant g^{B^{\cdot}}(x)$, $x \in X$. Обратное, разумеется, неверно: *соотношение* $g^{A^{\cdot}}(x) \leqslant g^{B^{\cdot}}(x)$, $x \in X$, *не означает, что* $A \subset B$, см. § 1.13.

[1] Разумеется, вообще говоря, в $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}_Y)$ σ-алгебра $\mathcal{B}$ может и не быть столь обширной, чтобы содержать множества $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\}$, $x \in X$, и, следовательно, и. ф. о. п. $g^A(\cdot)$ не обязательно существует.

[2] Далее, чтобы «степень $\mu_A(x)$ включения» x в A отличать от «возможности покрытия» x нечетким множеством $A^{\cdot}$, последнюю будем обозначать $g^{A^{\cdot}}(x)$.

Определим нечеткое множество $X \setminus A^{\cdot}$, дополнительное к $A^{\cdot}$, как отображение $Y \to \mathcal{P}(X)$, ставящее в соответствие каждому $y \in Y$ множество $X \setminus A^y$. Тогда $(X \setminus A)_x = \{y \in Y,\ x \in X \setminus A^y\} = Y \setminus A_x$, $x \in X$, и, следовательно, $g^{X \setminus A^{\cdot}}(x) = \mathrm{P}_Y(Y \setminus A_x)$, $g^{A^{\cdot} \cup (X \setminus A^{\cdot})}(x) = \max\{\mathrm{P}_Y(A_x), \mathrm{P}_Y(Y \setminus A_x)\} = \mathrm{P}(Y) = g^X(x) = 1$, $x \in X$, причем, в отличие от (1.3.1,*в*), и. ф. $g^{A^{\cdot}}(\cdot)$, вообще говоря, *не определяет и. ф.* $g^{X \setminus A^{\cdot}}(\cdot)$, и, в частности, равенство (1.3.1), вообще говоря, не выполняется; $g^{X \setminus A^{\cdot}}(x)$ — возможность события $x \notin A^{\cdot}$ (непокрытия x нечетким множеством $A^{\cdot}$).

Наконец, разность $C^{\cdot} = A^{\cdot} \setminus B^{\cdot}$ нечетких множеств $A^{\cdot}$ и $B^{\cdot}$ есть функция $C^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, $C^y = A^y \setminus B^y$, $y \in Y$. Это нечеткое множество можно представить и как $A^y \cap (X \setminus B^y)$, $y \in Y$; $g^{A^{\cdot} \setminus B^{\cdot}}(x)$ — возможность того, что $x \in A^{\cdot}$ и $x \neq B^{\cdot}$.

Множество $\Gamma_A = \{(y, x) \in Y \times X, y \in A_x\} \equiv \{(y, x) \in Y \times X,\ x \in A^y\}$ назовем *графиком нечеткого множества* $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, см. рис. 1.3.1.

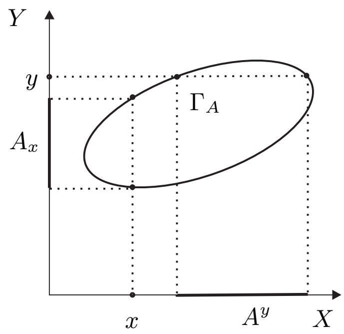


Рис. 1.3.1. Отображение $A^{\cdot} : Y \to \mathcal{P}(X)$, его график $\Gamma_A \subset Y \times X$ и обратное к $A^{\cdot}$ отображение $A_{\cdot} : X \to \mathcal{P}(Y)$

1.3.2. Нечеткие элементы. Важным частным случаем понятия нечеткого множества является понятие *нечеткого элемента*, аналогичное понятию случайного элемента в теории вероятностей.

Пусть опять $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}_Y)$ — пространство с возможностью, $(X, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств X и задана функция $q(\cdot) \colon Y \to X$, такая, что для любого множества $A \in \mathcal{A}$, $q^{-1}(A) = \{y \in Y,\ q(y) \in A\} \in \mathcal{B}$. Функция $q(\cdot)$ называется $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$-измеримой и задает то, что называется *нечетким элементом*, обозначим его ξ, определенным на $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}_Y)$ и принимающим значения в $(X, \mathcal{A})$. Отображение $q(\cdot) \colon Y \to X$ индуцирует на $\mathcal{A}$ возможность P_X: $\mathrm{P}_X(A) \triangleq \mathrm{P}_Y(q^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{A}$, и тем самым определяет пространство с возможностью $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P}_X)$ как образ $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}_Y)$.

Нечеткий элемент ξ *определяет* на $(X, \mathcal{A})$ возможность P^ξ: $\mathrm{P}^\xi(\xi \in A) \triangleq \mathrm{P}_X(A)$, $A \in \mathcal{A}$, назовем его *каноническим для пространства с возможностью* $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P}_X) = (X, \mathcal{A}, \mathrm{P}^\xi)$.

Чтобы не касаться вопросов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$-измеримости, условимся далее, как в § 1.3.1, считать, что $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$, и определим функцию $g^\xi(x) = \mathrm{P}^\xi(\xi = x) \triangleq \mathrm{P}_Y(q^{-1}(\{x\}))$, $x \in X$, называемую *распределением возможностей значений нечеткого элемента ξ, или короче — распределением нечеткого элемента ξ*. Значение $g^\xi(x)$ есть возможность равенства $\xi = x$, а $\mathrm{P}^\xi(\xi \in A) = \mathrm{P}^\xi(\xi \in \bigcup\limits_{x \in A} \{x\}) = \sup\limits_{x \in A} g^\xi(x)$ — возможность (нечеткого) события $\xi \in A$, $A \in \mathcal{P}(X)$.

Определим нечеткий элемент η, *канонический*[1)] *для* $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y)$, задав *его распределение* $g^\eta(\cdot)\colon Y \to [0,1]$ *равенством* $g^\eta(y) = \mathrm{P}^\eta(\eta = y) = \mathrm{P}_Y(\{y\})$, $y \in Y$, *согласно которому* $\mathrm{P}_Y(B) = \mathrm{P}_Y(\bigcup\limits_{y \in B} \{y\}) = \sup\limits_{y \in B} \mathrm{P}_Y(\{y\}) = \sup\limits_{y \in B} g^\eta(y) = \mathrm{P}^\eta(\eta \in B)$, $B \in \mathcal{P}(Y)$, см. пример 1.2.1.

Понятие *канонического нечеткого элемента* позволяет единообразно охарактеризовать конструкции нечеткого элемента, пространства с возможностью и нечеткого множества, а именно:

▶ нечеткий элемент ξ есть образ $q(\eta)$ канонического нечеткого элемента η при отображении $q(\cdot)\colon Y \to X$, канонический для $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^\xi)$, $\mathrm{P}^\xi(A) = \sup\limits_{x \in A} g^\xi(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, где $g^\xi(x) = \sup\limits_{y \in q^{-1}(\{x\})} g^\eta(y)$, $x \in X$;

▶ нечеткое множество есть образ A^η канонического нечеткого элемента η при отображении $A^{\boldsymbol{\cdot}}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, $g^{A^\eta}(x) = \mathrm{P}^\eta(\eta \in A_x) = \sup\limits_{y \in A_x} g^\eta(y)$, $x \in X$, см. рис. 1.3.2.

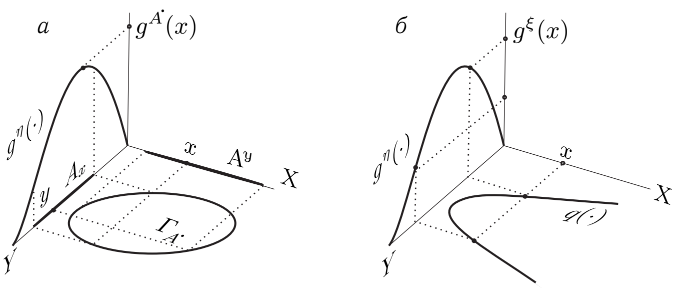


Рис. 1.3.2. *а*) Нечеткое множество A^η, его график $\Gamma_{A^{\boldsymbol{\cdot}}}$, его индикаторная функция $g^{A^{\boldsymbol{\cdot}}}(\cdot)$, множества A_x, A^y, распределение $g^\eta(\cdot)$ нечеткого элемента η. *б*) Нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$, значение его распределения $g^\xi(\cdot)$ в точке $x \in X$

Пусть $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$ и $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^\xi)$ — пространства с возможностями, для которых каноническими являются нечеткие элементы η

1) Канонический для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y)$ нечеткий элемент *определяет* P_Y.

и соответственно $\xi = q(\eta)$, $\mathrm{P}^{\xi}(\xi \in A) = \mathrm{P}^{\eta}(q(\eta) \in A) = \sup\limits_{y \in q^{-1}(A)} g^{\eta}(y)$, $A \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathrm{P}^{\xi}(A) = \sup\limits_{x \in A} g^{\xi}(x)$ — возможность события $\xi \in A$, $A \in \mathcal{P}(X)$, где $g^{\xi}(x) = \mathrm{P}^{\xi}(\xi = x) = \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in q^{-1}(x)) = \sup\limits_{y \in q^{-1}(x)} g^{\eta}(y)$ — возможность события $\xi = x$, равная возможности события $\eta \in q^{-1}(x) \triangleq \triangleq \{y \in Y,\ q(y) = x\}$, $x \in X$, а $g^{A^{\eta}}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(x \in A^{\eta}) = \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in A_x) \equiv \equiv \mathrm{P}_Y(A_x) = \sup\limits_{y \in A_x} g^{\eta}(y)$ — возможность события $x \in A^{\eta}$, т. е. возможность покрытия $x \in X$ нечетким множеством A^{η}.

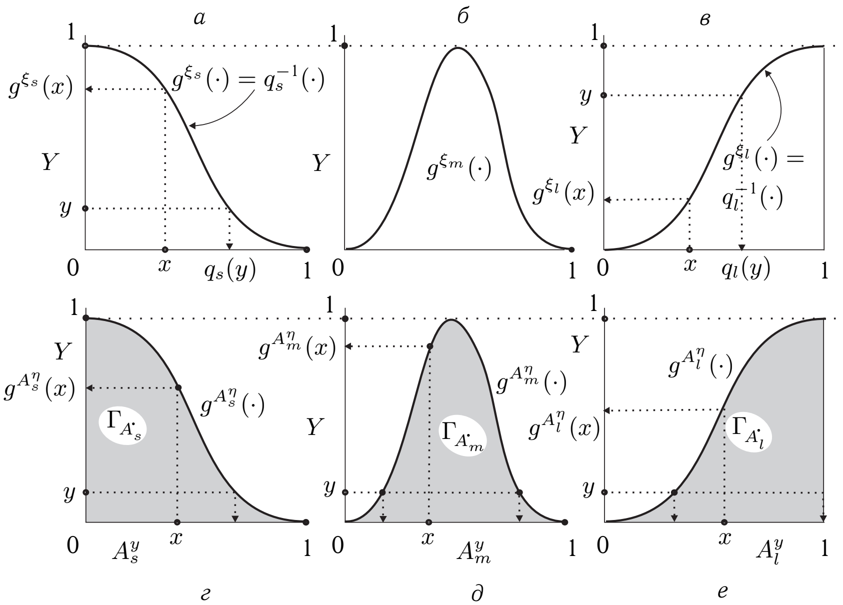


Рис. 1.3.3. Нечеткие элементы $\xi_s = q_s(\eta)$, $\xi_l = q_l(\eta)$ заданы функциями $q_s(\cdot): Y \to X = [0,1]$, $q_l(\cdot)\colon Y \to X = [0,1]$, графики которых приведены на рис. *а* и *в* соответственно, где показаны также и распределения $g^{\xi_s}(\cdot) = q_s^{-1}(\cdot)$, $g^{\xi_l}(\cdot) = q_l^{-1}(\cdot)$. Функция $q_m(\cdot)\colon Y \to X$, которая определила бы нечеткий элемент ξ_m, распределенный так, как показано на рис. *б*, не существует. На рис. *г*, *д*, *е* приведены графики $\Gamma_{A^{\cdot}_s}$, $\Gamma_{A^{\cdot}_m}$, $\Gamma_{A^{\cdot}_l}$ и индикаторные функции $g^{A^{\cdot}_s}(\cdot), g^{A^{\cdot}_m}(\cdot)$ и $g^{A^{\cdot}_l}(\cdot)$ одноточечного покрытия нечетких множеств A_s, A_m, A_l соответственно. В данном случае $g^{A_s^{\eta}}(x) = g^{\xi_s}(x) = q_s^{-1}(x)$ — возможность покрытия элемента $x \in X = [0,1]$ нечетким множеством A_s^{η} и возможность равенства $\xi_s = x$. Аналогично $g^{A_m^{\eta}}(\cdot) = g^{\xi_m}(\cdot)$ и $g^{A_l^{\eta}}(\cdot) = g^{\xi_l}(\cdot)$

На рис. 1.3.3 приведены примеры нечетких элементов ξ_s — «короткий», ξ_m — «средний», ξ_l — «длинный» и нечетких множеств A_s^{η} «коротких элементов X», A_m^{η} — «средних», A_l^{η} — «длинных». Нечеткие элементы ξ_s, ξ_l и нечеткие множества A_s^{η}, A_m^{η}, A_l^{η} определены на пространстве с возможностью $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y)$, в котором $Y = [0,1]$ и возможность P_Y задана распределением $g^{\eta}(y) = y$, $y \in [0,1]$, канонического для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y)$ нечеткого элемента η. Нечеткий элемент ξ_m, распределенный согласно рис. 1.3.3, *б*, *не может быть определен на* $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y)$ (не является *функцией* η). Понятно, что нечеткий элемент — важный частный случай нечеткого множества.

1.3.3. Нечеткие события. Обе точки зрения на нечеткость можно согласованно представить, используя интеграл $\mathrm{p}_{g^{\xi}}(\cdot)$ (1.1.12). Если A — «четкое» подмножество X, $\chi_A(\cdot)$ — его и. ф., то возможность включения $\xi \in A$ (нечеткого события $\xi \in A$) определяется величиной $\mathrm{P}^{\xi}(\xi \in A) = \mathrm{p}_{g^{\xi}}(\chi_A(\cdot)) = \sup\limits_{x \in A} g^{\xi}(x) = \sup\limits_{x \in X} \min\{g^{\xi}(x), \chi_A(x)\}$. Соответственно если $A^{\cdot}$ — нечеткое множество и события $\xi = x$ и $x \in A^{\cdot}$ *независимы* при любом $x \in X$, см. § 1.12.2, то значение $\mathrm{p}_{g^{\xi}}(g^{A^{\cdot}}(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min\{g^{\xi}(x), g^{A^{\cdot}}(x)\}$ *определит возможность нечеткого события*, *состоящего в том*, что нечеткий элемент ξ покрывается нечетким множеством $A^{\cdot}$. В случае независимости ξ и $A^{\cdot}$ значение min равно возможности того, что $\xi = x$ *и* $x \in A^{\cdot}$, величина sup определяет возможность включения $\xi \in A^{\cdot}$. Если нечеткий элемент ξ таков, что $x_0 \in X$ — единственное возможное его значение, т. е. если $g^{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0, \end{cases}$ $x \in X$, то ξ, по существу, «четкий» элемент $x_0 \in X$, и возможность его покрытия нечетким множеством $A^{\cdot}$, равная $\sup\limits_{x \in X} \min\{g^{\xi}(x), g^{A^{\cdot}}(x)\} = g^{A^{\cdot}}(x_0)$, совпадает с возможностью покрытия элемента $x_0 \in X$ нечетким множеством $A^{\cdot}$.

На самом деле возможности многих событий, в которых «участвуют» нечеткие множества, не выражаются через их и. ф. о. п. Характерным примером могут служить события, связанные с последовательностями нечетких множеств и их пределами.

Пусть $\{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots\}$ — последовательность нечетких множеств $A_i^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, $i = 1, 2, \ldots$ *Нечеткие множества* $\overline{A^{\cdot}} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geqslant n=1} A_k^{\cdot}$ *и* $\underline{A^{\cdot}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k \geqslant n} A_k^{\cdot}$ *назовем верхним и соответственно нижним ее пределами*; *если* $\overline{A^{\cdot}} = \underline{A^{\cdot}}$, *то последовательность* $\{A_1^{\cdot}, A_2^{\cdot}, \ldots\}$ *назовем сходящейся, а нечеткое множество* $A^{\cdot} = \overline{A^{\cdot}} = \underline{A^{\cdot}}$ *— ее пределом.*

Для и. ф. $\overline{A^{\cdot}}$ и $\underline{A^{\cdot}}$ найдем: $g^{\overline{A}}(x) = \mathrm{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k \geqslant n} A_{kx}) \leqslant \inf\limits_{n} \sup\limits_{k \geqslant n} g^{A_k}(x)$, $g^{\underline{A}}(x) = \mathrm{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k \geqslant n} A_{kx}) \leqslant \sup\limits_{n} \inf\limits_{k \geqslant n} g^{A_k}(x)$, $x \in X$, и лишь для монотонной последовательности $A_1^{\cdot} \subset A_2^{\cdot} \subset \ldots$ $g^{\overline{A}}(x) = g^{\underline{A}}(x) = g^{A}(x) = \sup\limits_{n} g^{A_n}(x)$, $x \in X$, поскольку в этом случае $\overline{A^{\cdot}} = \underline{A^{\cdot}} = A^{\cdot} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^{\cdot}$.

Еще одним примером являются события, рассматриваемые в модели наблюдений и регистрации нечетких множеств, исследованной в § 7.4 гл. 7. Пусть нечеткий элемент $\xi = a(\eta)$ ненаблюдаем и, следовательно, нечеткие события $\xi \in B$, $B \in \mathcal{P}(X)$, не могут быть зарегистрированы, но наблюдаемо нечеткое множество A^η и могут быть зарегистрированы, например, события $A^\eta \cap B \neq \varnothing$ и $A^\eta \subset B$, $A^\eta \neq \varnothing$, равное $A^\eta \cap (X \setminus B) = \varnothing$, $A^\eta \neq \varnothing$. Тогда возможность $\mathrm{P}^\eta(A^\eta \cap B \neq \varnothing) = \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap B \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ \bigcup\limits_{x \in B} (A^y \cap \{x\}) \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\bigcup\limits_{x \in B} \{y \in Y,\ A^y \cap \{x\} \neq \varnothing\}) = \sup\limits_{x \in B} \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap \{x\} \neq \varnothing\}) = \sup\limits_{x \in B} g^A(x)$ выражается через и. ф. о. п. A^η, а возможность

$$\mathrm{P}^\eta(A^\eta \cap (X \setminus B) = \varnothing,\ A^\eta \neq \varnothing) = \mathrm{P}_Y(\{y \in A_X,\ A^y \cap (X \setminus B) = \varnothing\}) = \\ = \mathrm{P}_Y(A_X \setminus \{y \in A_X,\ A^y \cap (X \setminus B) \neq \varnothing\}) = \\ = \mathrm{P}_Y(A_X \setminus \bigcup_{x \in X \setminus B} \{y \in A_X,\ A^y \cap \{x\} \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(A_X \setminus A_{X \setminus B}), \quad (1.3.2)$$

где

$$A_X = \bigcup_{x \in X} A_x = \{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing\},\ A_{X \setminus B} = \bigcup_{x \in X \setminus B} A_x, \qquad (1.3.3)$$

— не выражается, подробнее см. § 7.4 гл. 7.

1.4. Мера необходимости. Определение, свойства

Рассмотрим шкалу $\widetilde{\mathcal{L}} = ([0,1], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\bullet})$, дуально изоморфную [1] $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, +, \bullet\big)$, с операцией сложения «$\widetilde{+}$», определенной как «min», и операцией умножения «$\widetilde{\bullet}$», определенной как «max», с наименьшим и наибольшим элементами $\widetilde{0} = 1$ и $\widetilde{1} = 0$ и упорядоченностью, определенной отношением $\widetilde{\leqslant}$, обратным естественному. При таком определении все свойства операций «$\widetilde{+}$» и «$\widetilde{\bullet}$» и элементов $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$ могут быть сформулированы как соотношения (1.1.1), (1.1.2), (1.1.4), если всюду $+$, $\bullet$ и $\leqslant$ заменить соответственно на $\widetilde{+}$, $\widetilde{\bullet}$ и на $\widetilde{\leqslant}$, а именно: $\widetilde{a} \widetilde{\bullet} (\widetilde{b} \widetilde{+} \widetilde{c}) = (\widetilde{a} \widetilde{\bullet} \widetilde{b}) \widetilde{+} (\widetilde{a} \widetilde{\bullet} \widetilde{c})$, $\widetilde{a} \widetilde{+} (\widetilde{b} \widetilde{\bullet} \widetilde{c}) = (\widetilde{a} \widetilde{+} \widetilde{b}) \widetilde{\bullet} (\widetilde{a} \widetilde{+} \widetilde{c})$, $\widetilde{a} \widetilde{\bullet} \widetilde{0} = \widetilde{0}$, $\widetilde{a} \widetilde{+} \widetilde{0} = \widetilde{a}$, $\widetilde{a} \widetilde{\bullet} \widetilde{1} = \widetilde{a}$, $\widetilde{a} \widetilde{+} \widetilde{1} = \widetilde{1}$, $\widetilde{a} \widetilde{\leqslant} \widetilde{b} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{a} \widetilde{\bullet} \widetilde{c} \widetilde{\leqslant} \widetilde{b} \widetilde{\bullet} \widetilde{c}, \\ \widetilde{a} \widetilde{+} \widetilde{c} \widetilde{\leqslant} \widetilde{b} \widetilde{+} \widetilde{c}, \end{cases}$ $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{0} \widetilde{<} \widetilde{1}$, и можно считать, что $\widetilde{\mathcal{L}} = \big(\widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]}, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\bullet}\big)$, где $\widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]} = [0,1]$. Нетрудно убедиться, что группа Γ автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}$ является таковой и для шкалы $\widetilde{\mathcal{L}}$: $\gamma \widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \Gamma$.

[1] Упорядоченное множество $\widetilde{\mathcal{L}}$ называется дуальным $\mathcal{L}$, если оно определено на тех же, что и $\mathcal{L}$, элементах отношением порядка $\widetilde{\leqslant}$, обратным $\leqslant$, определившему $\mathcal{L}$, а именно, $a \leqslant b \Leftrightarrow b \widetilde{\leqslant} a$, $a, b \in [0,1]$, [6].

Класс $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ функций на X со значениями в $\widetilde{\mathcal{L}}$ определим аналогично тому, как определен класс $\mathcal{L}(X)$, и подобно условиям (1.1.5) будем считать, что $\forall\, \widetilde{f}_1(\cdot), \widetilde{f}_2(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ $(\widetilde{f}_1 \mathbin{\widetilde{+}} \widetilde{f}_2)(x) = \widetilde{f}_1(x) \mathbin{\widetilde{+}} \widetilde{f}_2(x) = \min\{\widetilde{f}_1(x), \widetilde{f}_2(x)\} = \widetilde{\max}\{\widetilde{f}_1(x), \widetilde{f}_2(x)\}$, $(\widetilde{f}_1 \mathbin{\widetilde{\bullet}} \widetilde{f}_2)(x) = \widetilde{f}_1(x) \mathbin{\widetilde{\bullet}} \widetilde{f}_2(x) = \max\{\widetilde{f}_1(x), \widetilde{f}_2(x)\} = \widetilde{\min}\{\widetilde{f}_1(x), \widetilde{f}_2(x)\}$, $x \in X$, и соответственно вместо (1.1.6) $\big(\widetilde{\sum_{n=1}^{\infty}}{}^{+} \widetilde{f}_n\big)(\cdot) = \big(\inf_n \widetilde{f}_n\big)(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$, $\big(\widetilde{\bullet}_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n\big)(\cdot) = \big(\sup_n \widetilde{f}_n\big)(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$, если $\{\widetilde{f}_1(\cdot), \widetilde{f}_2(\cdot), \ldots\} \subset \widetilde{\mathcal{L}}(X)$.

Определение 1.4.1. Определим интеграл $\mathrm{n}(\cdot)$ (n-интеграл) как линейную счетно-аддитивную функцию на $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$, принимающую значения в $\widetilde{\mathcal{L}}$, т. е. такую, что

$$\begin{gathered}\forall\, \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2 \in \widetilde{\mathcal{L}},\ \forall\, \widetilde{f}_1(\cdot), \widetilde{f}_2(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)\\ \mathrm{n}(((\widetilde{a}_1 \mathbin{\widetilde{\bullet}} \widetilde{f}_1) \mathbin{\widetilde{+}} (\widetilde{a}_2 \mathbin{\widetilde{\bullet}} \widetilde{f}_2))(\cdot)) = (\widetilde{a}_1 \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathrm{n}(\widetilde{f}_1(\cdot))) \mathbin{\widetilde{+}} (\widetilde{a}_2 \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathrm{n}(\widetilde{f}_2(\cdot))),\\ \forall\, \{\widetilde{f}_1(\cdot), \widetilde{f}_2(\cdot), \ldots\} \subset \widetilde{\mathcal{L}}(X) \qquad\qquad (1.4.1)\\ \mathrm{n}\big((\inf_n \widetilde{f}_n)(\cdot)\big) = \mathrm{n}\big(\big(\widetilde{\sum_{n=1}^{\infty}}{}^{+} \widetilde{f}_n\big)(\cdot)\big) = \widetilde{\sum_{n=1}^{\infty}}{}^{+} \mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_n \mathrm{n}(\widetilde{f}_n(\cdot)).\end{gathered}$$

Мерой необходимости, или просто необходимостью, назовем функцию $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, ее значение $\mathrm{N}(A) = \mathrm{n}\big(\widetilde{\chi}_A(\cdot)\big)$, где $\widetilde{\chi}_A = \theta \circ \chi_{X \setminus A}(\cdot)$, назовем необходимостью события $A \in \mathcal{A}$. Шкалу $\widetilde{\mathcal{L}} = \big([0,1], \mathrel{\widetilde{\leqslant}}, \widetilde{+}, \widetilde{\bullet}\big)$ назовем шкалой значений необходимости.

Теорема 1.4.1. *Функция* $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ $\ \forall\, \{\widetilde{f}_t(\cdot)\} \subset \widetilde{\mathcal{L}}(X)$

1. *монотонно не убывает*: *если* $\widetilde{f}_1(\cdot) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \widetilde{f}_2(\cdot)$, *то* $\mathrm{n}(\widetilde{f}_1(\cdot)) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \mathrm{n}(\widetilde{f}_2(\cdot))$;
2. *непрерывна относительно сходимости монотонной последовательности*: $\widetilde{f}_t(\cdot) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \widetilde{f}_{t+1}(\cdot)$, $t = 1, 2, \ldots$, $\Rightarrow \mathrm{n}\big(\lim\limits_{t\to\infty} \widetilde{f}_t(\cdot)\big) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{n}(\widetilde{f}_t(\cdot)) = \inf\limits_t \mathrm{n}(\widetilde{f}_t(\cdot))$;
3. *полунепрерывна сверху*: $\mathrm{n}\big((\limsup\limits_{t\to\infty} \widetilde{f}_t)(\cdot)\big) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \limsup\limits_{t\to\infty} \mathrm{n}(\widetilde{f}_t(\cdot))$, $\mathrm{n}\big((\liminf\limits_{t\to\infty} \widetilde{f}_t)(\cdot)\big) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \liminf\limits_{t\to\infty} \mathrm{n}\big(\widetilde{f}_t(\cdot)\big)$;
4. *непрерывна в «точке»* $\widetilde{f}(\cdot) = \widetilde{1}(\cdot)$, $\widetilde{1}(x) = 0 = \widetilde{1}$, $x \in X$, *т. е. для любой последовательности* $\{\widetilde{f}_1(\cdot), \widetilde{f}_2(\cdot), \ldots\}$, *сходящейся к* $\widetilde{1}(\cdot)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{n}\big(\widetilde{f}_t(\cdot)\big) = \mathrm{n}\big(\widetilde{1}(\cdot)\big)$, *причем далее будем считать*, *что* $n(\widetilde{1}(\cdot)) \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{1} = 0$ (*условие нормировки*), $\mathrm{n}\big(\widetilde{0}(\cdot)\big) = \widetilde{0} = 1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1.1. ■

Теорема 1.4.2. *Имеют место следующие свойства* $\mathrm{N}(\cdot)$:

1. *Аддитивность, монотонность*: $\mathrm{N}(A \cap B) = \min\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\} = \mathrm{N}(A) \widetilde{+} \mathrm{N}(B) \Rightarrow (A \subset B \Rightarrow \mathrm{N}(A) \leqslant \mathrm{N}(B)) \Rightarrow \mathrm{N}(A \cup B) \widetilde{\leqslant} \max\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\} = \mathrm{N}(A) \widetilde{\bullet} \mathrm{N}(B)$.
2. *Счетная аддитивность*: $\mathrm{N}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf_n \mathrm{N}(A_n) = \widetilde{\sum_{n=1}^{\infty}}{}^{+} \mathrm{N}(A_n)$. *Если* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *и поэтому* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \triangleq \lim_{n\to\infty} A_n$, *то из счетной аддитивности и монотонности* $\mathrm{N}(\cdot)$ *следует непрерывность* $\mathrm{N}(\cdot)$ *относительно такой сходимости*: $\mathrm{N}(A) = \inf_n \mathrm{N}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(A_n)$.
3. *В общем случае, если* $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, *то*

$$\mathrm{N}(A) \widetilde{\leqslant} \inf_N \sup_{n \geqslant N} \mathrm{N}(A_n) = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{N}(A_n), \tag{1.4.2}$$

   т. е. $\mathrm{N}(\cdot)$ *полунепрерывна сверху.*
4. *Для любой сходящейся к пустому множеству* $\varnothing$ *последовательности* $A_1, A_2, \ldots$ (*т. е. такой, что* $\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geqslant N} A_n = \varnothing$) *предел последовательности* $\mathrm{N}(A_1), \mathrm{N}(A_2), \ldots$ *существует и равен* $\mathrm{N}(\varnothing)$, *т. е. необходимость* $\mathrm{N}(\cdot)$ *непрерывна в* $\varnothing$, $\mathrm{N}(\varnothing) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(A_n)$. *Далее будем считать, что* $\mathrm{N}(\varnothing) = 0 = \widetilde{1}$ (*условие нормировки*) *и, следовательно, для любого* $A \in \mathcal{A}$ $\min\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(X \setminus A)\} = \mathrm{N}(A \cap (X \setminus A)) = \mathrm{N}(\varnothing) = 0$ *и* $\mathrm{N}(X) \triangleq 1 = \widetilde{0}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.2.1. ∎

Любую функцию $\mathrm{N}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, *обладающую свойствами, отмеченными в теореме* 1.4.2, *будем называть необходимостью.*

Тройку $(X, \mathcal{A}, \mathrm{N})$ *назовем пространством с необходимостью.*

Пример 1.4.1. Пусть $\widetilde{\mathcal{L}}(X) = \widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$ — класс всех функций[1] $X \to [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X. Тогда функция $n_{\widetilde{h}}(\cdot) \colon \widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}(X) \to [0, 1]$,

$$\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max\{\widetilde{f}(x), \widetilde{h}(x)\} = \widetilde{\sum_{x \in X}}{}^{+} (\widetilde{f}(x) \widetilde{\bullet} \widetilde{h}(x)), \ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}(X), \tag{1.4.3}$$

где $\widetilde{h}(\cdot)$ — произвольная функция $X \to \widetilde{\mathcal{L}}$, удовлетворяет условиям определения 1.4.1 и является интегралом, если $\inf_{x \in X} \widetilde{h}(x) = \widetilde{1} = 0$;

[1] $\widetilde{\widetilde{\mathcal{L}}}$ — класс всех функций, операции над которыми определены как в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}$.

$\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{0}(\cdot)) = \widetilde{0} = 1$, $\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{1}(\cdot)) = \widetilde{1} = 0$. Соответственно необходимость

$$\mathrm{N}_{\widetilde{h}}(A) = \inf_{x\in X} \max\{\widetilde{\chi}_A(x), \widetilde{h}(x)\} = \begin{cases} \inf\limits_{x\in X\setminus A} \widetilde{h}(x), & \text{если } A \neq X, \\ 1, & \text{если } A = X, \end{cases} \quad A \in \mathcal{P}(X), \tag{1.4.4}$$

где $\widetilde{\chi}_A(\cdot) = \theta \circ \chi_{X\setminus A}(\cdot)$ и $\inf\limits_{x\in\varnothing} \widetilde{h}(x) \triangleq 1$. Согласно (1.4.4) *функцию* $\widetilde{h}(\cdot)$ *назовем распределением* $\mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, так как $\widetilde{h}(x) = \mathrm{N}_{\widetilde{h}}(X \setminus \{x\})$, $x \in X$, и $\mathrm{N}_{\widetilde{h}}(A) = \mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\bigcup\limits_{x\in A}\{x\}) = \mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\bigcap\limits_{x\in X\setminus A}(X\setminus\{x\})) = \inf\limits_{x\in X\setminus A} N_{\widetilde{h}}(X\setminus\{x\}) = \inf\limits_{x\in X\setminus A} \widetilde{h}(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, а $\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot))$ назовем значением интеграла от функции $\widetilde{f}(\cdot)$ относительно меры $\mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\cdot)$ необходимости. В § 1.6 будет показано, что n-интеграл $\mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot))$, $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$, есть интеграл Лебега относительно необходимости $\mathrm{N}(\cdot)$, определенной равенством $\mathrm{N}(A) = \mathrm{n}(\widetilde{\chi}_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{A}$.

На самом деле $n_{\widetilde{h}}(\cdot)$ в (1.4.3) и $\mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\cdot)$ в (1.4.4) суть общие выражения для интеграла $n(\cdot)$ и меры $\mathrm{N}(\cdot)$, продолженных на класс $\overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$ всех функций $X \to \widetilde{\mathcal{L}}$ и — на класс $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X соответственно, см. § 1.9 и § 5.2.2 гл. 5.

Пример 1.4.2. Если $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, то для любого $A \subset X$ $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(\bigcap\limits_{i:\, x_i\in X\setminus A} (X \setminus \{x_i\})) = \inf\limits_{i:\, x_i\in X\setminus A} \mathrm{N}(X \setminus \{x_i\}) = \inf\limits_{i:\, x_i\in X\setminus A} \widetilde{h}(x_i)$, $N(\varnothing) = \inf\limits_i \widetilde{h}(x_i) = 0$, а так как для любой функции $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}$ $\widetilde{f}(x) = \inf\limits_i \max\{\widetilde{f}(x_i), \widetilde{\chi}_{X\setminus\{x_i\}}(x)\})$, $x \in X$, то согласно определению 1.4.1

$$\mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_i \max\{\widetilde{f}(x_i), \mathrm{n}(\widetilde{\chi}_{X\setminus\{x_i\}}(\cdot))\} = \inf_i \max\{\widetilde{f}(x_i), \mathrm{N}(X \setminus \{x_i\})\} = \\ = \inf_i \max\{\widetilde{f}(x_i), \widetilde{h}(x_i)\},\ \widetilde{h}(x_i) = \mathrm{N}(X \setminus \{x_i\}),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{1.4.5}$$

— *общий вид интеграла* $n(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to [0, 1]$ в этом случае.

Заметим в заключение, что $\forall\gamma(\cdot) \in \Gamma$ $(\gamma * \mathrm{n})(\widetilde{f}(\cdot)) \triangleq \gamma(\mathrm{n}((\gamma^{-1}\circ\widetilde{f})(\cdot)))$, $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$, — n-интеграл, $(\gamma * \mathrm{n})(\widetilde{\chi}_A(\cdot)) = \gamma \circ \mathrm{N}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, и, в частности, $(\gamma * \mathrm{n}_{\widetilde{h}})(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf\limits_{x\in X} \max\{\widetilde{f}(x), \gamma \circ \widetilde{h}(x)\} = \mathrm{n}_{\gamma\circ\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot))$, $\widetilde{f}(\cdot) \in \overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$, $(\gamma * \mathrm{n}_{\widetilde{h}})(\widetilde{\chi}_A(\cdot)) = \inf\limits_{x\in X\setminus A} \gamma \circ \widetilde{h}(x) = \mathrm{N}_{\gamma\circ\widetilde{h}}(A) = \gamma \circ \mathrm{N}_{\widetilde{h}}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, где $\widetilde{\chi}_A(\cdot) = \theta \circ \chi_{X\setminus A}(\cdot) = \chi_A(\cdot)$, $\theta(\cdot) \in \Theta$.

1.5. Отношения согласованности P- и N-мер, p- и n-интегралов и их свойства

Поскольку шкалы $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ определены на одних и тех же элементах $[0, 1]$, между ними можно формально установить взаимно однозначное соответствие $\theta\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, $\theta^{-1}\colon \widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$, $\theta \in \overline{\Theta}$, называемое *дуальным* *изоморфизмом*, определяемым любой функцией $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ из *класса* Θ *непрерывных*, *строго монотонных функций*, *удовлетворяющих условиям* $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, согласно которому $\forall\, a$ $\mathcal{L} \ni a \Leftrightarrow \theta(a) \in \widetilde{\mathcal{L}}$. При этом, как нетрудно проверить, $\theta(0) = \widetilde{0}$, $\theta(1) = \widetilde{1}$, $\theta(a + b) = \theta(a) \mathbin{\widetilde{+}} \theta(b)$, $\theta(a \bullet b) = \theta(a) \mathbin{\widetilde{\bullet}} \theta(b)$, $a \leqslant b \Leftrightarrow \theta(a) \mathrel{\widetilde{\leqslant}} \theta(b)$, $\theta^{-1}(a \mathbin{\widetilde{+}} b) = \theta^{-1}(a) + \theta^{-1}(b)$, $\theta^{-1}(a \mathbin{\widetilde{\bullet}} b) = \theta^{-1}(a) \bullet \theta^{-1}(b)$ и $a \mathrel{\widetilde{\leqslant}} b \Leftrightarrow \theta^{-1}(a) \leqslant \theta^{-1}(b)$, $a, b \in [0,1]$.

В ряде случаев удобно считать, что $\theta(\theta(x)) = x$, $x \in [0,1]$, этим свойством обладает, например, $\theta(x) = (1 - x^{\alpha})^{1/\alpha}$, $x \in [0,1]$, $\alpha > 0$. Такие функции называются *антитонными*, а в силу последнего их свойства — *инволюциями*.

Если считать, что $\theta\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, то $\theta(a + b) = \theta(a) \bullet \theta(b)$, $\theta(a \bullet b) = \theta(a) + \theta(b)$ и $a \leqslant b \Leftrightarrow \theta(a) \geqslant \theta(b)$, а если $\theta\colon \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, то $\theta(a \mathbin{\widetilde{+}} b) = \theta(a) \mathbin{\widetilde{\bullet}} \theta(b)$, $\theta(a \mathbin{\widetilde{\bullet}} b) = \theta(a) \mathbin{\widetilde{+}} \theta(b)$ и $a \mathrel{\widetilde{\leqslant}} b \Leftrightarrow \theta(a) \mathrel{\widetilde{\geqslant}} \theta(b)$, $a, b \in [0,1]$. В этом случае функция $\theta(\cdot) \in \Theta$ определяет дуальный автоморфизм $\theta \in \overline{\Theta}$ на $\mathcal{L}$ и на $\widetilde{\mathcal{L}}$. Если, кроме того, $\theta(\theta(a)) = a$, $a \in [0,1]$, то определяемый $\theta(\cdot)$ дуальный автоморфизм *называется инволюцией*.

1.5.1. Согласованность мер $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$ и интегралов $\mathrm{p}(\cdot)$ и $\mathrm{n}(\cdot)$. Между парами $\mathrm{p}(\cdot)$, $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{n}(\cdot)$, $\mathrm{N}(\cdot)$, априори никак не связанными, *можно установить формальную зависимость*, зафиксировав

► дуальный изоморфизм $\theta\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ между шкалами $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ их значений и его интерпретацию как нечеткого отрицания, согласно которой $\forall\, A \in \mathcal{A}$ равенства

$$\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A)),\ \mathrm{P}(A) = \theta^{-1}(\mathrm{N}(X \setminus A)) \tag{1.5.1}$$

интерпретируются как «необходимость A» = «*невозможность* $X \setminus A$», «возможность A» = «*ненеобходимость* $X \setminus A$», $A \in \mathcal{A}$;

► дуальный изоморфизм $\theta\circ\colon \mathcal{L}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ между классами $\mathcal{L}(X)$ и $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ и $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}$, определив $\widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ f(\cdot)$, где $\widetilde{f}(x) = \theta \circ f(x) = \theta(f(x))$ — *невозможность равенства* $\xi = x$, если $f(\cdot) = f^{\xi}(\cdot)$, или — *невозможность покрытия* $x \in X$ нечетким множеством $\dot{A}$, если $f(\cdot) = f^{A}(\cdot)$;

► дуальный изоморфизм $\theta*\colon \mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) \to \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{L}}(X))$ между классами $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ интегралов $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{L}}(X))$ интегралов $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, определив

$$\begin{aligned}
&\mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) = \theta * \mathrm{p}(f(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \theta(\mathrm{p}(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))),\\
&\mathrm{p}(f(\cdot)) = \theta^{-1} * \mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \theta^{-1}(\mathrm{n}(\theta \circ f(\cdot))),\\
&f(\cdot) = \theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot) \in \mathcal{L}(X),\ \widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X).
\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Нетрудно убедиться, что равенства (1.5.1) связывают возможность и необходимость. В частности, если $\mathrm{P}(\cdot)$ — возможность, то $\mathrm{N}(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j)) = \theta(\mathrm{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty}(X \setminus B_j))) = \theta(\sup_j \mathrm{P}(X \setminus B_j)) = = \inf_j \theta(\mathrm{P}(X \setminus B_j)) = \inf_j \mathrm{N}(B_j)$. Аналогично $\mathrm{p}(\cdot)$ и $\mathrm{n}(\cdot)$, связанные равенствами (1.5.2), одновременно суть либо интегралы, либо — нет. Если, например, $\mathrm{p}(\cdot)$ — линейная и счетно-аддитивная функция $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, то $\mathrm{n}(\widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}(\widetilde{a}_j \widetilde{\bullet} \widetilde{f}_j)(\cdot)) = \theta(\mathrm{p}(\theta^{-1} \circ (\widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}(\widetilde{a}_j \widetilde{\bullet} \widetilde{f})(\cdot)))) = =\theta(\mathrm{p}(\sum_{j=1}^{\infty}(\theta^{-1}(\widetilde{a}_j) \bullet \theta^{-1} \circ \widetilde{f}_i)(\cdot))) = \theta(\sum_{j=1}^{\infty}(\theta^{-1}(a_j) \bullet \mathrm{p}(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}_j)(\cdot))) = = \widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}(\widetilde{a}_j \widetilde{\bullet} \theta(\mathrm{p}(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}_j)(\cdot))) = \widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}(\widetilde{a}_j \widetilde{\bullet} \mathrm{n}(\widetilde{f}_j(\cdot)))$ и, следовательно, $\mathrm{n}(\cdot)$ — линейная и счетно-аддитивная функция $\widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$.

Меры $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$ и интегралы $\mathrm{p}(\cdot)$ и $\mathrm{n}(\cdot)$, при некотором $\theta(\cdot) \in \Theta$ *формально* связанные равенствами (1.5.1) и (1.5.2), назовем *дуальными*. Однако если $\mathrm{p}(\cdot)$, $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ и $\mathrm{n}(\cdot)$, $(X, \mathcal{A}, \mathrm{N})$ *должны охарактеризовать нечеткую модель одного и того же объекта*, *то интегралы и меры* $\mathrm{p}(\cdot)$, $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{n}(\cdot)$, $\mathrm{N}(\cdot)$ *должны быть согласованы по существу*.

Определение 1.5.1. Возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ и необходимость $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ назовем

▶ *согласованными*, $\mathrm{P}(\cdot) <\sim> \mathrm{N}(\cdot)$, если $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}(A) \geqslant \mathrm{P}(B) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathrm{N}(X \setminus A) \leqslant \mathrm{N}(X \setminus B)$, $\mathrm{P}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{N}(X \setminus A) = 0$, $\mathrm{P}(B) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathrm{N}(X \setminus B) = 1$;

▶ *вполне согласованными*[1] (или *дуальными*, *дуально согласованными*), $\mathrm{P}(\cdot) <\approx> \mathrm{N}(\cdot)$, если $\exists \theta(\cdot) \in \Theta$ $\forall A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A))$ (и соответственно $\forall A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}(A) = \theta^{-1}(\mathrm{N}(X \setminus A))$).

Заметим, что, согласно определению 1.5.1,

▶ любая *согласованность* мер $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$ инвариантна относительно (независимых) преобразований шкал $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$, и $\widetilde{\mathcal{L}} \to \gamma'\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma' \in \Gamma$, их значений, причем $\mathrm{P}(\cdot) <\approx> \mathrm{N}(\cdot) \Rightarrow \mathrm{P}(\cdot) <\sim> \mathrm{N}(\cdot)$;

▶ если $\mathrm{P}(\cdot) <\sim> \mathrm{N}(\cdot)$, то $\forall A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}(A) < 1 \Rightarrow \mathrm{P}(X \setminus A) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{N}(A) = 0$, то есть[2] «$A$ возможно» $\Rightarrow$ «$X \setminus A$ абсолютно возможно» $\Leftrightarrow \Leftrightarrow$ «A не необходимо»; $\mathrm{N}(A) > 0 \Rightarrow \mathrm{N}(X \setminus A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(A) = 1$, то есть «$A$ необходимо» $\Rightarrow$ «$X \setminus A$ не необходимо» $\Leftrightarrow$ «A абсолютно возможно»; наконец, $\mathrm{N}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{P}(X \setminus A) = 0$, $\mathrm{N}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(X \setminus A) = 1$, то есть «$A$ абсолютно необходимо» $\Leftrightarrow$ «$X \setminus A$ невозможно», «A не необходимо» $\Leftrightarrow$ «$X \setminus A$ абсолютно возможно».

---

[1] В главах 5, 6, 7, посвященных приложениям, как правило, $\mathrm{P}(\cdot) <\approx> \mathrm{N}(\cdot)$, поскольку рассматриваются нечеткие модели стохастических объектов, см. § 2.4.2 гл. 2.

[2] Модальности «A абсолютно возможно $\Leftrightarrow \mathrm{P}(A) = 1$», «$A$ возможно $\Leftrightarrow 0 < \mathrm{P}(A) < 1$» и «$A$ невозможно $\Leftrightarrow \mathrm{P}(A) = 0$» инвариантны относительно преобразований $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \Gamma$; модальности «A абсолютно необходимо $\Leftrightarrow \mathrm{N}(A) = 1$», «$A$ необходимо $\Leftrightarrow 0 < \mathrm{N}(A) < 1$» и «$A$ не необходимо $\Leftrightarrow \mathrm{N}(A) = 0$» инвариантны относительно преобразований $\widetilde{\mathcal{L}} \to \gamma\widetilde{\mathcal{L}}$, $\gamma \in \Gamma$.

Заметим, наконец, что если $\mathrm{P}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}(\cdot)$, то необходимость (возможность) любого события с точностью до преобразования из Θ определяется возможностью (необходимостью) противоположного события, и *нечеткая модель объекта может быть охарактеризована возможностями* (*или необходимостями*) *событий* A и $X \setminus A$, $A \in \mathcal{A}$, *если же* $\mathrm{P}(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}(\cdot)$, *то* модель объекта следует *рассматривать как пространство* $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P}, \mathrm{N})$ *с двумя мерами*, причем меры P и N могут быть и *несогласованными*, если «неполна информация о модели объекта».

Пример 1.5.1. Рассмотрим согласованность $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$ в случае $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{x_i\})$, $\mathrm{n}_i = \mathrm{N}(X \setminus \{x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}(\cdot) \Leftrightarrow \mathrm{p}_i \geqslant \mathrm{p}_j \Leftrightarrow \mathrm{n}_i \leqslant \mathrm{n}_j, \\ &\mathrm{p}_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{n}_i = 0,\ \mathrm{p}_j = 0 \Leftrightarrow \mathrm{n}_j = 1,\ i, j = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}(\cdot) \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_j \Leftrightarrow \mathrm{n}_i < \mathrm{n}_j, \\ &\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_j \Leftrightarrow \mathrm{n}_i = \mathrm{n}_j,\ \mathrm{p}_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{n}_i = 0,\ \mathrm{p}_j = 0 \Leftrightarrow \mathrm{n}_j = 1,\ i, j = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Действительно, так как $X \setminus A = X \setminus \bigcup_{i:\, x_i \in A} \{x_i\} = \bigcap_{i:\, x_i \in A} (X \setminus \{x_i\})$, то $\mathrm{N}(X \setminus A) = \mathrm{N}(\bigcap_{i:\, x_i \in A} (X \setminus \{x_i\})) = \inf_{i:\, x_i \in A} \mathrm{n}_i$, $A \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, и, следовательно, для $A = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$, $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots\}$ $\mathrm{P}(A) = \sup_{i:\, x_i \in A} \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i_s} \geqslant \mathrm{p}_{j_k} = \sup_{j:\, x_j \in B} \mathrm{p}_j = \mathrm{P}(B) \Leftrightarrow \mathrm{N}(X \setminus A) = \inf_{i:\, x_i \in A} \mathrm{n}_i = \mathrm{n}_{i_s} \leqslant \mathrm{n}_{j_k} = \inf_{j:\, x_j \in B} \mathrm{n}_j = \mathrm{N}(X \setminus B)$, и при этом $\mathrm{P}(A) = 1 = \mathrm{p}_{i_s} \Leftrightarrow \mathrm{n}_{i_s} = 0 = \mathrm{N}(X \setminus A)$, $\mathrm{P}(B) = 0 \Leftrightarrow$ все $\mathrm{p}_{j_1} = \mathrm{p}_{j_2} = \ldots = 0 \Leftrightarrow$ все $\mathrm{n}_{j_1} = \mathrm{n}_{j_2} = \ldots = 1 \Leftrightarrow \mathrm{N}(X \setminus B) = 1$, т. е. выполнена эквивалентность в (1.5.3). Дуальность $\mathrm{P}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}(\cdot)$ в (1.5.4) означает, что $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta$ $\mathrm{n}_i = \theta(\mathrm{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{N}(A) = \inf_{i:\, x_i \in X \setminus A} \mathrm{n}_i = \inf_{i:\, x_i \in X \setminus A} \theta(\mathrm{p}_i) = \theta(\sup_{i:\, x_i \in X \setminus A} \mathrm{p}_i) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A))$, $A \in \mathcal{P}(X)$.

Определение 1.5.2. Интегралы $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ согласованы, $\mathrm{p}(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{n}(\cdot)$ (вполне согласованы, $\mathrm{p}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{n}(\cdot)$), если $\mathrm{P}(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}(\cdot)$ (если $\mathrm{P}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}(\cdot)$), где $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot))$, $\mathrm{N}(A) = \mathrm{n}(\chi_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{A}$, и $\mathcal{L}(X)$ совпадает с $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ (как множество).

Заметим, что если $\mathrm{P}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}(\cdot)$, т. е. если $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta$ $\forall A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A))$, то соответствующие интегралы $\mathrm{p}(\cdot)$ и $\mathrm{n}(\cdot)$ связаны равенствами [1)] в (1.5.2).

Пример 1.5.2. Согласно равенствам (1.2.5) и (1.4.5) в случае $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, рассмотренном в примере 1.5.1,

$$\mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup_i \min\{f(x_i), g(x_i)\},$$

[1)] Действительно, пусть в (1.6.11) и (1.6.1) $b_k^{(n)} = a_{n-k}^{(n)}$, $B_k^{(n)} = X \setminus A_{n-k}^{(n)}$ и $\mathrm{N}(B_k^{(n)}) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus B_k^{(n)}))$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда согласно теоремам 1.6.3 и 1.6.1 в (1.6.11) и (1.6.1) $\mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) = \theta(\mathrm{p}(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot)))$.

где $g(x_i) = \mathrm{P}(\{x_i\}) = \mathrm{p}_i,\ \ i = 1, 2, \ldots,$
$$\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_i \max\{\widetilde{f}(x_i), \widetilde{h}(x_i)\},$$
где $\widetilde{h}(x_i) = \mathrm{N}(X \setminus \{x_i\}) = \mathrm{n}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, суть общие выражения для интегралов $\mathrm{p}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\overline{\mathcal{L}}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{L}}(X) = \mathcal{L}^X$ — класс всех функций $X \to \mathcal{L}$. *Поэтому* $\mathrm{p}_g(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, *если и только если* $\exists\, s(\cdot)\colon X \to [0,1]$, $\sup\limits_{x\in X} s(x) = 1$, $\inf\limits_{x\in X} s(x) = 0$, и $\exists\, \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}\ \exists\, \widetilde{\theta}(\cdot) \in \widetilde{\Theta}$ $g(\cdot) = \widetilde{\gamma} \circ s(\cdot)$, $\widetilde{h}(\cdot) = \widetilde{\theta} \circ s(\cdot)$, а $\mathrm{p}_g(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, *если и только если* $\exists\, \theta \in \Theta\ \ h(\cdot) = \theta \circ g(\cdot)$ и, следовательно, $\mathrm{p}_g(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\cdot) \Leftrightarrow \exists\, \theta(\cdot) \in \Theta$ $\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf\limits_i \max\{\widetilde{f}(x_i), \theta \circ g(x_i)\} = \theta(\sup\limits_{x\in X} \min\{\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(x_i), g(x_i)\}) =$ $= \theta(\mathrm{p}_g(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))) \equiv \theta * \mathrm{p}_g(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, см. равенства (1.5.2).

Пример 1.5.3. Обратимся к мерам $\mathrm{P}_g(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$, $\mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to$ $\to \widetilde{\mathcal{L}}$ и интегралам $\mathrm{p}_g(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\cdot)\colon \widetilde{\overline{\mathcal{L}}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, определенным в случае произвольного X в примерах 1.1.1, 1.2.1 и 1.4.1, и рассмотрим вопрос об их согласованности.

Определим для фиксированных $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и $\theta(\cdot) \in \Theta$ семейства множеств
$$\begin{aligned} X_c^{\gamma\circ g} &= \{x \in X,\ \gamma \circ g(x) = c\} \triangleq g^{-1}(\gamma^{-1}(c)), \\ X_c^{\theta\circ h} &= \{x \in X,\ \theta \circ \widetilde{h}(x) = c\} \triangleq \widetilde{h}^{-1}(\theta^{-1}(c)),\ c \in [0,1]. \end{aligned} \tag{1.5.5}$$
Так как для каждого семейства в (1.5.5) $\bigcup\limits_{c\in[0,1]} X_c = X$, $X_c \cap X_{c'} = \varnothing$, $c \neq c'$, $c, c' \in [0,1]$, то $\mathrm{P}_g(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, $\mathrm{p}_g(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, если и только если для некоторых $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и $\theta(\cdot) \in \Theta$ $X_c^{\gamma\circ g} = X_c^{\theta\circ\widetilde{h}}$, $c \in [0,1]$, ибо это условие означает, что для этих $\gamma(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ $\gamma \circ g(\cdot) = \theta \circ \widetilde{h}(\cdot)$, то есть $\widetilde{h}(x) = \overline{\theta} \circ g(x)$, $x \in X$, где $\overline{\theta}(\cdot) = \theta^{-1} \circ \gamma(\cdot) \in \Theta$, и соответственно
$$\mathrm{N}_{\widetilde{h}}(A) = \inf_{x\in X\setminus A} \widetilde{h}(x) = \overline{\theta}(\sup_{x\in X\setminus A} g(x)) = \overline{\theta}(\mathrm{P}_g(X \setminus A)),\ A \in \mathcal{P}(X),$$
$$\widetilde{h}(\cdot) = \theta \circ g(\cdot), \tag{1.5.6}$$
$$\mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_{x\in X} \max\{\widetilde{f}(x), \widetilde{h}(x)\} = \overline{\theta}(\sup_{x\in X} \min\{\overline{\theta}^{-1} \circ \widetilde{f}(x), g(x)\}) =$$
$$= \overline{\theta}(\mathrm{p}_g(\overline{\theta}^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))),\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\overline{\mathcal{L}}}(X),\ \widetilde{h}(\cdot) = \overline{\theta} \circ g(\cdot). \tag{1.5.7}$$
Нетрудно заметить, что $\mathrm{P}_g(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, $\mathrm{p}_g(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, если и только если $\exists\, s(\cdot)\colon X \to [0,1]$, $\sup\limits_{x\in X} s(x) = 1$, $\inf\limits_{x\in X} s(x) = 0$, $\exists\, \gamma(\cdot) \in \Gamma$ $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta\ \gamma \circ g(\cdot) = \theta \circ \widetilde{h}(\cdot) = s(\cdot)$, а $\mathrm{P}_g(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, $\mathrm{p}_g(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\cdot)$, если и только если $\exists\, s(\cdot)\colon X \to [0,1]$, $\sup\limits_{x\in X} s(x) = 1$, $\inf\limits_{x\in X} s(x) = 0$, $\exists\, \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}\ \exists\, \widetilde{\theta}(\cdot) \in \widetilde{\Theta}\ g(\cdot) = \widetilde{\gamma} \circ s(\cdot)$, $\widetilde{h}(\cdot) = \widetilde{\theta} \circ s(\cdot)$ [1]).

---

[1]) Γ (Θ) — класс строго монотонных непрерывных функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to$ $\to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, $(\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0)$; $\widetilde{\Gamma}$ $(\widetilde{\Theta})$ —

1.5.2. Свойства отношений согласованности $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$. Покажем, что отношения согласованности в известном смысле наследуются при преобразованиях мер $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$.

Лемма 1.5.1. *Пусть* $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{P}_X,\mathrm{N}_X)$ *есть образ* $(Y,\mathcal{P}(X),\mathrm{P}_Y,\mathrm{N}_Y)$ *при отображении* $q(\cdot)\colon Y\to X$. *Тогда* $\mathrm{P}_Y <\!\sim\!> \mathrm{N}_Y \Rightarrow \mathrm{P}_X <\!\sim\!> \mathrm{N}_X$ *и* $\mathrm{P}_Y <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y \Rightarrow \mathrm{P}_X <\!\approx\!> \mathrm{N}_X$.

Доказательство. Если $\mathrm{P}_Y <\!\sim\!> \mathrm{N}_Y$, то $\forall A_1,A_2\in\mathcal{P}(X)$ $\mathrm{P}_X(A_1)\triangleq$ $\triangleq \mathrm{P}_Y(q^{-1}(A_1)) \geqslant \mathrm{P}_Y(q^{-1}(A_2)) \triangleq \mathrm{P}_X(A_2) \Leftrightarrow \mathrm{N}_X(X\setminus A_1)\triangleq$ $\triangleq \mathrm{N}_Y(q^{-1}(X\setminus A_1)) = \mathrm{N}_Y(Y\setminus q^{-1}(A_1)) \leqslant \mathrm{N}_Y(Y\setminus q^{-1}(A_2)) =$ $= \mathrm{N}_X(X\setminus A_2)$, где $q^{-1}(A)\triangleq\{y\in Y,\ q(y)\in A\}$, $A\in\mathcal{P}(X)$, и учтено, что $q^{-1}(X)=Y$, $q^{-1}(X\setminus A)=q^{-1}(X)\setminus q^{-1}(A)$, $A\in\mathcal{P}(X)$. А так как $1=\mathrm{P}_X(A_1)=\mathrm{P}_Y(q^{-1}(A_1))\Leftrightarrow \mathrm{N}_Y(Y\setminus q^{-1}(A_1))=\mathrm{N}_X(X\setminus A_1)=0$ и $0=\mathrm{P}_X(A_2)=\mathrm{P}_Y(q^{-1}(A_2)\Leftrightarrow \mathrm{N}_Y(Y\setminus q^{-1}(A_2))=\mathrm{N}_X(X\setminus A_2)=1$, то $\mathrm{P}_X(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}_X(\cdot)$. Если же $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, то $\exists\,\theta(\cdot)\in\Theta$ $\forall B\in\mathcal{P}(Y)$ $\mathrm{N}_Y(B)=\theta(\mathrm{P}_Y(Y\setminus B))$ и, следовательно, $\forall A\in\mathcal{P}(X)$ $\mathrm{N}_X(A)=\mathrm{N}_Y(q^{-1}(A))=\theta(\mathrm{P}_Y(Y\setminus q^{-1}(A)))=\theta(\mathrm{P}_Y(q^{-1}(X\setminus A)))=$ $=\theta(\mathrm{P}_X(X\setminus A))$. ■

Следствие 1.5.1. Если η и $\xi=q(\eta)$ суть нечеткие элементы, канонические для $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}_Y,\mathrm{N}_Y)$ и соответственно для $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{P}_X,\mathrm{N}_X)$,

$$\begin{aligned} g^{\xi}(x) &= \mathrm{P}_Y(\{y\in Y,\ q(y)=x\}) = \mathrm{P}^{\eta}(q(\eta)=x),\\ \widetilde{h}^{\xi}(x) &= \mathrm{N}_Y(\{y\in Y,\ q(y)\neq x\}) = \mathrm{N}^{\eta}(q(\eta)\neq x) \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

— распределения возможностей равенств $\xi=x$ и необходимостей неравенств $\xi\neq x$, $x\in X$, то $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}_Y(\cdot) \Rightarrow \forall x_1,x_2\in X$ $g^{\xi}(x_1)\geqslant g^{\xi}(x_2) \Leftrightarrow \widetilde{h}^{\xi}(x_1)\leqslant \widetilde{h}^{\xi}(x_2)$, $g^{\xi}(x_1)=1\Leftrightarrow \widetilde{h}^{\xi}(x_1)=0$, $g^{\xi}(x_2)=0\Leftrightarrow \widetilde{h}^{\xi}(x_2)=1$, а если $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, то $\exists\,\theta(\cdot)\in\Theta$ $\forall x\in X$ $\widetilde{h}^{\xi}(x)=\theta\circ g^{\xi}(x)$.

Теорема 1.5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 1.5.1 *и* $A^{\boldsymbol{\cdot}}\colon Y\to$ $\to\mathcal{P}(X)$. *Тогда*

1. *если*

$$\begin{aligned} g^{A^{\eta}}(x) &= \mathrm{P}_Y(\{y\in Y,\ x\in A^{y}\}) \equiv \mathrm{P}_Y(A_x) = \mathrm{P}^{\eta}(x\in A^{\eta}),\\ \widetilde{h}^{A^{\eta}}(x) &= \mathrm{N}_Y(\{y\in Y,\ x\in A^{y}\}) \equiv \mathrm{N}_Y(A_x) = \mathrm{N}^{\eta}(x\in A^{\eta}), \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

где $A_x=\{y\in Y,\ x\in A^{y}\}$, *то согласованность* $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$ *влечет*: $\forall x_1,x_2\in X$

$$\begin{aligned} &g^{A^{\eta}}(x_1)\geqslant g^{A^{\eta}}(x_2) \Leftrightarrow \widetilde{h}^{X\setminus A^{\eta}}(x_1)\leqslant \widetilde{h}^{X\setminus A^{\eta}}(x_2),\\ &g^{A^{\eta}}(x_1)=1\Leftrightarrow \widetilde{h}^{X\setminus A^{\eta}}(x_1)=0,\ g^{A^{\eta}}(x_2)=0\Leftrightarrow \widetilde{h}^{X\setminus A^{\eta}}(x_2)=1, \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

а если $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, *то* [1] $\exists\,\theta(\cdot)\in\Theta$ $\widetilde{h}^{A^{\eta}}(\cdot)=\theta\circ g^{X\setminus A^{\eta}}(\cdot)$.

класс монотонных функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon[0,1]\to[0,1]$, $\widetilde{\gamma}(0)=0$, $\widetilde{\gamma}(1)=1$; $\Gamma\subset\widetilde{\Gamma}$ $(\widetilde{\theta}(\cdot)\colon[0,1]\to[0,1]$, $\widetilde{\theta}(0)=1$, $\widetilde{\theta}(1)=0$, $\theta\in\overline{\Theta})$.

[1] В обозначениях, принятых в Следствии 1.5.1, необходимость $\widetilde{h}^{A^{\eta}}(x)$ включения $x\in X$ в A^{η} есть невозможность $\theta\circ g^{X\setminus A^{\eta}}(x)$ невключения $x\in X$ в A^{η}.

2. *Если*

$$\mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y = \varnothing\}) = 0,\ \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing\}) = 1, \tag{1.5.11}$$

то

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap B \neq \varnothing\}),\\ &\mathrm{N}(B) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \subset B,\ A^y \neq \varnothing\}) \equiv\\ &\quad\equiv \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap (X \setminus B) = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\}),\ B \in \mathcal{P}(X),\end{aligned} \tag{1.5.12}$$

суть возможность и необходимость, причем

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_Y(Y) = 1 \Rightarrow \mathrm{P}(X) = 1,\ \mathrm{P}_Y(\varnothing) = 0 \Rightarrow \mathrm{P}(\varnothing) = 0,\\ &\mathrm{N}_Y(Y) = 1 \Rightarrow \mathrm{N}(X) = 1,\ \mathrm{N}_Y(\varnothing) = 0 \Rightarrow \mathrm{N}(\varnothing) = 0\end{aligned}$$

и

$$\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}_Y(\cdot) \Rightarrow \mathrm{P}(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}(\cdot),\ \mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot) \Rightarrow \mathrm{P}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}(\cdot).$$

Доказательство. 1. Если $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, то $\forall\, x_1, x_2 \in X$ $g^{A^\eta}(x_1) = \mathrm{P}_Y(\{g \in Y,\ x_1 \in A^y\}) \geqslant \mathrm{P}_Y(\{g \in Y,\ x_2 \in A^y\}) = g^{A^\eta}(x_2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \widetilde{h}^{X \setminus A^\eta}(x_1) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ x_1 \in X \setminus A^y\}) \leqslant \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ x_2 \in \in X \setminus A^y\}) = \widetilde{h}^{X \setminus A^\eta}(x_2)$ и, очевидно, выполнены и остальные условия в (1.5.10), а если $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, то $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta\ \forall x \in X\ \widetilde{h}^{A^\eta}(x) = = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ x \in A^y\}) = \theta(\mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ x \in X \setminus A^y\})) = \theta \circ g^{X \setminus A^\eta}(x)$.

2. Заметим, что, согласно (1.5.11), (1.5.12), $\mathrm{P}(X) = \mathrm{P}_Y(\{y \in \in Y,\ A^y \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing\} \cup \{y \in Y,\ A^y = \varnothing\}) = = \mathrm{P}_Y(Y) = 1$, $\mathrm{P}(\varnothing) = \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap \varnothing \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\varnothing) = 0$ и $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) \overset{\triangle}{=} \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_i) \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A^y \cap \cap B_j) \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{y \in Y,\ A^y \cap B_j \neq \varnothing\}) = \sup\limits_j \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap \cap B_j \neq \varnothing\}) = \sup\limits_j \mathrm{P}(B_j)$, т. е. $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ — возможность. Далее $\mathrm{N}(X) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \subset X,\ A^y \neq \varnothing\}) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing\}) = 1$, $\mathrm{N}(\varnothing) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap X = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\}) = \mathrm{N}_Y(\varnothing) = 0$, $\mathrm{N}(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \subset \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j,\ A^y \neq \varnothing\}) = \mathrm{N}_Y(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \{y \in Y,\ A^y \subset \subset B_j,\ A^y \neq \varnothing\}) = \inf\limits_j \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^Y \subset B_j,\ A^y \neq \varnothing\}) = \inf\limits_j \mathrm{N}(B_j)$, т. е. $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ — необходимость.

Пусть $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\sim\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, тогда $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}_Y(\{y \in \in Y,\ A^y \cap B_1 \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap B_1 \neq \varnothing\} \cup \{y \in Y,\ A^y = = \varnothing\}) \geqslant \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap B_2 \neq \varnothing\} \cup \{y \in Y,\ A^Y = \varnothing\}) = \mathrm{P}_Y(\{y \in \in Y,\ A^y \cap B_2 \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}(B_2) \Leftrightarrow \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap B_1 = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\}) = = \mathrm{N}(X \setminus B_1) \leqslant \mathrm{N}(X \setminus B_2) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap B_2 = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\})$, поскольку $\{y \in Y,\ A^y \cap B = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\} = Y \setminus (\{y \in Y,\ A^y \cap B \neq \varnothing\} \cup \cup \{A^y = \varnothing\})$, $B \in \mathcal{P}(X)$, и, очевидно, $\mathrm{P}(B_1) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{N}(X \setminus B_1) = 0$, $\mathrm{P}(B_2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{N}(X \setminus B_2) = 1$. Если же $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, то $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta$ $\forall B \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{N}(B) = \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap (X \setminus B) = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\}) = = \theta(\mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\ A^y \cap (X \setminus B) \neq \varnothing\} \cup \{y \in Y,\ A^y = \varnothing\})) = \theta(\mathrm{P}_Y(\{y \in \in Y,\ A^y \cap (X \setminus B) \neq \varnothing\})) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus B))$. ∎

1.5.3. Согласованность возможности и необходимости покрытия нечеткого элемента нечетким множеством. В заключение рассмотрим согласованность возможности и необходимости покрытия нечеткого элемента $\xi = q(\eta)$ нечетким множеством A^η, считая, что ξ и A^η независимы [1]).

Согласно обозначениям в (1.5.8), (1.5.9)

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot)) = \sup_{x\in X}\min\{g^{A^\eta}(x), g^\xi(x)\} = \mathrm{P}^\eta(q(\eta)\in A^\eta),\\ &\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{X\setminus A^\eta}(\cdot)) = \sup_{x\in X}\min\{g^{X\setminus A^\eta}(x), g^\xi(x)\} = \mathrm{P}^\eta(q(\eta)\notin A^\eta) \end{aligned} \tag{1.5.13}$$

суть возможности покрытия и соответственно непокрытия нечеткого элемента $\xi = q(\eta)$ нечетким множеством A^η,

$$\begin{aligned} &\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)) = \inf_{x\in X}\max\{\widetilde{h}^{A^\eta}(x), \widetilde{h}^\xi(x)\} = \mathrm{N}^\eta(q(\eta)\in A^\eta),\\ &\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{X\setminus A^\eta}(\cdot)) = \inf_{x\in X}\max\{\widetilde{h}^{X\setminus A^\eta}(x), \widetilde{h}^\xi(x)\} = \mathrm{N}^\eta(q(\eta)\notin A^\eta) \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

суть необходимости покрытия и непокрытия нечеткого элемента $\xi = q(\eta)$ нечетким множеством A^η. Поэтому если $\mathrm{P}^\eta(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}^\eta(\cdot)$, то $\exists\,\theta(\cdot)\in\Theta$

$$\begin{aligned} \mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)) &= \inf_{x\in X}\max\{\widetilde{h}^{A^\eta}(x), \widetilde{h}^\xi(x)\} = \mathrm{N}^\eta(q(\eta)\in A^\eta) =\\ &= \theta(\mathrm{P}^\eta(q(\eta)\in X\setminus A^\eta)) = \theta(\sup_{x\in X}\min\{g^{X\setminus A^\eta}(x), g^\xi(x)\}) =\\ &= \theta(\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{X\setminus A^\eta}(\cdot))) = \inf_{x\in X}\max\{\theta\circ g^{X\setminus A^\eta}(x), \theta\circ g^\xi(x)\}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}^\eta(q(\eta)\in A^\eta) = \theta(\mathrm{P}^\eta(q(\eta)\in X\setminus A^\eta)),\\ &\mathrm{P}^\eta(q(\eta)\in A^\eta) = \theta^{-1}(\mathrm{N}^\eta(q(\eta)\in X\setminus A^\eta)), \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

т. е. *необходимость* $q(\eta)\in A^\eta$ *есть невозможность* $q(\eta)\in X\setminus A^\eta$, *возможность* $q(\eta)\in A^\eta$ *есть ненеобходимость* $q(\eta)\in X\setminus A^\eta$. Соответственно

$$\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)) = \theta(\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{X\setminus A^\eta}(\cdot))),\ \mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot)) = \theta^{-1}(\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(h^{X\setminus A^\eta}(\cdot))), \tag{1.5.16}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot) = \theta\circ g^{X\setminus A^\eta}(\cdot),\ \widetilde{h}^\xi(\cdot) = \theta\circ g^\xi(\cdot),\\ &g^{A^\eta}(\cdot) = \theta^{-1}\circ h^{X\setminus A^\eta}(\cdot), g^\xi(\cdot) = \theta^{-1}\circ\widetilde{h}^\xi(\cdot). \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

Согласно (1.5.17) *необходимость* $\widetilde{h}^{A^\eta}(x)$ *покрытия* $x\in A^\eta$ *есть невозможность* $\theta\circ g^{X\setminus A^\eta}(x)$ *непокрытия* $x\notin A^\eta$, *необходимость* $\widetilde{h}^\xi(x)$ *неравенства* $\xi\neq x$ *есть невозможность* $\theta\circ g^\xi(x)$ *равенства*

[1]) Если $\eta = (\eta_1,\eta_2)$, $q(\eta) = \overline{q}(\eta_1) = \xi$, $A^\eta = \overline{A}^{\eta_2}$, $\mathrm{P}^\eta(\cdot) = \min\{\mathrm{P}^{\eta_1},\mathrm{P}^{\eta_2}\}(\cdot)$, $\mathrm{N}^\eta(\cdot) = \max\{\mathrm{N}^{\eta_1},\mathrm{N}^{\eta_2}\}(\cdot)$, то $\xi = q(\eta)$ и A^η независимы, см. § 1.12.2.

$\xi = x$, возможность $g^{A^\eta}(x)$ покрытия $x \in A^\eta$ есть не необходимость $\theta^{-1} \circ \widetilde{h}^{X \setminus A^\eta}(x)$ непокрытия $x \notin A^\eta$, возможность $g^\xi(x)$ равенства $\xi = x$ есть не необходимость $\theta^{-1} \circ \widetilde{h}^\xi(x)$ неравенства $\xi \neq x$, $x \in X$.

Согласно (1.5.16) *необходимость* $\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(h^{A^\eta}(\cdot))$ *покрытия* $\xi \in A^\eta$ *есть невозможность* $\theta(\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{X \setminus A^\eta}(\cdot)))$ *непокрытия* $\xi \notin A^\eta$, *возможность* $\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot))$ *покрытия* $\xi \in A^\eta$ *есть не необходимость* $\theta^{-1}(\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{X \setminus A^\eta}(\cdot)))$ *непокрытия* $\xi \notin A^\eta$.

Пары $\mathrm{p}_{g^\xi}(\cdot)$, $\mathrm{P}^\eta(\cdot)$ и $\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\cdot)$, $\mathrm{N}^\eta(\cdot)$, удовлетворяющие условиям (1.5.15), (1.5.16), (1.5.17), назовем *дуально дополнительными* [1]).

Заметим, что условия в (1.5.16), (1.5.17) связывают условия линейности интегралов $\mathrm{p}_{g^\xi}(\cdot)$ и $\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\cdot)$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}\Big(\widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}{}^{+}(\widetilde{a}_j \,\widetilde{\bullet}\, \widetilde{h}^{A^\eta_j})(\cdot)\Big) = \widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}{}^{+}(\widetilde{a}_j \,\widetilde{\bullet}\, \mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{A^\eta_j}(\cdot))) = \\
&= \widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}{}^{+}(\widetilde{a}_j \,\widetilde{\bullet}\, \theta(\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{X\setminus A^\eta_j}(\cdot)))) = \theta\Big(\sum_{j=1}^{\infty}{}^{+}(\theta^{-1}(\widetilde{a}_j) \bullet \mathrm{p}_{g^\xi}(g^{X\setminus A^\eta_j}(\cdot)))\Big) = \\
&= \theta(\mathrm{p}_{g^\xi}(\textstyle\sum^{+\infty}_{j=1}(\theta^{-1}(\widetilde{a}_j) \bullet g^{X\setminus A^\eta_j}(\cdot)))) = \theta\Big(\mathrm{p}_{g^\xi}\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}{}^{+}(\theta^{-1}(\widetilde{a}_j) \bullet \theta^{-1}\circ h^{A^\eta_j})\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p}_{g^\xi}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}{}^{+}(a_j \bullet g^{A^\eta_j})(\cdot)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}{}^{+}(a_j \bullet \mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta_j}(\cdot))) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}{}^{+}(a_j \bullet \theta^{-1}(\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{X\setminus A^\eta_j}(\cdot)))) = \theta^{-1}\Big(\widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}{}^{+}(\theta(a_j) \,\widetilde{\bullet}\, \mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{X\setminus A^\eta_j}(\cdot)))\Big) = \\
&= \theta^{-1}(\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{\textstyle\sum}^{+\infty}_{j=1}(\theta(a_j) \,\widetilde{\bullet}\, h^{X\setminus A^\eta_j}(\cdot)))) = \theta^{-1}\Big(\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}\Big(\widetilde{\sum_{j=1}^{\infty}}{}^{+}(\theta(a_j) \,\widetilde{\bullet}\, \theta \circ g^{A^\eta_j})(\cdot)\Big)\Big).
\end{aligned}
\tag{1.5.18}
$$

Заметим, наконец, что дуальные аналоги в (1.5.2) равенств (1.5.16) суть равенства

$$
\mathrm{n}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)) = \theta(\mathrm{p}(\theta^{-1} \circ \widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot))),\ \mathrm{p}(g^{A^\eta}(\cdot)) = \theta^{-1}(\mathrm{n}(\theta \circ g^{A^\eta}(\cdot))), \tag{1.5.19}
$$

которые эквивалентны равенствам (1.5.16) лишь при (уточняющих) условиях (1.5.17), а как таковые равенства (1.5.19) означают, что необходимость $\mathrm{n}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot))$ покрытия $\xi \in A^\eta$ есть невозможность $\theta(\mathrm{p}(\theta^{-1} \circ \widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)))$ покрытия $\xi \in A^\eta_{\theta^{-1}}$, где $A^\eta_{\theta^{-1}}$ — нечеткое множество, дуальное A^η, $\theta^{-1} \circ \widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot) \triangleq g^{A^\eta_{\theta^{-1}}}(\cdot)$ — его и. ф. о. п., а возможность $\mathrm{p}(g^{A^\eta}(\cdot))$ покрытия $\xi \in A^\eta$ есть не необходимость $\theta^{-1}(\mathrm{n}(\theta \circ g^{A^\eta}(\cdot)))$ покрытия $\xi \in A^\eta_\theta$, $\theta \circ g^{A^\eta}(\cdot) = \widetilde{h}^{A^\eta_\theta}(\cdot)$ — и. ф. о. п. A^η_θ.

---

[1]) В случае четкого A дуальность, дуальная дополнительность и дополнительность тождественны, ибо $g^A(\cdot) = h^A(\cdot) = \chi_A(\cdot)$, $g^{X\setminus A}(\cdot) = h^{X\setminus A}(\cdot) = \chi_{X\setminus A}(\cdot) = \theta \circ \chi_A(\cdot)$.

1.5.4. Дуальность и дополнительность. Далее в связи с и. ф. $g^{A^\eta}(\cdot)$ будут встречаться как и. ф. $g^{X\setminus A^\eta}(\cdot)$ дополнительного к A^η нечеткого множества $X \setminus A^\eta$, так и и. ф. $\theta \circ g^{A^\eta}(\cdot)$ дуального к A^η нечеткого множества, которое обозначено A^η_θ; разумеется, интерпретация $g^{X\setminus A^\eta}(\cdot)$ существенно отличается от интерпретации [1] $g^{A^\eta_\theta}(\cdot)$.

Замечание 1.5.1. При любом пространстве с возможностью $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$ между нечеткими множествами A^η и $X\setminus A^\eta$ имеется взаимно однозначное соответствие, а связь между их и. ф. $g^{A^\eta}(\cdot)$ и $g^{X\setminus A^\eta}(\cdot)$ определяется конкретной возможностью P^η и в общем случае характеризуется лишь условием $\max\{g^{A^\eta}, g^{X\setminus A^\eta}\}(\cdot) = 1(\cdot)$. С другой стороны, связь между A^η и A^η_θ не однозначна и определяется тем, в какой степени нечеткое множество A^η_θ определяется его и. ф. $g^{A^\eta_\theta}(\cdot) \triangleq \theta \circ g^{A^\eta}(\cdot)$, в то время как между и. ф. $g^{A^\eta_\theta}(\cdot)$ и $g^{A^\eta}(\cdot)$ соответствие взаимно однозначное.

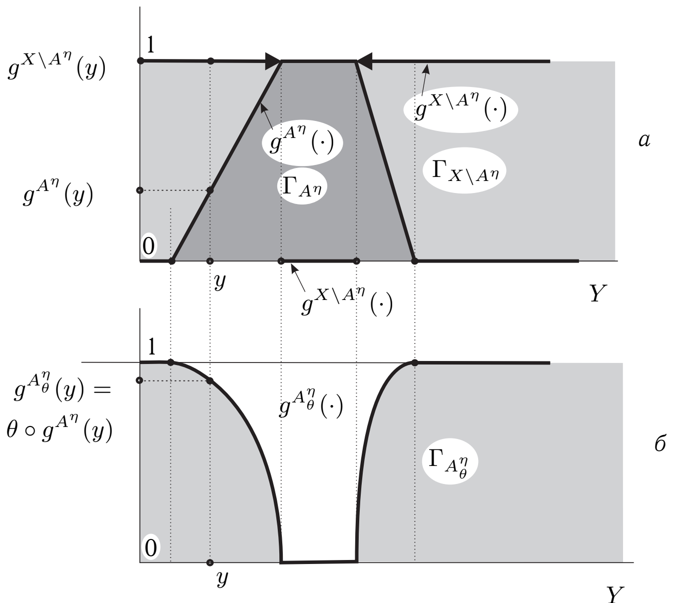


Рис. 1.5.1. Нечеткое множество A^η определено на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$, где $Y = [0,1]$, возможность P^η задана распределением $g^\eta(y) = y$, $y \in [0,1]$, канонического нечеткого элемента η. На рис. *а* показаны графики Γ_{A^η} и $\Gamma_{X\setminus A^\eta}$ нечетких множеств A^η и $X\setminus A^\eta$ и графики их и. ф. $g^{A^\eta}(\cdot)$ и $g^{X\setminus A^\eta}(\cdot)$. На рис. *б* показан график $\Gamma_{A^\eta_\theta}$ нечеткого множества A^η_θ, дуального A^η, и график его и. ф. $g^{A^\eta_\theta}(\cdot)$

[1] $g^{X\setminus A^\eta}(x)$ — возможность непокрытия (покрытия) x нечетким множеством A^η $(X \setminus A^\eta)$; $g^{A^\eta_\theta}(x) \triangleq \theta \circ g^{A^\eta}(x)$ — возможность (невозможность) покрытия x нечетким множеством A^η_θ (A^η).

Следующий пример пояснит существо дела.

Пример 1.5.1. Пусть A — нечеткое множество «высоких людей», $g^A(\cdot)$ — его и. ф., значение $g^A(x)$ — возможность того, что человек ростом $x \in X$ будет назван (считается) «высоким» ($g^A(x)$ — возможность $x \in A$). Дуальное (полярное) A нечеткое множество $B = A_\theta$ «низких людей» имеет и. ф. $g^B(\cdot) = \theta \circ g^A(\cdot)$, дополнительное к A нечеткое множество $X \setminus A$ «невысоких людей» имеет и. ф. $g^{X\setminus A}(\cdot)$, при этом $g^{X\setminus A}(x) \geqslant \theta \circ g^A(x)$, $x \in X$, так как $X \setminus A$ кроме «низких» включает и людей «среднего роста». Формально $\theta \circ g^A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } g^A(x) = 0, \\ < 1, \text{ если } 0 < g^A(x) < 1, \end{cases}$ а $g^{X\setminus A}(x) = 1$, если $0 \leqslant g^A(x) < 1$, ибо $\max\{g^A(x), g^{X\setminus A}(x)\} = 1$, $x \in X$. Поэтому при любой антитонной функции $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ $g^{X\setminus A}(x) \geqslant \theta \circ g^A(x)$, $x \in X$.

Дуальные пары $g^A(\cdot)$, $\theta \circ g^A(\cdot)$ моделируют антонимы типа «высокий–низкий», «горячий–холодный» и т. п., «нечеткую противоположность» которых характеризует антитонность $\theta(\cdot)$, дополнительные пары $g^A(\cdot)$, $g^{X\setminus A}(\cdot)$ моделируют «четкую дополнительность» типа «высокий–невысокий», «горячий–негорячий» и т. п.

Понятно, что $\max(\mathrm{p}(\theta \circ g^A(\cdot)), \mathrm{p}(g^A(\cdot)))$ как возможность того, что человек будет назван «низким» или «высоким», может быть и меньше единицы, хотя, как показано ниже, выбирая должным образом $\theta(\cdot)$, ее можно сделать как угодно близкой к единице, а и. ф. $\theta \circ g^A(\cdot)$ дуального A нечеткого множества — к и. ф. $g^{X\setminus A}(\cdot)$ нечеткого множества, дополнительного к A, см. рис. 1.5.2 и лемму 1.5.2.

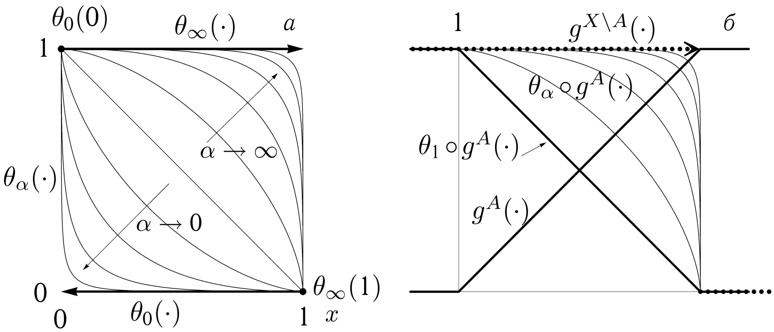


Рис. 1.5.2. *а*) Семейство кривых $\theta_\alpha(x) = (1 - x^\alpha)^{1/\alpha}$, $x \in [0,1]$, $0 < \alpha < \infty$ (тонкие кривые), $\theta_\infty(x) \triangleq \lim\limits_{\alpha\to\infty} \theta_\alpha(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [0,1), \\ 0, \ x = 1, \end{cases}$ $\theta_0(x) \triangleq \lim\limits_{\alpha\to 0} \theta_\alpha(x) = \begin{cases} 0, \ x \in (0,1], \\ 1, \ x = 0, \end{cases}$ $x \in [0,1]$. *б*) $g^{X\setminus A}(\cdot)$ (пунктир) можно представить как предел $\theta_\alpha \circ g^A(\cdot)$ (тонкие кривые) при $\alpha \to \infty$

Приведенный пример показывает, что отношение дуальности характерно для широкого класса моделей нечеткости. Обсудим некоторые его свойства.

Рассмотрим монотонное семейство дуальных изоморфизмов $\theta_\alpha\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, $\alpha \in (0,\infty)$, таких, что для любого $\alpha \in (0,\infty)$ $\theta_\alpha(0) = 1$, $\theta_\alpha(1) = 0$, и для любого $a \in [0,1]$ $\theta_\alpha(a) \geqslant \theta_\beta(a)$, если $\alpha \geqslant \beta$, и их монотонные пределы

$$\theta_\infty(a) \triangleq \lim_{\alpha\to\infty} \theta_\alpha(a) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant a < 1, \\ 0, & a = 1, \end{cases} \tag{1.5.20}$$

$$\theta_0(a) \triangleq \lim_{\alpha\to 0} \theta_\alpha(a) = \begin{cases} 0, & 0 < a \leqslant 1, \\ 1, & a = 0. \end{cases} \tag{1.5.21}$$

Примером может служить семейство инволюций $\theta_\alpha(a) = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a \in [0,1]$, $\alpha \in (0,\infty)$, см. рис. 1.5.2.

Каждой функции $\theta_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in [0,\infty]$, отвечает дуальный автоморфизм $\theta_\alpha\circ\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ (или $\widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}(X)$) $(\theta_\alpha \circ f)(x) \triangleq \theta_\alpha(f(x))$, $x \in X$, $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$.

Отметим следующие свойства отображения $\theta_\alpha\circ$.

Лемма 1.5.2. *Для любых интегралов* $\mathrm{p}(\cdot)$ *и* $\mathrm{n}(\cdot)$ *и любых функций* $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$:

1. $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot)) = \mathrm{p}(\theta_\infty \circ f(\cdot))$, $\theta_\alpha\circ\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$.
2. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \mathrm{n}(\theta_\alpha \circ \widetilde{f}(\cdot)) = \mathrm{n}(\theta_0 \circ \widetilde{f}(\cdot))$, $\theta_\alpha\circ\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}(X)$.

   Равномерно по $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ *и по* $x \in X$:
3. $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \max\{f(x), \theta_\alpha \circ f(x)\} = 1$.
4. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \min\{f(x), \theta_\alpha \circ f(x)\} = 0$.

   Равномерно по $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ *и по* $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$:
5. $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \max\{\mathrm{p}(f(\cdot)), \mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot))\} = 1$, $\theta_\alpha\circ\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$.
6. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \min\{\mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)), \mathrm{n}(\theta_\alpha \circ \widetilde{f}(\cdot))\} = 0$, $\theta_\alpha\circ\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}(X)$.

Доказательство. Факт существования первого предела в равенстве 1 и равенство его $\mathrm{p}(\theta_\infty \circ f(\cdot))$ следует из непрерывности интеграла $\mathrm{p}(\cdot)$ относительно монотонной сходимости $\theta_\alpha \circ f(x) \underset{\alpha\to\infty}{\nearrow} \theta_\infty \circ f(x)$, $x \in X$. Аналогично равенство 2 следует из непрерывности интеграла $\mathrm{n}(\cdot)$ относительно монотонной сходимости $\theta_\alpha \circ \widetilde{f}(x) \underset{\alpha\to 0}{\searrow} \theta_0 \circ \widetilde{f}(x)$, $x \in X$. Для доказательства равенств 3 и 5 заметим (см. рис. 1.5.2, 1.5.3), что $\min\limits_{0\leqslant a\leqslant 1} \max\{a, \theta_\alpha(a)\} = a_{(\alpha)}$, где $a_{(\alpha)} = \theta_\alpha(a_{(\alpha)}) \nearrow 1$ при $\alpha \to \infty$ (например, $a_{(\alpha)} = (1/2)^{1/\alpha}$, если $\theta_\alpha(a) = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a \in [0,1]$). Следовательно, для любой функции $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ и для любого [1] $x \in X$

[1] $\inf\limits_{f(\cdot)\colon X\to[0,1]} \inf\limits_{x\in X} \max\{f(x), \theta_\alpha \circ f(x)\} = a_{(\alpha)} \underset{\alpha\to\infty}{\nearrow} 1$.

$f_{(\alpha)}(x) = \max\{f(x), \theta_\alpha \circ f(x)\} \geqslant a_{(\alpha)} \underset{\alpha\to\infty}{\nearrow} 1$. Поэтому равномерно по [1]) $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ $\max\{\mathrm{p}(f(\cdot)), \mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot))\} = \mathrm{p}(f_{(\alpha)}(\cdot)) \underset{\alpha\to\infty}{\nearrow} 1$.

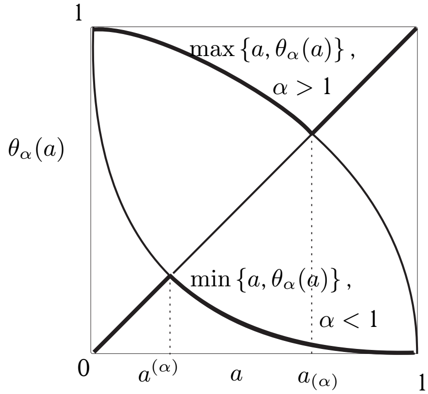


Рис. 1.5.3. Кривые $\max\{a, \theta_\alpha(a)\}$ и $\min\{a, \theta_\alpha(a)\}$, $a \in [0,1]$, для $\theta_\alpha(a) = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $0 < a < \infty$

Равенства 4 и 6 можно доказать аналогично, если заметить, что $a^{(\alpha)} = \max\limits_{0\leqslant a\leqslant 1} \min\{a, \theta_\alpha(a)\} \underset{\alpha\to 0}{\searrow} 0$ (например, для $\theta_\alpha(a) = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a \in [0,1]$, $a^{(\alpha)} = (1/2)^{1/\alpha} \underset{\alpha\to 0}{\searrow} 0$, см. рис. 1.5.2, 1.5.3). ■

Следствием равенств 3, 5 Леммы 1.5.2 является тот факт, что $\theta_\infty \circ f^A(\cdot)$ можно рассматривать как вариант и. ф. $f^{X\setminus A}$ нечеткого множества [2]), дополнительного к нечеткому множеству с и. ф. $f^A(\cdot)$, а дуальная к $f^A(\cdot)$ функция $\theta_\alpha \circ f^A(\cdot)$ аппроксимирует $\theta_\infty \circ f^A(\cdot)$ в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать α_ε такое, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_\varepsilon$ равномерно по $f^A(\cdot)\colon X \to [0,1]$ $\mathrm{p}(\theta_\infty \circ f^A(\cdot)) - \varepsilon \leqslant \mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f^A(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(\theta_\infty \circ f^A(\cdot))$ и равномерно по $f^A(\cdot)$ и по $x \in X$ $1 - \varepsilon \leqslant \max(f^A(x), \theta_\alpha \circ f^A(x)) \leqslant 1$. Иначе говоря, *в любой фиксированной шкале $\mathcal{L}$ значений возможности* при достаточно больших α $\theta_\alpha \circ f^A(\cdot)$ можно с любой наперед заданной точностью использовать как и. ф. $f^{X\setminus A}$ нечеткого множества, дополнительного к нечеткому множеству с и. ф. $f^A(\cdot)$, а значение $\mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f^A(\cdot))$ — как значение возможности нечеткого события, противоположного тому, которое определено $f^A(\cdot)$, см. замечание 1.5.1.

---

[1]) $\inf\limits_{f(\cdot)\colon X\to[0,1]} \max\{\mathrm{p}(f(\cdot)), \mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot))\} = a_{(\alpha)} \underset{\alpha\to\infty}{\nearrow} 1$.

[2]) На самом деле $\theta_\infty \circ f(\cdot)$ — и. ф. четкого множества, так как $\theta_\infty \circ f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant f(x) < 1, \\ 0, & f(x) = 1, \end{cases}$ $x \in X$.

Замечание 1.5.2. «Наперед заданная точность», достигнутая в любой фиксированной шкале $\mathcal{L}$, всегда может быть нарушена при преобразовании $\mathcal{L}$ в должным образом выбранную изоморфную $\mathcal{L}$ шкалу $\mathcal{L}'$. Это означает, что хотя утверждения леммы 1.5.2 верны в любой шкале, то есть имеют абсолютный, не зависящий от выбора шкалы, смысл, и, следовательно, могут быть содержательно истолкованы, все утверждения «с наперед заданной точностью» не имеют содержательной интерпретации, см. § 1.15.

1.5.5. Семейства дуальных интегралов и их свойства. Рассмотрим семейство интегралов

$$\mathrm{n}^{(\alpha)}(f(\cdot)) = \theta_\alpha(\mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot))),\ f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X), \quad \alpha \in (0, \infty), \tag{1.5.22}$$

дуальных фиксированному интегралу $\mathrm{p}(\cdot)$, в котором $\theta_\alpha\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, $\alpha \in (0, \infty)$, — монотонное семейство дуальных изоморфизмов, определенных семейством *инволюций* $\theta_\alpha(a) = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a \in [0, 1]$. При любом $\alpha \in (0, \infty)$ интеграл $\mathrm{n}^{(\alpha)}(\cdot)$ удовлетворяет условиям $\widetilde{(1.4.1)}$, т. е. является линейной счетно-аддитивной функцией $\widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, но $\overline{\mathrm{n}}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ (1.5.23) не наследует этих свойств.

Теорема 1.5.2. *Интеграл* $\mathrm{n}^{(\alpha)}(\cdot)$ (1.5.22) *обладает следующими свойствами.*

1. *Для любой функции* $f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ $\mathrm{n}^{(\alpha)}\big(f(\cdot)\big)$ *монотонно неубывает по* $\alpha \in (0, \infty)$ *и, следовательно, существует предел* [1]
$$\overline{\mathrm{n}}(f(\cdot)) = \lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{n}^{(\alpha)}(f(\cdot)). \tag{1.5.23}$$
2. $\overline{\mathrm{n}}(\cdot)$ — *линейная, но, вообще говоря, не счетно-аддитивная функция* $\widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathrm{n}}(\inf\limits_{1 \leqslant i < \infty} f_i(\cdot)) \leqslant \inf\limits_{1 \leqslant i < \infty} \overline{\mathrm{n}}(f_i(\cdot))$, *т. е. не является* n-*интегралом.*
3. *Для любых* $\alpha \in (0, \infty)$ *и* $f(\cdot)\colon X \to [0, 1]$ $\overline{\mathrm{n}}(f(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(f(\cdot))$.

Доказательство. 1. В § 1.2 показано, что для любой функции $f(\cdot)\colon X \to [0, 1]$ $\underline{f}_n(x) \triangleq \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_k^{(n)}, \chi_{A_k^{(n)}}(x)\} \leqslant f(x) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_{k-1}^{(n)}, \chi_{A_k^{(n)}}(x)\} \triangleq \overline{f}_n(x)$, $x \in X$, где $1 = a_0^{(n)} > a_1^{(n)} > \ldots > a_n^{(n)} = 0$ и $A_1^{(n)} = \Big\{x \in X,\ a_1^{(n)} \leqslant f(x) \leqslant a_0^{(n)}\Big\}$, $A_k^{(n)} = \{x \in X, a_k^{(n)} \leqslant f(x) < a_{k-1}^{(n)}\}$, $k = 1, \ldots, n$, причем если при $n \to \infty$ $\varepsilon^{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}) \to 0$, то равномерно по $x \in X$ и по $f(\cdot)\colon X \to [0, 1]$ при $n \to \infty$ $\underline{f}_n(x) \to f(x)$, $\overline{f}_n(x) \to f(x)$, $x \in X$. При этих же

[1] Не следует думать, что $\overline{\mathrm{n}}(f(\cdot)) = \theta_\infty(\mathrm{p}(\theta_\infty \circ f(\cdot)))$.

условиях $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\min\{\theta_\alpha(a_k^{(n)}),\chi_{A_k^{(n)}}(x)\}\geqslant\theta_\alpha\circ f(x)\geqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\min\{\theta_\alpha(a_{k-1}^{(n)}),$ $\chi_{A_k^{(n)}}(x)\}$, $x\in X$, и, следовательно, в силу линейности и монотонности $\mathrm{p}(\cdot)\colon\ \mathcal{L}(X)\to[0,1]$ $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\min\{\theta_\alpha(a_k^{(n)}),\mathrm{P}(A_k^{(n)})\}\geqslant\mathrm{p}(\theta_\alpha\circ f(\cdot))\geqslant$ $\geqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\min\{\theta_\alpha(a_{k-1}^{(n)}),\mathrm{P}(A_k^{(n)})\}$ или

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\max\{a_k^{(n)},\theta_\alpha(\mathrm{P}(A_k^{(n)}))\}\leqslant\theta_\alpha(\mathrm{p}(\theta_\alpha\circ f(\cdot)))\leqslant$$
$$\leqslant\min_{1\leqslant k\leqslant n}\max\{a_{k-1}^{(n)},\theta_\alpha(\mathrm{P}(A_k^{(n)}))\}.\quad(1.5.24)$$

Так как
$$0\leqslant\min_{1\leqslant k\leqslant n}\max\{a_{k-1}^{(n)},\theta_\alpha(\mathrm{P}(A_k^{(n)}))\}-$$
$$-\min_{1\leqslant k\leqslant n}\max\{a_k^{(n)},\theta_\alpha(\mathrm{P}(A_k^{(n)}))\}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}(a_{k-1}^{(n)}-a_k^{(n)})=\varepsilon^{(n)},$$
то при $n\to\infty$ левая и правая части (1.5.24) сходятся к $\theta_\alpha(\mathrm{p}(\theta_\alpha\circ f(\cdot)))$ равномерно по $f(\cdot)\colon X\to[0,1]$ и по $\alpha\in(0,\infty)$. А так как $\theta_\alpha(a)$ при любом $a\in(0,1)$ — монотонно не убывающая функция $\alpha\in(0,\infty)$, то левая и правая части (1.5.24) монотонно не убывают по $\alpha\in(0,\infty)$ при любом $n=1,2,\ldots$ Следовательно, $\mathrm{n}^{(\alpha)}(f(\cdot))=\theta_\alpha(\mathrm{p}(\theta_\alpha\circ f(\cdot)))$ монотонно не убывают по $\alpha\in(0,\infty)$. Поэтому предел в (1.5.23) существует [1)].

2. Так как
$$\mathrm{n}^{(\alpha)}\Big(a_1\,\widetilde{\bullet}\,f_1(\cdot)\,\widetilde{+}\,a_2\,\widetilde{\bullet}\,f_2(\cdot)\Big)=(a_1\,\widetilde{\bullet}\,\mathrm{n}^{(\alpha)}(f_1(\cdot)))\,\widetilde{+}(a_2\,\widetilde{\bullet}\,\mathrm{n}^{(\alpha)}(f_2(\cdot))),$$
то, переходя к пределу при $\alpha\to\infty$ в этом равенстве, найдем, что $\overline{\mathrm{n}}\Big(a_1\,\widetilde{\bullet}\,f_1(\cdot)\,\widetilde{+}\,a_2\,\widetilde{\bullet}\,f_2(\cdot)\Big)=(a_1\,\widetilde{\bullet}\,\overline{\mathrm{n}}(f_1(\cdot)))\,\widetilde{+}(a_2\,\widetilde{\bullet}\,\overline{\mathrm{n}}(f_2(\cdot)))$ (т. е. $\overline{\mathrm{n}}(\cdot)$ — линейная функция $\widetilde{\mathcal{L}}(X)\to\widetilde{\mathcal{L}}$). Вместе с тем, хотя $\mathrm{n}^{(\alpha)}(\inf\limits_i f_i(\cdot))=$ $=\inf\limits_i\mathrm{n}^{(\alpha)}(f_i(\cdot))$, но $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\mathrm{n}^{(\alpha)}(\inf\limits_i f_i(\cdot))=\sup\limits_\alpha\mathrm{n}^{(\alpha)}(\inf\limits_i f_i(\cdot))=$ $=\sup\limits_\alpha\inf\limits_i\mathrm{n}^{(\alpha)}(f_i(\cdot))\leqslant\inf\limits_i\sup\limits_\alpha\mathrm{n}^{(\alpha)}(f_i(\cdot))=\inf\limits_i\overline{\mathrm{n}}(f_i(\cdot))$.

3. Пусть $\mathrm{p}(f(\cdot))=\delta$ для некоторой функции $f(\cdot)$, так что
$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\min\{a_k^{(n)},\mathrm{P}(A_k^{(n)})\}\leqslant\delta=\mathrm{p}(f(\cdot)).\quad(1.5.25)$$

Обозначим $K^{(n)}(\delta)$ множество тех $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, для которых $\mathrm{P}(A_k^{(n)})\geqslant\delta$. При любых значениях $n=1,2,\ldots$ и любом $\delta\in[0,1]$ множество $K^{(n)}(\delta)\neq\varnothing$, ибо для некоторого $k\in\{1,\ldots,n\}$ $\mathrm{P}(A_k^{(n)})=1$.

[1)] Заметим, что существование предела в (1.2.2) в случае $\mathrm{p}(f(\cdot))=$ $=\mathrm{p}_g(f(\cdot))=\sup\limits_{x\in X}\min\{f(x),g(x)\}$ следует из монотонности по $\alpha\in(0,\infty)$ $\theta_\alpha(a)$ при любом $a\in(0,1)$, ибо $\theta_\alpha(\mathrm{p}_g(\theta_\alpha\circ f(\cdot)))=\inf\limits_{x\in X}\max\{f(x),\theta_\alpha\circ g(x)\}$ монотонно возрастает по $\alpha\in(0,\infty)$.

В силу неравенства (1.5.25) $a_k^{(n)} \leqslant \delta$ для $k \in K^{(n)}(\delta)$ и, следовательно, $\theta_\alpha(a_k^{(n)}) \geqslant \theta_\alpha(\delta), k \in K^{(n)}(\delta)$. Если $\max\limits_k(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}) = \varepsilon^{(n)}$, то $\theta_\alpha(a_{k-1}^{(n)}) \geqslant \theta_\alpha(\delta + \varepsilon^{(n)})$, $k \in K^{(n)}(\delta)$, и, следовательно,

$$\mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot)) \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{\theta_\alpha(a_{k-1}^{(n)}), \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{k \in K^{(n)}(\delta)} \min\{\theta_\alpha(\delta + \varepsilon^{(n)}), \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} = \theta_\alpha(\delta + \varepsilon^{(n)}),$$

ибо для некоторого $k \in K^{(n)}(\delta)$ $\mathrm{P}(A_k^{(n)}) = 1$. Поэтому

$$\mathrm{n}^{(\alpha)}(f(\cdot)) = \theta_\alpha(\mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot))) \leqslant \delta + \varepsilon^{(n)}, \tag{1.5.26}$$

а так как $\varepsilon^{(n)} > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, из (1.5.26) и (1.5.25) следует, что $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \delta \geqslant \mathrm{n}^{(\alpha)}(f(\cdot))$. ■

Таким образом, *линейную счетно-аддитивную функцию* $\mathrm{n}(\cdot)$: $\widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ *нельзя определить по непрерывности как* $\overline{\mathrm{n}}(\cdot)$.

Пример 1.5.2. Пусть $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}_g(f(\cdot)) \stackrel{\triangle}{=} \sup\limits_{x \in X} \min\{f(x), g(x)\}$ и $\mathrm{n}^{(\alpha)}(f(\cdot)) = \theta_\alpha(\mathrm{p}_g(\theta_\alpha \circ f(\cdot))) = \inf\limits_{x \in X} \max\{f(x), \theta_\alpha \circ g(x)\} = \mathrm{n}_{\theta_\alpha \circ g}(f(\cdot))$. Нетрудно убедиться, что для данных, представленных на рис. 1.5.4, 1.5.2 $\mathrm{n}^{(\alpha)}(\theta_0 \circ f(\cdot)) = \inf\limits_{x \in X} \max\{\theta_0 \circ f(x), \theta_\alpha \circ g(x)\} = 0$, $\alpha \in (0, \infty)$, и, следовательно, $\overline{\mathrm{n}}(\theta_0 \circ f(\cdot)) = \lim\limits_{\alpha \to \infty} \mathrm{n}^{(\alpha)}(\theta_0 \circ f(\cdot)) = \sup\limits_{\alpha \in (0,\infty)} \mathrm{n}^{(\alpha)}(\theta_0 \circ f(\cdot)) = 0$. В то же время $\mathrm{n}_{\theta_\infty \circ g}(\theta_0 \circ f(\cdot)) = \inf\limits_{x \in X} \max\{\theta_0 \circ f(x), \theta_\infty \circ g(x)\} = 1 > \overline{\mathrm{n}}(\theta_0 \circ f(\cdot))$. Более того, $\overline{\mathrm{n}}(g(\cdot))$ нельзя представить в виде $\inf\limits_{x \in X} \max(g(x), h(x))$ (см. § 1.9.3), где $h(\cdot)\colon X \to [0, 1]$. Действительно, если такое представление возможно, то частное значение $\overline{\mathrm{n}}\,(\theta_0 \circ f(\cdot))$ можно получить путем монотонного предельного перехода: $\lim\limits_{\beta \to 0} \overline{\mathrm{n}}\,(\theta_\beta \circ f(\cdot)) = \inf\limits_{\beta \in (0,\infty)} \overline{\mathrm{n}}(\theta_\beta \circ f(\cdot)) = \overline{\mathrm{n}}(\inf\limits_\beta \theta_\beta \circ f(\cdot)) = \overline{\mathrm{n}}(\theta_0 \circ f(\cdot))$, в то время как на самом деле предельное значение $\inf\limits_\beta \overline{\mathrm{n}}(\theta_\beta \circ f(\cdot)) = \inf\limits_\beta \sup\limits_\alpha \mathrm{n}^{(\alpha)}(\theta_\beta \circ f(\cdot)) = \inf\limits_\beta \sup\limits_\alpha \inf\limits_{x \in X} \max\{\theta_\beta \circ f(x),\ \theta_\alpha \circ g(x)\} = 1$, а частное значение $\sup\limits_\alpha \inf\limits_\beta \inf\limits_{x \in X} \max\{\theta_\beta \circ f(x),\ \theta_\alpha \circ g(x)\} = \sup\limits_\alpha \inf\limits_{x \in X} \max\{\theta_0 \circ f(x),\ \theta_\alpha \circ g(x)\} = \overline{\mathrm{n}}(\theta_0 \circ f(\cdot)) = 0$.

Примеры использования дуальной и дополнительной необходимостей даны в гл. 6, см. также § 1.5.3 и пример 1.12.2.

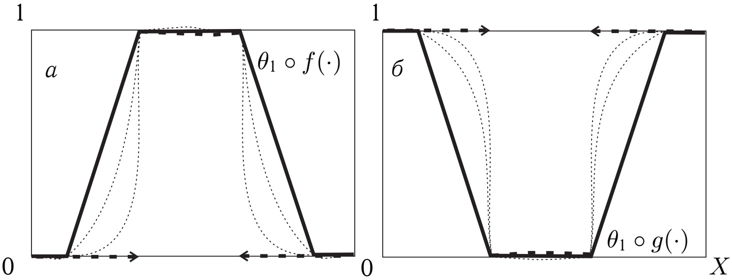


Рис. 1.5.4.

a) $\begin{cases} \text{Пунктир:} & \text{семейство кривых } \theta_\beta \circ f(\cdot),\ \beta \to 0; \\ \text{штрих:} & \text{предельная кривая } \theta_0 \circ f(\cdot) = \lim\limits_{\beta \to 0} \theta_\beta \circ f(\cdot); \\ \text{сплошная:} & \text{кривая } \theta_1 \circ f(\cdot)\ (\beta = 1). \end{cases}$

$б$) $\begin{cases} \text{Пунктир:} & \text{семейство кривых } \theta_a \circ g(\cdot),\ a \to \infty; \\ \text{штрих:} & \text{предельная кривая } \theta_\infty \circ g(\cdot) = \lim\limits_{a \to \infty} \theta_a \circ g(\cdot); \\ \text{сплошная:} & \text{кривая } \theta_1 \circ g(\cdot). \end{cases}$

Кривые изображены для $\theta_\alpha = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a \in [0, 1]$, $\alpha \in (0, \infty)$

1.6. Интегрирование относительно мер возможности и необходимости

Пример $\mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min\{f(x), g(x)\}$ (1.1.12) вполне аддитивного интеграла, определенного в § 1.1 как линейная счетно-аддитивная функция $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, естественно интерпретировать как интеграл функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ относительно возможности $\mathrm{P}(\cdot)$, заданной распределением $g(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, см. примеры 1.2.1, 1.2.2 и замечание 1.2.1.

В § 1.6.1 рассмотрена схема Лебега построения интеграла относительно возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, определенного на классе $\mathcal{L}(X)$ $\mathcal{A}$-измеримых функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$. Показано, что интеграл $\mathrm{p}(\cdot)$: $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ является интегралом Лебега относительно возможности $\mathrm{P}(\cdot)$, определенной в § 1.2 равенством $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{A}$.

В § 1.6.2 интеграл $\mathrm{p}(\cdot)$ представлен как интеграл Суджено [144] относительно возможности $\mathrm{P}(\cdot)$.

В § 1.6.3 рассмотрено интегрирование относительно необходимости $\mathrm{N}(\cdot)$.

1.6.1. Схема Лебега интегрирования относительно возможности; $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ как интеграл Лебега. Прежде всего заметим, что, согласно равенствам (1.2.1), для $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ $\mathop{\dot{+}}\limits_{k=1}^{n} (a_k^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x)) = \underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x) = \mathop{\dot{+}}\limits_{k=1}^{n} (a_{k-1}^{(n)} \bullet \chi_{A_k^{(n)}}(x))$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и, согласно определению 1.2.1, вследствие линейности и монотонности $\mathrm{p}(\cdot)$

$$\begin{aligned} \overset{n}{\underset{k=1}{+}}(a_k^{(n)} \bullet \mathrm{P}(A_k^{(n)})) = \mathrm{p}(\underline{f}_n(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(f(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(\overline{f}_n(\cdot)) = \\ = \overset{n}{\underset{k=1}{+}}(a_{k-1}^{(n)} \bullet \mathrm{P}(A_k^{(n)})), \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

где выражения слева и справа *назовем* нижней и соответственно верхней *лебеговскими* P-*интегральными суммами от функции* $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Определение 1.6.1. Функцию $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ назовем P-*интегрируемой* по Лебегу, если для последовательности разбиений $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, порожденной любой последовательностью $1 = a_0^{(n)} > a_1^{(n)} > \ldots > a_n^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon^{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, левая и правая части (1.6.1) стремятся к одному пределу. Этот предел назовем *интегралом Лебега от функции* $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ *относительно возможности* $\mathrm{P}(\cdot)$ или — P-интегралом Лебега; согласно (1.6.1) последний, разумеется, равен $\mathrm{p}(f(\cdot))$.

Теорема 1.6.1. *Любая функция* $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ P-*интегрируема по Лебегу.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_{k-1}^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} - \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_k^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} \leqslant \\ \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n}(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} \to 0 \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

при $n \to \infty$. Дело в том, что для любых $x, y, z \geqslant 0$ $\min\{x + y, z\} \leqslant \min\{x, z\} + \min\{y, z\}$, поэтому $\min\{a_{k-1}^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} \leqslant \min\{a_k^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} + \min\{a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\}$ и тем более $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_{k-1}^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_k^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\} + \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \min\{a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}, \mathrm{P}(A_k^{(n)})\}$, что и записано в (1.6.2); в формуле (1.6.2) и следующих за (1.6.2) «+» и «−» символизируют обычные операции сложения и вычитания. ■

Таким образом, между функциями $\mathrm{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, и $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, со значениями в $\mathcal{L}$ установлено взаимно однозначное соответствие в следующем смысле: $\mathrm{p}(f(\cdot))$ *есть интеграл Лебега от функции* $f(\cdot)$ *относительно* $\mathrm{P}(\cdot)$, *а* $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot))$, $\chi_A(\cdot)$ — и. ф. $A \in \mathcal{A}$.

В § 1.9 будет показано, что возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ определяет интеграл $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, удовлетворяющий условиям (1.1.7), (1.1.8), как P-интеграл Лебега следующим равенством, см. (1.9.8):

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(f(\cdot)) = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \min\{\alpha, \mathrm{P}(\{x \in X, f(x) = \alpha\})\} = \\ = \underset{\alpha \in [0,1]}{+}(\alpha \bullet \mathrm{P}(\{x \in X, f(x) = \alpha\})), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

1.6.2. Схема Суджено интегрирования относительно возможности; $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ как интеграл Суджено. Заметим, что подобно (1.2.1) для любой функции $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$

$$\overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_k^{(n)} \bullet \chi_{C_k^{(n)}})(x) \leqslant f(x) \leqslant \overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_{k+1}^{(n)} \bullet \chi_{C_k^{(n)}})(x),\ x \in X, \text{ где}$$

$$0 = c_1^{(n)} < \ldots < c_n^{(n)} < c_{n+1}^{(n)} = 1,\ C_k^{(n)} = \{x \in X, f(x) \geqslant c_k^{(n)}\},$$
$$k = 1, \ldots, n,\ n = 1, 2, \ldots, \quad (1.6.4)$$

и аналогично (1.6.1) для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$

$$\overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_k^{(n)} \bullet \mathrm{P}(C_k^{(n)})) \leqslant \mathrm{p}(f(\cdot)) \leqslant \overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_{k+1}^{(n)} \bullet \mathrm{P}(C_k^{(n)})),\ n = 1, 2, \ldots \quad (1.6.5)$$

Правую и левую части неравенств в (1.6.5) назовем верхней и соответственно нижней судженовскими Р-интегральными суммами функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Определение 1.6.2. Функцию $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ назовем Р-*интегрируемой по Суджено*, если для любой последовательности в (1.6.4) такой, что при $n \to \infty$ $\varepsilon^{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(c_{k+1}^{(n)} - c_k^{(n)}) = \overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_{k+1}^{(n)} - c_k^{(n)}) \to 0$, левая и правая части неравенств в (1.6.5) стремятся к одному пределу. Этот предел назовем Р-*интегралом Суджено от функции* $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$; *согласно* (1.6.5) *последний равен* $\mathrm{p}(f(\cdot))$

Нетрудно заметить, что в данном случае имеет место аналог теоремы 1.6.1.

Теорема 1.6.1*. *Любая функция* $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ Р-*интегрируема по Суджено.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.6.1:

$$\overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_{k+1}^{(n)} \bullet \mathrm{P}(C_k^{(n)})) - \overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_k^{(n)} \bullet \mathrm{P}(C_k^{(n)})) \leqslant \overset{n}{\underset{k=1}{+}}((c_{k+1}^{(n)} - c_k^{(n)}) \bullet \mathrm{P}(C_k^{(n)})) \leqslant$$
$$\leqslant \overset{n}{\underset{k=1}{+}}(c_{k+1}^{(n)} - c_k^{(n)}) \leqslant \varepsilon^{(n)} \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$ здесь, как и в доказательстве теоремы 1.6.1, «$-$» обычный минус. ■

Покажем, что возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, охарактеризованная в теореме 1.2.1, определяет интеграл $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ в (1.6.5), удовлетворяющий условиям (1.1.7), (1.1.8), как интеграл $s(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ Суджено [144] равенством

$$s(f(\cdot)) = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \min\{\alpha, \mathrm{P}(\{x \in X, f(x) \geqslant \alpha\})\} =$$
$$= \underset{0 \leqslant \alpha \leqslant 1}{+}\big(a \bullet \mathrm{P}(\{x \in X, f(x) \geqslant \alpha\})\big),\ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \quad (1.6.6)$$

Следующие факты позволят проследить эту связь.

Лемма 1.6.1. *Пусть* $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ — *возможность, охарактеризованная в теореме* 1.2.1,

$$q(\alpha, f(\cdot)) = \mathrm{P}(\{x \in X, f(x) \geqslant \alpha\}), \quad f(\cdot) \in \mathcal{L}(X). \quad (1.6.7)$$

Тогда:

1. $\forall f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ *функция* $q(\cdot, f(\cdot))\colon [0,1] \to [0,1]$ *монотонно не возрастает и, как следствие, для любых* $\alpha_i \in [0,1]$, $i = 1,2,\ldots$, *если* $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \downarrow \alpha$, *то* $q(\alpha_1, f(\cdot)) \leqslant q(\alpha_2, f(\cdot)) \leqslant \ldots$ $\ldots \uparrow q(\alpha+0, f(\cdot)) \leqslant q(\alpha, f(\cdot))$, *а если* $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \uparrow \alpha$, *то* $q(\alpha_1, f(\cdot)) \geqslant q(\alpha_2, f(\cdot)) \geqslant \ldots \downarrow q(\alpha-0, f(\cdot)) \geqslant q(\alpha, f(\cdot))$.

2. $\forall a \in [0,1]$ $\forall f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ $q(\alpha, a\cdot f(\cdot)) = \begin{cases} 0, & \text{*если* } \alpha > a; \\ q(\alpha, f(\cdot)), & \text{*если* } \alpha \leqslant a; \end{cases}$

3. $\forall \alpha \in [0,1]$ $\forall f_i(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $i = 1,2,\ldots$, $q(\alpha, (f_1 \boldsymbol{+} f_2)(\cdot)) = q(\alpha, f_1(\cdot)) \boldsymbol{+} q(\alpha, f_2(\cdot))$, $q(\alpha, \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{i=1}^{\infty} f_i(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{i=1}^{\infty} q(\alpha, f_i(\cdot))$;

4. $\forall A \in \mathcal{A}$ $q(\alpha, \chi_A(\cdot)) = \mathrm{P}(A)$, *где* $\chi_A(\cdot)\colon X \to [0,1]$ — *индикаторная функция множества* A.

Доказательство. 1. Эти свойства функции $q(\cdot, f(\cdot))\colon [0,1] \to [0,1]$ суть следствия монотонности $\mathrm{P}(\cdot)$.

2. $q(\alpha, a\cdot f(\cdot)) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{P}(\{x \in X, \min\{a, f(x)\} \geqslant \alpha\}) =$
$= \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > a, \\ q(\alpha, f(\cdot)), & \text{если } \alpha \leqslant a, \end{cases}$
так как при $\alpha > a$ $\{x \in X, \min\{a, f(x)\} \geqslant \alpha\} = \varnothing$, а при $\alpha \leqslant a$ $\{x \in X, \min\{a, f(x)\} \geqslant \alpha\} = \{x \in X, f(x) \geqslant \alpha\}$.

3. Эти равенства суть следствия свойств аддитивности, соответственно, счетной аддитивности возможности и равенств

$$\{x \in X, \max(f_1(x), f_2(x)) \geqslant \alpha\} = \\ = \{x \in X, f_1(x) \geqslant \alpha\} \cup \{x \in X, f_2(x) \geqslant \alpha\},$$

$$\{x \in X, \sup_i f_i(x) \geqslant \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in X, f_i(x) \geqslant \alpha\}.$$

4. Дело в том, что $\forall A \in \mathcal{A}$ $\{x \in X, \chi_A(x) \geqslant \alpha\} = A$, $\alpha \in [0,1]$. ■

Согласно следующей теореме интеграл $s(f(\cdot)), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, (1.6.6) обладает свойствами (1.1.7), (1.1.8) интеграла $\mathrm{p}(f(\cdot)), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Теорема 1.6.2. *Пусть*

$$s(f(\cdot)) = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \min\{\alpha, q(\alpha, f(\cdot))\}, \; f(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \tag{1.6.8}$$

где функция $q(\alpha, f(\cdot))$, $\alpha \in [0,1]$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, *определена равенством* (1.6.7), *т. е. пусть функция* $s(f(\cdot)), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, *определена равенством* (1.6.6). *Тогда*

1. $s(f(\cdot)) = \sup\{\alpha | \alpha \in [0,1], \alpha \leqslant q(\alpha, f(\cdot))\}, f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$;
2. $s(a \bullet f(\cdot)) = a \bullet s(f(\cdot)), a \in [0,1], f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$;
3. $s((f_1 \boldsymbol{+} f_2)(\cdot)) = s(f_1(\cdot)) \boldsymbol{+} (f_1(\cdot))$,
   $s(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{i=1}^{\infty} f_i(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{i=1}^{\infty} s(f_i(\cdot)), \; f_i(\cdot) \in \mathcal{L}(X), i = 1,2,\ldots$;
4. $s(\chi_A(\cdot)) = \mathrm{P}(A), A \in \mathcal{A}$.

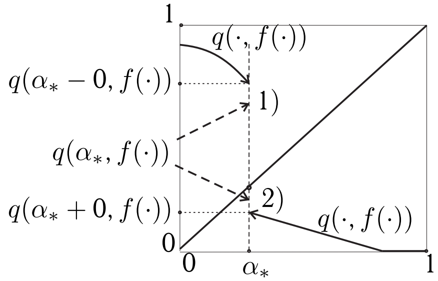


Рис. 1.6.1. Иллюстрация к доказательству пункта 1 теоремы 1.6.2

Доказательство. 1. Согласно определению в (1.6.8)

$$s(f(\cdot)) = \max\Big(\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant q(\alpha,f(\cdot))} \alpha, \sup_{1\geqslant\alpha\geqslant q(\alpha,f(\cdot))} q\big(\alpha, f(\cdot)\big)\Big),\ f(\cdot)\in\mathcal{L}(X). \quad (1.6.9)$$

Если $q(0, f(\cdot)) = 0$, то $q(\alpha, f(\cdot)) = 0, \alpha \in [0,1]$, и, следовательно, $s(f(\cdot)) = 0$. Пусть $q(0, f(\cdot)) > 0$. Так как $q(\alpha, f(\cdot)), \alpha \in [0,1]$, монотонно не убывает, то для любой последовательности $\{\alpha_i\} \subset [0,1]$, удовлетворяющей условиям $\alpha_i \leqslant q(\alpha_i, f_i(\cdot)), i = 1,2,\ldots, 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots \uparrow \alpha_* \stackrel{\triangle}{=} \sup\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant q(\alpha,f(\cdot))} \alpha$, $q(\alpha_1, f(\cdot)) \geqslant q(\alpha_2, f(\cdot)) \geqslant \ldots \downarrow q(\alpha_* - 0, f(\cdot)) \geqslant q(\alpha_*, f_i(\cdot))$, при этом $\alpha_* \leqslant q(\alpha_* - 0, f_i(\cdot))$ и возможно либо 1) $\alpha_* < q(\alpha_*, f(\cdot))$, либо 2) $\alpha_* \geqslant q(\alpha_*, f(\cdot))$, см. рис.1.6.2.

Для всякой последовательности $\{\alpha_i\} \subset [0,1]$, удовлетворяющей условиям $\alpha_i \geqslant q(\alpha_i, f(\cdot))$, $i = 1,2,\ldots$, $1 \geqslant \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots \ldots \downarrow \alpha_* = \inf\limits_{1\geqslant\alpha\geqslant q(\alpha,f(\cdot))} \alpha$, $q(\alpha_1, f(\cdot)) \leqslant q(\alpha_2, f(\cdot)) \leqslant \ldots \uparrow q(\alpha_* + 0, f(\cdot)) \leqslant q(\alpha_*, f(\cdot))$ и при этом $\alpha_* \geqslant q(\alpha_* + 0, f(\cdot))$.

В случае 1)

$$\sup_{1\geqslant\alpha\geqslant q(\alpha,f(\cdot))} q(\alpha, f(\cdot)) \leqslant q(\alpha_* + 0, f(\cdot)) \leqslant \alpha_* \leqslant q(\alpha_*, f(\cdot)).$$

В случае 2)

$\sup\limits_{1\geqslant\alpha\geqslant q(\alpha,f(\cdot))} q(\alpha, f(\cdot)) = q(\alpha_*, f(\cdot)) \leqslant \alpha_*$, причем в обоих случаях в (1.6.9) $s(f(\cdot)) = \alpha_* = \sup\{\alpha | \alpha \in [0,1], \alpha \leqslant q(\alpha, f(\cdot))\}$.

2. $s(a \bullet f(\cdot)) = \sup\{\alpha | \alpha \in [0,1],\ \alpha \leqslant q(\alpha, a \bullet f(\cdot))\} = \sup\{\alpha | \alpha \leqslant a,\ \alpha \leqslant q(\alpha, f(\cdot))\} = \min\{a, s(f(\cdot))\}$. Эти равенства суть следствия пункта 2 леммы 1.6.1 и доказанного пункта 1 теоремы.

3. $s((f_1 \boldsymbol{+} f_2)(\cdot)) = \sup\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \min\{\alpha, q(\alpha, f_1(\cdot)) \boldsymbol{+} q(\alpha, f_2(\cdot))\} = s(f_1(\cdot)) \boldsymbol{+} s(f_2(\cdot))$ и аналогично $s(\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{i=1}^{\infty} f_i(\cdot)) = \sup\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \min\{\alpha, \sup\limits_i q(\alpha, f_i(\cdot))\} = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{i=1}^{\infty} s(f_i(\cdot))$, см. пункт 3 леммы 1.6.1.

4. $s(\chi_A(\cdot)) = \sup\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \min\{\alpha, \mathrm{P}(A)\} = \mathrm{P}(A)$. ■

Следствие 1.6.1. Согласно теореме 1.6.1* интеграл Суджено (1.6.6) является пределом последовательности судженовских P-интегральных сумм в (1.6.5), поскольку согласно теореме 1.6.2

$$\underset{k=1}{\overset{n}{+}}(c_k^{(n)} \bullet \mathrm{P}(C_k^{(n)})) \leqslant s(f(\cdot)) \leqslant \underset{k=1}{\overset{n}{+}}(c_{k+1}^{(n)} \bullet \mathrm{P}(C_k^{(n)})), n = 1, 2, \ldots$$

Пример 1.6.1. Пусть $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_{x \in A} g(x)$, $A \in \mathcal{A}$, где $g(\cdot)$ — некоторая функция из $\mathcal{L}(X)$. Тогда

$$\begin{aligned} s(f(\cdot)) &= \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \min\{\alpha, \sup\{g(x) | x \in X, f(x) \geqslant \alpha\}\} = \\ &= \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \sup\{\min\{\alpha, g(x)\} | x \in X, f(x) \geqslant \alpha\} = \sup_{x \in X} \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant f(x)} \min\{\alpha, g(x)\} = \\ &= \sup_{x \in X} \min\{f(x), g(x)\}, \ f(x) \in \mathcal{L}(X), \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

см. рис. 1.6.2 и пример 1.1.1.

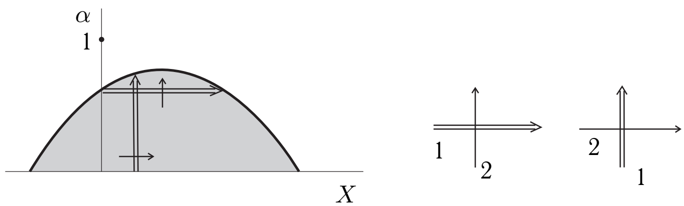


Рис. 1.6.2. В (1.6.10) «двойной интеграл» функции $\min\{\alpha, g(x)\}, (x, \alpha) \in X \times [0, 1]$ по заштрихованной области $\{(x, \alpha) \in X \times [0, 1], f(x) \geqslant \alpha\}$ выражен через «повторные интегралы», вычисляемые согласно диаграммам, на которых «1» отмечает «первое интегрирование», «2» — второе

1.6.3. Схемы Лебега и Суджено интегрирования относительно необходимости. Определим теперь понятие интеграла Лебега относительно необходимости $\mathrm{N}(\cdot)$. Для любой функции $f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ последовательности $\underset{\sim}{f}_n(x) = \underset{k=1}{\overset{n}{\widetilde{+}}}(b_{k-1}^{(n)} \,\widetilde{\bullet}\, \chi_{B_k^{(n)}}(x)) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \max(b_{k-1}^{(n)}, \chi_{B_k^{(n)}}(x))$, $\widetilde{f}_n(x) = \underset{k=1}{\overset{n}{\widetilde{+}}}(b_k^{(n)} \,\widetilde{\bullet}\, \chi_{B_k^{(n)}}(x)) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \max\{b_k^{(n)}, \chi_{B_k^{(n)}}(x)\}$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, в которых $0 = b_0^{(n)} < b_1^{(n)} < \ldots < b_{n-1}^{(n)} < b_n^{(n)} = 1$, $B_k^{(n)} = \left(x \in X,\ f(x) \leqslant b_{k-1}^{(n)}\right) \cup \left(x \in X,\ f(x) > b_k^{(n)}\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $B_n^{(n)} = \left(x \in X,\ f(x) \leqslant b_{n-1}^{(n)}\right) \cup \left(x \in X,\ f(x) \geqslant b_n^{(n)}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию $\underset{\sim}{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \widetilde{f}_n(x)$, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и при $n \to \infty$ равномерно сходятся к $f(\cdot)$, если $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}(b_k^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} \to 0$

при $n \to \infty$. Определение интеграла относительно необходимости $\mathrm{N}(\cdot)$ основано на соотношениях

$$\widetilde{\sum_{k=1}^{n}}{}^{+}(b_{k-1}^{(n)} \,\widetilde{\bullet}\, \mathrm{N}(B_k^{(n)})) = \mathrm{n}(\underset{\sim}{f}_n(\cdot)) \leqslant n(f(\cdot)) \leqslant \mathrm{n}(\widetilde{f}_n(\cdot)) =$$
$$= \widetilde{\sum_{k=1}^{n}}{}^{+}(b_k^{(n)} \,\widetilde{\bullet}\, \mathrm{N}(B_k^{(n)})), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (1.6.11)$$

вытекающих из свойств интеграла $\mathrm{n}(\cdot)$, отмеченных в теореме 1.4.1.

Определение 1.6.3. Функцию $f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ назовем N-*интегрируемой по Лебегу*, если для любой последовательности разбиений $[0, 1] = \bigcup_{k=1}^{n} B_k^{(n)}$, $0 = b_0^{(n)} < b_1^{(n)} < \ldots < b_{n-1}^{(n)} < b_n^{(n)} = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\varepsilon^{(n)} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (b_k^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, левая и правая части (1.6.11) стремятся к одному пределу. Этот предел, равный, очевидно, $\mathrm{n}(f(\cdot))$, назовем N-*интегралом Лебега от функции* $f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$.

Теорема 1.6.3. *Любая функция* $f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ N-*интегрируема по Лебегу.*

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 1.6.1. ■

Что касается N-интеграла Суджено $\widetilde{s}(f(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \theta(s(\theta^{-1} \circ f(\cdot))) = \inf_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \max(\alpha, \mathrm{N}(\{x \in X, f(x) > \alpha\})) = \inf_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \max(\alpha, \mathrm{N}(\{x \in X, f(x) \geqslant \alpha\})), f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$, дуального интегралу $s(f(\cdot)), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, (1.6.6), то он может быть получен из условия $\min_{1 \leqslant k \leqslant n} \max\{c_{k-1}^{(n)}, \mathrm{N}(\{x \in X, f(x) > c_k^{(n)}\})\} \leqslant \widetilde{s}(f(\cdot)) \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \max\{c_k^{(n)}, \mathrm{N}(\{x \in X, f(x) > c_k^{(n)}\})\}$, в котором $0 = c_0^{(n)} < c_1^{(n)} < \ldots < c_n^{(n)} = 1$, предельным переходом при $n \to \infty$, если при этом $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (c_k^{(n)} - c_{k-1}^{(n)}) \to 0$.

Среди многочисленных публикаций, имеющих непосредственное отношение к результатам §§ 1.6 и 1.9, отметим [78–80, 106, 107, 109, 112, 118, 122, 139, 144, 150, 151].

Отметим также элегантные идеи и глубокие результаты идемпотентного функционального анализа, разработанного В. П. Масловым, его учениками и коллегами [1, 25, 27].

1.7. Независимость. Условные возможность и необходимость

В этом параграфе речь пойдет о теоретико-возможностных аналогах теоретико-вероятностных понятий независимости и условной вероятности.

Напомним основные факты теории вероятностей, связанные с понятиями *условной вероятности, условного математического ожидания* и *статистической независимости*. Их теоретико-возможностные аналоги рассматриваются в этом и следующем параграфах, см. также §§ 2.1, 2.2 гл. 2.

1.7.1. Условная вероятность. Независимость. Обозначим $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ вероятностное пространство [1]), $A, B \in \mathcal{A}$ — некоторые события (подмножества Ω). Если $\mathrm{Pr}(B) > 0$ (и, следовательно, $B \neq \varnothing$), то функция $\mathrm{Pr}(\cdot \mid B)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$

$$\mathrm{Pr}(A \mid B) = \mathrm{Pr}(A \cap B)/\mathrm{Pr}(B), \ A \in \mathcal{A}, \tag{1.7.1}$$

называется *условной вероятностью A при условии $\omega \in B$*. Согласно определению (1.7.1) принимаются во внимание не все элементарные события $\omega \in \Omega$, а лишь те, которые влекут B. Это означает, что истинность события B считается абсолютной, и оно рассматривается как пространство элементарных событий, в котором событие A представлено множеством $A \cap B$.

Если $\mathrm{Pr}(B) = 0$, то и $\mathrm{Pr}(A \cap B) = 0$, и правая часть (1.7.1) не определена. В этом случае можно говорить о *вариантах условной вероятности* $\mathrm{Pr}(A \mid B), A \in \mathcal{A}$, имея в виду решения $\mathrm{Pr}(A|B)$ уравнения

$$\mathrm{Pr}(A \mid B) \cdot \mathrm{Pr}(B) = \mathrm{Pr}(A \cap B), \ A \in \mathcal{A}, \tag{1.7.2}$$

принадлежащие $[0,1]$.

Если для некоторого $A \in \mathcal{A}$ уравнение (1.7.2) имеет решение $\mathrm{Pr}(A \mid B) = \mathrm{Pr}(A)$, т. е. если для некоторого $A \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{Pr}(A) \cdot \mathrm{Pr}(B) = \mathrm{Pr}(A \cap B), \tag{1.7.3}$$

то уравнение $\mathrm{Pr}(B \mid A) \cdot \mathrm{Pr}(A) = \mathrm{Pr}(A \cap B)$ имеет решение $\mathrm{Pr}(B \mid A) = \mathrm{Pr}(B)$, а события A и B называются *статистически независимыми. Условие* (1.7.3) *фиксирует связь между множествами A, B и вероятностью* $\mathrm{Pr}(\cdot)$, *которую точнее назвать* Pr-*независимостью событий A и B*.

$\mathcal{A}$-измеримые множества (события) $A_1, A_2, \ldots$ называются *взаимно* (*статистически*) *независимыми*, или (*статистически*) *независимыми в совокупности*, если для любых $n = 1, 2, \ldots$ и целых $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, $\mathrm{Pr}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \mathrm{Pr}(A_{i_1}) \ldots \mathrm{Pr}(A_{i_n})$.

Обозначим $\mathcal{B} = \{\varnothing, \Omega, B, \Omega \setminus B\}$ алгебру подмножеств Ω, порожденную разбиением $\Omega = B \cup (\Omega \setminus B)$. *Условной относительно $\mathcal{B}$ вероятностью A* называется функция (случайная величина)

$$\mathrm{Pr}(A \mid \mathcal{B})(\omega) \triangleq \mathrm{Pr}(A \mid B)\chi_B(\omega) + \mathrm{Pr}(A \mid \Omega \setminus B)\chi_{\Omega \setminus B}(\omega), \ \omega \in \Omega, \ A \in \mathcal{A}, \tag{1.7.4}$$

---

[1]) Ω — пространство элементарных событий, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, называемых событиями, $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ — вероятностная мера, вероятность.

определенная Pr-почти для всех $\omega \in \Omega$, если случаи $\Pr(B) = 0$ и $\Pr(B) = 1$ не исключены. Если, например, $\Pr(B) = 0$, то для $\omega \in B$ значение $\Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \Pr(A \mid B)$ не определено, но вероятность того, что $\omega \in B$, равна нулю.

Если в (1.7.4) для некоторых вариантов условных вероятностей

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(A \mid \Omega \setminus B), \tag{1.7.5}$$

то A и B независимы. Действительно, если $\Pr(B) > 0, \Pr(\Omega \setminus B) > 0$, то, умножив левую и правую части равенства (1.7.5) на $\Pr(B) \times \times \Pr(\Omega \setminus B)$ и воспользовавшись (1.7.1), получим (1.7.3); в этом случае равенства (1.7.3) и (1.7.5) эквивалентны, причем $\Pr(A \mid B) = \Pr(A \mid \Omega \setminus B) = \Pr(A)$. Если же $\Pr(B) = 0$, то, с одной стороны, существует вариант $\Pr(A \mid B)$, равный

$$\Pr(A \mid \Omega \setminus B) = \frac{\Pr(A \cap (\Omega \setminus B))}{\Pr(\Omega \setminus B)} = \Pr(A),$$

ибо $\Pr(A \cap B) = 0$ и $\Pr(\Omega \setminus B) = 1$, а с другой стороны, $\Pr(B) = 0 \Rightarrow \Rightarrow \Pr(A \cap B) = 0 \Rightarrow \Pr(A)\Pr(B) = \Pr(A \cap B) = 0$. Следовательно, A и B стохастически независимы, если и только если Pr-почти для всех $\omega \in \Omega \quad \Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \Pr(A)$.

В более общей ситуации, когда $\mathcal{B}$ — σ-алгебра, порожденная[1] разбиением

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,\ B_j \in \mathcal{A},\quad B_i \cap B_j = \varnothing,\quad i \neq j,\quad i, j = 1, 2, \ldots, \tag{1.7.6}$$

условная относительно $\mathcal{B}$ вероятность A есть случайная величина

$$\Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(A \mid B_j)\chi_{B_j}(\omega),\ \omega \in \Omega,\ A \in \mathcal{A}, \tag{1.7.7}$$

определенная Pr-почти для всех $\omega \in \Omega$.

В (1.7.7) события A и B_j независимы при любых $j = 1, 2, \ldots$, если и только если $\Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \Pr(A)$ Pr-почти для всех $\omega \in \Omega$, или, что то же самое, если и только если существуют варианты условных вероятностей такие, что $\Pr(A \mid B_j) = \Pr(A)$, $j = 1, 2, \ldots$ Это утверждение достаточно проверить для множества $\mathcal{J}$ тех $j \in \{1, 2, \ldots\}$, для которых $\Pr(B_j) > 0$, ибо для $j \notin \mathcal{J}$ A и B_j Pr-независимы: $\Pr(A \cap B_j) = \Pr(A)\Pr(B_j) = 0$. Если $\Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \Pr(A)$ Pr-почти для всех $\omega \in \Omega$, то для $j \in \mathcal{J}$ $\Pr(A \mid B_j) = \Pr(A)$, т. е. A и B_j независимы. Наборот, из независимости A и B_j, $j \in \mathcal{J}$, следует, что $\Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \Pr(A)$ Pr-почти для всех $\omega \in \Omega$.

[1] $\mathcal{B}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая B_i, $i = 1, 2, \ldots$; $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Поскольку любое непустое множество $B \in \mathcal{B}$ есть объединение некоторых B_j, $j = 1, 2, \ldots$, образующих разбиение Ω, то независимость A и B_j, $j = 1, 2, \ldots$, влечет, как нетрудно проверить, независимость A и любого $B \in \mathcal{B}$; в этом случае говорят, что A и *σ-алгебра $\mathcal{B}$ независимы*. И вообще, если $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$ — σ-алгебры и любые множества $A \in \mathcal{A}'$ и $B \in \mathcal{B}'$ независимы, то *σ-алгебры $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ называются независимыми*.

Заметим, что

$$\mathsf{E}\Pr(A \mid \mathcal{B})(\cdot) \stackrel{\triangle}{=} \int\limits_{\Omega} \Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) d\Pr(\omega) = \\ = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(A \mid B_j)\Pr(B_j) = \Pr(A), \ A \in \mathcal{A}, \quad (1.7.8)$$

где последнее равенство известно как *формула полной вероятности*.

В общем случае произвольной σ-алгебры $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *условная вероятность* $\Pr(A \mid \mathcal{B})(\cdot)$, $A \in \mathcal{A}$, *определяется как $\mathcal{B}$-измеримая функция, для каждого $A \in \mathcal{A}$ удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{B} \Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) d\Pr(\omega) = \Pr(A \cap B), \ B \in \mathcal{B}. \quad (1.7.9)$$

Поскольку $\Pr(A \cap B), B \in \mathcal{B}$, есть мера на $\mathcal{B}$, абсолютно непрерывная относительно $\Pr(\cdot)$ ($\Pr(B) = 0 \Rightarrow \Pr(A \cap B) = 0$), то факт существования и mod Pr-единственности $\Pr(A \mid \mathcal{B})(\cdot)$ при любом $A \in \mathcal{A}$ следует из теоремы Радона–Никодима [120].

Заметим, что, положив $B = \Omega$, в (1.7.9), найдем равенство

$$\mathsf{E}\Pr(A \mid \mathcal{B})(\cdot) = \int\limits_{\Omega} \Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) d\Pr(\omega) = \Pr(A), \ A \in \mathcal{A},$$

обобщающее (1.7.8).

Прикладной аспект понятий условной вероятности и независимости поясним на примере стохастического эксперимента Э, моделью которого является вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$.

Пусть $A \in \mathcal{A}$ некоторый исход Э, представляющий интерес для исследователя, и $B_1, B_2, \ldots$ — множество попарно несовместных исходов Э, обладающих свойством (1.7.6). Если исследователь может наблюдать элементарный исход Э, пусть это будет $\omega_0 \in \Omega$, то он знает об исходах Э все, а именно, любой исход $A \in \mathcal{A}$, по определению, имеет место, если и только если $\omega_0 \in A$. Если же исследователю доступна информация лишь об исходах $B_1, B_2, \ldots$, то, наблюдая, скажем, B_j, он знает, что $\omega \in B_j$, и это позволяет ему вычислить по формуле (1.7.7) значение условной вероятности $\Pr(A|B)(\omega) = \Pr(A|B_j)$. Это, уточненное на основании наблюдения B_j, значение вероятности A

может существенно отличаться от $\Pr(A)$. Если, например, $A \in \mathcal{B}$, то

$$\Pr(A \mid B_j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad B_j \subset A, \\ 0, & \text{если} \quad B_j \subset \Omega \setminus A, \end{cases}$$

т. е. в этом случае исследователь знает, имеет ли место A или нет. Если же $A \notin \mathcal{B}$, то по-прежнему $\Pr(A \mid B_j) = 1$, если $B_j \subset A$, $\Pr(A \mid B_j) = 0$, если $A \cap B_j = \varnothing$, но если $B_j \neq A \cap B_j \neq \varnothing$, то исследователь вынужден довольствоваться лишь значением $\Pr(A \mid B_j)$.

С другой стороны, если A и B_j независимы, то наблюдение B_j не уточняет вероятность A, ибо в этом случае $\Pr(A \mid B_j) = \Pr(A)$, а если независимы A и σ-алгебра $\mathcal{B}$, то возможность наблюдать исходы $B_1, B_2, \ldots$ не позволяет уточнить $\Pr(A)$, ибо в этом случае $\Pr(A \mid \mathcal{B})(\omega) = \Pr(A)$ с вероятностью единица.

Пусть $f(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}^1$ — $\mathcal{A}$-измеримая Pr-интегрируемая функция (случайная величина, $\mathsf{E}|f(\cdot)| = \int\limits_{\Omega} |f(\omega)| d\Pr(\omega) < \infty$) и $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathcal{A}$. *Условным относительно $\mathcal{B}$ математическим ожиданием $f(\cdot)$* называется $\mathcal{B}$-измеримая функция $\mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}^1$, удовлетворяющая условию:

$$\int\limits_B \mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\omega) d\Pr(\omega) = \int\limits_B f(\omega) d\Pr(\omega), \ B \in \mathcal{B}. \tag{1.7.10}$$

Факт существования и (mod Pr) единственности $\mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot)$ следует из теоремы Радона–Никодима [120].

Отметим, что, согласно (1.7.10), при $B = \Omega$

$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot)\right) = \int\limits_\Omega \mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\omega) d\Pr(\omega) = \int\limits_\Omega f(\omega) d\Pr(\omega) = \mathsf{E}f(\cdot), \tag{1.7.11}$$

и для любой $\mathcal{B}$-измеримой и Pr-интегрируемой функции $b(\omega)$, $\omega \in \Omega$,

$$\mathsf{E}((b \cdot f)(\cdot) \mid \mathcal{B})(\omega) = b(\omega) \mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\omega) \tag{1.7.12}$$

Pr-почти для всех $\omega \in \Omega$. Иначе говоря, $\mathcal{B}$-измеримую функцию можно вынести из под знака условного относительно $\mathcal{B}$ математического ожидания. [1])

Пусть $\mathcal{B}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все B_i, $i = 1, 2, \ldots$, образующие разбиение Ω (1.7.6). Поскольку в этом случае $\mathcal{B}$-измеримая функция постоянна на каждом $B_i, i = 1, 2, \ldots$, то

$$\mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \chi_{B_i}(\omega), \ \omega \in \Omega, \tag{$*$}$$

[1]) $(b \cdot f)(\omega) \triangleq b(\omega) \cdot f(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

и поэтому согласно (1.7.10) (при $B = B_j$) f_j — любое решение уравнения

$$f_j \mathrm{Pr}(B_j) = \int\limits_{B_j} f(\omega) d\mathrm{Pr}(\omega), \; j = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, любой вариант условного относительно $\mathcal{B}$ математического ожидания

$$\mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_{B_j}(\omega)}{\mathrm{Pr}(B_j)} \int\limits_{B_j} f(\omega) d\mathrm{Pr}(\omega), \; \omega \in \Omega, \tag{1.7.13}$$

где в случае $\mathrm{Pr}(B_j) = 0$ отношение $\int\limits_{B_j} f(\omega) d\mathrm{Pr}(\omega)/\mathrm{Pr}(B_j)$ может быть определено произвольно, $j = 1, 2, \ldots$

Если в (1.7.13) положить $f(\cdot) = \chi_A(\cdot)$, $A \in \mathcal{A}$, то получим выражение (1.7.7) для условной относительно $\mathcal{B}$ вероятности A.

Важные приложения конструкции условного математического ожидания связаны с задачами наилучшего в среднем квадратичном (с. к.) оценивания. Пусть, например, $f(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}^1$, $b(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}^1$, $\mathsf{E}(f(\cdot))^2 < \infty$, $\mathsf{E}(b(\cdot))^2 < \infty$, причем функция $b(\cdot)$ $\mathcal{B}$-измерима, и требуется найти наилучшую в с. к. оценку $f(\cdot)$ в классе $\mathcal{B}$-измеримых функций:

$$\mathsf{E}(f(\cdot) - b(\cdot))^2 \sim \min_{b(\cdot)},$$

где min вычисляется на классе всех $\mathcal{B}$-измеримых функций $b(\cdot)$, удовлетворяющих условию $\mathsf{E}(b(\cdot))^2 < \infty$.

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(f(\cdot) - b(\cdot))^2 &= \mathsf{E}\left(f(\cdot) - \mathsf{E}(f(\cdot)|\mathcal{B})(\cdot)\right)^2 + \\ &+ \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot) - b(\cdot)\right)^2 \geqslant \mathsf{E}(f(\cdot) - \mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot))^2, \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

и, следовательно, минимум левой части в (1.7.14) достигается при $b(\cdot) = \mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot)$ и равен $\mathsf{E}(f(\cdot) - \mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot))^2$. Равенство в (1.7.14) следует из свойств (1.7.11) и (1.7.12), ибо

$$2\mathsf{E}\left(f(\cdot) - \mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot)\right)\left(\mathsf{E}(f(\cdot) \mid \mathcal{B})(\cdot) - b(\cdot)\right) = 0.$$

Если $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — случайные величины, причем вторая — наблюдаема, а первая нет, и по наблюдению $g(\cdot)$ требуется оценить $f(\cdot)$ в классе функций $b(\cdot) = F(g(\cdot))$, выбрав должным образом функцию $F(\cdot)\colon \mathcal{R}^1 \to \mathcal{R}^1$, то эта задача сводится к только что рассмотренной, если считать, что $\mathcal{B}$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измерима случайная величина $g(\cdot)$.

Еще одна точка зрения на условную вероятность, которая плодотворна при исследовании условной возможности, представлена в § 2.2.2 гл. 2.

1.7.2. P-независимость. Условная возможность. Понятия условной вероятности и независимости, играющие важную роль в теории вероятностей, имеют формальные аналоги в теории возможностей. Поскольку в теории возможностей независимость событий может быть охарактеризована как в терминах их возможностей, так и в терминах их необходимостей, в этом параграфе рассмотрены три понятия независимости: по возможности (P-независимости), по необходимости (N-независимости) и P, N-независимости. Альтернативные характеристики нечеткой связи событий определены как условная возможность и условная необходимость. В общем случае они могут быть многозначными функциями на σ-алгебре событий.

Определение 1.7.1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ — пространство с возможностью. События $A, B \in \mathcal{A}$ назовем P-независимыми, если $\mathrm{P}(A \cap B) = \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\}$ $(= \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B)$ в шкале $\mathcal{L})$ [1]).

События $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, назовем P-независимыми в совокупности, или взаимно P-независимыми, если для любых $n = 2, 3, \ldots$ и целых $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \min\{\mathrm{P}(A_{i_1}), \ldots, \mathrm{P}(A_{i_n})\}.$$

Отметим, что в случае взаимной P-независимости событий A_1, $A_2, \ldots$ возможности любых событий из σ-алгебры $\sigma(A_1, A_2, \ldots)$ определяются возможностями событий $A_1, A_2, \ldots$, а сам факт P-независимости инвариантен относительно выбора [2]) шкалы $\mathcal{L}$ значений возможности; в этом случае в любой шкале $\mathcal{L}$ $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}) = \mathop{+}\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_{i_k})$, $\mathrm{P}(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_{i_k}) = \mathop{\bullet}\limits_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_{i_k})$.

Замечание 1.7.1. Из попарной P-независимости событий $A_1, A_2, \ldots$ не следует их взаимная P-независимость. Действительно, пусть $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, $A \in \mathcal{A}$, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 1$, $A_1 = \{x_1\} \cup \{x_2\}$, $A_2 = \{x_2\} \cup \{x_3\}$, $A_3 = \{x_3\} \cup \{x_1\}$. Тогда $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_3) = 1$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(A_3 \cap A_1) = 1$, т.е. события A_1, A_2, A_3 попарно P-независимы, но $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0 < \min\{\mathrm{P}(A_1), \mathrm{P}(A_2), \mathrm{P}(A_3)\}$.

С другой стороны, если $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \min\{\mathrm{P}(A_1), \mathrm{P}(A_2), \mathrm{P}(A_3)\}$, то это еще не означает, что A_1, A_2 и A_3 P-независимы в совокупности. Действительно, пусть $\mathrm{P}(\{x_1\}) = \mathrm{P}(\{x_2\}) = 1$, $\mathrm{P}(\{x_3\}) = 1/2$, $A_1 = \{x_1\} \cup \{x_2\}$, $A_2 = \{x_2\}$, $A_3 = \{x_3\} \cup \{x_2\}$. Тогда $\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_3) = 1$, $\mathrm{P}(A_2) = 1/2$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/2 = \min\{\mathrm{P}(A_1), \mathrm{P}(A_2), \mathrm{P}(A_3)\}$, но $\mathrm{P}(A_1 \cap A_3) = 1/2 < \min\{\mathrm{P}(A_1), \mathrm{P}(A_3)\} = 1$.

---

[1]) Часто используется термин «невзаимодействующие» события [92], см. также [80].

[2]) См. § 1.15, а также § 1.6 предисловия.

Определение 1.7.2. Вариантом условной относительно события $C \in \mathcal{A}$ возможности события $A \in \mathcal{A}$ назовем любое решение $\mathrm{P}(A|C)$ уравнения

$$\mathrm{P}(A|C) \bullet \mathrm{P}(C) = \min\{\mathrm{P}(A|C), \mathrm{P}(C)\} = \mathrm{P}(A \cap C), \; A, C \in \mathcal{A}. \quad (1.7.15)$$

Любые два варианта $\mathrm{P}(A|C)$ и $\mathrm{P}'(A|C)$ назовем эквивалентными; эквивалентность будем отмечать знаком равенства: $\mathrm{P}(A|C) = \mathrm{P}'(A|C)$.

Условной относительно события $C \in \mathcal{A}$ возможностью события $A \in \in \mathcal{A}$ назовем класс (эквивалентности) всех ее вариантов; для условной возможности будем также использовать обозначение $\mathrm{P}(A|C)$.

Каждый вариант условной относительно C возможности может быть определен формулой

$$\mathrm{P}_q(A \mid C) = \begin{cases} \mathrm{P}(A \cap C), & \text{если } \mathrm{P}(A \cap C) < \mathrm{P}(C), \\ q = q(A, C), & \text{если } \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C), \quad A \in \mathcal{A}, \end{cases} \quad (1.7.16)$$

в которой $1 \geqslant q(A, C) \geqslant \mathrm{P}(C)$, $A \in \mathcal{A}$, см. замечание 1.7.3.

Пусть $\mathrm{P}_q(A_j \,|\, C) \bullet \mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A_j \cap C)$, $j = 1, 2, \ldots$, где $q = q(A_1, A_2, \ldots, A, C)$, $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$. Тогда $(\mathop{+}\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}_q(A_j \,|\, C)) \bullet \mathrm{P}(C) = \mathop{+}\limits_{j=1}^{\infty} (\mathrm{P}_q(A_j \,|\, C) \bullet \mathrm{P}(C)) = \mathop{+}\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_j \cap C) = \mathrm{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \cap C)) = \mathrm{P}((\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \cap C) = \mathrm{P}_q(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \,|\, C) \bullet \mathrm{P}(C)$. Следовательно, среди вариантов $\mathrm{P}_q(\cdot \,|\, C)\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ условной возможности есть удовлетворяющие условию $\mathrm{P}_q(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \,|\, C) = \mathop{+}\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}_q(A_j \,|\, C)$, но, *возможно, не счетно-аддитивные, поскольку* $\mathrm{P}_q(\cdot \,|\, C)$ *зависит от последовательности* $A_1, A_2, \ldots$ Более того, так как среди решений уравнения (1.7.15) $\mathrm{P}_{q'}(X \,|\, C) \bullet \mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(X \cap C) = \mathrm{P}(C) = 1 \bullet \mathrm{P}(C)$ при $A = X$ есть $\mathrm{P}_{q'}(X \,|\, C) = 1$, то среди вариантов условной возможности есть и нормированные (но, быть может, не счетно-аддитивные). Поэтому *среди вариантов условной возможности* (1.7.16), *вообще говоря, может и не быть возможности, т. е. аддитивной*: $\mathrm{P}_q(A \cup B \,|\, C) = \max\{\mathrm{P}_q(A \,|\, C), \mathrm{P}_q(B \,|\, C)\}$, $A, B \in \mathcal{A}$, *счетно-аддитивной*: $\mathrm{P}_q(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \,|\, C) = \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant \infty} \mathrm{P}_q(A_j \,|\, C)$, $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, *и нормированной*: $\mathrm{P}_q(X \,|\, C) = 1$ функции $\mathrm{P}_q(\cdot \,|\, C)\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$.

Лемма 1.7.1. *Пусть* $0 < \mathrm{P}(C) < 1$. *Тогда*

1. *Любой вариант* (1.7.16) *условной относительно C возможности аддитивен, причем счетно-аддитивен, но не нормирован, если* $q(A, C) = \mathrm{P}(C)$, *и нормирован, но, вообще говоря, не счетно-аддитивен, если, например,* $q(A, C) = 1$.

2. *Если $C \in \mathcal{A}$ таково, что существует последовательность $B_j \subset C$, $j = 1, 2, \ldots$, такая, что* $\mathrm{P}(B_j) < \mathrm{P}(C)$, $j = 1, 2, \ldots$, *и* $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j = C$, *то любой вариант* (1.7.16) *аддитивен, но либо счетно-аддитивен и не нормирован, либо не счетно-аддитивен, т. е. любой вариант* $\mathrm{P}_q(\,\cdot \mid C)$ *не есть возможность.*

3. *Если $C \in \mathcal{A}$ таково, что* $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C)$ *для любого $A \in \mathcal{A}$, такого, что $A \cap C \neq \varnothing$, то любой вариант* (1.7.16) *определяется равенством* $\mathrm{P}_q(A \mid C) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \cap C = \varnothing, \\ q \geqslant \mathrm{P}(C), & \text{если } A \cap C \neq \varnothing, \end{cases}$ *аддитивен, счетно-аддитивен, а при $q = 1$ и нормирован.*

4. *Наконец, если* $\mathrm{P}(C) = 1$, *то* $\mathrm{P}(A \mid C) = \mathrm{P}(A \cap C)$ — *единственное решение* (1.7.15), *аддитивное, счетно-аддитивное и нормированное, а если* $\mathrm{P}(C) = 0$, *то этим свойством обладает* $\mathrm{P}(A \mid C) = \mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. 1. Если для $A, B \in \mathcal{A}$ $\max(\mathrm{P}(A \cap C), \mathrm{P}(B \cap C)) = \mathrm{P}((A \cup B) \cap C) < \mathrm{P}(C)$, то, согласно (1.7.16), $\mathrm{P}_q(A \mid C) = \mathrm{P}(A \cap C)$, $\mathrm{P}_q(B \mid C) = \mathrm{P}(B \cap C)$, $\mathrm{P}_q(A \cup B \mid C) = \mathrm{P}((A \cup B) \cap C)$ и, следовательно, в этом случае $\mathrm{P}_q(A \cup B \mid C) = \max(\mathrm{P}_q(A \mid C), \mathrm{P}_q(B \mid C))$. Если же $\mathrm{P}((A \cup B) \cap C) = \mathrm{P}(C)$, то по крайней мере одна из возможностей $\mathrm{P}(A \cap C)$ или (и) $\mathrm{P}(B \cap C)$ равна $\mathrm{P}(C)$. Если, скажем, $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C)$, то $\mathrm{P}_q(A \cup B \mid C) = q$, $\mathrm{P}_q(A \mid C) = q$ и, поскольку для любого $B \in \mathcal{A}$, $\mathrm{P}_q(B \mid C) \leqslant q$, то в этом случае $\max(\mathrm{P}_q(A \mid C), \mathrm{P}_q(B \mid C)) = q = \mathrm{P}_q(A \cup B \mid C)$. Аддитивность любого варианта (1.7.16) доказана.

Если $q = \mathrm{P}(C)$, то, согласно (1.7.16), $\mathrm{P}_q(A \mid C) = \mathrm{P}(A \cap C)$, $A \in \mathcal{A}$, и в силу счетной аддитивности возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ для любой последовательности $A_1, A_2, \ldots$ $\mathrm{P}_q(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \mid C) = \mathrm{P}((\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j) \cap C) = \mathrm{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (A_j \cap C)) = \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant \infty} \mathrm{P}(A_j \cap C) = \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant \infty} \mathrm{P}_q(A_j \mid C)$. В этом случае $\mathrm{P}_q(X|C) = q < 1$.

Если $q = 1$, то, очевидно, $\mathrm{P}_q(X \mid C) = 1$, но этот вариант условной возможности, как показано в следующем пункте, не обязательно счетно-аддитивен.

2. Пусть $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j = C$ и $\mathrm{P}(B_j) < \mathrm{P}(C)$, $j = 1, 2, \ldots$ Тогда, согласно (1.7.16), $\mathrm{P}_q(B_j \mid C) = \mathrm{P}(B_j \cap C) = \mathrm{P}(B_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) = \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant \infty} \mathrm{P}(B_j)$. Выбрав $A_j = B_j \cup (X \backslash C)$, $j = 1, 2, \ldots$, найдем: $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j = (X \setminus C) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) = X$, $\mathrm{P}_q(A_j \mid C) = \mathrm{P}_q(B_j \mid C) = \mathrm{P}(B_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\mathrm{P}_q(X \mid C) = \mathrm{P}_q(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \mid C) = \sup\limits_{1 \leqslant j < \infty} \mathrm{P}(B_j) = \mathrm{P}(C) < 1$.

3. Пусть $0 < \mathrm{P}(C) < 1$, т. е. $C \neq \varnothing$, $C \neq X$, и $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Если $A \cap C = \varnothing$, то $A_j \cap C = \varnothing$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\mathrm{P}_q(A_j \mid C) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, и $\mathrm{P}_q(A \mid C) = 0 = \sup_{1 \leqslant j < \infty} \mathrm{P}_q(A_j \mid C)$.

Если же $A \cap C \neq \varnothing$, то $\exists\, j_0\ \forall\, j \geqslant j_0\ A_j \cap C \neq \varnothing$, и в этом случае $q = \mathrm{P}_q(A \mid C) = \sup_{1 \leqslant j < \infty} \mathrm{P}_q(A_j \mid C)$.

Следовательно, в рассматриваемом случае любой вариант (1.7.16) аддитивен, счетно-аддитивен, а при $q = 1$ и нормирован, т. е. является возможностью.

4. Утверждение очевидно. ■

Замечание 1.7.2. Если в (1.7.16) $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C)$, то A и C P-независимы, ибо $\mathrm{P}(A \cap C) \leqslant \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(C)\} \leqslant \mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A \cap C)$ и, следовательно, $\mathrm{P}(A \cap C) = \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(C)\}$. Поэтому кажется естественным вместо (1.7.16) считать, что

$$\widetilde{\mathrm{P}}(A \mid C) = \begin{cases} \mathrm{P}(A \cap C), & \text{если } \mathrm{P}(A \cap C) < \mathrm{P}(C), \\ \mathrm{P}(A), & \text{если } \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C), \quad A \in \mathcal{A}, \end{cases}$$

($\mathrm{P}(A) \geqslant \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C)$!). Покажем, что если $0 < \mathrm{P}(C) < 1$, то при таком определении вариант $\widetilde{\mathrm{P}}(\cdot \mid C)\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ не аддитивен. Заметим для этого, что существуют $A, B \in \mathcal{A}$ такие, что $\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$, но $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C) > \mathrm{P}(B \cap C)$, например, для $A = C$, $B = X \setminus C$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C) < \mathrm{P}(\Omega \setminus C) = \mathrm{P}(B) = 1$, $\mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(C) > \mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$. Для таких A и B $\widetilde{\mathrm{P}}(A \mid C) = \mathrm{P}(A) \geqslant \mathrm{P}(C)$, $\widetilde{\mathrm{P}}(B \mid C) = \mathrm{P}(B \cap C) < \mathrm{P}(C)$, $\max\{\widetilde{\mathrm{P}}(A \mid C), \widetilde{\mathrm{P}}(B \mid C)\} = \mathrm{P}(A)$, но $\widetilde{\mathrm{P}}(A \cup B \mid C) = \mathrm{P}(A \cup B) = \max\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B)\} = \mathrm{P}(B)$, т. е. $\widetilde{\mathrm{P}}(A \cup B \mid C) = \mathrm{P}(B) > \max\{\widetilde{\mathrm{P}}(A \mid C), \widetilde{\mathrm{P}}(B \mid C)\} = \mathrm{P}(A)$.

Замечание 1.7.3. «Проблемы условной возможности», отмеченные в лемме 1.7.1 и в замечании 1.7.2, обусловлены тем, что в (1.7.16) условная возможность $\mathrm{P}(\cdot|C)$ определена в *шкале значений возможности* $\mathrm{P}(\cdot)$, в которой $C \in \mathcal{A}$ — не достоверное (не абсолютно возможное) событие. Учет «условия C», эквивалентный «переходу» в шкалу, в которой возможность C равна единице, позволяет определить условную возможность, обладающую всеми свойствами возможности. Такой подход рассмотрен в § 2.2 гл. 2.

Естественное решение «проблемы условной возможности» состоит в соглашении, согласно которому *в шкале $\mathcal{L}$ значений возможности* $\mathrm{P}(\cdot)$ *значение условной возможности в* (1.7.16) *любого события A не превосходит значения возможности условия C*, $\forall\, A, C \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}(A|C) \leqslant \mathrm{P}(C)$. *При таком соглашении единственным решением уравнения* (1.7.15) *является* $\mathrm{P}(A|C) = \mathrm{P}(A \cap C)$, $A, C \in \mathcal{A}$, — *счетно-аддитивное*, *нормированное на значение* $\mathrm{P}(C)$, $C \in \mathcal{A}$, которое назовем *условной относительно события $C \in \mathcal{A}$ возможностью события $A \in \mathcal{A}$, принимающей значения в шкале $\mathcal{L}$ значений возможности* $\mathrm{P}(\cdot)$.

В связи с понятием условной возможности естественно рассмотреть другое определение независимости.

Определение 1.7.2*. Событие A назовем P-независимым* от B, если существует вариант условной возможности $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$; события A и B назовем P-независимыми*, если A P-независимо* от B и B P-независимо* от A.

Лемма 1.7.2. *Следующие утверждения эквивалентны*: 1. A P-*независимо* от* B. 2. A *и* B P-*независимы**. 3. A *и* B P-*независимы*.

Доказательство. Действительно, пусть A P-независимо* от B. Тогда $\mathrm{P}(A\cap B)=\min\{\mathrm{P}(A|B),\mathrm{P}(B)\}=\min\{\mathrm{P}(A),\mathrm{P}(B)\}$, т. е. A и B P-независимы ($1\Rightarrow 3$). Если же $\mathrm{P}(A\cap B)=\min\{\mathrm{P}(A),\mathrm{P}(B)\}$, то существуют как вариант $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, так и вариант $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$, ибо в этом случае $\min\{\mathrm{P}(A|B),\mathrm{P}(B)\}=\min\{\mathrm{P}(A),\mathrm{P}(B)\}=\min\{\mathrm{P}(B|A),\mathrm{P}(A)\}$, т. е. A и B P-независимы* ($3\Rightarrow 2$). Импликация $2\Rightarrow 1$ очевидна. ■

В заключение приведем *формулу полной возможности* — аналог формулы полной вероятности, ср. с (1.7.8). Пусть $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$, тогда

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap X)=\mathrm{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\Big)=\mathop{\widetilde{+}}_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(A\cap B_n)=$$
$$=\mathop{\widetilde{+}}_{n=1}^{\infty}\big(\mathrm{P}(A|B_n)\bullet\mathrm{P}(B_n)\big),\ A\in\mathcal{A},\qquad(1.7.17)$$

для любых вариантов условных возможностей $\mathrm{P}(\cdot|B_n)$, $n=1,2,\ldots$

1.7.3. N-независимость. Условная необходимость.

Определение 1.7.3. События $A,B\in\mathcal{A}$ назовем N-независимыми, если $\mathrm{N}(A\cup B)=\max\{\mathrm{N}(A),\mathrm{N}(B)\}$ $(=\mathrm{N}(A)\,\widetilde{\bullet}\,\mathrm{N}(B))$.

События $A_i\in\mathcal{A}$, $i=1,2,\ldots$ назовем *взаимно* N-независимыми, если для любых $n=2,3,\ldots$ и целых $i_1<i_2<\ldots<i_n$

$$\mathrm{N}(A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_n})=\max\{\mathrm{N}(A_{i_1}),\ldots,\mathrm{N}(A_{i_n})\}\stackrel{\triangle}{=}\mathrm{N}(A_{i_1})\widetilde{\bullet}\ldots\widetilde{\bullet}\mathrm{N}(A_{i_n}).$$

Для дуальных N и P N-независимость событий A и B эквивалентна P-независимости событий $X\setminus A$ и $X\setminus B$, см. определение 1.7.1.

Определение 1.7.4. Вариантом условной относительно события $B\in\mathcal{A}$ необходимости события $A\in\mathcal{A}$ назовем любое решение $\mathrm{N}(A|B)$ уравнения $\max\{\mathrm{N}(A|B),\mathrm{N}(B)\}=\mathrm{N}(A\cup B)$, A, $B\in\mathcal{A}$.

Любые его решения удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}(A|B)=\mathrm{N}(A\cup B),\ \text{если } \mathrm{N}(B)<\mathrm{N}(A\cup B),\\ &\mathrm{N}(A|B)\leqslant\mathrm{N}(A\cup B),\ \text{если } \mathrm{N}(B)=\mathrm{N}(A\cup B),\ A,B\in\mathcal{A},\end{aligned}$$

и считаются эквивалентными; эквивалентность будем отмечать знаком равенства. Класс (эквивалентности) всех решений назовем условной необходимостью и, как любое решение, будем обозначать $\mathrm{N}(A|B)$. Решение $\mathrm{N}(A|B)=\mathrm{N}(A\cup B)$, $A\in\mathcal{A}$, *нормированное на значение* $\mathrm{N}(\varnothing|B)=\mathrm{N}(B)$, *назовем условной при условии* $B\in\mathcal{A}$ *необходимостью* $A\in\mathcal{A}$ *со значениями в шкале* $\mathcal{L}$ *значений необходимости* $\mathrm{N}(\cdot)$.

Определение 1.7.3*. Событие A назовем N-независимым* от B, если существует вариант условной необходимости $\mathrm{N}(A|B) = \mathrm{N}(A)$; события A и B назовем N-независимыми*, если A N-независимо* от B и B N-независимо* от A.

Имеет место дуальный аналог леммы 1.7.2.

Лемма 1.7.3. *Следующие утверждения эквивалентны:* 1. A N-*независимо** *от* B. 2. A *и* B N-*независимы**. 3. A *и* B N-*независимы.*

Доказательство. См. доказательство леммы 1.7.2. ■

Среди свойств условной необходимости выделим *формулу полной необходимости*, дуальную формуле полной возможности (1.7.17). Пусть $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_j = \varnothing$ и A — любое событие. Поскольку $A = A \cup (\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} (A \cup A_j)$, то $\mathrm{N}(A) = \inf\limits_{j} \mathrm{N}(A \cup A_j) = \widetilde{\sum\limits_{j=1}^{\infty}}(\mathrm{N}(A|A_j) \,\tilde{\bullet}\, \mathrm{N}(A_j))$, $A \in \mathcal{A}$.

Определение 1.7.5. События A и B назовем P,N-независимыми, если они P- и N-независимы.

Для дуальных N и P, см. условия (1.5.1), события A и B P,N-независимы, если и только если как A и B, так и $X \setminus A$ и $X \setminus B$ P-независимы (или N-независимы).

Замечание 1.7.4. Любой вариант условной необходимости $\mathrm{N}(A|B) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A|X \setminus B))$ как меры по аргументу $A \in \mathcal{A}$, зависящей от $B \in \mathcal{A}$, как от параметра, не дуален соответствующему варианту условной возможности $\mathrm{P}(A|B)$, $A \in \mathcal{A}$. Дуальный вариант условной необходимости есть $\widetilde{\mathrm{N}}(A|B) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{N}(A|X \setminus B) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A|B)) =$

$$= \begin{cases} = \mathrm{N}(A \cup (X \setminus B)), & \text{если } \mathrm{N}(X \setminus B) < \mathrm{N}(A \cup (X \setminus B)), \\ \leqslant \mathrm{N}(A \cup (X \setminus B)), & \text{если } \mathrm{N}(X \setminus B) = \mathrm{N}(A \cup (X \setminus B)). \end{cases}$$

Для всякого варианта условной необходимости, дуальной условной возможности, $\widetilde{\mathrm{N}}(A|A) = \begin{cases} \mathrm{N}(X) = 1, & \text{если } \mathrm{N}(X \setminus A) < 1; \\ \leqslant 1, & \text{если } \mathrm{N}(X \setminus A) = 1; \end{cases}$ $\widetilde{\mathrm{N}}(A|X \setminus A) \leqslant \mathrm{N}(A)$, $A \in \mathcal{A}$.

1.8. Условные относительно σ-алгебры интеграл и возможность

Условный относительно σ-алгебры интеграл относительно возможности является аналогом условного относительно σ-алгебры математического ожидания в теории вероятностей, см. (1.7.10), [120]. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ — пространство с возможностью, $\mathrm{p}(f(\cdot))$ — интеграл $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ относительно возможности P и $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Определение 1.8.1. Класс $\mathcal{C}$-измеримых функций $\mathrm{p}(f(\cdot)\mid\mathcal{C})(x)$, $x\in X$, принимающих значения в $\mathcal{L}$, назовем условным относительно $\mathcal{C}$ P-интегралом $f(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$, если для любого события $C\in\mathcal{C}$

$$\mathrm{p}((f\bullet\chi_{_C})(\cdot))=\mathrm{p}((\mathrm{p}(f(\cdot)\mid\mathcal{C})\bullet\chi_{_C})(\cdot)).\tag{1.8.1}$$

Каждую функцию $\mathrm{p}(f(\cdot)|\mathcal{C})(\cdot)$, удовлетворяющую уравнению (1.8.1) при любом $C\in\mathcal{C}$, назовем вариантом условного относительно $\mathcal{C}$ P-интеграла $f(\cdot)$. Условный интеграл и каждый его вариант будем обозначать одинаково посредством $\mathrm{p}(f(\cdot)|\mathcal{C})(\cdot)$.

Условный интеграл $\mathrm{p}(\chi_A(\cdot)|\mathcal{C})(x)$, $x\in X$, назовем условной относительно σ-алгебры $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ возможностью события $A\in\mathcal{A}$ и обозначим $\mathrm{P}(A\mid\mathcal{C})(x)$, $x\in X$, равно как и каждый ее вариант. Соответственно $\mathrm{p}(f(\cdot)|\mathcal{C})(\cdot)$ назовем условной относительно $\mathcal{C}$ возможностью нечеткого события с и. ф. $f(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$, ср. с (1.7.9).

Пусть функция $g(\cdot)\in\mathcal{L}(X)$ $\mathcal{C}$-измерима и $\chi_C(\cdot)$ — индикаторная функция множества $C=\{x\in X,\ g(x)=c\}\in\mathcal{C}$, $c\in[0,1]$. Тогда, воспользовавшись соотношением (1.8.1), нетрудно получить, что

$$\mathrm{p}((g\bullet f)(\cdot)\mid\mathcal{C})(x)=(g\bullet\mathrm{p}(f(\cdot)\mid\mathcal{C}))(x),\ x\in X.$$

Иначе говоря, *$\mathcal{C}$-измеримая функция как постоянная может быть вынесена из-под знака условного относительно $\mathcal{C}$ P-интеграла, ср. с* (1.7.12).

Пусть $\mathcal{D}=\{A_1,A_2,\ldots\}$ — $\mathcal{A}$-измеримое разбиение X, т. е. $A_i\in\mathcal{A}$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\ldots$, $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_j$, и $\mathcal{C}=\sigma(\mathcal{D})$ — минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{D}$. Всякая $\mathcal{C}$-измеримая функция, в том числе и $\mathrm{p}(f(\cdot)\mid\mathcal{C})(\cdot)$, принимает постоянные значения на A_i, $i=1,2,\ldots$, поэтому в данном случае

$$\mathrm{p}(f(\cdot)\mid\mathcal{C})(x)=\mathop{\Large +}_{j=1}^{\infty}\big(\mathrm{p}_j(f(\cdot))\bullet\chi_{A_j}(x)\big),\ x\in X,\tag{1.8.2}$$

где коэффициенты $\mathrm{p}_j(f(\cdot))$, $j=1,2,\ldots$, в силу равенств (1.8.1) и (1.8.2) при $C=A_k$ (и линейности $\mathrm{p}(\cdot)$) подчинены условию $\mathrm{p}((f\bullet\chi_{A_k})(\cdot))=\mathrm{p}_k(f(\cdot))\bullet\mathrm{P}(A_k)$, $k=1,2,\ldots$ Иначе говоря, $\mathrm{p}_k(f(\cdot))$ — условная относительно события A_k возможность нечеткого события с и. ф. $f(\cdot)$. В частности, для $f(\cdot)=\chi_A(\cdot)$, $A\in\mathcal{A}$, $\mathrm{p}((\chi_A\bullet\chi_{A_k})(\cdot))=\mathrm{P}(A\cap A_k)=\min\{\mathrm{p}_k(\chi_A(\cdot)),\ \mathrm{P}(A_k)\}$, $k=1,2,\ldots$, и, следовательно, $\mathrm{p}_k(\chi_A(\cdot))=\mathrm{P}(A\mid A_k)$ — вариант условной возможности, $k=1,2,\ldots$ Для условной относительно $\mathcal{C}$ возможности события $A\in\mathcal{A}$ равенство (1.8.2) дает выражение, ср. с равенством (1.7.7):

$$\mathrm{P}(A\mid\mathcal{C})(x)=\mathop{\Large +}_{k=1}^{\infty}(\mathrm{P}(A\mid A_k)\bullet\chi_{A_k}(x)),\ x\in X.\tag{1.8.3}$$

Замечание 1.8.1. События A и A_k в (1.8.3) Р-независимы при любых $k=1,2,\ldots$, если и только если для всех $x \in X$, исключая, быть может, множество их Р-меры ноль, см. § 1.10.1,

$$\mathrm{P}(A|C)(x) = \mathrm{P}(A), \tag{1.8.4}$$

или, что эквиалентно (1.8.4), если и только если существуют варианты условных возможностей

$$\mathrm{P}(A|A_k) = \mathrm{P}(A),\ k=1,2,\ldots \tag{1.8.5}$$

Действительно, согласно (1.8.4), (1.8.5) $p(\mathrm{P}(A|C) \bullet \chi_{A_k}(\cdot)) = \mathrm{P}(A|A_k) \bullet \mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}(A \cap A_k) = \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(A_k)$, $k=1,2,\ldots$, причем эти равенства верны и в тех случаях, когда для некоторых $k \in \{1,2,\ldots\}$ $\mathrm{P}(A|A_k) \neq \mathrm{P}(A)$, если [1] $\mathrm{P}(A_k)=0$.

Более того, если выполнены условия (1.8.4), то A и любое $C \in \mathcal{C}$ Р-независимы, ибо $C \in \mathcal{C} \Rightarrow C = \bigcup\limits_k A_{j_k}$ и, следовательно, $\mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(C) = \mathrm{p}(\mathrm{P}(A|C) \bullet \chi_C(\cdot)) = \mathop{+}\limits_{j:\ A_j \in C} (\mathrm{P}(A|A_j) \bullet \mathrm{P}(A_j)) = \mathop{+}\limits_k \mathrm{P}(A \cap A_{j_k}) = \mathrm{P}(A \cap C)$.

Этот факт позволяет назвать A и σ-алгебру $\mathcal{C}$ Р-независимыми, если выполнены условия (1.8.4).

Наконец, заметим, что $\mathrm{p}(\mathrm{P}(A|C)(\cdot)) = \mathop{+}\limits_{k=1}^{\infty} (\mathrm{P}(A|A_k) \bullet \mathrm{P}(A_k)) = \mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, — формула полной возможности (1.7.17).

1.9. Продолжение возможности на алгебру $\mathcal{P}(X)$

По меньшей мере два обстоятельства указывают на то, что теоретико-вероятностная схема в рассматриваемой теории возможностей не вполне адекватна. Дело прежде всего в том, что, в отличие от вероятности, счетно-аддитивная возможность не непрерывна относительно сходимости последовательности событий, определенной в пункте 3 теоремы 1.2.1. С другой стороны, требование счетной аддитивности не только не обеспечивает непрерывность возможности, но и неестественно, поскольку операция сложения в данном случае определена так, что «складывать» можно любое «количество» слагаемых, а не обязательно конечное или счетное.

1.9.1. Продолжение возможности. Покажем, что в рассматриваемой теории возможность всегда допускает вполне аддитивное продолжение на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X с сохранением всех ее

[1] Если $\mathrm{P}(A_k)=0$, то можно выбрать вариант $\mathrm{P}(A|A_k)=\mathrm{P}(A)$.

свойств и при этом может быть задана распределением. С этой целью для каждого $\mathrm{p} \in [\alpha, 1]$, где $\alpha = \inf_{A \in \mathcal{A}, A \neq \varnothing} \mathrm{P}(A)$, определим множество

$$S_\mathrm{p} = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{A},\\ \mathrm{P}(X \setminus A) \leqslant \mathrm{p}}} A = X \setminus \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A},\\ \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{p}}} A. \tag{1.9.1}$$

Если $\alpha > 0$, то условию $\mathrm{P}(A) < \alpha$, $A \in \mathcal{A}$, удовлетворяет лишь пустое множество $\varnothing \in \mathcal{A}$, и S_p естественно доопределить и для $\mathrm{p} \in [0, \alpha)$, положив $S_\mathrm{p} = X$. Если $\alpha = 0$, то выделим множество $A_0 = \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A},\\ \mathrm{P}(A)=0}} A = X \setminus \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{A},\\ \mathrm{P}(X \setminus A)=0}} A$. Множества S_p, $0 \leqslant \mathrm{p} \leqslant 1$, образуют монотонное семейство, а именно, если $0 \leqslant \mathrm{p} \leqslant q \leqslant 1$, то $S_\mathrm{p} \supset S_q$, причем $S_\mathrm{p}|_{\mathrm{p}=1} = \varnothing$, $S_\mathrm{p}|_{\mathrm{p}=0} = X$. Далее считается, что $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$, см. рис. 1.9.1.

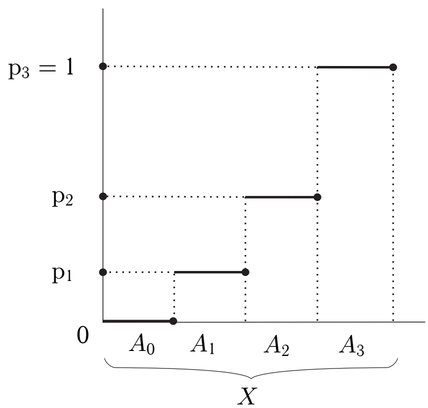


Рис. 1.9.1. $X = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$. $S_\mathrm{p} = X \setminus A_0 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $0 \leqslant \mathrm{p} < \mathrm{p}_1$, $S_\mathrm{p} = A_2 \cup A_3$, $\mathrm{p}_1 \leqslant \mathrm{p} < \mathrm{p}_2$, $S_\mathrm{p} = A_3$, $\mathrm{p}_2 \leqslant \mathrm{p} < \mathrm{p}_3 = 1$, $S_\mathrm{p} = \varnothing$, $\mathrm{p} = \mathrm{p}_3$

Определение 1.9.1. Пусть $B \subset X$ — любое множество и $\mathcal{D}(B) = \{\mathrm{p} \in [0, 1],\ S_\mathrm{p} \cap B \neq \varnothing\}$, $\mathcal{D}(\varnothing) = \varnothing$. Определим

$$\overline{\mathrm{P}}(B) = \begin{cases} \sup \mathcal{D}(B), & \text{если } \mathcal{D}(B) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \mathcal{D}(B) = \varnothing,\ B \subset X. \end{cases} \tag{1.9.2}$$

Обозначим

$$f(x) = \overline{\mathrm{P}}(\{x\}),\ x \in X. \tag{1.9.3}$$

Так как $\mathcal{D}(B) = \bigcup_{x \in B} \mathcal{D}(\{x\}) = \bigcup_{x \in B} \{\mathrm{p} \in [0, 1],\ x \in S_\mathrm{p}\}$, то в (1.9.2)

$$\overline{\mathrm{P}}(B) = \begin{cases} \sup_{x \in B} f(x) \stackrel{\triangle}{=} \textstyle{+} f(x), & \text{если } B \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } B = \varnothing,\ B \subset X. \end{cases} \tag{1.9.2*}$$

Покажем, что функция множества $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$ является продолжением возможности $\mathrm{P}(\cdot)$ с σ-алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X; функция $f(\cdot)$ (1.9.3), согласно равенству (1.9.2*), определяет распределение так продолженной возможности.

Теорема 1.9.1.

1. $\overline{\mathrm{P}}(B)$, $B \subset X$, — *возможность на алгебре* $\mathcal{P}(X)$ *всех подмножеств* X, *т. е. для любых* $A, B \in \mathcal{P}(X)$
$$A \subset B \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}(A) \leqslant \overline{\mathrm{P}}(B) \qquad (\textit{монотонность});$$
$$\overline{\mathrm{P}}(A \cup B) = \max(\overline{\mathrm{P}}(A), \overline{\mathrm{P}}(B)) \qquad (\textit{аддитивность}).$$
Для любого семейства $A_j \in \mathcal{P}(X)$, $j \in J$, $\overline{\mathrm{P}}(\bigcup_{j \in J} A_j) = \sup_{j \in J} \overline{\mathrm{P}}(A_j) \overset{\triangle}{=} \mathop{+}_{j \in J} \overline{\mathrm{P}}(A_j)$ (*полная аддитивность*).
2. *Для любого* $B \in \mathcal{P}(X)$ *возможность* $\overline{\mathrm{P}}(B)$ *определяется своим распределением* $f(x)$, $x \in X$, (1.9.3) — *значениями на одноточечных подмножествах* X — *по формулам* (1.9.2*), (1.9.3).
3. *Для любого* $A \in \mathcal{A}$ $\overline{\mathrm{P}}(A) = \mathrm{P}(A)$.

Доказательство. 1. Если $A \subset B$, то, очевидно, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и, следовательно, $\overline{\mathrm{P}}(A) \leqslant \overline{\mathrm{P}}(B)$. Далее, так как $\mathcal{D}(A \cup B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$, то $\overline{\mathrm{P}}(A \cup B) = \sup \mathcal{D}(A \cup B) = \max(\sup \mathcal{D}(A), \sup \mathcal{D}(B)) = \max(\overline{\mathrm{P}}(A), \overline{\mathrm{P}}(B))$. Наконец,
$$\overline{\mathrm{P}}(\bigcup_{j \in J} A_j) = \sup \mathcal{D}(\bigcup_{j \in J} A_j) = \sup_{j \in J} \sup \mathcal{D}(A_j) = \sup_{j \in J} \overline{\mathrm{P}}(A_j).$$

2. Это утверждение следует из (1.9.2), (1.9.3), (1.9.2*).
3. Пусть $A \in \mathcal{A}$, $\mathrm{P}(A) = q > 0$. Если $\mathrm{p} \geqslant q$, то, согласно формуле (1.9.2), $S_\mathrm{p} \subset X \setminus A$, и $S_\mathrm{p} \cap A = \varnothing$. Поэтому
$$\overline{\mathrm{P}}(A) = \sup\{\mathrm{p} |\, S_\mathrm{p} \cap A \neq \varnothing\} \leqslant q = \mathrm{P}(A). \tag{1.9.3*}$$
С другой стороны, если $\mathrm{p} < q$, то $S_\mathrm{p} \cap A \neq \varnothing$, поскольку $S_\mathrm{p} = X \setminus \bigcup_{\mathrm{P}(B) \leqslant \mathrm{p}} B$ и $A \not\subset \bigcup_{\mathrm{P}(B) \leqslant \mathrm{p}} B$. Пусть $\mathrm{p}_1 \leqslant \mathrm{p}_2 \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{p}_n \leqslant \ldots$, $\mathrm{p}_j < q$, $j = 1, 2 \ldots$, $q = \lim_{j \to \infty} \mathrm{p}_j$. Тогда $\overline{\mathrm{P}}(A) = \sup\{\mathrm{p} | S_\mathrm{p} \cap A \neq \varnothing\} \geqslant \sup_{1 \leqslant j \leqslant \infty} \{\mathrm{p}_j |\, S_{\mathrm{p}_j} \cap A \neq \varnothing\} = q = \mathrm{P}(A)$. Если же $\mathrm{P}(A) = q = 0$, то, согласно (1.9.3*), $\overline{\mathrm{P}}(A) = 0$. ■

Замечание 1.9.1. Пусть X локально компактное хаусдорфово (отделимое) топологическое пространство, функция $f(\cdot)\colon X \to [0, 1]$ полунепрерывна сверху. Тогда $\overline{\mathrm{P}}(A) = \sup_{x \in A} f(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, $A \neq \varnothing$, $\overline{\mathrm{P}}(\varnothing) = 0$, — емкость Шоке (см., например, [26]). Действительно, $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$ — емкость Шоке, если выполнены следующие условия.

1) $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$, $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}(A_1) \leqslant \overline{\mathrm{P}}(A_2)$,

2) $A_n \in \mathcal{P}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup\limits_n A_n$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{\mathrm{P}}(A_n) \uparrow \overline{\mathrm{P}}(A)$ при $n \to \infty$,

3) K_n — компактное подмножество X, $n = 1, 2, \ldots$, $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, $K = \bigcap\limits_n K_n$, $\Rightarrow \overline{\mathrm{P}}(K_n) \downarrow \overline{\mathrm{P}}(K)$ при $n \to \infty$.

Согласно теореме 1.9.1 $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$ обладает свойствами 1), 2). Покажем, что $\sup\limits_{x \in K_n} f(x) \downarrow \sup\limits_{x \in K} f(x)$. Поскольку $f(\cdot)$ полунепрерывна сверху, K_n — компактно, то множество $K_{*n} = \{x \in K_n,\ f(x) = \sup\limits_{y \in K_n} f(y)\}$ непусто и компактно для любого $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $x_i \in K_{*i}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\{x_{i_n}\}$ — сходящаяся подпоследовательность $\{x_i\} \subset K_1$, $\mathring{x} = \lim\limits_{n \to \infty} x_{i_n}$. Так как $f(x_1) \geqslant f(x_2) \geqslant \ldots$, то последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_{i_n}) = f(\mathring{x})$. Действительно, с одной стороны $f(x_{i_n}) \geqslant f(\mathring{x})$, $n = 1, 2, \ldots$, а с другой в силу полунепрерывности сверху $f(\cdot)$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_{i_n}) \leqslant f(\mathring{x})$. Так как $f(x_{i_n}) \geqslant \sup\limits_{x \in K} f(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $f(\mathring{x}) \geqslant \sup\limits_{x \in K} f(x)$, а поскольку $\mathring{x} \in K_{i_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\mathring{x} \in K$, и поэтому $f(\mathring{x}) \leqslant \sup\limits_{x \in K} f(x)$. Следовательно, $\sup\limits_{x \in K} f(x) = f(\mathring{x}) = \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in K_n} f(x)$. ■

Семейство S_{p}, $0 \leqslant \mathrm{p} \leqslant 1$, (1.9.1) определяет распределение $f(x)$, $x \in X$, (1.9.3). Рассмотрим, в какой степени распределение $f(\cdot)$ определяет исходное семейство (1.9.1). Условившись считать, что $\sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] \mid \mathrm{p} \in \varnothing\} = 0$, будем использовать следующее выражение для возможности $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$: $\overline{\mathrm{P}}(A) = \sup \mathcal{D}(A) = \sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] \mid S_{\mathrm{p}} \cap A \neq \varnothing\}$, $A \in \mathcal{P}(X)$.

Лемма 1.9.1. 1. *Для любого* $\mathrm{p} \in [0, 1]$ $S_{\sim \mathrm{p}} \triangleq \{x \in X, f(x) > \mathrm{p}\} \subset \subset S_{\mathrm{p}} \subset \{x \in X, f(x) \geqslant \mathrm{p}\} \triangleq S^{\sim}{}_{\mathrm{p}}$.

2. *Для любого* $A \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{P}_{\sim}(A) \triangleq \sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] | S_{\sim \mathrm{p}} \cap A \neq \varnothing\} = = \overline{\mathrm{P}}(A) = \sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] | S^{\sim}{}_{\mathrm{p}} \cap A \neq \varnothing\} \triangleq \mathrm{P}^{\sim}(A)$.

Доказательство. 1. Пусть $x \in S_{\mathrm{p}}$, тогда $f(x) = \sup\{q \in [0, 1] \mid x \in \in S_q\} \geqslant \mathrm{p}$, следовательно, $S_{\mathrm{p}} \subset S^{\sim}{}_{\mathrm{p}}$. Если $x \in S_{\sim \mathrm{p}}$, то $\sup\{q \in \in [0, 1] | x \in S_q\} = f(x) > \mathrm{p}$. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q_\varepsilon = f(x) - \varepsilon > \mathrm{p}$ и $x \in S_{q_\varepsilon}$. Поскольку $S_{q_\varepsilon} \subset S_{\mathrm{p}}$, то $x \in S_{\mathrm{p}}$, т. е. $S_{\sim \mathrm{p}} \subset S_{\mathrm{p}}$.

2. Так как

$$f^{\sim}(x) \triangleq \sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] | x \in S^{\sim}{}_{\mathrm{p}}\} = \sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] | f(x) \geqslant \mathrm{p}\} = f(x) = \\ = \sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] | f(x) > \mathrm{p}\} = \sup\{\mathrm{p} \in [0, 1] |\ x \in S_{\sim \mathrm{p}}\} \triangleq f_{\sim}(x),\ x \in X,$$

то $\mathrm{P}_{\sim}(A) = \sup\limits_{x \in A} f_{\sim}(x) = \overline{\mathrm{P}}(A) = \sup\limits_{x \in A} f^{\sim}(x) = \mathrm{P}^{\sim}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$. ■

Замечание 1.9.2. Семейство $\overline{S}_{\mathrm{p}}$, $\mathrm{p} \in [0,1]$, определенное с помощью возможности $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$ по формуле $\overline{S}_{\mathrm{p}} = X \setminus \bigcup\limits_{\substack{A \in \mathcal{P}(X),\\ \overline{\mathrm{P}}(A) \leqslant \mathrm{p}}} A$, $0 \leqslant \mathrm{p} \leqslant 1$, аналогичной (1.9.1), приводит к тем же значениям возможности, если в (1.9.2) использовать $\overline{S}_{\mathrm{p}}$ вместо S_{p}. Действительно, очевидно, $\overline{S}_{\mathrm{p}} \subset S_{\mathrm{p}}$, ибо $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ и $\overline{S}_{\mathrm{p}} = X \setminus \bigcup\limits_{\substack{A \in \mathcal{P}(X),\\ \sup\limits_{x \in A} f(x) \leqslant \mathrm{p}}} = X \setminus \{x \in X,\ f(x) \leqslant \mathrm{p}\} = \{x \in X,\ f(x) > {}$ ${}> \mathrm{p}\} = S_{\sim\mathrm{p}}$. Следовательно, $S_{\sim\mathrm{p}} \subset \overline{S}_{\mathrm{p}} \subset S_{\mathrm{p}} \subset S_{\mathrm{p}}^{\sim}$ и, согласно лемме 1.9.1, семейство $\overline{S}_{\mathrm{p}}$, $0 \leqslant \mathrm{p} \leqslant 1$, в (1.9.2) даст те же значения $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$.

1.9.2. О единственности продолжения возможности. Возможность $\mathrm{P}(\cdot)$ допускает, вообще говоря, различные продолжения на $\mathcal{P}(X)$. Действительно, пусть, например, $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, и $\mathcal{A}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая $\{A_1, A_2, \ldots\}$. Продолжением $\mathrm{P}(\cdot)$ на $\mathcal{P}(X)$ является любая возможность $\widehat{\mathrm{P}}(\cdot)$, удовлетворяющая условию

$$\widehat{\mathrm{P}}(A_j) = \sup_{x \in A_j} \widehat{f}(x) = \mathrm{P}(A_j),\ j = 1, 2, \ldots, \tag{1.9.4}$$

в котором $\widehat{f}(\cdot)\colon X \to [0,1]$ — распределение $\widehat{\mathrm{P}}(\cdot)$. Если A_j — не одноточечное подмножество X, условие (1.9.4) не определяет распределение $\widehat{f}(x)$, $x \in A_j$, однозначно, $j = 1, 2, \ldots$

Построенное в § 1.9 продолжение $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$ может быть охарактеризовано как максимальное в том смысле, что для любого другого продолжения $\widehat{\mathrm{P}}(\cdot)$

$$\overline{\mathrm{P}}(B) \geqslant \widehat{\mathrm{P}}(B), \quad B \in \mathcal{P}(X).$$

Для доказательства полезно воспользоваться другим представлением распределения $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$, имеющим и самостоятельный интерес.

Лемма 1.9.2. *Пусть*

$$f_*(x) = \inf\{\mathrm{P}(A),\ A \in \mathcal{A},\ x \in A\},\ x \in X. \tag{1.9.5}$$

Тогда $f_*(x) = f(x)$, $x \in X$, *где распределение* $f(\cdot)$ *определено равенством* (1.9.3), *и, следовательно, для любого непустого* $B \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{P}_*(B) = \sup_{x \in B} f_*(x) = \overline{\mathrm{P}}(B).$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$ и выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно равенству (1.9.5), во-первых, для любого $A \in \mathcal{A}$, содержащего x, $\mathrm{P}(A) > f_*(x) - \varepsilon = \mathrm{p}_*$, и, во-вторых, найдется содержащее x $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, такое, что $\mathrm{P}(A_\varepsilon) \leqslant f_*(x) + \varepsilon = \mathrm{p}^*$. Согласно определению (1.9.1) $x \in S_{\mathrm{p}_*}$, так как $x \notin \bigcup\limits_{\substack{A \in \mathcal{A}\\ \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{p}_*}} A$, и $x \notin S_{\mathrm{p}^*}$, ибо $x \in \bigcup\limits_{\substack{A \in \mathcal{A}\\ \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{p}^*}} A$. А так как

$f(x) = \sup\{\mathrm{p} \in [0,1] \,|\, x \in S_{\mathrm{p}}\}$, то $f_*(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f_*(x) + \varepsilon$, и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $f_*(x) = f(x)$, $x \in X$. ■

Лемма 1.9.3. *Равенство* (1.9.2) *определяет максимальное продолжение* $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$ *возможности* $\mathrm{P}(\cdot)$ *в том смысле, что для любого другого продолжения* $\widehat{\mathrm{P}}(\cdot)$: $\overline{\mathrm{P}}(B) \geqslant \widehat{\mathrm{P}}(B)$, $B \in \mathcal{P}(X)$.

Доказательство. Пусть $\widehat{f}(x) = \widehat{\mathrm{P}}(\{x\})$, $x \in X$, — распределение $\widehat{\mathrm{P}}(\cdot)$, покажем, что $\widehat{f}(x) \leqslant f(x)$, $x \in X$. Если одноточечное множество $\{\mathring{x}\} \in \mathcal{A}$, то $\widehat{f}(\mathring{x}) = f(\mathring{x})$, если $\{\mathring{x}\} \notin \mathcal{A}$, определим «минимальное» $A = \mathring{A} \in \mathcal{A}$, содержащее $\mathring{x}$. Так как $f(x_0) = f_*(x_0) = \inf\{\mathrm{P}(A) \,|\, x_0 \in A \in \mathcal{A}\}$, то можно указать последовательность множеств $\{A_i\}$, $x_0 \in A_i \in \mathcal{A}$, $A_{i+1} \subset A_i$, $i = 1, 2, \ldots$, такую, что $f(x_0) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{P}(A_i) = \inf\limits_i \mathrm{P}(A_i)$. Так как $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \overset{\triangle}{=} \mathring{A} \in \mathcal{A}$ и в силу полунепрерывности снизу $\mathrm{P}(\cdot)$ $\mathrm{P}(\mathring{A}) \leqslant \lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{P}(A_i)$, то $\mathrm{P}(\mathring{A}) \leqslant f(x_0)$. А так как для распределения $\widehat{f}(\cdot)$ любого другого продолжения $\mathrm{P}(\cdot)$ $\mathrm{P}(\mathring{A}) = \sup\limits_{x \in \mathring{A}} \widehat{f}(x)$, то $\widehat{f}(x_0) \leqslant f(x_0)$, $x \in \mathring{A}$. ■

1.9.3. Продолжение интеграла $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to [0,1]$. Рассмотрим продолжение интеграла $\mathrm{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, на класс $\overline{\mathcal{L}}(X)$ *всех* функций $f(\cdot)$, определенных на X, принимающих значения в $[0,1]$.

Определение 1.9.2. Функцию $\overline{\mathrm{p}}(\cdot)$, определенную на $\overline{\mathcal{L}}(X)$ и принимающую значения в $\mathcal{L}$, назовем интегралом, если она линейна в смысле определения 1.1.1 и вполне аддитивна, т. е. для любого семейства [1] $f_j(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, $j \in J$,

$$\overline{\mathrm{p}}(\sup_{j\in J} f_j(\cdot)) = \sup_{j\in J} \overline{\mathrm{p}}(f_j(\cdot)). \tag{1.9.6}$$

Интеграл $\widehat{\mathrm{p}}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, назовем продолжением интеграла $\mathrm{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, если $\widehat{\mathrm{p}}(f(\cdot)) = \mathrm{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Интеграл $\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, назовем *максимальным продолжением интеграла* $\mathrm{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, если $\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, — продолжение $\mathrm{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, и для любого другого продолжения $\widehat{\mathrm{p}}(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot)) \geqslant \widehat{\mathrm{p}}(f(\cdot)), \; f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X).$$

---

[1] В силу линейности $\overline{\mathrm{p}}(\cdot)$ монотонно не убывает, поэтому $\overline{\mathrm{p}}(\inf\limits_{j\in J} f_j(\cdot)) \leqslant \overline{\mathrm{p}}(f_i(\cdot)) \leqslant \overline{\mathrm{p}}(\sup\limits_{j\in J} f_j(\cdot))$, $i \in J$. Следовательно, вообще говоря, $\overline{\mathrm{p}}(\inf\limits_{j\in J} f_j(\cdot)) \leqslant \inf\limits_{j\in J} \overline{\mathrm{p}}(f_j(\cdot)) \leqslant \sup\limits_{j\in J} \overline{\mathrm{p}}(f_j(\cdot)) \leqslant \overline{\mathrm{p}}(\sup\limits_{j\in J} f_j(\cdot))$.

Теорема 1.9.2. 1. *Для любого интеграла* $\overline{\mathrm{p}}(\cdot)$ *имеет место представление*

$$\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min\{f(x),\, \overline{f}(x)\} \triangleq \mathrm{p}_{\overline{f}}(f(\cdot)),\; f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X),$$

в котором $\overline{f}(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ — *распределение возможности* $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$,

$$\overline{\mathrm{P}}(A) = \overline{\mathrm{p}}(\chi_A(\cdot)) = \sup_{x\in A} \overline{f}(x),\; A \in \mathcal{P}(X),$$

причем

$$\overline{f}(x) = \overline{\mathrm{P}}(\{x\}) = \overline{\mathrm{p}}(\delta_x(\cdot)),\; x \in X,$$

где $\{\delta_y(\cdot),\, y \in X\}$ — *семейство индикаторных функций одноточечных множеств* $\{y\} \subset X$

$$\delta_y(x) = \chi_{\{y\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \quad x \in X,\; y \in X,$$

из $\overline{\mathcal{L}}(X)$.

2. *Любая функция* $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ $\overline{\mathrm{P}}$-*интегрируема по Лебегу в смысле определения* 1.6.1, $\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot))$ — *ее* $\overline{\mathrm{P}}$-*интеграл*, $\overline{\mathrm{P}}(A) = \overline{\mathrm{p}}(\chi_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{P}(X)$, *в этом смысле между* $\overline{\mathrm{P}}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, *и* $\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, *имеется взаимно однозначное соответствие.*

3. $\overline{\mathrm{P}}(\cdot)$ — *максимальное продолжение* $\mathrm{P}(\cdot)$, *если и только если* $\overline{\mathrm{p}}(\cdot)$ — *максимальное продолжение* $\mathrm{p}(\cdot)$.

Доказательство. 1. Для $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ имеет место «интегральное представление» $f(x) = \sup\limits_{y\in X} \min\{\delta_y(x), f(y)\}$, $x \in X$. В силу свойства (1.9.6) и линейности $\overline{\mathrm{p}}(\cdot)$ $\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot)) = \sup\limits_{y\in X} \overline{\mathrm{p}}(\min\{\delta_y(\cdot), f(y)\}) = \sup\limits_{y\in X} \min\{f(y), \overline{\mathrm{p}}(\delta_y(\cdot))\} = \sup\limits_{y\in X} \min\{f(y), \overline{f}(y)\}$.

Доказательство утверждения 2 не отличается от доказательства теоремы 1.6.1. Утверждение 3 очевидно. ■

Замечание 1.9.3. Для любой функции $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ имеют место следующие представления [1])

$$f(x) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} \min\{\alpha,\, \chi_\alpha(x)\} = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} \min\{\alpha, \widetilde{\chi}_\alpha(x)\},\; x \in X,$$

где $\chi_\alpha(\cdot)$ и $\widetilde{\chi}_\alpha(\cdot)$ — индикаторные функции множеств $A_\alpha = \{x \in X, f(x) = \alpha\}$ и $\widetilde{A}_\alpha = \{x \in X,\; f(x) \geqslant \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$, соответственно. В силу свойства полной аддитивности (1.9.6) и линейности $\overline{\mathrm{p}}(\cdot)$ отсюда следует, что

$$\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot)) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} \min\{\alpha, \overline{\mathrm{P}}(A_\alpha)\} = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} \min\{\alpha, \overline{\mathrm{P}}(\widetilde{A}_\alpha)\}. \tag{1.9.7}$$

[1]) Первое равенство представляет *любую* функцию $f(\cdot)\colon X \to [0,1]$ как «кусочно-постоянную»: $f(x) = \alpha$, $x \in A_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$.

Первое из равенств (1.9.7) представляет $\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot)), f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, как $\overline{\mathrm{P}}$-интеграл Лебега

$$\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot)) = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \min\{\alpha, \overline{\mathrm{P}}\{x \in X, f(x) = \alpha\}\}, f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X), \qquad (1.9.8)$$

а поскольку для $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ $\overline{\mathrm{p}}(f(\cdot)) = \mathrm{p}(f(\cdot))$, то справедливо аналогичное (1.9.8) представление (1.6.3) для интеграла $\mathrm{p}(f(\cdot)), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Второе из выражений (1.9.7) определяет продолжение интеграла Суджено (1.6.6) на класс функций из $\overline{\mathcal{L}}(X)$ как $\overline{\mathrm{P}}$-интеграл Суджено.

1.9.4. Продолжение необходимости и интеграла $\mathrm{n}(\cdot)$. Рассмотренная схема продолжения возможности $\mathrm{P}(\cdot)$ на класс $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X и интеграла $\mathrm{p}(\cdot)$ на класс $\overline{\mathcal{L}}(X)$ всех функций $X \to \mathcal{L}$ позволяет аналогично продолжить необходимость $\mathrm{N}(\cdot)$ на $\mathcal{P}(X)$ и интеграл $\mathrm{n}(\cdot)$ — на $\overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$.

Определение 1.9.3. Линейную в смысле определения 1.4.1 функцию $\overline{\mathrm{n}}(\cdot)\colon \overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ назовем интегралом, продолжающим интеграл $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ на $\overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$, если она вполне аддитивна, т. е. если для любого семейства $\widetilde{f}_j(\cdot) \in \overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$, $j \in J$, $\overline{\mathrm{n}}((\inf_{j \in J} \widetilde{f}_j)(\cdot)) = \inf_{j \in J} \overline{\mathrm{n}}(\widetilde{f}_j(\cdot))$ и если $\overline{\mathrm{n}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot))$ для всех $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$. Соответственно равенство $\overline{\mathrm{N}}(A) \stackrel{\triangle}{=} \overline{\mathrm{n}}(\widetilde{\chi}_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{P}(X)$, определяет необходимость $\overline{\mathrm{N}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ как продолжение $\mathrm{N}(\cdot)$ на $\mathcal{P}(X)$.

Аналогом теоремы 1.9.2 является

Теорема 1.9.3. *Для любого интеграла* $\overline{\mathrm{n}}(\cdot)$ *имеет место представление* $\overline{\mathrm{n}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max\{\widetilde{f}(x), \widetilde{h}(x)\} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot))$, $\widetilde{f}(\cdot) \in \overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$, *согласно которому* $\overline{\mathrm{N}}(A) \stackrel{\triangle}{=} \overline{\mathrm{n}}(\widetilde{\chi}_A(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max\{\widetilde{\chi}_A(x), \widetilde{h}(x)\} = \inf_{x \in X \setminus A} \widetilde{h}(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, *где*

$$\widetilde{h}(x) = \overline{\mathrm{N}}(X \setminus \{x\}),\ x \in X,\ \inf_{x \in X} \widetilde{h}(x) = 0, \qquad (1.9.9)$$

см. примеры 1.4.1, 1.4.2. ■

Определение 1.9.4. Тройку $(X, \mathcal{P}(X), \overline{\mathrm{N}})$ назовем *пространством с необходимостью*, а нечеткий элемент ξ со значениями в X, такой, что

$$\widetilde{h}^{\xi}(x) \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{h}(x) = \overline{\mathrm{N}}(\xi \neq x),\ x \in X, \qquad (1.9.9^*)$$

назовем *каноническим для* $(X, \mathcal{P}(X), \overline{\mathrm{N}})$, поскольку $\overline{\mathrm{N}}(A) = \overline{\mathrm{N}}(\bigcup_{x \in A} \{x\}) = \overline{\mathrm{N}}(\bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\})) = \inf_{x \in X \setminus A} \widetilde{h}^{\xi}(x)$, где, согласно (1.9.9), (1.9.9*), $\widetilde{h}^{\xi}(\cdot) \in \overline{\widetilde{\mathcal{L}}}(X)$ — *распределение необходимостей неравенств* $\xi \neq x$, $x \in X$.

Замечание 1.9.4. Согласно теоремам 1.9.2, 1.9.3 и определению 1.9.4 любое пространство $(X, \widetilde{\mathcal{P}(X)}, \mathrm{P}, \mathrm{N})$ и пару соответствующих интегралов $\mathrm{p}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\overline{\mathcal{L}}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ можно *охарактеризовать в терминах распределений нечеткого элемента* ξ, *канонического для* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}, \mathrm{N})$, а именно, — *охарактеризовать как* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^{\xi}, \mathrm{N}^{\xi})$ *и как* $\mathrm{p}_{g^{\xi}}(\cdot)$ *и* $\mathrm{n}_{\widetilde{h}^{\xi}}(\cdot)$ *соответственно.*

В самом деле, определим пару функций $g^{\xi}(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, $\widetilde{h}^{\xi}(\cdot) \in \widetilde{\overline{\mathcal{L}}}(X)$ равенствами

$$g^{\xi}(x) = \mathrm{P}(\{x\}) \triangleq \mathrm{P}^{\xi}(\xi = x),\ \widetilde{h}^{\xi}(x) = \mathrm{N}(X \setminus \{x\}) \triangleq \mathrm{N}^{\xi}(\xi \neq x),\ x \in X, \tag{1.9.10}$$

согласно которым $g^{\xi}(\cdot)$ — распределение возможностей равенств $\xi = x$, $x \in X$, $\widetilde{h}^{\xi}(\cdot)$ — распределение необходимостей неравенств $\xi \neq x$, $x \in X$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}^{\xi}(\xi \in A) = \mathrm{P}(\bigcup_{x \in A} \{x\}) = \sup_{x \in A} g^{\xi}(x), \\ &\mathrm{N}^{\xi}(\xi \in A) = \mathrm{N}(\bigcup_{x \in A} \{x\}) = \mathrm{N}(\bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\})) = \\ &= \inf_{x \in X \setminus A} \mathrm{N}(X \setminus \{x\}) = \inf_{x \in X \setminus A} \widetilde{h}^{\xi}(x),\ A \in \mathcal{P}(X), \end{aligned} \tag{1.9.11}$$

причем согласно (1.9.10), (1.9.11) $\sup\limits_{x \in X} g^{\xi}(x) = \mathrm{P}(X) = 1$, $\inf\limits_{x \in X} \widetilde{h}^{\xi}(x) = \mathrm{N}(\varnothing) = 0$ и для любых функций $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ и $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\overline{\mathcal{L}}}(X)$

$$\mathrm{p}_{g^{\xi}}(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min\{f(x), g^{\xi}(x)\},\ \ \mathrm{n}_{\widetilde{h}^{\xi}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max\{\widetilde{f}(x), \widetilde{h}^{\xi}(x)\}. \tag{1.9.12}$$

Наконец, если $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^{\xi}, \mathrm{N}^{\xi})$ — образ $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}, \mathrm{N}^{\eta})$ при отображении $q(\cdot)\colon Y \to X$, то $\xi = q(\eta)$, см. § 1.3.2,

$$\begin{aligned} &g^{\xi}(x) \triangleq \mathrm{P}^{\xi}(\xi = x) = \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in q^{-1}(\{x\})) = \sup_{y \in q^{-1}(\{x\})} g^{\eta}(y),\ x \in X, \\ &\widetilde{h}^{\xi}(x) \triangleq \mathrm{N}^{\xi}(\xi \neq x) = \mathrm{N}^{\eta}(\eta \in Y \setminus q^{-1}(\{x\})) = \inf_{y \in q^{-1}(\{x\})} \widetilde{h}^{\eta}(y),\ x \in X. \end{aligned} \tag{1.9.13}$$

Если $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, то для нечеткого множества A^{η}

$$\begin{aligned} &g^{A^{\eta}}(x) \triangleq \mathrm{P}^{\eta}(x \in A^{\eta}) \equiv \mathrm{P}(\eta \in A_x) = \sup_{y \in A_x} g^{\eta}(y),\ x \in X, \\ &\widetilde{h}^{A^{\eta}}(x) \triangleq \mathrm{N}^{\eta}(x \in A^{\eta}) \equiv \mathrm{N}(\eta \in A_x) = \inf_{y \in Y \setminus A_x} \widetilde{h}^{\eta}(y),\ x \in X, \end{aligned} \tag{1.9.14}$$

а если $\xi = q(\eta)$ и A^{η} независимы, см § 1.12.2, то

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}^{\eta}(q(\eta) \in A^{\eta}) = \sup_{x \in X} \min\{g^{A^{\eta}}(x), g^{\xi}(x)\} = \mathrm{p}_{g^{\xi}}(g^{A^{\eta}}(\cdot)), \\ &\mathrm{N}^{\eta}(q(\eta) \in A^{\eta}) = \inf_{x \in X} \max\{\widetilde{h}^{A^{\eta}}(x), \widetilde{h}^{\xi}(x)\} = \mathrm{n}_{\widetilde{h}^{\xi}}(\widetilde{h}^{A^{\eta}}(\cdot)). \end{aligned} \tag{1.9.15}$$

Подчеркнем, что функции g^ξ и $\widetilde{h}^\xi$ в (1.9.10), (1.9.11), (1.9.12) априори никак не связаны, но если $\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A))$, $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\inf\limits_{x\in X\setminus A} \widetilde{h}^\xi(x) = \theta(\sup\limits_{x\in X\setminus A} g^\xi(x))$, $A \in \mathcal{P}(X)$, и, следовательно, $\widetilde{h}^\xi(\cdot) = \theta \circ g^\xi(\cdot)$, где $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ определяет любой дуальный изоморфизм $\theta\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, см. § 1.5 и § 2.3.2 гл. 2.

1.10. Нечеткие элементы

Напомним, что, согласно результатам, полученным в § 1.9, любое пространство $(Y, \mathcal{A}, \mathrm{P}, \mathrm{N})$ может быть «продолжено» до[1] $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y, \mathrm{N}_Y)$, в котором возможность $\mathrm{P}_Y(\cdot)\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{L}$ и необходимость $\mathrm{N}_Y(\cdot)\colon \mathcal{P}(Y) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ характеризуются следующими свойствами:

▶ для любого семейства $A_j \in \mathcal{P}(Y)$, $j \in J$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_Y(\bigcup_{j\in J} A_j) = \mathop{+}_{j\in J} \mathrm{P}_Y(A_j) = \sup_{j\in J} \mathrm{P}_Y(A_j), \\ &\mathrm{N}_Y(\bigcap_{j\in J} A_j) = \mathop{\widetilde{+}}_{j\in J} \mathrm{N}_Y(A_j) = \inf_{j\in J} \mathrm{N}_Y(A_j), \end{aligned} \tag{1.10.1}$$

(полная аддитивность), в частности,

▶ для любого $A \in \mathcal{P}(Y)$, согласно (1.10.1),

$$\mathrm{P}_Y(A) = \mathop{+}_{y\in A} g(y) = \sup_{y\in A} g(y),\ \mathrm{N}_Y(A) = \mathop{\widetilde{+}}_{y\in Y\setminus A} \widetilde{h}(y) = \inf_{y\in Y\setminus A} \widetilde{h}(y), \tag{1.10.2}$$

где

$$g(y) = \mathrm{P}_Y(\{y\}),\ \widetilde{h}(y) = \mathrm{N}_Y(Y \setminus \{y\}),\ y \in Y, \tag{1.10.3}$$

суть распределения $\mathrm{P}_Y(\cdot)$ и $\mathrm{N}_Y(\cdot)$;

▶ $\mathrm{P}_Y(\bigcap\limits_{j\in J} A_j) \leqslant \mathop{\bullet}\limits_{j\in J} \mathrm{P}_Y(A_j) = \inf\limits_{j\in J} \mathrm{P}_Y(A_j)$ (полунепрерывность снизу), $\mathrm{N}_Y(\bigcup\limits_{j\in J} A_j) \geqslant \mathop{\widetilde{\bullet}}\limits_{j\in J} \mathrm{N}_Y(A_j) = \sup\limits_{j\in J} \mathrm{N}_Y(A_j)$ (полунепрерывность сверху);

▶ $\mathrm{P}_Y(\varnothing) = \mathrm{N}_Y(\varnothing) = 0$, $\mathrm{P}_Y(Y) = \mathrm{N}_Y(Y) = 1$ (нормировки).

Соответственно интегралы $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ суть

$$\begin{aligned} &▶\ \mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \mathop{+}_{y\in Y} (f(y) \bullet g(y)) \overset{\triangle}{=} \sup_{y\in Y} \min\{f(y), g(y)\},\ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X); \\ &▶\ \mathrm{n}_{\widetilde{h}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \mathop{\widetilde{+}}_{y\in Y} (\widetilde{f}(y) \,\widetilde{\bullet}\, \widetilde{h}(y)) \overset{\triangle}{=} \inf_{y\in Y} \max\{\widetilde{f}(y), \widetilde{h}(y)\},\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X). \end{aligned} \tag{1.10.4}$$

Эти и многие другие факты удобно выразить, воспользовавшись понятием нечеткого элемента, канонического для пространства $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y, \mathrm{N}_Y)$, см. замечание 1.9.4. Так называется нечеткий

[1] Далее $\overline{\mathrm{P}}_Y$, $\overline{\mathrm{N}}_Y$, $\overline{\mathrm{p}}$, $\overline{\mathrm{n}}$ будем обозначать P, N, p и n соответственно, $\mathcal{L}(X)$ и $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ будут обозначать классы всех функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ и $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}$.

элемент η, определенный на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y, \mathrm{N}_Y)$, принимающий значения в $(Y, \mathcal{P}(Y))$, распределенный согласно равенствам

$$g^{\eta}(y) = \mathrm{P}_Y(\{y\}),\ \widetilde{h}^{\eta}(y) = \mathrm{N}_Y(Y \setminus \{y\}),\ y \in Y, \tag{1.10.5}$$

определяющим левые части равенств в (1.10.3) как возможности равенств $\eta = y$ и необходимости неравенств $\eta \neq y$, $y \in Y$. Значения $\mathrm{P}_Y(A)$ и $\mathrm{N}_Y(A)$ в (1.10.2) будем интерпретировать как возможность и как необходимость включения $\eta \in A$, см. замечание 1.9.4,

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}^{\eta}(\eta \in A) \equiv \mathrm{P}^{\eta}(A) = \mathrm{P}_Y(A) = \sup_{y \in A} g^{\eta}(y), \\ &\mathrm{N}^{\eta}(\eta \in A) \equiv \mathrm{N}^{\eta}(A) = \mathrm{N}_Y(A) = \inf_{y \in Y \setminus A} \widetilde{h}^{\eta}(y),\ A \in \mathcal{P}(Y). \end{aligned} \tag{1.10.6}$$

Интегралы в (1.10.4) относительно этих мер обозначим

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}_{g^{\eta}}(f(\cdot)) = \sup_{y \in Y} \min\{f(y), g^{\eta}(y)\},\ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \\ &\mathrm{n}_{\widetilde{h}^{\eta}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_{y \in Y} \max\{\widetilde{f}(y), \widetilde{h}^{\eta}(y)\},\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X). \end{aligned} \tag{1.10.7}$$

Любое отображение $q(\cdot)\colon Y \to X$ определит нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$, канонический для пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^{\xi}, \mathrm{N}^{\xi})$, в котором как в (1.10.6) $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}^{\xi}(\xi \in A) \equiv \mathrm{P}^{\xi}(A) = \mathrm{P}^{\eta}(q(\eta) \in A) = \sup_{x \in A} g^{\xi}(x), \\ &\mathrm{N}^{\xi}(\xi \in A) \equiv \mathrm{N}^{\xi}(A) = \mathrm{N}^{\eta}(q(\eta) \in A) = \inf_{x \in X \setminus A} \widetilde{h}^{\xi}(x), \end{aligned} \tag{1.10.8}$$

где как в (1.10.5)

$$\begin{aligned} &g^{\xi}(x) = \mathrm{P}^{\xi}(\xi = x) = \mathrm{P}^{\eta}(q(\eta) = x),\ g^{\xi}(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \\ &\widetilde{h}^{\xi}(x) = \mathrm{N}^{\xi}(\xi \neq x) = \mathrm{N}^{\eta}(q(\eta) \in X \setminus \{x\}),\ \widetilde{h}^{\xi}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X), \end{aligned} \tag{1.10.9}$$

суть распределения возможностей равенств $\xi = x$ и необходимостей неравенств $\xi \neq x$, $x \in X$, а интегралы относительно $\mathrm{P}^{\xi}(\cdot)$ и относительно $\mathrm{N}^{\xi}(\cdot)$ аналогично (1.10.7) суть

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}_{g^{\xi}}(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min\{f(x), g^{\xi}(x)\},\ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \\ &\mathrm{n}_{\widetilde{h}^{\xi}}(\widetilde{f}(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max\{\widetilde{f}(x), \widetilde{h}^{\xi}(x)\},\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X). \end{aligned} \tag{1.10.10}$$

Если $\mathcal{A}^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ многозначное отображение, определяющее нечеткое множество A^{η}, то его индикаторные функции одноточечного покрытия (и. ф. о. п.)

$$\begin{aligned} &g^{A^{\eta}}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(x \in A^{\eta}) \equiv \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in A_x),\ g^{A^{\eta}}(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \\ &\widetilde{h}^{A^{\eta}}(x) = \mathrm{N}^{\eta}(x \in A^{\eta}) \equiv \mathrm{N}^{\eta}(\eta \in A_x),\ x \in X,\ \widetilde{h}^{A^{\eta}}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X), \end{aligned} \tag{1.10.11}$$

определяют возможность и соответственно необходимость покрытия $x \in A^{\eta}$, а *для независимых* $\xi = q(\eta)$ и A^{η}, см. § 1.12.2, — возможность и необходимость покрытия $\xi = q(\eta) \in A^\eta$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in A^\eta) &= \mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min\{g^{A^\eta}(x), g^\xi(x)\}, \\ \mathrm{N}^\eta(q(\eta) \in A^\eta) &= \mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)) = \inf_{x\in X} \max\{\widetilde{h}^{A^\eta}(x), \widetilde{h}^\xi(x)\}. \end{aligned} \tag{1.10.12}$$

Меры в (1.10.6), ра́вно как и интегралы в (1.10.7), априори никак не связаны, но их следует согласовать, если они должны определить нечеткую модель одного и того же нечеткого объекта, см. § 1.5. В этом параграфе будем считать их *вполне согласованными* (*дуальными*) как в равенствах (1.5.1) и (1.5.2), а именно, для некоторого $\theta(\cdot) \in \Theta$

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}^\eta(A) = \theta(\mathrm{P}^\eta(Y \setminus A)),\ \mathrm{P}^\eta(A) = \theta^{-1}(\mathrm{N}^\eta(Y \setminus A)),\ A \in \mathcal{P}(Y), \\ &\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\eta}(\widetilde{f}(\cdot)) = \theta * \mathrm{p}_{g^\eta}(f(\cdot)) \triangleq \theta(\mathrm{p}_{g^\eta}(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))), \\ &\mathrm{p}_{g^\eta}(f(\cdot)) = \theta^{-1} * \mathrm{n}_{\widetilde{h}^\eta}(\widetilde{f}(\cdot)) \triangleq \theta^{-1}(\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\eta}(\theta \circ f(\cdot))), \end{aligned} \tag{1.10.13}$$

где $\widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ f(\cdot)$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(Y)$, $\widetilde{h}^\eta(\cdot) = \theta \circ g^\eta(\cdot)$, $g^\eta(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $\widetilde{h}^\eta(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$. При этом, как следствие (1.10.13), см. § 1.5.2,

$$\mathrm{N}^\xi(A) = \theta(\mathrm{P}^\xi(X \setminus A)),\ \mathrm{P}^\xi(A) = \theta^{-1}(\mathrm{N}^\xi(X \setminus A)),\ A \in \mathcal{P}(X), \tag{1.10.14}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{f}(\cdot)) = \theta * \mathrm{p}_{g^\xi}(f(\cdot)) \triangleq \theta(\mathrm{p}_{g^\xi}(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))), \\ &\mathrm{p}_{g^\xi}(f(\cdot)) = \theta^{-1} * \mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{f}(\cdot)) \triangleq \theta^{-1}(\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\theta \circ f(\cdot))), \end{aligned} \tag{1.10.15}$$

где $\widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ f(\cdot)$, $\widetilde{h}^\xi(\cdot) = \theta \circ g^\xi(\cdot)$.

В случае мер в (1.10.12) такая согласованность $\mathrm{P}^\eta(\cdot)$ и $\mathrm{N}^\eta(\cdot)$ названа *дуальной дополнительностью* и выражена согласно равенствам

$$\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)) = \theta(\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{X\setminus A^\eta}(\cdot))),\ \mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot)) = \theta^{-1}(\mathrm{n}_{h^\xi}(h^{X\setminus A^\eta}(\cdot))), \tag{1.10.16}$$

где

$$\begin{aligned} &\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot) = \theta \circ g^{X\setminus A^\eta}(\cdot),\ \widetilde{h}^\xi(\cdot) = \theta \circ g^\xi(\cdot), \\ &g^{A^\eta}(\cdot) = \theta^{-1} \circ \widetilde{h}^{X\setminus A^\eta}(\cdot),\ g^\xi(\cdot) = \theta^{-1} \circ \widetilde{h}^\xi(\cdot). \end{aligned} \tag{1.10.17}$$

В случае полной согласованности мер $\mathrm{P}^\xi(\cdot)$, $\mathrm{N}^\xi(\cdot)$ и интегралов $\mathrm{p}_{g^\xi}(\cdot)$ и $\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\cdot)$ согласно равенствам (1.10.16), (1.10.17) нечеткая модель может быть охарактеризована в терминах значений меры $\mathrm{P}^\eta(\cdot)$ и интеграла $\mathrm{p}_{g^\xi}(\cdot)$ на дополнительных событиях A и $X \setminus A$, $A \in \mathcal{P}(X)$, A^η и $X \setminus A^\eta$ и т. п., т. е. мера $\mathrm{N}^\xi(\cdot)$ и интеграл $\mathrm{n}_{\widetilde{h}^\xi}(\cdot)$ могут быть исключены из рассмотрения. Полная согласованность мер характерна для нечетких моделей стохастических объектов, см. § 2.3.2 гл. 2.

1.10.1. Множества P-меры ноль и N-меры единица. Пусть $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$ — пространство с возможностью, η — канонический нечеткий элемент, $g^\eta(\cdot)\colon Y \to \mathcal{L}$ — его распределение, определяющее возможность $\mathrm{P}^\eta(A) = \sup_{y\in A} g^\eta(y)$, $A \in \mathcal{P}(Y)$, значение $g^\eta(y)$ — возможность равенства $\eta = y \in Y$. Рассмотрим разбиение $Y = Y_{(0)} \cup Y_{(1)}$, где $Y_{(0)} = \{y \in Y,\ g^\eta(y) = 0\}$, $Y_{(1)} = \{y \in Y,\ g^\eta(y) > 0\}$, $Y_{(0)} \cap Y_{(1)} = \varnothing$.

Отметим, что

► $Y_{(1)}$ — *минимальное* по включению множество в Y, для которого $\mathrm{N}^\eta(Y_{(1)}) = \theta(\mathrm{P}^\eta(Y\backslash Y_{(1)})) = 1$.

Действительно, для любого $A = Y_{(1)}\backslash\{y\}$, $y \in Y_{(1)}$, $\mathrm{N}^\eta(A) = \theta(\mathrm{P}^\eta(Y_{(0)} \cup \{y\})) = \theta \circ g^\eta(y) < 1$, ибо $g^\eta(y) > 0$; *любое множество, содержащее* $Y_{(1)}$, *назовем множеством* N^η*-меры единица*;

► $Y_{(0)}$ — *максимальное* по включению множество в Y, для которого $\mathrm{P}^\eta(Y_{(0)}) = 0$, поскольку для любого $A = Y_{(0)} \cup \{y\}$, $y \in Y_{(1)}$, $\mathrm{P}^\eta(A) = \max(\mathrm{P}^\eta(Y_{(0)}), \mathrm{P}^\eta(\{y\})) = g^\eta(y) > 0$; *любое множество, содержащееся в* $Y_{(0)}$, *назовем множеством* P^η*-меры ноль*;

► $\mathrm{P}^\eta(Y_{(1)}) = \mathrm{N}^\eta(Y_{(1)}) = 1$ и $\mathrm{N}^\eta(Y_{(0)}) = \mathrm{P}^\eta(Y_{(0)}) = 0$.

Эти свойства множеств $Y_{(0)}$ и $Y_{(1)}$ можно принять в качестве их определения в общем случае, в частности и тогда, когда возможность $\mathrm{P}^\eta(\cdot)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}$, определеная на σ-алгебре $\mathcal{B}$, не содержащей одноточечных подмножеств Y, не имеет распределения $g^\eta(\cdot)\colon Y \to \mathcal{L}$, а канонический нечеткий элемент η охарактеризован возможностями включений $\mathrm{P}^\eta(\eta \in A)$, $A \in \mathcal{B}$.

Лемма 1.10.1. *Пусть* $Y_{(1)}$ — *минимальное по включению множество в* Y, *для которого* $\mathrm{N}^\eta(Y_{(1)}) = 1$, *а* $Y_{(0)}$ — *максимальное по включению множество в* Y, *для которого* $\mathrm{P}^\eta(Y_{(0)}) = 0$, *тогда* $Y = Y_{(0)} \cup Y_{(1)}$, $Y_{(0)} \cap Y_{(1)} = \varnothing$.

Доказательство. Так как $1 = \mathrm{N}^\eta(Y_{(1)}) = \theta(\mathrm{P}^\eta(Y\backslash Y_{(1)}))$, то $\mathrm{P}^\eta(Y\backslash Y_{(1)}) = 0$, т.е. $Y\backslash Y_{(1)} \subset Y_{(0)}$, или иначе $Y_{(1)} \supset Y\backslash Y_{(0)}$. С другой стороны $\mathrm{N}^\eta(Y\backslash Y_{(0)}) = \theta(\mathrm{P}^\eta(Y_{(0)})) = 1$, т.е. $Y\backslash Y_{(0)} \supset Y_{(1)}$. Следовательно, $Y\backslash Y_{(0)} = Y_{(1)}$. ■

Следующая лемма характеризует свойства разбиения $Y = Y_{(0)} \cup Y_{(1)}$.

Лемма 1.10.2. *Пусть* $A \in \mathcal{P}(Y)$, $A_0 \subset Y_{(0)}$, $A_1 \supset Y_{(1)}$, *тогда* $\mathrm{P}^\eta(A \cup A_0) = \mathrm{P}^\eta(A)$, $\mathrm{P}^\eta(A \cap A_0) = 0$, $\mathrm{N}^\eta(A \cup A_0) = \mathrm{N}^\eta(A)$, $\mathrm{N}^\eta(A \cap A_0) = 0$, $\mathrm{P}^\eta(A \cap A_1) = \mathrm{P}^\eta(A)$, $\mathrm{N}^\eta(A \cap A_1) = \mathrm{N}^\eta(A)$.

Доказательство. Действительно, $\mathrm{P}^\eta(A \cup A_0) = \max(\mathrm{P}^\eta(A), \mathrm{P}^\eta(A_0)) = \mathrm{P}^\eta(A)$, $\mathrm{P}^\eta(A \cap A_0) \leqslant \mathrm{P}^\eta(A_0) = 0$; $\mathrm{N}^\eta(A) \leqslant \mathrm{N}^\eta(A \cup A_0) = \theta(\mathrm{P}^\eta((Y\backslash A) \cap (Y\backslash A_0))) \leqslant \theta(\mathrm{P}^\eta((Y\backslash A) \cap Y_{(1)})) = \mathrm{N}^\eta(A)$, ибо $Y\backslash A_0 \supset Y_{(1)}$, $\mathrm{N}^\eta(A \cap A_0) = \min\{\mathrm{N}^\eta(A), \mathrm{N}^\eta(A_0)\} = \mathrm{N}^\eta(A_0) = 0$ и наконец, $\mathrm{P}^\eta(A \cap A_1) = \theta(\mathrm{N}^\eta((Y\backslash A) \cup (Y\backslash A_1)) = \theta(\mathrm{N}^\eta(Y\backslash A)) = \mathrm{P}^\eta(A)$, $\mathrm{N}^\eta(A \cap A_1) = \theta(\mathrm{P}^\eta((Y\backslash A) \cup (Y\backslash A_1)) = \theta(\mathrm{P}^\eta(Y\backslash A)) = \mathrm{N}^\eta(A)$, ибо $Y\backslash A_1 \subset Y_{(0)}$. ■

1.10.2. Функции нечетких элементов. Равенство, эквивалентность. Если $q(\cdot)\colon Y \to X$ — заданная функция и нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$ — функция нечеткого элемента η, то

$$g^\xi(x) = \mathrm{P}^\eta(\eta \in q^{-1}(x)) = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)}, q(y) = x\}, \quad x \in X,$$

— распределение [1)] ξ, где $q^{-1}(x) = \{y \in Y,\ q(y) = x\}$, $x \in X$.

[1)] Для любого $A \in \mathcal{P}(Y)$ $\sup\{g^\eta(y)|y \in A\} = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in A \cap Y_{(1)}\}$, см. лемму 1.10.2.

Если $\bigcup\limits_{x\in X} q^{-1}(x) \supset Y_{(1)}$, то $\sup\limits_{x\in X} g^{\xi}(x) = 1$.

Определение 1.10.1. Пусть $q_i(\cdot)\colon Y \to X$, $i = 1, 2$. Нечеткие элементы $\xi_i = q_i(\eta)$, $i = 1, 2$, назовем

▶ равными (с необходимостью единица), $\xi_1 = \xi_2 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, если $\{y \in Y,\ q_1(y) = q_2(y)\} \supset Y_{(1)}$;

▶ эквивалентными, $\xi_1 \simeq \xi_2$, если $g^{\xi_1}(x) = g^{\xi_2}(x)$, $x \in X$, где $g^{\xi_i}(x) = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y,\ q_i(y) = x\}$, $x \in X$, — распределение ξ_i, $i = 1, 2$.

Если x_1 — некоторый фиксированный элемент X и $\xi_1 \overset{\triangle}{=} q_1(\eta) = x_1 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, т. е. $\{y \in Y,\ q_1(y) = x_1\} \supset Y_{(1)}$, то нечеткий элемент ξ_1 назовем четким, равным $x_1 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$.

Лемма 1.10.3. *Пусть* $\xi_i = q_i(\eta)$, $i = 1, 2$. *Тогда*

▶ *если* $\xi_1 = \xi_2 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, *то* $\xi_1 \simeq \xi_2$;

▶ *если* $\xi_1 \simeq \xi_2$, *то для любого* $A \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{P}^\eta(\xi_1 \in A) = \mathrm{P}^\eta(\xi_2 \in A)$;

▶ *если* $\xi_1 = x_1 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, *то* $\xi_1 \simeq x_1$ *и наоборот, если* $\xi_1 \simeq x_1$, *то* $\xi_1 = x_1 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$.

Доказательство. Если $\xi_1 = \xi_2 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, то $g^{\xi_1}(x) = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y,\ q_1(y) = x\} = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)}, q_1(y) = x\} = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)},\ q_2(y) = x\} = g^{\xi_2}(x)$, $x \in X$.

Если $\xi_1 \simeq \xi_2$, то $\mathrm{P}^\eta(\xi_1 \in A) = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)},\ q_1(y) \in A\} = \sup\{\sup\{g^\eta(y) | y \in Y_{(1)},\ q_1(y) = x\} | x \in A\} = \sup\{g^{\xi_1}(x) | x \in A\} = \sup\{g^{\xi_2}(x) | x \in A\} = \mathrm{P}^\eta(\xi_2 \in A)$.

Наконец, если $\xi_1 = x_1 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, то, согласно первому утверждению леммы, $\xi_1 \simeq x_1 \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, причем распределение ξ_1

$$g^{\xi_1}(x) = \sup\{g^\eta(y) | y \in Y_{(1)},\ q_1(y) = x\} = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_1, \\ 0, & \text{если } x \neq x_1, \end{cases} \quad x \in X.$$

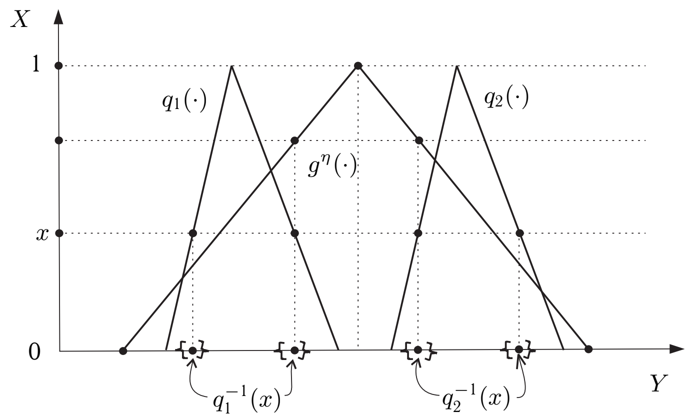


Рис. 1.10.1. В силу симметрии функций $g^\eta(\cdot)$, $q_1(\cdot)$ и $q_2(\cdot)$, показанной на рисунке, $g^{\xi_1}(x) = g^{\xi_2}(x)$, $x \in X$, в то время как $q_1(y) \neq q_2(y)$, $y \in Y$

С другой стороны, если это условие выполнено, то $\mathrm{P}^{\eta}(\xi_1 = x_1) = 1$ и $\mathrm{P}^{\eta}(\xi_1 \neq x_1) = 0$, т. е. $\{y \in Y,\ q_1(y) \neq x_1\} \subset Y_{(0)}$, поэтому $\{y \in Y,\ q_1(y) = x_1\} \supset Y_{(1)}$, т. е. $\xi_1 = x_1 (\mod \mathrm{N}^{\eta})$. ■

На рис. 1.10.2 приведен пример, показывающий, что из эквивалентности $\xi_1 \simeq \xi_2$ равенство $\xi_1 = \xi_2\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^{\eta})$, вообще говоря, не следует.

1.10.3. Независимость нечетких элементов. Условное распределение. Пусть $q_i(\cdot)\colon Y \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные функции.

Определение 1.10.2. Нечеткие элементы $\xi_i = q_i(\eta)$, $i = 1, \ldots, n$, со значениями соответственно в X_i, $i = 1, \ldots, n$, назовем взаимно P_Y-независимыми, или — P_Y-независимыми в совокупности, если для любых $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, возможность системы равенств $\xi_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$g^{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} g^{\xi_i}(x_i) = \overset{n}{\underset{i=1}{\bullet}} g^{\xi_i}(x_i), \tag{1.10.18}$$

где $g^{\xi_i}(x_i) = \sup\{g^{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \in X_1, \ldots, x_{i-1} \in X_{i-1}, x_{i+1} \in X_{i+1}, \ldots, x_n \in X_n\}$, $x_i \in X_i$, — маргинальное распределение ξ_i, $i = 1, \ldots, n$.

В общем случае, когда η — канонический нечеткий элемент для $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}_Y)$, нечеткие элементы $\xi_1 = q_1(\eta), \ldots, \xi_n = q_n(\eta)$ принимают значения соответственно в $(X_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{A}_n)$, где $q_1(\cdot)\colon Y \to X_1, \ldots, q_n(\cdot)\colon Y \to X_n$ суть $\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{B}, \mathcal{A}_n$-измеримые функции [1)], тогда взаимная P_Y-независимость $\xi_1, \ldots, \xi_n$ определяется следующим образом.

Определение 1.10.3. Нечеткие элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$, определенные на $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}_Y)$ и принимающие значения соответственно в $(X_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{A}_n)$, называются взаимно P_Y-независимыми, если для любых множеств $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\mathrm{P}_Y(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) = \min\{\mathrm{P}_Y(\xi_1 \in A_1), \ldots, \mathrm{P}_Y(\xi_n \in A_n)\} = \overset{n}{\underset{i=1}{\bullet}} \mathrm{P}_Y(\xi_i \in A_i). \tag{1.10.19}$$

Если $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{A}_j = \mathcal{P}(X_j)$, $j = 1, \ldots, n$, то определения 1.10.2 и 1.10.3 эквивалентны. Действительно, в таком случае возможности в левой и правой частях равенства (1.10.19) могут быть заданы распределениями, и если равенство (1.10.18) выполнено, то $\mathrm{P}_Y(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) = \sup\{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} g^{\xi_i}(x_i) | x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup\limits_{x_i \in A_i} g^{\xi_i}(x_i) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{P}_Y(\xi_i \in A_i)$, т. е. выполнено условие (1.10.19). Наоборот, если для любых $A_j \in \mathcal{P}(X_j)$ выполнено условие (1.10.19), то для произвольных $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, выбрав в (1.10.19) $A_i = \{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, получим (1.10.18).

[1)] Функция $q_j(\cdot)\colon Y \to X_j$ $\mathcal{B}, \mathcal{A}_j$-измерима, т. е. $\forall A_j \in \mathcal{A}_j$ $q_j^{-1}(A_j) \in \mathcal{B}$, $j = 1, \ldots, n$.

Замечание 1.10.1. Если считать, что меры $\mathrm{P}_Y(\cdot)$ и $\mathrm{N}_Y(\cdot)$ вполне согласованные (дуальные), $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, см. § 1.5.1, то определение 1.10.3 независимости $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ означает, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ P_Y-, N_Y- и P, N-независимы, см. определения 1.7.1, 1.7.3 и 1.7.5. Действительно, N_Y-независимость $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ согласно определению 1.10.3 означала бы, что для любых $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$

$$\mathrm{N}_Y\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{y \in Y,\, q_i(y) \in A_i\}\Big) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{N}_Y(\{y \in Y,\, q_i(y) \in A_i\}), \quad (1.10.19^*)$$

что в силу (1.5.1) эквивалентно условию: для любых $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$
$\mathrm{P}_Y\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{y \in Y,\, q_i(y) \in X_i \setminus A_i\}\Big) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\, q_i(y) \in X_i \setminus A_i\})$.

Отметим также, что для взаимно независимых $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $\mathrm{P}_Y\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{y \in Y,\, q_i(y) \in A_i\}\Big) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{i=1}^{n} \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\, q_i(y) \in A_i\})$, $\mathrm{P}_Y\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{y \in Y,\, q_i(y) \in A_i\}\Big) = \mathop{\bullet}_{i=1}^{n} \mathrm{P}_Y(\{y \in Y,\, q_i(y) \in A_i\})$, т. е. возможности событий в левых частях этих равенств определяются возможностями событий $\{y \in Y,\, q_i(y) \in A_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Если же $\mathrm{P}_Y(\cdot)$ и $\mathrm{N}_Y(\cdot)$ не дуальны, т. е. если $\forall\, \theta(\cdot) \in \Theta\ \exists\, A \in \mathcal{P}(Y)$ $\mathrm{N}_Y(A) \neq \theta(\mathrm{P}_Y(Y \setminus A))$, то условие (1.10.19*) взаимной N_Y-независимости с условием (1.10.19) P_Y-независимости непосредственно не связано. Далее для упрощения формулировок будем считать, что $\mathrm{P}_Y(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}_Y(\cdot)$, а P_Y-*независимость будем называть независимостью.*

Лемма 1.10.4. *Пусть $z_i(\cdot)\colon X_i \to Z_i$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольные функции, и нечеткие элементы ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, взаимно независимы. Тогда взаимно независимы и нечеткие элементы $\zeta_i = z_i(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, n$, причем для любых $z_i \in Z_i$, $i = 1, \ldots, n$, $g^{\zeta_1, \ldots, \zeta_n}(z_1, \ldots, z_n) = \sup\{\min_{1 \leqslant j \leqslant n} g^{\xi_j}(x_j) \,|\, x_i \in X_i,\, z_i(x_i) = z_i,\, i = 1, \ldots, n\} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup\{g^{\xi_i}(x_i) \,|\, x_i \in X_i, z_i(x_i) = z_i\} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} g^{\zeta_i}(z_i)$, где $g^{\zeta_i}(z_i) = \sup\{g^{\xi_i}(x_i) \,|\, x_i \in X_i,\, z_i(x_i) = z_i\}$, $z_i \in Z_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

В частности, если $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и

$$g^{\eta}(y) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} g^{\eta_i}(y_i), \quad y_i \in Y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (1.10.20)$$

то при любых функциях $q_i(\cdot)\colon Y_i \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$, нечеткие элементы $\xi_i = q_i(\eta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, взаимно независимы, причем для любых $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$g^{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} g^{\xi_i}(x_i), \quad (1.10.21)$$

где

$$g^{\xi_i}(x_i) = \sup\{g^{\eta_i}(y_i) \mid y_i \in Y_i,\ q_i(y_i) = x_i\},\ x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n. \quad (1.10.22)$$

В дальнейшем, как правило, используется модель независимости (1.10.20–1.10.22), верная при *любых функциях* $q_i(\cdot)\colon Y_i \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.10.4. Вариантом условного распределения нечетких элементов $\xi_1, \ldots, \xi_k$ при условии $\xi_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \xi_n = x_n$ называется любое решение $g^{\xi_1,\ldots,\xi_k|\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_k|\ x_{k+1}, \ldots, x_n)$ уравнения

$$\min\{g^{\xi_1,\ldots,\xi_k|\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_k|x_{k+1}, \ldots, x_n), g^{\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_{k+1}, \ldots, x_n)\} = g^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n),\ x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n, \quad (1.10.23)$$

где

$$g^{\xi_{k+1},\ldots,\xi_n}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \sup_{\substack{x_i \in X_i,\\ i=1,\ldots,k}} g^{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) \quad (1.10.24)$$

— маргинальное распределение $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$.

Для упрощения формулировок обозначим $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \sim \zeta_1$, $(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) \sim \zeta_2$, $X_1 \times \ldots \times X_k \sim Z_1$, $X_{k+1} \times \ldots \times X_n \sim Z_2$, $(x_1, \ldots, x_k) \sim z_1$, $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \sim z_2$ и рассмотрим уравнение (1.10.23) при условии (1.10.24), переписав их в виде

$$\min\{g^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|z_2),\ g^{\zeta_2}(z_2)\} = g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2),\ z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \quad (1.10.25)$$

где

$$g^{\zeta_2}(z_2) = \sup_{z_1 \in Z_1} g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2). \quad (1.10.26)$$

Поскольку в (1.10.25), (1.10.26) $g^{\zeta_2}(z_2) \geqslant g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, уравнение (1.10.25) всегда имеет решение. Любой вариант условного, при условии $\zeta_2 = z_2$, распределения ζ_1 можно определить равенством

$$g^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|z_2) = \begin{cases} g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2), & \text{если } g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2) < g^{\zeta_2}(z_2), \\ q(g^{\zeta_2}(z_2)), & \text{если } g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2) = g^{\zeta_2}(z_2), \end{cases}$$
$$z_1 \in Z_1,\ z_2 \in Z_2, \quad (1.10.27)$$

где $q(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $q(a) \geqslant a$, $a \in [0,1]$.

Заметим, что при некоторых $z_2 \in Z_2$ среди вариантов условного распределения $g^{\zeta_1|\zeta_2}(\cdot|z_2)$ может и не быть распределения условной возможности. Действительно, если в (1.10.26) при $\overline{z}_2 \in Z_2$ точная верхняя грань не достигается, то $g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, \overline{z}_2) < g^{\zeta_2}(\overline{z}_2)$, $z_1 \in Z_1$, и, следовательно, в (1.10.25) (см. (1.10.27))

$$\min\{g^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|\overline{z}_2), g^{\zeta_2}(\overline{z}_2)\} = g^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|\overline{z}_2) = g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, \overline{z}_2). \quad (1.10.28)$$

Если при этом $g^{\zeta_2}(\overline{z}_2) < 1$, то согласно (1.10.26), (1.10.28) $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} g^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|\overline{z}_2) = g^{\zeta_2}(\overline{z}_2) < 1$. ■

1.10.4. Переходные возможность и необходимость. Для определения условного распределения $g^{\zeta_1|\zeta_2}(\cdot|z_2)$ при каждом $z_2 \in Z_2$ необходимо знать совместное распределение $g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, нечетких элементов ζ_1, ζ_2. Формулами (1.10.25), (1.10.26) можно воспользоваться для определения $g^{\zeta_1,\zeta_2}(\cdot,\cdot)$, если ввести понятие переходной возможности и ее распределения [1].

Определение 1.10.5. Отображение $\mathrm{P}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_1) \times Z_2 \to [0,1]$ называется *переходной возможностью на* $(Z_2, \mathcal{P}(Z_2)), (Z_1, \mathcal{P}(Z_1))$, если при каждом $z_2 \in Z_2$ $\mathrm{P}(\cdot|z_2)$ есть возможность [2] на $(Z_1, \mathcal{P}(Z_1))$; функция $g(\cdot|\cdot)\colon Z_1 \times Z_2 \to [0,1]$ называется *распределением переходной возможности* $\mathrm{P}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_1) \times Z_2 \to [0,1]$, если при каждом $z_2 \in Z_2$ $g(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$ — распределение возможности $\mathrm{P}(\cdot|z_2)\colon \mathcal{P}(Z_1) \to [0,1]$, т.е. если для любого $A \in \mathcal{P}(Z_1)$ $\mathrm{P}(A|z_2) = \sup\limits_{z_1 \in A} g(z_1|z_2)$, и, в частности, $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} g(z_1|z_2) = 1$, $z_2 \in Z_2$.

Непосредственным следствием определения 1.10.5 является

Лемма 1.10.5. *Для произвольной возможности* $\mathrm{P}_{Z_2}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_2) \to [0,1]$ *на* $(Z_2, \mathcal{P}(Z_2))$, *заданной распределением* $g(\cdot)\colon Z_2 \to [0,1]$,

$$g(z_1, z_2) = \min\{g(z_1|z_2), g(z_2)\}, \; z_1 \in Z_1, \; z_2 \in Z_2, \tag{1.10.29}$$

— *распределение возможности* $\mathrm{P}_{Z_1 \times Z_2}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_1 \times Z_2) \to [0,1]$ *на* $(Z_1 \times Z_2, \mathcal{P}(Z_1 \times Z_2))$, *определенной формулой*

$$\mathrm{P}_{Z_1 \times Z_2}(C) = \sup_{(z_1, z_2) \in C} g(z_1, z_2), \; C \in \mathcal{P}(Z_1 \times Z_2), \tag{1.10.30}$$

и при этом в (1.10.29)

$$g(z_2) = \sup_{z_1 \in Z_1} g(z_1, z_2), \; z_2 \in Z_2. \tag{1.10.31}$$

Доказательство. Действительно, аддитивность и счетная аддитивность $\mathrm{P}_{Z_1 \times Z_2}(\cdot)$ (см. (1.10.30)) очевидны и $\mathrm{P}_{Z_1 \times Z_2}(Z_1 \times Z_2) = \sup\limits_{z_2 \in Z_2} \sup\limits_{z_1 \in Z_1} \min\{g(z_1|z_2), g(z_2)\} = \sup\limits_{z_2 \in Z_2} g(z_2) = 1$, ибо $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} \min\{g(z_1|z_2), g(z_2)\} = \min\{\sup\limits_{z_1 \in Z_1} g(z_1|z_2), g(z_2)\} = g(z_2)$, $z_2 \in Z_2$. ■

В следующей лемме охарактеризован класс распределений $g(\cdot, \cdot)$, определенных формулой (1.10.29), в которой $g(\cdot|\cdot)\colon Z_1 \times Z_2 \to [0,1]$ — распределение переходной возможности и $g(\cdot)\colon Z_2 \to [0,1]$ — распределение возможности.

---

[1] Распределение переходной возможности обозначим так же, как обозначено условное распределение.

[2] То есть вполне аддитивная и нормированная мера на $(Z_1, \mathcal{P}(Z_1))$; если рассматривать отображение $\mathrm{P}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{A}_1 \times Z_2 \to [0,1]$ как переходную возможность на $(Z_2, \mathcal{A}_2)$, $(Z_1, \mathcal{A}_1)$, то $\forall\, z_2 \in Z_2$ $\mathrm{P}(\cdot|z_2)$ — возможность на $(Z_1, \mathcal{A}_1)$ и $\forall\, A \in \mathcal{A}_1$ $\mathrm{P}(A|\cdot)$ — $\mathcal{A}_2$-измеримая функция $Z_2 \to [0,1]$.

Лемма 1.10.6. *Пусть* $Z_2 = Z_{(0)} \bigcup Z_{(0,1)} \bigcup Z_{(1)}$, *где* $Z_{(0)} = \{z_2 \in Z_2, g(z_2) = 0\}$, $Z_{(0,1)} = \{z_2 \in Z_2, 0 < g(z_2) < 1\}$, $Z_{(1)} = \{z_2 \in Z_2, g(z_2) = 1\}$ — (*попарно непересекающиеся*) *подмножества* Z_2. *Тогда для любого* $z_2 \in Z_{(0)} \bigcup Z_{(1)}$ *существует функция* $g(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$, *удовлетворяющая уравнению* (1.10.29), *причем такая, что*

$$\sup_{z_1 \in Z_1} g(z_1|z_2) = 1. \tag{1.10.32}$$

Если $Z_{(0,1)} \neq \varnothing$, *то для существования функции* $g(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$, *удовлетворяющей уравнению* (1.10.29) *и условию* (1.10.32) *при любом* $z_2 \in Z_{(0,1)}$, *необходимо и достаточно*, *чтобы при любом* $z_2 \in Z_{(0,1)}$

$$Z_1(z_2) = \{z_1 \in Z_1,\ g(z_1, z_2) = g(z_2) \triangleq \sup_{\overline{z}_1 \in Z_1} g(\overline{z}_1, z_2)\} \neq \varnothing.$$

Иначе говоря, *для того*, *чтобы существовала функция* $g(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$, *удовлетворяющая уравнению* (1.10.29) *и условию* (1.10.32) *при любом* $z_2 \in Z_2$, *необходимо и достаточно*, *чтобы либо* $Z_{(0,1)} = \varnothing$, *либо при любом* $z_2 \in Z_{(0,1)} \neq \varnothing$

$$g(z_2) = \max_{z_1 \in Z_1(z_2)} g(z_1, z_2).$$

Доказательство. Если $z_2 \in Z_{(0)}$, то $g(z_2) = 0$ и согласно (1.10.29) $g(z_1, z_2) = 0$, $z_1 \in Z_1$. Следовательно, для $z_2 \in Z_{(0)}$ функция $g(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$, удовлетворяющая условиям (1.10.29) и (1.10.32), существует. Если $z_2 \in Z_{(1)}$, то $g(z_2) = 1$, и, поскольку в таком случае согласно (1.10.29) $g(z_1, z_2) = g(z_1|z_2)$, $z_1 \in Z_1$, то $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} g(z_1|z_2) = \sup\limits_{z_1 \in Z_1} g(z_1, z_2) = g(z_2) = 1$. Следовательно, и при $z_2 \in Z_{(1)}$ существует функция $g(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$, удовлетворяющая (1.10.29) и (1.10.32). Поэтому, если $Z_{(0,1)} = \varnothing$, то такая функция существует при любом $z_2 \in Z_2$.

Если $Z_{(0,1)} \neq \varnothing$, $z_2 \in Z_{(0,1)}$ и $Z_1(z_2) = \varnothing$, то для любого $z_1 \in Z_1$ $g(z_1, z_2) < g(z_2)$ и согласно равенству (1.10.29) $g(z_1|z_2) = g(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$. Поэтому в этом случае $\sup\limits_{z_1 \in Z_1} g(z_1|z_2) = \sup\limits_{z_1 \in Z_1} g(z_1, z_2) = g(z_2) < 1$. Если же при любом $z_2 \in Z_{(0,1)}$ $Z_1(z_2) \neq \varnothing$, то для любого $z_2 \in Z_{(0,1)}$ и любого $z_1 \in Z_1(z_2)$ в (1.10.29) можно выбрать $g(z_1|z_2) > g(z_2) = g(z_1, z_2)$, причем, очевидно, так, чтобы $\max\limits_{z_1 \in Z_1(z_2)} g(z_1|z_2) = 1$. ■

Замечание 1.10.2. Пусть $g(\cdot|\cdot)\colon Z_1 \times Z_2 \to [0,1]$ — распределение некоторой переходной возможности, $g(\cdot)\colon Z_2 \to [0,1]$ — распределение некоторой возможности, и $g(\cdot,\cdot)$ — отвечающая им левая часть равенства (1.10.29). Тогда, считая, что в (1.10.29) $g^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2) = g(z_1, z_2)$ и соответственно в силу (1.10.31) $g^{\zeta_2}(z_2) \triangleq g(z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, и рассматривая (1.10.29) как уравнение относительно $g^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|z_2) = g(z_1|z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, найдем, что в таком случае существует вариант условного распределения $g^{\zeta_1|\zeta_2}(\cdot|z_2)$, являющийся распределением условной возможности при каждом $z_2 \in Z_2$. Таким вариантом является, в частности, функция $g(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$ при каждом $z_2 \in Z_2$. Далее, говоря о распределении условной возможности, будем иметь в виду такую его конструкцию.

В заключение — коротко о переходной необходимости.

Определение 1.10.6. *Переходной необходимостью* на $(Z_2,\mathcal{P}(Z_2))$, $(Z_1,\mathcal{P}(Z_1))$ назовем отображение $\mathrm{N}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_1) \times Z_2 \to [0,1]$, которое при каждом $z_2 \in Z_2$ есть необходимость на $(Z_1,\mathcal{P}(Z_1))$; функция $h(\cdot|\cdot)\colon Z_1 \times Z_2 \to [0,1]$ называется *распределением* $\mathrm{N}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_1) \times Z_2 \to [0,1]$, если при каждом $z_2 \in Z_2$ $\widetilde{h}(\cdot|z_2)\colon Z_1 \to [0,1]$ — распределение $\mathrm{N}(\cdot|z_2)\colon \mathcal{P}(Z_1) \to [0,1]$, т. е. $\forall A \in \mathcal{P}(Z_1)$ $\forall z_2 \in Z_2$ $\mathrm{N}(A|z_2) = \inf\limits_{z_1 \in Z_1 \setminus A} \widetilde{h}(z_1|z_2)$.

Если $\widetilde{h}(\cdot)\colon Z_2 \to [0,1]$ — распределение некоторой необходимости $\mathrm{N}_{Z_2}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_2) \to [0,1]$, то

$$\mathrm{N}_{Z_1\times Z_2}(C) = \inf_{(z_1,z_2)\in(Z_1\times Z_2)\setminus C} \max\{\widetilde{h}(z_1|z_2), \widetilde{h}(z_2)\},\ C \in \mathcal{P}(Z_1 \times Z_2),$$

— необходимость на $(Z_1 \times Z_2,\ \mathcal{P}(Z_1 \times Z_2))$,

$$\widetilde{h}(z_1,z_2) = \max\{\widetilde{h}(z_1|z_2), \widetilde{h}(z_2)\},\ (z_1,z_2) \in Z_1 \times Z_2, \tag{1.10.33}$$

— ее распределение.

Равенство (1.10.33), записанное для распределения необходимости неравенства $(\zeta_1,\zeta_2) \neq (z_1,z_2)$ нечеткого элемента (ζ_1,ζ_2)

$$\widetilde{h}^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1,z_2) = \max\{\widetilde{h}^{\zeta_1|\zeta_2}(z_1|z_2), \widetilde{h}^{\zeta_2}(z_2)\},\ (z_1,z_2) \in Z_1 \times Z_2, \tag{1.10.34}$$

при заданной левой части определяет варианты условного распределения необходимостей неравенств $\zeta_1 \neq z_1$ при условии $\zeta_2 = z_2$ как решений уравнения (1.10.34) относительно[1] $\widetilde{h}^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1|z_2)$, где $\widetilde{h}^{\zeta_2}(z_2) = \inf\limits_{z_1\in Z} \widetilde{h}^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1,z_2)$, $(z_1,z_2) \in Z_1 \times Z_2$.

1.11. Нечеткие функции. Равенство, эквивалентность, независимость

Пусть $q_i(\cdot,\cdot)\colon Y \times T \to X$ и $\xi(t) = q(\eta,t)$, $t \in T$, — нечеткая функция, ее значением при каждом $t \in T$ является нечеткий элемент $\xi(t)$ со значениями в X.

[1] $(\zeta_1,\zeta_2) \neq (z_1,z_2) \Leftrightarrow (\zeta_1 \neq z_1$ и $\zeta_2 \neq z_2)$, либо $(\zeta_1 = z_1$ и $\zeta_2 \neq z_2)$, либо $(\zeta_1 \neq z_1$ и $\zeta_2 = z_2) \Leftrightarrow (\zeta_1 \neq z_1$, если $\zeta_2 = z_2)$, либо $\zeta_2 \neq z_2$.

Что касается распределения нечеткой функции $\xi(\cdot)$, то [1]

$$g^{\xi(\cdot)}(x(\cdot)) = \mathrm{P}^{\eta}(\forall t \in T\ \xi(t) = x(t)) = \\ = \sup\{g^{\eta}(y) | y \in \bigcap_{t\in T} \{\overline{y} \in Y,\ q(\overline{y}, t) = x(t)\}\},\ x(\cdot)\colon T \to X,$$

— возможность равенства $\xi(\cdot) = x(\cdot)$. Распределение возможностей значения $\xi(t)$ при любом фиксированном $t \in T$ дается равенством $g^{\xi(t)}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(\xi(t) = x) = \sup\{g^{\eta}(y)|y \in Y,\ q(y,t) = x\}$, $x \in X$.

Определение 1.11.1. Нечеткие функции $\xi_1(\cdot)$ и $\xi_2(\cdot)$ назовем
▶ равными (с необходимостью единица), $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot) \pmod{\mathrm{N}^{\eta}}$, если $\forall t \in T\ \{y \in Y,\ q_1(y,t) = q_2(y,t)\} \supset Y_{(1)}$, или, что то же самое,

$$\bigcap_{t\in T} \{y \in Y,\ q_1(y,t) = q_2(y,t)\} \supset Y_{(1)}, \tag{1.11.1}$$

▶ эквивалентными, $\xi_1(\cdot) \simeq \xi_2(\cdot)$, если $\forall x(\cdot)\colon T \to X\ \ g^{\xi_1(\cdot)}(x(\cdot)) = g^{\xi_2(\cdot)}(x(\cdot))$.

Теорема 1.11.1.

1. *Равенство* $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot) \pmod{\mathrm{N}^{\eta}}$ *эквивалентно каждому из следующих условий*:

$$\mathrm{P}^{\eta}(\exists\, t \in T\ q_1(\eta,t) \neq q_2(\eta,t)) = 0 \tag{1.11.2}$$

или

$$\mathrm{N}^{\eta}(\forall\, t \in T\ q_1(\eta,t) = q_2(\eta,t)) = 1. \tag{1.11.3}$$

2. *Если* $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot) \pmod{\mathrm{N}^{\eta}}$*, то* $\xi_1(\cdot) \simeq \xi_2(\cdot)$, *если же* $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot) \pmod{\mathrm{N}^{\eta}}$, *то эквивалентность* $\xi_1(\cdot) \simeq x_1(\cdot)$ *означает то же самое. Иначе говоря*, $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot) \pmod{\mathrm{N}^{\eta}} \Rightarrow \xi_1(\cdot) \simeq \xi_2(\cdot)$, $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot) \pmod{\mathrm{N}^{\eta}} \Leftrightarrow \xi_1(\cdot) \simeq x_1(\cdot)$.

Доказательство. 1. Действительно, условие (1.11.2) означает, что $\sup\{g^{\eta}(y) \mid y \in \bigcup_{t\in T} \{\overline{y} \in Y,\ q_1(\overline{y},t) \neq q_2(\overline{y},t)\}\} = 0$, что эквивалентно $\bigcup_{t\in T} \{y \in Y,\ q_1(y,t) \neq q_2(y,t)\} \subset Y_{(0)}$, а это включение эквивалентно включению (1.11.1).

С другой стороны, равенство (1.11.2) эквивалентно (1.11.3), ибо $\mathrm{N}^{\eta}(\forall\, t \in T\ q_1(\eta,t) = q_2(\eta,t)) = \theta(\mathrm{P}^{\eta}(\exists\, t \in T\ q_1(\eta,t) \neq q_2(\eta,t))) = 1$.

2. Пусть выполнено условие (1.11.1), означающее, что $\xi_1(\cdot) = \xi_2(\cdot) \pmod{\mathrm{N}^{\eta}}$. Тогда для любой функции $x(\cdot)\colon T \to X$ $g^{\xi_1(\cdot)}(x(\cdot)) = \sup\{g^{\eta}(y) \mid y \in \bigcap_{t\in T} \{\overline{y} \in Y_{(1)},\ q_1(\overline{y},t) = x(t)\}\} = \sup\{g^{\eta}(y) \mid y \in \bigcap_{t\in T} \{\overline{y} \in Y_{(1)},\ q_2(\overline{y},t) = x(t)\}\} = g^{\xi_2(\cdot)}(x(\cdot))$, ибо $\forall\, t \in T$ и $\forall\, y \in Y_{(1)}$ $q_1(y,t) = q_2(y,t)$.

[1] $x(\cdot)\colon T \to X$ — «обычная», «четкая» функция.

Пусть теперь $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot)$ (mod N^η). Тогда

$$g^{\xi_1(\cdot)}(x(\cdot)) = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y_{(1)},\ \forall t \in T\ q_1(y,t) = x(t)\} = \\ = \begin{cases} 1, & \text{если } \forall t \in T\ x(t) = x_1(t), \\ 0, & \text{если } \exists t \in T\ x(t) \neq x_1(t). \end{cases} \quad (1.11.4)$$

Наоборот, если имеет место равенство (1.11.4), т. е. если $\xi_1(\cdot) \simeq \simeq x_1(\cdot)$, то $\{y \in Y,\ \exists t \in T,\ q_1(y,t) \neq x_1(t)\} \subset Y_{(0)}$, или, что то же самое, $\{y \in Y,\ \forall t \in T,\ q_1(y,t) = x_1(t)\} \supset Y_{(1)}$, т.е $\xi_1(\cdot) = x_1(\cdot)$ (mod N^η). ■

Определение 1.11.2. Нечеткую функцию $\xi(\cdot)$ назовем нечеткой функцией с независимыми значениями, если для любой функции $x(\cdot)\colon T \to X$

$$g^{\xi(\cdot)}(x(\cdot)) = \inf_{t\in T} g^{\xi(t)}(x(t)), \quad (1.11.5)$$

где $g^{\xi(t)}(x(t)) = \mathrm{P}^\eta(\xi(t) = x(t)) = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y,\ q(y,t) = x(t)\}$ — возможность равенства $\xi(t) = x(t)$, $t \in T$.

Согласно определениям 1.11.1, 1.11.2, если $\xi_1(\cdot)$ — нечеткая функция с независимыми значениями и $\xi_2(\cdot) \simeq \xi_1(\cdot)$, то и $\xi_2(\cdot)$ — нечеткая функция с независимыми значениями.

Теорема 1.11.2. *Пусть $\xi(\cdot)\colon T \to X$ — нечеткая функция с независимыми значениями, $g^{\xi(\cdot)}(x(\cdot))$, $x(\cdot)\colon T \to X$, — ее распределение и $Q_{.}\colon T \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому $t \in T$ множество $Q_t \in \mathcal{P}(X)$.*

Тогда

$$\mathrm{P}^\eta(\xi(\cdot) \in Q_{.}) = \mathrm{P}^\eta(\forall t \in T\ \xi(t) \in Q_t) = \inf_{t\in T} \sup_{x \in Q_t} g^{\xi(t)}(x). \quad (1.11.6)$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ множество $D_{t,\varepsilon} = \{x \in Q_t,\ g^{\xi(t)}(x) \geqslant \sup\limits_{\overline{x} \in Q_t} g^{\xi(t)}(\overline{x}) - \varepsilon\} \neq \varnothing$, $t \in T$, поэтому для любого $x_{t,\varepsilon} \in D_{t,\varepsilon}$

$$\inf_{t\in T} \sup_{x\in Q_t} g^{\xi(t)}(x) \geqslant \sup\{\inf_{t\in T} g^{\xi(t)}(x(t)) | x(\cdot)\colon T \to X,\ \forall t \in T\ x(t) \in Q_t\} \geqslant \\ \geqslant \inf_{t\in T} g^{\xi(t)}(x_{t,\varepsilon}) \geqslant \inf_{t\in T} \sup_{x\in Q_t} g^{\xi(t)}(x) - \varepsilon.$$ Равенство (1.11.6) следует отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$. ■

Рассмотрим некоторые следствия теоремы 1.11.2.

Следствие 1.11.1. Пусть $\xi(\cdot)\colon T \to X$ — нечеткая функция с независимыми значениями и $\overline{z}(\cdot)\colon X \to Z$ — произвольная функция. Тогда $\zeta(t) = \overline{z}(\xi(t))$, $t \in T$, — нечеткая функция с независимыми значениями, причем для любой функции $z(\cdot)\colon T \to Z$, $g^{\zeta(\cdot)}(z(\cdot)) = \inf\limits_{t\in T} g^{\zeta(t)}(z(t))$, где [1] $g^{\zeta(t)}(z) = \sup\limits_{x \in \overline{z}^{-1}(z)} g^{\xi(t)}(x)$, $z \in Z$. Действительно, $\mathrm{P}^\eta(\zeta(\cdot) = z(\cdot)) =$

[1] По определению $\sup\limits_{x\in\varnothing} g^{\xi(t)}(x) = 0$, $t \in T$.

$= \mathrm{P}^\eta(\xi(\cdot) \in \overline{z}^{-1}(z(\cdot))) = \sup\limits_{x\in Q_t} g^{\xi(t)}(x)$, где $Q_t = \overline{z}^{-1}(z(t)) \triangleq \{x \in X$, $\overline{z}(x) = z(t)\}$, $t\in T$, и, согласно (1.11.6), $\mathrm{P}^\eta(\zeta(\cdot) = z(\cdot)) = \mathrm{P}^\eta(\xi(\cdot)\in Q_\cdot) = \inf\limits_{t\in T} \sup\limits_{x\in Q_t} g^{\xi(t)}(x) = \inf\limits_{t\in T} g^{\zeta(t)}(z(t))$, $z(\cdot)\colon T \to Z$.

Следствие 1.11.2. Пусть $Q_t = X$ при $t \in T\setminus\{t_1,\ldots,t_n,\ldots\}$, $Q_{t_i} = \{x_i\}$, $i = 1,2,\ldots$, — одноточечные множества в X и $\xi(\cdot)\colon T \to X$ — нечеткая функция с независимыми значениями, распределенная согласно (1.11.5). Тогда, согласно (1.11.6),

$$\mathrm{P}^\eta(\xi(\cdot) \in Q_\cdot) = \mathrm{P}^\eta(\xi(t_i) = x_i,\ i = 1,2,\ldots) = \\ = \inf_{i=1,2,\ldots} g^{\xi(t_i)}(x_i),\ x_i \in X,\ i = 1,2,\ldots \quad (1.11.7)$$

Иными словами, сужение $\xi(\cdot)\colon T \to X$ на $\{t_1,t_2,\ldots\}$ есть нечеткая функция с независимыми значениями, распределенная согласно (1.11.7).

Следствие 1.11.3. Пусть нечеткий элемент $\xi = \gamma(\eta)$ — нечеткая функция $\gamma(\cdot)\colon Y \to X$ нечеткого аргумента η, причем нечеткие элементы η и $\gamma(y)$ независимы при любом $y \in Y$. Тогда распределение ξ дается равенством $g^\xi(x) = \mathrm{P}^\eta(\exists y \in Y,\ \eta = y,\ \gamma(y) = x) = \sup\limits_{y\in Y} \sup\{\min\{g^\eta(y), g^{\gamma(y)}(g(y))\} \mid g(\cdot)\colon Y \to X,\ g(y) = x\}$, $x \in X$.

1.12. Нечеткие множества

Пусть $A^\cdot\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $y \in Y$ множество $A^y \in \mathcal{P}(X)$, $A_\cdot\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ — отображение, обратное к $A^\cdot$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ множество $A_x = \{y \in Y,;\ x \in A^y\}$, и $\Gamma_A = \{(y,x) \in Y \times X,\ x \in A^y\}$ — множество в $Y \times X$, называемое графиком отображения $A^\cdot$, см. рис. 1.3.1.

Согласно данным определениям для любых $x \in X$ и $y \in Y$ включения $x \in A^y$, $y \in A_x$ и $(y,x) \in \Gamma_A$ эквивалентны, причем если $A_X \triangleq \bigcup\limits_{x\in X} A_x$, $A^Y \triangleq \bigcup\limits_{y\in Y} A^y$, то $A_x = \varnothing$ для $x \in X \setminus A^Y$, $A^y = \{x \in X$, $y \in A_x\} = \varnothing$ для $y \in Y \setminus A_x$, и поэтому $\{x \in X,\ y \in Y \setminus A_x\} = \begin{cases} X \setminus A^y,\ y \in A_X, \\ X,\ y \in Y \setminus A_X, \end{cases}$ $\{y \in Y,\ x \in X \setminus A^y\} = \begin{cases} Y \setminus A_x,\ x \in A^Y, \\ Y,\ x \in X \setminus A^Y. \end{cases}$

Пусть $*$ — произвольная бинарная операция над множествами — объединение $\bigcup$, пересечение $\bigcap$ или разность $\setminus$ множеств. Одноименная операция $*$ над отображениями $A^\cdot$ и $B^\cdot$ определяется равенством $(A * B)^y = A^y * B^y$, $y \in Y$, и, как следствие, $(A * B)_x = A_x * B_x$, $x \in X$, $\Gamma_{A*B} = \Gamma_A * \Gamma_B$.

Определение 1.12.1. Нечетким множеством, определенным на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$ и принимающим значения в $\mathcal{P}(X)$, назовем образ A^η канонического для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$ нечеткого элемента η при отображении $A^\cdot\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, график Γ_A отображения $A^\cdot$ назовем графиком нечеткого множества A^η. Индикаторной функцией одноточечного покрытия (и. ф. о. п.) A^η назовем функцию $f^{A^\eta}(x) = \mathrm{P}^\eta(x \in A^\eta) \equiv \equiv \mathrm{P}^\eta(\eta \in A_x)$, $x \in X$. Значение $g^{A^\eta}(x)$ — возможность покрытия $x \in X$ нечетким множеством A^η. Если $\bigcup\limits_{x\in X} A_x \supset Y_{(1)}$, то $\sup\limits_{x\in X} g^{A^\eta}(x) = 1$.

Замечание 1.12.1. Для существования индикаторной функции и. ф. о. п. нечеткого множества A^η, определенной на всем X, существен тот факт, что нечеткий элемент η определен на пространстве $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$, в котором измеримы все подмножества Y. Действительно, если η определен на $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{P}^\eta)$, где $\mathcal{B}$ — σ-алгебра, порожденная разбиением $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$, $\quad Y_i \cap Y_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, то может так случиться, что индикаторная функция $g^{A^\eta}(\cdot)$ не будет определена на любом $x \in X$. Такой случай представлен на рис. 1.12.1, где $Y = Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup Y_3 = [0, 1]$, алгебра $\mathcal{B}$ состоит из восьми множеств: $\varnothing$, Y, Y_1, Y_2, Y_3, $Y_1 \bigcup Y_2$, $Y_2 \bigcup Y_3$, $Y_3 \bigcup Y_1$, и, поскольку возможность P^η определена только на этих восьми множествах, то для любого $x \in X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3 \subset X = [0, 1]$, где $X_i = A^{Y_i}$ — образ Y_i при отображении $A^{\boldsymbol{\cdot}}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, $i = 1, 2, 3$, $\quad A_x \notin \mathcal{B}$, и, следовательно, возможность $g^{A^\eta}(x) = \mathrm{P}^\eta(\eta \in A_x)$ не определена.

Между тем $\mathcal{B}$ — измеримы [1)] $Y_i = \{y \in Y,\ A^y \subset X_i\}$, $Y_i \bigcup Y_j = \{y \in \in Y,\ A^y \subset X_i \bigcup X_j\}$, $i, j = 1, 2, 3$.

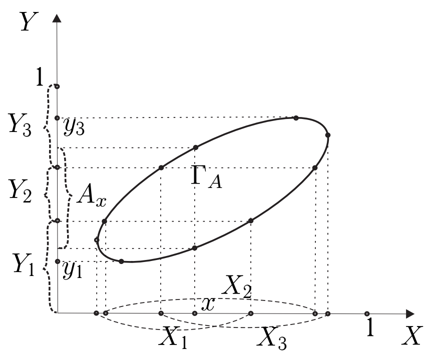


Рис. 1.12.1. График нечеткого множества, индикаторная функция которого не определена для любого $x \in X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3$, множества Y_1, Y_2, Y_3 образуют разбиение $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = [0, 1]$, $X \in [0, 1]$

Замечание 1.12.2. Разумеется, можно определить пространство с возможностью $\left(\mathcal{P}(X), A^{\mathcal{P}(Y)}, \mathrm{P}_{A^{\boldsymbol{\cdot}}}\right)$ как образ $(Y, \mathcal{P}(Y), P)$ при

[1)] Если учесть, что $A^y = \varnothing \subset X_1$, $y \in [0, y_1)$, и $A^y = \varnothing \subset X_3$, $y \in (y_3, 1]$.

отображении $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, где[1] $A^{\mathcal{P}(Y)} = \{A^B, B \in \mathcal{P}(Y)\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, $A^B = \bigcup\limits_{y \in B} A^y$. Если $\mathcal{A}$ некоторый класс множеств из $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, такой, что $\mathcal{A} \in A^{\mathcal{P}(Y)} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, то по определению $\mathrm{P}_{A^{\cdot}}(\mathcal{A}) = \mathrm{P}_{A^{\cdot}}(A^\eta \in \mathcal{A}) = \mathrm{P}(\eta \in S_{\mathcal{A}})$, где $S_{\mathcal{A}} = \{y \in Y, A^y \in \mathcal{A}\}$. Далее будут встречаться представления событий в обоих пространствах с возможностью: в $(Y, \mathcal{P}(Y), P)$ и в $(\mathcal{P}(X), A^{\mathcal{P}(Y)}, \mathrm{P}_{A^{\cdot}})$. Например, событие $A^\eta \subset B$ можно понимать как $A^\eta \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \{A^y, y \in Y_B\} \in A^{\mathcal{P}(X)}$, $Y_B = \{y \in Y, A^y \subset B\}$. Это же событие можно понимать как $\eta \in Y_B$. В первом случае речь идет о представлении события $A^\eta \subset B$ в $(\mathcal{P}(X), A^{\mathcal{P}(X)}, \mathrm{P}_{A^{\cdot}})$, во втором — в $(Y, \mathcal{P}(Y), P)$.

Пример 1.12.1. Пусть $Y = [0,1]$, возможность $\mathrm{P}(\cdot)$ зададим распределением $g(y) = g^\eta(y) = y$, $y \in [0,1]$. В таком случае $g^{A^{\cdot}}(x) = \mathrm{P}^\eta(A_x) = \sup\limits_{y \in A_x} y = \sup A_x$. На рис. 1.12.2 изображены графики нечетких множеств $A^{\cdot}$ чисел, «близких к нулю» и $B^{\cdot}$ — «близких к единице», $X = (-\infty, \infty)$.

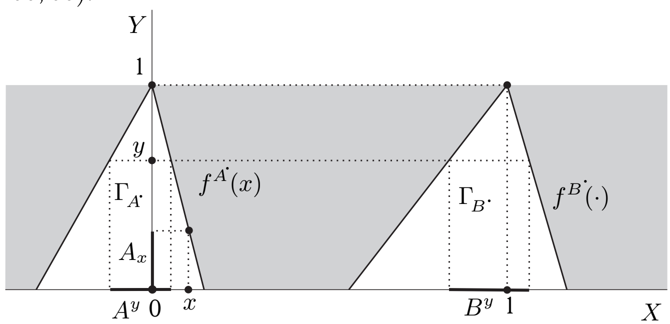


Рис. 1.12.2. Графики $\Gamma_{A^{\cdot}}$ и $\Gamma_{B^{\cdot}}$ нечетких множеств $A^{\cdot}$ чисел, «близких к нулю» и $B^{\cdot}$ — «близких к единице». Заштрихован график нечеткого множества чисел, «не близких к нулю и к единице»

1.12.1. Включение, равенство, эквивалентность нечетких множеств.

Определение 1.12.2. Нечеткое множество A_1^η

► содержится в нечетком множестве A_2^η, $A_1^\eta \subset A_2^\eta \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, если $\{y \in Y,\ A_1^y \subset A_2^y\} \supset Y_{(1)}$;

► равно нечеткому множеству A_2^η, $A_1^\eta = A_2^\eta \pmod{\mathrm{N}^\eta}$, если $\{y \in Y,\ A_1^y = A_2^y\} \supset Y_{(1)}$ или, что то же самое, если $A_1^\eta \subset A_2^\eta$ и $A_1^\eta \supset A_2^\eta \pmod{\mathrm{N}^\eta}$;

► эквивалентно нечеткому множеству A_2^η (в смысле возможностей одноточечного покрытия), $A_1^\eta \simeq A_2^\eta$, если $g^{A_1^\eta}(x) = g^{A_2^\eta}(x)$, $x \in X$;

---

[1] Заметим, что для любого отображения $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ $A^{Y_1 \cup Y_2} = A^{Y_1} \cup A^{Y_2}$, $A^{Y_1 \cap Y_2} \subset A^{Y_1} \cap A^{Y_2}$, $A^{Y \setminus Y_1} \supset A^Y \setminus A^{Y_1}$, $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow A^{Y_1} \subset A^{Y_2}$, для любых множеств $Y_1, Y_2 \subset Y$.

► наконец, будем писать $A_1^\eta \tilde{\subset} A_2^\eta$ (включение с точностью до эквивалентности), если $g^{A_1^\eta}(x) \leqslant g^{A_2^\eta}(x)$, $x \in X$. При этом $A_1^\eta \tilde{\subset} A_2^\eta \& A_1^\eta \tilde{\supset} A_2^\eta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A_1^\eta \simeq A_2^\eta$.

Ясно, что $A_1^\eta = A_2^\eta (\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta) \Rightarrow A_1^\eta \simeq A_2^\eta$, $A_1^\eta \subset A_2^\eta (\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta) \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1^\eta \tilde{\subset} A_2^\eta$.

Обратные импликации в общем случае, разумеется, не верны.

Пусть $A^\eta = A(\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta)$, т. е. пусть $\{y \in Y,\ A^y = A\} \supset Y_{(1)}$, где $A \in \mathcal{P}(X)$. *Нечеткое множество* A^η, *равное* A $(\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta)$, *назовем четким, равным* A. Его индикаторная функция

$$g^{A^\eta}(x) = \sup\{g^{A^\eta}(y) | y \in Y_{(1)},\ x \in A\} = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \in X \backslash A, \end{cases} \quad x \in X, \tag{1.12.1}$$

равна индикаторной функции $\chi_A(\cdot)$ множества A; иначе говоря, $A^\eta \simeq A$. Однако в отличие от нечеткого элемента, для которого $\xi \simeq x_0 \Leftrightarrow \xi = x_0$ $(\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta)$, $x_0 \in X$, в случае нечеткого множества эквивалентность $A^\eta \simeq A$, вообще говоря, не влечет равенство $A^\eta = A$ $(\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta)$. Действительно, в силу (1.12.1), если $A^\eta \simeq A$, то $\mathrm{P}^\eta(x \in A^\eta) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \in X \backslash A. \end{cases}$

Отсюда следует, что $\{y \in Y,\ (X \backslash A) \cap A^y \neq \varnothing\} \subset Y_{(0)}$, или, что то же самое, $\{y \in Y,\ A^y \subset A\} \supset Y_{(1)}$. Поэтому $A^\eta \simeq A \Rightarrow A^\eta \subset$ $\subset A$ $(\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta)$.

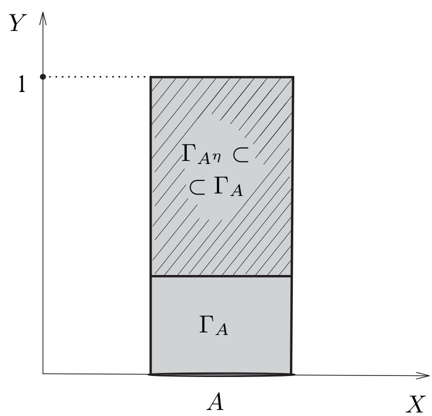


Рис. 1.12.3. Пример нечеткого множества $A^\eta \simeq A$, $A^\eta \subset A$, $A^\eta \neq A$. $Y = [0, 1]$, $g^\eta(y) = y$, $y \in [0, 1]$

На рис. 1.12.3 приведен пример нечеткого множества $A^\eta \simeq A$, для которого включение $A^\eta \supset A(\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta)$, и, как следствие, равенство $A^\eta =$ $= A$ $(\mathrm{mod}\ \mathrm{N}^\eta)$ не имеют места.

1.12.2. Независимость нечетких множеств и нечетких элементов. Пусть $A_i^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, — многозначные отображения, $q_j(\cdot)\colon Y \to X_j^{'}$, $j = 1, \ldots, m$, — функции и как в § 1.12.1 $\mathrm{P}^\eta(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}^\eta(\cdot)$.

Определение 1.12.3. Нечеткие множества A_i^η, $i = 1, \ldots, n$, и нечеткие элементы $\xi_j = q_j(\eta)$, $j = 1, \ldots, m$, назовем

► взаимно независимыми, если для любых множеств $A_i \in \mathcal{P}(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, и $A_j^{'} \in \mathcal{P}(X_j^{'})$, $j = 1, \ldots, m$,

$$\mathrm{P}^\eta(A_1^\eta \cap A_1 = \varnothing, A_1^\eta \neq \varnothing \& A_2^\eta \cap A_2 \neq \varnothing \& \ldots \& A_n^\eta \cap A_n = \varnothing, A_n^\eta \neq \neq \varnothing \& \xi_1 \in A_1^{'} \& \ldots \& \xi_m \in A_m^{'}) = \min\{\mathrm{P}^\eta(A_1^\eta \cap A_1 = \varnothing,\ A_1^\eta \neq \neq \varnothing),\ \mathrm{P}^\eta(A_2^\eta \cap A_2 \neq \varnothing), \ldots, \mathrm{P}^\eta(A_n^\eta \cap A_n = \varnothing,\ A_n^\eta \neq \neq \varnothing), \mathrm{P}^\eta(\xi_1 \in A_1^{'}), \ldots, \mathrm{P}^\eta(\xi_m \in A_m^{'})\} \quad (1.12.2)$$

при любых (непротиворечивых) комбинациях «$= \varnothing$», «$\neq \varnothing$» [1]);

► взаимно независимыми в смысле одноточечного покрытия, если для любых $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $x_j^{'} \in X_j^{'}$, $j = 1, \ldots, m$,

$$\mathrm{P}^\eta(x_1 \in A_1^\eta \ \&\ x_2 \notin A_2^\eta \ \&\ \ldots\ \&\ x_n \in A_n^\eta \ \&\ \xi_1 = x_1^{'} \ \&\ \ldots\ \&\ \xi_m = x_m^{'}) = \min\{g^{A_1^\eta}(x_1), g^{X_2 \setminus A_2^\eta}(x_2), \ldots, g^{A_n^\eta}(x_n), g^{\xi_1}(x_1^{'}), \ldots, g^{\xi_m}(x_m^{'})\}, \quad (1.12.3)$$

или, что в силу условия $\mathrm{P}^\eta(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}^\eta(\cdot)$ эквивалентно (1.12.3), $\mathrm{N}^\eta(x_1 \notin A_1^\eta \vee x_2 \in A_2^\eta \vee \ldots \vee x_n \notin A_n^\eta \vee \xi_1 \neq x_1' \vee \ldots \vee \xi_m \neq x_m') = \max\{h^{X_1 \setminus A_1^\eta}(x_1), h^{A_2^\eta}(x_2), \ldots, h^{X_n \setminus A_n^\eta}(x_n), h^{\xi_1}(x_1'), \ldots, h^{\xi_m}(x_m')\}$, где $h^{A_i^\eta}(x_i) = \mathrm{N}^\eta(x_i \in A_i^\eta)$, $h^{\xi_j}(x_j') = \mathrm{N}^\eta(\xi_j \neq x_j')$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, $x_j' \in X_j'$, $j = 1, \ldots, m$, см. § 1.5.3, для любых комбинаций «$\in$» и «$\notin$», см. замечание по поводу формул (1.10.18) и (1.10.19).

Ясно, что взаимно независимые нечеткие множества и нечеткие элементы взаимно независимы и в смысле одноточечного покрытия.

Теорема 1.12.1. *Пусть* $q(\cdot)\colon Y \to X$, $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ *и* $\xi = q(\eta)$. *Тогда* $\mathrm{P}^\eta(\xi \in A^\eta) = \sup\{g^\eta(y) |\ y \in Y_{(1)},\ q(y) \in A^y\}$, *а если нечеткий элемент* $\xi = q(\eta)$ *и нечеткое множество* A^η *независимы в смысле одноточечного покрытия, то*

$$\mathrm{P}^\eta(\xi \in A^\eta) = \sup_{x \in X} \min\{g^\xi(x), g^{A^\eta}(x)\} = \mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot)). \quad (1.12.4)$$

Доказательство. Действительно, событие $\{\xi \in A^\eta\} = \bigcup_{x \in X} \{\xi = x,\ x \in \in A^\eta\}$, так как $\{y \in Y,\ q(y) \in A^y\} = \bigcup_{x \in X} \{y \in Y,\ q(y) = x,\ x \in A^y\}$. Отсюда следует равенство (1.12.4). ■

---

[1]) Заметим, что $\{y \in Y,\ A^y \cap B = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\} = Y \setminus \bigcup_{x \in B} A_x$, $\{y \in Y,\ A^y \cap \cap B \neq \varnothing\} = \bigcup_{x \in B} A_x$, где $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\}$, $x \in X$.

Пример 1.12.2. Этот пример содержательно иллюстрирует свойство линейности интеграла $\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot))$ в (1.12.4), см. определение 1.1.1, формулу (1.1.12).

Пусть $g^{\eta,\varkappa}(y,k)=\min\{g^{\eta|\varkappa}(y|k),g^{\varkappa}(k)\}$, $y\in Y$, $k=1,2,\ldots$, — распределение пары $(\eta,\varkappa)$ нечетких элементов η и $\varkappa$, A^η — нечеткое множество, определенное на $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}^\eta)$ и принимающее значения в $\mathcal{P}(X)$, $g^\xi(x)$, $x\in X$, — распределение нечеткого элемента ξ, причем $(\eta,\varkappa)$ и ξ — независимы. В таком случае

$g^{\varkappa}(k)=\sup\limits_{y\in Y} g^{\eta,\varkappa}(y,k)$ — возможность равенства $\varkappa=k$, $k=1,2,\ldots$;

$g^{A^\eta}(x|k)=\sup\limits_{y\in A_x} g^{\eta|\varkappa}(y|k)$ — условная при условии $\varkappa=k$ возможность покрытия $x\in A^\eta$, $k=1,2,\ldots$, $x\in X$, где $A_x=\{y\in Y, x\in A^y\}$;

$g^{\eta}(y)=\sup\limits_{k} g^{\eta,\varkappa}(y,k)\equiv \mathop{\dot{+}}\limits_{k=1}^{\infty}\big(g^{\eta|\varkappa}(y|k)\bullet g^{\varkappa}(k)\big)$ — возможность равенства $\eta=y$, $y\in Y$;

$$g^{A^\eta}(x)=\mathrm{P}^\eta(\eta\in A_x)=\sup_{y\in A_x} g^\eta(y)\equiv \mathop{\dot{+}}_{k=1}^{\infty}\big(g^{A^\eta}(x|k)\bullet g^{\varkappa}(k)\big) \qquad (1.12.5)$$

— возможность покрытия $x\in A^\eta$, $x\in X$. Согласно (1.12.4) и (1.12.5)

$$\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot))=\sup_k \min\{g^{\varkappa}(k),\sup_{x\in X}\min\{g^\xi(x),g^{A^\eta}(x|k)\}\}\equiv \\ \equiv \mathop{\dot{+}}_{k=1}^{\infty}\big(g^{\varkappa}(k)\bullet \mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot|k))\big) \qquad (1.12.6)$$

— возможность покрытия $\xi\in A^\eta$, где $\mathrm{p}_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot|k))$ — условная при условии $\varkappa=k$ возможность покрытия $\xi\in A^\eta$.

Равенства (1.12.5) и (1.12.6) являются вариантами формулы полной возможности (1.7.17) и в терминах полной возможности *иллюстрируют свойство линейности интеграла* (1.12.4).

Если $Y=Y_1\times\ldots\times Y_n$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$, $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$, причем нечеткие элементы $\eta_1,\ldots,\eta_n$ взаимно независимы, т. е. $g^\eta(y)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} g^{\eta_i}(y_i)$, $y\in Y$, то нечеткие множества $A_1^{\eta_1},\ldots,A_n^{\eta_n}$ взаимно независимы, в частности, и в смысле одноточечного покрытия, *при любых* отображениях $A_i^{\cdot}\colon Y_i\to\mathcal{P}(X_i)$, $i=1,\ldots,n$, а нечеткие элементы $\xi_1=q_1(\eta_1),\ldots,\xi_n=q_n(\eta_n)$ взаимно независимы при любых функциях $q(\cdot)\colon Y_i\to X_i$, $i=1,\ldots,n$.

Более того, если $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ и независимы нечеткие элементы η_1 и η_2, то для любой функции $q(\cdot)\colon Y_1\to X_1$ и любого отображения $A^{\cdot}\colon Y_2\to\mathcal{P}(X_2)$ нечеткий элемент $\xi=q(\eta_1)$ и нечеткое множество A^{η_2} независимы, так как для любого $x\in X_1$ и $A\in\mathcal{P}(X_2)$ $\mathrm{P}^\eta(\xi=x\ \&\ A^{\eta_2}\cap A=\varnothing,\ A^{\eta_2}\neq\varnothing)=\min\big\{\mathrm{P}^\eta(\xi=x),\ \mathrm{P}^\eta(A^{\eta_2}\cap A=\varnothing,\ A^{\eta_2}\neq\varnothing)\big\}$; $\mathrm{P}^\eta(\xi=x\ \&\ A^{\eta_2}\cap A\neq\varnothing)=\min\big\{\mathrm{P}^\eta(\xi=x),\ \mathrm{P}^\eta(A^{\eta_2}\cap A\neq\varnothing)\big\}$. В частности, если $X_1=X_2=X$, то $\forall x\in X$ $\mathrm{P}^\eta(\xi=$

$= x \,\&\, x \in A^{\eta_2}) = \min\{g^{\xi}(x), g^{A^{\eta_2}}(x)\}$ и соответственно [1]), $\mathrm{P}^{\eta}(\xi \in A^{\eta_2}) = \mathrm{P}^{\eta}(\exists\, x \in X\ \xi = x \,\&\, x \in A^{\eta_2})) = \sup\limits_{x \in X} \min\{g^{\xi}(x),\, g^{A^{\eta_2}}(x)\}$.

Пусть $A^{\cdot}_t\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, $t \in T$, — семейство многозначных отображений.

Определение 1.12.4. Семейство нечетких множеств A^{η}_t, $t \in T$, назовем нечетким многозначным отображением, ставящим в соответствие каждому $t \in T$ нечеткое множество A^{η}_t, принимающее значения в $\mathcal{P}(X)$.

Если для любой функции $x(\cdot)\colon T \to X$ $\mathrm{P}^{\eta}(A^{\eta}_{\cdot} \ni x(\cdot)) \triangleq \mathrm{P}^{\eta}(\forall t \in T\ A^{\eta}_t \ni x(t)) = \inf\limits_{t \in T} \mathrm{P}^{\eta}(A^{\eta}_t \ni x(t))$, то нечеткое многозначное отображение $A^{\eta}_{\cdot}$ назовем нечетким многозначным отображением с независимыми (в смысле одноточечного покрытия) значениями.

1.13. Р-пополнение нечетких множеств

Рассмотрим прием, позволяющий любые нечеткие множества «превращать» в независимые в смысле одноточечного покрытия, не изменяя их и. ф. [43]. Речь идет о таком преобразовании нечетких множеств $A^{\cdot} \to \overline{A}^{\cdot}$, $B^{\cdot} \to \overline{B}^{\cdot}$, при котором $g^{A^{\cdot}}(x) = g^{\overline{A}^{\cdot}}(x)$, $g^{B^{\cdot}}(x) = g^{\overline{B}^{\cdot}}(x)$, $g^{A^{\cdot} \cap B^{\cdot}}(x) \leqslant \min\{g^{A^{\cdot}}(x), g^{B^{\cdot}}(x)\} = \min\{g^{\overline{A}^{\cdot}}(x), g^{\overline{B}^{\cdot}}(x)\} = g^{\overline{A}^{\cdot} \cap \overline{B}^{\cdot}}(x)$, $x \in X$.

Пусть $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P})$ — пространство с возможностью, в котором возможность P задана распределением $g(\cdot)$, и $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ — нечеткое множество $A^{\cdot}$. Его и. ф. $g^{A^{\cdot}}(x) = \mathrm{P}(A_x) = \sup\limits_{y \in A_x} g(y)$, где $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\}$, $x \in X$. Определим нечеткое множество $\overline{A}^{\cdot}$ так, чтобы

$$\begin{gathered}\overline{A}_x = \{y \in Y,\ g(y) \leqslant g^{A^{\cdot}}(x)\}, \quad x \in X,\\ \overline{A}^y = \{x \in X,\ y \in \overline{A}_x\},\ \ y \in Y,\ \ \Gamma_{\overline{A}^{\cdot}} = \bigcup_{x \in X} (\overline{A}_x \times \{x\}).\end{gathered} \tag{1.13.1}$$

Нечеткое множество $\overline{A}^{\cdot}$ назовем Р-пополнением $A^{\cdot}$; свойства Р-пополнения приведены в следующей лемме.

Лемма 1.13.1. *Пусть $A^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$, $B^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$ — любые нечеткие множества, $g^{A^{\cdot}}(\cdot)$, $g^{B^{\cdot}}(\cdot)$ их и. ф. Их Р-пополнения $\overline{A}^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$, $\overline{B}^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$ обладают следующими свойствами:*

1. $g^{A^{\cdot}}(x) = g^{\overline{A}^{\cdot}}(x)$, $g^{B^{\cdot}}(x) = g^{\overline{B}^{\cdot}}(x)$, $x \in X$;
2. $g^{\overline{A}^{\cdot} \cap \overline{B}^{\cdot}}(x) = \min\{g^{\overline{A}^{\cdot}}(x), g^{\overline{B}^{\cdot}}(x)\} \geqslant g^{A^{\cdot} \cap B^{\cdot}}(x)$, $x \in X$, (Р-*независимость* $\overline{A}^{\cdot}$ *и* $\overline{B}^{\cdot}$);
3. $\overline{\overline{A}}^{\cdot} = \overline{A}^{\cdot}$, $\overline{\overline{B}}^{\cdot} = \overline{B}^{\cdot}$, $A^{\cdot} \subset \overline{A}^{\cdot}$, $B^{\cdot} \subset \overline{B}^{\cdot}$, $A^{\cdot} \cap B^{\cdot} \subset \overline{A^{\cdot} \cap B^{\cdot}} = \overline{A}^{\cdot} \cap \overline{B}^{\cdot}$, $A^{\cdot} \cup B^{\cdot} \subset \overline{A^{\cdot} \cup B^{\cdot}} \subset \overline{A}^{\cdot} \cup \overline{B}^{\cdot}$;
4. $A^{\cdot} \subset B^{\cdot} \Rightarrow \overline{A}^{\cdot} \subset \overline{B}^{\cdot} \Leftrightarrow g^{\overline{A}^{\cdot}}(x) \leqslant g^{\overline{B}^{\cdot}}(x)$, $x \in X$.

[1]) Разумеется, в общем случае $\mathrm{P}^{\eta}(\xi \in A^{\eta}) = \sup\limits_{x \in X} \mathrm{P}^{\eta}(\xi = x,\ x \in A^{\eta})$.

Доказательство. 1, 2. Согласно определению (1.13.1) $A_x \subset \overline{A}_x$, $x \in X$, $\Gamma_{A^\cdot} \subset \Gamma_{\overline{A}^\cdot}$, но $g^{\overline{A}^\cdot}(x) = \sup\limits_{y \in \overline{A}_x} g(y) = \sup\limits_{y \in A_x} g(y) = g^{A^\cdot}(x)$, $x \in X$, и $g^{\overline{A}^\cdot \cap \overline{B}^\cdot}(x) = \sup\limits_{y \in \overline{A}_x \cap \overline{B}_x} g(y) = \min\{g^{\overline{A}}(x), g^{\overline{B}}(x)\}$, $x \in X$, так как $\overline{A}_x \cap \cap \overline{B}_x = \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{A^\cdot}(x)\} \cap \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{B^\cdot}(x)\} = \{y \in Y,\, g(y) \leqslant \leqslant \min\{g^{A^\cdot}(x), g^{B^\cdot}(x)\}\}$, $x \in X$.

3. Соотношения $\overline{\overline{A}}^\cdot = \overline{A}^\cdot$ и $A^\cdot \subset \overline{A}^\cdot$ очевидны. $A^\cdot \cap B^\cdot \subset \overline{A^\cdot \cap B^\cdot}$, $\overline{A_x \cap B_x} = \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{A^\cdot \cap B^\cdot}(x)\} \subset \{y \in Y,\, g(y) \leqslant \min\{g^{A^\cdot}(x), g^{B^\cdot}(x)\}\} = \overline{A}_x \cap \overline{B}_x$, ибо $g^{A^\cdot \cap B^\cdot}(x) \leqslant \min\{g^{A^\cdot}(x), g^{B^\cdot}(x)\}\}$, $x \in X$. Наконец, $A^\cdot \cup B^\cdot \subset \overline{A^\cdot \cup B^\cdot}$, но $\overline{A_x \cup B_x} = \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{A^\cdot \cup B^\cdot}(x)\} = = \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{A^\cdot}(x)\} \cup \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{B^\cdot}(x)\} = \overline{A}_x \cup \overline{B}_x$, $x \in X$.

4. $A^\cdot \subset B^\cdot \Rightarrow A_x \subset B_x \Rightarrow g^{A^\cdot}(x) \leqslant g^{B^\cdot}(x) \Rightarrow \overline{A}_x = \{y \in Y,\, g(y) \leqslant \leqslant g^{A^\cdot}(x)\} \subset \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{B^\cdot}(x)\} = \overline{B}_x \Rightarrow \overline{A}^\cdot \subset \overline{B}^\cdot$; итак, если $A^\cdot \subset B^\cdot$, то $\overline{A}^\cdot \subset \overline{B}^\cdot$ и $g^{A^\cdot}(x) = g^{\overline{A}^\cdot}(x) \leqslant g^{\overline{B}^\cdot}(x) = g^{B^\cdot}(x)$, $x \in X$. Наоборот, последние неравенства влекут включение $\overline{A}_x = \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{A^\cdot}(x)\} \subset \subset \{y \in Y,\, g(y) \leqslant g^{B^\cdot}(x)\} = \overline{B}^\cdot(x)$, $x \in X$, т. е. включение $\overline{A}^\cdot \subset \overline{B}^\cdot$ эквивалентно $g^{\overline{A}^\cdot}(\cdot) \leqslant g^{\overline{B}^\cdot}(\cdot)$ ■

Следствие 1.13.1. Для любых нечетких множеств $A^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$ и $B^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$ события $x_1 \in \overline{A}^\cdot$ и $x_2 \in \overline{B}^\cdot$ Р-независимы при любых $x_1, x_2 \in X$, т. е. $\mathrm{P}(\overline{A}_{x_1} \cap \overline{B}_{x_2}) = \min\{\mathrm{P}(\overline{A}_{x_1}), \mathrm{P}(\overline{B}_{x_2})\} = \min\{g^{\overline{A}^\cdot}(x_1), g^{\overline{B}^\cdot}(x_2)\}$. В частности, $\mathrm{P}(\overline{A}_{x_1} \cap \overline{A}_{x_2}) = \min\{g^{\overline{A}^\cdot}(x_1), g^{\overline{A}^\cdot}(x_2)\}$. Действительно, $\overline{A}_{x_1} \cap \overline{B}_{x_2} = \{y \in Y,\ g(y) \leqslant \min\{g^{\overline{A}^\cdot}(x_1), g^{\overline{B}^\cdot}(x_2)\}\}$. ■

Особенно наглядно Р-пополнение выглядит в том случае, когда $Y = = [0,1]$, $g(y) = y$, $y \in [0,1]$, и, следовательно, $g^{A^\cdot}(x) = \sup\limits_{y \in A_x} y = \sup A_x$, $\overline{A}_x = \{y \in [0,1],\, y \leqslant \sup A_x\}$, см. рис. 1.13.1.

Свойства Р-пополнения приведены в следующей теореме.

Теорема 1.13.1. *Для любых нечетких множеств* $A^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$, $B^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$ *и любых множеств* $C \in \mathcal{P}(X)$, $D \in \mathcal{P}(X)$:

1. *события* $Y^C_{\overline{A}^\cdot} = \{y \in Y, \overline{A}^y \cap C \neq \varnothing\}$ *и* $Y^D_{\overline{B}^\cdot} = \{y \in Y, \overline{B}^y \cap D \neq \varnothing\}$ Р-*независимы;*
2. *события* ${}^C Y_{\overline{A}^\cdot} = \{y \in Y, \overline{A}^y \subset C, \overline{A}^y \neq \varnothing\}$ *и* ${}^D Y_{\overline{B}^\cdot} = \{y \in Y, \overline{B}^y \subset \subset D, \overline{A}^y \neq \varnothing\}$ Р-*независимы.*

В пунктах 1 *и* 2 $\overline{A}^\cdot$ *и* $\overline{B}^\cdot$ *суть* Р-*пополнения* $A^\cdot$ *и* $B^\cdot$.

Доказательство. 1. Так как $Y^C_{\overline{A}^\cdot} = \{y \in Y,\, \overline{A}^y \cap C \neq \varnothing\} = \bigcup\limits_{x \in C} \overline{A}_x$, $Y^D_{\overline{B}} = \bigcup\limits_{x \in D} \overline{B}_x$, то, согласно лемме 1.13.1, $\mathrm{P}((\bigcup\limits_{x \in C} \overline{A}_x) \cap (\bigcup\limits_{x' \in D} \overline{B}_{x'})) =$

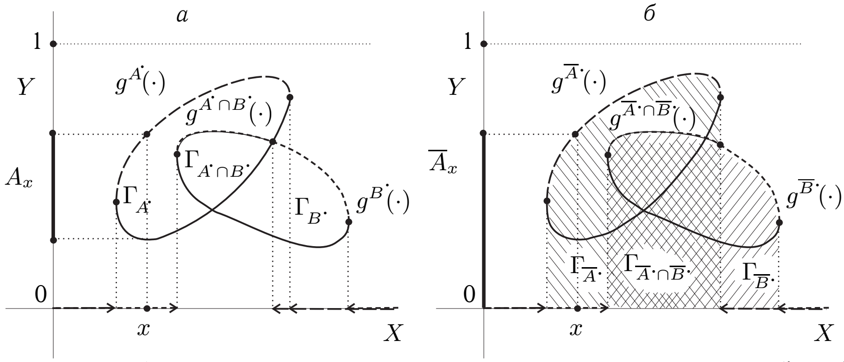


Рис. 1.13.1. *а*) Индикаторная функция пересечения нечетких множеств $A^\cdot$ и $B^\cdot$ $g^{A^\cdot\cap B^\cdot}(\cdot) \leqslant \min\{g^{A^\cdot}, g^{B^\cdot}\}(\cdot)$. *б*) Индикаторная функция пересечения пополненных нечетких множеств $\overline{A}^\cdot$ и $\overline{B}^\cdot$ $g^{\overline{A}^\cdot\cap\overline{B}^\cdot}(\cdot) = \min\{g^{\overline{A}^\cdot}, g^{\overline{B}^\cdot}\}(\cdot) = \min\{g^{A^\cdot}, g^{B^\cdot}\}(\cdot)$

$= \mathrm{P}(\bigcup_{\substack{x\in C\\ x'\in D}} (\overline{A}_x \cap \overline{B}_{x'})) = \sup_{\substack{x\in C\\ x'\in D}} \min\{\mathrm{P}(\overline{A}_x), \mathrm{P}(\overline{B}_{x'})\} = \min\{\mathrm{P}(\bigcup_{x\in C} \overline{A}_x), \mathrm{P}(\bigcup_{x\in D} \overline{B}_x)\}$.

2. Поскольку ${}^C Y_{\overline{A}^\cdot} = \{y \in Y,\ \overline{A}^y \cap (X \setminus C) = \varnothing,\ \overline{A}^y \neq \varnothing\} = A_X \setminus \bigcup_{x\in X\setminus C} \overline{A}_x = \bigcap_{x\in X\setminus C} (A_X \setminus \overline{A}_x)$, то $\mathrm{P}({}^C Y_{\overline{A}}) = \mathrm{P}(\bigcap_{x\in X\setminus C} (A_X \setminus \overline{A}_x)) = \mathrm{P}(\bigcap_{x\in X\setminus C} \{y \in A_X,\ g(y) > g^{\overline{A}^\cdot}(x)\}) =$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } \forall\, x \in X \setminus C \quad g^{\overline{A}^\cdot}(x) < 1, \\ \mathrm{P}(\varnothing) = 0, & \text{если } \exists\, x \in X \setminus C \quad g^{\overline{A}^\cdot}(x) = 1, \end{cases} \quad (\sup_{y\in\varnothing} g(y) = 0).$$

С другой стороны, $\mathrm{P}({}^C Y_{\overline{A}^\cdot} \cap {}^D Y_{\overline{B}^\cdot}) = \mathrm{P}(\bigcap_{\substack{x\in X\setminus C\\ x'\in X\setminus D}} \{y \in A_X,\ g(y) > g^{\overline{A}^\cdot}(x),\ g(y) > g^{\overline{B}^\cdot}(x')\}) =$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } \forall\, x \in X \setminus C \quad g^{\overline{A}^\cdot}(x) < 1 \quad \text{и} \quad \forall\, x' \in X \setminus D \quad g^{\overline{B}^\cdot}(x') < 1, \\ 0, & \text{если } \exists\, x \in X \setminus C \quad g^{\overline{A}^\cdot}(x) = 1 \quad \text{или} \quad \exists\, x' \in X \setminus D \quad g^{\overline{B}^\cdot}(x') = 1, \end{cases}$$

$= \min\{\mathrm{P}({}^C Y_{\overline{A}^\cdot}), \mathrm{P}({}^D Y_{\overline{B}^\cdot})\}$. ■

Замечание 1.13.1. Так как

$$Y^C_{\overline{A}^\cdot} = \begin{cases} \{y \in Y,\ g(y) \leqslant \max_{x\in C} g^{\overline{A}^\cdot}(x)\}, & \text{если } \max_{x\in C} g^{\overline{A}^\cdot}(x) \text{ достигается}, \\ \{y \in Y,\ g(y) < \sup_{x\in C} g^{\overline{A}^\cdot}(x)\}, & \text{если } \max_{x\in C} g^{\overline{A}^\cdot}(x) \text{ не достигается}, \end{cases}$$

$${}^D Y_{\overline{B}^\cdot} = \begin{cases} \{y \in Y,\ g(y) > \max_{x\in X\setminus D} g^{\overline{B}^\cdot}(x)\}, & \text{если } \max_{x\in X\setminus D} g^{\overline{B}^\cdot}(x) \text{ достигается}, \\ \{y \in Y,\ g(y) \geqslant \sup_{x\in X\setminus D} g^{\overline{B}^\cdot}(x)\}, & \text{если } \max_{x\in X\setminus D} g^{\overline{B}^\cdot}(x) \text{ не достигается}, \end{cases}$$

то события $Y^C_{\overline{A}^\cdot}$ и ${}^D Y_{\overline{B}^\cdot}$, вообще говоря, P-зависимы.

1.14. Условный относительно нечеткого элемента интеграл

Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\eta$ — минимальная σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, относительно которой измерим нечеткий элемент $\eta\colon (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ ($\eta(\cdot)\colon X \to Y$ — $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$-измеримая функция, $\mathcal{C}^\eta$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все $C = \eta^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}$).

Определение 1.14.1. Пусть $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ — $\mathcal{A}$-измеримая функция. Условный относительно σ-подалгебры $\mathcal{C}^\eta$ интеграл [1] $f(\cdot)$ назовем условным относительно нечеткого элемента η интегралом $f(\cdot)$ и обозначим $\mathrm{p}(f(\cdot)|\eta)(x), x \in X$.

Всякая $\mathcal{C}^\eta$-измеримая функция $s(\cdot)$, определенная на $(X,\mathcal{A})$ со значениями в $(Z,\mathcal{C})$, является, как известно, функцией η, то есть может быть задана равенством $s(x) = F(\eta(x))$, $x \in X$, в котором $F(\cdot)\colon (Y,\mathcal{B}) \to (Z,\mathcal{C})$. Так как по определению $\mathrm{p}(f(\cdot)|\eta)(\cdot)\colon (X,\mathcal{A}) \to ([0,1],\mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $[0,1]$, есть $\mathcal{C}^\eta$-измеримая функция, то $\mathrm{p}(f(\cdot)|\eta)(x) = F(\eta(x))$, $x \in X$, где $F(\cdot)\colon (Y,\mathcal{B}) \to ([0,1],\mathcal{D})$, и, считая, что в равенстве (1.8.1) $C = \{x \in X, \eta(x) = y\} = C(y)$, найдем

$$\mathrm{p}((f \bullet \chi_C)(\cdot)) = \mathrm{p}((F(y) \bullet \chi_C)(\cdot)) = F(y) \bullet \mathrm{P}(C(y)) = \\ = \min\{F(y), g^\eta(y)\}, \quad y \in Y, \quad (1.14.1)$$

где $g^\eta(y) = \mathrm{P}(C(y))$. Это соотношение является уравнением для определения условного относительно η интеграла $F(\eta)$.

Пусть
$$\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min\{f(x), g(x)\}, \quad (1.14.2)$$

тогда для $y \in \eta(X) = Y$ и $C = \{x \in X, \eta(x) = y\} = C(y)$

$$\mathrm{p}_g((f \bullet \chi_C)(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min\{f(x), \chi_C(x), g(x)\} = \\ = \sup_{x\in X,\eta(x)=y} \min\{f(x), g(x)\} = \psi(y), g^\eta(y) = \sup_{x\in X,\eta(x)=y} g(x), \quad (1.14.3)$$

и, следовательно, уравнение (1.14.1), определяющее условный относительно η интеграл $\mathrm{p}(f(\cdot)|\eta)(\cdot) = F(\eta(\cdot))$, можно записать в виде

$$\min\{F(y), g^\eta(y)\} = \psi(y), \quad y \in Y, \quad (1.14.4)$$

откуда находим следующее представление для всякого варианта $F(\eta(\cdot))$ условного относительно η интеграла $f(\cdot)$

$$F(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если } g^\eta(y) > \psi(y), \\ \geqslant \psi(y), & \text{если } g^\eta(y) = \psi(y), \end{cases} \qquad y \in \eta(Y).$$

---

[1] Определение условного относительно σ-подалгебры интеграла дано в § 1.8.

Заметим, что, согласно равенствам (1.14.2), (1.14.3) и (1.14.4),

$$\mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup_{y\in Y} \sup_{x\in X,\, \eta(x)=y} \min\{f(x), g(x)\} = \\ = \sup_{y\in Y} \min\{F(y), g^\eta(y)\} = \mathrm{p}_{g^\eta}(f(\cdot)), \quad (1.14.5)$$

причем для правой части (1.14.5) имеют место равенства

$$\mathrm{p}_{g^\eta}(f(\cdot)) = \sup_{y\in Y} \sup_{x\in X, \eta(x)=y} \min\{F(y), g(x)\} = \\ = \sup_{x\in X} \min\{F(\eta(x)), g(x)\} = \mathrm{p}_g(F(\eta(\cdot))),$$

которые вместе с (1.14.5) дают: $\mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \mathrm{p}_g(F(\eta(\cdot))) = \mathrm{p}_{g^\eta}(f(\cdot))$, что является частным случаем общего соотношения $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}(\mathrm{p}(f(\cdot)|\eta))(\cdot)$, следующего из формулы (1.8.1) при $C = X$.

Аналогом $F(y)$ в теории вероятностей является условное математическое ожидание $f(\cdot)$ при условии $\eta = y$, см. § 1.7.1.

Пример 1.14.1. Пусть в (1.14.2) $\mathrm{p}_g(\cdot)$ — интеграл, в котором $g(\cdot,\cdot) = g^{\eta,\zeta}(\cdot,\cdot)$ — распределение нечеткого вектора (η,ζ), $x = (y,z)$, $X = Y \times Z$, $C = \{y\} \times Z$. Выберем в качестве $f(\cdot)$ индикаторную функцию множества $Y \times \{z\}$, зависящую от $z \in Z$ как от параметра. Тогда в (1.14.3)

$$\mathrm{p}_g((\chi_{Y\times\{z\}} \bullet \chi_{\{y\}\times Z})(\cdot)) = \\ = \sup_{\widetilde{y}\in Y, \widetilde{z}\in Z} \min\{\chi_{Y\times\{z\}}(\widetilde{y},\widetilde{z}), \chi_{\{y\}\times Z}(\widetilde{y},\widetilde{z}), g^{\eta,\zeta}(\widetilde{y},\widetilde{z})\} = g^{\eta,\zeta}(y,z),$$

$$g^\eta(y) = \sup_{\widetilde{z}\in Z}(g^{\eta,\zeta}(y,\widetilde{z})), \quad y \in Y, \ \ z \in Z,$$

а уравнение (1.14.4) $\min\{F(y,z), g^\eta(y)\} = g^{\eta,\zeta}(y,z)$ определит условное распределение $g^{\zeta|\eta}(z|y) = F(y,z)$, $y \in Y$, $z \in Z$.

Пример 1.14.2. Пусть

$$\zeta(x,y) = x, \quad \mathrm{p}_{g^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \sup_{x,y} \min\{f(x,y), g^{\xi,\eta}(x,y)\}.$$

Для определения условного относительно нечеткого элемента $\zeta(\xi,\eta) = \xi$ интеграла $\mathrm{p}(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(x)$, $x \in X$, согласно равенствам (1.14.3) найдем

$$\psi(x) = \sup_{y\in Y} \min\{f(x,y), g^{\xi,\eta}(x,y)\},$$

$$g^\zeta(x) = \sup_{y\in Y} g^{\xi,\eta}(x,y) = g^\xi(x), \quad x \in X.$$

Уравнение (1.14.4) для определения $\mathrm{p}(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(\cdot)$: $\min\{\mathrm{p}(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(x), g^\xi(x)\} = \sup_{y\in Y} \min\{f(x,y), g^{\xi,\eta}(x,y)\} = \min\{g^\xi(x), \sup_{y\in Y} \min\{f(x,y), g^{\eta|\xi}(y|x)\}\}$, свидетельствует, что $\mathrm{p}(f(\cdot,\cdot)|\zeta)(x) = \sup_{y\in Y} \min\{f(y|x),$

$g^{\eta|\xi}(x,y)\}$, $x \in X$, — вариант условного относительно $\zeta = \xi$ интеграла $f(\cdot,\cdot)$.

В заключение приведем формулы «повторного интегрирования», на которых основан так называемый байесовский принцип в теории оптимальных решений, см. гл. 6.

Пусть $\mathrm{p}_{g^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot))$ — интеграл $f(\cdot,\cdot)$ относительно возможности $\mathrm{P}^{\xi,\eta}(\cdot)$, заданной распределением $g^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$, $\mathrm{p}_{g^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \sup\limits_{x,\,y} \min\{f(x,y),\, g^{\xi,\eta}(x,y)\}$. Тогда

$$\mathrm{p}_{g^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \sup_{(x,y)\in X\times Y} \min\{f(x,y),\, \min\{g^{\eta|\xi}(y|x),\, g^{\xi}(x)\}\} = \\ = \sup_{x\in X}[\min\{g^{\xi}(x),\, \sup_{y\in Y}\min\{f(x,y),\, g^{\eta|\xi}(y|x)\}\}]. \quad (1.14.6)$$

Иначе говоря, интеграл $\mathrm{p}_{g^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot))$ относительно возможности $\mathrm{P}^{\xi,\eta}(\cdot)$, заданной распределением $g^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$, можно вычислить, подсчитав для каждого $x \in X$ интеграл $\sup\limits_{y}\min\{f(x,y),\, g^{\eta|\xi}(y|x)\}$ относительно условной возможности $\mathrm{P}^{\eta|\xi}(\cdot\mid\cdot)$, заданной условным распределением $g^{\eta|\xi}(\cdot|x)$, а затем проинтегрировав результат относительно возможности $\mathrm{P}^{\xi}(\cdot)$, заданной распределенем (условия) ξ. Если нечеткие элементы ξ и η независимы, то $g^{\xi,\eta}(x,y) = \min\{g^{\xi}(x),\, g^{\eta}(y)\}$, $x{\in}X$, $y{\in}Y$, и [1]) $\mathrm{p}_{g^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \mathrm{p}_{g^{\xi}}(f(\cdot))$, где $f(x) = \mathrm{p}_{g^{\eta}}(f(x,\cdot))$, $x \in X$.

Если меры $\mathrm{P}^{\xi,\eta}(\cdot)$ и $\mathrm{N}^{\xi,\eta}(\cdot)$ вполне согласованы, $\mathrm{P}^{\xi,\eta}(\cdot) <\!\approx\!> \mathrm{N}^{\xi,\eta}(\cdot)$, то аналогично соотношениям (1.14.6) интеграл $f(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(X\times Y)$ относительно необходимости $\mathrm{N}^{\xi,\eta}(\cdot)$, заданной распределением $h^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) = \theta\circ g^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$, см. § 1.5.1,

$$n_{h^{\xi,\eta}}(f(\cdot,\cdot)) = \inf_{x\in X,\, y\in Y} \max\{f(x,y),\, \max\{\theta\circ g^{\eta|\xi}(y|x),\, \theta\circ g^{\xi}(x)\}\} = \\ = \inf_{x\in X}\max\{\theta\circ g^{\xi}(x),\, \inf_{y\in Y}\max\{f(x,y),\, \theta\circ g^{\eta|\xi}(y|x)\}\}, \quad (1.14.7)$$

где $h^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot) = \theta\circ g^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$. Поэтому выражения

$$\sup_{y\in Y}\min\{f(x,y), g^{\eta|\xi}(y|x)\} \text{ и } \inf_{y\in Y}\max\{f(x,y), \theta\circ g^{\eta|\xi}(y|x)\},\ x\in X, \quad (1.14.8)$$

согласно соотношениям (1.14.6) и (1.14.7), определяют варианты условных (при условиях $\xi = x$ и $\xi \neq x$ соответственно) интегралов $f(\xi,\cdot)$ относительно условной возможности $\mathrm{P}^{\eta|\xi}(\cdot|\xi = x)$ и относительно условной необходимости $\mathrm{N}^{\eta|\xi}(\cdot|\xi \neq x)$, заданных условными распределениями $g^{\eta|\xi}(\cdot|x)$ и $\theta\circ g^{\eta|\xi}(\cdot|x), x \in X$, соответственно.

Применения условного относительно нечеткого элемента интеграла рассмотрены в главах 6, 7.

[1]) Аналог теоремы Фубини [120].

1.15. Принцип относительности возможности

Принцип относительности в физике, как известно, декларирует физическую эквивалентность всех инерциальных «систем отсчета». Это означает, что математическая формулировка любого закона природы должна быть одной и той же в любой инерциальной «системе отсчета», в координатах которой формулируется закон, или более формально, — должна быть инвариантна относительно преобразований группы Лоренца, определяющей как преобразования координат при замене одной инерциальной «системы отсчета» на другую, так и преобразования всех физических величин, участвующих в формулировке закона.

В этом параграфе рассмотрены группы автоморфизмов шкал значений мер возможности и необходимости и группы изоморфизмов их координатных представлений, играющих роль «систем отсчета», выбираемых исследователями, и индуцированные ими группы преобразований мер, интегралов и других объектов. В терминах этих преобразований формулируется *принцип относительности, согласно которому в теории возможностей любые модели объявляются эквивалентными, если в некоторых координатных представлениях шкал их формулировки совпадают, а содержательно истолкованы могут быть лишь те модели, формулировки которых не зависят от выбора координатного представления шкалы и, следовательно, их содержание одинаково для всех исследователей.*

1.15.1. Группа автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}$. Свойства симметрии шкалы $\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, +, \bullet\big)$, определяющие принцип относительности возможности и содержательное ее толкование, охарактеризуем в терминах преобразований, отображающих $\mathcal{L}$ (т. е. «четверку»: отрезок $[0,1]$, упорядоченность $\leqslant$ и операции $+$ и $\bullet$) на себя. Формально дело обстоит следующим образом. Пусть функция $\gamma(\cdot)$ определена и принимает значения в $[0,1]$ и $\mathcal{L}$ — шкала $\big([0,1], \leqslant, +, \bullet\big) = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$.

Определение 1.15.1. Функция $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ определяет отображение $\gamma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, называемое эндоморфизмом $\mathcal{L}$, если выполнены следующие условия:

$$\forall\, a,b \in [0,1]\colon \text{ если } \quad a \leqslant b, \text{ то } \quad \gamma(a) \leqslant \gamma(b),$$
$$\gamma(a + b) = \gamma(a) + \gamma(b), \gamma(a \bullet b) = \gamma(a) \bullet \gamma(b), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1. \tag{1.15.1}$$

Эндоморфизм γ называется автоморфизмом, если функция $\gamma(\cdot)$ имеет обратную $\gamma^{-1}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$; автоморфизм γ^{-1}, определяемый функцией $\gamma^{-1}(\cdot)$, называется обратным к γ. Композиция $\gamma' \circ \gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ функций $\gamma'(\cdot)$ и $\gamma(\cdot)$ определяется согласно равенству $\gamma' \circ \gamma(x) = \gamma'(\gamma(x))$, $x \in [0,1]$, $\gamma' \circ \gamma$ — соответствующая композиция эндоморфизмов γ и γ'. Символы Γ и $\overline{\Gamma}$ далее обозначают множество функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ и множество соответствующих эндоморфизмов $\gamma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (как правило, — автоморфизмов).

Далее, если не оговорено противное, Γ обозначает множество всех функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1]\to[0,1]$, непрерывных, строго монотонных и принимающих значения $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$. Поскольку каждая функция $\gamma(\cdot)\in\Gamma$ имеет обратную $\gamma^{-1}(\cdot)\in\Gamma$, и для любых двух функций $\gamma(\cdot)\in\Gamma$ и $\gamma'(\cdot)\in\Gamma$ их композиция $\gamma\circ\gamma'(\cdot)\in\Gamma$, то множество Γ является группой относительно операции умножения [1] «$\circ$», а так как для каждой функции $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, очевидно, выполнены условия (1.15.1), то $\overline{\Gamma}$ — группа всех изотонных автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}$ значений возможности. Каждый автоморфизм $\gamma\in\overline{\Gamma}$ можно интерпретировать [2] и как *изоморфизм* $\gamma\colon\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$ *шкалы* $\mathcal{L}$ *в шкалу* $\gamma\mathcal{L}$, согласно которому $\mathcal{L}\ni a\Leftrightarrow\gamma(a)\in\gamma\mathcal{L}$, а отношение упорядоченности и бинарные операции в $\gamma\mathcal{L}$ определены согласно (1.15.1). Все шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$, называемые *координатными представлениями шкалы* $\mathcal{L}$, разумеется, попарно изоморфны (эквивалентны), подробнее см. параграф 5.2.1 гл. 5.

В теории возможностей, рассматриваемой в этой книге, все координатные представления $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$, шкалы $\mathcal{L}$ считаются эквивалентными «системами отсчета», произвольно выбираемыми исследователями для формулировки моделей, задач и т. п. Далее изоморфизм $\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$ условимся *называть преобразованием шкалы* $\mathcal{L}$, *выбором шкалы* $\gamma\mathcal{L}$ (а не ее *координатного представления*) и т. п.

На самом деле условия (1.15.1), выполняющиеся для всех $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, *определяют* единственные операции $+$ и $\bullet$, точнее, имеет место следующая

Теорема 1.15.1. *Пусть* $x\bullet y=f_\bullet(x,y)$, $x+y=f_+(x,y)$, $x,y\in[0,1]$, *где функции* $f_\bullet(\cdot,\cdot)$, $f_+(\cdot,\cdot)\colon[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ *непрерывны и обладают следующими свойствами*:

1. $f_\bullet(x,y)=f_\bullet(y,x)$, $f_\bullet(0,y)=0$, $f_\bullet(x,1)=x$, $f_+(x,y)=f_+(y,x)$, $f_+(0,y)=y$, $f_+(x,1)=1$, $x,y\in[0,1]$;
2. *для любой функции* $\gamma(\cdot)\in\Gamma$ $\gamma(f_\bullet(x,y))=f_\bullet(\gamma(x),\gamma(y))$, $\gamma(f_+(x,y))=f_+(\gamma(x),\gamma(y))$, $x,y\in[0,1]$.

Тогда $f_\bullet(x,y)=\min\{x,y\}$, $f_+(x,y)=\max\{x,y\}$, $x,y\in[0,1]$.

Доказательство. Пусть $0\leqslant x<y\leqslant 1$. Определим последовательность непрерывных строго монотонно возрастающих функций $\gamma_n(\cdot)\colon[0,1]\to[0,1]$, $n=1,2,\ldots$, таких, что $\gamma_n(t)=t$ для $0\leqslant t\leqslant x$ и $\gamma_n(t)\to 1$ для $y\leqslant t\leqslant 1$ при $n\to\infty$. Тогда при $n\to\infty$ $\gamma_n(f_\bullet(x,y))=$

---

[1] Если функции $\gamma(\cdot),\gamma'(\cdot)$ непрерывны, строго монотонны и удовлетворяют условиям $\gamma(0)=\gamma'(0)=0$, $\gamma(1)=\gamma'(1)=1$, то такими же свойствами, очевидно, обладают функции $\gamma\circ\gamma'(\cdot)$, $\gamma'\circ\gamma(\cdot)$, $\gamma^{-1}(\cdot)$ и $\gamma'^{-1}(\cdot)$; факт существования последних очевиден, а их свойства иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & > & x_2 & \Leftrightarrow & \gamma(x_1) & > & \gamma(x_2), & x_1,x_2\in[0,\ 1];\\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & \\
\gamma^{-1}(y_1) & > & \gamma^{-1}(y_2) & \Leftrightarrow & y_1 & > & y_2, & y_1,y_2\in[0,\ 1].
\end{array}$$

[2] Чтобы не усложнять обозначения, далее $\overline{\Gamma}$ обозначает как группу автоморфизмов $\mathcal{L}$, $\gamma\colon\mathcal{L}\to\mathcal{L}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$, так и группу изоморфизмов $\gamma\colon\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$.

$= f_{\bullet}(\gamma_n(x), \gamma_n(y)) = f_{\bullet}(x, \gamma_n(y)) \to x$. Следовательно, $f_{\bullet}(x,y) = x = \min\{x, y\}$. Если последовательность $\{\gamma_n(\cdot)\}$ выбрать так, чтобы $\gamma_n(t) \to 0$ для $0 \leqslant t < x$ и $\gamma_n(t) = t$ для $y \leqslant t \leqslant 1$, то при $n \to \infty$ $\gamma_n(f_{+}(x,y)) = f_{+}(\gamma_n(x), \gamma_n(y)) = f_{+}(\gamma_n(x), y) \to y$. Следовательно, $f_{+}(x,y) = y = \max\{x, y\}$. ■

1.15.2. Эквивариантность p-интеграла и P-меры. Группе $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}$ соответствуют две изоморфные ей группы: группа $\overline{\Gamma}\circ$ автоморфизмов $\gamma\circ\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ класса $\mathcal{L}(X)$ функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, определенных равенствами [1] $(\gamma \circ f)(x) \equiv \gamma \circ f(x) = \gamma(f(x))$, $x \in X$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, (1.5.1) и (1.15.1) и группа $\overline{\Gamma}*$ преобразований $\gamma*\colon \mathcal{L}(\mathcal{L}(X)) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ класса $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ *интегралов* $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$,

$$(\gamma * \mathrm{p})(f(\cdot)) \equiv \gamma * \mathrm{p}(f(\cdot)) \stackrel{\triangle}{=} \gamma\Big(\mathrm{p}(\gamma^{-1} \circ f(\cdot))\Big),\ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X),\ \gamma(\cdot) \in \Gamma. \tag{1.15.2}$$

Действительно, согласно определению (1.15.2) $\forall\, a_1, a_2 \in \mathcal{L}$, $\forall\, f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$

$$(\gamma * \mathrm{p})\big((a_1 \bullet f_1) + (a_2 \bullet f_2)\big)(\cdot) = a_1 \bullet (\gamma * \mathrm{p})(f_1(\cdot)) + a_2 \bullet (\gamma * \mathrm{p})(f_2(\cdot)), \tag{1.15.3}$$

и для любого класса функций $f_j(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, $j \in J$,

$$(\gamma * \mathrm{p})\left(\Big(\sum_{j \in J}{}^{+} f_j\Big)(\cdot)\right) = \sum_{j\in J}{}^{+} (\gamma * \mathrm{p})(f_j(\cdot)). \tag{1.15.4}$$

Равенства (1.15.2)–(1.15.4) показывают, что $(\gamma * \mathrm{p})(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — интеграл для любого $\gamma* \in \overline{\Gamma}*$, а $\Gamma*$ — группа преобразований класса $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$.

Заметим, что так как $\forall\, \mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ $\exists\, g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ $\mathrm{p}(f(\cdot)) \equiv \equiv \mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup\limits_{x \in X} \min\{f(x), g(x)\}$, то согласно (1.15.2) $(\gamma * \mathrm{p}_g)(f(\cdot)) = = \sup\limits_{x\in X} \min\{f(x), \gamma \circ g(x)\} = \mathrm{p}_{\gamma\circ g}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$.

Равенство (1.15.2) назовем *условием эквивариантности* p-*интеграла по отношению к преобразованиям* $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, *шкалы* $\mathcal{L}$ *его значений*.

Если в (1.15.2) $f(x) = \chi_A(x)$, $x \in X$, — индикаторная функция (четкого) множества A, то условие (1.15.2) дает формулу для преобразования возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}(\chi_A(\cdot)) \to \gamma * \mathrm{p}(\chi_A(\cdot)) = \gamma(\mathrm{p}(\chi_A(\cdot))) = \\ = \gamma(\mathrm{P}(A)) = \gamma \circ \mathrm{P}(A),\ A \in \mathcal{P}(X), \tag{1.15.5}$$

индуцированного преобразованием шкалы $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, называемую условием *эквивариантности возможности* $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$.

---

[1] Эти и (1.15.2) равенства определяют и преобразования функций $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ и интегралов $\mathrm{p}(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$ при изоморфизме $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$: $(\gamma \circ f)(\cdot) \in \gamma\mathcal{L}(X)$, $(\gamma * p)(\cdot) \in \gamma\mathcal{L}(\gamma\mathcal{L}(X))$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$.

Пример 1.15.1. Пусть $f(x) = \underset{k=1}{\overset{n}{+}}(a_k \bullet \chi_{A_k}(x))$, $x \in X$, — «кусочно-постоянная» функция из $\mathcal{L}(X)$, где $a_k \in [0,1]$, $\chi_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_k, \\ 0, & x \in X \setminus A_k, \end{cases}$ $x \in X$, причем $A_k \cap A_s = \varnothing$, если $k \neq s$, $k, s = 1, \ldots, n$, и $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$. Тогда согласно (1.15.2)

$$(\gamma * \mathrm{p})\Big(\underset{k=1}{\overset{n}{+}}(a_k \bullet \chi_{A_k}(\cdot))\Big) = \underset{k=1}{\overset{n}{+}}(a_k \bullet \gamma(\mathrm{p}(\chi_{A_k}(\cdot)))) = \underset{k=1}{\overset{n}{+}}(a_k \bullet (\gamma \circ \mathrm{P}(A_k))),$$

где $\mathrm{P}(A_k) = \mathrm{p}(\chi_{A_k}(\cdot))$, $k = 1, \ldots, n$.

Пример 1.15.2. Пусть ξ_1, ξ_2 — нечеткие элементы, принимающие значения в X, $g^{\xi_1}(\cdot), g^{\xi_2}(\cdot)$ — их распределения со значениями в шкале $\mathcal{L}$, удовлетворяющие условиям $\max\limits_{x \in X} g^{\xi_1}(x) = 1$, $g^{\xi_2}(x) < 1$, $x \in X$, $\sup\limits_{x \in X} g^{\xi_2}(x) = 1$, Ξ_1, Ξ_2 — классы нечетких элементов ξ_1, ξ_2, распределения которых удовлетворяют таким условиям. Ясно, что формулировки, определяющие классы Ξ_1 и Ξ_2, не зависят от выбора $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, шкалы, и, следовательно, имеют один и тот же смысл для любого исследователя. Если Ξ — класс всех нечетких элементов ξ со значениями в X, таких, что $\sup\limits_{x \in X} g^{\xi}(x) = 1$, то $\Xi = \Xi_1 \cup \Xi_2$ — разбиение Ξ, верное для любого исследователя.

Содержательная интерпретация классов Ξ_1 и Ξ_2 существенно различна. В то время как для любого нечеткого элемента $\xi_1 \in \Xi_1$ можно указать точку $x_1 \in X$, в которой $\gamma \circ g^{\xi_1}(x_1) = 1$ в любой шкале [1] $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, для любого $\xi_2 \in \Xi_2$ такой точки указать нельзя, и хотя для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать точку $x_{2,\varepsilon} \in X$, в которой (в шкале $\mathcal{L}$) $g^{\xi_2}(x_{2,\varepsilon}) > 1 - \varepsilon$, но это неравенство не будет выполняться в любой шкале [1]. Более того, всегда можно указать шкалу $\gamma\mathcal{L}$, в которой $\gamma \circ g^{\xi_2}(x_{2,\varepsilon}) < \varepsilon$ и, разумеется, $\sup\limits_{x \in X} \gamma \circ g^{\xi_2}(x) = \gamma(\sup\limits_{x \in X} g^{\xi_2}(x)) = 1$.

Пример 1.15.3. Этот пример, иллюстрирующий принцип относительности, основан на замечании 1.5.2, согласно которому утверждение «$\forall\, \varepsilon \in (0,1)\ \exists\, \alpha_\varepsilon \in (0,\infty)\ \forall\, \alpha \geqslant \alpha_\varepsilon\ \ \mathrm{p}(\theta_\infty \circ f(\cdot)) - \varepsilon \leqslant \mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}(\theta_\infty \circ f(\cdot))$» равномерно по [2] $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ верное для каждой конкретной шкалы $\gamma\mathcal{L}$, вообще говоря, неверно, если речь идет об априори любой шкале $\gamma\mathcal{L}$. Иначе говоря, это утверждение не может быть верным для любого исследователя, поскольку α_ε, вообще говоря, существенно зависит от конкретной шкалы $\gamma\mathcal{L}$.

---

[1] В любом координатном представлении $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, шкалы $\mathcal{L}$.

[2] Напомним, что $\theta_\alpha(a) \triangleq (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a \in [0,\, 1]$, $\theta_\infty(a) \triangleq \lim\limits_{\alpha \to \infty} \theta_\alpha(a) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant a < 1, \\ 0, & \alpha = 1. \end{cases}$

Покажем, что $\exists\,\varepsilon > 0\ \forall\,\alpha \geqslant \alpha_\varepsilon\ \exists\,\gamma \in \overline{\Gamma}*,\ \exists\, f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$

$$\gamma * \mathrm{p}(\theta_\infty \circ f(\cdot)) - \gamma * \mathrm{p}(\theta_\alpha \circ f(\cdot)) > \varepsilon, \qquad (*)$$

где $\mathrm{p}(f(\cdot)) = \mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \sup\limits_{x\in X} \min\{g(x), f(x)\}$, причем $g(x) = 1$, $x \in X$.

Действительно, выберем $\gamma(a) = a^\gamma$, $a \in [0,\ 1]$, $\gamma > 0$, и рассмотрим соответствующие преобразования элементов левой части в неравенстве $(*)$ при $f(\cdot) \to \gamma \circ f(\cdot)$ и $\mathrm{p}(\cdot) \to \gamma * \mathrm{p}(\cdot)$:

$$\begin{gathered}\gamma * \mathrm{p}_g(\theta_\infty \circ \gamma \circ f(\cdot)) = (\mathrm{p}_g(\gamma^{-1} \circ \theta_\infty \circ \gamma \circ f(\cdot)))^\gamma = \\ = (\mathrm{p}_g(\theta_\infty \circ \gamma \circ f(\cdot)))^\gamma = 1 = \\ = \sup_{x\in X}(\theta_\infty \circ f(x)),\ \gamma \in (0, \infty),\ \text{если } f(x) \not\equiv 1,\ x \in X;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\gamma * \mathrm{p}_g(\theta_\alpha \circ \gamma \circ f(\cdot)) = (\mathrm{p}_g(\theta_{\alpha\gamma} \circ f(\cdot)))^\gamma = \\ = \sup_{x\in X}(1 - f^{\alpha\gamma}(x))^{1/\alpha} \to 0 \text{ при } \gamma \to 0,\ \text{если } 0 < \delta \leqslant f(x) \leqslant 1,\ x \in X.\end{gathered}$$

В этом случае левая часть в $(*)$ стремится к единице при $\gamma \to 0$.

1.15.3. Эквивариантность n-интеграла и N-меры. Напомним, что в шкале $\widetilde{\mathcal{L}} = (\widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]}, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\bullet})$ значений необходимости $\widetilde{0} = 1$, $\widetilde{1} = 0$, $\widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]} = [0,1]$, $\widetilde{a} \widetilde{\leqslant} \widetilde{b} \Leftrightarrow \widetilde{a} \geqslant \widetilde{b}$, $\widetilde{0} \widetilde{\leqslant} \widetilde{1}$, $\widetilde{a} \widetilde{+} \widetilde{b} = \min\{\widetilde{a}, \widetilde{b}\}$, $\widetilde{a} \widetilde{\bullet} \widetilde{b} = \max\{\widetilde{a}, \widetilde{b}\}$, $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]} = [0,1]$, см. § 1.4. Класс $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ функций $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}$, дуальный $\mathcal{L}(X)$, наделен упорядоченностью $\widetilde{\leqslant}$: $\widetilde{f}(\cdot) \widetilde{\leqslant} \widetilde{g}(\cdot) \Leftrightarrow \widetilde{f}(\cdot) \geqslant \widetilde{g}(\cdot)$ и правилами композиции $\widetilde{+}$ и $\widetilde{\bullet}$: $(\widetilde{f} \widetilde{+} \widetilde{g})(x) \triangleq \widetilde{f}(x) \widetilde{+} \widetilde{g}(x)$, $(\widetilde{f} \widetilde{\bullet} \widetilde{g})(x) \triangleq \widetilde{f}(x) \widetilde{\bullet} \widetilde{g}(x)$, $x \in X$, согласованными с одноименными правилами в $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Интеграл $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ определен как линейная: $\mathrm{n}\big(((\widetilde{a} \widetilde{\bullet} \widetilde{f}) \widetilde{+} (\widetilde{b} \widetilde{\bullet} \widetilde{g}))(\cdot)\big) = \big(\widetilde{a} \widetilde{\bullet} \mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot))\big) \widetilde{+} \big(\widetilde{b} \widetilde{\bullet} \mathrm{n}(\widetilde{g}(\cdot))\big)$, $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in [0,1]$, и вполне аддитивная: $\mathrm{n}\big((\widetilde{\sum\limits_{j\in J}} \widetilde{f}_j)(\cdot)\big) = \widetilde{\sum\limits_{j\in J}} \mathrm{n}(\widetilde{f}_j(\cdot))$ функция, заданная на $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{L}}$. Мера $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ определена значениями n-интеграла на индикаторных функциях элементов $\mathcal{P}(X)$, значение $\mathrm{N}(A) = \mathrm{n}(\widetilde{\chi}_A(\cdot))$ называется необходимостью $A \in \mathcal{P}(X)$, где $\widetilde{\chi}_A(\cdot) = \chi_A(\cdot)$.

Что касается меры $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ и интеграла $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, то в общем случае они не связаны с $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$, но сказанное о преобразованиях $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{p}(\cdot)$ можно дословно повторить и в этом случае. В частности, группа $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}$ является таковой и для шкалы $\widetilde{\mathcal{L}}$ и ей соответствуют группы $\overline{\Gamma}\circ$ и $\overline{\Gamma}*$ автоморфизмов класса $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ функций $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}$ и преобразований класса $\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\mathcal{L}}(X))$ интегралов $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, определенных равенствами $(\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{f})(x) \equiv \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{f}(x) = \widetilde{\gamma}(\widetilde{f}(x))$, $x \in X$, $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma$, $\widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$, и, соответственно, $\forall \widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}*$

$$(\widetilde{\gamma} * \mathrm{n})(\widetilde{f}(\cdot)) \equiv \widetilde{\gamma} * \mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \widetilde{\gamma}(\mathrm{n}(\widetilde{\gamma}^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))),\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X),\ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma,$$
$$N(A) = \mathrm{n}(\chi_A(\cdot)) \to \widetilde{\gamma} * \mathrm{n}(\widetilde{\chi}_A(\cdot)) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{n}(\widetilde{\chi}_A(\cdot))) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{N}(A)) =$$
$$= \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{N}(A),\ A \in \mathcal{P}(X), \quad (1.15.6)$$

суть условия эквивариантности $\mathrm{n}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$ и правила их преобразования при преобразовании $\widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$ шкалы $\widetilde{\mathcal{L}}$.

1.15.4. Преобразования дуально изоморфных шкал $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ и дуально согласованных n- и p-интегралов и N- и P-мер. Между шкалами $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ каждая функция $\theta(\cdot) \in \Theta$ *формально* определяет *дуальный изоморфизм* [1] $\widetilde{\mathcal{L}} = \theta\mathcal{L}$, $a \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \theta(a) \in \widetilde{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L} = \theta^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \theta^{-1}(\widetilde{a}) \in \mathcal{L}$, $\theta, \theta^{-1} \in \overline{\Theta}$, причем нетрудно проверить, что

$$\begin{gathered}
\forall \theta_1, \theta_2 \in \overline{\Theta}\ \ \theta_1 \circ \theta_2 \in \overline{\Gamma};\\
\forall \theta \in \overline{\Theta}\ \forall \gamma \in \overline{\Gamma}\ \ \gamma \circ \theta \in \overline{\Theta},\ \ \theta \circ \gamma \in \overline{\Theta};\\
\forall \gamma \in \overline{\Gamma}\ \forall \theta_1 \in \overline{\Theta}\ \exists \theta_2 \in \overline{\Theta}\ \ \gamma = \theta_1 \circ \theta_2; \qquad (1.15.7)\\
\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \overline{\Gamma}\ \forall \theta_1 \in \overline{\Theta}\ \exists \theta_2 \in \overline{\Theta}\ \ \gamma_2 = \theta_2 \circ \gamma_1 \circ \theta_1,
\end{gathered}$$

и тот факт, что $\overline{\Gamma} \cup \overline{\Theta}$ — группа, $\overline{\Gamma}$ — ее инвариантная подгруппа.

Однако если $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$ определяют нечеткую модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}, \mathrm{N})$ *стохастического объекта*, то n- и p-интегралы и N- и P-меры следует считать (вполне) согласованными условиями дуальности, см. § 1.5, определяющими *дуальный изоморфизм шкал $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ по существу*, а именно, для некоторой функции $\theta(\cdot) \in \Theta$

$$\mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) = (\theta * \mathrm{p})(\widetilde{f}(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \theta(\mathrm{p}(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))),\ \ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X), \quad (1.15.8)$$
$$\mathrm{p}(f(\cdot)) = (\theta^{-1} * \mathrm{n})(f(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \theta^{-1}(\mathrm{n}(\theta \circ f(\cdot))),\ \ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X),$$
$$\mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(X \setminus A)),\ \mathrm{P}(A) = \theta^{-1}(\mathrm{N}(X \setminus A)),\ A \in \mathcal{P}(X). \quad (1.15.9)$$

Хотя в этом случае шкалы $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$, классы $\mathcal{L}(X)$ и $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ и интегралы $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ и $\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ связывают условия дуальности, преобразования $\gamma, \gamma\circ, \gamma*$ в (1.15.2) и $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}\circ, \widetilde{\gamma}*$ в (1.15.6) могут быть

---

[1] Θ — класс всех непрерывных, строго монотонно убывающих функций, удовлетворяющих условиям $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$. Любая функция $\theta(\cdot) \in \Theta$ имеет обратную $\theta^{-1}(\cdot)\colon [0,\, 1] \to [0,\, 1]$, обладающую такими же свойствами, как $\theta(\cdot)$, что легко увидеть, рассмотрев диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccl}
x_1 & > & x_2 & \Leftrightarrow & \theta(x_1) & < & \theta(x_2), & & x_1, x_2 \in [0,\, 1];\\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\
\theta^{-1}(y_1) & > & \theta^{-1}(y_2) & \Leftrightarrow & y_1 & < & y_2, & & y_1, y_2 \in [0,\, 1],
\end{array}$$

согласно которой $\theta(\cdot) \in \Theta \Leftrightarrow \theta^{-1}(\cdot) \in \Theta$.

согласованы многими способами. Пусть [1] $a \in \mathcal{L}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, причем $\widetilde{a}$ — образ a: $\widetilde{a} = \theta a$. Если $a \to \gamma a, \widetilde{a} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{a}$, то $\widetilde{\gamma}\widetilde{a}$ — образ γa: $\widetilde{\gamma}\widetilde{a} = \theta_{\widetilde{\gamma}\gamma} \circ \gamma a$, где $\theta_{\widetilde{\gamma}\gamma}\colon \gamma\mathcal{L} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$. Отсюда, в силу произвольности $a \in \mathcal{L}$, следует, что преобразования $\gamma \in \Gamma, \widetilde{\gamma} \in \Gamma$, $\theta \in \Theta$ и $\theta_{\widetilde{\gamma}\gamma} \in \Theta$ связаны условием

$$\widetilde{\gamma} \circ \theta = \theta_{\widetilde{\gamma}\gamma} \circ \gamma. \tag{1.15.10}$$

Если определить $\gamma = \widetilde{\gamma}$, считая, что шкалы $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ должны преобразовываться одинаково, то, согласно условию (1.15.10), $\theta_{\widetilde{\gamma}\gamma} \equiv \theta_\gamma = \gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1}$. В этом случае дуальный изоморфизм $\theta\colon \mathcal{L} \to \theta\mathcal{L} = \widetilde{\mathcal{L}}$ преобразуется вместе с преобразованиями шкал $\gamma\colon \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\gamma\colon \widetilde{\mathcal{L}} \to \gamma\widetilde{\mathcal{L}}$, а именно, $\theta \to \theta_{\gamma\gamma} \overset{\triangle}{=} \gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1}$, см. § 5.2.4 гл. 5. Если же исходить из неизменности преобразования θ, связывающего шкалы $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$, считая, что $\theta_{\widetilde{\gamma}\gamma} = \theta$, то, согласно условию (1.15.10), $\widetilde{\gamma} = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1}$. В этом случае фиксирована связь между шкалами $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}} = \theta\mathcal{L}$, но правила преобразования шкал различны: $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, где $\widetilde{\gamma} = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1}$.

Рассмотрим подробнее последний случай, в котором исследователь использует некоторую пару дуально изоморфных шкал $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}} = \theta\mathcal{L}$, связь которых фиксирована значением $\theta \in \overline{\Theta}$, определяющим равенства в (1.15.8),(1.15.9) и следующее правило преобразования:

$$\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L},\ \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}},\ \text{где } \widetilde{\gamma} = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1},\ \gamma \in \overline{\Gamma}. \tag{1.15.10*}$$

В этом случае, как нетрудно проверить, для любого $a \in \mathcal{L}$ и $\widetilde{a} = \theta a \in \widetilde{\mathcal{L}}$: $a \to \gamma a$, $\widetilde{a} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{a} = \theta \circ \gamma a$; для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ и $\widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ f(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ $f(\cdot) \to \gamma \circ f(\cdot)$, $\widetilde{f}(\cdot) \to \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{f}(\cdot) = \theta \circ \gamma \circ f(\cdot)$, а эквивариантность связанных условиями (1.15.8) интегралов $\mathrm{p}(\cdot)$ в (1.15.2) и $\mathrm{n}(\cdot)$ в (1.15.6) по отношению к преобразованиям $\gamma \in \Gamma$ и $\widetilde{\gamma} = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1}$ определяют равенства

$$\begin{gathered}\mathrm{p}(f(\cdot)) \to (\gamma * \mathrm{p})(f(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \gamma(\mathrm{p}(\gamma^{-1} \circ f(\cdot))) = \\ = \theta^{-1}((\widetilde{\gamma} * \mathrm{n})(\theta \circ f(\cdot))),\ f(\cdot) \in \mathcal{L}(X), \\ \mathrm{n}(\widetilde{f}(\cdot)) \to (\widetilde{\gamma} * \mathrm{n})(\widetilde{f}(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \widetilde{\gamma}(\mathrm{n}(\widetilde{\gamma}^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))) = \\ = \theta((\gamma * \mathrm{p})(\theta^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))),\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}(X).\end{gathered} \tag{1.15.11}$$

Однако связь $\widetilde{\gamma} = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1}$ при преобразованиях $\{\mathcal{L}, \widetilde{\mathcal{L}} = \theta\mathcal{L}\} \to \{\gamma\mathcal{L}, \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}\}$ может быть «ослаблена» в связи с симметрией задач, решаемых в шкалах $\{\mathcal{L}, \widetilde{\mathcal{L}}\}$. В качестве иллюстрации рассмотрим задачи идентификации, изученные в § 6.4 гл. 6, предварительно напомнив некоторые конструкции теории групп.

---

[1] Для краткости далее в этом параграфе $\gamma(a)$ записывается и как γa, $\widetilde{\gamma}(\widetilde{a})$ — и как $\widetilde{\gamma}\widetilde{a}$, $\theta(a)$ — и как θa, Γ и Θ обозначают классы функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Theta}$ — классы изоморфизмов $\gamma\colon \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, $\theta\colon \mathcal{L} \to \theta\mathcal{L}$.

Элемент $\gamma_2 \in \overline{\Gamma}$ называется *сопряженным* с элементом $\gamma_1 \in \overline{\Gamma}$, если существует элемент $\gamma \in \overline{\Gamma}$ такой, что $\gamma_2 = \gamma \circ \gamma_1 \circ \gamma^{-1}$. Согласно определению, если γ_2 сопряжен с γ_1, то и γ_1 сопряжен с γ_2, а если γ_1 сопряжен с γ_2 и γ_2 сопряжен с γ_3, то γ_1 сопряжен с γ_3, т. е. *отношение сопряженности является отношением эквивалентности*. Класс (эквивалентности) $\overline{K}_\gamma = \{\gamma_1 \circ \gamma \circ \gamma_1^{-1},\ \gamma_1 \in \overline{\Gamma}\}$ называется классом сопряженных элементов, все элементы $\overline{K}_\gamma$ взаимно сопряжены и сопряжены с $\gamma \in \overline{K}_\gamma$ [24].

Элемент $\gamma_2 \in \overline{\Gamma}$ назовем *дуально сопряженным* с $\gamma_1 \in \overline{\Gamma}$, если существует элемент $\theta \in \overline{\Theta}$ такой, что $\gamma_2 = \theta \circ \gamma_1 \circ \theta^{-1}$. Согласно определению, если γ_2 дуально сопряжен с γ_1, то и γ_1 дуально сопряжен с γ_2, но если γ_1 дуально сопряжен с γ_2 и γ_2 дуально сопряжен с γ_3, то γ_1 сопряжен с γ_3. Действительно, согласно условию дуальной сопряженности для некоторых $\theta_1 \in \overline{\Theta}$, $\theta_2 \in \overline{\Theta}$ $\gamma_1 = \theta_1 \circ \gamma_2 \circ \theta_1^{-1}$, $\gamma_2 = \theta_2 \circ \gamma_3 \circ \theta_2^{-1}$, поэтому $\gamma_1 = (\theta_1 \circ \theta_2) \circ \gamma_3 \circ (\theta_1 \circ \theta_2)^{-1}$, где $\theta_1 \circ \theta_2 \in \overline{\Gamma}$. Следовательно, $\Delta_\gamma = \{\theta \circ \gamma \circ \theta^{-1},\ \theta \in \overline{\Theta}\}$ — *класс сопряженных элементов* $\overline{\Gamma}$, *каждый их которых дуально сопряжен с* $\gamma \in \overline{\Gamma}$. Для любого $\theta \in \overline{\Theta}$ согласно условиям (1.15.7) $\overline{K}_\gamma = \theta \circ \Delta_\gamma \circ \theta^{-1}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$.

В этом случае если исследователь использует пару дуально изоморфных шкал $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$, то *все модели, допускающие содержательное толкование, должны формулироваться одинаково в любой паре шкал* $\gamma\mathcal{L}$, $\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$, $\widetilde{\gamma} \in \Delta_\gamma$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, *т. е. должны быть инвариантны относительно одновременных преобразований*: $f(\cdot) \to \gamma \circ f(\cdot)$, $\mathrm{p}(\cdot) \to \gamma * \mathrm{p}(\cdot)$, $\widetilde{f}(\cdot) \to \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{f}(\cdot)$, $\mathrm{n}(\cdot) \to \widetilde{\gamma} * \mathrm{n}(\cdot)$ и т. п., где $\widetilde{\gamma} \in \Delta_\gamma = \{\theta \circ \gamma \circ \theta^{-1},\ \theta \in \Theta\}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

Пример 1.15.4. Возможность и дуальная ей необходимость потерь, сопутствующих нечеткому правилу идентификации $\pi^{\delta|\xi}$,

$$\mathrm{PL}^\Lambda(\pi^{\delta|\xi}) = \sup_{x\in X} \max_{(k,d)\in K\times D} \min\left\{\mathrm{pl}^\Lambda_{k,d}, \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,x}(x,k)\right\} \tag{1.15.12}$$

и соответственно

$$\mathrm{NL}^\Lambda(\pi^{\delta|\xi}) = \inf_{x\in X} \min_{(k,d)\in K\times D} \max\left\{\mathrm{nl}^\Lambda_{k,d}, \theta\circ\pi^{\delta|\xi}(d|x), \theta\circ g^{\xi,x}(x,k)\right\}, \tag{1.15.13}$$

см. равенства (6.4.5) и (6.4.48), (6.4.49) гл. 6, преобразуются при преобразовании шкал $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}} = \theta\mathcal{L}$ как зависящие от $\pi^{\delta|\xi}$ интегралы

$$\mathrm{p}_{g_\pi}(\mathrm{p}l^\Lambda_{\cdot,\cdot}) = \max_{(k,d)\in K\times D} \min\left\{\mathrm{p}l^\Lambda_{k,d}, g^{\varkappa,\delta}_\pi(k,d)\right\} \equiv \mathrm{PL}(\pi^{\delta|\xi}) \tag{1.15.14}$$

$$\mathrm{n}_{\theta\circ g_{\theta\circ\pi}}(\mathrm{p}l^\Lambda_{\cdot,\cdot}) = \min_{(k,d)\in K\times D} \max\left\{\mathrm{n}l^\Lambda_{k,d}, \theta\circ g^{\varkappa,\delta}_{\theta\circ\pi}(k,d)\right\} \equiv \mathrm{NL}(\pi^{\delta|\xi}), \tag{1.15.15}$$

в которых

$$g^{\varkappa,\delta}_\pi(k,d) = \sup_{x\in X} \min\left\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,x}(x,k)\right\},\ k,d \in K\times D. \tag{1.15.16}$$

Проверим, что *оптимальные правила* $\pi^{*\delta|\xi}$ и $\pi_*^{\delta|\xi}$, *удовлетворяющие условиям* $\mathrm{PL}^\Lambda(\pi^{*\delta|\xi}) = \min\limits_{\pi^{\delta|\xi}} \mathrm{PL}^\Lambda(\pi^{\delta|\xi})$ и $\mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi}) = \min\limits_{\pi^{\delta|\xi}} \mathrm{NL}^\Lambda(\pi^{\delta|\xi})$ и *охарактеризованные в теоремах* 6.4.1 *и* 6.4.3 *гл.* 6, *инвариантны относительно преобразования шкал* $\{\mathcal{L}, \widetilde{\mathcal{L}} = \theta\mathcal{L}\} \to \{\gamma\mathcal{L}, \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}\}$, $\widetilde{\gamma} = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$.

В самом деле, если $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$, то в (1.15.12), (1.15.14), (1.15.16) $\mathrm{p}l^\Lambda_{\cdot,\cdot} \to \gamma \circ \mathrm{p}l^\Lambda_{\cdot,\cdot}$, $g^{\xi,x}(\cdot,\cdot) \to \gamma \circ g^{\xi,x}(\cdot,\cdot)$ и в (6.4.7) гл. 6 $\mathrm{P}_d^\Lambda(x) \to \gamma(\mathrm{P}_d^\Lambda(x)) = \max\limits_{k\in K} \min\{\gamma(\mathrm{p}l^\Lambda_{k,d}), \gamma(g^{\xi,x}(x,k))\}$, $x \in X$, $d \in D$. Поэтому согласно условиям (6.4.14), (6.4.15) гл. 6 правила $\pi^{*\delta|\xi}$ и $\gamma \circ \pi^{*\delta|\xi}$ эквивалентны, а согласно (1.15.12) $\mathrm{PL}^\Lambda(\pi^{*\delta|\xi}) \to \gamma(\mathrm{PL}^\Lambda(\gamma \circ \pi^{*\delta|\xi})) = \gamma(\mathrm{PL}^\Lambda(\pi^{*\delta|\xi}))$.

Аналогично при преобразовании $\widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}$ в (1.15.13), (1.15.15), (1.15.16) $\mathrm{n}l^\Lambda_{\cdot,\cdot} \to \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{n}l^\Lambda_{\cdot,\cdot}$, $\theta \circ g^{\xi,x}(\cdot,\cdot) \to \widetilde{\gamma} \circ \theta \circ g^{\xi,x}(\cdot,\cdot) = \theta \circ \gamma \circ g^{\xi,x}(\cdot,\cdot)$ и в (6.4.49) гл. 6 $\mathrm{N}_d^\Lambda(x) = \min\limits_{k\in K} \max\{\mathrm{n}l^\Lambda_{k,d}, \theta \circ g^{\xi,x}(x,k)\} \to \widetilde{\gamma}(\mathrm{N}_d(x))$, $x \in X$, $d \in D$. Поэтому согласно (6.4.52), (6.4.53) гл. 6 правила[1] $\pi_*^{\delta|\xi}$ и $\gamma \circ \pi_*^{\delta|\xi}$ эквивалентны, а согласно (1.15.13), $\mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi}) \to \widetilde{\gamma}(\mathrm{NL}^\Lambda(\gamma \circ \pi_*^{\delta|\xi})) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi}))$, причем правило $\pi_*^{\delta|\xi}$, вообще говоря, зависит от $\theta \in \overline{\Theta}$ и, следовательно, *в этом случае эквивалентны лишь те пары* $\{\gamma\mathcal{L}, \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathcal{L}}\}$, *у которых* $\widetilde{\gamma} = \theta \circ \gamma \circ \theta^{-1}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$.

Но если в (1.15.12), (1.15.13) $\mathrm{p}l^\Lambda_{k,d} = \mathrm{n}l^\Lambda_{k,d} = 0$ при $k = d$, $\mathrm{p}l^\Lambda_{k,d} = \mathrm{n}l^\Lambda_{k,d} = 1$ при $k \neq d$, $k, d \in K = D$, то в (6.4.49) гл. 6 $\mathrm{N}_d^\Lambda(x) = \theta \circ g^{\xi,x}(x,d)$, $x \in X$, $d \in D$, и согласно (6.4.52), (6.4.53) гл. 6 нечеткое правило $\pi_*^{\delta|\xi}$ не зависит от $\theta \in \overline{\Theta}$.

В заключение рассмотрим правила комбинирования данных, представленных в различных шкалах, см. также §§ 3.9, 3.10 гл. 3.

Пример 1.15.5. Пусть $f_{1|2}(z_1|z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, — распределение переходной возможности $\Pi_{1|2}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_1) \times Z_2 \to \mathcal{L}_1$, $f_2(z_2)$, $z_2 \in Z_2$, — распределение возможности $\mathrm{P}_2(\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_2) \to \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — шкалы, в которых принимают значения $\Pi_{1|2}$ и соответственно P_2. Так как при любых $\gamma_1(\cdot) \in \Gamma$ и $\gamma_2(\cdot) \in \Gamma$, $\gamma_1(f_{1|2}(z_1|z_2))$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, и $\gamma_2(f_2(z_2))$, $z_2 \in Z_2$, суть распределения некоторой переходной возможности $\gamma_1 \circ \Pi_{1|2}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_2) \times Z_1 \to \gamma_1\mathcal{L}_1$ и возможности $\gamma_2 \circ \mathrm{P}_2(\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_2) \to \gamma_2\mathcal{L}_2$, то, выбрав[2] γ_1 и γ_2 так, чтобы $\gamma_1\mathcal{L}_1 = \gamma_2\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$,

---

[1] Заметим, что, согласно (1.15.15), (1.15.16),

$$\widetilde{\gamma} \circ \theta \circ g_\pi^{\varkappa,\delta}(k,d) = \inf_{x\in X} \max\{\theta \circ \gamma \circ \pi^{\delta|\xi}(d|x),\ \theta \circ \gamma \circ g^{\xi,x}(x,k)\},\ (k,d) \in K \times D.$$

[2] Если $x_1 \in \mathcal{L}_1$, $x_2 \in \mathcal{L}_2$, то операции $x_1 \boldsymbol{+} x_2$ и $x_1 \bullet x_2$ не определены. Пусть $\mathcal{L}_2 = \gamma_{21}\mathcal{L}_1$, тогда, например, $x_1 + x_2|_{\mathcal{L}_2} = \max\{\gamma_{21}(x_1), x_2\}$, $x_1 \bullet x_2|_{\mathcal{L}_1} = \min\{x_1, \gamma_{21}^{-1}(x_2)\}$.

согласно лемме 1.10.5 получим равенство

$$f_{1,2}(z_1, z_2) = \min\{\gamma_1(f_{1|2}(z_1|z_2)), \gamma_2(\mathrm{P}_2(z_2))\}, \ z_1 \in Z_1, \ z_2 \in Z_2, \quad (1.15.17)$$

в котором $f_{1,2}(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2$, — распределение возможности $\mathrm{P}(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{P}(Z_1 \times Z_2) \to \mathcal{L}$. Равенство (1.15.17) при условии $\mathcal{L} = \gamma_1\mathcal{L}_1 = \gamma_2\mathcal{L}_2$ определяет правило комбинирования информации, представленной в различных шкалах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, см. также § 3.9, 3.10 гл. 3.

Пример 1.15.6. Пусть $f_2(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}_2$, $\mathrm{p}_1(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}_1$ и требуется преобразовать $f_2(\cdot)$ и $\mathrm{p}_1(\cdot)$ в шкалу $\mathcal{L} = \gamma_1\mathcal{L}_1 = \gamma_2\mathcal{L}_2$, а именно, $f_2(\cdot)$ преобразовать в $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, $\mathrm{p}_1(\cdot)$ преобразовать в $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ и вычислить $\mathrm{p}(f(\cdot))$. В этом случае $f_2(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}_2$ преобразуется в $f(\cdot) \overset{\triangle}{=} \gamma_2 \circ f_2(\cdot)\colon X \to \gamma_2\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$, $\mathrm{p}_1(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}_1$ преобразуется в $\mathrm{p}(\cdot) \overset{\triangle}{=} \gamma_1 * \mathrm{p}_1(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \gamma_1\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$, поэтому $\mathrm{p}(f(\cdot)) = (\gamma_1 * \mathrm{p}_1)(\gamma_2 \circ f_2(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \gamma_1(\mathrm{p}_1(\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \circ f_2(\cdot)))$.

1.16. Другие варианты теории возможностей

Нетрудно привести примеры нечетких моделей, в которых полезна содержательная, независящая от координатных представлений шкал исследователей, интерпретация некоторых, отличных от 0 и 1, значений возможности и необходимости, например, — значения 1/2, отвечающего индифферентности *каждого* исследователя. В таком случае для формулировки нечетких моделей исследователям следует договориться использовать *вариант теории возможностей*, в котором определены шкалы $\mathcal{L}_{\{1/2\}}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_{\{1/2\}}$ значений возможности и необходимости, группа $\overline{\Gamma}_{\{1/2\}}$ автоморфизмов которых определена как подгруппа группы $\overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$, порожденная подгруппой $\Gamma_{\{1/2\}}$ группы Γ преобразований $\gamma_{\{1/2\}}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, оставляющих неподвижным [1]) значение 1/2: $\Gamma_{\{1/2\}} = \{\gamma(\cdot) \in \Gamma, \ \gamma(1/2) = 1/2\}$. При этом дуальная $\mathcal{L}_{\{1/2\}}$ шкала $\widetilde{\mathcal{L}}_{\{1/2\}}$ будет связана с $\mathcal{L}_{\{1/2\}}$ дуальным изоморфизмом $\theta_{\{1/2\}}\colon \mathcal{L}_{\{1/2\}} \to \theta_{\{1/2\}}\mathcal{L}_{\{1/2\}} = \widetilde{\mathcal{L}}_{\{1/2\}}$, определенным некоторой функцией $\theta_{\{1/2\}}(\cdot) \in \Theta_{\{1/2\}} = \{\theta \in \Theta, \ \theta(1/2) = 1/2\}$.

Если для содержательной интерпретации исследователями выделены значения a_i, $1 - a_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $0 \leqslant a_1 < \ldots < a_n \leqslant 1/2 \leqslant 1 - a_n < \ldots < 1 - a_1 \leqslant 1$, то подгруппа Γ_S, где $S = \{a_1, \ldots, a_n, 1 - a_n, \ldots, 1 - a_1\}$, группы Γ, определенная функциями $\gamma_S(\cdot) \in \Gamma$, удовлетворяющими условиям $\gamma_S(a_i) = a_i$, $\gamma_S(1 - a_i) = 1 - a_i$, $i = 1, \ldots, n$, определит подгруппу $\overline{\Gamma}_S \subset \overline{\Gamma}$ автоморфизмов шкал $\mathcal{L}_{S'}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$, где $S' = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\widetilde{S}' = \{1 - a_n, \ldots, 1 - a_1\}$, $S' \cup \widetilde{S}' = S$, а класс

[1]) Операции $+ \sim \max$, $\bullet \sim \min$ в $\mathcal{L}_{\{1/2\}}$ сохранятся, если дополнительно к указанным в теореме 1.15.1 будут выполнены условия: $f_{\bullet}(x, 1/2) = x$, $f_{+}(x, 1/2) = 1/2$, $x \in [0, 1/2]$, $f_{\bullet}(1/2, x) = 1/2$, $f_{+}(1/2, x) = x$, $x \in [1/2, 1]$.

$\Theta_S \subset \Theta$ функций $\theta_S(\cdot) \in \Theta$, удовлетворяющих условиям $\theta_S(a_i) = 1 - a_i$, $\theta_S(1 - a_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, определит класс $\overline{\Theta}_S$ дуальных изоморфизмов $\theta_S \colon \mathcal{L}_{S'} \to \theta_S \mathcal{L}_{S'} \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$, см. пример 2.3.2 в гл. 2, неподвижных точек, определенных значениями вероятности.

Рассмотрим математический формализм, позволяющий охарактеризовать шкалу $\mathcal{L}_{S'}$, $S' = \{a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n < 1 = a_{n+1}\}$.

Определим параметрические классы отображений

$$\begin{aligned} &(\cdot)^{\vee}_{a} \colon [0,1] \to [0,1],\ (\cdot)^{\wedge}_{a} \colon [0,1] \to [0,1],\ a \in S', \colon \\ &(u)^{\vee}_{a} \stackrel{\triangle}{=} \max\{a, u\} = a \mathbin{\boldsymbol{+}} u,\ (u)^{\wedge}_{a} \stackrel{\triangle}{=} \min\{a, u\} = a \bullet u,\ u \in [0,1], \end{aligned} \tag{$*$}$$

где параметр $a \in S'$ обозначает неподвижную точку шкалы $\mathcal{L}_{S'}$. Заметим, что отображения $(*)$ суть проекторы, ибо $((\cdot)^{\vee}_{a})^{\vee}_{a} = (\cdot)^{\vee}_{a}$ и $((\cdot)^{\wedge}_{a})^{\wedge}_{a} = (\cdot)^{\wedge}_{a}$, а равенства

$$((u)^{\vee}_{a_i})^{\vee}_{a_j} = (u)^{\vee}_{a_i \mathbin{\boldsymbol{+}} a_j},\ ((u)^{\wedge}_{a_i})^{\wedge}_{a_j} = (u)^{\wedge}_{a_i \bullet a_j},\ u \in [0,1],\ i, j = 0, \ldots, n+1, \tag{$**$}$$

означают, что классы отображений $(*)$ являются полугруппами относительно их композиций $(**)$, ибо в $(**)$ $a_i, a_j, a_i \mathbin{\boldsymbol{+}} a_j, a_i \bullet a_j \in S'$.

Более того, и отображения

$$((u)^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_j} = ((u)^{\wedge}_{a_j})^{\vee}_{a_i \bullet a_j},\ u \in [0,1],$$

и

$$((u)^{\wedge}_{a_i})^{\vee}_{a_j} = ((u)^{\vee}_{a_j})^{\wedge}_{a_i \mathbin{\boldsymbol{+}} a_j},\ u \in [0,1],$$

являются проекторами, ибо

$$((((\cdot)^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_j})^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_j} = ((\cdot)^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_j},\ ((((\cdot)^{\wedge}_{a_i})^{\vee}_{a_j})^{\wedge}_{a_i})^{\vee}_{a_j} = ((\cdot)^{\wedge}_{a_i})^{\vee}_{a_j}.$$

Если $*$ — символ любой из бинарных операций $\boldsymbol{+}$ или $\bullet$, то

$$(u * v)^{\vee}_{a} = (u)^{\vee}_{a} * (v)^{\vee}_{a},\ (u * v)^{\wedge}_{a} = (u)^{\wedge}_{a} * (v)^{\wedge}_{a},\ u, v \in [0,1],$$

поэтому полугруппа отображений $(*)$ определяет полугруппу автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}_{S'}$.

Наконец,

$$\begin{aligned} &\gamma \circ (\cdot)^{\vee}_{a} = (\gamma(\cdot))^{\vee}_{\gamma(a)},\ \gamma \circ (\cdot)^{\wedge}_{a} = (\gamma(\cdot))^{\wedge}_{\gamma(a)},\ \gamma(\cdot) \in \Gamma, \\ &\theta \circ (\cdot)^{\vee}_{a} = (\theta(\cdot))^{\wedge}_{\theta(a)},\ \theta \circ (\cdot)^{\wedge}_{a} = (\theta(\cdot))^{\vee}_{\theta(a)},\ \theta(\cdot) \in \Theta. \end{aligned}$$

Для представления p-интеграла в шкале $\mathcal{L}_{S'}$ заметим, что так как $\mathrm{p}_g(f(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{x \in X}(g(x) \bullet f(x))$, то $(\mathrm{p}_g(f(\cdot)))^{\wedge}_{a} = \mathrm{p}_{g^{\wedge}_{a}}(f(\cdot)) = \mathrm{p}_{g^{\wedge}_{a}}(f^{\wedge}_{a}(\cdot))$, $(\mathrm{p}_g(f(\cdot)))^{\vee}_{a} = \mathrm{p}_{g^{\vee}_{a}}(f(\cdot)) = \mathrm{p}_{g^{\vee}_{a}}(f^{\vee}_{a}(\cdot))$, где $f^{\vee}_{a}(x) = (f(x))^{\vee}_{a}$, $f^{\wedge}_{a}(x) = (f(x))^{\wedge}_{a}$, $x \in X$, и соответственно для $a_i < a_{i+1}$

$$((\mathrm{p}_g(f(\cdot)))^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_{i+1}} = \mathrm{p}_{(g^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_{i+1}}}(f(\cdot)) = \mathrm{p}_{(g^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_{i+1}}}((f^{\vee}_{a_i})^{\wedge}_{a_{i+1}}(\cdot))$$

— представление (проекция) p-интеграла со значениями в шкале $\mathcal{L}^{(i)} = ([a_i, a_{i+1}], \leqslant, \boldsymbol{+}, \bullet)$, где a_i, a_{i+1}, $i = 0, \ldots, n$, — неподвижные точки шкалы $\mathcal{L}_{S'} = \bigcup\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \mathcal{L}^{(i)}$, $\overline{\Gamma}_{\{a_0,\ldots,a_{n+1}\}} = \overline{\Gamma}_{\{a_0,a_1\}} \otimes \ldots \otimes \overline{\Gamma}_{\{a_n,a_{n+1}\}}$ — группа ее автоморфизмов.

Заметим, что в этом варианте теории возможностей исследователи могут содержательно интерпретировать не только значения $0 = a_0 < < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = 1$ р-интеграла и возможности, но и факты включения их значений в неподвижные интервалы $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$.

Для представления n-интеграла в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$ следует использовать дуальные отображения $(\cdot)^{\widetilde{\wedge}}_{\widetilde{a}} = (\cdot)^{\vee}_{a}$, $(\cdot)^{\widetilde{\vee}}_{\widetilde{a}} = (\cdot)^{\wedge}_{a}$.

В этом параграфе рассматривается *второй* вариант теории возможностей, в известном смысле «промежуточный» между рассмотренным в §§ 1.1–1.15 вариантом теории возможностей и теорией вероятностей, элементы *третьего* варианта теории возможностей приведены в замечании 5.2.6 гл. 5.

1.16.1. Второй вариант теории возможностей. Рассмотрим шкалу $\mathcal{L}' = ([0,1], \leqslant, +, \times)$ значений возможности, в которой [1])

$$a + b = \max(a, b), \quad a \times b = ab, \ a, b \in [0, 1]. \tag{1.16.1}$$

Эти операции, очевидно, коммутативны и ассоциативны. Что касается дистрибутивности, то $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, $a, b, c \in \in [0, 1]$, но, в отличие от взаимной дистрибутивности правил композиции $+ \sim \max$, $\bullet \sim \min$, в рассматриваемом случае $a + (b \times c) \geqslant \geqslant (a + b) \times (a + c)$. Шкала $\mathcal{L}' = ([0, 1], \leqslant, +, \times)$ является полурешеткой относительно операции $+$ [6].

Группы автоморфизмов шкал $\mathcal{L}'$ и $\widetilde{\mathcal{L}}'$ значений возможности и необходимости. Группа $\overline{\Gamma}'$ изотонных автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}'$ определяется классом непрерывных строго монотонных функций $\gamma'(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{matrix} \gamma'(a) \leqslant \gamma'(b) \Leftrightarrow a \leqslant b, & \gamma'(0) = 0, \ \gamma'(1) = 1, \\ \gamma'(a + b) = \gamma'(a) + \gamma'(b), & \gamma'(a \times b) = \gamma'(a) \times \gamma'(b), \end{matrix} \quad a, b \in [0, 1]. \tag{1.16.2}$$

Поскольку, как известно, непрерывные решения $\gamma'(\cdot)$ уравнения $\gamma'(xy) = \gamma'(x)\gamma'(y)$, $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, дифференцируемы [2]), дифференцируя его (как тождество) по x, найдем $y\dfrac{\mathrm{d}\gamma'(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}\gamma'(x)}{\mathrm{d}x}\gamma'(y)$, где $z = xy$, и, положив $x = 1$, получим задачу Коши для определения $\gamma'(\cdot)$:

$$y\frac{\mathrm{d}\gamma'(y)}{\mathrm{d}y} = \dot{\gamma}'(1)\gamma'(y), \ y \in [0,1], \ \gamma'(1) = 1,$$

где $\dot{\gamma}'(y) = \dfrac{\mathrm{d}\gamma'(y)}{\mathrm{d}y}$. Ее решение $\gamma'(y) = \gamma'_\alpha(y) = y^\alpha$, $y \in (0, 1)$, где $\alpha = \dot{\gamma}'_\alpha(1) > 0$, ибо в силу условий (1.16.2) y^α должно монотонно

[1]) $\max(a, b)$ — значение *функции* $\max(\cdot,\cdot)\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, *определенной* равенством $\max(a,b) \overset{\triangle}{=} \max\{a,b\}$, $a, b \in [0,1]$.

[2]) См., например, [3].

возрастать по $y \in [0,1]$ и удовлетворять условиям $\gamma'_\alpha(0) = 0$, $\gamma'_\alpha(1) = 1$, которые суть следствия равенства $\gamma'(xy) = \gamma'(x)\gamma'(y)$ при $x = y = 0$ и $x = y = 1$. Поэтому искомая группа $\overline{\Gamma}'$ автоморфизмов $\mathcal{L}'$ определяется преобразованиями $a \to a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$.

Это означает, что хотя в рассматриваемом варианте теории значения возможности определены с точностью до преобразования $a \to a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$, но теперь, в отличие от теории возможностей, рассмотренной ранее, *шкала $\mathcal{L}'$ имеет максимальный инвариант $I(a,b) = \ln a / \ln b$, a, $b \in (0,1)$, значения которого не изменяются при преобразованиях $a \to a^\alpha$, $b \to b^\alpha$, а условие $I(a,b) = \delta \geqslant 0$, $a, b \in (0,1)$, влечет равенство $a = b^\delta$, $a, b \in (0,1)$.*

Иначе говоря, в рассматриваемом ниже варианте теории возможностей *отношение логарифмов значений возможностей не зависит от выбора шкалы $\gamma'\mathcal{L}'$, $\gamma' \in \overline{\Gamma}'$, и может быть содержательно истолковано* [1]), см. §1.15.

Дуальную $\mathcal{L}'$ шкалу $\widetilde{\mathcal{L}}' = ([0,1], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$ свяжем с $\mathcal{L}'$ дуальным изоморфизмом $\theta' \colon \mathcal{L}' \to \theta'\mathcal{L}' = \widetilde{\mathcal{L}}'$, определенным функцией $\theta'(\cdot) \in \Theta' \subset \Theta$, определив класс Θ' так, чтобы для любой функции $\theta'(\cdot) \in \Theta'$.

$$\theta'(a + b) = \theta'(a) \widetilde{+} \theta'(b) = \min\{\theta'(a), \theta'(b)\},\ a, b \in [0,1], \qquad (1.16.3)$$

$$\theta'(a \times b) = \theta'(a) \widetilde{\times} \theta'(b) = \theta'(a) + \theta'(b) - \theta'(a)\theta'(b), a, b \in [0,1], \quad (1.16.4)$$

где в правой части (1.16.4) «$+$» и «$-$» символы «обычных» сложения и вычитания. Условие (1.16.3) выполняется в силу определения сложения $+$ в (1.16.1) и антитонности $\theta'(\cdot)$, а условие (1.16.4) означает, что дуальной умножению $\times$ в шкале $\mathcal{L}'$ является операция $\widetilde{\times}$, определенная как операция (1.16.60) сложения в шкале $\mathcal{S}$ значений вероятности.

Заметим, что равенства $\theta'(a + b) = \theta'(a) \widetilde{+} \theta'(b)$, $a, b \in [0,1]$, $\theta'(a \times b) = \theta'(a) \widetilde{\times} \theta'(b)$, $a, b \in [0,1]$, коммутативность, ассоциативность умножения $\times$, сложения $+$ и дистрибутивность умножения $\times$ относительно сложения $+$, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$, $a, b, c \in [0,1]$, определяют коммутативность, ассоциативность $\widetilde{\times}$, $\widetilde{+}$ и дистрибутивность умножения $\widetilde{\times}$ относительно сложения $\widetilde{+}$, $a \widetilde{\times} (b \widetilde{+} c) = (a \widetilde{\times} b) \widetilde{+} (a \widetilde{\times} c)$, $a, b, c \in [0,1]$.

---

[1]) Заметим, что класс преобразований $a \to a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$, содержит класс так называемых психофизических функций, связывающих шкалы значений реальных интенсивностей стимулов со шкалами их оценок испытуемыми [142]. В таком контексте рассматриваемые далее меры P' и N' можно интерпретировать как оценки исследователя (в его шкалах $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}'$) модальных операторов возможности и необходимости в формулировках модели объекта исследования.

Продифференцировав тождество в (1.16.4) по $b \in (0,1)$ и положив $b = 1$, получим задачу Коши для $\theta'(\cdot)$, $a\dot\theta'(a) = \dot\theta'(1) - \theta'(a)\dot\theta'(1)$, $\theta'(1) = 0$.

Ее решение $\theta'(a) = \theta'_\beta(a) \triangleq 1 - a^\beta$, $a \in [0,1]$, где $\beta = -\dot\theta'(1) > 0$, удовлетворяет условиям $\theta'(0) = 1$, $\theta'(1) = 0$, соответственно $\theta_\beta^{'-1}(a) = (1-a)^{1/\beta}$, $a \in [0,1]$, и $\Theta' \triangleq \{\theta'_\beta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1], \beta > 0\}$.

Наконец, группа $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}'$ автоморфизмов шкалы $\widetilde{\mathcal{L}}'$ определится преобразованиями $\widetilde{\gamma}'(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющими условию $\widetilde{\gamma}'_{\alpha,\beta}(\cdot) = \theta'_\beta \circ \gamma'_\alpha \circ \theta_\beta^{'-1}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}'$, $\gamma'_\alpha(\cdot) \in \Gamma'$, согласно которому $\forall\, \beta > 0$, $\widetilde{\gamma}'_{\alpha,\beta}(a) = \widetilde{\gamma}'_\alpha(a) = 1 - (1-a)^\alpha$, $\widetilde{\gamma}_\alpha^{'-1}(a) = 1 - (1-a)^{1/\alpha}$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$.

Нетрудно проверить, что $\widetilde{\Gamma}'$ — группа и $\widetilde{\gamma}'_\alpha(a \widetilde{+} b) = \widetilde{\gamma}'_\alpha(a) \widetilde{+} \widetilde{\gamma}'_\alpha(b)$, $\widetilde{\gamma}'_\alpha(a \widetilde{\times} b) = \widetilde{\gamma}'_\alpha(a) \widetilde{\times} \widetilde{\gamma}'_\alpha(b)$ и $\log(1 - \gamma'_\alpha(a))/\log(1 - \gamma'_\alpha(b)) = \log(1-a)/\log(1-b)$, $a, b \in [0,1]$, $\alpha > 0$, — максимальный инвариант.

p$'$-, n$'$-, s$'$-интегралы. P$'$- и N$'$-меры возможности и необходимости. Следуя замечанию 1.2.1, *для определения* p$'$-интеграла и P$'$-возможности введем класс $\mathcal{L}'(X)$ *всех* функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}'$, определив следующие правила композиции:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x),$$
$$(a \times f)(x) = a \times f(x),\ f(\cdot), g(\cdot) \in \mathcal{L}'(X),\ a \in \mathcal{L}'.$$

Интеграл $\mathrm{p}'(\cdot)$ определим как линейную *вполне* аддитивную функцию $\mathcal{L}'(X) \to \mathcal{L}'$:

$$\mathrm{p}'(((a_1 \times f_1) + (a_2 \times f_2))(\cdot)) = (a_1 \times \mathrm{p}'(f_1(\cdot))) + (a_2 \times \mathrm{p}'(f_2(\cdot))),$$
$$a_1, a_2 \in \mathcal{L}',\ f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathcal{L}'(X), \quad (1.16.5)$$
$$\mathrm{p}'((\mathop{+}_{j\in J} f_j)(\cdot)) = \mathop{+}_{j\in J} p'(f_j(\cdot)),\ f_j(\cdot) \in \mathcal{L}'(X),\ j \in J, \quad (1.16.6)$$

где J — произвольное множество и $(\mathop{+}_{j\in J} f_j)(x) = \mathop{+}_{j\in J} f_j(x)$, $x \in X$.

Возможность $\mathrm{P}'(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}'$ определим равенством

$$\mathrm{P}'(A) = \mathrm{p}'(\chi_A(\cdot)), \quad (1.16.7)$$

в котором $\chi_A(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}'$ — индикаторная функция $A \in \mathcal{P}(X)$.

Поскольку для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}'(X)$

$$f(x) = \mathop{+}_{y\in X}(f(y) \times \chi_{\{y\}}(x)),\ x \in X, \quad (1.16.8)$$

то, согласно равенствам (1.16.5)–(1.16.8),

$$\mathrm{p}'(f(\cdot)) = \mathrm{p}(\mathop{+}_{y\in X}(f(y) \times \chi_{\{y\}}(\cdot))) =$$
$$= \mathop{+}_{y\in X}(f(y) \times \mathrm{p}'(\chi_{\{y\}}(\cdot))) = \mathop{+}_{y\in X}(f(y) \times \mathrm{P}'(\{y\})). \quad (1.16.9)$$

Следовательно,

$$\mathrm{p}'(f(\cdot)) = \mathrm{p}'_g(f(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in X}(f(x) \boldsymbol{\times} g(x)) \tag{1.16.10}$$

— *общий вид* p'-*интеграла*, где $g(x) = \mathrm{P}'(\{x\})$, $x \in X$, — распределение возможности $\mathrm{P}'(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}'$ и соответственно

$$\mathrm{P}'(A) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in A} g(x),\ A \in \mathcal{P}(X). \tag{1.16.11}$$

Поэтому возможность $\mathrm{P}'(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}'$ обладает всеми свойствами возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$, отмеченными в теореме 1.9.1. В частности,

$$\mathrm{P}'(A\cup B) = \mathrm{P}'(A) \boldsymbol{+} \mathrm{P}'(B),\ \mathrm{P}'(\bigcup_{j\in J} A_j) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{j\in J}\mathrm{P}'(A_j),$$
$$A, B, A_j \in \mathcal{P}(X),\ j \in J,\ \mathrm{P}'(X) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in X} g(x) = 1. \tag{1.16.12}$$

Наконец, как p-интеграл является P-интегралом Лебега, см. § 1.6.1, так и p'-интеграл является P'-интегралом Лебега. Действительно, подобно (1.2.1) для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}'(X)$

$$\underline{f}_n(x) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{n}(a_k^{(n)} \boldsymbol{\times} \chi_{A_k^{(n)}}(x)) \leqslant f(x) \leqslant \mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{n}(a_{k-1}^{(n)} \boldsymbol{\times} \chi_{A_k^{(n)}}(x)) = \overline{f}_n(x), \tag{1.16.13}$$

где $0 = a_n^{(n)} < a_{n-1}^{(n)} < \ldots < a_1^{(n)} < a_0^{(n)} = 1$, $A_1^{(n)} = \{x \in X,\ a_1^{(n)} \leqslant f(x) \leqslant a_0^{(n)}\}$, $A_k^{(n)} = \{x \in X,\ a_k^{(n)} \leqslant f(x) \leqslant a_{k-1}^{(n)}\}$, $k = 2, \ldots, n$, и в силу монотонности [1] p'-интеграла, согласно (1.16.13), $\mathrm{p}'(\underline{f}_n(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}'(f(\cdot)) \leqslant \mathrm{p}'(\overline{f}_n(\cdot))$, где, согласно (1.16.5) и (1.16.7),

$$\mathrm{p}'(\overline{f}_n(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{n}(a_{k-1}^{(n)} \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(A_k^{(n)})) \text{ и } \mathrm{p}'(\underline{f}_n(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{n}(a_k^{(n)} \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(A_k^{(n)})) \tag{1.16.14}$$

суть верхняя и нижняя лебеговские P'-интегральные суммы. Если при $n \to \infty$ $\varepsilon^{(n)} = \mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{n}(a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}) \to 0$, то, согласно (1.16.14), $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}'(\underline{f}_n(\cdot)) = \mathrm{p}'(f(\cdot)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}'(\overline{f}_n(\cdot))$, поскольку $0 \leqslant \mathrm{p}'(\overline{f}_n(\cdot)) - \mathrm{p}'(\underline{f}_n(\cdot)) \leqslant \mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{n}((a_{k-1}^{(n)} - a_k^{(n)}) \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(A_k^{(n)})) \leqslant \varepsilon^{(n)}$.

Следовательно, *любая функция* $f(\cdot) \in \mathcal{L}'(X)$ P'-*интегрируема по Лебегу и ее* P'-*интеграл Лебега совпадает с* $\mathrm{p}'(f(\cdot))$, ср. с теоремой 1.6.1.

---

[1] Нетрудно убедиться, что p'-интеграл обладает всеми свойствами p-интеграла, отмеченными в теореме 1.1.1, в частности, если $f(\cdot) \geqslant g(\cdot)$, то $\mathrm{p}'(f(\cdot)) = \mathrm{p}'((f \boldsymbol{+} g)(\cdot)) = \mathrm{p}'(f(\cdot)) \boldsymbol{+} \mathrm{p}'(g(\cdot)) \geqslant \mathrm{p}'(g(\cdot))$.

P'-интеграл Суджено определим равенством

$$s'(f(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(\{x \in X,\ f(x) \geqslant \alpha\})),\ f(\cdot) \in \mathcal{L}'(X), \quad (1.16.15)$$

согласно которому, как нетрудно убедиться,

1. $s'(a \boldsymbol{\times} f(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(\{x \in X, a \boldsymbol{\times} f(x) \geqslant \alpha\})) = a \boldsymbol{\times} s'(f(\cdot))$, $a \in [0,1]$, $f(\cdot) \in \mathcal{L}'(X)$;
2. $s'((f_1 \boldsymbol{+} f_2)(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(\{x \in X, f_1(x) \boldsymbol{+} f_2(x) \geqslant \alpha\})) = s'(f_1(\cdot)) \boldsymbol{+} s'(f_2(\cdot))$, $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathcal{L}'(X)$;
3. $s'((\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{j\in J} f_j)(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{j\in J} s'(f_j(\cdot))$, $f_j(\cdot) \in \mathcal{L}'(X), j \in J$;
4. $s'(\chi_A(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(\{x \in X, \chi_A(x) \geqslant \alpha\})) = \mathrm{P}'(A)$.

Согласно равенствам 1.–3. s'-интеграл $s'(\cdot)\colon \mathcal{L}'(X) \to [0,1]$ (1.16.15) обладает свойствами линейности и полной аддитивности, подобными свойствам (1.16.5), (1.16.6) p'-интеграла.

Заметим, что так как интеграл $\mathrm{p}'(\cdot)\colon \mathcal{L}'(X) \to \mathcal{L}'$ линеен и вполне аддитивен, а каждая функция $f(\cdot) \in \mathcal{L}'(X)$ может быть представлена любым из равенств

$$f(x) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha\chi_\alpha(x)) \equiv \mathop{\boldsymbol{+}}_{\alpha\in[0,1]}(\alpha \boldsymbol{\times} \chi_\alpha(x)),\ x \in X,$$

$$f(x) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}(\alpha\widehat{\chi}_\alpha(x)) \equiv \mathop{\boldsymbol{+}}_{\alpha\in[0,1]}(\alpha \boldsymbol{\times} \widetilde{\chi}_\alpha(x)),\ x \in X,$$

где $\chi_\alpha(\cdot)$ и $\widehat{\chi}_\alpha(\cdot)$ суть и. ф. множеств $A_\alpha = \{x \in X, f(x) = \alpha\}$ и соответственно $\widehat{A}_\alpha = \{x \in X, f(x) \geqslant \alpha\}$, то, согласно (1.16.5), (1.16.6),

$$\mathrm{p}'(f(\cdot)) = \mathrm{p}'(\mathop{\boldsymbol{+}}_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\chi_\alpha(\cdot))) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{\alpha\in[0,1]}(\alpha \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(A_\alpha))$$

— P'-интеграл Лебега,

$$\mathrm{p}'(f(\cdot)) = \mathrm{p}'(\mathop{\boldsymbol{+}}_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\widehat{\chi}_\alpha(\cdot))) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{\alpha\in[0,1]}(\alpha \boldsymbol{\times} \mathrm{P}'(\widehat{A}_\alpha))$$

— P'-интеграл Суджено.

Дуальный $\mathrm{p}'_g(\cdot)\colon \mathcal{L}'(X) \to \mathcal{L}'$ интеграл $\mathrm{n}'_h(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}'(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}'$ зададим равенством

$$\mathrm{n}'_{\widetilde{h}_\beta}(\widetilde{f}(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \theta'_\beta(\mathrm{p}'_g(\theta_\beta'^{-1} \circ \widetilde{f}(\cdot))) = \theta'_\beta(\mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in X}(g(x) \cdot \theta_\beta'^{-1} \circ \widetilde{f}(x))) =$$
$$= \mathop{\widetilde{\boldsymbol{+}}}_{x\in X}(\widetilde{h}_\beta(x) \mathbin{\widetilde{\boldsymbol{\times}}} \widetilde{f}(x)),\ \widetilde{f}(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}'(X), \quad (1.16.16)$$

где $\widetilde{h}_\beta(\cdot) = \theta'_\beta \circ g(\cdot)$, и $\mathrm{n}'_{\widetilde{h}_\beta}((\mathop{\widetilde{\boldsymbol{+}}}\limits_{j\in J}(\widetilde{a}_j \mathbin{\widetilde{\boldsymbol{\times}}} \widetilde{f}_j))(\cdot)) = \mathop{\widetilde{\boldsymbol{+}}}\limits_{j\in J}(\widetilde{a}_j \mathbin{\widetilde{\boldsymbol{\times}}} \mathrm{n}'_{\widetilde{h}_\beta}(\widetilde{f}_j(\cdot)))$, $\widetilde{a}_j \in [0,1]$, $\widetilde{f}_j(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}'(X)$, $j \in J$, $\widetilde{h}_\beta(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{L}}'(X)$. Соответственно необходимость $\mathrm{N}'_{\widetilde{h}_\beta}(A) = \mathrm{n}'_{\widetilde{h}_\beta}(\widetilde{\chi}_A(\cdot)) = \widetilde{\underset{x\in X}{+}}(\widetilde{h}_\beta(x) \widetilde{\times} \widetilde{\chi}_A(x)) \equiv \equiv \widetilde{\underset{x\in X}{+}}(\widetilde{h}_\beta(x) + \widetilde{\chi}_A(x) - \widetilde{h}_\beta(x)\widetilde{\chi}_A(x)) \equiv \widetilde{\underset{x\in X}{+}}(1 - (1 - \widetilde{h}_\beta(x))(1 - - \widetilde{\chi}_A(x))) = \widetilde{\underset{x\in X\setminus A}{+}} \widetilde{h}_\beta(x) = \theta'_\beta(\mathrm{P}'_g(X\setminus A))$, $A \in \mathcal{P}(X)$, где $\widetilde{\chi}_A(\cdot) = = \theta'_\beta \circ \chi_{X\setminus A}(\cdot) = \chi_A(\cdot)$.

Заметим, что так как $1 = \mathrm{P}'_g(X) = \max\{\mathrm{P}'_g(A), \mathrm{P}'_g(X \setminus A)\}$, то $\mathrm{P}'_g(A) < 1 \Rightarrow \mathrm{P}'_g(X \setminus A) = 1 \quad \Leftrightarrow \mathrm{N}'_{\widetilde{h}_\beta}(A) = 0$ и $\mathrm{N}'_{\widetilde{h}_\beta}(A) > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathrm{P}'_g(X \setminus A) < 1 \Rightarrow \mathrm{P}'_g(A) = 1$.

Независимость. Условные меры. Что касается независимости и условной возможности, рассмотренных в §§ 1.7, 1.10, 1.12, то эти понятия теперь несколько ближе к теоретико-вероятностным. А именно, теперь события A и B назовем P'-независимыми, если

$$\mathrm{P}'(A \cap B) = \mathrm{P}'(A) \times \mathrm{P}'(B) = \mathrm{P}'(A)\mathrm{P}'(B). \qquad (1.16.17)$$

В этом случае значения $\mathrm{P}'(A)$ и $\mathrm{P}'(B)$ согласно (1.16.12) определяют значения $\mathrm{P}'(A \cup B)$ и $\mathrm{P}'(A \cap B)$.

Соответственно события A и B назовем N'-независимыми, если

$$\mathrm{N}'(A \cup B) = \mathrm{N}'(A) \widetilde{\times} \mathrm{N}'(B) = 1 - (1 - \mathrm{N}'(A))(1 - \mathrm{N}'(B)), \quad (1.16.17^*)$$

а так как $\mathrm{N}'(A \cap B) = \min\{\mathrm{N}'(A), \mathrm{N}'(B)\} \triangleq \mathrm{N}'(A) \widetilde{+} \mathrm{N}'(B)$, то в случае N'-независимости A и B значения $\mathrm{N}'(A)$и $\mathrm{N}'(B)$ определяют значения $\mathrm{N}'(A \cup B)$ и $\mathrm{N}'(A \cap B)$.

Определив как в §§ 1.10, 1.12 конструкции нечеткого элемента и нечеткого множества, соответствующие понятия независимости введем как в определениях 1.10.2, 1.10.3 и 1.12.3, заменив в них min на $\times$.

Пусть, например, η — нечеткий элемент, канонический для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}'^\eta, \mathrm{N}'^\eta)$, нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$, $q(\cdot)\colon Y \to X$, и нечеткое множество A^η, $A^\cdot\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, независимы в смысле одноточечного покрытия. Тогда возможность $\mathrm{P}'^\eta(q(\eta) \in A^\eta)$ покрытия нечеткого элемента ξ нечетким множеством A^η определится значением интеграла $\mathrm{p}'_{g^\xi}(g^{A^\eta}(\cdot)) = \underset{x\in X}{+}(g^\xi(x) \times g^{A^\eta}(x)) = \sup\limits_{x\in X}(g^\xi(x) \cdot g^{A^\eta}(x))$, где $g^\xi(x) = \mathrm{P}'^\eta(q(\eta) = x) = +\{g^\eta(y) | y \in Y, q(y) = x\}$, $g^{A^\eta}(x) = = \mathrm{P}'^\eta(x \in A^\eta) = +\{g^\eta(y) | y \in Y, x \in A^y\}$, $x \in X$, и $g^\eta(y) = \mathrm{P}'^\eta(\eta = y)$, $y \in Y$. Необходимость $\mathrm{N}'^\eta(q(\eta) \in A^\eta)$ покрытия нечеткого элемента ξ нечетким множеством A^η определится значением интеграла $\mathrm{n}'_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{h}^{A^\eta}(\cdot)) = \widetilde{\underset{x\in X}{+}}(\widetilde{h}^\xi(x) \widetilde{\times} \widetilde{h}^{A^\eta}(x)) = \inf\limits_{x\in X}(\widetilde{h}^\xi(x) + \widetilde{h}^{A^\eta}(x) - - \widetilde{h}^\xi(x)\widetilde{h}^{A^\eta}(x))$, где $\widetilde{h}^\xi(x) = \mathrm{N}'^\eta(q(\eta) \neq x) = \inf\{\widetilde{h}^\eta(y) | y \in Y, q(y) \neq x\}$, $\widetilde{h}^{A^\eta}(x) = \mathrm{N}'^\eta(x \in A^\eta) = \inf\{\widetilde{h}^\eta(y) | y \in Y, x \in A^y\}$, $x \in X$, и $\widetilde{h}^\eta(y) \triangleq \triangleq \mathrm{N}'^\eta(\eta \neq y)$, $y \in Y$, ср. с §§ 1.4, 1.5.

Вариант $\mathrm{P}'(A|B)$ условной возможности события A при условии B со значениями в *шкале $\mathcal{L}'$ значений возможности* $\mathrm{P}'(\cdot)$ определим как решение уравнения: $\mathrm{P}'(A|B)\mathrm{P}'(B) = \mathrm{P}'(A \cap B)$, $A, B \in \mathcal{A}$, т. е.

$$\mathrm{P}'(A|B) = \begin{cases} \mathrm{P}'(A \cap B)/\mathrm{P}'(B), & \text{если } \mathrm{P}'(B) > 0, \\ \text{любое число из } [0,1], & \text{если } \mathrm{P}'(B) = 0. \end{cases} \tag{1.16.18}$$

Но если $\mathrm{P}'(B) = 0$, то и $\mathrm{P}'(A \cap B) = 0$, и, следовательно, $\mathrm{P}'(A)\mathrm{P}'(B) = \mathrm{P}'(A \cap B)$, то есть A и B P'-независимы.

Соответственно для варианта условной необходимости, со значениями в *шкале $\widetilde{\mathcal{L}}'$ значений необходимости* $\mathrm{N}'(\cdot)$, определенного как решение уравнения $\mathrm{N}'(A \cup B) = \mathrm{N}'(A|B) \,\widetilde{\times}\, \mathrm{N}'(B) \triangleq \mathrm{N}'(A|B) + \mathrm{N}'(B) - \mathrm{N}'(A|B)\mathrm{N}'(B)$, найдем

$$\mathrm{N}'(A|B) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{N}'(A \cup B) - \mathrm{N}'(B)}{1 - \mathrm{N}'(B)}, & \text{если } \mathrm{N}'(B) < 1, \\ \text{любое число из } [0,1], & \text{если } \mathrm{N}'(B) = 1. \end{cases}$$

При этом вариант условной необходимости, дуальной условной возможности (1.16.18),

$$\mathrm{N}'(A|X \backslash B) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{N}'(A \cup (X \backslash B)) - \mathrm{N}'(X \backslash B)}{1 - \mathrm{N}'(X \backslash B)}, & \text{если } \mathrm{N}'(X \backslash B) < 1, \\ \text{любое число из } [0,\ 1], & \text{если } \mathrm{N}'(X \backslash B) = 1. \end{cases} \tag{1.16.19}$$

Любопытно, что правые части равенств (1.16.18) и (1.16.19) формально совпадают соответственно с условным правдоподобием и с условным доверием, полученными по правилу Демпстера [84] на основе соображений, не имеющих ничего общего с материалом этого параграфа.

1.16.2. Математическое P'-ожидание E_{g^ξ} нечеткой величины. P'-интегрирование функций со значениями в $(-\infty, \infty)$. В рассматриваемом варианте теории возможностей можно определить аналог математического ожидания случайной величины в теории вероятностей — математическое P'-ожидание нечеткой величины. Действительно, если ξ — нечеткий элемент со значениями в X, $g^\xi(\cdot)\colon X \to [0,1]$ — его распределение и $f(\cdot)\colon X \to [0,\infty)$, то математическое ожидание нечеткой величины $\eta = f(\xi)$ со значениями в $[0,\infty)$ естественно определить равенством, см. (1.16.9), (1.16.10),

$$\begin{aligned} \mathsf{E}^+_{g^\xi} f(\xi) &= \mathop{\boldsymbol{+}}_{x \in X} (f(x) \times g^\xi(x)) \equiv \sup_{x \in X} (f(x) \cdot g^\xi(x)) = \\ &= \sup_{y \in [0,\infty)} (y \cdot g^\eta(y)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{y \in [0,\infty)} (y \times g^\eta(y)) \triangleq E^+_{g^\eta}\eta, \end{aligned} \tag{1.16.20}$$

где $g^\eta(y) = \sup\{g^\xi(x) | x \in X,\ f(x) = y\}$, $y \in [0,\infty)$, — распределение η.

Шкала $\mathcal{L}^+$ значений нечеткой величины. Математическое P'-ожидание $\mathsf{E}^+_{g^\xi}$ нечеткой величины со значениями в $\mathcal{L}^+$ как

продолжение p'_g-интеграла. Выражение для $E^+_{g^\xi} f(\xi)$ естественно рассматривать как продолжение интеграла $p'_g(\cdot)\colon \mathcal{L}'(X) \to \mathcal{L}'$ (1.16.3) на класс всех функций $\mathcal{L}^+(X)$ со значениями в шкале $\mathcal{L}^+ = ([0,\infty), \leqslant, \bar{+}, \bar{\times})$, в которой

$$a \mathbin{\bar{+}} b = \max(a,b),\ a \mathbin{\bar{\times}} b = a\cdot b \equiv ab,\ a,b \in [0,\infty). \tag{1.16.21}$$

Действительно, шкала $\mathcal{L}^+$ является расширением шкалы $\mathcal{L}' = ([0,1], \leqslant, +, \times)$, определенной в (1.16.1), поскольку выполнены следующие условия:

1) $[0,1] \subset [0,\infty)$, $a \mathbin{\bar{+}} b = a + b$, $a \mathbin{\bar{\times}} b = a \times b$, $a,b \in [0,1]$;

2) группы $\overline{\Gamma}'$ и $\overline{\Gamma}^+$ изотонных автоморфизмов шкал $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}^+$ порождены группами [1]) непрерывных монотонных функций $\gamma'(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma^+(\cdot)\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющих условиям $\gamma^+(a) = \gamma'(a)$, $a \in [0,1]$, $\gamma^+(\infty) = \infty$, $\gamma^+(a \mathbin{\bar{+}} b) = \gamma^+(a) \mathbin{\bar{+}} \gamma^+(b)$, $\gamma^+(a \mathbin{\bar{\times}} b) = \gamma^+(a) \mathbin{\bar{\times}} \gamma^+(b)$, $a,b \in [0,\infty)$, где $\gamma^+(a) = \gamma^+_\alpha(a) = a^\alpha$, $a \in [0,\infty)$, $\alpha > 0$, поскольку, как показано в § 1.16.1, $\gamma'(a) = \gamma'_\alpha(a) = a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$.

Согласно 2) группа $\{\gamma'_\alpha(\cdot),\ \alpha > 0\}$ является подгруппой группы $\{\gamma^+_\alpha(\cdot),\ \alpha > 0\}$. Согласно условиям 1), 2) $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}^+$.

Соответственно $\mathcal{L}^+(X)$ обозначим класс функций $f(\cdot)\colon X \to [0,\infty)$, с операциями $(f_1 \mathbin{\bar{+}} f_2)(x) = f_1(x) \mathbin{\bar{+}} f_2(x)$, $(a \mathbin{\bar{\times}} f)(x) = a \mathbin{\bar{\times}} f(x)$, $x \in X$, $a \in [0,\infty)$, $f_1(\cdot), f_2(\cdot), f(\cdot) \in \mathcal{L}^+(X)$, и с операцией $(\bar{+}_{j\in J} f_j)(x) = \bar{+}_{j\in J} f_j(x) = (\sup_{j\in J} f_j)(x)$, $x \in X$, в которой $f_j(\cdot) \in \mathcal{L}^+(X)$, $j \in J$, где J — произвольное множество индексов.

Очевидно, что математическое P'-ожидание в (1.16.20) как функция $\mathsf{E}^+_{g^\xi}(\cdot)\colon \mathcal{L}^+(X) \to \mathcal{L}^+$ обладает свойствами линейности

$$\mathsf{E}^+_{g^\xi}(f_1 \mathbin{\bar{+}} f_2)(\xi) = \mathsf{E}^+_{g^\xi} f_1(\xi) \mathbin{\bar{+}} \mathsf{E}^+_{g^\xi} f_2(\xi),\ \mathsf{E}^+_{g^\xi}(a \mathbin{\bar{\times}} f)(\xi) = a \mathbin{\bar{\times}} \mathsf{E}^+_{g^\xi} f(\xi),$$
$$a \in [0,\infty),\ f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in \mathcal{L}^+(X), \tag{1.16.22}$$

и полной аддитивности

$$\mathsf{E}^+_{g^\xi}(\bar{+}_{j\in J} f_j)(\xi) = \bar{+}_{j\in J} \mathsf{E}^+_{g^\xi} f_j(\xi),\ f_j(\cdot) \in \mathcal{L}^+(X),\ j \in J, \tag{1.16.23}$$

т. е. *является интегралом — продолжением* p'*-интеграла* $\mathrm{p}'_{g^\xi}(\cdot)\colon \mathcal{L}'(X) \to \mathcal{L}'$ (1.16.3) до *функции* $\mathcal{L}^+(X) \to \mathcal{L}^+$. При этом

---

[1]) Групповые операции суть композиции функций $\gamma'_\alpha \circ \gamma'_\beta(\cdot) = \gamma'_{\alpha\beta}(\cdot)$, $\gamma^+_\alpha \circ \gamma^+_\beta(\cdot) = \gamma^+_{\alpha\beta}(\cdot)$, $\alpha, \beta > 0$.

подобно (1.16.4)

$$\gamma_\alpha^+ * \mathsf{E}^+_{g^\xi} f(\xi) \stackrel{\triangle}{=} \gamma_\alpha^+(\mathsf{E}^+_{g^\xi}(\gamma_\alpha^+)^{-1} \circ f(\xi)) = \mathsf{E}^+_{\gamma_\alpha^+ \circ g^\xi} f(\xi), \tag{1.16.24}$$

т. е. $\forall\, \gamma_\alpha^+(\cdot)$, $\alpha > 0$, $\gamma_\alpha^+ * \mathsf{E}^+_g \xi(\cdot)\colon \mathcal{L}^+(X) \to \mathcal{L}^+$ — интеграл.

Поскольку $a \mathbin{\bar{+}} b = \max(a,b)$, $a \mathbin{\bar{\times}} b = ab$, $a, b \in [0,\infty)$, далее черточка над $+$ и $\times$, как символ продолжения операций $+$ и $\times$ с $[0,1]^2 \to [0,1]$ на $[0,\infty]^2 \to [0,\infty]$, не используется и считается, что $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}^+$, $\mathcal{L}'(X) \subset \mathcal{L}^+(X)$.

Математическое P′-ожидание $\mathsf{E}^-_{g^\xi}$ нечеткой величины со значениями в $(-\infty, 0]$.

Для определения математического P′-ожидания нечеткой величины со значениями в $(-\infty, 0]$ введем шкалу $\mathcal{L}^- = ((-\infty, 0], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$, зеркально изоморфную $\mathcal{L}^+$, зеркальный изоморфизм которой зададим инволюцией

$$\theta(\cdot) = \theta^{-1}(\cdot)\colon (-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty),\ \theta(a) = -a,\ a \in (-\infty,\infty). \tag{1.16.25}$$

Согласно (1.16.25) для $a, b \in (-\infty, 0]$ $a \leqslant b \Leftrightarrow \theta(a) \widehat{\leqslant} \theta(b)$

$$\begin{aligned} &a \mathbin{\widehat{+}} b = \theta(\theta^{-1}(a) + \theta^{-1}(b)) = -(\max(-a,-b)) = \min\{a,b\},\\ &a \mathbin{\widehat{\times}} b = \theta(\theta^{-1}(a) \times \theta^{-1}(b)) = -((-a) \times (-b)) = -ab,\\ &a \mathbin{\widehat{\times}} (b \mathbin{\widehat{+}} c) = (a \mathbin{\widehat{\times}} b) \mathbin{\widehat{+}} (a \mathbin{\widehat{\times}} c),\ a,b,c \in (-\infty,0]. \end{aligned} \tag{1.16.26}$$

Что касается группы $\overline{\Gamma}^-$ автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}^-$, то поскольку $\gamma_\alpha^+(a) = a^\alpha$, $a \geqslant 0$, $\alpha > 0$, то

$$\gamma_\alpha^-(a) = \theta \circ \gamma_\alpha^+ \circ \theta^{-1}(a) = -(-a)^\alpha,\ a \in (-\infty, 0]. \tag{1.16.27}$$

Наконец, $\mathcal{L}^-(X)$ обозначим класс всех функций $f(\cdot)\colon X \to (-\infty, 0]$, с операциями

$$(f_1 \mathbin{\widehat{+}} f_2)(x) = f_1(x) \mathbin{\widehat{+}} f_2(x),\ (a \mathbin{\widehat{\times}} f)(x) = a \mathbin{\widehat{\times}} f(x),\ (\widehat{+}_{j\in J} f_j)(x) = \widehat{+}_{j\in J} f_j(x),$$

$x \in X$, $a \in (-\infty, 0]$, и преобразованиями $f(\cdot) \to \gamma_\alpha^- \circ f(\cdot)$, $\alpha > 0$.

Подобно математическому P′-ожиданию $\mathsf{E}^+_{g^\xi} f(\xi)$ (1.16.20), определим математическое P′-ожидание $\mathsf{E}^-_{g^\xi} f(\xi)$ нечеткого элемента $f(\xi)$ для $f(\cdot)\colon X \to (-\infty, 0]$ равенством

$$\mathsf{E}^-_{g^\xi} f(\xi) = -\sup_{x\in X}(-f(x)) g^\xi(x) = \theta(\mathsf{E}^+_{g^\xi} \theta^{-1} \circ f(\xi)) = \widehat{+}_{x\in X}(f(x) \mathbin{\widehat{\times}} \theta \circ g^\xi(x)),$$
$$f(\cdot) \in \mathcal{L}^-(X). \tag{1.16.28}$$

С учетом дистрибутивности умножения $\widehat{\times}$ относительно сложения $\widehat{+}$, см. (1.16.26), подобно (1.16.23)

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^-_{g^\xi}(\widehat{\sum_{j\in J}} f_j)(\xi) &= \widehat{\sum_{x\in X}}((\widehat{\sum_{j\in J}} f_j)(x)\widehat{\times}\theta\circ g^\xi(x)) = \\ &= \widehat{\sum_{x\in X}}(\widehat{\sum_{j\in J}}(f_j(x)\widehat{\times}\theta\circ g^\xi(x))) = \widehat{\sum_{j\in J}}(\widehat{\sum_{x\in X}}(f_j(x)\widehat{\times}\theta\circ g^\xi(x))) = \\ &= \widehat{\sum_{j\in J}}\mathsf{E}^-_{g^\xi} f_j(\xi), \end{aligned}\quad (1.16.29)$$

$$\mathsf{E}^-_{g^\xi}(a\widehat{\times} f)(\xi) = a\widehat{\times}\mathsf{E}^-_{g^\xi} f(\xi),\ a\in(-\infty,0], \quad (1.16.30)$$

и подобно (1.16.24)

$$\gamma^-_\alpha * \mathsf{E}^-_{g^\xi} f(\xi) = \gamma^-_\alpha(\mathsf{E}^-_{g^\xi}(\gamma^-_\alpha)^{-1}\circ f(\xi)) = \mathsf{E}^-_{\gamma^+_\alpha\circ g^\xi} f(\xi), \quad (1.16.31)$$

где $(\gamma^-_\alpha)^{-1} = \gamma^-_{1/\alpha}$, $\alpha > 0$.

Математическое P′-ожидание E_{g^ξ} нечеткой величины со значениями в $(-\infty,\infty)$ и его свойства. Математическое p′-ожидание нечеткой величины $f(\xi)$, $f(\cdot)\colon X\to\mathcal{L}^-\bigotimes\mathcal{L}^+$ как функцию $\mathsf{E}_{g^\xi}\colon \mathcal{L}^-(X)\bigotimes\mathcal{L}^+(X)\to\mathcal{L}^-\bigotimes\mathcal{L}^+$ определим равенством

$$\mathsf{E}_{g^\xi} f(\xi) = \begin{pmatrix}\mathsf{E}^-_{g^\xi} f^-(\xi)\\ \mathsf{E}^+_{g^\xi} f^+(\xi)\end{pmatrix}, \quad (1.16.32)$$

в котором функция $f(\cdot)\colon X\to\mathcal{L}^-\bigotimes\mathcal{L}^+$ считается элементом класса $\boldsymbol{\mathcal{L}}(X) = \mathcal{L}^-(X)\bigotimes\mathcal{L}^+(X)$, «представленным своими координатами» $f^-(\cdot)\in\mathcal{L}^-(X)$, $f^+(\cdot)\in\mathcal{L}^+(X)$, $f(\cdot)\sim\begin{pmatrix}f^-(\cdot)\\ f^+(\cdot)\end{pmatrix}$, где $f^-(x) = \min\{f(x),0\}$, $f^+(x) = \max\{f(x),0\}$, $x\in X$, суть проекции $f(\cdot)$ на $\mathcal{L}^-(X)$ и на $\mathcal{L}^+(X)$ соответственно. Функция $f(\cdot)\colon X\to\mathcal{L}^-\bigotimes\mathcal{L}^+$, как элемент класса $\boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$, принимает значения в шкале $\boldsymbol{\mathcal{L}} = ((-\infty,\infty),\circledleq,\oplus,\otimes) = ((-\infty,0],\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})\bigotimes([0,\infty),\leqslant,+,\times) = \mathcal{L}^-\bigotimes\mathcal{L}^+$, отношение $\circledleq$ и операции $\oplus$ и $\otimes$ в которой определены в «координатном представлении», а именно, если $a^-_i\in\mathcal{L}^-$, $a^+_i\in\mathcal{L}^+$, $a_i\sim\begin{pmatrix}a^-_i\\ a^+_i\end{pmatrix}$, то $a_i\in\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $\begin{pmatrix}a^-_i\\ a^+_i\end{pmatrix}\in\mathcal{L}^-\bigotimes\mathcal{L}^+$, $\begin{pmatrix}a^-_i\\ a^+_i\end{pmatrix}^- = a^-_i$, $\begin{pmatrix}a^-_i\\ a^+_i\end{pmatrix}^+ = a^+_i$, $i = 1,2$, и

$$a_1\oplus a_2\sim\begin{pmatrix}a^-_1\\ a^+_1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}a^-_2\\ a^+_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a_1\oplus a_2)^-\\ (a_1\oplus a_2)^+\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}a^-_1\widehat{+}a^-_2\\ a^+_1 + a^+_2\end{pmatrix}\circledgeq\begin{pmatrix}a^-_1\\ a^+_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a^-_2\\ a^+_2\end{pmatrix},$$

$$a_1\otimes a_2\sim\begin{pmatrix}a^-_1\\ a^+_1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a^-_2\\ a^+_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a_1\otimes a_2)^-\\ (a_1\otimes a_2)^+\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}a^-_1\widehat{\times}a^-_2\\ a^+_1\times a^+_2\end{pmatrix}, \quad (1.16.33)$$

и $a_1 \textcircled{\leqslant} a_2 \sim \begin{pmatrix} a_1^- \\ a_1^+ \end{pmatrix} \textcircled{\leqslant} \begin{pmatrix} a_2^- \\ a_2^+ \end{pmatrix}$ означает, что $a_1^- \widehat{\leqslant} a_2^-$, $a_1^+ \leqslant a_2^+$. Операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ коммутативны, ассоциативны, причем операция $\otimes$ дистрибутивна относительно $\oplus$: $\begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} a_1^- \\ a_1^+ \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2^- \\ a_2^+ \end{pmatrix} \right) = $
$= \left(\begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_1^- \\ a_1^+ \end{pmatrix} \right) \oplus \left(\begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2^- \\ a_2^+ \end{pmatrix} \right)$.

Определим отображения

$$\theta^-(\cdot)\colon (-\infty, 0] \to [0, \infty),\ \theta^-(a^-) = -a^-,\ a^- \in (-\infty, 0],$$

$$\theta^+(\cdot)\colon [0, \infty) \to (-\infty, 0],\ \theta^+(a^+) = -a^+,\ a^+ \in [0, \infty),$$

$$\theta(\cdot)\colon (-\infty, 0]\bigotimes[0, \infty) \to (-\infty, 0]\bigotimes[0, \infty),$$

$$\theta\left(\begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \theta^+(a^+) \\ \theta^-(a^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^+ \\ -a^- \end{pmatrix}, \tag{1.16.34}$$

и отображения, см. (1.16.27),

$$\gamma_\alpha(\cdot)\colon (-\infty, 0]\bigotimes[0, \infty) \to (-\infty, 0]\bigotimes[0, \infty),$$

$$\gamma_\alpha\left(\begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \gamma_\alpha^-(a^-) \\ \gamma_\alpha^+(a^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-a^-)^\alpha \\ (a^+)^\alpha \end{pmatrix},\ \alpha > 0, \tag{1.16.35}$$

определяющие группу автоморфизмов шкалы $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, заметив, что $\gamma_\alpha \circ \gamma_\beta(\cdot) = \gamma_{\alpha\beta}(\cdot)$, $\gamma_\alpha^{-1}(\cdot) = \gamma_{1/\alpha}(\cdot)$; заметим также, что $(\gamma_\alpha \circ \theta)(\cdot) = (\theta \circ \gamma_\alpha)(\cdot)$, $\alpha > 0$.

Охарактеризуем класс $\boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$ функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}^-\bigotimes\mathcal{L}^+$ со значениями в шкале $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, представленных «своими координатами» $f^-(\cdot)$ и $f^+(\cdot)$, в $\mathcal{L}^-(X)\bigotimes\mathcal{L}^+(X)$:

$$f(\cdot) \sim \begin{pmatrix} f^-(\cdot) \\ f^+(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{1.16.36}$$

где $f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $x \in X$, — проекции $f(\cdot)$ на $\mathcal{L}^-(X)$ и на $\mathcal{L}^+(X)$, определив операции над его элементами:

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x) \oplus f_2(x) \sim \begin{pmatrix} (f_1 \oplus f_2)^-(x) \\ (f_1 \oplus f_2)^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^-(x) \widehat{\boldsymbol{+}} f_2^-(x), \\ f_1^+(x) \boldsymbol{+} f_2^+(x) \end{pmatrix}$$

$$(f_1 \otimes f_2)(x) = f_1(x) \otimes f_2(x) \sim \begin{pmatrix} (f_1 \otimes f_2)^-(x) \\ (f_1 \otimes f_2)^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^-(x) \widehat{\boldsymbol{\times}} f_2^-(x), \\ f_1^+(x) \boldsymbol{\times} f_2^+(x) \end{pmatrix}$$

$$(a \otimes f)(x) = a \otimes f(x) \sim \begin{pmatrix} (a \otimes f)^-(x) \\ (a \otimes f)^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^- \widehat{\boldsymbol{\times}} f^-(x) \\ a^+ \boldsymbol{\times} f^+(x) \end{pmatrix},\ a \sim \begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \end{pmatrix}, \tag{1.16.37}$$

$$(\bigoplus_{j \in J} f_j)(x) \triangleq \bigoplus_{j \in J} f_j(x) \sim \begin{pmatrix} (\oplus_{j \in J} f_j)^-(x) \\ (\oplus_{j \in J} f_j)^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{+}}_{j \in J} f_j^-(x) \\ \boldsymbol{+}_{j \in J} f_j^+(x) \end{pmatrix},\ x \in X, \tag{1.16.38}$$

где $f_j(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$, $j = 1, 2, \ldots$, $a \in \boldsymbol{\mathcal{L}}$. Заметим, что хотя $f(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(X)$ однозначно определяется своими проекциями на $\mathcal{L}^+(X)$ и на $\mathcal{L}^-(X)$, а именно, $f(x) = f^-(x) + f^+(x)$, $x \in X$, где $+$ — символ «обычного» сложения координатных функций, но $(f_1 \oplus f_2)^-(x) = f_1^-(x) \widehat{+} f_2^-(x) = \min\{\min\{f_1(x), 0\}, \min\{f_2(x), 0\}\} = \min\{f_1(x), f_2(x), 0\}$, $(f_1 \oplus f_2)^+(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), 0\}$, $x \in X$, определяют лишь проекции функций $f^\wedge(x) \overset{\triangle}{=} \min\{f_1(x), f_2(x)\}$, $x \in X$, и $f^\vee(x) \overset{\triangle}{=} \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, $x \in X$, на $\mathcal{L}^-(X)$ и, соответственно, на $\mathcal{L}^+(X)$, т. е., вообще говоря, не существует функции $F(\cdot) = (f_1 \oplus f_2)(\cdot)$ такой, что $F^-(x) = f_1^-(x) \widehat{+} f_2^-(x)$, $F^+(x) = f_1^+(x) \widehat{+} f_2^+(x)$, $x \in X$.

Заметим также, что каждая из функций $f^\wedge(\cdot)$ и $f^\vee(\cdot)$ определяет две проекции на $\mathcal{L}^+(X)$ и на $\mathcal{L}^-(X)$:

$$
\begin{aligned}
&(f^\wedge)^-(x) = \min\{\min\{f_1(x), f_2(x)\}, 0\} = \min\{f_1(x), f_2(x), 0\} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = f_1^-(x) \widehat{+} f_2^-(x),\ x \in X,\\
&(f^\wedge)^+(x) = \max\{\min\{f_1(x), f_2(x)\}, 0\},\ x \in X,\\
&(f^\vee)^-(x) = \min\{\max\{f_1(x), f_2(x)\}, 0\},\ x \in X,\\
&(f^\vee)^+(x) = \max\{\max\{f_1(x), f_2(x)\}, 0\} = f_1^+(x) + f_2^+(x),\ x \in X,
\end{aligned}
$$

причем

$$
\begin{aligned}
(f^\wedge)^-(x) &= f_1^-(x) \widehat{+} f_2^-(x) \leqslant (f^\vee)^-(x),\\
(f^\vee)^+(x) &= f_1^+(x) + f_2^+(x) \geqslant (f^\wedge)^+(x),\ x \in X,
\end{aligned}
$$

откуда следует, что *проекции* $(f^\vee)^-(\cdot)$ *и* $(f^\wedge)^+(\cdot)$ *не могут влиять на значения математических ожиданий* $\mathsf{E}^-_{g^\xi}(f_1 \oplus f_2)^-(\xi)$ и $\mathsf{E}^+_{g^\xi}(f_1 \oplus f_2)^+(\xi)$ *соответственно* в (1.16.32).

Воспользовавшись (1.16.23), (1.16.29), (1.16.33), (1.16.37) и (1.16.38), нетрудно проверить однородность и полную аддитивность математического ожидания (1.16.32):

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}_{g^\xi}(a \otimes f)(\xi) &= \begin{pmatrix} \mathsf{E}^-_{g^\xi}(a \otimes f)^-(\xi) \\ \mathsf{E}^+_{g^\xi}(a \otimes f)^+(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^- \widehat{\times}\, \mathsf{E}^-_{g^\xi} f^-(\xi) \\ a^+ \times \mathsf{E}^+_{g^\xi} f^+(\xi) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a^- \\ a^+ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathsf{E}^-_{g^\xi} f^-(\xi) \\ \mathsf{E}^+_{g^\xi} f^+(\xi) \end{pmatrix} \sim a \otimes \mathsf{E}_{g^\xi} f(\xi);
\end{aligned}
\tag{1.16.39}
$$

$$
\mathsf{E}_{g^\xi}\Big(\bigoplus_{j \in J} f_j\Big)(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{\sum\limits_{j \in J}} \mathsf{E}^-_{g^\xi} f_j^-(\xi) \\ \sum\limits_{j \in J} \mathsf{E}^+_{g^\xi} f_j^+(\xi) \end{pmatrix} = \bigoplus_{j \in J} \begin{pmatrix} \mathsf{E}^-_{g^\xi} f_j^-(\xi) \\ \mathsf{E}^+_{g^\xi} f_j^+(\xi) \end{pmatrix} = \bigoplus_{j \in J} \mathsf{E}_{g^\xi} f(\xi).
$$

Согласно (1.16.34), (1.16.35), (1.16.24), (1.16.31)

$$\gamma_\alpha * \mathsf{E}_{g^\xi} f(\xi) \triangleq \gamma_\alpha(\mathsf{E}_{g^\xi}(\gamma_\alpha^{-1} \circ f)(\xi)) = \gamma_\alpha(\begin{pmatrix} \mathsf{E}^-_{g^\xi}(\gamma_\alpha^{-1} \circ f)^-(\xi) \\ \mathsf{E}^+_{g^\xi}(\gamma_\alpha^{-1} \circ f)^+(\xi) \end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_\alpha^-(\mathsf{E}^-_{g^\xi}(\gamma_\alpha^{-1} \circ f)^-(\xi)) \\ \gamma_\alpha^+(\mathsf{E}^+_{g^\xi}(\gamma_\alpha^{-1} \circ f)^+(\xi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{E}^-_{\gamma_\alpha^+ \circ g^\xi} f^-(\xi) \\ \mathsf{E}^+_{\gamma_\alpha^+ \circ g^\xi} f^+(\xi) \end{pmatrix} = \mathsf{E}_{\gamma^+ \circ g^\xi} f(\xi),$$

$$\theta * \mathsf{E}_{g^\xi} f(\xi) = \theta(\mathsf{E}_{g^\xi}(\theta^{-1} \circ f)(\xi)) = \mathsf{E}_{g^\xi} f(\xi), \quad (1.16.40)$$

т. е. математическое ожидание в (1.16.32) обладает всеми свойствами интеграла.

1.16.3. Математическое N′-ожидание $\widetilde{\mathsf{E}}_{h^\xi}$ нечеткой величины со значениями в $(-l, l)$, $l > 0$. Математическое P′-ожидание $\mathsf{E}^+_{g^\xi}: \mathcal{L}^+(X) \to \mathcal{L}^+$ получено естественным продолжением p′-интеграла $\mathrm{p}'_{g^\xi}(\cdot)\colon \mathcal{L}'(X) \to \mathcal{L}' \triangleq ([0,1], \leqslant, +, \times)$ до интеграла, определенного на классе $\mathcal{L}^+(X)$ функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}^+ \triangleq ([0,\infty), \leqslant, \bar{+}, \bar{\times})$, путем формального расширения операций $+, \times : [0,1]^2 \to [0,1]$ в шкале $\mathcal{L}'$ до операций $\bar{+}, \bar{\times} : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ в шкале $\mathcal{L}^+$. Аналогично расширить операции $\widetilde{+}, \widetilde{\times} : [0,1]^2 \to [0,1]$ в классе $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)$ и в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}'$ значений n′-интеграла $\mathrm{n}'_h(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}'(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}'$ существенно сложнее. Дело в том, что хотя операция сложения $\widetilde{+}\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ естественно расширяется до операции $\bar{\widetilde{+}}\colon [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$, операцию умножения $\widetilde{\times} : [0,1]^2 \to [0,1]$ расширить непосредственно до операции $[0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ невозможно, см. (1.16.3), (1.16.1). Поэтому для продолжения n′-интеграла и для определения математического N′-ожидания естественно сохранить шкалу $\widetilde{\mathcal{L}}'$ значений необходимости N′, а расширить лишь операции в классе $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)$ интегрируемых функций $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}'$, расширив операции в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}'$ их значений до операций в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}_l = ([0,l], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$, в которой l — произвольное положительное число. Поскольку при этом мера N′ и интегрируемые относительно N′ функции будут принимать значения в *разных шкалах*, следует определить *представления* операций $+$, $\times$ и $\widetilde{+}$, $\widetilde{\times}$ в этих шкалах в произвольной единой шкале [1]).

Операции сложения $a_1 + \ldots + a_n$ и умножения $a_1 \times \ldots \times a_n$, $a_i \in \mathcal{L}_{l_i}$, $i = 1, \ldots, n$, и их представления в шкале $\mathcal{L}_l$. Операции сложения и умножения элементов $a_i \in \mathcal{L}_{l_i}$, $i = 1, \ldots, n$, и представления

[1]) Операции $+$, $\times$, $\widetilde{+}$, $\widetilde{\times}$ в разных шкалах будут представлены разными правилами, обозначаемыми, тем не менее, теми же символами $+$, $\times$, $\widetilde{+}$, $\widetilde{\times}$.

этих операций в любой шкале $\mathcal{L}_l$, $l>0$, определим по схеме

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_{l_1} \searrow \\ \vdots \longrightarrow \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}' \to \mathcal{L}_l = ([0,l], \leqslant, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\times}), \\ \mathcal{L}_{l_n} \nearrow \end{array}$$

согласно которой элементы $a_i \in \mathcal{L}_{l_i}$, $i=1,\ldots,n$, следует преобразовать в шкалу $\mathcal{L}'$, в которой операции $\boldsymbol{+}$ и $\boldsymbol{\times}$ определены согласно (1.16.1), т. е. $a_i \to \pi_{l_i}(a_i) \stackrel{\triangle}{=} a_i/l_i$, $i=1,\ldots,n$, затем следует выполнить одну из операций $\boldsymbol{+}$ или $\boldsymbol{\times}$, обозначим ее $*$, т. е. $\{\pi_{l_1}(a_1),\ldots$ $\ldots,\pi_{l_n}(a_n)\} \to \pi_{l_1}(a_1) * \ldots * \pi_{l_n}(a_n)$ и, наконец, результат преобразовать в шкалу $\mathcal{L}_l$, т. е., $\pi_{l_1}(a_1) * \ldots * \pi_{l_n}(a_n) \to \pi_l^{-1}(\pi_{l_1}(a_1) * \ldots * \pi_{l_n}(a_n))$, где $\pi_l^{-1}(a) = la$, $a \in \mathcal{L}_1$, получив то, что далее будем называть представлением в шкале $\mathcal{L}_l$ операции $*$: $[0,l_1]\bigotimes\ldots\bigotimes[0,l_n] \to [0,l]$, т. е. *представлением* значения $a_1 * \ldots * a_n \in \mathcal{L}_l$, $a_i \in \mathcal{L}_{l_i}$, $i=1,\ldots,n$. В частности, для представления в $\mathcal{L}_l$ сложения $\boldsymbol{+}$: $[0,l_1]\bigotimes\ldots\bigotimes[0,l_n] \to [0,l]$ и умножения $\boldsymbol{\times}$: $[0,l_1]\bigotimes\ldots\bigotimes[0,l_n] \to [0,l]$ получим

$$a_1 \boldsymbol{+} \ldots \boldsymbol{+} a_m \stackrel{\triangle}{=} \pi_l^{-1}(\pi_{l_1}(a_1) \boldsymbol{+} \ldots \boldsymbol{+} \pi_{l_n}(a_n)) = l\max\{\frac{a_1}{l_1},\ldots,\frac{a_n}{l_n}\} \in \mathcal{L}_l, \tag{1.16.41}$$

$$a_1 \boldsymbol{\times} \ldots \boldsymbol{\times} a_m \stackrel{\triangle}{=} \pi_l^{-1}(\pi_{l_1}(a_1) \boldsymbol{\times} \ldots \boldsymbol{\times} \pi_{l_n}(a_n)) = l(\frac{a_1}{l_1})\ldots(\frac{a_n}{l_n}) \in \mathcal{L}_l, \tag{1.16.42}$$

где $a_i \in \mathcal{L}_{l_i}$, $l_i>0$, $i=1,\ldots,n$, $l>0$, слева операции «$\boldsymbol{+}$», «$\boldsymbol{\times}$» в шкале $\mathcal{L}_l$, справа «$\boldsymbol{+}$», «$\boldsymbol{\times}$» — в шкале $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}'$.

Например, согласно представлениям (1.16.41), (1.16.42) математическое P$'$-ожидание $\mathsf{E}^{+}_{g^\xi} : \mathcal{L}^{+}(X) \to \mathcal{L}^{+}$ (1.16.20), суженное до $\mathsf{E}^{l}_{g^\xi} : \mathcal{L}_l(X) \to \mathcal{L}_l$, следует «представлять» равенством:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}^{l}_{g^\xi} f(\xi) = \underset{x\in X}{\boldsymbol{+}}(f(x) \boldsymbol{\times} g^\xi(x)) \stackrel{\triangle}{=} \pi_l^{-1}(\underset{x\in X}{\boldsymbol{+}}(\pi_l(\pi_l^{-1}(\pi_l(f(x)) \boldsymbol{\times} \\ \boldsymbol{\times}\, \pi_1(g^\xi(x)))))) = \pi_l^{-1}(\underset{x\in X}{\boldsymbol{+}}(\pi_l(f(x)) \boldsymbol{\times} g^\xi(x))), \end{aligned} \tag{1.16.43}$$

где в правой части операции «$\boldsymbol{+}$» и «$\boldsymbol{\times}$» в шкале $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}'$.

Представления (1.16.41) и (1.16.42), очевидно, коммутативны и ассоциативны, а дистрибутивность представления $\boldsymbol{\times}$ относительно представления $\boldsymbol{+}$,

$$a_1 \boldsymbol{\times} (a_2 \boldsymbol{+} a_3) = (a_1 \boldsymbol{\times} a_2) \boldsymbol{+} (a_1 \boldsymbol{\times} a_3), \tag{$*$}$$

полезно проверить непосредственно. Пусть $a_i \in \mathcal{L}_{l_i}$, $i=1,2,3$, $a_2 \boldsymbol{+} a_3 \in \mathcal{L}_{l'}$, $a_1 \boldsymbol{\times} a_2 \in \mathcal{L}_{l''}$, $a_1 \boldsymbol{\times} a_3 \in \mathcal{L}_{l'''}$, $a_1 \boldsymbol{\times}(a_2 \boldsymbol{+} a_3) \in \mathcal{L}_l$, $(a_1 \boldsymbol{\times} a_2) \boldsymbol{+} (a_1 \boldsymbol{\times} a_3) \in \mathcal{L}_l$. Тогда, согласно (1.16.41) и (1.16.42), выполнено равенство в $(*)$, ибо

$$a_1 \boldsymbol{\times} (a_2 \boldsymbol{+} a_3) = l(\frac{a_1}{l_1} \cdot \frac{l'\max\{\frac{a_2}{l_2},\frac{a_3}{l_3}\}}{l'}) = l\max\{\frac{a_1}{l_1}\frac{a_2}{l_2},\frac{a_1}{l_1}\frac{a_3}{l_3}\},$$

$$(a_1 \boldsymbol{\times} a_2) \boldsymbol{+} (a_1 \boldsymbol{\times} a_3) = l \max\{\frac{l''(\frac{a_1}{l_1}\frac{a_2}{l_2})}{l''}, \frac{l'''(\frac{a_1}{l_1}\frac{a_3}{l_3})}{l'''}\} = l \max\{\frac{a_1}{l_1}\frac{a_2}{l_2}, \frac{a_1}{l_1}\frac{a_3}{l_3}\} =$$
$$= l\frac{a_1}{l_1}\max\{\frac{a_2}{l_2}, \frac{a_3}{l_3}\}.$$

Для определения представлений операций $\widetilde{\boldsymbol{+}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\times}}$, дуальных $\boldsymbol{+}$, $\boldsymbol{\times}$, зададим представление инволюции $\theta'(\cdot) = \theta'^{-1}(\cdot)\colon [0, l] \to [0, l]$ равенством

$$\theta'_l(a) = l - a = \theta'^{-1}_l(a), \ a \in \mathcal{L}_l, \ l > 0. \tag{1.16.44}$$

Согласно равенствам (1.16.41), (1.16.42) для представлений в $\widetilde{\mathcal{L}}_l$ операций $\widetilde{\boldsymbol{+}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\times}} : [0, l_1] \otimes \ldots \otimes [0, l_n] \to [0, l]$ получим следующие равенства:

$$a_1 \widetilde{\boldsymbol{+}} \ldots \widetilde{\boldsymbol{+}} a_n \stackrel{\triangle}{=} \theta'_l(\pi_l^{-1}(\pi_{l_1} \circ \theta'_{l_1}(a_1) \boldsymbol{+} \ldots \boldsymbol{+} \pi_{l_n} \circ \theta'_{l_n}(a_n))) =$$
$$= \theta'_l(l \max\{\frac{\theta'_{l_1}(a_1)}{l_1}, \ldots, \frac{\theta'_{l_n}(a_n)}{l_n}\}) = l \min\{\frac{a_1}{l_1}, \ldots, \frac{a_n}{l_n}\}; \tag{1.16.45}$$

$$a_1 \widetilde{\boldsymbol{\times}} \ldots \widetilde{\boldsymbol{\times}} a_n \stackrel{\triangle}{=} \theta'_l(\pi_l^{-1}(\pi_{l_1} \circ \theta'_{l_1}(a_1) \boldsymbol{\times} \ldots \boldsymbol{\times} \pi_{l_n} \circ \theta'_{l_n}(a_n))) =$$
$$= \theta'_l(l(\frac{l_1 - a_1}{l_1}) \ldots (\frac{l_n - a_n}{l_n})) = l(1 - \frac{l_1 - a_1}{l_1} \ldots \frac{l_n - a_n}{l_n}), \tag{1.16.46}$$

где $a_i \in \widetilde{\mathcal{L}}_{l_i}$, $l_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $l > 0$.

Представления операций $\widetilde{\boldsymbol{+}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\times}}$ коммутативны, ассоциативны, причем представление $\widetilde{\boldsymbol{\times}}$ дистрибутивно относительно представления $\widetilde{\boldsymbol{+}}$. Это следует из аналогичных свойств представлений $\boldsymbol{+}$ и $\boldsymbol{\times}$ и равенств (1.16.45), (1.16.46).

1.16.4. Математическое N$'$-ожидание $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{h^\xi}$ и его свойства. Математическое N$'$-ожидание определим как n'-интеграл, продолженный на расширенный класс $\widetilde{\mathcal{L}}_l(X)$ функций $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}_l = ([0, l], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\boldsymbol{+}}, \widetilde{\boldsymbol{\times}})$. Для определения продолженного n$'$-интеграла заметим, что в терминах представлений (1.16.41), (1.16.42) в шкале $\mathcal{L}_l$ операций $\boldsymbol{+}$, $\boldsymbol{\times}$, определенных для шкал: $\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L}_1 = ([0, 1], \leqslant, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\times})$ значений возможности P$'$ и $\mathcal{L}_l = ([0, l], \leqslant, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\times})$ значений интегрируемых функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}_l$, математическое P$'$-ожидание (1.16.20) как p$'$-интеграл, продолженный на класс $\mathcal{L}_l(X)$, определено равенством (1.16.43).

Если $\forall x \in X$ $\widetilde{f}(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}_l$, а $\widetilde{h}^\xi(x) = \theta'_1 \circ g^\xi(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}_1$, то, согласно (1.16.46), $\forall x \in X$

$$\widetilde{f}(x) \widetilde{\boldsymbol{\times}} \widetilde{h}^\xi(x) = \theta'_l(\pi_l^{-1}(\pi_l \circ \theta'_l \circ \widetilde{f}(x) \boldsymbol{\times} g^\xi(x))) = \theta'_l(\theta'_l \circ \widetilde{f}(x) \boldsymbol{\times} g^\xi(x)), \tag{1.16.47}$$

где $\boldsymbol{\times} : [0, l] \times [0, 1] \to [0, l]$ и, следовательно, подобно (1.16.16) в терминах операций $\boldsymbol{+}, \widetilde{\boldsymbol{+}}\colon [0, l] \otimes [0, l] \to [0, l]$, $\boldsymbol{\times}, \widetilde{\boldsymbol{\times}} : [0, l] \otimes [0, 1] \to [0, l]$,

$$\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi) \overset{\triangle}{=} \mathrm{n}'_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{f}(\cdot)) = \theta'_l(\mathrm{p}'_{g^\xi}(\theta'_l\circ\widetilde{f}(\cdot))) \equiv \theta'_l(\mathsf{E}^l_{g^\xi}(\theta'_l\circ\widetilde{f})(\xi)) =$$
$$= \theta'_l(\mathop{+}_{x\in X}(\theta'_l\circ\widetilde{f}(x) \times g^\xi(x))) = \widetilde{+}(\widetilde{f}(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x)) =$$
$$= \inf_{x\in X}(l\widetilde{h}^\xi(x) + \widetilde{f}(x)(1-\widetilde{h}^\xi(x))), \quad (1.16.48)$$

где $\widetilde{h}^\xi(x) = \theta'_1\circ g^\xi(x) = 1 - g^\xi(x)$, $x\in X$, а $+$ и $-$ суть символы «обычных» сложения и вычитания.

Отметим некоторые свойства математического N'-ожидания $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{h^\xi}$.

Линейность $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}$. Согласно (1.16.48) и (1.16.46) при $l_1 = l_2 = l$ $\forall\,\widetilde{a}\in\widetilde{\mathcal{L}}_l$

$$\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{a}\,\widetilde{\times}\,\widetilde{f})(\xi) = \mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}((\widetilde{a}\,\widetilde{\times}\,\widetilde{f}(x))\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x)) = \mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}(\widetilde{a}\,\widetilde{\times}\,(\widetilde{f}(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x))) =$$
$$= \inf_{x\in X}(\widetilde{a} + (1-\frac{\widetilde{a}}{l})(\widetilde{f}(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x))) = \widetilde{a} + (1-\frac{\widetilde{a}}{l})\mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}(\widetilde{f}(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x)) =$$
$$= \widetilde{a} + (1-\frac{\widetilde{a}}{l})\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi) \equiv \widetilde{a}\,\widetilde{\times}\,\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi). \quad (1.16.49)$$

Эти выкладки, в которых использована ассоциативность представления $\widetilde{\times}$, свидетельствуют об однородности $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{h^\xi}$ и непосредственно иллюстрируют дистрибутивность $\widetilde{\times}$ относительно $\widetilde{+}$.

Кроме этого, $\forall\,\widetilde{f}_1(\cdot), \widetilde{f}_2(\cdot)\in\widetilde{\mathcal{L}}_l$

$$\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{f}_1\,\widetilde{+}\,\widetilde{f}_2)(\xi) = \mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}((\widetilde{f}_1(x)\,\widetilde{+}\,\widetilde{f}_2(x))\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x)) =$$
$$= \mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}((\widetilde{f}_1(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x))\,\widetilde{+}\,(\widetilde{f}_2(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x))) = \widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}_1(\xi)\,\widetilde{+}\,\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}_2(\xi). \quad (1.16.50)$$

Равенства в (1.16.49) и в (1.16.50) характеризуют *линейность математического ожидания* $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}$.

Полная аддитивность $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{h^\xi}$

$$\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}(\mathop{\widetilde{+}}_{j\in J}\widetilde{f}_j)(\xi) = \mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}[(\mathop{\widetilde{+}}_{j\in J}\widetilde{f}_j)(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x)] = \mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}[\mathop{\widetilde{+}}_{j\in J}(\widetilde{f}_j(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x))] =$$
$$= \mathop{\widetilde{+}}_{j\in J}\mathop{\widetilde{+}}_{x\in X}(\widetilde{f}_j(x)\,\widetilde{\times}\,\widetilde{h}^\xi(x)) = \mathop{\widetilde{+}}_{j\in J}\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}_j(\xi). \quad (1.16.51)$$

Эквивариантность $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}$. Поскольку преобразования $\gamma'_\alpha(\cdot)\colon [0,1]\to\to[0,1]$, $\gamma'_\alpha(a) = a^\alpha$, $a\in[0,1]$, $\alpha>0$, определяют группу автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_1$, их представления $\gamma^l_\alpha(\cdot) = \pi_l^{-1}\circ\gamma'_\alpha\circ\pi_l(\cdot)\colon [0,l]\to[0,l]$,

$\gamma^l_\alpha(a) = l(a/l)^\alpha$, $\alpha > 0$, в шкале $\mathcal{L}_l$ определяют группу автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}_l$, $l > 0$, причем

$$\gamma^l_\alpha(a_1 \boldsymbol{+} \ldots \boldsymbol{+} a_n) = \pi_l^{-1}(\gamma'_\alpha(\pi_{l_1}(a_1)) \boldsymbol{+} \ldots \boldsymbol{+} \gamma'_\alpha(\pi_{l_n}(a_n))),$$
$$\gamma^l_\alpha(a_1 \boldsymbol{\times} \ldots \boldsymbol{\times} a_n) = \pi_l^{-1}(\gamma'_\alpha(\pi_{l_1}(a_1)) \boldsymbol{\times} \ldots \boldsymbol{\times} \gamma'_\alpha(\pi_{l_n}(a_n))),$$

а их представления в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}_l$

$$\widetilde{\gamma}^l_\alpha(\cdot) = \theta'_l \circ \pi_l^{-1} \circ \gamma'_\alpha \circ \pi_l \circ \theta'_l(\cdot)\colon [0,l] \to [0,l],$$
$$\widetilde{\gamma}^l_\alpha(a) = l(1 - ((l-a)/l)^\alpha),\ a \in [0,l],\ \alpha > 0$$

позволяют читателю проверить следующие свойства эквивариантности P′- и N′-математических ожиданий

$$\gamma^l_\alpha * \mathsf{E}^l_{g^\xi} f(\xi) \triangleq \gamma^l_\alpha(\mathsf{E}^l_{g^\xi}(\gamma^l_\alpha)^{-1} \circ f(\xi)) = \mathsf{E}^l_{\gamma'_\alpha \circ g^\xi} f(\xi),$$
$$\widetilde{\gamma}^l_\alpha * \widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi} \widetilde{f}(\xi) \triangleq \widetilde{\gamma}^l_\alpha(\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}(\widetilde{\gamma}^l_\alpha)^{-1} \circ \widetilde{f}(\xi)) = \widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{\gamma}'_\alpha \circ \widetilde{h}^\xi} \widetilde{f}(\xi).$$

Математическое N′-ожидание $\widetilde{\mathsf{E}}^{-l}_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi)$ нечеткой величины $\underset{\frown}{\widetilde{f}(\xi)}$ со значениями в $\widetilde{\mathcal{L}}_{-l} = ([-l,0], \widehat{\widetilde{\leqslant}}, \widehat{\widetilde{\boldsymbol{+}}}, \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\times}}})$. Операции $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{+}}}, \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\times}}}\colon [-l,0] \otimes [-l,0] \to \underset{\smile}{[-l,0]}$ в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}_{-l}$ определим как зеркально изоморфные операциям $\widetilde{\boldsymbol{+}}, \widetilde{\boldsymbol{\times}}\colon [0,l] \otimes [0,l] \to [0,l]$ в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}_l$, задав зеркальный изоморфизм инволюцией $\theta(\cdot)\colon [-l,l] \to [-l,l]$, $\theta(a) = -a$, $a \in [-l,l]$. Подобно (1.16.26), $\forall\, a_1, a_2 \in [-l,0]$ определим $a_1 \widehat{\widetilde{\leqslant}} a_2 \Leftrightarrow \theta(a_1) \widetilde{\leqslant} \theta(a_2)$,

$$a_1 \widehat{\widetilde{\boldsymbol{+}}} a_2 \triangleq \theta(\theta(\pi_l^{-1} \circ \pi_{l_1}(a_1)) \widetilde{\boldsymbol{+}} \theta(\pi_l^{-1} \circ \pi_{l_2}(a_2))) =$$
$$= \theta((-la_1/l_1) \widetilde{\boldsymbol{+}} (-la_2/l_2)) = l \max(a_1/l_1, a_2/l_2),$$
$$a_1 \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\times}}} a_2 \triangleq \theta(\theta(\pi_l^{-1} \circ \pi_{l_1}(a_1)) \widetilde{\boldsymbol{\times}} \theta(\pi_l^{-1} \circ \pi_{l_2}(a_2))) =$$
$$= \theta((-la_1/l_1) \widetilde{\boldsymbol{\times}} (-la_2/l_2)) = -l(1 - ((l_1 + a_1)/l_1)((l_2 + a_2)/l_2)) =$$
$$= l(a_1/l_1 + a_2/l_2 + (a_1 a_2)/(l_1 l_2)). \quad (1.16.52)$$

Математическое N′-ожидание $\widetilde{\mathsf{E}}^{-l}_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi)$ нечеткой величины $\widetilde{f}(\xi)$ со значениями в $\mathcal{L}_{-l}$ определим как зеркально изоморфное $\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}'(\xi)$:

$$\widetilde{\mathsf{E}}^{-l}_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi) \triangleq \theta(\widetilde{\mathsf{E}}^l_{\widetilde{h}^\xi}\theta \circ \widetilde{f}(\xi)) = \theta(\widetilde{\underset{x \in X}{\boldsymbol{+}}}((\theta \circ \widetilde{f}(x)) \widetilde{\boldsymbol{\times}} \widetilde{h}^\xi(x))) =$$
$$= \widehat{\widetilde{\underset{x \in X}{\boldsymbol{+}}}}(\widetilde{f}(x) \widehat{\widetilde{\boldsymbol{\times}}} \theta \circ \widetilde{h}^\xi(x)) = \sup_{x \in X}(-l\widetilde{h}^\xi(x) + \widetilde{f}(x)(1 - \widetilde{h}^\xi(x))), \quad (1.16.53)$$

где $\widetilde{+}\colon [0,l]\otimes[0,1]\to[0,l]$, $\widetilde{\widetilde{+}}\colon [-l,0]\otimes[-1,0]\to[-l,0]$, $\widetilde{\times}\colon [0,l]\otimes\otimes[0,1]\to[0,l]$, $\widetilde{\widetilde{\times}}\colon [-l,0]\otimes[-1,0]\to[-l,0]$, и использованы определения (1.16.52), $+$ и $-$ в правой части суть символы обычных сложения и вычитания.

Теперь все подготовлено для определения и исследования математического N′-ожидания $\widetilde{\mathsf{E}}_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi)$ нечеткой величины $\widetilde{f}(\xi)$ со значениями в $[-l,l]$, $l>0$, по схеме, разработанной для определения и исследования математического P′-ожидания $\widetilde{\mathsf{E}}_{g^\xi}f(\xi)$ нечеткой величины $f(\xi)$ со значениями в $(-\infty,\infty)$. Для этого следует функцию $\widetilde{f}(\cdot)\colon X\to[-l,l]$ представить в виде пары функций $\begin{pmatrix}\widetilde{f}^-(\cdot)\\ \widetilde{f}^+(\cdot)\end{pmatrix}$, в которой $\widetilde{f}^-(x)=\min\{\widetilde{f}(x),0\}$, $\widetilde{f}^+(x)=\max\{\widetilde{f}(x),0\}$, $x\in X$, и, подобно (1.16.32), определить и исследовать $\widetilde{\mathsf{E}}_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}(\xi)\triangleq\begin{pmatrix}\widetilde{\mathsf{E}}^{-l}_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}^-(\xi)\\ \widetilde{\mathsf{E}}^{l}_{\widetilde{h}^\xi}\widetilde{f}^+(\xi)\end{pmatrix}$.

1.16.5. О системах линейных уравнений и неравенств в шкале $\mathcal{L}^+$. Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения системы уравнений [1])

$$\overset{m}{\underset{k=1}{\widetilde{+}}}(A_{ik}\widetilde{\times}x_k)\equiv\max_{1\leqslant k\leqslant m}(A_{ik}x_k)=y_i,\ i=1,\dots,n, \tag{1.16.54}$$

в которой $A_{ik}\geqslant 0$, $y_i\geqslant 0$, $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m$, и решения ограничены условием $x_k\geqslant 0$, $k=1,\dots,m$. Для простоты ограничимся случаем $A_{ik}>0$, $y_i>0$, $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m$, в котором система (1.16.54) эквивалентна системе

$$\overset{m}{\underset{k=1}{\widetilde{+}}}(B_{ik}\widetilde{\times}x_k)\equiv\max_{1\leqslant k\leqslant m}B_{ik}x_k=1,\ i=1,\dots,n, \tag{1.16.55}$$

где $B_{ik}=A_{ik}/y_i>0$, $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m$. Систему уравнений (1.16.55), имеющую решение, назовем совместной.

Теорема 1.16.1. *Система уравнений* (1.16.55) *совместна, если и только если для любого $i=1,\dots,n$ строка $(B_{i1},\dots,B_{im})$ матрицы $\{\mathrm{B}_{\cdot\cdot}\}_{n\times m}$ в* (1.16.55) *содержит матричный элемент B_{ik_i}, максимальный в содержащем его k_i-м столбце* $\begin{pmatrix}\mathrm{B}_{1k_i}\\ \vdots\\ \mathrm{B}_{nk_i}\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}_{ik_i}=\max\limits_{1\leqslant s\leqslant n}\mathrm{B}_{sk_i}$.

[1]) Разрешимость системы (1.16.54) исследована в [9], ее аналог в шкале $\mathcal{L}$ рассмотрен в [33].

Совместная система (1.16.55) *имеет единственное решение, если и только если существует матрица* $\begin{pmatrix} \mathrm{B}_{i_1 1} & \dots & \mathrm{B}_{i_1 m} \\ \dots & & \\ \mathrm{B}_{i_m 1} & \dots & \mathrm{B}_{i_m m} \end{pmatrix}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$, *каждая строка и каждый столбец которой содержат единственный матричный элемент, максимальный в содержащем его столбце. При этом условии единственное решение дается равенствами* $x_k = 1/\mathrm{B}_{i_k j_k}$, $k = 1, \ldots, m$, *в которых* $\mathrm{B}_{i_1 j_1}, \ldots, \mathrm{B}_{i_m j_m}$ — *максимальные матричные элементы* (единственные) *в* j_1-м, …, j_m-м столбцах соответственно, $\mathrm{B}_{i_k j_k} = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant m} \mathrm{B}_{i_s j_k}$, $k = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Схему доказательства проиллюстрируем на примере исследования существования и единственности решения системы уравнений

$$\begin{aligned} &\max(\widehat{\mathrm{B}_{11}}\, x_1,\ \mathrm{B}_{12} x_2,\ \mathrm{B}_{13} x_3) = 1,\\ &\max(\mathrm{B}_{21} x_1,\ \widehat{\mathrm{B}_{22}}\, x_2,\ \mathrm{B}_{23} x_3) = 1,\\ &\max(\widehat{\mathrm{B}_{31}}\, x_1,\ \mathrm{B}_{32} x_2,\ \widehat{\mathrm{B}_{33}}\, x_3) = 1,\\ &\max(\mathrm{B}_{41} x_1,\ \mathrm{B}_{42} x_2,\ \mathrm{B}_{43} x_3) = 1, \end{aligned} \tag{1.16.56}$$

в которой выделены матричные элементы, максимальные в 1-м, 2-м и 3-м столбцах матрицы $\{B_{ik}\}_{4\times 3}$.

Согласно первым трем уравнениям в (1.16.56)

$$x_1 = 1/B_{11},\ x_2 = 1/B_{22} \text{ и } x_3 \leqslant 1/B_{33}, \tag{1.16.57}$$

поскольку $B_{31} x_1 = 1$, а согласно (1.16.57) $B_{12} x_2 < 1$, $B_{21} x_1 < 1$, $B_{13} x_3 < 1$ и $B_{32} x_2 < 1$. Так как согласно (1.16.57) $B_{41} x_1 < 1$, $B_{42} x_2 < 1$, $B_{43} x_3 < 1$, то четвертое равенство в (1.16.56) не выполнено, а если считать его выполненным, то при некотором $k \in \{1, 2, 3\}$ $B_{4k} x_k = 1$, что несовместимо с одним из условий $B_{11} x_1 = 1$, $B_{22} x_2 = 1$, $B_{33} x_3 \leqslant 1$ в (1.16.57), ибо $B_{11} > B_{41}$, $B_{22} > B_{42}$, $B_{33} > B_{43}$, и, следовательно, при условиях (1.16.57) $\max(\mathrm{B}_{41} x_1, \mathrm{B}_{42} x_2, \mathrm{B}_{43} x_3) < 1$.

Итак, система уравнений (1.16.56) не имеет решения, поскольку строка (B_{41}, B_{42}, B_{43}) не содержит матричных элементов, максимальных в столбцах $\begin{pmatrix} B_{i1} \\ \vdots \\ B_{i4} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим систему трех уравнений в (1.16.56), опустив четвертое уравнение, и два ее решения: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/B_{11} \\ 1/B_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$ и $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/B_{11} \\ 1/B_{22} \\ 1/B_{33} \end{pmatrix}$. Любое ее решение можно представить в виде «выпуклой комбинации» $(\lambda_1 \times x^{(1)}) + (\lambda_2 \times x^{(2)}) \equiv \max(\lambda_1 x^{(1)}, \lambda_2 x^{(2)})$,

где $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\max(\lambda_1, \lambda_2) = 1$, и $\max(\lambda_1 x^{(1)}, \lambda_2 x^{(2)}) =$
$= \begin{pmatrix} \max(\lambda_1 \cdot (1/B_{11}), \lambda_2(1/B_{11})) \\ \max(\lambda_1 \cdot (1/B_{22}), \lambda_2(1/B_{22})) \\ \max(\lambda_1 \cdot 0, \lambda_2(1/B_{33})) \end{pmatrix}$.

Заметим, наконец, что если бы в третьей строке матрицы $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$ был один максимальный элемент — B_{33} или B_{31}, то решение рассматриваемой системы трех уравнений было бы единственным $\begin{pmatrix} 1/B_{11} \\ 1/B_{22} \\ 1/B_{33} \end{pmatrix}$ в первом случае и неединственным $\begin{pmatrix} 1/B_{11} \\ 1/B_{22} \\ \lambda \end{pmatrix}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1/\mathrm{B}_{33}$, во втором. ■

Замечание 1.16.1. Если система уравнений (1.16.55) имеет решения $x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}$, то

$$x = \max_{1 \leqslant t \leqslant s} \lambda_t x^{(t)} = \mathop{\boldsymbol{+}}_{t=1}^{s} (\lambda_t \times x^{(t)}), \text{ где } \lambda_1, \ldots, \lambda_s \geqslant 0,\ \mathop{\boldsymbol{+}}_{t=1}^{s} \lambda_t = 1$$

— также решение, поскольку

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathrm{B}_{ik} x_k = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathrm{B}_{ik} \max_{1 \leqslant t \leqslant s} \lambda_t x_k^{(t)} = \max_{1 \leqslant t \leqslant s} (\lambda_t \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathrm{B}_{ik} x_k^{(t)}) = \\ = \max_{1 \leqslant t \leqslant s} \lambda_s = 1. \quad (1.16.58)$$

Замечание 1.16.2. Теорема 1.16.1, характеризующая решение системы (1.16.55), дословно верна для систем уравнений

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant m} (\mathrm{B}_{ik} x_k) = 1,\ i = 1, \ldots, n, \quad (1.16.59)$$

если в ее формулировке матричные элементы, «максимальные» в столбцах матрицы $\{B_{ik}\}_{n \times m}$, заменить на «минимальные».

Замечание 1.16.3. Система линейных неравенств

$$\mathop{\boldsymbol{+}}_{k=1}^{m} (\mathrm{B}_{ik} \times x_k) \leqslant 1,\ x_k \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m,$$

в которой $\mathrm{B}_{ik} > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$, всегда имеет решение. В частности, если в примере (1.16.56) левые части $\leqslant 1$, то множество решений такой системы *четырех* линейных неравенств определится условиями $0 \leqslant x_k \leqslant 1/\mathrm{B}_{kk}$, $k = 1, 2, 3$.

1.16.6. Шкала значений вероятности. Интеграл, мера. В каждом из рассмотренных вариантов возможности шкала ее значений определялась так, чтобы операции «сложения» и «умножения» соответствовали операциям «∪» и «∩» над Р- либо Р′-независимыми событиями, т. е. так, чтобы для любых P- либо P′-независимых A и B $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \boldsymbol{+} \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \bullet \mathrm{P}(B)$, либо $\mathrm{P}'(A \cap B) = \mathrm{P}'(A)\mathrm{P}'(B)$.

Следуя этому правилу, в общих чертах опишем вариант теории, в основе которой лежит «абсолютная» шкала $\mathcal{S} = ([0,1], \leqslant, \oplus, \otimes)$ значений меры с естественной упорядоченностью $\leqslant$ и следующими правилами композиции, см. § 2.3 гл. 2,

$$a \oplus b = a + b - ab, \quad a \otimes b = ab, \quad a, b \in [0,1]. \tag{1.16.60}$$

Заметим, что

$$\mathop{\oplus}_{j=1}^{n} a_j = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - a_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i<j=1}^{n} a_i a_j + \ldots + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_n, \tag{1.16.60*}$$

и для инволюции $\theta(a) = 1 - a$, $a \in [0,1]$, $\theta(a \oplus b) = \theta(a) \otimes \theta(b)$, $\theta(a \otimes b) = \theta(a) \oplus \theta(b)$, $a, b \in [0,1]$.

Нетрудно убедиться, что такая шкала имеет лишь тривиальную группу автоморфизмов $\gamma(x) = x$, $x \in [0,1]$, а рассматриваемый вариант теории в конечном счете сводится к теории вероятностей.

Класс $\mathcal{S}(X)$ функций $X \to [0,1]$ будем считать замкнутым относительно операций

$$\begin{gathered}(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x),\\ (f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x) = f(x)g(x),\\ (a \otimes f)(x) = a \otimes f(x) = af(x),\ x \in X,\ a \in [0,1].\end{gathered}$$

Интеграл $\mathrm{pr}(\cdot)$ определим как аддитивную и однородную функцию $\mathcal{S}(X) \to [0,1]$, причем и то и другое — в обычном смысле

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}((f \oplus g)(\cdot)) = \mathrm{pr}(f(\cdot)) + \mathrm{pr}(g(\cdot)) - \mathrm{pr}((f \otimes g)(\cdot)),\\ \mathrm{pr}(a \otimes f(\cdot)) = a\,\mathrm{pr}(f(\cdot)), \quad f(\cdot),\ g(\cdot) \in \mathcal{S}(X),\ a \in [0,1],\end{gathered} \tag{1.16.61}$$

поскольку $(a \otimes b) \oplus (b \otimes c) \geqslant (a \oplus b) \otimes c$, $a, b, c \in [0,1]$.

Пусть $\mathcal{S}(X)$ содержит все индикаторные функции $\chi_A(\cdot)$ множеств $A \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств X. Определим меру множества $A \in \mathcal{A}$ равенством

$$\mathrm{Pr}(A) = \mathrm{pr}(\chi_A(\cdot)) \tag{1.16.62}$$

с условием нормировки $\mathrm{Pr}(X) = 1$; как следствие (1.16.61) $\mathrm{Pr}(\varnothing) = 0$. Так как класс $\mathcal{S}(X)$ содержит

$$(\chi_{A_1} \oplus \chi_{A_2})(\cdot) = \chi_{A_1 \cup A_2}(\cdot), \quad (\chi_{A_1} \otimes \chi_{A_2})(\cdot) = \chi_{A_1 \cap A_2}(\cdot), \tag{1.16.63}$$

$$(\mathop{\oplus}_{j=1}^{n} \chi_{A_j})(\cdot) = \chi_{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}(\cdot) \tag{1.16.64}$$

и кусочно-постоянные функции

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}}(a_j\chi_{A_j})(\cdot)=\sum_{j=1}^{n}(a_j\chi_{A_j})(\cdot),\ a_j\in[0,1],\ A_i\in\mathcal{A},\ A_i\cap\mathcal{A}_j=\varnothing,$$
$$i\neq j, i,j=1,\ldots,n,\quad (1.16.65)$$

то согласно (1.16.60*), (1.16.64)

$$\operatorname{pr}(\chi_{\cup_{j=1}^n A_j}(\cdot))=\Pr\left(\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\Pr(A_j)-\sum_{i<j=1}\Pr(A_i\cap A_j)+\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}\Pr\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right)\overset{\triangle}{=}\operatorname{pr}(\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}}\chi_{A_j}(\cdot))$$

и согласно (1.16.61), (1.16.65)

$$\operatorname{pr}\left(\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}}(a_j\chi_{A_j})\right)(\cdot)\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j\Pr(A_j)$$

— интеграл Лебега от кусочно-постоянной функции (1.16.65). Если дополнительно потребовать, чтобы мера $\Pr(\cdot)\colon\mathcal{A}\to[0,\ 1]$ была счетно-аддитивной [1])

$$\Pr\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\Pr(B_j),\ B_i\cap B_j=\varnothing,\ i\neq j,\ B_i\in\mathcal{A},\ i,j=1,2,\ldots,$$

то, воспользовавшись схемой Лебега–Даниэля [73], нетрудно распространить линейный в «обычном смысле» интеграл (1.16.61) на класс $\mathcal{A}$-измеримых функций со значениями в шкале $\overline{\mathcal{S}}=((-\infty,\infty),\leqslant,+,\times)$, где $+$ и $\times$ — «обычные» операции сложения и умножения. Этот путь ведет к теории вероятностей.

[1]) Заметим, что если $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$, то для любого $A\in\mathcal{P}(X)$ $\Pr(A)=\operatorname{pr}\left(\left(\underset{j\colon x_j\in A}{\oplus}\chi_j\right)(\cdot)\right)=\sum_{j\colon x_j\in A}\operatorname{pr}(\chi_j(\cdot))=\sum_{j\colon x_j\in A}\Pr(\{x_j\})$, где $\chi_j(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x=x_j,\\ 0, & \text{если } x\neq x_j,\ j=1,2,\ldots\end{cases}$

Глава 2
СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОЗМОЖНОСТИ

Введение

В предисловии к книге изложены основные идеи построения стохастической модели возможности и определены используемые при этом математические конструкции. Рассмотрим их подробнее. Обозначим $\mathcal{P}r$ *класс* дискретных вероятностных пространств $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ \mathrm{Pr})$, в которых $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ и значения вероятностей $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$, элементарных событий подчинены условиям:

$$\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \qquad \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1. \tag{2.0.1}$$

Класс всех вероятностей $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$,

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{i\colon\, \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i,\ A \neq \varnothing,\ \mathrm{Pr}(\varnothing) = 0,\ A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{2.0.2}$$

определяемых значениями $\mathrm{pr}_1,\ \mathrm{pr}_2,\ \ldots$, удовлетворяющими условиям (2.0.1), обозначим $\mathbb{P}\mathrm{r}$, соответственно $\mathcal{P}r = \{(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}\}$.

Сопоставим $\mathcal{P}r$ класс $\mathbf{P}$ пространств с возможностью $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ \mathrm{P})$, в которых возможности $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$, элементарных событий, определяющих $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ формулой

$$\mathrm{P}(A) = \sup_{i\colon\, \omega_i \in A} \mathrm{p}_i,\ A \neq \varnothing,\ \mathrm{P}(\varnothing) = 0,\ A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{2.0.3}$$

упорядочены подобно вероятностям в (2.0.1):

$$1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0. \tag{2.0.4}$$

Определим класс $\mathbb{P}$ возможностей, *согласованный с классом вероятностей* $\mathbb{P}\mathrm{r}$, добавив к условию (2.0.4), согласующему упорядоченность возможностей $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, с упорядоченностью их вероятностей, аналогичные условия для всех тех событий $A,\ B \in \mathcal{P}(\Omega)$, для которых неравенство $\mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B)$ выполняется *для любой вероятности* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$.

Определение 2.0.1. Класс $\mathbb{P}$ возможностей $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ назовем *согласованным* с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\ 1]$, если $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$:

$$\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r} \quad \mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B) \Rightarrow \forall \mathrm{P} \in \mathbb{P} \quad \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B), \tag{2.0.5}$$

где вероятность Pr и возможность P определены соответственно формулами (2.0.2) и (2.0.3). События A, B, удовлетворяющие условиям (2.0.5), назовем $(\mathbb{P}\mathrm{r}, \mathbb{P})$-*упорядоченными*.

Класс $\mathbb{P}$ назовем *вполне согласованным* с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$, если $\mathbb{P}$ согласован с $\mathbb{P}\mathrm{r}$ и[1] $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$: если $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{P}\ \mathrm{P}(A) = 0$, то $\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ $\mathrm{Pr}(A) = 0$.

Класс $\mathbb{P}$, согласованный (вполне согласованный) с $\mathbb{P}\mathrm{r}$, определяет класс $\mathbf{P} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}\}$, *согласованный* (*вполне согласованный*) *с классом* $\mathcal{P}r$.

Классы $\mathcal{P}r$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}$ назовем *стохастическими* моделями классов $\mathbf{P}$ и $\mathbb{P}$ соответственно.

Заметим, что, согласно (2.0.5), если класс $\mathbb{P}$ согласован с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$ и $\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}\ \mathrm{Pr}(A) = \mathrm{Pr}(B)$, то $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{P}\ \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$.

Заметим также, что условие (2.0.5) влечет условие (2.0.4), ибо в качестве A и B в (2.0.5) можно выбирать множества $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, упорядоченные согласно (2.0.1), но на самом деле для возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, определенной в (2.0.3), требования (2.0.5) являются следствием условий (2.0.1) и (2.0.4), которые, как будет показано в следующей лемме, и определяют согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$.

Лемма 2.0.1. *Если* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, *и выполнены условия* (2.0.1) *и* (2.0.4), *то неравенство* $\mathrm{Pr}(A) = \sum\limits_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i \leqslant \sum\limits_{i\colon \omega_i \in B} \mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(B)$, *верное при любых значениях вероятностей* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, *удовлетворяющих условию* (2.0.1), *влечет неравенство* $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{p}_i \leqslant \sup\limits_{i\colon \omega_i \in B} \mathrm{p}_i = \mathrm{P}(B)$ *при любых значениях возможностей* $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$, *удовлетворяющих условию* (2.0.4).

Доказательство. Действительно, пусть $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots\}$, $a_1 < a_2 < \ldots$, $B = \{\omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \ldots\}$, $b_1 < b_2 < \ldots$, тогда

$$\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r} \quad \mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B) \Longrightarrow a_1 \geqslant b_1, \tag{$*$}$$

ибо если $a_1 < b_1$, то, выбрав $\mathrm{pr}_1 = \ldots = \mathrm{pr}_{a_1} = 1/a_1$, $\mathrm{pr}_{a_1+1} = \mathrm{pr}_{a_1+2} = \ldots = 0$, найдем: $\mathrm{Pr}(A) = 1/a_1 > \mathrm{Pr}(B) = 0$. Поэтому согласно $(*)$, (2.0.4) $\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ $\mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B) \Rightarrow \mathrm{P}(A) = \sup\limits_{i\colon w_i \in A} \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{a_1} \leqslant \mathrm{p}_{b_1} = \sup\limits_{i\colon w_i \in B} \mathrm{p}_i = \mathrm{P}(B)$. ■

Следствие 2.0.1. Согласно лемме 2.0.1 *условия* (2.0.1), (2.0.4) *определяют* согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$ (2.0.5), при которой для $(\mathbb{P}\mathrm{r}, \mathbb{P})$-упорядоченных событий *правилу суммирования вероятностей* (2.0.2) *соответствует правило «суммирования» возможностей* (2.0.3).

[1] Полная согласованность включает условие согласованности «0» и «1» шкал значений возможности и вероятности, согласно которому если событие A невозможно, $\mathrm{P}(A) = 0$, то оно и невероятно, $\mathrm{Pr}(A) = 0$, а если $\mathrm{Pr}(A) = 1$, то и $\mathrm{P}(A) = 1$; последнее условие учтено в (2.0.4).

Далее в § 2.1, 2.2 будет показано, что согласованность класса $\mathbb{P}$ с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}$ в известном смысле определяет

▶ соответствие «max», как операции «сложения» возможностей элементарных событий (2.0.3), операции сложения их вероятностей (2.0.2);

▶ согласованность теоретико-возможностной независимости с независимостью теоретико-вероятностной (см. § 2.1) и, как следствие,

▶ соответствие «min», как операции «умножения» возможностей P-независимых событий (2.1.13), операции умножения вероятностей Pr-независимых событий (2.1.2);

а полная согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$ определяет

▶ полную согласованность класса $\mathbb{P}^{|C}$ условных относительно $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ возможностей с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}^{|C}$ условных относительно C вероятностей (см. § 2.2).

Представим класс $\mathbf{P}$, содержащий несчетное множество неэквивалентных пространств с возможностью $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, в виде разбиения на классы *эквивалентных пространств с возможностью*. Поскольку $\forall\, \gamma \in \Gamma$ включения $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ и $\gamma \circ \mathrm{P} \in \mathbb{P}$ эквивалентны, и $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}$ множество $\{\gamma \circ \mathrm{P},\ \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{P}$ является *классом эквивалентных* (*и эквивалентных* P) возможностей, то класс $\mathbb{P}$ можно представить в виде разбиения на классы $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$, эквивалентных возможностей

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}_{(e)}, \tag{2.0.6}$$

где $e = 0.e_1 e_2 \ldots$ — двоичная запись числа из $(0, 1)$, определяющего *конкретную упорядоченность* распределения возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, заданную отношениями [1] «=» $\sim$ «0» и «>» $\sim$ «1» (см. § 2.5). Каждый класс $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$, определяет *неприводимый класс эквивалентных пространств с возможностью* $\mathbf{P}_{(e)} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}\}$, $e \in \in (0, 1)$. При этом $\mathbf{P} = \bigcup\limits_{e \in (0,1)} \mathbf{P}_{(e)}$.

В случае конечного $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ условия (2.0.1) и (2.0.4) можно конкретизировать соответственно как

$$\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_n \geqslant 0 = \mathrm{pr}_{n+1} = \ldots, \quad \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_n = 1, \tag{2.0.7}$$

и

$$\mathrm{p}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_n \geqslant 0 = \mathrm{p}_{n+1} = \ldots, \quad \mathrm{p}_1 = 1. \tag{2.0.7*}$$

В этом случае конкретную упорядоченность в (2.0.7*) определит число $e = 0.e_1 \ldots e_n 0 \ldots$ из $\{e\}_n = \{0.0\ldots01, \ldots, 0.1\ldots1\} \subset [2^{-n}, 1 - 2^{-n}] \subset (0, 1)$,

---

[1] Например, $0.01110\ldots$ соответствует $1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > \mathrm{p}_4 > \mathrm{p}_5 = \mathrm{p}_6 \ldots$, где ноль перед точкой соответствует всегда верному равенству $1 = \mathrm{p}_1$; условимся считать, что $0 < 0.00\ldots \leqslant 0.e_1 e_2 \ldots \leqslant 0.11\ldots < 1$, что будем записывать как $e \in (0, 1)$; «конкретной» назовем упорядоченность, в которой использованы только отношения «>» и «=».

а вместо (2.0.6) получим разбиение [1])

$$\mathbb{P}^{(n)} = \bigcup_{e \in \{e\}_n} \mathbb{P}_{(e)} \tag{2.0.8}$$

класса $\mathbb{P}^{(n)}$ возможностей, распределения которых удовлетворяют условию (2.0.7*), на $2^n - 1$ неприводимых класса $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in \{e\}_n$, эквивалентных возможностей.

Чтобы построить *стохастическую модель* класса $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, введем понятия *согласованности и максимальной согласованности возможности с вероятностью.*

Определение 2.0.2. Возможность P назовем согласованной с вероятностью Pr, если существует функция $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr}) \subset \widetilde{\Gamma}$ такая, что $\widetilde{\gamma}(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$, и для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}(A)$. Поэтому, в частности, если $\mathrm{P}(A) = 0$, $\mathrm{Pr}(B) = 1$, то $\mathrm{Pr}(A) = 0$, $\mathrm{P}(B) = 1$, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Согласованность P с Pr обозначим $\mathrm{Pr} \sim> \mathrm{P}$.

Возможность P назовем *максимально согласованной с вероятностью* Pr, если $\mathrm{Pr} \sim> \mathrm{P}$, и для любой возможности $\widetilde{\mathrm{P}}$, $\mathrm{Pr} \sim> \widetilde{\mathrm{P}}$, можно указать функцию $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$, такую, что для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\widetilde{\mathrm{P}}(A) = \widetilde{\widetilde{\gamma}} \circ \mathrm{P}(A)$. Максимальную согласованность P с Pr обозначим $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$.

Если $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, то *вероятность* Pr *назовем вероятностной моделью возможности* P*, а возможность* P *назовем* Pr*-измеримой.*

Для каждой *конкретной* вероятности Pr, распределение которой удовлетворяет условию (2.0.1), *распределение любой возможности* P*, максимально согласованной с* Pr*, удовлетворяет условию* (2.0.4) *с максимальным числом строгих неравенств.*

Для любой вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ определим класс

$$\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \{\gamma \circ \mathrm{P},\ \gamma \in \Gamma,\ \mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}\}, \tag{2.0.9}$$

возможностей, максимально согласованных с вероятностью [2]) Pr. Эта формула определяет многозначное отображение $\mathbb{P}(\cdot)\colon \mathbb{P}\mathrm{r} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$, поскольку, согласно определению 2.0.2, если $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ и $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, то $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, и, следовательно, $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) \subset \mathbb{P}$. Обратное к $\mathbb{P}(\cdot)$ отображение $\mathbb{P}\mathrm{r}(\cdot)\colon \mathbb{P} \to \mathcal{P}(\mathbb{P}\mathrm{r})$ определяется равенством

$$\mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\}, \quad \mathrm{P} \in \mathbb{P}, \tag{2.0.10}$$

в котором $\mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$ — *класс вероятностей, с каждой из которых возможность* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ *максимально согласована*. Включения $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$

---

[1]) $\{e\}_n$ — обозначение для множества $2^n - 1$ значений $e = 0.e_1 \ldots e_n > 0$, значение $e = 0.0\ldots0$ исключено, поскольку ему соответствует невыполнимое условие $1 = \mathrm{p}_1 = \ldots = \mathrm{p}_n = 0$, $\forall n$ $\{e\}_n \subset (0,1)$.

[2]) Если $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, то $\forall \gamma \in \Gamma$ $\mathrm{Pr} \approx> \gamma \circ \mathrm{P}$, и наоборот, если $\exists \gamma \in \Gamma$ $\mathrm{Pr} \approx> \gamma \circ \mathrm{P}$, то $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, т. е. класс $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ (2.0.9) не зависит от выбора возможности P, максимально согласованной с вероятностью Pr.

и $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, по определению, эквивалентны, причем для любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}\quad \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) = \mathbb{P}\mathrm{r}(\gamma \circ \mathrm{P})$, $\gamma \in \Gamma$.

Класс $\mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$ *назовем стохастической моделью класса* $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ *и каждой возможности* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, *соответственно каждую вероятность* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$ *назовем вероятностной моделью каждой возможности* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$.

Каждому классу $\mathbb{P}_{(e)}$ из (2.0.6) согласно (2.0.9), (2.0.10) сопоставлен класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, причем так, что любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ максимально согласована со всеми вероятностями $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ и только с ними, поскольку

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ \mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \mathbb{P}_{(e)}\},\\ &\mathbb{P}_{(e)} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) = \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\}, \quad e \in (0,1).\end{aligned}$$

Отсюда следует разбиение [1])

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}, \tag{2.0.11}$$

индуцированное разбиением (2.0.6), причем в (2.0.11) $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ — *стохастическая модель* $\mathbb{P}_{(e)}$ *в* (2.0.6), *каждая вероятность* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ — *вероятностная модель каждой возможности* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$; соответственно $\mathcal{P}r = \bigcup\limits_{e \in (0,1)} \mathcal{P}r_{(e)}$, где $\mathcal{P}r_{(e)} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\}$ — стохастическая модель $\mathbb{P}_{(e)} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}\}$, $e \in (0,1)$. Заметим, что в то время как $\mathbf{P}_{(e)}$ — *класс эквивалентных пространств с возможностью*, класс $\mathcal{P}r_{(e)}$ *состоит из различных вероятностных пространств* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathcal{P}r_{(e)}$, $e \in (0,1)$.

В § 2.4 дано конструктивное решение задачи построения разбиений (2.0.6), (2.0.11).

На самом деле, как будет показано в § 3.5 гл. 3, условия согласованности в определении 2.0.2 иногда «слишком нормативны», поскольку удовлетворяющая им возможность P, даже максимально согласованная с вероятностью Pr, оказывается «тривиальной» в том смысле, что для любых (не пустых) $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ возможности $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1$, в то время как их вероятности $\mathrm{Pr}(A)$ и $\mathrm{Pr}(B)$ могут существенно отличаться. В этом случае вероятность Pr характеризует «детали событий, слишком мелкие» для того, чтобы их могла «различить» возможность P.

Чтобы градации вероятности стали «осязаемыми» для возможности, «мелкие детали» следует «укрупнить», сделав их более «контрастными» для вероятности и, как следствие, — «различимыми» для возможности. Другими словами, *чтобы возможность максимально отражала*

---

[1]) Действительно, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \varnothing$, $e \neq e'$, и если некоторая вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ не содержится ни в одном $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, то любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ не содержится ни в одном $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, что в силу (2.0.6) невозможно.

свойства стохастического объекта, охарактеризованные вероятностью, следует «согласовывать» не только возможность с вероятностью, но и вероятность — с возможностью путем гранулирования пространства элементарных событий. Формально это означает, что требования, сформулированные в определении 2.0.2, следует ослабить так, чтобы они выполнялись не для всех подмножеств Ω, а лишь для подмножеств из некоторой σ-алгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, т. е. для сужений $\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}}$ и $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$ вероятности Pr и возможности P на $\mathcal{A}$.

Определение 2.0.3. Возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ назовем *согласованной с вероятностью* $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *на σ-алгебре* $\mathcal{A}$, если сужение $\mathrm{P}(\cdot)\big|_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ согласовано с сужением $\mathrm{Pr}(\cdot)\big|_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to [0,1]$, т. е. если $\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}} \sim> \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$. Последнее означает, что существует функция $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr}) \subset \widetilde{\Gamma}$ такая, что $\widetilde{\gamma}(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$, и для любого $A \in \mathcal{A}$ $\;\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A))$. Согласованность P с Pr на $\mathcal{A}$ обозначим $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\sim>} \mathrm{P}$.

Возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ назовем *максимально согласованной с вероятностью* $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ на $\mathcal{A}$, если $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\sim>} \mathrm{P}$ и для любой возможности $\widetilde{\mathrm{P}}$, $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\sim>} \widetilde{\mathrm{P}}$, можно указать функцию $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$ такую, что для любого $A \in \mathcal{A}$ $\;\widetilde{\mathrm{P}}(A) = \widetilde{\widetilde{\gamma}}(\mathrm{P}(A))$. Максимальную согласованность P с Pr на $\mathcal{A}$ обозначим $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\approx>} \mathrm{P}$ и Pr назовем вероятностной моделью P на $\mathcal{A}$, а P назовем Pr-измеримой на $\mathcal{A}$.

Методы построения возможности, максимально согласованной с вероятностью, в том числе — на σ-алгебре $\mathcal{A}$, рассмотрены в § 2.3.

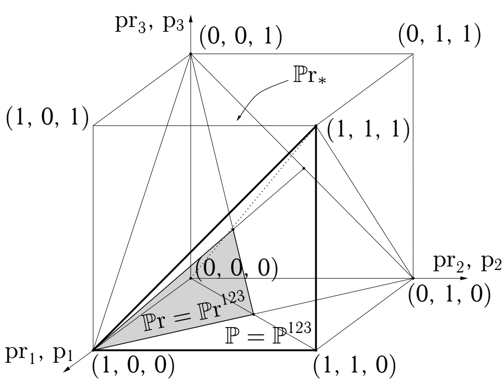


Рис. 2.0.1. Классы (распределений) вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{123}$ и возможностей $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{123}$ в случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1$, $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \mathrm{p}_3 \geqslant 0$

На рис. 2.0.1, 2.0.2 условия согласованности (2.0.1) и (2.0.4) проиллюстрированы на примере, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. На рис. 2.0.1

$\mathbb{P}\mathrm{r}^{123} \equiv \mathbb{P}\mathrm{r} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathcal{R}^3,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1,\ 1 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \mathrm{pr}_3 \geqslant 0\}$, $\mathbb{P}^{123} \equiv \mathbb{P} = \{(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \in \mathcal{R}^3,\ 1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \mathrm{p}_3 \geqslant 0\}$. $\mathbb{P}\mathrm{r}$ — один из шести [1] «треугольников вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathcal{R}^3,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1,\ 1 \geqslant \mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \geqslant \mathrm{pr}_k \geqslant 0\}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, образующих покрытие «треугольника всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_* = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathcal{R}^3,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1,\ \mathrm{pr}_1 \geqslant 0, \mathrm{pr}_2 \geqslant 0, \mathrm{pr}_3 \geqslant 0\} = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k=1,2,3\\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$, см. рис. 2.0.2, *а*. Каждому «треугольнику вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$ условия согласованности упорядоченностей распределений, аналогичные (2.0.1) и (2.0.4), ставят в соответствие «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{ijk} = \{(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \in \mathcal{R}^3,\ 1 = \mathrm{p}_i \geqslant \mathrm{p}_j \geqslant \mathrm{p}_k \geqslant 0\}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, см. рис. 2.0.2, *б*. В частности, треугольнику $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{123}$ условиями (2.0.1), (2.0.4) сопоставлен треугольник $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{123}$. «Треугольники возможностей» образуют «покрытие класса всех возможностей» $\mathbb{P}_* = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k=1,2,3\\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}^{ijk}$.

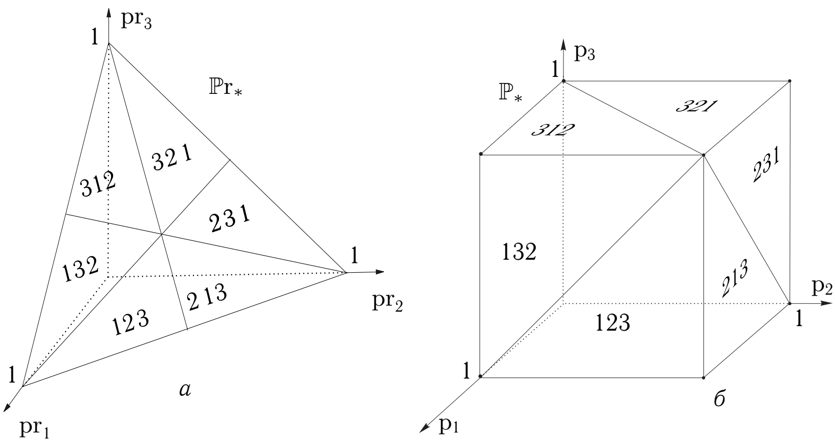


Рис. 2.0.2. *а*) «Треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_* = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$, тройка ijk обозначает упорядоченность $\mathrm{pr}_i \geqslant \mathrm{pr}_j \geqslant \mathrm{pr}_k$, определяющую «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{ijk}$; *б*) «треугольники возможностей», тройка ijk обозначает упорядоченность $1 = \mathrm{p}_i \geqslant \mathrm{p}_j \geqslant \mathrm{p}_k$, определяющую «треугольник возможностей» $\mathbb{P}^{ijk}$, $i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$; $\mathbb{P}_* = \bigcup\limits_{\substack{i,j,k\\ i\neq j\neq k\neq i}} \mathbb{P}^{ijk}$ — класс всех возможностей

[1] В рассматриваемом примере вероятность Pr (возможность P) для упрощения формулировок «представлена» точкой $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_* \subset \mathcal{R}^3$ (точкой $\mathrm{p} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) \in \mathbb{P}_* \subset \mathcal{R}^3$), определяющей ее распределение, треугольник $\mathbb{P}\mathrm{r}$ ($\mathbb{P}$) и его подмножества обозначают как множества вероятностей (возможностей), так и множества их распределений.

2.1. Согласованность теоретико-возможностной независимости с независимостью теоретико-вероятностной

Рассмотрим связь между вероятностным и возможностным аспектами понятия независимости, причем сперва нас будет интересовать стохастическая модель, в которой условие $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$ независимости событий A и B выполняется *для любой* вероятности $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$.

2.1.1. Стохастическая независимость. Вероятностной моделью стохастических экспериментов $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$ является вероятностное пространство

$$(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \Pr) = (\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)},\, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}),\, \Pr), \tag{2.1.1}$$

в котором вероятностные пространства $(\Omega^{(1)},\, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}),\, \Pr^{(1)})$ и $(\Omega^{(2)},\, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}),\, \Pr^{(2)})$ определяют модели $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$ соответственно. Эксперимент, выполнение которого означает выполнение $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, обозначим $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$. В его модели (2.1.1) $\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ — множество всех упорядоченных пар $(\omega_{i_1}^{(1)},\, \omega_{i_2}^{(2)})$, определяющих элементарные события в $Э$, отвечающие элементарным событиям $\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \subset \Omega^{(1)}$, $\{\omega_{i_2}^{(2)}\} \subset \Omega^{(2)}$ в $Э^{(1)}$ и соответственно в $Э^{(2)}$, где i_λ пробегает конечное или бесконечное множество значений $I_{(\lambda)} = \{1,\, 2,\, \ldots\}_\lambda$, $\lambda = 1,\, 2$; $\mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)})$ — класс всех подмножеств $\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, представляющих события в $Э$, среди которых событие $A^{(1)} \in \mathcal{P}(\Omega^{(1)})$ в $Э^{(1)}$ представлено событием $A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, а событие $A^{(2)} \in \mathcal{P}(\Omega^{(2)})$ в $Э^{(2)}$ — событием $\Omega^{(1)} \times A^{(2)}$.

Определим вероятность $\Pr$ ее значениями на элементарных событиях в $Э$ равенствами

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{i_1,i_2} &= \Pr(\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}) = \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = \\ &= (\Pr^{(1)} \times \Pr^{(2)})(\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}), \quad i_1 \in I_{(1)},\, i_2 \in I_{(2)}, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

где $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)} = \Pr^{(\lambda)}(\{\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)}\})$ — вероятность элементарного события $\{\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)}\} \subset \Omega^{(\lambda)}$ в $Э^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$. При этом вероятность любого события $A \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ в $Э$ определится формулой

$$\Pr(A) = \sum_{\substack{(i_1,i_2):\\ (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in A}} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}. \tag{2.1.3}$$

Согласно равенствам (2.1.2), (2.1.3) как элементарные события в $Э^{(1)}$ и в $Э^{(2)}$, так и любые события в $Э^{(1)}$ и в $Э^{(2)}$ *независимы в* $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \Pr)$ (2.1.1), причем *при любых вероятностях* $\Pr^{(1)}$

и $\mathrm{Pr}^{(2)}$. Действительно, для любого события $C = A^{(1)} \times A^{(2)} = \{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)},\ \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)} \subset \Omega^{(1)},\ \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)} \subset \Omega^{(2)}\}$ в Э, представляющего события $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ в $Э^{(1)}$ и в $Э^{(2)}$,

$$\mathrm{Pr}(C) = (\mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)})(C) = \sum_{\substack{i_1:\ \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)} \\ i_2:\ \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}}} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} =$$
$$= \left(\sum_{i_1:\ \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)}} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \right) \cdot \left(\sum_{i_2:\ \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}} \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \right) = \mathrm{Pr}^{(1)}(A^{(1)}) \cdot \mathrm{Pr}^{(2)}(A^{(2)}). \tag{2.1.4}$$

С другой стороны, вероятности событий $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$, представляющих в Э события $A^{(1)}$ в $Э^{(1)}$ и $A^{(2)}$ в $Э^{(2)}$, см. рис. 2.1.1,

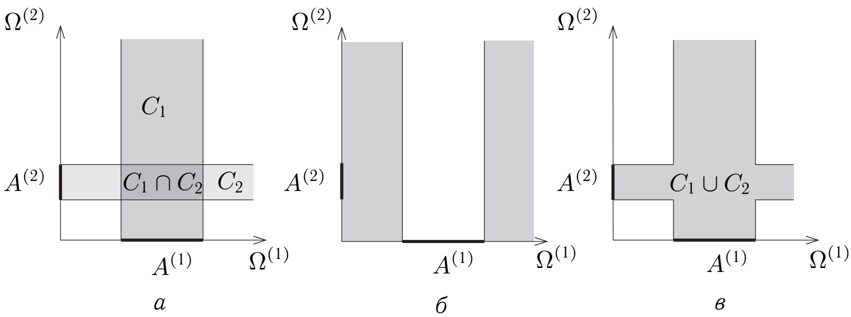


Рис. 2.1.1. Заштрихованы: *а*) цилиндрические множества C_1 и C_2 и их пересечение $C_1 \cap C_2$; *б*) дополнение $(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus C_1 = (\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}$ множества $C_1 \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$; *в*) объединение $C_1 \cup C_2$ множеств C_1 и C_2

$$\mathrm{Pr}(C_1) = (\mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)})(C_1) = \sum_{\substack{i_1:\ \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)} \\ i_2:\ \omega_{i_2}^{(2)} \in \Omega^{(2)}}} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = \mathrm{Pr}^{(1)}(A^{(1)}),$$
$$\mathrm{Pr}(C_2) = \mathrm{Pr}^{(2)}(A^{(2)}). \tag{2.1.5}$$

А поскольку $C = A^{(1)} \times A^{(2)} = (A^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times A^{(2)}) = C_1 \cap C_2$, то, согласно (2.1.4), (2.1.5),

$$\mathrm{Pr}(C_1 \cap C_2) = \mathrm{Pr}(C_1) \cdot \mathrm{Pr}(C_2), \tag{2.1.6}$$

т. е. *события C_1 и C_2 в Э, представляющие соответственно события $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ в $Э^{(1)}$ и в $Э^{(2)}$, в $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ независимы при любых вероятностях $\mathrm{Pr}^{(1)}$ и $\mathrm{Pr}^{(2)}$.*

Пусть теперь *моделями* $Э^{(1)}$ *и* $Э^{(2)}$ *являются не конкретные вероятностные пространства* $(\Omega^{(1)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)}), \mathrm{Pr}^{(1)})$ *и* $(\Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(2)}), \mathrm{Pr}^{(2)})$, *а классы*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}r^{(1)} &= \{(\Omega^{(1)},\ \mathcal{P}(\Omega^{(1)}),\ \mathrm{Pr}^{(1)}),\quad \mathrm{Pr}^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}\},\\ \mathcal{P}r^{(2)} &= \{(\Omega^{(2)},\ \mathcal{P}(\Omega^{(2)}),\ \mathrm{Pr}^{(2)}),\quad \mathrm{Pr}^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}\},\end{aligned}$$

определяющие *стохастические* модели $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, где $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$ — класс вероятностей, удовлетворяющих условиям (2.0.1) $\mathrm{pr}_1^{(\lambda)} \geqslant \mathrm{pr}_2^{(\lambda)} \geqslant \ldots$ $\ldots \geqslant 0$, $\mathrm{pr}_1^{(\lambda)} + \mathrm{pr}_2^{(\lambda)} + \ldots = 1$, $\lambda = 1, 2$, а стохастической моделью $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$ является класс $\mathcal{P}r = \mathcal{P}r^{(1)} \times \mathcal{P}r^{(2)} = \{(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}), \mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)}), \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}\}$, где включение $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ означает по определению, что $\mathrm{Pr}^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}$, $\mathrm{Pr}^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$.

Тогда *для любых событий* $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ *в* $Э$, *соответствующих событиям* $A^{(1)}$ *и* $A^{(2)}$ *в* $Э^{(1)}$ *и в* $Э^{(2)}$, *как в* (2.1.6),

$$\mathrm{Pr}(C_1 \cap C_2) = \mathrm{Pr}(C_1) \cdot \mathrm{Pr}(C_2) \tag{2.1.6*}$$

для любой вероятности $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$.

Тот факт, что равенство (2.1.6*) *выполняется для любых событий* A_1 и A_2 в $Э^{(1)}$ и в $Э^{(2)}$, *независимо от конкретных значений вероятностей* $\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}$, $i_1 \in I_{(1)}$, и $\mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}$, $i_2 \in I_{(2)}$, *элементарных событий*, позволяет назвать эксперименты $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, составляющие $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$, *стохастически независимыми*.

Следующая лемма позволит установить связь между так определенной стохастической независимостью и ее теоретико-возможностным аналогом.

Лемма 2.1.1. *Если при любых вероятностях* $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\mathrm{pr}_1^{(\lambda)} \geqslant \mathrm{pr}_2^{(\lambda)} \geqslant \ldots \geqslant 0, \qquad \mathrm{pr}_1^{(\lambda)} + \mathrm{pr}_2^{(\lambda)} + \ldots = 1, \quad \lambda = 1, 2, \tag{2.1.7}$$

для некоторых $A, B \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{(i_1,i_2)\in I(A)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \leqslant \sum_{(i_1,i_2)\in I(B)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = \mathrm{Pr}(B), \tag{2.1.8}$$

где $I(C) = \{(i_1,\, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)},\ (\omega_{i_1}^{(1)},\, \omega_{i_2}^{(2)}) \in C\}$, $C \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, *то для этих* A, B

$$\sup_{(i_1,i_2)\in I(A)} \min\{\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}\} \leqslant \sup_{(i_1,i_2)\in I(B)} \min\{\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}\}. \tag{2.1.9}$$

Доказательство. Покажем, что если существуют вероятности $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, удовлетворяющие условиям (2.1.7), (2.1.8), такие, что

$$\sup_{(i_1,i_2)\in I(A)} \min\{\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}\} > \sup_{(i_1,i_2)\in I(B)} \min\{\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}\}, \qquad (2.1.10)$$

то $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, можно выбрать так, чтобы выполнялись условия (2.1.7) и (2.1.10) и при этом нарушалось условие (2.1.8), т. е. выполнялось неравенство $\mathrm{Pr}(A) > \mathrm{Pr}(B)$. Действительно, пусть для некоторых вероятностей, удовлетворяющих условиям (2.1.7), выполнено неравенство (2.1.10). Поскольку, в силу (2.1.7), точные верхние грани в (2.1.10) достигаются, существует пара индексов $(i_1(A),\, i_2(A)) \in I_{(1)} \times I_{(2)}$, для которой

$$\sup_{(i_1,i_2)\in I(A)} \min\{\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)}\} = \min\{\mathrm{pr}_{i_1(A)}^{(1)}, \mathrm{pr}_{i_2(A)}^{(2)}\},$$

и, следовательно, согласно (2.1.10), (2.1.7), при любых $(i_1, i_2) \in I(B)$

$$\max\{i_1, i_2\} > \max\{i_1(A), i_2(A)\} \triangleq d(A).$$

Определим следующие подмножества $I_{(1)} \times I_{(2)}$, показанные на рис. 2.1.2:

$$J^{(1)}(A) = \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)},\ \max\{i_1, i_2\} \leqslant d(A)\},$$
$$J^{(2)}(A) = (I_{(1)} \times I_{(2)}) \backslash J^{(1)}(A) = \{(i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \max\{i_1, i_2\} > d(A)\}.$$

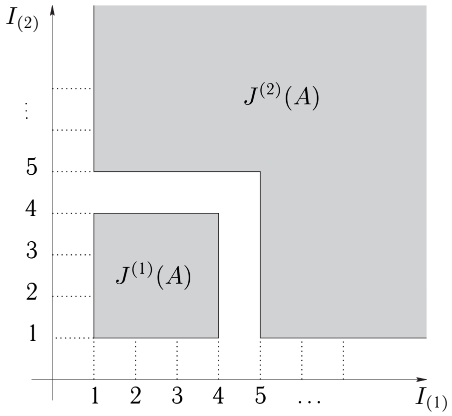


Рис. 2.1.2. Множества $J^{(1)}(A)$, $J^{(2)}(A)$ при $d(A) = 4$

Выберем $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1,\,2$, так, чтобы

$$\begin{aligned}&\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} = \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = 1/d(A), \text{ если } \quad (i_1, i_2) \in J^{(1)}(A);\\ &\mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} = \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = 0, \text{ если } \quad i_1 > d(A),\ i_2 > d(A),\\ &\text{т. е. чтобы } \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = 0, \text{ если } \quad (i_1, i_2) \in J^{(2)}(A).\end{aligned}$$

При этом условия (2.1.7) выполнены, а поскольку $I(A) \cap J^{(1)}(A) \neq \neq \varnothing$ и $I(B) \subset J^{(2)}(A)$, то выполнено условие (2.1.10) и

$$\mathrm{Pr}(A) = \sum_{(i_1,i_2)\in I(A)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \geqslant \sum_{(i_1,i_2)\in (I(A)\cap J^{(1)}(A))} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} > 0,$$

$$\mathrm{Pr}(B) = \sum_{(i_1,i_2)\in I(B)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} \leqslant \sum_{(i_1,i_2)\in J^{(2)}(A)} \mathrm{pr}_{i_1}^{(1)} \cdot \mathrm{pr}_{i_2}^{(2)} = 0,$$

т. е. $\mathrm{Pr}(A) > \mathrm{Pr}(B) = 0$. ■

2.1.2. P-, N-независимости. Полная P, N-независимость. Пусть $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ — класс возможностей $\mathrm{P}^{(\lambda)}$, $\mathrm{P}^{(\lambda)}(\{\omega_{i_\lambda}^{(\lambda)}\}) = \mathrm{p}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, согласованный с классом вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$, определенным условиями (2.1.7), т. е. пусть

$$1 = \mathrm{p}_1^{(\lambda)} \geqslant \mathrm{p}_2^{(\lambda)} \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{2.1.11}$$

$\mathbf{P}^{(\lambda)} = \{(\Omega^{(\lambda)}, \mathcal{P}(\Omega^{(\lambda)}), \mathrm{P}^{(\lambda)}),\ \mathrm{P}^{(\lambda)} \in \mathbb{P}^{(\lambda)}\}$ — согласованная с $\mathcal{P}r^{(\lambda)}$ возможностная модель $Э^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$. Возможностную модель $\mathbf{P}$ эксперимента $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$ определим равенством

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} \times \mathbf{P}^{(2)} = \{(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)},\ \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}^{(1)} \times \mathrm{P}^{(2)}),\\ \mathrm{P}^{(1)} \in \mathbb{P}^{(1)},\ \mathrm{P}^{(2)} \in \mathbb{P}^{(2)}\}, \tag{2.1.12}$$

в котором возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ задана на элементарных событиях $\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}$ в Э равенствами

$$\mathrm{P}(\{(\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)})\}) = \mathrm{P}(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}) = \min\{\mathrm{p}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{p}_{i_2}^{(2)}\},\\ (i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \tag{2.1.13}$$

определяющими P-*независимость элементарных событий в* Э. Для любого $C \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$, согласно формулам (2.0.3) и (2.1.13),

$$\mathrm{P}(C) = \sup_{(i_1,\, i_2)\in I(C)} \min\{\mathrm{p}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{p}_{i_2}^{(2)}\}. \tag{2.1.14}$$

Согласно определению (2.1.14) для любых событий $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ в $Э = Э^{(1)} \times Э^{(2)}$, представляющих события $A^{(1)}$

и $A^{(2)}$ в $Э^{(1)}$ и в $Э^{(2)}$,

$$\mathrm{P}(C_1) = \sup_{\substack{i_1:\, \omega^{(1)}_{i_1} \in A^{(1)},\\ i_2:\, \omega^{(2)}_{i_2} \in \Omega^{(2)}}} \min\{\mathrm{p}^{(1)}_{i_1}, \mathrm{p}^{(2)}_{i_2}\} = \mathrm{P}^{(1)}(A^{(1)}),\ \ \mathrm{P}(C_2) = \mathrm{P}^{(2)}(A^{(2)}),$$

$$\mathrm{P}(C_1 \cap C_2) = \sup_{\substack{i_1:\, \omega^{(1)}_{i_1} \in A^{(1)},\\ i_2:\, \omega^{(2)}_{i_2} \in A^{(2)}}} \min\{\mathrm{p}^{(1)}_{i_1},\ \mathrm{p}^{(2)}_{i_2}\} = \min\{ \sup_{i_1:\, \omega^{(1)}_{i_1} \in A^{(1)}} \mathrm{p}^{(1)}_{i_1},$$

$$\sup_{i_2:\, \omega^{(2)}_{i_2} \in A^{(2)}} \mathrm{p}^{(2)}_{i_2}\} = \min\{\mathrm{P}^{(1)}(A^{(1)}), \mathrm{P}^{(2)}(A^{(2)})\} = \min\{\mathrm{P}(C_1), \mathrm{P}(C_2)\}. \tag{2.1.15}$$

Следовательно, *события* C_1 *и* C_2 P-*независимы при любой возможности* $\mathrm{P} = \mathrm{P}^{(1)} \times \mathrm{P}^{(2)} \in \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$.

Напомним, что события C_1 и C_2 называются N-независимыми, если

$$\mathrm{N}(C_1 \cup C_2) = \max\{\mathrm{N}(C_1), \mathrm{N}(C_2)\}.$$

События C_1 и C_2 называются P, N-*независимыми*, если они P- и N-независимы, назовем их *вполне независимыми*, если они P, N-независимы при любых P и N.

Определение 2.0.1*. Класс $\mathbb{N}$ необходимостей $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, распределенных согласно условию

$$0 = \mathrm{n}_1 \leqslant \mathrm{n}_2 \leqslant \ldots, \tag{2.0.4*}$$

в котором $\mathrm{n}_i = \mathrm{N}(\Omega \setminus \{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, и соответственно $\mathrm{N}(A) = \inf_{i:\, \omega_i \in \Omega \setminus A} \mathrm{n}_i$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, назовем согласованным с классом $\mathbb{Pr}$, а если $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ \ \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}\ \ \forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{Pr}\ \ \mathrm{N}(A) = 1 \Rightarrow \mathrm{Pr}(A) = 1$, то класс $\mathbb{N}$ назовем вполне согласованным с классом $\mathbb{Pr}$.

Классы $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$, (вполне) согласованные с $\mathbb{Pr}$, определяют класс нечетких пространств $\{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}, \mathrm{N}), \mathrm{P} \in \mathbb{P}, \mathrm{N} \in \mathbb{N}\}$, (вполне) согласованных с классом $\mathbb{Pr}$.

Поскольку условия (2.0.4) и (2.0.4*) *дуально эквивалентны*, т. е. для любой конкретной упорядоченности $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \ldots$ в (2.0.4*) ($\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ в (2.0.4)) можно указать конкретную упорядоченность $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ в (2.0.4) ($\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \ldots$ в (2.0.4*)) и $\theta(\cdot) \in \Theta$ так, чтобы $\mathrm{n}_i = \theta(\mathrm{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, то *дуально эквивалентны и классы* $\mathbb{P}$ и $\mathbb{N}$, т. е.

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \begin{cases} \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}\ \exists \mathrm{P} \in \mathbb{P} \\ \forall \mathrm{P} \in \mathbb{P}\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \exists \theta(\cdot) \in \Theta \begin{cases} \mathrm{N}(A) = \theta(\mathrm{P}(\Omega \setminus A)), \\ \mathrm{P}(A) = \theta(\mathrm{N}(\Omega \setminus A)). \end{cases}$$

Поэтому (полная) согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{Pr}$ и (полная) согласованность $\mathbb{N}$ с $\mathbb{Pr}$ *эквивалентны*, и далее рассматривается лишь (полная) согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{Pr}$.

Если $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{N}(\cdot)$ дуально согласованы, т. е. для некоторого $\theta(\cdot) \in \Theta$ и любого $C \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{N}(C) = \theta\big(\mathrm{P}(\Omega \setminus C)\big)$, то *в модели* (2.1.12), (2.1.13) *и* (2.1.14) *любые события* $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ N-*независимы*. Действительно, воспользовавшись равенством (2.1.15), найдем

$$\mathrm{N}(C_1) = \theta \circ \mathrm{P}((\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus C_1) = \theta \circ \mathrm{P}((\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}) = \\ = \theta \circ \mathrm{P}^{(1)}(\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) = \mathrm{N}^{(1)}(A^{(1)}),\ \mathrm{N}(C_2) = \mathrm{N}^{(2)}(A^{(2)})$$

и

$$\mathrm{N}(C_1 \cup C_2) = \theta \circ \mathrm{P}((\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus (C_1 \cup C_2)) = \\ = \theta \circ \mathrm{P}\left(\left((\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}) \times \Omega^{(2)}\right) \cap \left(\Omega^{(1)} \times (\Omega^{(2)} \setminus A^{(2)})\right)\right) = \\ = \theta \circ \min\{\mathrm{P}^{(1)}(\Omega^{(1)} \setminus A^{(1)}),\ \mathrm{P}^{(2)}(\Omega^{(2)} \setminus A^{(2)})\} = \\ = \max\{\mathrm{N}^{(1)}(A^{(1)}), \mathrm{N}^{(2)}(A^{(2)})\} = \max\{\mathrm{N}(C_1), \mathrm{N}(C_2)\}. \quad (2.1.15^*)$$

В этом случае в модели $\mathbf{P}$ эксперимента Э, определенной равенствами (2.1.12), (2.1.13) и (2.1.14), любые его исходы $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$ N-*независимы* при любых значениях $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \ldots$ в (2.0.4*), т. е. *эксперименты* $Э^{(1)}$ *и* $Э^{(2)}$ *вполне независимы*.

Проверим (2.1.15*) непосредственно, повторив схему (2.1.11)–(2.1.15) для необходимости.

Если классы $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ и $\mathbb{N}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, дуально эквивалентны, т. е. подобно (2.1.11) и (2.0.4*) $0 = \mathrm{n}_1^{(\lambda)} \leqslant \mathrm{n}_2^{(\lambda)} \leqslant \ldots$, $\lambda = 1, 2$, то подобно (2.1.12)

$$\mathbf{N} = \{(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}),\ \mathrm{N} = \mathrm{N}^{(1)} \times \mathrm{N}^{(2)})\}, \qquad (2.1.12^*)$$

где необходимость $\mathrm{N} \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^{(1)} \times \mathbb{N}^{(2)}$ и определена равенством

$$\mathrm{N}((\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)})/(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})) = \max\{\mathrm{n}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{n}_{i_2}^{(2)}\},\ (i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \qquad (2.1.13^*)$$

в котором $\mathrm{n}_i^{(\lambda)} = \mathrm{N}^{(\lambda)}(\Omega^{(\lambda)} \setminus \{\omega_i^{(\lambda)}\})$, $i \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, и для любого $C \in \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$

$$\mathrm{N}(C) = \inf\{\max\{\mathrm{n}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{n}_{i_2}^{(2)}\} | (i_1, i_2) \in I_{(1)} \times I_{(2)}, \\ (\omega_{i_1}^{(1)}, \omega_{i_2}^{(2)}) \in (\Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}) \setminus C\}. \qquad (2.1.14^*)$$

При этом для любых $C_1 = A^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ и $C_2 = \Omega^{(1)} \times A^{(2)}$

$$\mathrm{N}(C_1) = \inf\{\max\{\mathrm{n}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{n}_{i_2}^{(2)}\} |\, i_1 \in I_{(1)},\ \omega_{i_1}^{(1)} \in \Omega^{(1)} \setminus A^{(1)},\ i_2 \in I_{(2)}\} = \\ = \mathrm{N}^{(1)}(A^{(1)}),$$
$$\mathrm{N}(C_2) = \inf\{\max\{\mathrm{n}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{n}_{i_2}^{(2)}\} |\, i_1 \in I_{(1)},\ i_2 \in I_{(2)}\ \omega_{i_2}^{(2)} \in \Omega^{(2)} \setminus A^{(2)}\} = \\ = \mathrm{N}^{(2)}(A^{(2)}),$$
$$\mathrm{N}(C_1 \cup C_2) = \inf\{\max\{\mathrm{n}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{n}_{i_2}^{(2)}\} |\, i_1 \in I_{(1)},\ \omega_{i_1}^{(1)} \in A^{(1)},\ i_2 \in I_{(2)}, \\ \omega_{i_2}^{(2)} \in A^{(2)}\} = \max\{\mathrm{N}^{(1)}(A^{(1)}), \mathrm{N}^{(2)}(A^{(2)})\} = \max\{\mathrm{N}(C_1), \mathrm{N}(C_2)\}, \qquad (2.1.15^*)$$

т. е. действительно события C_1 и C_2 N-независимы при любой необходимости $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^{(1)} \times \mathbb{N}^{(2)}$.

2.1.3. Согласованность класса $\mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$. Следствием определения 2.0.1 является

Определение 2.1.1. Класс $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей, определенных формулой (2.1.14), называется согласованным с классом $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ вероятностей, определенных в (2.1.3), если для любых $A, B \subset \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ таких, что неравенство

$$\mathrm{Pr}(A) = (\mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)})(A) \leqslant (\mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)})(B) = \mathrm{Pr}(B), \tag{2.1.16}$$

верное для всех вероятностей $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ (т. е. для всех $\mathrm{Pr}^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}$ и $\mathrm{Pr}^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$), влечет неравенство

$$\mathrm{P}(A) = (\mathrm{P}^{(1)} \times \mathrm{P}^{(2)})(A) \leqslant (\mathrm{P}^{(1)} \times \mathrm{P}^{(2)})(B) = \mathrm{P}(B) \tag{2.1.17}$$

для всех возможностей $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ (т. е. для всех $\mathrm{P}^{(1)} \in \mathbb{P}^{(1)}$ и $\mathrm{P}^{(2)} \in \mathbb{P}^{(2)}$).

Как следствие леммы 2.0.1 получаем следующий результат.

Теорема 2.1.1. *Если $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ — класс возможностей,* (*вполне*) *согласованный с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$ вероятностей, $\lambda = 1, 2$, то класс $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей, определенных в* (2.1.14), (*вполне*) *согласован с классом $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ вероятностей, определенных в* (2.1.3).

Доказательство. Действительно, если неравенство (2.1.8) выполнено для всех $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}^{(1)} \times \mathrm{Pr}^{(2)}$, $\mathrm{Pr}^{(1)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)}$, $\mathrm{Pr}^{(2)} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$, то, поскольку в силу леммы 2.0.1 для любых $\mathrm{pr}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, выполняется неравенство (2.1.9), то для всех $\mathrm{p}_{i_\lambda}^{(\lambda)}$, $i_\lambda \in I_{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, удовлетворяющих условию (2.1.11), будет выполнено неравенство

$$\mathrm{P}(A) = \sup_{(i_1, i_2) \in I(A)} \min\{\mathrm{p}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{p}_{i_2}^{(2)}\} \leqslant \sup_{(i_1, i_2) \in I(B)} \min\{\mathrm{p}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{p}_{i_2}^{(2)}\} = \mathrm{P}(B).$$

Полная согласованность $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$, очевидно, следует из полной согласованности $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$. ■

Итак, согласно теореме 2.1.1, согласованность класса $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(2)}$ возможностей (2.1.14) с классом $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{(1)} \times \mathbb{P}\mathrm{r}^{(2)}$ вероятностей (2.1.3), означающая соответствие упорядоченности (2.1.17) упорядоченности (2.1.16), является следствием согласованности $\mathbb{P}^{(\lambda)}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2$, и для $(\mathbb{P}\mathrm{r}, \mathbb{P})$-упорядоченных событий определяет соответствие правила «суммирования» возможностей (2.1.14), означающего P-независимость [1)] $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, правилу суммирования вероятностей (2.1.3), означающему стохастическую независимость $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, а соответствие полной независимости независимости стохастической определяет соответствие правилу умножения вероятностей стохастически

[1)] $\mathrm{P}(C) = \sup\limits_{\substack{(i_1, i_2):\\ (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}) \in C}} \min\{\mathrm{p}_{i_1}^{(1)}, \mathrm{p}_{i_2}^{(2)}\} = \mathop{\Large +}\limits_{\substack{(i_1, i_2):\\ (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}) \in C}} (\mathrm{p}_{i_1}^{(1)} \bullet \mathrm{p}_{i_2}^{(2)}).$

независимых элементарных событий в (2.1.3): $\Pr(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}) \equiv$ $\equiv \Pr((\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})) = \Pr(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cdot \Pr(\Omega^{(1)} \times$ $\times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})$ операции min как «операции умножения возможностей» P-независимых элементарных событий в (2.1.13): $\mathrm{P}(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\}) \equiv$ $\equiv \mathrm{P}((\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}) \cap (\Omega^{(1)} \times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})) = \min\{\mathrm{P}(\{\omega_{i_1}^{(1)}\} \times \Omega^{(2)}), \mathrm{P}(\Omega^{(1)} \times$ $\times \{\omega_{i_2}^{(2)}\})\}$. Эти факты с учетом N-независимости (2.1.15*) составляют то, что можно назвать *согласованностью полной независимости* $\text{Э}^{(1)}$ *и* $\text{Э}^{(2)}$ *с их стохастической независимостью*.

2.2. Условная возможность. Согласованность с условной вероятностью

2.2.1. Условная вероятность. Выберем и далее будем считать фиксированным событие $C \in \mathcal{P}(\Omega)$, вероятность которого $\Pr(C) >$ > 0. Определим условную относительно C вероятность как функцию $\Pr(\cdot \mid C)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, заданную формулой [1])

$$\Pr(A \mid C) = \Pr(A \cap C)/\Pr(C), \quad A \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{2.2.1}$$

При определении условной относительно C вероятности учитываются только те элементарные события, которые влекут C; условие $\Pr(C) > 0$ гарантирует, что C не пусто.

Если в (2.2.1) $0 < \Pr(C) < 1$, то мера

$$m^C(A) = \Pr(A \cap C), \quad A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{2.2.2}$$

счетно-аддитивна, но не нормирована [2]) ($m^C(\Omega) = \Pr(C) < 1$), т. е. не является вероятностью. В формуле (2.2.1) мера $m^C(\cdot)$ (2.2.2) преобразуется в вероятность $\Pr(\cdot \mid C)$, в данном случае, — в условную относительно C, путем перенормировки $m^C(\cdot) \to m^C(\cdot)/\Pr(C)$. Для наших целей последнюю удобно представить как преобразование шкалы $S_C = ([0, \Pr(C)], \leqslant, +, \times)$ значений $m^C(\cdot)$ в изоморфную ей шкалу $S = ([0,1], \leqslant, \oplus, \otimes)$ значений вероятности, в которой истинность C абсолютна, $\Pr(C \mid C) = 1$.

Далее эта точка зрения позволит рассматривать условную возможность как формальный аналог условной вероятности. Рассмотрим ее подробнее.

---

[1]) Если $\Pr(C) = 0$, то условная вероятность (2.2.1) не определена. Ее можно считать равной любому числу из $[0,1]$. Поскольку при этом $\Pr(A \cap C) = \Pr(C) = 0$, то в этом случае C и любое событие $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ независимы.

[2]) Условие $\Pr(C) > 0$ гарантирует нетривиальность $m^C(\cdot)$, ибо, если $\Pr(C) = 0$, то $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $m^C(A) = 0$.

Определим шкалу $S = ([0,1], \leqslant, \oplus, \otimes)$ значений вероятности $\Pr(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ как отрезок $[0,1]$ с естественной упорядоченностью, заданной неравенством « $\leqslant$», и двумя бинарными операциями: сложением $\oplus : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, определенным формулой

$$x \oplus y = x + y - xy, \quad x, y \in [0,1], \tag{2.2.3}$$

и умножением $\otimes\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, определенным формулой, см. § 1.16.2 гл. 1,

$$x \otimes y = xy, \quad x, y \in [0,1]. \tag{2.2.4}$$

Обе операции обратимы. Операция вычитания $\ominus\colon [0,1] \times [0,1] \to \to [0,1]$ определена равенствами

$$x \ominus y = \begin{cases} (x-y)/(1-y), & 1 \geqslant x > y \geqslant 0, \\ 0, & 1 \geqslant x = y \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Деление $\odot\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ определено равенством

$$x \odot y = x/y,\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1,\ y > 0. \tag{2.2.6}$$

Заметим, что операции сложения (2.2.3) и умножения (2.2.4) коммутативны, но не дистрибутивны.

Мера $m^C(\cdot)$ (2.2.2) принимает значения в шкале $S_C = ([0, \Pr(C)], \leqslant, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\times})$, определенной как отрезок $[0, \Pr(C)]$ с естественной упорядоченностью «$\leqslant$» и двумя бинарными операциями: сложением $\boldsymbol{+}\colon [0, \Pr(C)] \times [0, \Pr(C)] \to [0, \Pr(C)]$

$$(a \boldsymbol{+} b) = a + b - ab/\Pr(C), \quad a, b \in [0, \Pr(C)], \tag{2.2.7}$$

и умножением $\boldsymbol{\times}\colon [0, \Pr(C)] \times [0, \Pr(C)] \to [0, \Pr(C)]$

$$(a \boldsymbol{\times} b) = ab/\Pr(C), \quad a, b \in [0, \Pr(C)]. \tag{2.2.8}$$

Обратные к (2.2.7) и (2.2.8) операции суть соответственно

$$a \boldsymbol{-} b = \begin{cases} (a-b)/(1-b/\Pr(C)), & \Pr(C) \geqslant a > b \geqslant 0, \\ 0, & \Pr(C) \geqslant a = b \geqslant 0, \end{cases}$$

и

$$b \boldsymbol{:} a = (b/a)\Pr(C),\ 0 \leqslant b \leqslant a \leqslant \Pr(C),\ a > 0.$$

Назовем шкалу S *гомоморфной* S_C, если существует отображение $g_C\colon S_C \to S$ (называемое *гомоморфизмом* S_C в S), определенное функцией $g_C(\cdot)\colon [0, \Pr(C)] \to [0,1]$ такой, что $\forall\, a, b \in [0, \Pr(C)]$, $g_C(a \boldsymbol{+} b) = g_C(a) \oplus g_C(b)$, $g_C(a \boldsymbol{\times} b) = g_C(a) \otimes g_C(b)$, $g_C(0) = 0$, $g_C(\Pr(C)) = 1$, и если $a \leqslant b$, то $g_C(a) \leqslant g_C(b)$,

Шкалы S и S_C называются *изоморфными*, если S гомоморфна S_C, и S_C гомоморфна S. В этом случае отображение $g_C\colon S_C \to S$ называется *изомофизмом*.

Проверим, что шкалы $S = ([0,1], \leqslant, \oplus, \otimes)$ и $S_C = ([0, \Pr(C)], \leqslant, +, \times)$ изоморфны. Действительно, определим отображение $g_C\colon S_C \to S$, задав функцию $g_C(\cdot)\colon [0, \Pr(C)] \to [0,1]$ равенством

$$g_C(a) = a/\Pr(C), \quad a \in [0, \Pr(C)]. \tag{2.2.9}$$

Для любых $a, b \in [0, \Pr(C)]$:

$$a \leqslant b \Rightarrow g_C(a) \leqslant g_C(b);$$
$$g_C(a) \oplus g_C(b) = g_C(a) + g_C(b) - g_C(a) g_C(b) =$$
$$= (a + b - ab/\Pr(C))/\Pr(C) = g_C(a + b);\ g_C(a) \otimes g_C(b) =$$
$$= g_C(a) g_C(b) = ab/(\Pr(C))^2 = g_C(a \times b);$$

наконец, $g_C(0) = 0$, $g_C(\Pr(C)) = 1$. Следовательно, шкала S_C гомоморфна S.

Для обратного отображения $g_C^{-1}\colon S \to S_C$: $\forall x, y \in [0,1]\colon x \leqslant y \Rightarrow g_C^{-1}(x) \leqslant g_C^{-1}(y)$; $g_C^{-1}(x) + g_C^{-1}(y) = g_C^{-1}(x) + g_C^{-1}(y) - g_C^{-1}(x) g_C^{-1}(y)/\Pr(C) = (x + y - xy)\Pr(C) = g_C^{-1}(x \oplus y)$; $g_C^{-1}(x) \times g_C^{-1}(y) = g_C^{-1}(x) \otimes g_C^{-1}(y)/\Pr(C) = xy\Pr(C) = g_C^{-1}(x \otimes y)$ и $g_C^{-1}(0) = 0$, $g_C^{-1}(1) = \Pr(C)$. Следовательно, шкалы S_C и S изоморфны.

Преобразование $S_C = ([0, \Pr(C)], \leqslant, +, \times) \xrightarrow{g_c} ([0,1], \leqslant, \oplus, \otimes) = S$ является формальным выражением перенормировки $m^C(A) = \Pr(A \cap C) \to \Pr(A \cap C)/\Pr(C) = \Pr(A \mid C)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, превращающей меру $m^C(\cdot)$ в вероятность, условную относительно C. В самом деле, уравнение

$$\Pr(A \mid C)\Pr(C) = \Pr(A \cap C), \tag{2.2.10}$$

решением которого является условная относительно C вероятность A (2.2.1), в преобразованной шкале имеет вид

$$\Pr'(A \mid C) g_C(\Pr(C)) = g_C(\Pr(A \cap C)). \tag{2.2.11}$$

Так как $g_C(\Pr(C)) = 1$, то его решение

$$\Pr'(A \mid C) = g_C(\Pr(A \cap C)) = \Pr(A \mid C),\ A \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{2.2.12}$$

2.2.2. Условная возможность. Обратимся теперь к условной при условии C возможности $\mathrm{P}(A|C)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, определив ее как *возможность* $\mathrm{P}(A \cap C)$ *в преобразованной шкале, в которой истинность* C *абсолютна*. Пусть $\mathbb{P}$ класс возможностей $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$, вполне согласованный [1]) с классом $\mathbb{Pr}$ вероятностей $\Pr(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $\mathbb{P}^C = \{\mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathrm{P}(C) > 0\}$ и $\widetilde{G}_C$ — класс функций $\widetilde{g}_C(\cdot)\colon [0, \mathrm{P}(C)] \to [0,1]$,

---

[1]) Полная согласованность необходима при выяснении условий согласованности условной возможности с условной вероятностью, поскольку при этом должны быть учтены неравенства $\Pr(C) > 0$ и $\mathrm{P}(C) > 0$, требующие согласования максимальных и минимальных элементов шкал значений вероятности и возможности. В преобразованной шкале событие C должно стать абсолютно возможным.

непрерывных, строго монотонно возрастающих и удовлетворяющих условиям $\widetilde{g}_C(0) = 0$, $\widetilde{g}_C(\mathrm{P}(C)) = 1$. Выберем $\widetilde{g}_C(\cdot) \in \widetilde{G}_C$ и рассмотрим возможность $\mathrm{P}_{\widetilde{g}_C}(\cdot \mid C)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$, определенную подобно условной вероятности (2.2.12) равенством

$$\mathrm{P}_{\widetilde{g}_C}(A \mid C) = \widetilde{g}_C(\mathrm{P}(A \cap C)), \quad A \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{2.2.13}$$

Назовем ее *вариантом* условной относительно C возможности, отвечающим функции $\widetilde{g}_C(\cdot) \in \widetilde{G}_C$.

Тот факт, что формула (2.2.13) при любой функции $\widetilde{g}_C(\cdot) \in \widetilde{G}_C$ определяет возможность, проверяется непосредственно. В частности, $\mathrm{P}_{\widetilde{g}_C}(C|C) = \mathrm{P}_{\widetilde{g}_C}(\Omega \mid C) = 1$ и для любых $A_j \in \mathcal{P}(\Omega)$, $j \in J$,

$$\mathrm{P}_{\widetilde{g}_C}(\bigcup_{j\in J} A_j \mid C) = \widetilde{g}_C(\mathrm{P}(\bigcup_{j\in J}(A_j \cap C))) = \widetilde{g}_C(\sup_{j\in J} \mathrm{P}(A_j \cap C)) = \\ = \sup_{j\in J} \widetilde{g}_C(\mathrm{P}(A_j \cap C)) = \sup_{j\in J} \mathrm{P}_{\widetilde{g}_C}(A_j \mid C).$$

Функция $\widetilde{g}_C(\cdot) \in \widetilde{G}_C$ определяет гомоморфизм шкалы $\mathcal{L}_C \triangleq ([0, \mathrm{Pr}(C)], \leqslant, \max, \min)$ значений меры $\mathrm{P}(A \cap C)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, на шкалу $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$ значений возможности, в данном случае — условной относительно C, поскольку, как нетрудно убедиться, $\forall\, a, b \in \in [0, \mathrm{Pr}(C)]$

$$a \leqslant b \Rightarrow \widetilde{g}_C(a) \leqslant \widetilde{g}_C(b), \quad \widetilde{g}_C(\max\{a,b\}) = \max\{\widetilde{g}_C(a), \widetilde{g}_C(b)\}, \\ \widetilde{g}_C(\min\{a,b\}) = \min\{\widetilde{g}_C(a), \widetilde{g}_C(b)\}, \quad \widetilde{g}_C(0) = 0,\ \widetilde{g}_C(\mathrm{P}(C)) = 1.$$

Поскольку функция $\widetilde{g}_C(\cdot) \in \widetilde{G}_C$ имеет обратную, шкалы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_C$ изоморфные.

В отличие от отображения $S_C = ([0, \mathrm{Pr}(C)], \leqslant, +, \times) \xrightarrow{g_c} ([0,1], \leqslant, \oplus, \otimes) = S$, определенного единственной функцией $g_C(\cdot)$ (2.2.9), в данном случае речь идет о классе $\widetilde{G}_C$ функций, определяющих *класс эквивалентных шкал значений условной относительно* C *возможности*.

Заметим, что когда A и C P-независимы, $\mathrm{P}(A \cap C) = \min\{\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(C)\}$, и в преобразованной шкале вариант $\mathrm{P}_{\widetilde{g}_C}(A|C) = \widetilde{g}_C(\min(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(C))) = \min(\widetilde{g}_C(\mathrm{P}(A)), \widetilde{g}_C(\mathrm{P}(C))) = \widetilde{g}_C(\mathrm{P}(A))$, если $\widetilde{g}_C(\cdot)\colon [0, \mathrm{P}(C)] \to \to [0,1]$ продолжить на $[0,1]$, определив $\widetilde{g}_C(a) = 1$, $a \in [\mathrm{P}(C), 1]$.

2.2.3. Полная согласованность класса условных возможностей с классом условных вероятностей.

Лемма 2.2.1. *Если класс* $\mathbb{P}$ *возможностей* $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ *вполне согласован с классом* $\mathbb{P}\mathrm{r}$ *вероятностей* $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *и класс* $\mathbb{P}\mathrm{r}^C = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}, \mathrm{Pr}(C) > 0\}$ *не пуст, то класс* $\mathbb{P}^C = \{\mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathrm{P}(C) > 0\}$ *не пуст и вполне согласован с классом* $\mathbb{P}\mathrm{r}^C$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C$ и, следовательно, $\mathrm{Pr}(C) > 0$. Тогда найдется возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, для которой[1] $\mathrm{P}(C) > 0$, т. е. класс $\mathbb{P}^C \neq \varnothing$. Покажем, что класс $\mathbb{P}^C$ согласован с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}^C$, т. е. что $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\text{если} \quad \forall\, \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C \quad \mathrm{Pr}(A) \leqslant \mathrm{Pr}(B), \tag{2.2.14}$$

$$\text{то} \quad \forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}^C \quad \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B). \tag{2.2.15}$$

Действительно, пусть $A = \bigcup\limits_{i \in I_A} \{\omega_{a_i}\}$, $B = \bigcup\limits_{i \in I_B} \{\omega_{b_i}\}$, $C = \bigcup\limits_{i \in I_C} \{\omega_{c_i}\}$, где $I_A = \{1, 2, \ldots i_A\}$, $I_B = \{1, 2, \ldots i_B\}$, $I_C = \{1, 2, \ldots i_C\}$, причем случаи $i_A = \infty$, $i_B = \infty$, $i_C = \infty$ не исключаются. Заметим, что $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C$, если и только если $\mathrm{Pr}(\{\omega_{c_1}\}) = \mathrm{pr}_{c_1} > 0$, и проверим, что если выполнено условие (2.2.14), то $a_1 \geqslant b_1$ при любом значении c_1. Пусть $a_1 < b_1$ и

1) $c_1 \leqslant a_1 < b_1$. В этом случае выберем $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C$ так, чтобы $\mathrm{pr}_1 = \ldots = \mathrm{pr}_{a_1} = 1/a_1$ $(\sum\limits_{i=1}^{a_1} \mathrm{pr}_i = 1)$, $\mathrm{pr}_{a_1+1} = \ldots = \mathrm{pr}_{b_1} = \ldots = 0$. При этом $\mathrm{pr}_{c_1} = 1/a_1 > 0$ и $\mathrm{Pr}(A) = 1/a_1 > \mathrm{Pr}(B) = 0$. Пусть

2) $a_1 < c_1 < b_1$. В этом случае выберем $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C$ так, чтобы $\mathrm{pr}_1 = \ldots = \mathrm{pr}_{a_1} = \ldots \mathrm{pr}_{c_1} = 1/c_1$ $(\sum\limits_{i=1}^{c_1} \mathrm{pr}_i = 1)$, $\mathrm{pr}_{c_1+1} = \ldots = \mathrm{pr}_{b_1} = \ldots = 0$. При этом $\mathrm{pr}_{c_1} = 1/c_1 > 0$, $\mathrm{Pr}(A) \geqslant 1/a_1 > \mathrm{Pr}(B) = 0$. Наконец, если

3) $a_1 < b_1 \leqslant c_1$, то выберем $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C$ так, чтобы $\mathrm{pr}_1 = \ldots = \mathrm{pr}_{a_1} = \dfrac{1-\varepsilon}{a_1}$, $\mathrm{pr}_{a_1+1} = \ldots = \mathrm{pr}_{c_1} = \dfrac{\varepsilon}{c_1 - a_1}$, $\mathrm{pr}_{c_1+1} = \ldots = 0$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i = \sum\limits_{i=1}^{a_1} \dfrac{1-\varepsilon}{a_1} + \sum\limits_{i=a_1+1}^{c_1} \dfrac{\varepsilon}{c_1 - a_1} = 1$, $\mathrm{Pr}(A) \geqslant \mathrm{pr}_{a_1} = (1-\varepsilon)/a_1$, $\mathrm{Pr}(B) = \sum\limits_{i=b_1}^{\infty} \mathrm{pr}_i = \sum\limits_{i=b_1}^{c_1} \mathrm{pr}_i \leqslant \sum\limits_{i=a_1+1}^{c_1} \mathrm{pr}_i = \varepsilon$ и, выбрав $\varepsilon < 1/(1 + a_1)$, получим неравенство $\mathrm{Pr}(A) > \mathrm{Pr}(B)$.

Итак, условие (2.2.14) влечет неравенство $a_1 \geqslant b_1$, или, что эквивалентно, — неравенство $\mathrm{pr}_{a_1} \leqslant \mathrm{pr}_{b_1}$, а отсюда следует (2.2.15), ибо $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}^C \quad \mathrm{P}(A) = \sup\limits_{i:\, \omega_i \in A} \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{a_1} \leqslant \mathrm{p}_{b_1} = \sup\limits_{i:\, \omega_i \in B} \mathrm{p}_i = \mathrm{P}(B)$ в силу согласованности $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Согласованность $\mathbb{P}^C$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}^C$ доказана.

Пусть, наконец, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ таково, что

$$\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}^C \quad \mathrm{P}(A) = 0. \tag{2.2.16}$$

Это означает, что $\mathrm{p}_{a_1} = 0$ (и, следовательно, по крайней мере $a_1 > c_1$). Для таких A $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}$ $\mathrm{P}(A) = 0$, и в силу полной согласованности $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$ отсюда следует, что $\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r} \quad \mathrm{Pr}(A) = 0$ и тем более —

$$\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C \quad \mathrm{Pr}(A) = 0, \tag{2.2.17}$$

[1] В противном случае, если $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}$ $\mathrm{P}(C) = 0$, то в силу полной согласованности $\mathbb{P}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}$, $\forall\, \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ $\mathrm{Pr}(C) = 0$. В таком случае $\mathbb{P}\mathrm{r}^C = \varnothing$.

что и завершает доказательство полной согласованности $\mathbb{P}^C$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}^C$. ■

Определим класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{|C} = \{\Pr(\cdot\,|\,C) \triangleq g_C(\Pr(\cdot \cap C)),\ \Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}^C\}$ условных относительно C вероятностей и класс $\mathbb{P}^{|C} = \{\mathrm{P}(\cdot \mid C) \triangleq \widetilde{g}_C(\mathrm{P}(\cdot \cap C)),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}^C,\ \widetilde{g}_C(\cdot) \in \widetilde{G}_C\}$ условных относительно C возможностей.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены условия* Леммы 2.2.1. *Тогда класс* $\mathbb{P}^{|C}$ *вполне согласован с классом* $\mathbb{P}\mathrm{r}^{|C}$ *в следующем смысле*: $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\textit{если} \quad \forall \Pr(\cdot \mid C) \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{|C} \quad \Pr(A \mid C) \leqslant \Pr(B \mid C), \tag{2.2.18}$$

$$\textit{то} \quad \forall \mathrm{P}(\cdot \mid C) \in \mathbb{P}^{|C} \quad \mathrm{P}(A \mid C) \leqslant \mathrm{P}(B \mid C), \tag{2.2.19}$$

$$\textit{и если} \quad \forall \mathrm{P}(\cdot \mid C) \in \mathbb{P}^{|C} \quad \mathrm{P}(A \mid C) = 0, \tag{2.2.20}$$

$$\textit{то} \quad \forall \Pr(\cdot \mid C) \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{|C} \quad \Pr(A \mid C) = 0. \tag{2.2.21}$$

Доказательство. Действительно, условия (2.2.18), (2.2.19) следуют из условий (2.2.14), (2.2.15), а (2.2.20), (2.2.21) следуют из (2.2.16), (2.2.17). ■

2.3. Возможность и необходимость, максимально согласованные с вероятностью

Этот параграф посвящен построению класса $\Gamma(\Pr) \subset \widetilde{\Gamma}$ функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, определяющих класс $\mathbb{P}(\Pr) = \{\mathrm{P} = \widetilde{\gamma} \circ \Pr,\ \widetilde{\gamma} \in \Gamma(\Pr)\} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \Pr \approx> \mathrm{P}\}$ взаимно эквивалентных возможностей $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, максимально согласованных с вероятностью $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$.

2.3.1. Построение возможности, максимально согласованной с вероятностью. Задачу построения класса $\mathbb{P}(\Pr)$ возможностей, максимально согласованных с вероятностью $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, сформулируем в терминах *распределений вероятности* $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ *и возможности* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\Pr) \subset \mathbb{P}$*, максимально согласованной* с Pr, поскольку распределение $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\Pr)$ выделяется среди всех распределений, удовлетворяющих условию (2.0.4), максимальным числом строгих неравенств, отвечающих строгим неравенствам в (2.0.1); *распределение* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\Pr)$ *будем также называть максимально согласованным с распределением* Pr.

Рассмотрим алгоритм построения функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$, определяющей возможность $\mathrm{P} = \widetilde{\gamma} \circ \Pr$, максимально согласованную с $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, и класса $\Gamma(\Pr) \subset \widetilde{\Gamma}$ всех таких функций, удовлетворяющих условиям:

1. распределение $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, возможности $\mathrm{P} = \widetilde{\gamma} \circ \Pr$ удовлетворяет условию (2.0.4) с максимальным числом строгих неравенств в $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_k$ для каждого $k = 2, \ldots$, где

2. функция $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ — монотонно неубывающая и непрерывная на $(0,1]$, для любого[1] $a \in (0,1]$ $\widetilde{\gamma}(a) > 0$ и $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$;
3. для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$
$$\mathrm{P}(A) = \sup_{i\colon \omega_i \in A} \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i) = \widetilde{\gamma}\big(\sup_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i\big) = \widetilde{\gamma}\big(\sum_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i\big) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)), \tag{2.3.1}$$
в частности, для любого $i = 1,2,\ldots$ $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i) = \widetilde{\gamma}(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mathrm{pr}_{i+j})$;
4. класс $\Gamma(\mathrm{Pr})$ всех таких функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ инвариантен относительно преобразований $\gamma(\cdot) \in \Gamma$: $\forall \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ $\forall \gamma(\cdot) \in \Gamma$ $\gamma \circ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ и, более того, потребуем, чтобы $\forall \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ $\{\gamma \circ \widetilde{\gamma}(\cdot),\, \gamma(\cdot) \in \Gamma\} = \Gamma(\mathrm{Pr})$.

Пусть $\mathcal{P}_1(\Omega)$ — класс $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, содержащих ω_1, т. е. пусть $\mathcal{P}_1(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\, \omega_1 \in A\}$. Для каждого $A \in \mathcal{P}_1(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_1 = 1$. Так как минимальный по включению интервал, содержащий значения вероятностей $\mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{P}_1(\Omega)$, есть $\Delta_1 = [\mathrm{pr}_1, 1]$, то равенства (2.3.1) и условия 2 будут выполнены для всех $A \in \mathcal{P}_1(\Omega)$, если $\widetilde{\gamma}(a) = 1$, $a \in [\mathrm{pr}_1, 1]$; при таком определении $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) = 1$, $A \in \mathcal{P}_1(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{P}_2(\Omega)$ — класс всех подмножеств Ω, содержащих ω_2 и не содержащих ω_1, т. е. пусть $\mathcal{P}_2(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \mathcal{P}_1(\Omega),\, \omega_2 \in A\}$. Минимальный по включению интервал, содержащий значения вероятностей $\mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{P}_2(\Omega)$, есть $\Delta_2 = [\mathrm{pr}_2, 1 - \mathrm{pr}_1]$, и условия 2 и равенства (2.3.1) будут выполнены для всех $A \in \mathcal{P}_2(\Omega)$, если $\widetilde{\gamma}(a) = \mathrm{p}_2 \leqslant \mathrm{p}_1 = 1$, $a \in \Delta_2$, а именно, для любого $A \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \mathrm{p}_2 = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A))$, причем если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$, то согласно условиям 1 и 2 следует определить $\mathrm{p}_2 < \mathrm{p}_1$, а если $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \varnothing$, то $\mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_1$.

Пусть
$$\mathcal{P}_k(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus (\mathcal{P}_1(\Omega) \cup \mathcal{P}_2(\Omega) \cup \ldots \cup \mathcal{P}_{k-1}(\Omega)),\, \omega_k \in A\}, \tag{2.3.2}$$
тогда $\Delta_k = [\mathrm{pr}_k, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{k-1}]$ — минимальный интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{P}_k(\Omega)$, и для любого $A \in \mathcal{P}_k(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_k = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A))$, если $\widetilde{\gamma}(a) = \mathrm{p}_k$, $a \in \Delta_k$, где
$$\begin{aligned} &\text{либо } \mathrm{p}_k < \mathrm{p}_{k-1}, \text{ если } \Delta_k \cap \Delta_{k-1} = \varnothing, \\ &\text{либо } \mathrm{p}_k = \mathrm{p}_{k-1}, \text{ если } \Delta_k \cap \Delta_{k-1} \neq \varnothing, \quad k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

[1] Любая функция $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$, удовлетворяющая условиям 1, 3, 2, определяет возможность $\mathrm{P}(\cdot)$ (2.3.1), максимально согласованную с вероятностью $\mathrm{Pr}(\cdot)$ в смысле определения (2.0.2). Условие 2 связано с тем, что если событие $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ невозможно, $\mathrm{P}(A) = 0$, то A невероятно, $\mathrm{Pr}(A) = 0$, а если $\mathrm{Pr}(A) = 1$, то $\mathrm{P}(A) = 1$.

На k-м шаге функция $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ определена на $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_i$ как функция $\widetilde{\gamma}_k(\cdot)\colon \bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_i \to [0,1]$, при этом $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i) = \widetilde{\gamma}_k(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1,\ldots,k$, и для любого $A \in \bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathcal{P}_i(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}_k(\mathrm{Pr}(A))$. Следовательно, рассмотренный алгоритм определяет функцию $\widetilde{\gamma}_\infty(\cdot)\colon \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i \to [0,1]$ так, что $\widetilde{\gamma}_\infty(a) = \mathrm{p}_i$, $a \in \Delta_i$, $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}_\infty(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1,2,\ldots$, и для любого $A \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}_i(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}_\infty(\mathrm{Pr}(A))$; равенство $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}_i(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$ следует из определения (2.3.2).

Покажем, что функция $\widetilde{\gamma}_\infty(\cdot)$ может быть продолжена до функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, непрерывной на $(0,1]$, монотонно неубывающей на $[0,1]$, *строго монотонно возрастающей на* $[0,1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i$ и удовлетворяющей условию $\widetilde{\gamma}(0) = 0$. Для этого заметим, что поскольку множество $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_i$ замкнуто в $[\mathrm{pr}_k, 1]$, то множество $[\mathrm{pr}_k, 1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_k$, на котором не определена функция $\widetilde{\gamma}_k(\cdot)$, открыто и либо пусто, либо является объединением конечного числа непересекающихся открытых промежутков. Поэтому функцию $\widetilde{\gamma}_k(\cdot)$ всегда можно продолжить до непрерывной монотонно неубывающей функции, определенной на $[\mathrm{pr}_k, 1]$, принимающей значение p_i на интервале $\Delta_i \subset [\mathrm{pr}_k, 1]$, $i = 1,2,\ldots,k$, строго монотонной на $[\mathrm{pr}_k, 1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_i$, $k = 1,2,\ldots$, а $\widetilde{\gamma}_\infty(\cdot)$ — до функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, *монотонно неубывающей, непрерывной на* $(0,1]$, *принимающей значение* p_i *на интервале* Δ_i, $i = 1,2,\ldots$, *и строго монотонной на* $[0,1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i$, *причем — не единственным способом.* Класс всех таких функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ обозначим $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$; по определению $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}) \subset \widetilde{\Gamma}$, причем, как нетрудно видеть, $\Gamma(\mathrm{Pr}) = \{\gamma \circ \widetilde{\gamma}(\cdot),\ \gamma(\cdot) \in \Gamma\}$, где $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ — любая функция из $\Gamma(\mathrm{Pr})$.

Отметим некоторые свойства функции $\widetilde{\gamma}(\cdot)$. Пусть $\mathrm{pr}_k > 0$ для всех $k = 1,2,\ldots$ Тогда

1. если для бесконечно многих $k \in \{1,2,\ldots\}$ $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \varnothing$, то, поскольку при $k \to \infty$ $\mathrm{pr}_k \to 0$, функцию $\widetilde{\gamma}_\infty(\cdot)$ можно продолжить до непрерывной монотонно неубывающей функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ такой, что при $i \to \infty$ $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i) \to \widetilde{\gamma}(0) = 0$; в этом случае $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ — класс непрерывных монотонно неубывающих функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, строго монотонных на $[0,1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_i$, удовлетворяющих условиям (2.3.3) и $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$;

2. если же множество тех $k \in \{1, 2, \ldots\}$, для которых $\Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \varnothing$, конечно, то для некоторого $n \geqslant 1$ $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing$ для всех $i \geqslant n$, и, следовательно, $\widetilde{\gamma}_\infty(a) = \mathrm{p}_n > 0$ для всех $a \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \Delta_i = (0, \mathrm{pr}_n]$. В этом случае функция $\widetilde{\gamma}_\infty(\cdot)$ может быть продолжена до монотонно неубывающей функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, непрерывной только на $(0,1]$, ибо $\lim\limits_{a\to 0} \widetilde{\gamma}(a) = \lim\limits_{a\to 0} \widetilde{\gamma}_\infty(a) = \mathrm{p}_n > 0 = \widetilde{\gamma}(0)$. В этом случае $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ — класс монотонно неубывающих функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, непрерывных на $(0,1]$, строго монотонных на $[0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, удовлетворяющих условиям (2.3.3) и $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$. Наконец,
3. если $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_n \geqslant 0 = \mathrm{pr}_{n+1} = \ldots$, т. е. если фактически $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, то
$$\widetilde{\gamma}_\infty(a) = \begin{cases} \widetilde{\gamma}_n(a), & \text{если} \quad a \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i, \\ 0, & \text{если} \quad a \in \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} \Delta_i = \{0\}, \end{cases} \qquad a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i.$$
В этом случае, как и в случае 1, $\widetilde{\gamma}_\infty(\cdot)$ можно продолжить до непрерывной монотонно неубывающей функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, строго монотонной на $[0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$, см. рис. 2.3.1.

Суммируем полученные результаты.

Лемма 2.3.1. *Пусть* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ — *распределение вероятности* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, $\mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ — *класс возможностей, максимально согласованных с* Pr, $\Gamma(\mathrm{Pr})$ — *класс функций* $\widetilde{\gamma}(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$, *монотонно неубывающих, непрерывных на* $(0,1]$, *строго монотонных на* $[0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ *и удовлетворяющих условиям*: $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(a) = \mathrm{p}_i$, $a \in \Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}]$, $i = 1, 2, \ldots$, *где* $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}$, *если* $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$, $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}$, *если* $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing$, *причем* $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1 \Leftrightarrow \mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_{i+1} + \mathrm{pr}_{i+2} + \ldots$ *и* $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{pr}_i \leqslant \mathrm{pr}_{i+1} + \mathrm{pr}_{i+2} + \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$ *Тогда*

1. $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \{\widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr},\ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})\}$;
2. *всякая возможность* $\mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$ *может быть задана распределением* $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *где* $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$;
3. *при этом функция* $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ *непрерывна на* $[0,1]$, *если вероятность* $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ *такова, что либо* $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$ *для бесконечно многих* $i \in \{1, 2, \ldots\}$, *либо для некоторого* $n \in \{1, 2, \ldots\}$ $\mathrm{pr}_n > 0 = \mathrm{pr}_{n+1} = \mathrm{pr}_{n+2} = \ldots$, *т. е.* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$;

3′. *если же* $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$ *лишь для конечного числа* $i \in \{1, 2, \ldots\}$, *т. е. начиная с некоторого* $n \in \{1, 2, \ldots\}$ $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing$,

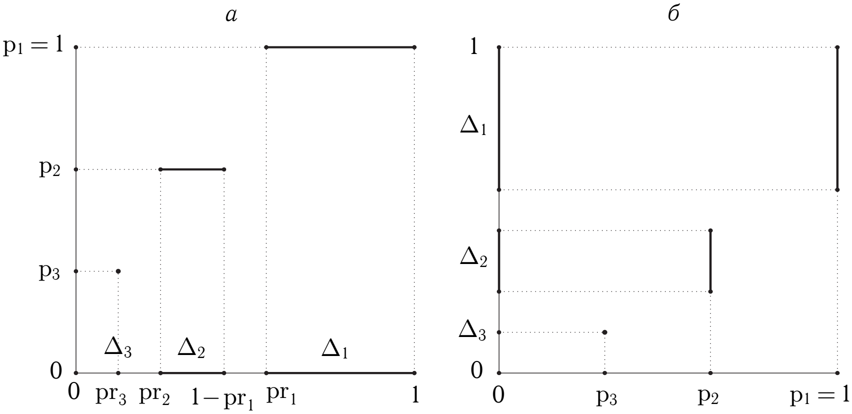


Рис. 2.3.1. *а*) Фрагменты графика функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$, определяющей распределение $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$, возможности P из класса возможностей, удовлетворяющих условиям $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > 0$, максимально согласованных с вероятностями Pr из класса вероятностей, удовлетворяющих условиям $2\mathrm{pr}_1 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 = 1 + \mathrm{pr}_3 > 1$, согласно которым $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. Интервал Δ_1 содержит pr_1, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_3$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2$ и $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1$, интервал Δ_2 содержит pr_2 и $\mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1 - \mathrm{pr}_1$, $\Delta_3 = \{\mathrm{pr}_3\}$. Любую функцию $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ из класса $\Gamma(\mathrm{Pr})$ получим, доопределив ее как непрерывную функцию, строго монотонную на интервалах $[0, \mathrm{pr}_3]$, $[\mathrm{pr}_3, \mathrm{pr}_2]$, $[1 - \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1]$.
б) Фрагменты графика многозначного отображения $\widetilde{\gamma}^{-1}(\cdot)\colon [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$, определяющего множества $\Delta_i = \widetilde{\gamma}^{-1}(\mathrm{p}_i)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющие условиям $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, характеризующим класс вероятностей, с каждой из которых максимально согласованы все возможности из класса возможностей, удовлетворяющих условиям $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > 0$

$i = n, n+1, \ldots$, *причем* $\mathrm{pr}_{n+1} > 0$, *то* $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ *разрывна в нуле*: $\lim\limits_{a \to 0} \widetilde{\gamma}(a) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_n) = \mathrm{p}_n > 0 = \widetilde{\gamma}(0)$;

4. *в силу непрерывности* $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ *на* $(0, 1]$ *для любого* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathrm{P}(A) = \sup\{\, \mathrm{p}_i |\, i = 1, 2, \ldots, \omega_i \in A\} = \sup\{\, \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i)|\, i = 1, 2, \ldots, \\ \omega_i \in A\} = \widetilde{\gamma}\left(\sup\{\, \mathrm{pr}_i |\, i = 1, 2, \ldots, \omega_i \in A\}\right) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)),$$

ибо $\sup\{\mathrm{pr}_i \mid i = 1, 2, \ldots, \omega_i \in A\} = \mathrm{pr}_{i(A)}$, *где* $i(A) = \min\{i \mid i \in \in \{1, 2, 3, \ldots\}, \omega_i \in A\}$, $\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_{i(A)}) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A))$, *так как* $\mathrm{Pr}(A) \in \Delta_{i(A)}$, *и* $\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_{i(A)}) = \mathrm{p}_{i(A)} = \mathrm{P}(A)$; *как следствие*

5. $\Gamma(\mathrm{Pr})$ *можно охарактеризовать как класс гомоморфизмов шкалы* $([0,1], \leqslant, \oplus, \otimes)$ *значений вероятности* Pr, *см.* (2.2.3), (2.2.4), *в шкалу* $([0,1], \leqslant, +, \bullet)$ *значений максимально согласованной с* Pr *возможности*, *см.* § 1.15 *гл.* 1, *гомоморфизмов*, *определяющих «взаимную симметрию» значений вероятности* Pr *и возможности* P, *связанных условием* $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$,

а именно, $\forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{Pr}\ \forall \mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P},\ \exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}(A) \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{\gamma}\Big(\sum_{j \in J(A)} \mathrm{Pr}\big(\{\omega_j\}\big)\Big) = \underset{j \in J(A)}{+\!\!\!\!+} \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}(\{\omega_j\}) = \underset{j \in J(A)}{+\!\!\!\!+} \mathrm{P}(\{\omega_j\}) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{P}(A)$, *где* $J(A) = \{j,\ \omega_j \in A\}$.

Замечание 2.3.1. Если $\mathrm{Pr} \in \mathbb{Pr}$ удовлетворяет условиям в 3, то существуют $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ и $c = c(\widetilde{\gamma}(\cdot)) \in (0,1)$ такие, что $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{p}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i) < \infty$, $c \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{p}_i = 1$, и, следовательно, определена вероятность $\mathrm{Pr}_{\widetilde{\gamma}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $\mathrm{Pr}_{\widetilde{\gamma}}(A) = c \sum_{i\colon \omega_i \in A} \mathrm{p}_i$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Если для $\mathrm{Pr} \in \mathbb{Pr}$ выполнены условия в $3'$, то для любой функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ $\sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i) = \infty$.

Пример 2.3.1. Пусть для некоторого $q > 0$ $\mathrm{Pr}(\{\omega_k\}) = \mathrm{pr}_k = q/(1+q)^k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{pr}_k = 1$. Для любого $n = 1, 2, \ldots$, как нетрудно проверить, $1/(1+q)^n = 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_n = \mathrm{pr}_{n+1} + \ldots \ldots < \mathrm{pr}_n$, если и только если $q > 1$. В этом случае все интервалы $\Delta_1 = [\mathrm{pr}_1, 1], \ldots, \Delta_j = [\mathrm{pr}_j, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{j-1}]$, $j = 2, 3, \ldots$, попарно не пересекаются, их суммарная длина $1/q < 1$; функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ постоянны на каждом интервале: $\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}) = \mathrm{p}_j$, $\mathrm{pr} \in \Delta_j$, причем $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \ldots$, и, если выбрать последовательность $\mathrm{p}_j \to 0$ при $j \to \infty$, то $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ можно доопределить по непрерывности на всем интервале $[0,1]$, положив $\widetilde{\gamma}(0) = 0$. С другой стороны, если $q \leqslant 1$, то все интервалы Δ_j и Δ_{j+1}, $j = 1, 2, \ldots$, пересекаются, и класс $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ состоит из единственной функции $\widetilde{\gamma}(a) = \begin{cases} 1, & a \in (0,1], \\ 0, & a = 0. \end{cases}$ Заметим, что (при $q = 1$) $\mathrm{pr}_k = 1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, — единственное положительное решение системы уравнений $\mathrm{pr}_n = \mathrm{pr}_{n+1} + \mathrm{pr}_{n+2} + \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1$, ибо если $\mathrm{pr}_k = 1/2^k + a_k$, $k = 1, 2, \ldots$, где $a_1 + a_2 + \ldots = 0$, то $a_1 = a_2 + a_3 + \ldots = -a_1 \Rightarrow a_1 = 0$, $a_2 = a_3 + a_4 + \ldots = -a_1 - a_2 \Rightarrow a_2 = 0, \ldots$

2.3.2. Необходимость, максимально согласованная с вероятностью. Напомним, что необходимость характеризуется следующими свойствами: $\mathrm{N}\big(A \cap B\big) = \min\big\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\big\}$, $\mathrm{N}(A \cup B) \geqslant \max\big\{\mathrm{N}(A), \mathrm{N}(B)\big\}$, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{N}\big(\bigcap_{j \in J} A_j\big) = \inf_{j \in J} \mathrm{N}(A_j)$, $A_j \in \mathcal{P}(\Omega)$, $j \in J$, и, как следствие, $\mathrm{N}(A) = \inf_{j\colon \omega_j \in \Omega \setminus A} \mathrm{n}_j$, где [1] $\mathrm{n}_j = \mathrm{N}(\Omega \setminus \{\omega_j\})$, $j = 1, 2, \ldots$, — распределение N, и, наконец, $\mathrm{N}(\varnothing) = 0$.

---

[1] $A = \bigcup_{j\colon \omega_j \in A} \{\omega_j\} \equiv \bigcap_{j\colon \omega_j \in (\Omega \setminus A)} (\Omega \setminus \{\omega_j\})$.

Определение 2.3.1. Необходимость N *согласована с вероятностью* Pr, $\mathrm{Pr} \sim> \mathrm{N}$,

$$\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots, \quad \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1, \tag{2.3.4}$$

где $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, если

$$0 = \mathrm{n}_1 \leqslant \mathrm{n}_2 \leqslant \ldots, \tag{2.3.5}$$

и *максимально согласована с* Pr, $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{N}$, если для некоторой функции $\widetilde{\theta}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, монотонно невозрастающей, непрерывной на $[0,1)$, удовлетворяющей условиям $\widetilde{\theta}(0) = 1$, $\widetilde{\theta}(1) = 0$,

$$\mathrm{N}(A) = \widetilde{\theta} \circ \mathrm{Pr}(\Omega \backslash A), \quad A \in \mathcal{P}(\Omega), \tag{2.3.6}$$

и для последовательности $\mathrm{n}_j = \widetilde{\theta}(\mathrm{pr}_j)$, $j = 1, 2, \ldots$, в (2.3.5) выполнено максимальное число строгих неравенств [1] (отвечающих строгим неравенствам в (2.3.4)).

Покажем, что $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{N}$, если и только если $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, и при этом $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta \quad \mathrm{N}(A) = \theta \circ \mathrm{P}(\Omega \backslash A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Определим класс множеств $\mathcal{N}_1(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \omega_1 \in \Omega \backslash A\}$ и минимальный интервал $\widetilde{\Delta}_1 = [0,\ 1 - \mathrm{pr}_1]$, содержащий значения вероятностей всех $A \in \mathcal{N}_1(\Omega)$. Так как $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, если $A \subset \Omega \backslash \{\omega_1\}$, то $\mathrm{N}(A) = 0$, ибо $\mathrm{N}(\Omega \backslash \{\omega_1\}) = 0$, поэтому интервалу $\widetilde{\Delta}_1$ соответствует интервал $[\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_1]$ значений $\mathrm{N}(A)$, $A \in \mathcal{N}_1(\Omega)$. Определим далее $\mathcal{N}_2(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \omega_1 \in A,\ \omega_2 \in \Omega \backslash A\}$. Поскольку для любого $A \in \mathcal{N}_2(\Omega)$ $\{\omega_1\} \subset A \subset \Omega \backslash \{\omega_2\}$, то минимальный интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{N}_2(\Omega)$, есть $\widetilde{\Delta}_2 = [\mathrm{pr}_1,\ 1 - \mathrm{pr}_2]$ и ему соответствует интервал $[\mathrm{n}_2, \mathrm{n}_2]$ значений $\mathrm{N}(A)$, $A \in \mathcal{N}_2(\Omega)$, ибо $\mathrm{N}(\{\omega_1\}) = \inf\limits_{j\colon \omega_j \in (\Omega \backslash \{\omega_1\})} \mathrm{n}_j = \mathrm{n}_2$, $\mathrm{N}(\Omega \backslash \{\omega_2\}) = \inf\limits_{j\colon \omega_j \in \{\omega_2\}} \mathrm{n}_j = \mathrm{n}_2$. Аналогично, если $\mathcal{N}_k(\Omega) = \{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \{\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}\} \subset A,\ \omega_k \in \Omega \backslash A\}$, то для любого $A \in \mathcal{N}_k(\Omega)$ $\{\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}\} \subset A \subset (\Omega \backslash \{\omega_k\})$ $\widetilde{\Delta}_k = [\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{k-1},\ 1 - \mathrm{pr}_k]$ есть минимальный интервал, содержащий значения $\mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{N}_k(\Omega)$, и ему соответствует интервал $[\mathrm{n}_k, \mathrm{n}_k]$ значений $\mathrm{N}(A)$, $A \in \mathcal{N}_k(\Omega)$, $[\mathrm{pr}_1 + \ldots \mathrm{pr}_{k-1},\ 1 - \mathrm{pr}_k] = \widetilde{\Delta}_k \to [\mathrm{n}_k, \mathrm{n}_k] = \{\mathrm{n}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$

Поскольку в случае $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, согласно лемме 2.3.1, каждому интервалу $\Delta_k = [\mathrm{pr}_k,\ 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{k-1}]$, содержащему значения $\mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{P}_k(\Omega) = \big\{A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \{\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}\} \subset \Omega \backslash A,\ \omega_k \in A\big\}$, соответствует интервал $[\mathrm{p}_k, \mathrm{p}_k]$, $[\mathrm{pr}_k,\ 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{k-1}] = \Delta_k \to [\mathrm{p}_k, \mathrm{p}_k] = \{\mathrm{p}_k\}$, $\mathrm{p}_k = \mathrm{P}(\{\omega_k\})$, значений $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}_k(\Omega)$, и при этом, согласно (6.10.6), см. § 6.10 гл. 6, $\widetilde{\Delta}_k = [1,1] - \Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, то *условия максимальной*

[1] Для каждого $k = 2, 3, \ldots$ максимальное число строгих неравенств в $0 = \mathrm{n}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{n}_k$.

согласованности $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$ *и* $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{N}$ *можно представить следующим образом*

$$\begin{aligned}
e_k = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_k > \mathrm{p}_{k+1} \Leftrightarrow \Delta_k \cap \Delta_{k+1} = \varnothing \Leftrightarrow \widetilde{\Delta}_k \cap \widetilde{\Delta}_{k+1} = \varnothing \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mathrm{n}_k < \mathrm{n}_{k+1} \Leftrightarrow f_k > 1 \Leftrightarrow \widetilde{e}_k = 1, \\
e_k = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_k = \mathrm{p}_{k+1} \Leftrightarrow \Delta_k \cap \Delta_{k+1} \neq \varnothing \Leftrightarrow \widetilde{\Delta}_k \cap \widetilde{\Delta}_{k+1} \neq \varnothing \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mathrm{n}_k = \mathrm{n}_{k+1} \Leftrightarrow f_k \leqslant 1 \Leftrightarrow \widetilde{e}_k = 0,
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

где $f_k = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{k-1} + 2\mathrm{pr}_k$, $\mathrm{p}_1 = 1$, $n_1 = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, см. предисловие, § 1.5. Отсюда следует, что $e_k = \widetilde{e}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ $\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}_{(e)}$

$$\begin{gathered}
\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta,\ \mathrm{n}_k = \theta(\mathrm{p}_k),\ k = 1, 2, \ldots, \text{ и } \forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \\
\mathrm{N}(A) = \inf_{j\,:\,\omega_j \in \Omega\setminus A} \mathrm{n}_j = \theta(\sup_{j\,:\,\omega_j \in \Omega\setminus A} \mathrm{p}_j) = \theta \circ \mathrm{P}(\Omega\setminus A).
\end{gathered} \tag{2.3.8}$$

Поскольку, согласно лемме 2.3.1, $\Delta_k \to [\mathrm{p}_k, \mathrm{p}_k] = \{\mathrm{p}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и

$$\begin{gathered}
\exists\, \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}) \quad \mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}(A) = \mathrm{p}_k,\ \mathrm{Pr}(A) \in \Delta_k, \\
\text{и, в частности, } \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_k) = \mathrm{p}_k,\ k = 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{2.3.9}$$

где $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ — класс монотонных функций $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, непрерывных на $(0, 1]$, удовлетворяющих условиям $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$, $\widetilde{\gamma}(a) = \mathrm{p}_k$, $a \in \Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для некоторой последовательности $\{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots\}$, удовлетворяющей условиям (2.3.7), то в силу соответствий $\widetilde{\Delta}_k \to [\mathrm{n}_k, \mathrm{n}_k] = \{\mathrm{n}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{gathered}
\exists \widetilde{\widetilde{\gamma}}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}) \quad \mathrm{N}(\Omega\setminus A) = \widetilde{\widetilde{\gamma}} \circ \mathrm{Pr}(\Omega\setminus A) = \mathrm{n}_k,\ \mathrm{Pr}(A) \in \widetilde{\Delta}_k, \\
\text{и, в частности, } \widetilde{\widetilde{\gamma}}(1 - \mathrm{pr}_k) = \mathrm{n}_k,\ k = 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{2.3.10}$$

где $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr})$ — класс монотонных функций $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(\cdot)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, непрерывных на $[0, 1)$, удовлетворяющих условиям $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(0) = 0$, $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1) = 1$, $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(a) = \mathrm{n}_k$, $a \in \widetilde{\Delta}_k \Longleftrightarrow 1 - a \in \Delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для некоторой последовательности $\{\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \ldots\}$, удовлетворяющей условиям (2.3.7).

Функции $\theta(\cdot)$ в (2.3.8), $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ в (2.3.9) и $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(\cdot)$ в (2.3.10) связаны условием $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1 - a) = \theta \circ \widetilde{\gamma}(a)$, $a \in \Delta_k \Longleftrightarrow 1 - a \in \widetilde{\Delta}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому согласно (2.3.10) $\mathrm{N}(\Omega\setminus A) = \widetilde{\widetilde{\gamma}} \circ \mathrm{Pr}(\Omega\setminus A) = \theta \circ \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A)) = \widetilde{\theta} \circ \mathrm{Pr}(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, т. е. выполнено условие (2.3.6) при $\widetilde{\theta}(\cdot) = \theta \circ \widetilde{\gamma}(\cdot)$.

Таким образом, *если* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}, \mathrm{N})$ — *нечеткая модель стохастического объекта* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, *то есть если* $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{N}$, *то* $\exists\, \theta(\cdot) \in \Theta$ $\mathrm{N}(A) = \theta \circ \mathrm{P}(\Omega \setminus A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, то есть $\mathrm{P}(\cdot) <\approx> \mathrm{N}(\cdot)$, см. § 1.5.1, гл. 1, и для любого $e \in (0, 1)$ класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ — стохастическая модель классов $\mathbb{P}_{(e)}$ и $\mathbb{N}_{(e)}$, любая вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ — стохастическая модель любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ и любой необходимости $\mathrm{N} \in \mathbb{N}_{(e)}$, для которых существуют $\widetilde{\gamma}_e(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ и $\theta(\cdot) \in \Theta$ такие, что для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}_e(\mathrm{Pr}(A))$ и $\mathrm{N}(A) = \widetilde{\theta}_e(\mathrm{Pr}(\Omega \setminus A))$, $\widetilde{\theta}_e(\cdot) = \theta \circ \widetilde{\gamma}_e(\cdot)$.

Пример 2.3.2. Пусть $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{N}$. Рассмотрим *вариант* теории возможностей, в котором между значениями P, N и *множествами* значений Pr установлены взаимно-однозначные соответствия, *инвариантные относительно выбора координатных представлений шкал* $\mathcal{L}_{S'}$ *и* $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$, *значений* P *и* N, см. § 1.16 гл. 1. Пусть, например, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}) = q/(1+q)^i$, $i = 1, 2, 3$, $\mathrm{pr}_4 = \mathrm{Pr}(\{\omega_4\}) = 1/(1+q)^3$, где $q > 1$ и поэтому для P и N, максимально согласованных с Pr, $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > \mathrm{p}_4 > 0 = \mathrm{n}_1 < \mathrm{n}_2 < \mathrm{n}_3 < \mathrm{n}_4 < 1$, где $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $\mathrm{n}_i = \mathrm{N}(\Omega \setminus \{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, 4$.

Для содержательной интерпретации, инвариантной относительно выбора координатных представлений шкал $\mathcal{L}_{S'}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$, определим следующие значения P и N:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{P} = a_0 & = & a_1 & = & a_2 & = & a_3 & = & a_4 & = & a_5, \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
0 & < & \mathrm{pr}_4 & < & (1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2) & < & (1 - \mathrm{pr}_1) & < & 1/2 & < & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathrm{N} = 1 - a_5 & = & 1 - a_4 & = & 1 - a_3 & = & 1 - a_2 & = & 1 - a_1 & = & 1 - a_0, \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
0 & < & 1/2 & < & \mathrm{pr}_1 & < & (\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2) & < & (1 - \mathrm{pr}_4) & < & 1,
\end{array}$$

см. § 1.16 гл. 1. Тогда $\overline{\Gamma}_S$ есть группа автоморфизмов шкал $\mathcal{L}_{S'}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$ значений P и N, где $S' = \{a_0, \ldots, a_5\}$, $\widetilde{S}' = \{1 - a_5, \ldots, 1 - a_0\}$, $S' \cup \widetilde{S}' = S$, отвечающая группе $\Gamma_S \subset \Gamma$ преобразований $\gamma_S(\cdot)\colon [0, 1] \to [0, 1]$, оставляющих значения a_i и $1 - a_i$, $i = 0, \ldots, 5$, неподвижными: $\gamma_S(a_i) = a_i$, $\gamma_S(1 - a_i) = 1 - a_i$, $i = 0, \ldots, 5$, а класс Θ_S инволюций $\theta_S(\cdot) \in \Theta$, $\theta_S(a_i) = 1 - a_i$, $\theta_S(1 - a_i) = a_i$, $i = 0, \ldots, 5$, определит класс $\overline{\Theta}_S$ дуальных изоморфизмов $\theta_S\colon \mathcal{L}_{S'} \to \theta_S \mathcal{L}_{S'} = \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$.

При этом инвариантные взаимно-однозначные соответствия между значениями P и N и множествами значений Pr суть следующие, см. рис. 2.3.2:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(A) = 1 \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ \{\omega_1\} \subset A \subset \Omega\} \subset [\mathrm{pr}_1, 1] = \Delta_1; \qquad (*)\\
&\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{pr}_1 \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ \{\omega_2\} \subset A \subset \Omega \setminus \{\omega_1\}\} \subset [\mathrm{pr}_2, 1 - \mathrm{pr}_1] = \Delta_2;\\
&\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2 \Leftrightarrow\\
&\qquad \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ \{\omega_3\} \subset A \subset \Omega \setminus \{\omega_1, \omega_2\}\} \subset [\mathrm{pr}_3, 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2] = \Delta_3;\\
&\mathrm{P}(A) = \mathrm{pr}_4 \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ A = \{\omega_4\}\} = [\mathrm{pr}_4, \mathrm{pr}_4] = \Delta_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}(A) = 0 \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ A \subset \Omega \setminus \{\omega_1\}\} \subset [0, 1 - \mathrm{pr}_1] = \widetilde{\Delta}_1; \qquad (**)\\
&\mathrm{N}(A) = \mathrm{pr}_1 \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ \{\omega_1\} \subset A \subset \Omega \setminus \{\omega_2\}\} \subset [\mathrm{pr}_1, 1 - \mathrm{pr}_2] = \widetilde{\Delta}_2;\\
&\mathrm{N}(A) = \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 \Leftrightarrow\\
&\qquad \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ \{\omega_1, \omega_2\} \subset A \subset \Omega \setminus \{\omega_3\}\} \subset [\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2, 1 - \mathrm{pr}_3] = \widetilde{\Delta}_3;\\
&\mathrm{N}(A) = 1 - \mathrm{pr}_4 \Leftrightarrow\\
&\qquad \Leftrightarrow \{\mathrm{Pr}(A),\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \subset A \subset \Omega \setminus \{\omega_4\}\} \subset [1 - \mathrm{pr}_4, 1 - \mathrm{pr}_4] = \widetilde{\Delta}_4.
\end{aligned}$$

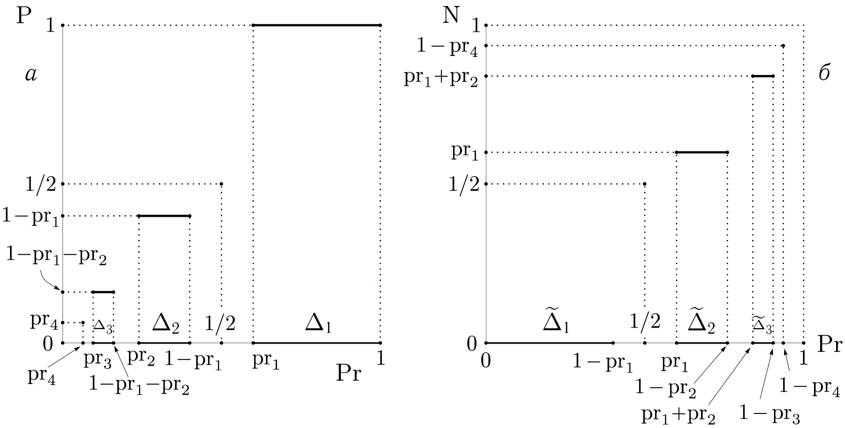


Рис. 2.3.2. Взаимно однозначные соответствия: *а*) между значениями P и минимальными по включению интервалами, содержащими множества значений Pr в $(*)$; *б*) между значениями N и минимальными по включению интервалами, содержащими множества значений Pr в $(**)$ для $\mathrm{pr}_i = q/(1+q)^i$, $i = 1, 2, 3$, $\mathrm{pr}_4 = 1/(1+q)^3$, $q = 3/2$

В этом примере можно определить максимальную (по включению) группу $\overline{\Gamma}_{S'}$ автоморфизмов $\gamma_{S'} \colon \mathcal{L}_{S'} \to \mathcal{L}_{S'}$ шкалы $\mathcal{L}_{S'}$ значений P условиями $\gamma_{S'}(a_i) = a_i$, $i = 0, \ldots, 5$, согласно которым $\overline{\Gamma}_S \subset \overline{\Gamma}_{S'}$, класс $\overline{\Theta}_{S'}$ дуальных изоморфизмов $\theta_{S'} \colon \mathcal{L}_{S'} \to \theta_{S'}\mathcal{L}_{S'} = \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$ условиями $\theta_{S'}(a_i) = 1 - a_i$, $i = 1, \ldots, n$, согласно которым $\overline{\Theta}_S \subset \overline{\Theta}_{S'}$, и группу $\overline{\Gamma}_{\widetilde{S}'}$ автоморфизмов $\gamma_{\widetilde{S}'} \colon \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'} \to \widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$ шкалы $\widetilde{\mathcal{L}}_{\widetilde{S}'}$ значений N равенствами $\gamma_{\widetilde{S}'} = \theta_{S'} \circ \gamma_{S'} \circ \theta_{S'}^{-1}$, $\gamma_{S'} \in \overline{\Gamma}_{S'}$, см. (1.15.10*), согласно которым $\gamma_{\widetilde{S}'}(1 - a_i) = 1 - a_i$, $i = 0, \ldots, 5$.

2.3.3. Возможность, максимально согласованная с вероятностью на σ-алгебре. Гранулирование Ω. В связи с примером 2.3.1 обратим внимание на «парадокс равновозможности», обусловленный, как нетрудно заметить, неаддитивностью (в обычном понимании) возможности. Дело в том, что, например, при $q = 1$ $\mathrm{pr}_k = \mathrm{Pr}(\{\omega_k\}) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$, но распределение возможности, максимально согласованной с Pr, «тривиально»: $\mathrm{p}_k = \mathrm{P}(\{\omega_k\}) = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. ω_1 и ω_k равновозможны, хотя их вероятности отличаются в 2^k раз! В этом случае «градации» вероятности $\mathrm{Pr}(\{\omega_k\})$, $k = 1, 2, \ldots$, недостаточны, чтобы их могла «различить» возможность P, даже максимально согласованная с Pr.

Для того, чтобы «стохастические детали» сделать «различимыми» для возможности P, «гранулируем» $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, объявив наблюдаемыми не элементарные события $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, ..., а гранулы Ω_1, Ω_2, ... — попарно непересекающиеся подмножества Ω, образующие разбиение

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k, \tag{2.3.11}$$

для которого $\Pr(\Omega_1) > \Pr(\Omega_2) > \ldots,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Pr(\Omega_k) = 1$.

Обозначим $\mathcal{A}$ σ-алгебру подмножеств Ω, порожденную [1] разбиением (2.3.11), $\Pr\big|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ — сужение вероятности $\Pr(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \to [0,1]$ на $\mathcal{A}$ и $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \Pr\big|_{\mathcal{A}})$ — соответствующее вероятностное пространство, в котором вероятность $\Pr\big|_{\mathcal{A}}$ определена своими значениями на гранулах: $\Pr\big|_{\mathcal{A}}(\Omega_k) = \Pr(\Omega_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Гранулирование Ω формально означает замену $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \Pr)$ на $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \Pr\big|_{\mathcal{A}})$ и замену требований 1 и 3 к функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$, см. (2.3.1), на следующие, более слабые:

1*. возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\Omega_i) = \widetilde{\gamma}(\Pr(\Omega_i))$, $i = 1, 2, \ldots$, должны удовлетворять условию $1 = \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\Omega_1) \geqslant \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\Omega_2) \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\Omega_k)$ с максимальным числом строгих неравенств для каждого $k = 2, 3, \ldots$, и

3*. для любого $A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_{k\,:\,\Omega_k \subset A} \widetilde{\gamma}(\Pr(\Omega_k)) = \widetilde{\gamma}\big(\sup\limits_{k\,:\,\Omega_k \subset A} \Pr(\Omega_k)\big) =$
$= \widetilde{\gamma}\left(\sum\limits_{k\,:\,\Omega_k \subset A} \Pr(\Omega_k)\right) = \widetilde{\gamma}(\Pr(A)) = \mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(A)$.

Определенную так возможность $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ назовем максимально согласованной с вероятностью $\Pr\big|_{\mathcal{A}}(\cdot)$ на $\mathcal{A}$, сохранив принятое ранее обозначение $\Pr\big|_{\mathcal{A}} \approx> \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$, см. определение 2.0.3, для максимальной согласованности. Если же речь идет о согласованности (максимальной согласованности) $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ с $\Pr(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ на $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, то (см. определение 2.0.3) будем пользоваться символом $\Pr \overset{\mathcal{A}}{\sim>} \mathrm{P}$ ($\Pr \overset{\mathcal{A}}{\approx>} \mathrm{P}$).

Пусть $\mathrm{P}(\cdot)\mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ — любое [2] продолжение возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, $\Pr\big|_{\mathcal{A}} \approx> \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$, на алгебру $\mathcal{P}(\Omega)$ всех подмножеств Ω, удовлетворяющее условию (2.0.4). Тогда, очевидно, $\Pr \overset{\mathcal{A}}{\approx>} \mathrm{P}$. Такое продолжение P возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$ назовем согласованным с Pr.

Разумеется, смысл гранулирования Ω в том, чтобы в пункте 1* *все неравенства были строгими, вероятность каждой гранулы — минимальной, а число гранул — максимальным.* При этом вероятность $\Pr(\cdot)\colon \mathcal{P}(A) \to [0,1]$ и любое согласованное с ней продолжение $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ возможности $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ можно считать максимально согласованными на $\mathcal{A}$, см. § 3.6 гл. 3.

---

[1] Элементы $\mathcal{A} = \sigma(\Omega_1, \Omega_2, \ldots)$ суть пустое множество и подмножества Ω, представимые конечными или счетными объединениями Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$

[2] Не обязательно максимальное продолжение $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$, см. § 1.9 гл. 1.

Пример 2.3.3. Пусть $\Omega_k = \Omega_k^{(s)} = \{\omega_{(k-1)\,s+1}, \ldots, \omega_{ks}\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — s-точечные подмножества Ω. Если $\mathrm{pr}_k = \mathrm{Pr}(\{\omega_k\}) = q/(1+q)^k$, $k = 1, 2, \ldots$, то $\mathrm{pr}_k^{(s)} = \mathrm{Pr}(\Omega_k^{(s)}) = ((1+q)^s - 1)\,/(1+q)^{ks}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $s = 1, 2, \ldots$ и $q > 0$ — параметры.

Сопоставим гранулам $\Omega_1^{(s)}, \Omega_2^{(s)}, \ldots$ элементарные события $\{\omega_1^{(s)}\}$, $\{\omega_2^{(s)}\}, \ldots$ в $\Omega^{(s)} = \{\omega_1^{(s)}, \omega_2^{(s)}, \ldots\}$ и рассмотрим вероятностное пространство $\big(\Omega^{(s)}, \mathcal{P}(\Omega^{(s)}), \mathrm{Pr}^{(s)}\big)$, в котором

$$\mathrm{Pr}^{(s)}\left(\{\omega_k^{(s)}\}\right) = \mathrm{Pr}\left(\Omega_k^{(s)}\right) \equiv \mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}}\left(\Omega_k^{(s)}\right) = \mathrm{pr}_k^{(s)},\ k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку для $\Delta_k^{(s)} = \left[\mathrm{pr}_k^{(s)},\, 1 - \left(\mathrm{pr}_1^{(s)} + \ldots \mathrm{pr}_k^{(s)}\right)\right]$, $k = 1, 2, \ldots$, $\Delta_k^{(s)} \cap \Delta_{k+1}^{(s)} = \varnothing$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, если и только если $(1+q)^s > 2$, т. е. если $s > \ln 2/\ln(1+q)$, то для возможности $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega^{(s)}) \to [0, 1]$, максимально согласованной с $\mathrm{Pr}^{(s)}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega^{(s)}) \to [0, 1]$, найдем, что $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(s)} \approx> \mathbb{P}^{(s)}$, если

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{P}^{(s)}\left(\left\{\Omega_1^{(s)}\right\}\right) = \mathrm{P}^{(s)}\left(\left\{\Omega_2^{(s)}\right\}\right) = \ldots,\ \text{для } s \leqslant \ln 2/\ln(1+q), \\ 1 &= \mathrm{P}^{(s)}\left(\left\{\Omega_1^{(s)}\right\}\right) > \mathrm{P}^{(s)}\left(\left\{\Omega_2^{(s)}\right\}\right) > \ldots,\ \text{для } s > \ln 2/\ln(1+q). \end{aligned}$$

Иначе говоря, в то время, как при $s = 1$ $\mathrm{P}^{(1)}$ «различает» вероятности $\mathrm{pr}_1^{(1)} > \mathrm{pr}_2^{(1)} > \ldots$ лишь при $q > 1$, теперь при любом $q > 0$ при $s > \ln 2/\ln(1+q)$ возможность $\mathrm{P}^{(s)}$ «различает» вероятности $\mathrm{pr}_1^{(s)} > \mathrm{pr}_2^{(s)} > \ldots$ гранул $\Omega_1^{(s)}, \Omega_2^{(s)}, \ldots$

Аналогичное заключение верно и для возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}$ в $\big(\Omega, \mathcal{A}^{(s)}, \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\big)$, максимально согласованной с вероятностью $\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}$ в $\big(\Omega, \mathcal{A}^{(s)}, \mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\big)$, где $\mathcal{A}^{(s)}$ — σ-алгебра, порожденная разбиением $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k^{(s)}$, а именно, если $\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}} \approx> \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}$, то

$$\begin{aligned} 1 &= \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\left(\Omega_1^{(s)}\right) = \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\left(\Omega_2^{(s)}\right) = \ldots,\ \text{если } s \leqslant \ln 2/\ln(1+q), \\ 1 &= \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\left(\Omega_1^{(s)}\right) > \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\left(\Omega_2^{(s)}\right) > \ldots,\ \text{если } s > \ln 2/\ln(1+q). \end{aligned}$$

Наконец, для распределения возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$, максимально согласованной с вероятностью $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ на $\mathcal{A}^{(s)}$, полученной как *максимальное продолжение* $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}(\cdot)\colon \mathcal{A}^{(s)} \to \mathcal{L}$ с $\mathcal{A}^{(s)}$ на $\mathcal{P}(\Omega)$, см. гл. 1, § 1.9, найдем, что $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}^{(s)}}{\approx>} \mathrm{P}$, если

$$\begin{aligned} &1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \ldots, && \text{для } s \leqslant \ln 2/\ln(1+q), \\ &1 = \mathrm{p}_1 = \ldots = \mathrm{p}_s > \mathrm{p}_{s+1} = \ldots = \mathrm{p}_{2s} > \ldots, && \text{для } s > \ln 2/\ln(1+q), \end{aligned}$$

где $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{p}_1 = \ldots = \mathrm{p}_s = \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\left(\Omega_1^{(s)}\right)$, $\ldots$, $\mathrm{p}_{(k-1)\,s+1} = \ldots = \mathrm{p}_{ks} = \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}\left(\Omega_k^{(s)}\right)$, $\ldots$, а для *любого согласованного с* Pr *продолжения* P возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}$, *максимально согласованного* с Pr на $\mathcal{A}^{(s)}$,

$$\begin{aligned} &1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \ldots, && \text{если } s \leqslant \ln 2/\ln(1+q),\\ &1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_s > \mathrm{p}_{s+1} \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_{2s} > \ldots, && \text{если } s > \ln 2/\ln(1+q), \end{aligned}$$

$\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{p}_1 = \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}(\Omega_1^{(s)}) \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_s > \mathrm{p}_{s+1} = \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}(\Omega_2^{(s)}) \geqslant \mathrm{p}_{s+2} \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_{(k-1)s} > \mathrm{p}_{(k-1)s+1} = \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}^{(s)}}(\Omega_k^{(s)}) \geqslant \ldots$

Алгоритмы гранулирования, позволяющие *максимально согласовать вероятность с возможностью*, рассмотрены в § 3.5, 3.6, 3.7 гл. 3.

2.4. Классы эквивалентных возможностей, максимально согласованные с классами вероятностей

2.4.1. Когерентные разбиения классов $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{e\in(0,1)} \mathbb{P}_{(e)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup\limits_{e\in(0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$. В этом параграфе между классами $\mathbb{P}_{(e)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$, в разбиениях, см. (2.0.6), (2.0.11),

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e\in(0,1)} \mathbb{P}_{(e)},\ \ \mathbb{P}_{(e)} \cap \mathbb{P}_{(e')} = \varnothing,\, e \neq e'$$

и

$$\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e\in(0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)},\, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \varnothing,\, e \neq e',\, e, e' \in (0, 1)$$

конструктивно установлено взаимно однозначное соответствие.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, и $e = 0.e_1e_2\ldots$ — двоичная запись числа $e \in (0, 1)$. Результаты, полученные в § 2.3, позволяют для любого $e \in (0, 1)$ определить классы $\mathbb{P}_{(e)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ так, что для любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ и для любой вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$:

$$\begin{aligned} &\text{либо } e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing \Leftrightarrow\\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1,\\ &\text{либо } e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing \Leftrightarrow f_i \leqslant 1,\ \ i = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

В (2.4.1) эквивалентности

$$e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1},\ e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.2}$$

означают [1]), что каждому $e \in (0,1)$ взаимно однозначно сопоставлен класс $\mathbb{P}_{(e)} \subset \mathbb{P}$ эквивалентных возможностей, распределения которых одинаково упорядочены согласно условиям (2.4.2).

Среди условий (2.4.1) эквивалентности

$$\begin{array}{l} e_i = 1 \;\Leftrightarrow\; \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing \;\Leftrightarrow\; f_i > 1, \\ e_i = 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; f_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \end{array} \tag{2.4.3}$$

означают, что при любом $f_i > 1$ левая граница pr_i интервала $\Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}]$ правее правой границы $1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_i$ интервала $\Delta_{i+1} = [\mathrm{pr}_{i+1}, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_i]$, т. е. что интервалы Δ_i и Δ_{i+1} не пересекаются, а при любом $f_i \leqslant 1$ — пересекаются, $i = 1, 2, \ldots$

Замечание 2.4.1.

► Условия (2.4.3) *определяют любой* класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, как *выпуклое подмножество* $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Действительно, если распределения $\mathrm{pr}_1^k \geqslant \mathrm{pr}_2^k \geqslant \ldots$, $k = 1 \ldots, m$, удовлетворяют условиям: $\forall\, k = 1, \ldots, m$ либо $e_i = 1 \Leftrightarrow f_i^k = \mathrm{pr}_1^k + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^k + 2\mathrm{pr}_i^k > 1$, либо $e_i = 0 \Leftrightarrow f_i^k \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, то для любых $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$, таких, что $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, распределение $\mathrm{pr}_i = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \mathrm{pr}_i^k$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию (2.4.3);

► если $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_n \geqslant 0 = \mathrm{pr}_{n+1} = \ldots$, или, иначе говоря, если $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, то для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнены условия (2.4.1), а для $i = n$

$$\begin{array}{l} e_n = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_n > 0 \Leftrightarrow \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_n > 1 - \mathrm{pr}_n \Leftrightarrow \mathrm{pr}_n > 0, \\ e_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_n = 0 \Leftrightarrow \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_n \leqslant 1 - \mathrm{pr}_n \Leftrightarrow \mathrm{pr}_n = 0; \end{array} \tag{2.4.4}$$

► согласно обозначениям, использованным в (2.4.1),

$$\mathrm{pr}_1 = \frac{1}{2} f_1, \; \mathrm{pr}_2 = \frac{1}{2}\Big(f_2 - \frac{1}{2} f_1\Big), \ldots, \; \mathrm{pr}_k = \frac{1}{2}\Big(f_k - \sum_{j=1}^{k-1} (f_j / 2^{k-j})\Big),$$

$$\ldots, f_k \in \Big(0, \frac{k+1}{k}\Big], \; \sum_{i=1}^{k} \mathrm{pr}_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} (f_j / 2^{k-j}), \; k = 1, 2, \ldots \tag{2.4.5}$$

Замечание 2.4.2. Согласно лемме 2.3.1 неравенство $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}$ влечет неравенство $\mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_{i+1}$, но обратное неверно, $i = 1, 2, \ldots$ Если в (2.4.1) неравенство $\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1$ переписать в виде неравенства

$$\mathrm{Pr}\,(\{\omega_i\} \,|\, \Omega \backslash \{\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}\}) = \frac{\mathrm{pr}_i}{1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}} > \frac{1}{2}$$

[1]) Эквивалентности в (2.4.2) удобно выразить правилом: «>» — под единицей, «=» — под нулем, например, $\begin{array}{l} e = 0 \;\; . \;\; 1 \;\;\; 1 \;\;\; 0 \;\;\; 0 \;\;\; 1 \ldots \\ 1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 = \mathrm{p}_4 = \mathrm{p}_5 > \ldots \end{array}$.

для условной вероятности, то, согласно (2.4.1), $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}|\,\Omega\backslash\{\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}\}) > 1/2$. Это можно интерпретировать так: $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}$, *если и только если элементарное событие* $\{\omega_i\}$ *более вероятно, чем событие* $\{\omega_{i+1}, \omega_{i+2}, \ldots\}$.

С другой стороны, равенство $\mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_{i+1}$ влечет равенство $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}$, но обратное опять-таки неверно. В частности, если $\mathrm{pr}_i = q/(1+q)^i$, $i = 1, 2, \ldots$, то при $q > 1$ $\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots$ и $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \ldots$, а при $0 < q \leqslant 1$ $\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots$, но $1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \ldots$, т.е. в этом случае все элементарные события $\{\omega_i,\, i = 1, 2, \ldots\}$ равновозможны, хотя их вероятности *экспоненциально* убывают при $i \to \infty$.

Подведем итоги.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $e = 0.e_1e_2\ldots \in (0,1)$, $\mathbb{P}_{(e)} \subset \mathbb{P}$ — *класс эквивалентных возможностей, распределенных согласно* (2.4.2), *и* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}$ — *выпуклый класс вероятностей, распределенных согласно* (2.4.1). *Тогда в согласии с леммой* 2.3.1

► $\forall e \in (0,1)\ \forall \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}\ \forall \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\ \mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$ *и* $\exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})\ \mathrm{P} = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}$, см. рис. 2.3.1, *иными словами*, $\Gamma(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, *есть класс гомоморфизмов* $\mathbb{P}\mathrm{r} \to \mathbb{P}$;

► *для различных* $e, e' \in (0,1)$ $\mathbb{P}_{(e)} \cap \mathbb{P}_{(e')} = \varnothing$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \cap \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \varnothing$ *и*

$$\mathbb{P} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}_{(e)},\ \mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}. \tag{2.4.6}$$

Класс $\mathbb{P}_{(e)}$ *назовем максимально согласованным с классом* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0,1)$. Разбиения в (2.4.6) назовем *когерентными*.

Замечание 2.4.3. В одной из задач эмпирического восстановления возможности, рассмотренных в § 3.2 гл. 3, речь идет о стохастическом эксперименте (С. Э.), исходы которого контролируются вероятностями из неизвестного, но *фиксированного условиями выполнения* С. Э. *класса* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, и требуется по результатам наблюдений за исходами С. Э. определить, *какой класс* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ *фиксируют условия выполнения* С. Э. Решение этой задачи определяет единственную с точностью до эквивалентности возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, максимально согласованную с каждой вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, и возможностную модель $(\Omega,\, \mathcal{P}(\Omega),\, \mathrm{P})$ С. Э., выполняемого при названных условиях.

Своеобразие этой задачи состоит в том, что вероятность, контролирующая каждый исход С. Э., вообще говоря, может произвольно изменяться от испытания к испытанию, оставаясь в пределах некоторого класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$. Результаты таких испытаний, вообще говоря, не позволяют восстановить модель С. Э., но, как показано в § 3.2.2 гл. 3, при некоторых ограничениях на класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ возможностная модель С. Э. может быть восстановлена безошибочно на основе результатов п. н. конечного числа испытаний.

В связи с этим замечанием класс $\mathbb{P}_{(e)}$ и любую возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, которые могут быть определены эмпирически на основе наблюдений за исходами С. Э., стохастической моделью которого является класс вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$, $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, естественно назвать $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-*измеримыми*. Всякая $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримая возможность определяется равенством $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}\,(\Pr(A))$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, где $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\Pr)$, $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$.

2.4.2. Решеточно упорядоченные множества классов $\mathbb{P}_{(e)}$ и $\mathbb{P}\mathbf{r}_{(e)}$, $e \in (0,1)$. Определим частичную упорядоченность на множестве классов $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, характеризующую «*относительное качество*» *образующих их возможностей*.

Определение 2.4.1. Возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ *разделяет* элементы $\mathcal{P}(\Omega)$ *не хуже*, чем $\mathrm{P}'(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$, если $\exists\,\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}\ \forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}'(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{P}(A))$.

Это отношение, характеризующее «качество» P «разделять элементы $\mathcal{P}(\Omega)$» как не менее высокое, чем «качество» P', обозначим символом «$\succcurlyeq$»: $\mathrm{P} \succcurlyeq \mathrm{P}' \Leftrightarrow \exists\,\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}\ \mathrm{P}' = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{P}$. Возможности P и P' *одинаково разделяют* элементы $\mathcal{P}(\Omega)$ и в этом смысле *эквивалентны*, $\mathrm{P}' \sim \mathrm{P}$, если $\mathrm{P} \succcurlyeq \mathrm{P}'$ и $\mathrm{P} \preccurlyeq \mathrm{P}'$, а если $\mathrm{P} \succcurlyeq \mathrm{P}'$ и при этом P' и P не эквивалентны, $\mathrm{P}' \not\sim \mathrm{P}$, то P разделяет элементы $\mathcal{P}(\Omega)$ *лучше*, чем P', $\mathrm{P} \succ \mathrm{P}'$.

Отношение $\sim$, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является *эквивалентностью на* $\mathbb{P}$. Поэтому для любых классов

$$\mathbb{P}' = \{\mathrm{P},\ \mathrm{P} \sim \mathrm{P}'\},\ \mathbb{P}'' = \{\mathrm{P},\ \mathrm{P} \sim \mathrm{P}''\},\ \mathrm{P}', \mathrm{P}'' \in \mathbb{P}, \tag{2.4.7}$$

либо $\mathbb{P}' = \mathbb{P}''$, если $\mathrm{P}' \sim \mathrm{P}''$, либо $\mathbb{P}' \cap \mathbb{P}'' = \varnothing$, если $\mathrm{P}' \not\sim \mathrm{P}''$. Следовательно, *на множестве классов эквивалентных* (*в смысле* $\sim$) *возможностей* можно ввести *упорядоченность*, которую обозначим тем же символом $\succcurlyeq$, определив в (2.4.7)

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}' \succcurlyeq \mathbb{P}'',\ \text{если } \mathrm{P}' \succcurlyeq \mathrm{P}'',\ \text{и}\\ &\mathbb{P}' \succ \mathbb{P}'',\ \mathbb{P}' = \mathbb{P}'',\ \text{если соответственно } \mathrm{P}' \succ \mathrm{P}'',\ \mathrm{P}' = \mathrm{P}''.\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Если $\mathbb{P}' \succ \mathbb{P}''$, то $\mathrm{P}' \succ \mathrm{P}''$ для любых $\mathrm{P}' \in \mathbb{P}'$, $\mathrm{P}'' \in \mathbb{P}''$, все возможности $\mathrm{P}' \in \mathbb{P}'$ одинаково разделяют элементы $\mathcal{P}(\Omega)$, причем лучше, чем любая возможность $\mathrm{P}'' \in \mathbb{P}''$, а отношение $\mathbb{P}' \succcurlyeq \mathbb{P}''$ означает, что либо $\mathbb{P}' = \mathbb{P}''$, либо $\mathbb{P}' \succ \mathbb{P}''$.

Вновь используя те же символы «$\succcurlyeq$», «$\succ$», введем *частичную упорядоченность* на множествах двоичных чисел $e = 0.e_1e_2\ldots \in (0,1)$ и классов $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,1)$, определив

$$\mathbb{P}_{(e)} \succcurlyeq \mathbb{P}_{(e')} \Leftrightarrow e \succcurlyeq e' \Leftrightarrow e_i \geqslant e_i',\ i = 1, 2, \ldots \tag{2.4.9}$$

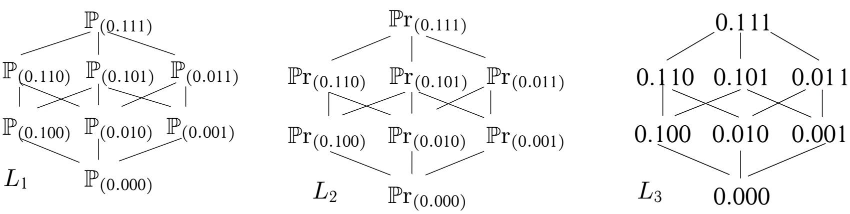
Использование символа «$\succcurlyeq$» в (2.4.9) оправдано, поскольку, если $\mathrm{P}' = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{P}$, $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $\mathrm{p}_i' = \mathrm{P}'(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\forall\,\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$

$$\begin{aligned}&e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Rightarrow \widetilde{\gamma}(\mathrm{p}_i) = \mathrm{p}_i' \geqslant \mathrm{p}_{i+1}' = \widetilde{\gamma}(\mathrm{p}_{i+1}) \Leftrightarrow e_i' \leqslant 1,\\ &e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Rightarrow \widetilde{\gamma}(\mathrm{p}_i) = \mathrm{p}_i' = \mathrm{p}_{i+1}' = \widetilde{\gamma}(\mathrm{p}_{i+1}) \Leftrightarrow e_i' = 0,\ i = 1, 2, \ldots\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Поэтому если $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{P}' \in \mathbb{P}_{(e')}$ и $\mathrm{P}' = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{P}$, то в (2.4.9) $e \succcurlyeq e'$, а $\mathbb{P}_{(e)} \succcurlyeq \mathbb{P}_{(e')}$ как в смысле (2.4.9), так и в смысле (2.4.8), и наоборот, если $e_i' \leqslant e_i$, $i = 1, 2, \ldots$, и в (2.4.9) $e \succcurlyeq e'$, то в (2.4.10) для $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathrm{P}' \in \mathbb{P}_{(e')}$ $\exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$ $\mathrm{p}_i' = \widetilde{\gamma}(\mathrm{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \Leftrightarrow \mathrm{P}' = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{P}$. Иначе говоря, в (2.4.10) $\mathbb{P}_{(e)} \succcurlyeq \mathbb{P}_{(e')} \Leftrightarrow \forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ $\forall\, \mathrm{P}' \in \mathbb{P}_{(e')}$ $\exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$ $\mathrm{P}' = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{P} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathbb{P}_{(e)} \succcurlyeq \mathbb{P}_{(e')}$ в смысле (2.4.7), (2.4.8).

На частично упорядоченных множествах двоичных чисел $e \in (0, 1)$ и классов $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$, $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$, определим *решеточные операции* $\vee$ и $\wedge$: $\forall\, e, e' \in (0, 1)$ $(e \vee e')_i = \max\{e_i, e_i'\}$, $(e \wedge e')_i = \min\{e_i, e_i'\}$, $i = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{(e)} \vee \mathbb{P}_{(e')} = \mathbb{P}_{(e \vee e')},\ \mathbb{P}_{(e)} \wedge \mathbb{P}_{(e')} = \mathbb{P}_{(e \wedge e')}, \\ &\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \vee \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e \vee e')},\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \wedge \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e')} = \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e \wedge e')}. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$



а *б* *в*

Рис. 2.4.1. *а*) Диаграмма решетки $L_1 = \{\mathbb{P}_{(0.111)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.000)}\}$. Класс $\mathbb{P}_{(0.111)}$ покрывает классы $\mathbb{P}_{(0.110)}$, $\mathbb{P}_{(0.101)}$ и $\mathbb{P}_{(0.011)}$, класс $\mathbb{P}_{(0.110)}$ покрывает $\mathbb{P}_{(0.100)}$ и $\mathbb{P}_{(0.010)}$ и т. д., $\mathbb{P}_{(0.111)}$ — наибольший, $\mathbb{P}_{(0.000)}$ — наименьший элементы L_1, $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.111)}$ $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > 0$, $\forall\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.001)}$ $1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 > 0$; *б*), *в*) — изоморфные L_1 решетки $L_2 = \{\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.000)}\}$ и $L_3 = \{0.111, \ldots, 0.000\}$

На рис. 2.4.1 приведены примеры решеточно упорядоченного множества классов $\mathbb{P}_{(0.111)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.000)}$, образующего решетку L_1 вместе с *пустым классом* $\mathbb{P}_{(0.000)} = \varnothing$, и изоморфные L_1 решетки $L_2 = \{\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.000)}\}$ и $L_3 = \{0.111, \ldots, 0.000\}$. Каждому классу $\mathbb{P}_{(e)}$ отвечает единственная с точностью до эквивалентности возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, «качество» которой тем выше, чем выше уровень в диаграмме L_1, содержащий $\mathbb{P}_{(e)}$, при этом $\forall\, \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ $\exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ $\mathrm{P} = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}$ [1]).

Множество всех неэквивалентных возможностей $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ изоморфно фактор-множеству $\mathbb{P}\mathrm{r}$ по разбиению $\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup\limits_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_e$.

2.4.3. Примеры классов вероятностей и максимально согласованных с ними классов возможностей в случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Рассмотрим сперва один из шести «треугольников возможностей» $\mathbb{P}^{ijk}$,

[1]) Класс $\mathbb{P}_{(e)}$ покрывает класс $\mathbb{P}_{(e')}$, если $\mathbb{P}_{(e)} \succ \mathbb{P}_{(e')}$ и не существует класса $\mathbb{P}_{(e'')}$, такого, что $\mathbb{P}_{(e)} \succ \mathbb{P}_{(e'')} \succ \mathbb{P}_{(e')}$.

$i \neq j \neq k \neq i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, изображенных на рис. 2.0.2, *б*, например, $\mathbb{P}^{123} = \mathbb{P}$. Выделим в нем семь подмножеств, $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \in (0,\, 1)$, образующих разбиение (2.4.6) класса $\mathbb{P}$ на неприводимые классы эквивалентных возможностей. Это, см. рис. 2.4.2, *а*, — три одноточечных подмножества [1] $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}_{(0.100)} = \{(1,\, 0,\, 0)\}, \quad \mathbb{P}_{(0.010)} = \{(1,\, 1,\, 0)\}, \quad \mathbb{P}_{(0.001)} = \{(1,\, 1,\, 1)\},$$

содержащих вершины $\mathbb{P}$, три стороны $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(0.110)} &= \{(\mathrm{p}_1,\, \mathrm{p}_2,\, \mathrm{p}_3) \in \mathbb{P},\ 1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 = 0\}, \\ \mathbb{P}_{(0.011)} &= \{(\mathrm{p}_1,\, \mathrm{p}_2,\, \mathrm{p}_3) \in \mathbb{P},\ 1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > 0\}, \\ \mathbb{P}_{(0.101)} &= \{(\mathrm{p}_1,\, \mathrm{p}_2,\, \mathrm{p}_3) \in \mathbb{P},\ 1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 > 0\}, \end{aligned}$$

и, наконец, множество

$$\mathbb{P}_{(0.111)} = \{(\mathrm{p}_1,\, \mathrm{p}_2,\, \mathrm{p}_3) \in \mathbb{P},\ 1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > 0\}$$

внутренних точек $\mathbb{P}$.

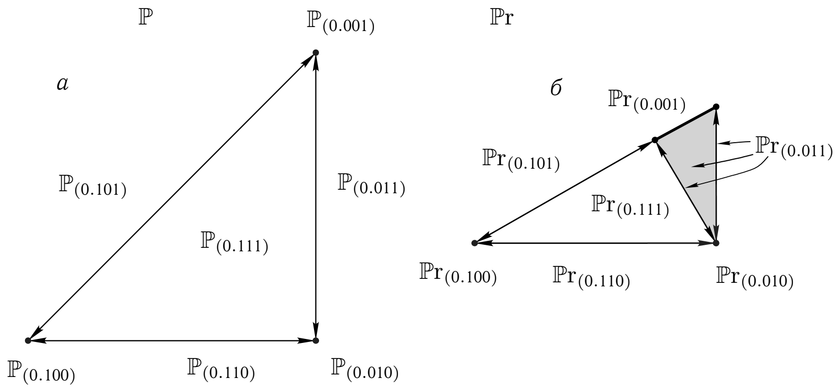


Рис. 2.4.2. *а*) «Треугольник возможностей» $\mathbb{P}$ и семь классов $\mathbb{P}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ эквивалентных возможностей, образующих разбиение $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0.001)} \cup \ldots \cup \mathbb{P}_{(0.111)}$ в (2.4.6). *б*) «Треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}^{123} = \mathbb{P}\mathrm{r}$ и семь его подмножеств — прообразов $\mathbb{P}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$, образующих разбиение в (2.4.6). При этом $\mathbb{P}_{(0.001)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)} = \mathbb{P}(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$; классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.001)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(0.111)}$, образуют разбиение треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r}$ в (2.4.6)

Каждое из множеств (распределений) $\mathbb{P}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ определяет класс эквивалентных возможностей, отличный от остальных.

Рассмотрим теперь «треугольник вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{123}$, см. рис. 2.0.2, *а* и эквивалентности в (2.4.1), и выделим в нем

---

[1] Напомним, что в этом примере $\mathbb{P}_{(e)}$ обозначает как класс эквивалентных возможностей, так и множество их распределений в $\mathcal{R}^3$.

подмножества [1]), соответствующие подмножествам $\mathbb{P}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ «треугольника $\mathbb{P}$ возможностей». Рассмотрим подмножество

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \{(\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r},\\ 1 > \mathrm{pr}_1 > 1/2 > \mathrm{pr}_2 > \mathrm{pr}_3 = 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2 > 0\}. \quad (2.4.12)$$

Для каждой точки $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ интервалы $\Delta_1 = [\mathrm{pr}_1,\, 1]$, $\Delta_2 = [\mathrm{pr}_2,\, 1 - \mathrm{pr}_1]$ и $\Delta_3 = [\mathrm{pr}_3,\, 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3] = \{\mathrm{pr}_3\}$ не пересекаются, следовательно, согласно лемме 2.3.1, отображение $\mathrm{p}_i = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, каждой точке $\mathrm{pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ при любой функции $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$ ставит в соответствие точку множества $\mathbb{P}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}$, а когда $\widetilde{\gamma}(\cdot)$ пробегает всё $\Gamma(\mathrm{Pr})$, точки $\widetilde{\gamma} \circ \mathrm{pr} \stackrel{\triangle}{=} (\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_1), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_2), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_3))$ заполняют все множество $\mathbb{P}_{(0.111)}$ (при любой точке $\mathrm{pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$!), т. е.

$$\mathbb{P}_{(0.111)} = \bigcup_{\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})} \{(\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_1), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_2), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_3))\},\\ \mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}. \quad (2.4.13)$$

Равенство (2.4.13) определяет многозначное отображение $\mathbb{P}(\cdot)$: $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} \to \mathcal{P}(\mathbb{P})$, ставящее в соответствие каждой точке $\mathrm{pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ множество $\mathbb{P}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}$.

Доопределим $\mathbb{P}(\cdot)$ на всем треугольнике вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}$. Для этого введем кроме подмножества $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$ (2.4.12) еще шесть подмножеств $\mathbb{P}\mathrm{r}$ (см. рис. 2.4.2, *б*)) $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)} = \{(1,\, 0,\, 0)\}$ — вершина $\mathbb{P}\mathrm{r}$, ей согласно лемме 2.3.1 отвечает вершина $\mathbb{P}_{(0.100)} = \{(1, 0, 0)\} \subset \mathbb{P}$, функция $\widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.100)}$, в лемме 2.3.1: $\widetilde{\gamma}(1) = 1$, $\widetilde{\gamma}(0) = 0$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.010)} = \{(1/2,\, 1/2,\, 0)\}$ — вершина $\mathbb{P}\mathrm{r}$, ей отвечает вершина $\mathbb{P}_{(0.010)} = \{(1,\, 1,\, 0)\} \subset \mathbb{P}$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.001)} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ 1/2 \geqslant \mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3 = 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2\}$ — отрезок, соединяющий вершины $\mathrm{pr} = (1/2,\, 1/4,\, 1/4)$ и $\mathrm{pr} = (1/3,\, 1/3,\, 1/3)$, содержащий эти вершины. Согласно лемме 2.3.1 ему соответствует одноточечное подмножество $\mathbb{P}_{(0.001)} = \{(1,\, 1,\, 1)\} \subset \mathbb{P}$, ибо для всех точек отрезка $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.001)}$ $\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_1) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_2) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_3) = 1$; $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ 1 > \mathrm{pr}_1 > 1/2 > 1 - \mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2 > \mathrm{pr}_3 = 0\}$ — нижняя сторона треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r}$ без его вершин. Каждой точке $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.110)}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.110)} = \{(\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_1), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_2), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_3)),\ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})\} \subset \mathbb{P}$. $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ — подмножество треугольника с вершинами $(1/2,\, 1/2,\, 0)$, $(1/3,\, 1/3,\, 1/3)$, $(1/2,\, 1/4,\, 1/4)$ без этих вершин и без стороны, соединяющей вершины $(1/3,\, 1/3,\, 1/3)$ и $(1/2,\, 1/2,\, 0)$. Каждой точке $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.011)} = \{(\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_1),\ \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_2), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_3)),\ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})\} \subset \mathbb{P}$. Наконец,

[1]) Напомним, что в рассматриваемом примере вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ «отождествляется» с точкой $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, координаты которой задают распределение Pr.

каждой точке подмножества $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.101)} = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r},$ $1 > \mathrm{pr}_1 > 1/2 > 1 - \mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3 > 0\}$ отвечает подмножество $\mathbb{P}_{(0.101)} = \{(\widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_1), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_2), \widetilde{\gamma}(\mathrm{pr}_3)),\ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr})\} \subset \mathbb{P},\ \mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2,$ $\mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.101)}$, см. рис. 2.4.2, *б*.

2.4.4. Классы эквивалентных возможностей, максимально согласованные с классами вероятностей во втором варианте теории возможностей. В обоих вариантах теории возможностей $a \boldsymbol{+} b = \max\{a, b\},\ a, b \in [0,1]$, поэтому условия, определяющие максимальную согласованность P' с Pr во втором варианте теории возможностей, могут быть сформулированы так, как в пунктах $1, \ldots, 4$ § 2.3.1 сформулированы условия максимальной согласованности P с Pr в первом варианте, если в пунктах $1, \ldots, 4$ P заменить на P', Γ — на Γ', γ — на γ' и $\Gamma(\mathrm{Pr})$ — на $\Gamma'(\mathrm{Pr})$. При этом как и в первом варианте

$$\begin{aligned} &\widetilde{\gamma}'(a) = \mathrm{p}'_i,\ a \in \Delta_i = [\mathrm{pr}_i, 1 - \mathrm{pr}_1 - \ldots - \mathrm{pr}_{i-1}],\\ &\mathrm{p}'_i > \mathrm{p}'_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing,\\ &\mathrm{p}'_i = \mathrm{p}'_{i+1} \Leftrightarrow \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \varnothing,\ i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

и подобно (4.2.10) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ \exists \widetilde{\gamma}'(\cdot) \in \Gamma'(\mathrm{Pr})$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}'(A) = \sup_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{p}'_i = \sup_{i:\ \omega_i \in A} \widetilde{\gamma}'(\mathrm{pr}_i) = \widetilde{\gamma}'(\sup_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i) =&\\ = \widetilde{\gamma}'(\sum_{i:\ \omega_i \in A} \mathrm{pr}_i) = \widetilde{\gamma}'(\mathrm{Pr}(a)).& \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Однако теперь, в отличие от первого варианта теории возможностей, $\forall \widetilde{\gamma}'(\cdot) \in \Gamma'(\mathrm{Pr})$

$$\Gamma'(\mathrm{Pr}) = \{\gamma' \circ \widetilde{\gamma}'(\cdot),\ \gamma'(\cdot) \in \Gamma'\} = \{(\widetilde{\gamma}')^{\alpha}(\cdot),\ \alpha > 0\}, \tag{2.4.16}$$

и этот факт позволит построить класс $\Gamma'(\mathrm{Pr})$.

Идею построения $\Gamma'(\mathrm{Pr})$ рассмотрим на примере $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ для вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, удовлетворяющей условиям $2\mathrm{pr}_1 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1$, $\mathrm{pr}_4 > 0$, $\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_4 = 1$, согласно которым в (2.4.14) $\Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing$, $i = 1, 2, 3$.

Искомая функция $\widetilde{\gamma}'(\cdot) \in \Gamma'(\mathrm{Pr})$ определяется следующими условиями, см. рис. 2.4.3, *а*:

$$\begin{aligned} &\mathrm{p}_1 = (\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} = 1,\ \beta_1 > 0,\ \text{любое},\\ &\mathrm{p}_2 = (\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} = ((1 - \mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} \Rightarrow \beta_2 = \beta_1 \frac{\ln((1 - \mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)}{\ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)},\ \beta_2 < \beta_1,\\ &\mathrm{p}_3 = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3} = ((1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} \Rightarrow \beta_3 = \beta_2 \frac{\ln((1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1)}{\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1)},\\ &\text{где } \beta_3 < \beta_2,\\ &\mathrm{p}_4 = (\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3}, \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

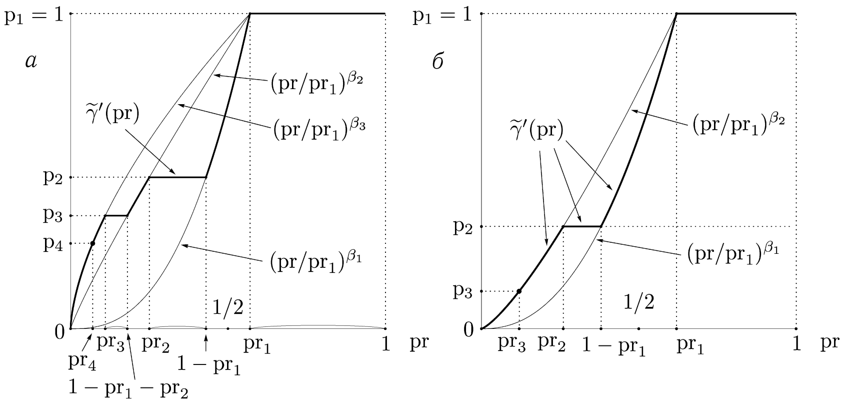


Рис. 2.4.3. Графики функций $\widetilde{\gamma}'(\cdot) \in \Gamma'(\mathrm{Pr})$, $\widetilde{\gamma}'(\mathrm{pr}) = \widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$. Классы $\{\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot),\ \beta_1 > 0\}$ определяют классы $\mathrm{P}'(\mathrm{Pr})$ Γ'-эквивалентных возможностей, распределения которых $\mathrm{p}_i^{\beta_1} = \widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\mathrm{pr}_i) = \left(\widetilde{\gamma}'|_{\beta_1=1}(\mathrm{pr}_i)\right)^{\beta_1}$, $\beta_1 > 0$: *а*) $\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot)$ (2.4.18), $i = 1,2,3,4$; *б*) $\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot)$ (2.4.24), $i = 1,2,3$

согласно которым в (2.4.15) для $a \in [0,1]$

$$\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(a) = \begin{cases} \mathrm{p}_1 = 1, & a \in [\mathrm{pr}_1, 1], \\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1}, & a \in [1-\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1], \\ \mathrm{p}_2, & a \in [\mathrm{pr}_2, 1-\mathrm{pr}_1], \\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2}, & a \in [1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_2], \\ \mathrm{p}_3, & a \in [\mathrm{pr}_3, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2], \\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3}, & a \in [0, \mathrm{pr}_3], \\ \mathrm{p}_4 = (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3}, & a \in [\mathrm{pr}_4, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2-\mathrm{pr}_3] = [\mathrm{pr}_4, \mathrm{pr}_4]. \end{cases} \tag{2.4.18}$$

В равенствах (2.4.17) значение $\beta_1 > 0$ выделяет одну из функций $\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot) \in \Gamma'(\mathrm{Pr}) = \{\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot),\ \beta_1 > 0\}$ в (2.4.18), второе равенство во второй строке в (2.4.17) связывает β_2 с β_1 и с Pr, второе равенство в третьей строке в (2.4.17) связывает β_3 с β_2 и с Pr. Однопараметрическое семейство функций $\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot)$, $\beta_1 > 0$, (2.4.18) образует класс $\Gamma'(\mathrm{Pr})$, отвечающий вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, см. рис. 2.4.3, *а*.

Класс Γ'-эквивалентных возможностей определяется значениями Γ'-инвариантов

$$\pi_3 = \ln \mathrm{p}_3 / \ln \mathrm{p}_2,\ \pi_4 = \ln \mathrm{p}_4 / \ln \mathrm{p}_3,\ \pi_3 > 1,\ \pi_4 > 1. \tag{2.4.19}$$

Для любых фиксированных значений $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$ класс Γ'-эквивалентных возможностей, обозначим его $\mathbb{P}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, содержится в классе $\mathbb{P}_{(0.1111)}$ Γ-эквивалентных возможностей, удовлетворяющих условию $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > \mathrm{p}_4 > 0$, и, согласно (2.4.19), выделяется в $\mathbb{P}_{(0.1111)}$ условиями

$$\mathrm{p}_3 = \mathrm{p}_2^{\pi_3},\ \mathrm{p}_4 = \mathrm{p}_3^{\pi_4},$$

определяющими в $\mathbb{P}_{(0.1111)}$ кривую [1])

$$\mathrm{p}_1 = 1,\ \mathrm{p}_3 = \mathrm{p}_2^{\pi_3},\ \mathrm{p}_4 = \mathrm{p}_2^{\pi_4\pi_3},\ \mathrm{p}_2 \in (0,1). \tag{2.4.20}$$

Двухпараметрическое семейство кривых (2.4.20), отвечающих значениям $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, исчерпывает класс $\mathbb{P}_{(0.1111)}$ в том смысле, что через каждую точку $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)$, $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > \mathrm{p}_4 > 0$, проходит одна кривая (2.4.20) семейства, выделенная условием (2.4.19).

Следовательно,

$$\mathbb{P}_{(0.1111)} = \bigcup_{\substack{\pi_3>1,\\ \pi_4>1}} \mathbb{P}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)} \tag{2.4.21}$$

— *разбиение класса* $\mathbb{P}_{(0.1111)}$ Γ-*эквивалентных возможностей на классы* $\mathbb{P}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$ Γ'-*эквивалентных возможностей.*

Каждой кривой (2.4.20), определяющей класс $\mathbb{P}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ Γ'-эквивалентных возможностей, согласно (2.4.17) соответствует класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ вероятностей, содержащийся в классе $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$; $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ есть кривая в $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$, определяемая, согласно условиям (2.4.17), (2.4.19), уравнениями

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \ln \mathrm{p}_3/\ln \mathrm{p}_2 = \ln((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1),\\ \pi_4 &= \ln \mathrm{p}_4/\ln \mathrm{p}_3 = \ln(\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1), \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

в которых

$$\begin{gathered} \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 + \mathrm{pr}_4 = 1,\ 2\mathrm{pr}_1 > 1,\\ \mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1,\ \mathrm{pr}_4 > 0. \end{gathered} \tag{2.4.23}$$

Между классами $\mathbb{P}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, согласно условиям (2.4.19), (2.4.22), имеется взаимно однозначное соответствие, определяющее максимальную согласованность $\mathbb{P}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$ с $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}$, $\pi_3 > 1$, $\pi_4 > 1$, и разбиению (2.4.21) соответствует разбиение

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)} = \bigcup_{\pi_3>1,\ \pi_4>1} \mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1111)}. \tag{2.4.21*}$$

Положив в (2.4.14)–(2.4.23) $\mathrm{p}_4 = 0$, $\mathrm{pr}_4 = 0$, получим случай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, в котором подобно (2.4.18)

$$\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(a) = \begin{cases} \mathrm{p}_1 = 1, & a \in [\mathrm{pr}_1, 1],\\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1}, & a \in [1-\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1],\\ \mathrm{p}_2, & a \in [\mathrm{pr}_2, 1-\mathrm{pr}_1],\\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2}, & a \in [0, \mathrm{pr}_2],\\ \mathrm{p}_3 = (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2}, & a \in [\mathrm{pr}_3, 1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2] = [\mathrm{pr}_3, \mathrm{pr}_3], \end{cases} \tag{2.4.24}$$

---

[1]) $\mathbb{P}_{(0.1111)}$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1111)}$ обозначают как классы возможностей и вероятностей, так и классы их распределений.

где $\beta_1 > 0$ — любое, $\beta_2 = \beta_1 \ln((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)$, $\beta_2 < \beta_1$, подобно (2.4.20), (2.4.22), (2.4.23)

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{\pi_3}_{(0.111)} = \{\mathrm{p}_1 = 1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 > 0,\ \mathrm{p}_3 = \mathrm{p}_2^{\pi_3}\},\\ &\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3}_{(0.111)} = \{1 = \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3,\ 2\mathrm{pr}_1 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1,\ ,\mathrm{pr}_3 > 0,\\ &\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1 = (\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\pi_3}\},\ \pi_3 = \ln \mathrm{p}_3/\ln \mathrm{p}_2 = \ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_4)/\ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_4) > 1\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

и, подобно (2.4.21), (2.4.21*),

$$\mathbb{P}_{(0.111)} = \bigcup_{\pi_3>1} \mathbb{P}^{\pi_3}_{(0.111)},\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)} = \bigcup_{\pi_3>1} \mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3}_{(0.111)}, \tag{2.4.26}$$

см. рис. 2.4.3, *б*.

На рис. 2.4.4, *а*, *б* представлены графики функций $\widetilde{\gamma}'(\cdot)$, отвечающих другим распределениям $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_4$.

Рассмотрим случай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ подробнее. Заметим, что $\mathbb{P}_{(0.111)}$ — единственный из классов $\mathbb{P}_{(0.001)}, \ldots, \mathbb{P}_{(0.111)}$ Г-эквивалентных возможностей, разбивающийся на попарно непересекающиеся классы $\mathbb{P}^{\pi_3}_{(0.111)}$, $\pi_3 > 1$, $\mathbb{P}^{\pi_3}_{(0.111)} \cap \mathbb{P}^{\pi_3'}_{(0.111)} = \varnothing$, $\pi_3 \neq \pi_3'$, Γ'-эквивалентных возможностей, см. (2.4.26). Например, класс $\mathbb{P}_{(0.011)} \sim \{(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3),\ 0 < \mathrm{p}_3 < \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_1 = 1\}$ Г-эквивалентных возможностей, максимально согласованный с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.011)} \sim \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3),\ 0 < \mathrm{pr}_3 < \mathrm{pr}_2 \leqslant \mathrm{pr}_1 < 1,\ 2\mathrm{pr}_1 \leqslant 1,\ \mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1\}$, см. рис. 2.4.2, определяется классом функций $\widetilde{\gamma}'_{\beta_2}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\beta_2 > 0$,

$$\widetilde{\gamma}'_{\beta_2}(a) = \begin{cases} \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = 1, & a \in [\mathrm{pr}_2, 1],\\ (a/\mathrm{pr}_2)^{\beta_2}, & a \in [0, \mathrm{pr}_2],\\ \mathrm{p}_3 = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_2)^{\beta_2}, & a = \mathrm{pr}_3, \end{cases} \tag{2.4.27}$$

и состоит из Γ'-эквивалентных возможностей, см. рис. 2.4.5, *а*. В этом случае $\pi_3 = \ln \mathrm{p}_3/\ln \mathrm{p}_2 = \infty$.

Класс $\mathbb{P}_{(0.101)} \sim \{(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3,\ 0 < \mathrm{p}_3 = \mathrm{p}_2 < \mathrm{p}_1 = 1)\}$ Г-эквивалентных возможностей, максимально согласованный с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.101)} \sim \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3),\ 0 < \mathrm{pr}_3 \leqslant \mathrm{pr}_2 \leqslant \mathrm{pr}_1 < 1,\ 2\mathrm{pr}_1 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 \leqslant 1,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1\}$, см. рис. 2.4.2, определяется классом функций $\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\beta_1 > 0$,

$$\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(a) = \begin{cases} \mathrm{p}_1 = 1, & a \in [\mathrm{pr}_1, 1],\\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1}, & a \in [1-\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1],\\ \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 = (\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} = ((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1}, & a \in [\mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3, 1-\mathrm{pr}_1],\\ (a/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2}, & a \in [0, \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_3], \end{cases} \tag{2.4.28}$$

и является классом Γ'-эквивалентных возможностей, см. рис. 2.4.5, *б*. В этом случае $\pi_3 = \ln \mathrm{p}_3/\ln \mathrm{p}_2 = 1$.

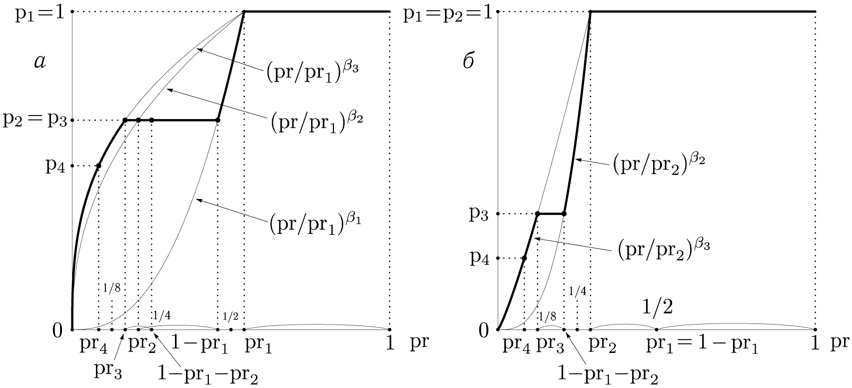


Рис. 2.4.4. *а*) График функции $\widetilde{\gamma}'(\cdot) \in \Gamma'(\mathrm{Pr})$ в случае $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1011)}$: $\mathrm{pr}_1 = 1/2+\varepsilon$, $\mathrm{pr}_2 = 1/4-\varepsilon$, $\mathrm{pr}_3 = 1/8+\varepsilon$, $\mathrm{pr}_4 = 1/8-\varepsilon$, $\varepsilon = 1/24$, когда $\mathrm{p}_1 = (\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} = 1$, $\mathrm{p}_2 = (\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1)^{\beta_2} = ((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3} = \mathrm{p}_3$, $\mathrm{p}_4 = (\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)^{\beta_3}$, где $\beta_2 = \beta_1(\ln((1-\mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_1))$, $\beta_3 = \beta_1(\ln((1 - {}$ ${}- \mathrm{pr}_1)/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1))$, $\beta_1 > 0$. В этом случае $\pi_3 = 1 = \ln \mathrm{p}_3/\ln \mathrm{p}_2$, $\pi_4 = \ln \mathrm{p}_4/\ln \mathrm{p}_3 = \ln(\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1)$, причем $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_4}$, т.е. равенство $\ln(\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1)/\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1) = \pi_4 > 1$ влияет на класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1011)} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}_{0.1011}$, а равенство $\pi_3 = 1$ — нет, а именно класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.1011)}$ состоит из вероятностей, распределения которых содержатся в множестве $\{\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3, \mathrm{pr}_4,\ 2\mathrm{pr}_1 > 1,\ \mathrm{pr}_1 + {}$ ${}+ 2\mathrm{pr}_2 \leqslant 1,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1,\ \mathrm{pr}_4 > 0,\ \mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_1 = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_1)^{\pi_4},\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + {}$ ${}+ \mathrm{pr}_3 + \mathrm{pr}_4 = 1\}$. *б*) График функции $\widetilde{\gamma}'(\cdot) \in \Gamma'(\mathrm{Pr})$ в случае $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.0111)}$: $\mathrm{pr}_1 = 1/2$, $\mathrm{pr}_2 = 1/4+\varepsilon$, $\mathrm{pr}_3 = 1/8$, $\mathrm{pr}_4 = 1/8-\varepsilon$, $\varepsilon = 1/24$, $1 = \mathrm{p}_1 = {}$ ${}= (\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} = \mathrm{p}_2 = (\mathrm{pr}_2/\mathrm{pr}_2)^{\beta_2}$, $\mathrm{p}_3 = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_2)^{\beta_3} = ((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_2)^{\beta_2}$, $\mathrm{p}_4 = (\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_2)^{\beta_3}$, где $\beta_3 = \beta_2 \ln((1-\mathrm{pr}_1-\mathrm{pr}_2)/\mathrm{pr}_2)/\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_2)$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. В этом случае $\pi_3 = \ln \mathrm{p}_3/\ln \mathrm{p}_2 = \infty$, $\pi_4 = \ln \mathrm{p}_4/\ln \mathrm{p}_3 = \ln(\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_2)\ln(\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_2)$ и равенство $\pi_3 = \infty$ не влияет на класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3,\pi_4}_{(0.0111)} = \mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_4}_{(0.0111)} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.0111)}$ вероятностей, распределения которых удовлетворяют условиям $2\mathrm{pr}_1 \leqslant 1$, $\mathrm{pr}_1 + 2\mathrm{pr}_2 > 1$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + 2\mathrm{pr}_3 > 1$, $\mathrm{pr}_4 > 0$, $\mathrm{pr}_4/\mathrm{pr}_2 = (\mathrm{pr}_3/\mathrm{pr}_2)^{\pi_4}$,

$$\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 + \mathrm{pr}_4 = 1$$

Рассмотренные примеры позволяют охарактеризовать схему построения классов возможностей, максимально согласованных с классами вероятностей во втором варианте теории возможностей.

Пусть $\mathbb{P}_{(e)}$ — класс возможностей, максимально согласованный с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ вероятностей в первом варианте теории возможностей, где $e = 0.e_1e_2\ldots$, причем $0 = e_1 = \ldots = e_{k_1}$; $1 = e_{k_1+1} = \ldots = e_{k_2}$; $0 = e_{k_2+1} = \ldots = e_{k_3}$; $1 = e_{k_3+1} = \ldots$ и соответственно в первом варианте

$$1 \overset{e_1}{=} \mathrm{p}_1 \overset{e_2}{=} \mathrm{p}_2 = \ldots \overset{e_k}{=} \mathrm{p}_{k_1} \overset{e_{k_1+1}}{>} \mathrm{p}_{k_1+1} \overset{e_{k_1+2}}{>} \ldots \overset{e_{k_2}}{>} \mathrm{p}_{k_2} \overset{e_{k_2+1}}{=}$$
$$\overset{e_{k_2+1}}{=} \mathrm{p}_{k_2+1} \overset{e_{k_2+2}}{=} \ldots \overset{e_{k_3}}{=} \mathrm{p}_{k_3} \overset{e_{k_3+1}}{>} \mathrm{p}_{k_3+1} \overset{e_{k_3+2}}{>} \ldots$$

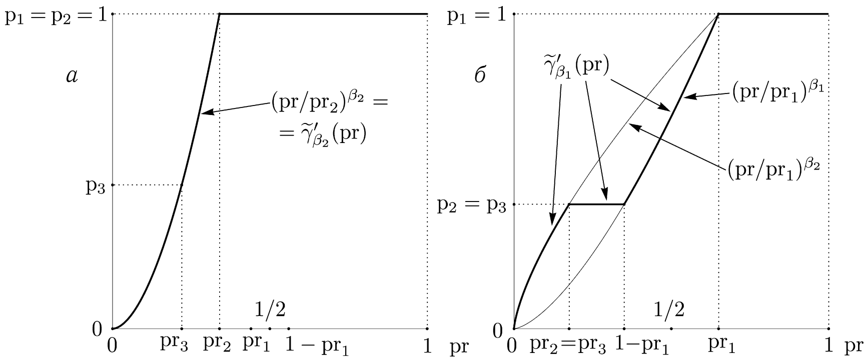


Рис. 2.4.5. Графики функций *а*) $\widetilde{\gamma}'_{\beta_2}(\cdot)$ (2.4.27); *б*) $\widetilde{\gamma}'_{\beta_1}(\cdot)$ (2.4.28)

В таком случае

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p}_1 = (\mathrm{pr}_1/\mathrm{pr}_1)^{\beta_1} = \ldots = \mathrm{p}_{k_1} = (\mathrm{pr}_{k_1}/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_1}} = 1,\\
&\mathrm{p}_{k_1+1} = (\mathrm{pr}_{k_1+1}/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_1+1}} = ((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_1})/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_1}},\\
&\mathrm{p}_{k_1+2} = (\mathrm{pr}_{k_1+2}/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_1+2}} = ((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_1+1})/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_1+1}},\\
&\ldots,\\
&\mathrm{p}_{k_2} = (\mathrm{pr}_{k_2}/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_2}} = ((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_2-1})/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_2-1}} =\\
=\ &\mathrm{p}_{k_2+1} = (\mathrm{pr}_{k_2+1}/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_2+1}} = ((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_2})/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_2}} =\\
=\ &\ldots = \mathrm{p}_{k_3} = (\mathrm{pr}_{k_3}/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_3}} = ((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_3-1})/\mathrm{pr}_{k_1})^{\beta_{k_3-1}};\\
&\mathrm{p}_{k_3+1} = \ldots,
\end{aligned}
$$

причем

$$
\begin{aligned}
&\pi_1,\ldots,\pi_{k_1}\ \text{не определены},\ \pi_{k_1+1}=\infty,\\
&\pi_{k_1+2} = \frac{\ln \mathrm{p}_{k_1+2}}{\ln \mathrm{p}_{k_1+1}} = \frac{\ln((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_1+1})/\mathrm{pr}_{k_1})}{\ln(\mathrm{pr}_{k_1+1}/\mathrm{pr}_{k_1})},\\
&\ldots,\\
&\pi_{k_2} = \frac{\ln \mathrm{p}_{k_2}}{\ln \mathrm{p}_{k_2-1}} = \frac{\ln((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_2-1})/\mathrm{pr}_{k_1})}{\ln(\mathrm{pr}_{k_2-1}/\mathrm{pr}_{k_1})};\\
&\begin{cases}
1 = \pi_{k_2+1} = \dfrac{\ln \mathrm{p}_{k_2+1}}{\ln \mathrm{p}_{k_2}} > \dfrac{\ln((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_2})/\mathrm{pr}_{k_1})}{\ln(\mathrm{pr}_{k_2}/\mathrm{pr}_{k_1})},\\
\ldots,\\
1 = \pi_{k_3} = \dfrac{\ln \mathrm{p}_{k_3}}{\ln \mathrm{p}_{k_3-1}} > \dfrac{\ln((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_3-1})/\mathrm{pr}_{k_1})}{\ln(\mathrm{pr}_{k_3-1}/\mathrm{pr}_{k_1})};
\end{cases}\\
&\pi_{k_3+1} = \frac{\ln \mathrm{p}_{k_3+1}}{\ln \mathrm{p}_{k_3}} = \frac{\ln((1-\mathrm{pr}_1-\ldots-\mathrm{pr}_{k_3})/\mathrm{pr}_{k_1})}{\ln(\mathrm{pr}_{k_3}/\mathrm{pr}_{k_1})},\\
&\pi_{k_3+2} = \ldots,
\end{aligned}
$$

где условия, выделенные фигурной скобкой, удовлетворяются «автоматически»: $\mathrm{Pr}_{(e)}^{\pi_{k_1+2},\ldots,\pi_{k_2},\pi_{k_2+1},\ldots,\pi_{k_3},\pi_{k_3+1},\ldots} = \mathrm{Pr}_{(e)}^{\pi_{k_1+2},\ldots,\pi_{k_2},\pi_{k_3+1},\ldots}$.

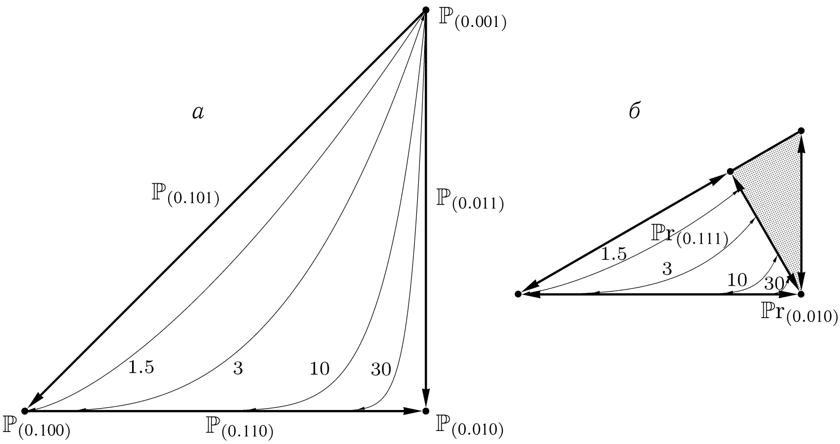


Рис. 2.4.6. *а*) Классы $\mathbb{P}^{\pi_3}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}_{(0.111)}$, $\pi_3 = 1.5, 3, 10, 30$, в (2.4.25) Γ'-инвариантных возможностей. Остальные классы $\mathbb{P}_{(e)}$, $e \neq 0.111$, Γ-эквивалентных возможностей совпадают с классами Γ'-эквивалентных возможностей; *б*) классы $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.111)}$, $\pi_3 = 1.5, 3, 10, 30$, в (2.4.25), с которыми максимально согласованы классы $\mathbb{P}^{\pi_3}_{(0.111)} \subset \mathbb{P}_{(0.111)}$, $\pi_3 = 1.5, 3, 10, 30$. Остальные классы $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \neq 0.111$, в первом и во втором вариантах совпадают, ср. с рис. 2.4.2

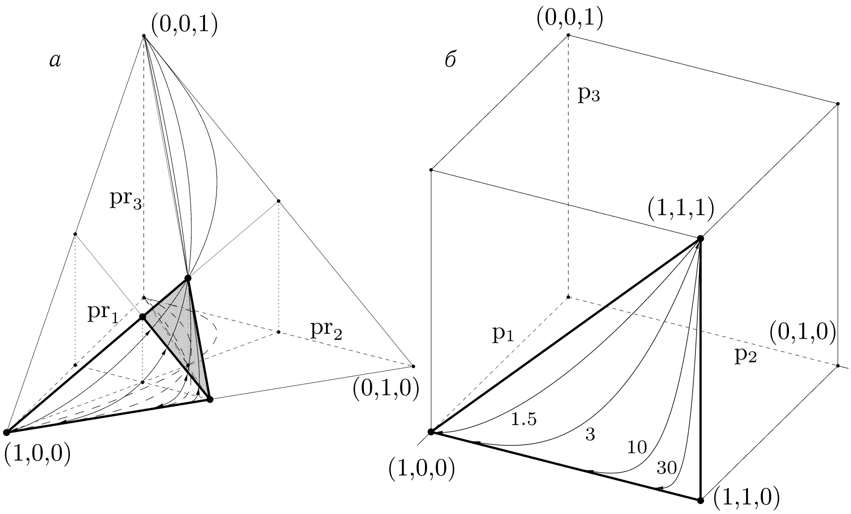


Рис. 2.4.7. *а*) «Пространственная» картина классов $\mathbb{P}\mathrm{r}^{\pi_3}$, $\pi_3 = 1.5$, 3, 10, 30, на «треугольнике вероятностей» $\mathrm{pr}_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, 3$, $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1$, см. рис. 2.0.1, 2.0.2, *а*; *б*) «пространственная» картина классов $\mathbb{P}^{\pi_3}$, $\pi_3 = 3/2$, 3, 10, 30, на «поверхности куба» возможностей, см. рис. 2.0.2, *б*

Классы Γ'-эквивалентных возможностей и соответствующие классы вероятностей изображены на рис. 2.4.6, их «пространственные» картины изображены на рис. 2.4.7.

2.5. Классы возможностей $\mathbb{P}_*$ и вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ и их когерентные разбиения

Обратимся теперь к классу «всех возможностей» и уточним его структуру. Обозначим $\mathbb{P}_*$ класс возможностей, *распределение каждой из которых может быть линейно упорядочено по невозрастанию* путем перенумерации элементарных событий $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots$ Распределение $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ назовем *упорядочиваемым по невозрастанию*, если существует биекция [1] $i.: \{1, 2, \ldots\} \to \{1, 2, \ldots\}$, такая, что $\mathrm{p}_{i_1} \geqslant \mathrm{p}_{i_2} \geqslant \ldots$; функцию $i.$ назовем *упорядочивающей* распределение $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ по невозрастанию [2].

2.5.1. Матричное представление упорядоченности распределения. Конкретная линейная упорядоченность распределения $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots$ возможностей характеризуется двоичным числом $e = 0.e_1e_2\ldots$, см. введение. Упорядоченность произвольного распределения $\mathrm{p}_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots$, может быть охарактеризована *матрицей парных сравнений* его элементов.

Пусть $\mathrm{p}.$ — распределение $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$, что будем записывать также в виде $\mathrm{p}.: \{1, 2, \ldots\} \to [0, 1]$, $\mathrm{p}. \sim \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$, или $\mathrm{p}. \sim \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots$ Рассмотрим матрицу $m(\mathrm{p}.)$, матричные элементы которой суть [3]

$$(m(\mathrm{p}.))_{ij} \equiv m_{ij}(\mathrm{p}.) = (\mathrm{p}_i; \mathrm{p}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_j, \\ 0, & \text{если } \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots \\ -1, & \text{если } \mathrm{p}_i < \mathrm{p}_j, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Если $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$, то для распределения $\mathrm{p}. \sim p_1, \ldots, \mathrm{p}_k$ следует учесть «краевые условия», а именно, что $\mathrm{p}_0 \equiv 1 \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{p}_i \geqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{p}_i \geqslant \geqslant 0 \equiv \mathrm{p}_{k+1}$. Но поскольку, на самом деле, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{p}_i = 1$, то учесть следует лишь условие $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathrm{p}_i \geqslant 0 \equiv \mathrm{p}_{k+1}$, согласно которому в случае $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ $m(\mathrm{p}.)$ суть $(k \times 1) \times (k \times 1)$-матрица.

---

[1] Биекция — взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, при котором каждый элемент Y является образом некоторого и притом единственного элемента X.

[2] Пример неупорядочиваемого по невозрастанию распределения: $0 \leqslant \mathrm{p}_1 \leqslant \mathrm{p}_2 \leqslant \ldots$, $\lim\limits_{i \to \infty} \mathrm{p}_i = 1$.

[3] Равенство $m_{ij}(\mathrm{p}.) = (\mathrm{p}_i; \mathrm{p}_j)$ означает, что матричный элемент m_{ij} определяется упорядоченностью пары $\mathrm{p}_i, \mathrm{p}_j$. Вместо (2.5.1) можно определить $m_{ij}(\mathrm{p}.) = 1$, если $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_j$, и $m_{ij}(\mathrm{p}.) = 0$, если $\mathrm{p}_i \leqslant \mathrm{p}_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$

Согласно равенствам (2.5.1) матрица $m(\mathrm{p.})$ обладает следующими свойствами: для $m_{ij} \equiv (m(\mathrm{p.}))_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$,

1. $m_{ij} = -m_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ (кососимметричность),
2. $m_{ij} \geqslant 0$, $m_{jk} \geqslant 0 \Rightarrow m_{ik} = \max(m_{ij}, m_{jk})$, $i, j, k = 1, 2, \ldots$ (транзитивность), и, как следствие 1,
   $m_{ij} \leqslant 0$, $m_{jk} \leqslant 0 \Rightarrow m_{ik} = \min(m_{ij}, m_{jk})$, $i, j, k = 1, 2, \ldots$

Например, если $\mathrm{p.} \sim \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 > \mathrm{p}_4 \ldots$ или $\widetilde{\mathrm{p}}. \sim 0{,}3,\ 0{,}6,\ 0{,}1,\ 0{,}0,\ \ldots$, то соответственно

$$m(\mathrm{p.}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad m(\widetilde{\mathrm{p}}.) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.5.2}$$

Матрица $m(\mathrm{p.})$ *определяется упорядоченностью распределения* $\mathrm{p.} \sim \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$ *и определяет его упорядоченность.*

Пусть Γ — группа изотонных преобразований $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$, $\mathbf{p}$ — класс всех распределений $\mathrm{p.}\colon \{1, 2, \ldots\} \to [0,1]$, $\widetilde{\mathbf{p}}$ — класс распределений $\widetilde{\mathrm{p}}.$, упорядочиваемых по невозрастанию, $\widetilde{\mathbf{p}} \subset \mathbf{p}$, $\mathbf{m}$ — класс всех кососимметрических матриц m, элементы которых $m_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Для любой функции $m(\cdot)\colon \mathbf{p} \to \mathbf{m}$ определим группу [1] $\Gamma *$ преобразований $\gamma * m(\mathrm{p.}) \triangleq m(\gamma^{-1} \circ \mathrm{p.})$, $\mathrm{p.} \in \mathbf{p}$, где $\gamma^{-1} \circ \mathrm{p.} \equiv (\gamma^{-1} \circ \mathrm{p}). \sim \gamma^{-1}(\mathrm{p}_1), \gamma^{-1}(\mathrm{p}_2), \ldots$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

Функция $m(\cdot)$, *определенная равенствами* (2.5.1), *инвариантна относительно преобразований* $m(\cdot) \to \gamma * m(\cdot)$, *так как* $m(\gamma^{-1} \circ \mathrm{p.}) = m(\mathrm{p.})$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

Наоборот, если для $\mathrm{p}.^{(1)} \in \mathbf{p}$ и $\mathrm{p}.^{(2)} \in \mathbf{p}$ $m(\mathrm{p}.^{(1)}) = m(\mathrm{p}.^{(2)})$, то, очевидно, найдется функция $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ такая, что $\mathrm{p}.^{(2)} = \gamma \circ \mathrm{p}.^{(1)}$. Более того, если *для любого* распределения $\mathrm{p.} \in \mathbf{p}$ $m(\gamma \circ \mathrm{p.}) = m(\mathrm{p.})$, где функция $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ непрерывна и удовлетворяет условиям $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, то $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, причем Γ — класс всех таких функций. Действительно, согласно определению (2.5.1) равенство $m(\gamma \circ \mathrm{p}) = m(\mathrm{p.})$ означает, что для любых $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2 \in [0,1]$, если $\mathrm{p}_1 \leqslant \mathrm{p}_2$, то $\gamma(\mathrm{p}_1) \leqslant \gamma(\mathrm{p}_2)$, поэтому $m(\mathrm{p.})$ определяет упорядоченность распределения $\mathrm{p.} \sim \mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \ldots$, а само распределение $\mathrm{p.}$ определяет с точностью до преобразования $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

В случае линейно упорядоченных распределений

$$\begin{matrix} e(\mathrm{p.}) = & 0 & . & e_1(\mathrm{p.}) & & e_2(\mathrm{p.}) & \ldots \\ \mathrm{p.} \sim 1 & = & \mathrm{p}_1 & \geqslant & \mathrm{p}_2 & \geqslant & \ldots \end{matrix} \tag{2.5.3}$$

---

[1] $\gamma_2 * (\gamma_1 * m(\mathrm{p.})) = \gamma_2 * (m(\gamma_1^{-1} \circ \mathrm{p.})) = m(\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2^{-1} \circ \mathrm{p.}) = m((\gamma_2 \circ \gamma_1)^{-1} \circ \mathrm{p.})$.

матрица $m(\mathrm{p.})$ определяется двоичным числом $e(\mathrm{p.}) = 0.e_1(\mathrm{p.})e_2(\mathrm{p.})\ldots$, ибо в этом случае $e_i(\mathrm{p.}) = m_{i\,i+1}(\mathrm{p.})$, $i = 1, 2, \ldots$, т. е. известны матричные элементы $m(\mathrm{p.})$ над главной диагональю, а остальные, как нетрудно заметить, полностью ими определяются, а именно, линейная упорядоченность в (2.5.3), охарактеризованная двоичным числом $e = 0.e_1e_2\ldots \in (0, 1)$, охарактеризована и матрицей $m \in \mathbf{m}$, матричные элементы которой заданы равенствами [1])

$$m_{i,i+k} = \max\{e_i, \ldots, e_{i+k-1}\},\ k = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots \tag{2.5.4}$$

Вдоль главной диагонали любой матрицы, определенной условиями (2.5.4), расположены блоки нулевых квадратных матриц, над (под) ними все матричные элементы равны 1 (-1), см. $m(\mathrm{p.})$ в (2.5.2). Класс кососимметрических матриц $m \in \mathbf{m}$, после некоторой перестановки их строк и такой же перестановки столбцов удовлетворяющих условиям (2.5.4), обозначим $M_{(e)}$, а матрицу $m \in M_{(e)}$, удовлетворяющую условию (2.5.4), отметим как $m \sim e$ (m эквивалентна e), $e \in (0, 1)$, наконец, $M = \bigcup\limits_{e\in(0,1)} M_{(e)}$.

Пусть $\pi(\cdot)\colon \{1, 2, \ldots\} \to \{1, 2, \ldots\}$ — перестановка, преобразующая упорядочиваемое по невозрастанию распределение $\widetilde{\mathrm{p}}.\colon \{1, 2, \ldots\} \to [0, 1]$ в линейно упорядоченное распределение $\mathrm{p.}\colon \{1, 2, \ldots\} \to [0, 1]$, т. е. пусть [2])

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{p}} \in \widetilde{\mathbf{p}},\ \widetilde{\mathrm{p}}_i,\ i = 1, 2, \ldots, \to \mathrm{p}_i = (\pi \circ \widetilde{\mathrm{p}})_i \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(i)},\ i = 1, 2, \ldots,\\ &\widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(1)} \geqslant \widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(2)} \geqslant \ldots\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Преобразование в (2.5.5) можно представить в матричной форме

$$\begin{aligned}&(\widetilde{\mathrm{p}}_1\,\widetilde{\mathrm{p}}_2\ \ldots) \to (\widetilde{\mathrm{p}}_1\,\widetilde{\mathrm{p}}_2\ \ldots)\begin{pmatrix}\pi_{11} & \pi_{12} & \ldots\\ \pi_{21} & \pi_{22} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}^{-1} =\\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{p}}_k \pi^-_{k1} \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{p}}_k \pi^-_{k2} \ldots\right) = (\mathrm{p}_1\,\mathrm{p}_2\ \ldots),\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

---

[1]) Упорядоченность $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_k \geqslant \mathrm{p}_{k+1} = 0 = \mathrm{p}_{k+2} = \ldots$ определяется $e = 0.e_1\ldots e_k \in \{2^{-k}, 2^{-k} + 2^{-k+1}, \ldots, 1 - 2^{-k}\}$ и $(k+1) \times (k+1)$ матрицей m, у которой $m_{i\,i+1} = e_i$, $i = 1, \ldots, k$.

[2]) Такое определение обусловлено групповым свойством преобразования в (2.5.5): $((\pi_1 \circ \pi_2) * \widetilde{\mathrm{p}}). = (\pi_1 * \widetilde{\mathrm{p}})_{\pi_2^{-1}(\cdot)} = \widetilde{\mathrm{p}}_{(\pi_2^{-1} \circ \pi_1^{-1})(\cdot)} = \widetilde{\mathrm{p}}_{(\pi_1\circ\pi_2)^{-1}(\cdot)}$. Класс Π всех перестановок π, очевидно, является некоммутативной группой относительно композиции $\pi_1 \circ \pi_2$ перестановок π_1 и π_2.

где

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{-1} = \Pi^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} \pi_{11}^{-} & \pi_{12}^{-} & \dots \\ \pi_{21}^{-} & \pi_{22}^{-} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \Pi^{+} = \\ = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \dots \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.5.7}$$

Π, $\Pi^{-1} = \Pi^{+} = \Pi^{\text{тр}}$ — матрицы перестановок [1)], соответствующие перестановкам π и π^{-1} в (2.5.5), причем в (2.5.6)

$$\begin{gathered} \mathrm{p}_i = \widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{p}}_k \pi_{ki}^{-} = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{ik} \widetilde{\mathrm{p}}_k,\ i = 1, 2, \dots, \\ \pi_{ki}^{-} = \pi_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если } k = \pi^{-1}(i), \\ 0, \text{ если } k \neq \pi^{-1}(i), \end{cases} \quad i, k = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{2.5.8}$$

Аналогично (2.5.5) определим преобразование $\mathrm{m}_{\cdot\cdot} \to (\pi * \mathrm{m} * \pi^{-1})_{\cdot\cdot}$ матриц $\mathrm{m} \in M$, рассматриваемых как функции $\mathrm{m}_{\cdot\cdot}\colon \{1, 2, \dots\}^2 \to \to \{-1, 0, 1\}$,

$$\mathrm{m}_{ij} \to (\pi * \mathrm{m} * \pi^{-1})_{ij} \triangleq \mathrm{m}_{\pi^{-1}(i)\pi^{-1}(j)} = (\Pi \mathrm{m} \Pi^{+})_{ij},\ i, j = 1, 2, \dots, \tag{2.5.9}$$

где перестановка π и матрица Π согласованы как в (2.5.7), (2.5.8). В частности, так как по определению (2.5.1) $(\mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.))_{ij} = (\widetilde{\mathrm{p}}_i; \widetilde{\mathrm{p}}_j)$, $i, j = = 1, 2, \dots$, и согласно (2.5.9)

$$\begin{gathered} (\pi * \mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.) * \pi^{-1})_{ij} = (\mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.))_{\pi^{-1}(i)\pi^{-1}(j)} = (\widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(i)}; \widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(j)}) = \\ = ((\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_i; (\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_j) = (\mathrm{m}(\pi * \widetilde{\mathrm{p}}).)_{ij},\ i, j = 1, 2, \dots, \end{gathered}$$

то матрица $\pi * \mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.) * \pi^{-1}$ получается из матрицы $m(\widetilde{\mathrm{p}}.)$ перестановкой строк и столбцов последней, такой же, как перестановка $\pi * \widetilde{\mathrm{p}}.$ элементов распределения $\widetilde{\mathrm{p}}.$, а именно,

$$\widetilde{\mathrm{p}}. \to \pi * \widetilde{\mathrm{p}}. \Leftrightarrow \mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}. \to \pi * \mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.) \circ \pi^{-1} = \mathrm{m}(\pi * \widetilde{\mathrm{p}}.). \tag{2.5.10}$$

[1)] В любой строке и в любом столбце Π один матричный элемент равен единице, остальные — нулю. Например, если $\widetilde{\mathrm{p}} = (\widetilde{\mathrm{p}}_1, \widetilde{\mathrm{p}}_2, \widetilde{\mathrm{p}}_3)$, $(\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_1 \triangleq \widetilde{\mathrm{p}}_1 - 1 = \widetilde{\mathrm{p}}_2$, $(\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_2 = \widetilde{\mathrm{p}}_3$, $(\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_3 = \widetilde{\mathrm{p}}_1$, то $\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\big((\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_1 (\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_2 (\pi * \widetilde{\mathrm{p}})_3\big) = (\widetilde{\mathrm{p}}_2 \widetilde{\mathrm{p}}_3 \widetilde{\mathrm{p}}_1) = (\widetilde{\mathrm{p}}_1 \widetilde{\mathrm{p}}_2 \widetilde{\mathrm{p}}_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\Pi = (\Pi^{-1})^{\text{тр}} = = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\widetilde{\mathrm{p}}_1 \widetilde{\mathrm{p}}_2 \widetilde{\mathrm{p}}_3) = (\widetilde{\mathrm{p}}_2 \widetilde{\mathrm{p}}_3 \widetilde{\mathrm{p}}_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Поэтому для любого распределения $\widetilde{\mathrm{p}}. \in \widetilde{\mathbf{p}}$ существует перестановка $\pi \in \Pi$ такая, что

$$\widetilde{\mathrm{p}}. \to \pi * \widetilde{\mathrm{p}}. = \mathrm{p}. \sim 1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots, \tag{2.5.11}$$

$$\mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.) \to \pi * \mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.) * \pi^{-1} = \mathrm{m}(\pi * \widetilde{\mathrm{p}}.) = \mathrm{m}(\mathrm{p}.) \sim e(\mathrm{p}.). \tag{2.5.12}$$

В частности,

$$M_{(e)} = \{\mathrm{m} \in M,\ \exists \pi\ \ \pi * \mathrm{m} * \pi^{-1} \sim e\},\ e \in [0, 1].$$

2.5.2. Когерентные разбиения классов $\mathbb{P}_*$ и $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$. Обозначим $\mathbb{P}_*$ класс возможностей $\widetilde{\mathrm{P}}$, распределение $\widetilde{\mathrm{p}}_1, \widetilde{\mathrm{p}}_2, \ldots$ каждой из которых линейно упорядочиваемо по невозрастанию. Иначе говоря, пусть $\mathbb{P}_* = \{\widetilde{\mathrm{p}},\ \widetilde{\mathrm{p}}. \in \widetilde{\mathbf{p}}\} \equiv \{\widetilde{\mathrm{p}},\ \mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.) \in M\}$, $\mathbb{P}_\mathrm{m}$ — класс эквивалентных возможностей, распределения $\widetilde{\mathrm{p}}.$ которых одинаково упорядочены согласно условию $\mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}.) = \mathrm{m} \in M$. Поскольку $\mathbb{P}_\mathrm{m} \cap \mathbb{P}_{\mathrm{m}'} = \varnothing$, $\mathrm{m} \neq \mathrm{m}'$, то

$$\mathbb{P}_* = \bigcup_{\mathrm{m} \in M} \mathbb{P}_\mathrm{m} = \bigcup_{e \in (0,1)} \ \bigcup_{\mathrm{m} \in M_{(e)}} \mathbb{P}_\mathrm{m} \tag{2.5.13}$$

— разбиение $\mathbb{P}_*$ на классы $\mathbb{P}_\mathrm{m}$, $\mathrm{m} \in M$, эквивалентных возможностей.

Разбиению (2.5.13) соответствует разбиение класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ *всех вероятностей*

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_* = \bigcup_{\mathrm{m} \in M} \mathbb{P}\mathrm{r}_\mathrm{m} = \bigcup_{e \in (0,1)} \ \bigcup_{\mathrm{m} \in M_{(e)}} \mathbb{P}\mathrm{r}_\mathrm{m}, \tag{2.5.14}$$

образующее с (2.5.13) *когерентную пару*; в (2.5.14) $\mathbb{P}\mathrm{r}_\mathrm{m}$ — класс всех вероятностей, с каждой из которых максимально согласована любая возможность из $\mathbb{P}_\mathrm{m}$, т. е. класс $\mathbb{P}_\mathrm{m}$ и любая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_\mathrm{m}$ $\mathbb{P}\mathrm{r}_\mathrm{m}$-измеримы, класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_\mathrm{m}$ и любая вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_\mathrm{m}$ являются стохастическими моделями класса $\mathbb{P}_\mathrm{m}$ и любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_\mathrm{m}$ соответственно, $\mathrm{m} \in M$.

Утверждения о максимальной согласованности возможностей $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_\mathrm{m}$ с вероятностями $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_\mathrm{m}$ требуют уточнений.

Пусть

$$\mathrm{m}(\widetilde{\mathrm{p}}\cdot) = \mathrm{m} \in M_{(e)},\ \mathrm{m}(\mathrm{p}.) = \mathrm{m}_{(e)} \sim e \in (0, 1) \tag{2.5.15}$$

(т. е. $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbb{P}_\mathrm{m}$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{\mathrm{m}_{(e)}} \equiv \mathrm{P}_{(e)}$), π — перестановка, для которой согласно (2.5.11) и (2.5.15)

$$\mathrm{m} = \pi^{-1} * \mathrm{m}_{(e)} * \pi, \tag{2.5.16}$$

и $\pi_\mathrm{m} \subset \Pi_\mathrm{m}$ — класс перестановок, удовлетворяющих условию (2.5.16), согласно которому для любых $\pi_1, \pi_2 \in \Pi_\mathrm{m}$

$$(\pi_1^{-1} \circ \pi_2) * \mathrm{m} * (\pi_1^{-1} \circ \pi_2)^{-1} = \mathrm{m} \tag{2.5.17}$$

и, следовательно, для любой последовательности $\widetilde{\mathrm{p}}.$ в (2.5.15)

$$((\pi_1^{-1} \circ \pi_2) * \widetilde{\mathrm{p}})\cdot = \widetilde{\mathrm{p}}\cdot \tag{2.5.18}$$

Определим [1])

$$\pi * \mathrm{P}(\{\omega_i\}) \triangleq \mathrm{P}(\{\omega_{\pi^{-1}(i)}\}) = \mathrm{p}_{\pi^{-1}(i)} = (\pi * \mathrm{p})_i, \tag{2.5.19}$$
$$\pi * \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}) \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_{\pi^{-1}(i)}\}) = \mathrm{pr}_{\pi^{-1}(i)} = (\pi * \mathrm{pr})_i,\ i = 1, 2, \ldots,$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathrm{m}} &= \bigcup_{\pi \in \Pi_{\mathrm{m}}} \{\pi * \mathrm{P},\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}\} \triangleq \bigcup_{\pi \in \Pi_{\mathrm{m}}} \pi * \mathbb{P}_{(e)},\\ \mathbb{P}\mathrm{r}_{\mathrm{m}} &= \bigcup_{\pi \in \Pi_{\mathrm{m}}} \{\pi * \mathrm{Pr},\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\} \triangleq \bigcup_{\pi \in \Pi_{\mathrm{m}}} \pi * \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)},\ \mathrm{m} \in M_{(e)}, \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

и в (2.5.13), (2.5.14), см. рис. 2.5.1,

$$\mathbb{P}_* = \bigcup_{e \in (0,1)} \bigcup_{\mathrm{m} \in M_{(e)}} \bigcup_{\pi \in \Pi_{\mathrm{m}}} \pi * \mathbb{P}_{(e)}, \tag{2.5.13*}$$

$$\mathbb{P}\mathrm{r}_* = \bigcup_{e \in (0,1)} \bigcup_{\mathrm{m} \in M_{(e)}} \bigcup_{\pi \in \Pi_{\mathrm{m}}} \pi * \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}. \tag{2.5.14*}$$

Так как $\forall e \in (0,1)$ $\forall \mathrm{m} \in M_{(e)}$ $\forall \widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbb{P}_{\mathrm{m}}$ $\forall \widetilde{\mathrm{Pr}} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{\mathrm{m}}$ $\exists \pi_1, \pi_2 \in \Pi_{\mathrm{m}}$, согласно (2.5.19), (2.5.20),

$$\begin{gathered} \pi_1 * \widetilde{\mathrm{P}} = \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)},\ \pi_2 * \widetilde{\mathrm{Pr}} = \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)},\\ \exists \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}) \quad \mathrm{P} = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}, \end{gathered} \tag{2.5.21}$$

то

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{P}} &= \pi_1^{-1} * \mathrm{P} = \pi_1^{-1} * (\widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}) = \pi_1^{-1} * (\widetilde{\gamma} \circ (\pi_2 * \widetilde{\mathrm{Pr}})) =\\ &= \widetilde{\gamma} \circ ((\pi_1^{-1} \circ \pi_2) * \widetilde{\mathrm{Pr}}) = \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\mathrm{Pr}},\ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}) = \widetilde{\Gamma}(\pi_2 * \widetilde{\mathrm{Pr}}), \end{aligned} \tag{2.5.22}$$

ибо, согласно (2.5.18), (2.5.19), $\forall \pi_1, \pi_2 \in \Pi_{\mathrm{m}}$ $\forall \widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbb{P}_{\mathrm{m}}$ $\forall \widetilde{\mathrm{Pr}} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{\mathrm{m}}$ $(\pi_1^{-1} \circ \pi_2) * \widetilde{\mathrm{P}} = \widetilde{\mathrm{P}}$ и $(\pi_1^{-1} \circ \pi_2) * \widetilde{\mathrm{Pr}} = \widetilde{\mathrm{Pr}}$. Так как, согласно (2.5.22), $\widetilde{\mathrm{P}} = \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\mathrm{Pr}}$, $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}(\pi_2 * \widetilde{\mathrm{Pr}})$, то в этом смысле следует понимать сказанное о максимальной согласованности $\widetilde{\mathbb{P}\mathrm{r}} \approx> \widetilde{\mathrm{P}}$, $\widetilde{\mathrm{Pr}} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{\mathrm{m}}$, $\widetilde{\mathrm{P}} \in \mathbb{P}_{\mathrm{m}}$, $\mathrm{m} \in M$.

Замечание 2.5.1. Перестановка $\pi(\cdot) = \pi_m(\cdot)$, упорядочивающая $\widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(1)} \geqslant \widetilde{\mathrm{p}}_{\pi^{-1}(2)} \geqslant \ldots$, определяется матрицей $m(\widetilde{\mathrm{p}}.)$:

$$\pi^{-1}(1) = j_1 = \lim_{s \to \infty} \operatorname*{argmax}_{j=1,\ldots,s} \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(\widetilde{\mathrm{p}}.),$$
$$\pi^{-1}(2) = j_2 = \lim_{s \to \infty} \operatorname*{argmax}_{\substack{j=1,\ldots,s\\ j \neq j_1}} \sum_{k=1}^{s} m_{jk}(\widetilde{\mathrm{p}}.),$$
$$\ldots$$

[1]) Значения $\pi * \mathrm{P}(\cdot)$ и $\pi * \mathrm{Pr}(\cdot)$ на $\mathcal{P}(\Omega)$ определим как значения $\mathrm{P}(\cdot)$ и $\mathrm{Pr}(\cdot)$ на $\mathcal{P}(\pi * \Omega) \triangleq \mathcal{P}(\{\omega_{\pi^{-1}(1)}, \omega_{\pi^{-1}(2)}, \ldots\})$.

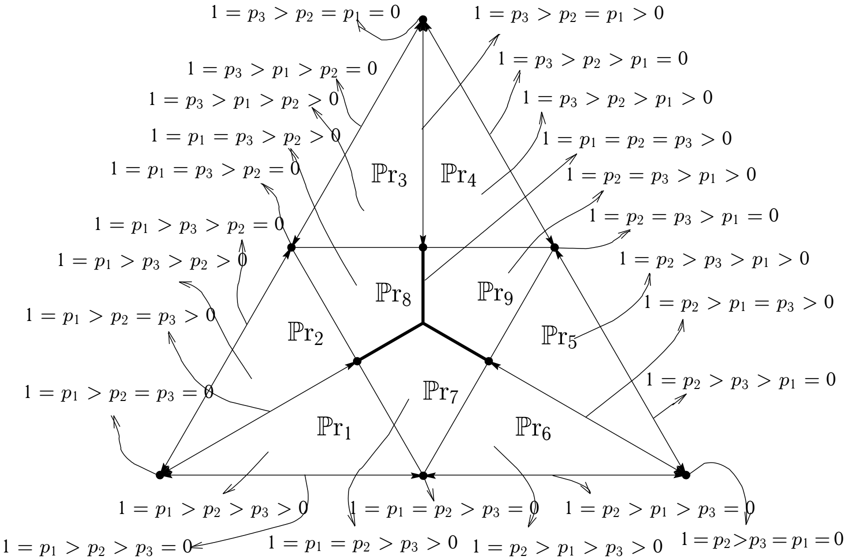


Рис. 2.5.1. Двадцать пять подмножеств $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$, образующих разбиение (2.5.14), и соответствующие им условия упорядоченности возможностей $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3$, определяющие классы эквивалентности возможностей в (2.5.13). Среди двадцати пяти подмножеств девять, имеющих «положительную площадь», суть $\mathbb{P}\mathrm{r}_1, \mathbb{P}\mathrm{r}_2, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_9$, см. лемму 3.9.1 гл. 3

На рис. 2.5.1 изображен «треугольник всех вероятностей» $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ в случае $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, представленный в виде объединения двадцати пяти непересекающихся подмножеств, каждому из которых сопоставлен класс возможностей, определенный условиями конкретной упорядоченности возможностей p_i, $i = 1, 2, 3$, элементарных событий, — всего 25 попарно различных классов эквивалентных возможностей, см. лемму 3.9.1 гл. 3.

2.6. Класс возможностей, согласованный в существенном с классом вероятностей

Рассмотрим класс

$$\mathcal{P}r_\varphi = \{(\mathcal{R}^n, \mathcal{B}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(t)}),\ t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi\} \tag{2.6.1}$$

вероятностных пространств, ассоциированных с функцией $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to$ $\to [0, 1]$, определяющей класс вероятностей

$$\mathbf{Pr}^{(\varphi)} = \{\mathrm{Pr}^{(t)},\ t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi\}, \tag{2.6.2}$$

где $\mathcal{B}^{(n)}$ — σ-алгебра измеримых (по Лебегу) множеств $A \subset \mathcal{R}^n$, вероятность $\mathrm{Pr}^{(t)}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега с плотностью $\rho^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to [0,\infty]$, определенной равенством

$$\rho^{(t)}(x) = t(\varphi(x)), \quad x \in \mathcal{R}^n, \tag{2.6.3}$$

в котором функция $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to [0,1]$ измерима и удовлетворяет условиям: $\sup\limits_{x\in\mathcal{R}^n} \varphi(x) = 1$ и для некоторого $a \in [0,1)$ множество $\{x \in \mathcal{R}^n,\ \varphi(x) \geqslant a\}$ — ограниченное, а функция $t(\cdot)\colon [0,1] \to [0,\infty]$ монотонно не убывает и удовлетворяет условию нормировки $\int\limits_{\mathcal{R}^n} t(\varphi(x))dx = 1$; класс всех таких функций обозначен $\mathcal{T}_\varphi$, очевидно, $\mathcal{T}_\varphi \neq \varnothing$. При этом

$$\mathrm{Pr}^{(t)}(A) = \int\limits_A \rho^{(t)}(x)dx, \quad A \in \mathcal{B}^{(n)}. \tag{2.6.4}$$

Сопоставим классу $\mathcal{P}r_\varphi$ класс

$$\mathbf{P}_\varphi = \{(\mathcal{R}^n, \mathcal{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{P}^{(s)}), \quad \mathrm{P}^{(s)} \in \mathbf{P}^{(\varphi)}\} \tag{2.6.5}$$

пространств с возможностью, ассоциированных с функцией $\varphi(\cdot)$, определяющей класс $\mathbf{P}^{(\varphi)}$ возможностей, каждая из которых задана распределением

$$g^{(s)}(x) = s(\varphi(x)),\ x \in \mathcal{R}^n, \tag{2.6.6}$$

в котором $s(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ — некоторая монотонно неубывающая непрерывная на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условиям $s(0) = 0$, $s(1) = 1$; класс всех таких функций обозначим $\mathcal{S}_\varphi$.

При этом

$$\mathrm{P}^{(s)}(A) = \sup_{x\in A} g^{(s)}(x),\ A \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^n). \tag{2.6.7}$$

Связь между классами возможностей $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)$ и вероятностей $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)$ не так проста, как в случае счетного Ω, и, вообще говоря, не определяет согласованность $\mathbf{P}^{(\varphi)}$ с $\mathbf{Pr}^{(\varphi)}$. Дело в том, что замена множества A на $A\backslash Z$, где Z — подмножество A нулевой меры Лебега, не изменяет значения вероятности $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)$ в (2.6.4): $\mathrm{Pr}^{(t)}(A) = \mathrm{Pr}^{(t)}(A\backslash Z)$, $\mathrm{mes}\, Z = \int\limits_Z dx = 0$, но может изменить значение возможности $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)$ в (2.6.7): $\mathrm{P}^{(s)}(A) \geqslant \mathrm{P}^{(s)}(A\backslash Z)$, $\mathrm{mes}(Z) = 0$.

Следующие факты показывают, что согласованность $\mathbf{P}^{(\varphi)}$ с $\mathbf{Pr}^{(\varphi)}$ в рассматриваемом случае может быть определена на основе конструкции *существенного максимума* (vraimax).

Лемма 2.6.1. *Для любого множества $A \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^n)$ существует множество $A_\varphi \subset A$ такое, что* $\mathrm{mes}(A\backslash A_\varphi) = 0$ *и*

$$\operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) \triangleq \inf_{Z\in\mathcal{Z}_A} \sup_{x\in A\backslash Z} \varphi(x) = \sup_{x\in A_\varphi} \varphi(x), \tag{2.6.8}$$

где $\mathcal{Z}_A$ *— класс подмножеств* A *нулевой меры Лебега*: $\mathcal{Z}_A \triangleq \{Q \subset \subset A,\ \operatorname{mes} Q = 0\}$. *При этом для любого множества* $\widetilde{Z} \in \mathcal{Z}_A$

$$\sup_{x\in A_\varphi\setminus\widetilde{Z}} \varphi(x) = \sup_{x\in A_\varphi} \varphi(x). \tag{2.6.9}$$

Доказательство. Пусть $Z_1, Z_2, \ldots$ — последовательность множеств из $\mathcal{Z}_A$, таких, что $\operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) \leqslant \sup_{x\in A\setminus Z_n} \varphi(x) \leqslant \operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) + 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда для $A_\varphi = A \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\Big)$ и любого $n = 1, 2, \ldots$ $\operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) \leqslant \sup_{x\in A_\varphi} \varphi(x) \leqslant \sup_{x\in A\setminus Z_n} \varphi(x) \leqslant \operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) + 1/n$. Так как $A\setminus A_\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \in \mathcal{Z}_A$, отсюда следует равенство (2.6.8). Кроме того, поскольку для любого множества $\widetilde{Z} \in \mathcal{Z}_A$ $Z_0 = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\Big) \bigcup \widetilde{Z} \in \mathcal{Z}_A$, то $\sup_{x\in A_\varphi} \varphi(x) = \inf_{Z\in\mathcal{Z}_A} \sup_{x\in A_\varphi\setminus Z} \varphi(x) \leqslant \sup_{x\in A\setminus Z_0} \varphi(x) = \sup_{x\in A_\varphi\setminus\widetilde{Z}} \varphi(x) \leqslant \sup_{x\in A_\varphi} \varphi(x)$, т. е. верно и равенство (2.6.9). ■

2.6.1. Согласованность в существенном класса возможностей с классом вероятностей. Следующий результат лежит в основе определения *согласованности в существенном* класса $\mathbf{P}^{(\varphi)}$ с классом $\mathbf{Pr}^{(\varphi)}$.

Лемма 2.6.2. *Пусть для некоторых множеств* A, $B \in \mathcal{B}^{(n)}$ *неравенство*

$$\Pr{}^{(t)}(A) \equiv \int_A t(\varphi(x))dx \leqslant \int_B t(\varphi(x))dx \equiv \Pr{}^{(t)}(B) \tag{2.6.10}$$

(*равенство* $\Pr^{(t)}(A) = \Pr^{(t)}(B)$) *выполняется при любой функции* $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$. *Тогда*

$$\operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) \leqslant \operatorname*{vraimax}_{x\in B} \varphi(x) \tag{2.6.11}$$

$(\operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) = \operatorname*{vraimax}_{x\in B} \varphi(x))$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (2.6.11) не выполнено, т. е. пусть

$$a = \operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) = \sup_{x\in A_\varphi} \varphi(x) > \sup_{x\in B_\varphi} \varphi(x) = \operatorname*{vraimax}_{x\in B} \varphi(x) = b. \tag{2.6.12}$$

Тогда, согласно (2.6.12), для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $x \in A_\varphi$, для которого $\varphi(x) > a - \varepsilon$, а ε можно выбрать так, чтобы было выполнено неравенство $a - \varepsilon > b$. Определим множество

$$A(\varepsilon) = \{x \in A_\varphi,\ \varphi(x) > a - \varepsilon\} \tag{2.6.13}$$

(см. рис. 2.6.1). Его мера Лебега положительна, ибо в противном случае (т. е. если $A(\varepsilon) \in \mathcal{Z}_A$), согласно лемме 2.6.1,

$$\sup_{x\in A_\varphi} \varphi(x) = \sup_{x\in A_\varphi \setminus A(\varepsilon)} \varphi(x) \leqslant a - \varepsilon,$$

что противоречит условию (2.6.12).

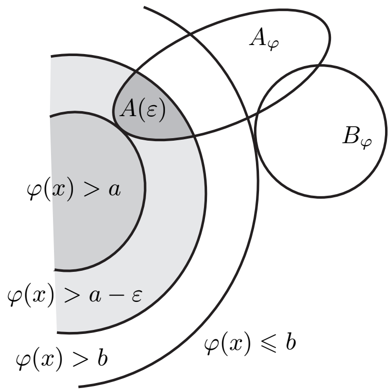


Рис. 2.6.1. Множества $\{x \in \mathcal{R}^n,\ \varphi(x) > a\}$, $\{x \in \mathcal{R}^n,\ \varphi(x) > a - \varepsilon\}$, $\{x \in \mathcal{R}^n, \varphi(x) > b\}$, где $a > a - \varepsilon > b$, а также A_φ, B_φ и $A(\varepsilon)$

Выберем $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$ так, чтобы

$$\begin{gathered} t(\varphi) = 0, \text{ если } 0 \leqslant \varphi \leqslant b, \\ t(\varphi) > 0, \text{ если } a - \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 1. \end{gathered} \tag{2.6.14}$$

Тогда, согласно условиям (2.6.1), $\Pr^{(t)}(A) = \int\limits_A t(\varphi(x))dx = \int\limits_{A_\varphi} t(\varphi(x))dx \geqslant$ $\geqslant \int\limits_{A(\varepsilon)} t(\varphi(x))dx > 0$, поскольку $mes(A(\varepsilon)) > 0$, и $\Pr^{(t)}(B) = \int\limits_B t(\varphi(x))dx =$ $= \int\limits_{B_\varphi} t(\varphi(x))dx \leqslant \int\limits_{\{x\in\mathcal{R}^n, \varphi(x)\leqslant b\}} t(\varphi(x))dx = 0$. Следовательно, если выполнено неравенство (2.6.12), то существует функция $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$, для которой $\Pr^{(t)}(A) > \Pr^{(t)}(B)$, и тем самым неравенство (2.6.10) не выполняется при любой функции $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$. Из сказанного следует и утверждение, относящееся к равенству вероятностей. ■

Следствием леммы 2.6.2 является теорема 2.6.1 — аналог теоремы 2.1.1.

Теорема 2.6.1. *Пусть для некоторых* $A, B \in \mathcal{B}^{(n)}$ $\Pr^{(t)}(A) \leqslant \Pr^{(t)}(B)$ *при любой функции* $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$. *Тогда при любой функции* $s(\cdot) \in \mathcal{S}_\varphi$ $\mathrm{P}^{(s)}(A_\varphi) \leqslant \mathrm{P}^{(s)}(B_\varphi)$.

Доказательство. Согласно лемме 2.6.2 в силу условия теоремы $\sup\limits_{x\in A_\varphi} \varphi(x) \leqslant \sup\limits_{x\in B_\varphi} \varphi(x)$, а поскольку функция $s(\cdot) \in \mathcal{S}_\varphi$ непрерывна и монотонна, то $\mathrm{P}^{(s)}(A_\varphi)=\sup\limits_{x\in A_\varphi} s(\varphi(x))=s(\sup\limits_{x\in A_\varphi}\varphi(x))\leqslant s(\sup\limits_{x\in B_\varphi}\varphi(x))=$ $=\sup\limits_{x\in B_\varphi} s(\varphi(x))=\mathrm{P}^{(s)}(B_\varphi)$. ∎

Определение 2.6.1. Класс возможностей $\mathbf{P}^{(\varphi)}$ назовем *согласованным в существенном* с классом вероятностей $\mathbf{Pr}^{(\varphi)}$ на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}^{(n)}$; класс $\mathbf{Pr}^{(\varphi)}$ назовем стохастической моделью класса $\mathbf{P}^{(\varphi)}$.

«Несогласованность» касается событий $A\backslash A_\varphi$ и $B\backslash B_\varphi$ нулевых вероятностей $\mathrm{Pr}^{(t)}$, $t(\cdot)\in\mathcal{T}_\varphi$, *о которых нельзя получить информацию, наблюдая исходы* Э.

Замечание 2.6.1. Поскольку $\mathrm{P}^{(s)}(A)=\max(\mathrm{P}^{(s)}(A_\varphi),\ \mathrm{P}^{(s)}(A\backslash A_\varphi))$, $\mathrm{P}^{(s)}(B)=\max(\mathrm{P}^{(s)}(B_\varphi),\mathrm{P}^{(s)}(B\backslash B_\varphi))$, то согласно условию теоремы 2.6.1 $\mathrm{P}^{(s)}(A)\leqslant\mathrm{P}^{(s)}(B)$, $s(\cdot)\in\mathcal{S}_\varphi$, если $\mathrm{P}^{(s)}(A_\varphi)\geqslant\mathrm{P}^{(s)}(A\backslash A_\varphi)$ и $\mathrm{P}^{(s)}(B_\varphi)\geqslant\mathrm{P}^{(s)}(B\backslash B_\varphi)$, $s(\cdot)\in\mathcal{S}_\varphi$.

2.6.2. Согласованность в существенном теоретико-возможностной независимости с независимостью теоретико-вероятностной. Рассмотрим эксперименты $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, вероятностные модели которых определены соответственно как классы $\mathcal{P}r^{(1)}=\{(\mathcal{R}^{n_1},\mathcal{B}^{(n_1)},\mathrm{Pr}^{(t_1)}),\,t_1(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_1}\}$ и $\mathcal{P}r^{(2)}=\{(\mathcal{R}^{n_2},\mathcal{B}^{(n_2)},\mathrm{Pr}^{(t_2)}),\,t_2(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_2}\}$ вероятностных пространств, и эксперимент $Э=Э^{(1)}\times Э^{(2)}$, вероятностная модель которого определена как класс $\mathcal{P}r=\{(\mathcal{R}^{n_1}\times\mathcal{R}^{n_2},\ \sigma(\mathcal{B}^{(n_1)}\times\mathcal{B}^{(n_2)}),\ \mathrm{Pr}^{(t_1)}\times\mathrm{Pr}^{(t_2)}),\,t_1(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_1},\ t_2(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_2}\}$, в котором $\sigma(\mathcal{B}^{(n_1)}\times\mathcal{B}^{(n_2)})$ — σ-алгебра борелевских множеств $\mathcal{R}^{n_1}\times\mathcal{R}^{n_2}$ и вероятность $\mathrm{Pr}^{(t_1)}\times\mathrm{Pr}^{(t_2)}$ определена плотностью

$$\rho^{t_1,t_2}(x)=t_1(\varphi_1(x_1))\cdot t_2(\varphi_2(x_2)),\ x=(x_1,x_2)\in\mathcal{R}^{n_1}\times\mathcal{R}^{n_2},\\ t_1(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_1},\ t_2(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_2}\}. \tag{2.6.15}$$

Согласно (2.6.15) эксперименты $Э^{(1)}$ и $Э^{(2)}$, составляющие Э, стохастически независимы при любых $\mathrm{Pr}^{(t_1)}$, $\mathrm{Pr}^{(t_2)}$.

Лемма 2.6.3. *Пусть для* $A,\ B\in\sigma(\mathcal{B}^{(n_1)}\times\mathcal{B}^{(n_2)})$ *неравенство*

$$\mathrm{Pr}^{(t_1,t_2)}(A)=\int\limits_A t_1(\varphi_1(x_1))t_2(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2\leqslant\\ \leqslant\int\limits_B t_1(\varphi_1(x_1))t_2(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2=\mathrm{Pr}^{(t_1,t_2)}(B) \tag{2.6.16}$$

(*равенство* $\mathrm{Pr}^{(t_1,t_2)}(A)=\mathrm{Pr}^{(t_1,t_2)}(B)$) *выполняется при любых функциях* $t_1(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_1}$, $t_2(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_2}$. *Тогда*

$$\operatorname*{vraimax}_{(x_1,x_2)\in A}\min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\}\leqslant\operatorname*{vraimax}_{(x_1,x_2)\in B}\min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\}. \tag{2.6.17}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(x) = \min\{\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)\}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2}$. Действуя как при доказательстве леммы 2.6.2, предположим, что неравенство (2.6.17) не выполнено, и

$$a = \sup_{(x_1,x_2)\in A_\varphi} \min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\} > \sup_{(x_1,x_2)\in B_\varphi} \min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\} = b. \tag{2.6.18}$$

Согласно (2.6.18) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $x = (x_1, x_2) \in A_\varphi$ так, чтобы $\varphi(x) = \min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\} > a - \varepsilon$, а ε можно выбрать так, чтобы $a - \varepsilon > b$. При этом множество

$$A(\varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in A_\varphi,\ \min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\} > a - \varepsilon\} \tag{2.6.19}$$

не пусто, и более того, его мера Лебега положительна. Выберем $t_1^0(\cdot) \in \mathcal{T}_{\varphi_1}$ и $t_2^0(\cdot) \in \mathcal{T}_{\varphi_2}$ так, чтобы

$$t_i^0(\varphi) = 0,\ \text{если}\ 0 \leqslant \varphi \leqslant b,\ t_i^0(\varphi) > 0,\ \text{если}\ a - \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant 1,\ i = 1, 2. \tag{2.6.20}$$

Тогда, в силу определений (2.6.19) и (2.6.20),

$$\mathrm{Pr}^{(t_1^0,t_2^0)}(A) = \int_A t_1^0(\varphi_1(x_1))t_2^0(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2 =$$
$$= \int_{A_\varphi} t_1^0(\varphi_1(x_1))t_2^0(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2 \geqslant \int_{A(\varepsilon)} t_1^0(\varphi_1(x_1))t_2^0(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2 > 0,$$
$$\mathrm{Pr}^{(t_1^0,t_2^0)}(B) = \int_B t_1^0(\varphi_1(x_1))t_2^0(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2 =$$
$$= \int_{B_\varphi} t_1^0(\varphi_1(x_1))t_2^0(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2 \leqslant \int_{B^0} t_1^0(\varphi_1(x_1))t_2^0(\varphi_2(x_2))dx_1dx_2 = 0, \tag{2.6.21}$$

ибо $B \subset B^0 = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^{n_1} \times \mathcal{R}^{n_2},\ \min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\} \leqslant b\}$ и при $(x_1, x_2) \in B^0$ в силу условий (2.6.20) по меньшей мере один из сомножителей под знаком последнего интеграла в (2.6.21) равен нулю, см. рис. 2.6.2. Следовательно, выбрав $t_1(\cdot), t_2(\cdot)$ согласно (2.6.20), получим неравенство $\mathrm{Pr}^{(t_1^0,t_2^0)}(A) > \mathrm{Pr}^{(t_1^0,t_2^0)}(B)$, что противоречит условию (2.6.16), которое выполнено при любых $t_1(\cdot) \in \mathcal{T}_{\varphi_1}$, $t_2(\cdot) \in \mathcal{T}_{\varphi_2}$. ■

Следствием леммы 2.6.3 является теорема 2.6.2 о согласованности теоретико-возможностной независимости с независимостью теоретико-вероятностной (ср. с § 2).

Теорема 2.6.2. *Пусть в* (2.6.16) $\mathrm{Pr}^{(t_1,t_2)}(A) \leqslant \mathrm{Pr}^{(t_1,t_2)}(B)$ *при любых функциях* $t_1(\cdot) \in \mathcal{T}_{\varphi_1}$ *и* $t_2(\cdot) \in \mathcal{T}_{\varphi_2}$. *Тогда при любых функциях* $s_1(\cdot) \in \mathcal{S}_{\varphi_1}$ *и* $s_2(\cdot) \in \mathcal{S}_{\varphi_2}$

$$\mathrm{P}^{(s_1,s_2)}(A_\varphi) = \sup_{(x_1,x_2)\in A_\varphi} \min\{s_1(\varphi_1(x_1)), s_2(\varphi_2(x_2))\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(x_1,x_2)\in B_\varphi} \min\{s_1(\varphi_1(x_1)), s_2(\varphi_2(x_2))\} = \mathrm{P}^{(s_1,s_2)}(B_\varphi), \quad (2.6.22)$$

где множества A_φ и B_φ определены, как в лемме 2.6.1,

$$\operatorname*{vraimax}_{(x_1,x_2)\in A} \varphi(x_1,x_2) = \sup_{(x_1,x_2)\in A_\varphi} \varphi(x_1,x_2), \ \operatorname*{vraimax}_{(x_1,x_2)\in B} \varphi(x_1,x_2) =$$
$$= \sup_{(x_1,x_2)\in B_\varphi} \varphi(x_1,x_2).$$

Здесь $\varphi(x_1,x_2) = \min\{\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_2)\},\ (x_1,x_2)\in\mathcal{R}^{n_1}\times\mathcal{R}^{n_2}$.

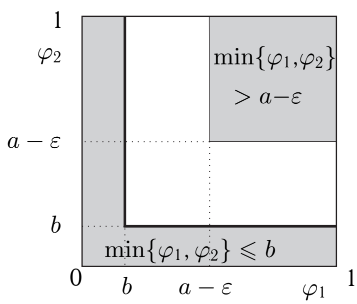


Рис. 2.6.2. Множества $\{(\varphi_1,\varphi_2)\in[0,1]^2, \min\{\varphi_1,\varphi_2\}\leqslant b\}$ и $\{(\varphi_1,\varphi_2)\in\in[0,1]^2, \min\{\varphi_1,\varphi_2\} > a-\varepsilon\}$ значений функции $\min\{\varphi_1,\varphi_2\}(\cdot)$, $A(\varepsilon)$ и B^0 — их прообразы в $\mathcal{R}^{n_1}\times\mathcal{R}^{n_2}$ соответственно при отображении $(\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot))\colon \mathcal{R}^{n_1}\times\mathcal{R}^{n_2}\to[0,1]^2$

Доказательство. Доказательство следует из соотношений (2.6.16), (2.6.17) леммы 2.6.3, монотонности и непрерывности функций $s_1(\cdot)$ и $s_2(\cdot)$, см. рис. 2.6.2. ■

Основываясь на формулах (2.6.16) и (2.6.22), по аналогии с обозначениями, принятыми в § 2.1, введем следующие обозначения:

$$\mathrm{Pr}^{(t_1,t_2)} = \mathrm{Pr}^{(t_1)}\times\mathrm{Pr}^{(t_2)},\ \mathrm{P}^{(s_1,s_2)} = \mathrm{P}^{(s_1)}\times\mathrm{P}^{(s_2)};$$
$$\mathbf{Pr}^{(\varphi)} = \mathbf{Pr}^{(\varphi_1,\varphi_2)} = \{\mathrm{Pr}^{(t_1)}\times\mathrm{Pr}^{(t_2)}, t_1(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_1},\ t_2(\cdot)\in\mathcal{T}_{\varphi_2}\} =$$
$$= \mathbf{Pr}^{(\varphi_1)}\times\mathbf{Pr}^{(\varphi_2)},$$
$$\mathbf{P}^{(\varphi)} = \mathbf{P}^{(\varphi_1,\varphi_2)} = \{\mathrm{P}^{(s_1)}\times\mathrm{P}^{(s_2)}, s_1(\cdot)\in\mathcal{S}_{\varphi_1},\ s_2(\cdot)\in\mathcal{S}_{\varphi_2}\} =$$
$$= \mathbf{P}^{(\varphi_1)}\times\mathbf{P}^{(\varphi_2)}.$$

В этих обозначениях результат, приведенный в теореме 2.6.2, означает, что *класс возможностей* $\mathbf{P}^{(\varphi_1)}\times\mathbf{P}^{(\varphi_2)}$ *согласован в существенном* *с классом вероятностей* $\mathbf{Pr}^{(\varphi_1)} \times \mathbf{Pr}^{(\varphi_2)}$, *и теоретико-возможностная независимость согласована в существенном с независимостью стохастической.*

2.6.3. Возможность, максимально согласованная с абсолютно непрерывной вероятностью. Следующая теорема показывает, что требование максимальной согласованности возможности, распределение которой определено функцией $s(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, (2.6.6) с вероятностью, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега, с плотностью $t(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, (2.6.3) может быть удовлетворено лишь в том случае, когда функция $s(\varphi)$, $\varphi \in [0,1]$, принимает только два значения — ноль или единица.

Теорема 2.6.3. *Пусть* $t(\cdot)$ *и* $s(\cdot)$ — *любые функции из* $\mathcal{T}_\varphi$ *и* $\mathcal{S}_\varphi$ *соответственно, такие, что для некоторого* $s \in (0,1)$ $\mathrm{Pr}^{(t)}(A_s) > 0$, *где* $A_s = \{x \in \mathcal{R}^n,\ s(\varphi(x)) \leqslant s\}$. *Тогда можно указать множества* $A, B \in \mathcal{B}^{(n)}$, *такие, что* $\mathrm{Pr}^{(t)}(A) > \mathrm{Pr}^{(t)}(B)$, *но* $\mathrm{P}^{(s)}(A) < \mathrm{P}^{(s)}(B)$.

При доказательстве теоремы 2.6.3 будет использован следующий результат.

Лемма 2.6.4. *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$ *можно указать такое* $c = c(\varepsilon, t(\cdot))$, *что* $\mathrm{Pr}^{(t)}(D_c) \leqslant \varepsilon$, *где*

$$D_c = \{x \in \mathcal{R}^n,\ t(\varphi(x)) \geqslant c\}. \tag{2.6.23}$$

Доказательство. Действительно,

► для любого $c > 0$, согласно определению в (2.6.23) множества D_c,

$$\mathrm{Pr}^{(t)}(D_c) = \int\limits_{D_c} t(\varphi(x))dx \geqslant c \cdot \mathrm{mes}(D_c) = c \int\limits_{D_c} dx$$

и, следовательно, $\mathrm{mes}(D_c) \leqslant (1/c)\mathrm{Pr}^{(t)}(D_c) \leqslant 1/c$.

► Для любых $\varepsilon > 0$ и $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon, t(\cdot))$, что $\mathrm{Pr}^{(t)}(E_\delta) \leqslant \varepsilon$, каким бы ни было множество $E_\delta \in \mathcal{B}^{(n)}$, если $\mathrm{mes}(E_\delta) \leqslant \delta$ (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Доказательство леммы следует из этих утверждений, если выбрать $c = c(\varepsilon, t(\cdot)) = 1/\delta(\varepsilon, t(\cdot))$. ■

Доказательство теоремы 2.6.3. Выберем множества $\widetilde{A}$, $\widetilde{B} \subset A_s$ так, чтобы $\mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{A}) > \mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{B}) > 0$. Если при этом всякий раз $\mathrm{P}^{(s)}(\widetilde{A}) < \mathrm{P}^{(s)}(\widetilde{B})$, то теорема доказана. Пусть $\mathrm{P}^{(s)}(\widetilde{A}) = \sup\limits_{x \in \widetilde{A}} s(\varphi(x)) \geqslant \sup\limits_{x \in \widetilde{B}} s(\varphi(x)) = \mathrm{P}^{(s)}(\widetilde{B})$. Выберем $\varepsilon \in (0, q/2)$, где $0 < q \leqslant \mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{A}) - \mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{B})$, и определим множества $A = \widetilde{A} \setminus D_c$ и $B = \widetilde{B} \cup D_c$, где $c = c(\varepsilon, t(\cdot))$ и D_c определены в (2.6.23). Тогда $\mathrm{Pr}^{(t)}(A) - \mathrm{Pr}^{(t)}(B) \geqslant \mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{A}) - \mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{B}) - 2\varepsilon \geqslant q - 2\varepsilon > 0$, так как $\mathrm{Pr}^{(t)}(A) \geqslant \mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{A}) - \varepsilon$ и $\mathrm{Pr}^{(t)}(B) \leqslant \mathrm{Pr}^{(t)}(\widetilde{B}) + \varepsilon$, в то время как $\mathrm{P}^{(s)}(A) \leqslant \mathrm{P}^{(s)}(\widetilde{A}) \leqslant \mathrm{P}^{(s)}(A_s) \leqslant s < 1$, а $\mathrm{P}^{(s)}(B) \geqslant \mathrm{P}^{(s)}(D_c) = 1$, ибо $1 = \sup\limits_{x \in \mathcal{R}^n} \varphi(x) = \sup\limits_{x \in D_c} \varphi(x) = \sup\limits_{x \in D_c} s(\varphi(x))$. ■

Следствие 2.6.1. Согласно теореме 2.6.3, возможность $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(n)} \to \mathcal{L}$, заданная распределением $s(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, $s(\cdot) \in \mathcal{S}_\varphi$, максимально согласованная с вероятностью $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(n)} \to [0,1]$, заданной плотностью $t(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$, «тривиальна»: $\forall A \in \mathcal{B}^{(n)}$ $\mathrm{Pr}^{(t)}(A) > 0 \Rightarrow \mathrm{P}^{(s)}(A) = 1$, т. е. воможность $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)$ не «передает» никаких свойств вероятности $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)$.

Это означает, что для построения нетривиальной возможностной модели Э пространство элементарных событий $\mathcal{R}^n$ его вероятностной модели $(\mathcal{R}^n, \mathcal{B}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(t)})$, $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi$, следует гранулировать.

Пусть

$$\mathcal{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathcal{B}^{(n)},\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots, \tag{2.6.24}$$

— измеримое разбиение $\mathcal{R}^n$, $\mathcal{A} = \sigma(A_1, A_2, \ldots)$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все A_i, $i = 1,2,\ldots$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^{(n)}$. Рассмотрим сужение $\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}}^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ вероятности $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(n)} \to [0,1]$, определенное условиями:

$$\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}}^{(t)}(A_i) = \mathrm{Pr}^{(t)}(A_i) = \int\limits_{A_i} t(\varphi(x))dx = \mathrm{pr}_i^{(t)},\ i = 1,2,\ldots \tag{2.6.25}$$

Поскольку максимальное продолжение P возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$, максимально согласованной с вероятностью $\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}}^{(t)}$, должно иметь распределение, представимое в виде [1)]

$$g^{(s)}(x) = s(\varphi(x)),\ x \in \mathcal{R}^n, \tag{2.6.26}$$

где $s(\cdot)$ — некоторая функция из $\mathcal{S}_\varphi$, то множества A_i, $i = 1,2,\ldots$, не могут быть выбраны произвольно.

С учетом этого замечания рассмотрим разбиение (2.6.24), в котором

$$A_i = \{x \in \mathcal{R}^n,\ \varphi_i \leqslant \varphi(x) < \varphi_{i-1}\},\ i = 1,2,\ldots,\ \infty = \varphi_0 > \varphi_1 > \varphi_2 > \ldots \tag{2.6.27}$$

Выбрав в (2.6.27) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, так, чтобы $2\mathrm{Pr}^{(t)}(A_1) > 1$, $\mathrm{Pr}^{(t)}(A_1) + 2\mathrm{Pr}^{(t)}(A_2) > 1$, …, $\mathrm{Pr}^{(t)}(A_1) + \ldots + \mathrm{Pr}^{(t)}(A_{s-1}) + 2\mathrm{Pr}^{(t)}(A_s) > 1$, …, получим, что для любой возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$, максимально согласованной с вероятностью $\mathrm{Pr}\big|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ на σ-алгебре $\mathcal{A}$, порожденной разбиением $\mathcal{R}^n = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} A_s$, будут выполнены неравенства

[1)] Это замечание касается любого продолжения $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\mathcal{R}^n) \to \mathcal{L}$ возможности $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}$, а именно, σ-алгебра $\mathcal{A}$ должна содержаться в минимальной σ-алгебре, содержащей все множества $\{x \in \mathcal{R}^n,\ \varphi(x) \leqslant c\}$, $c \in [0,1]$. В частности, если P — максимальное продолжение $\mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}$, то распределение P должно принимать постоянные значения на каждом A_i, $i = 1,2,\ldots$

$1 = \mathrm{P}(A_1) > \mathrm{P}(A_2) > \ldots$, а *любое* ее продолжение на $\mathcal{P}(\mathcal{R}^n)$ должно иметь распределение, представимое в виде (2.6.26), и удовлетворять условию $\mathrm{P}(A) = \sup\limits_{s\colon A_s \cap A \neq \varnothing} \mathrm{P}\big|_{\mathcal{A}}(A_s)$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^n)$. В частности, в качестве распределения $g^s(\cdot)$ в (2.6.26) можно выбрать $\varphi(\cdot)$. Например, если $\varphi(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathcal{R}^1$, то класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\varphi)}$ (2.6.1) содержит все вероятности с гауссовскими плотностями (2.6.3) $\rho(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-x^2/(2\sigma^2)\right)$, $x \in \mathcal{R}^1$, (и много других), но возможность P, максимально согласованную на $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\sigma)$ с каждой вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}^{(\varphi)}$, можно задать одним распределением $g^{(s)}(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathcal{R}^1$, подробнее см. § 3.3 гл. 3.

2.7. Возможность и случайное множество

Возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ допускает простое теоретико-вероятностное толкование, связанное с конструкцией случайного множества [1]).

Пусть $h(\cdot)\colon X \to [0,1]$ и $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{Pr})$ — вероятностное пространство, в котором $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $\Omega = [0,1]$. Определим случайное множество $X(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{P}(X)$, положив для каждого $\omega \in \Omega$
$$X(\omega) = \left\{x \in X,\ \omega < h(x)\right\}, \tag{2.7.1}$$
и для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ определим множество в Ω
$$\Omega(A) = \left\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \cap A \neq \varnothing\right\} = \bigcup_{x \in A} \left\{\omega \in \Omega,\ x \in X(\omega)\right\}. \tag{2.7.2}$$

Теорема 2.7.1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{Pr})$ — *произвольное вероятностное пространство, где* $\Omega = [0,1]$, $h(\cdot)\colon X \to [0,1]$ — *некоторая функция,* $A \in \mathcal{P}(X)$, *и множество* $\Omega(A) \subset \Omega$ *определено равенством* (2.7.2). *Тогда при любом* $A \in \mathcal{P}(X)$ $\Omega(A) \in \mathcal{B}$ *и равенство*
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{Pr}(\Omega(A)),\ A \in \mathcal{P}(X), \tag{2.7.3}$$
определяет вариант возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$, *распределение которой*
$$g(x) = \mathrm{Pr}(\Omega(\{x\})) = F(h(x)),\ x \in X, \tag{2.7.4}$$

---

[1]) Имеется в виду случайное множество как элемент вероятностного пространства $(\mathcal{P}(X), \mathcal{B}^*, \mathrm{Pr}^*)$, которое является образом $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{Pr})$ при отображении $X(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{P}(X)$, в котором множества $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, представлены как «точки» $\mathcal{P}(X)$. $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ — σ-алгебра подмножеств $\mathcal{P}(X)$, такая что $\mathcal{A} \in \mathcal{B}^*$, если и только если $\Omega_{\mathcal{A}} = \left\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in \mathcal{A}\right\} \in \mathcal{B}$. При этом, в частности, $\mathcal{A} = \left\{X(\omega),\ X(\omega) \cap A \neq \varnothing\right\} \in \mathcal{B}^*$ для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ и $\mathrm{Pr}^*(\mathcal{A}) = \mathrm{Pr}(\Omega_A)$, (см. [28]). Связь между случайными множествами и возможностью исследована, например, в работе [97], наш случай ближе к рассмотренному в работе [84], когда $X(\cdot)$ понимается как многозначное отображение $\Omega \to X$ (а не как однозначное отображение $\Omega \to \mathcal{P}(X)$).

где $F(z) = \mathrm{Pr}(\{0 \leqslant \omega < z\})$, $z \in [0,1]$, — *функция распределения вероятности* Pr. *Наоборот, пусть* $(\Omega, \mathcal{P}(X), \mathrm{P})$ — *пространство с возможностью,* $g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ — *распределение возможности* P. *Тогда равенство* (2.7.4) *определяет композицию* $F(h(\cdot))$ *и, в частности, вероятностное пространство* $(\Omega,\ \mathcal{B},\ \mathrm{Pr})$, *в котором* $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}_h$ *параметрически зависит от* $h(\cdot)\colon X \to [0,1]$. *При* $h(\cdot) = g(\cdot)$ *вероятность* Pr_h *равномерно распределена на* $\Omega = [0,1]$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что имеет место равенство

$$\Omega(A) = \bigcup_{x \in A} \bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < h(x)\bigr\} = \bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < \sup_{x \in A} h(x)\bigr\} \overset{\triangle}{=} \widetilde{\Omega}(A). \tag{2.7.5}$$

Действительно, если $\omega \in \Omega(A)$ и, следовательно, для некоторого $x \in A$, $\omega < h(x)$, то тем более $\omega < \sup\limits_{x \in A} h(x) = h_A$, то есть $\omega \in \widetilde{\Omega}(A)$. Наоборот, последнее включение означает, что $\omega < h_A$ и, следовательно, для некоторого $\varepsilon > 0$, $\omega < h_A - \varepsilon$. При этом найдется элемент $x_\varepsilon \in A$, такой, что $h_A - \varepsilon < h(x_\varepsilon)$, для которого $\omega < h(x_\varepsilon)$, т. е. $\omega \in \Omega(A)$.

Согласно представлению (2.7.5) $\Omega(A) \in \mathcal{B}$ для любого $A \in \mathcal{P}(X)$, следовательно, правая часть равенства (2.7.3) определена для всякого $A \in \mathcal{P}(X)$, и имеет место равенство

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{Pr}\bigl(\bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < \sup_{x \in A} h(x)\bigr\}\bigr),\ A \in \mathcal{P}(X). \tag{2.7.6}$$

Поскольку $\Omega(A \cup B) = \Bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < \sup\limits_{x \in A \cup B} h(x)\Bigr\} = \Bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < \max\bigl\{\sup\limits_{x \in A} h(x),\ \sup\limits_{x \in B} h(x)\bigr\}\Bigr\}$, $A,\ B \in \mathcal{P}(X)$, то $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{Pr}(\Omega(A \cup B)) = \max\{\mathrm{Pr}(\Omega(A)),\ \mathrm{Pr}(\Omega(B))\} = \max\{P(A),\ P(B)\}$.

Если $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $i \in J$, то $\Omega\Bigl(\bigcup\limits_{i \in J} A_i\Bigr) = \bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < \sup\limits_{i} \sup\limits_{x \in A_i} h(x)\bigr\}$, и вследствие непрерывности слева функции распределения $F(z) = \mathrm{Pr}(\{\omega \in \Omega,\ \omega < z\})$, $0 \leqslant z \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\Bigl(\bigcup_{i \in J} A_i\Bigr) &= \mathrm{Pr}\bigl(\bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < \sup_{i \in J} \sup_{x \in A_i} h(x)\bigr\}\bigr) = \\ &= \sup_{i \in J} \mathrm{Pr}\bigl(\bigl\{\omega \in \Omega,\ \omega < \sup_{x \in A_i} h(x)\bigr\}\bigr) = \sup_{i \in J} P(A_i). \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Поскольку, очевидно, $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, если $A \subset B$, то $\mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \min(\mathrm{P}(A),\ \mathrm{P}(B))$. Полунепрерывность снизу $\mathrm{P}(\cdot)$ следует из монотонности и счетной аддитивности (2.7.7).

Согласно равенству (2.7.6)

$$\mathrm{P}(A) = F\bigl(\sup_{x \in A} h(x)\bigr) = \sup_{x \in A} F(h(x)),\ A \in \mathcal{P}(X).$$

Последнее равенство является следствием монотонности и непрерывности слева функции распределения $F(\cdot)$. Следовательно, распределение возможности дается равенством (2.7.4). ■

Замечание 2.7.1. Такой же результат получим, определив для каждого $A \in \mathcal{P}(X)$ случайную величину, см. (2.7.2),

$$\mathrm{P}_\omega(A) = \begin{cases} 1, & A \cap X(\omega) \neq \varnothing, \\ 0, & A \cap X(\omega) = \varnothing, \end{cases} \quad \omega \in \Omega,$$

и положив

$$\overline{\mathrm{P}}(A) = \mathsf{E}\mathrm{P}_\cdot(A), \ A \in \mathcal{P}(X),$$

где E — символ математического ожидания. Очевидно, что $\mathrm{P}_\omega(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, — возможность при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$, и $\overline{P}(A)$ совпадает с $P(A)$ в (2.7.3).

Наконец, пусть $\xi \in X$ — нечеткий элемент, распределение которого определяется исходом $\omega \in \Omega$:

$$\mathrm{P}_\omega(\xi = x) = \begin{cases} 1, & x \in X(\omega), \\ 0, & x \notin X(\omega), \end{cases} \quad x \in X. \tag{2.7.8}$$

Тогда (ср. (2.7.4))

$$\mathsf{E}\mathrm{P}_\cdot(\xi = x) = \mathrm{Pr}(\Omega(\{x\})) = f(x), \ x \in X. \tag{2.7.9}$$

Замечание 2.7.2. Равенства (2.7.3), (2.7.4) определяют один из вариантов $\mathrm{P}(\cdot)$ возможности. Любой другой вариант $\widetilde{\mathrm{p}}(\cdot)$ получается путем преобразования $\mathrm{P}(\cdot) \to \widetilde{\mathrm{p}}(\cdot) = \gamma(\mathrm{P}(\cdot))$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$.

Замечание 2.7.3. Поскольку

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega, \ X(\omega) \subset A\} = \{\omega \in \Omega, \ X(\omega) \cap (X \setminus A) = \varnothing\} = \\ = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega, \ X(\omega) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing\}, \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

то в данном случае

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(A) = \mathrm{Pr}\left(\{\omega \in \Omega, \ X(\omega) \subset A\}\right) = \\ &= 1 - \mathrm{Pr}\left(\{\omega \in \Omega, \ X(\omega) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing\}\right) = 1 - \mathrm{P}(X \setminus A), \ A \in \mathcal{P}(X), \end{aligned} \tag{2.7.11}$$

— *вариант необходимости, дуальной возможности* $\mathrm{P}(\cdot)$.

Замечание 2.7.4. Пусть в теореме 2.7.1 $F(z) = z$, $z \in [0, 1]$. Тогда равенство (2.7.1) определяет отображение $A^{\boldsymbol{\cdot}} \equiv X(\cdot)\colon [0, 1] \to \mathcal{P}(X)$, которое можно интерпретировать как *стохастическую модель нечеткого множества* $A^{\boldsymbol{\cdot}}$, *вариант индикаторной функции* $g^A(x) = g(x) = h(x)$, $x \in X$, *которого определен равенством* (2.7.4). Согласно равенству (2.7.4) *возможность покрытия* $x \in X$ *нечетким множеством* $A^{\boldsymbol{\cdot}}$ *равна вероятности покрытия* $x \in X$ *случайным множеством* $X(\cdot)$.

Рассмотренная конструкция возможности легко обобщается. Пусть $h(\cdot) = (h_1(\cdot), \ldots, h_m(\cdot))\colon X = X_1 \times \ldots \times X_n \to [0, 1]^m$, $(\Omega, \mathcal{B}^{(m)}, \mathrm{Pr})$ — вероятностное пространство, $\Omega = [0, 1]^m$, $\mathcal{B}^{(m)}$ — σ-алгебра борелевских множеств $[0, 1]^m$. Если множество $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, определено формулой (2.7.1), в которой неравенство $\omega < h(x)$ означает, что $\omega_i < h_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и множество $\Omega(A)$,

$A \in \mathcal{P}(X)$, определено как в (2.7.5), то равенство (2.7.3) определит вариант возможности $\mathrm{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, распределение которой

$$g(x) = F(h_1(x), \ldots, h_m(x)),\ x \in X,$$

где $F(t_1, \ldots, t_m) = \Pr(\{\omega_1 < t_1, \ldots, \omega_m < t_m\}), (t_1, \ldots, t_m) \in [0,1]^m$, — функция распределения случайного вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$.

В заключение рассмотрим стохастический эксперимент, модель $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ которого «представлена» вероятностным пространством $(X, \widetilde{\mathcal{A}}_h, \widetilde{\Pr})$ — прообразом вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ при отображении $h(\cdot)\colon X \to \Omega = [0,1]$. В $(X, \widetilde{\mathcal{A}}_h, \widetilde{\Pr})$ σ-алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}_h$ состоит из подмножеств X [1] $X_F = \{x \in X, h(x) \in F\}$, $F \in \mathcal{A}$, роль элементарных исходов эксперимента в $(X, \widetilde{\mathcal{A}}_h, \widetilde{\Pr})$ играют подмножества $X_\omega = \{x \in X,\ h(x) = \omega\}$, $\omega \in \Omega$, вероятность $\widetilde{\Pr}$ определена на $\widetilde{\mathcal{A}}_h$ условием $\widetilde{\Pr}(X_F) = \Pr(F)$, $F \in \mathcal{A}$. В данном случае доступны для наблюдения лишь прообразы X_F исходов $F \in \mathcal{A}$ эксперимента. Рассмотрим связь между вероятностным пространством $(X, \widetilde{\mathcal{A}}_h, \widetilde{\Pr})$ и пространством с возможностью $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P})$, охарактеризованным в теореме 2.7.1.

Пусть $A \in \mathcal{P}(X)$. Поскольку множество A, вообще говоря, $\widetilde{\mathcal{A}}_h$-неизмеримо, определим на $\mathcal{P}(X)$ внутреннюю

$$\widetilde{\Pr}_*(A) = \sup\left\{\widetilde{\Pr} B,\ A \supset B \in \widetilde{\mathcal{A}}_h\right\}$$

и внешнюю

$$\widetilde{\Pr}^*(A) = \inf\left\{\widetilde{\Pr} B,\ A \subset B \in \widetilde{\mathcal{A}}_h\right\}$$

вероятности $A \in \mathcal{P}(X)$ [127]. В общем случае $\widetilde{\Pr}^*(A) \geqslant \widetilde{\Pr}_*(A)$, причем равенство выполняется, если и только если $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$, где $\widetilde{\mathcal{A}}$ — пополнение $\widetilde{\mathcal{A}}_h$ относительно $\widetilde{\Pr}$. Вероятности $\widetilde{\Pr}_*(A)$, $\widetilde{\Pr}^*(A)$ — наиболее полная вероятностная характеристика $A \in \mathcal{P}(X)$, которую можно дать, основываясь на наблюдениях элементов $\widetilde{\mathcal{A}}_h$.

Теперь заметим, что $X(\omega)$ (2.7.1) при любом $\omega \in [0,1]$ принадлежит $\widetilde{\mathcal{A}}_h$, поэтому для любого $A \in \mathcal{P}(X)$, согласно определениям (2.7.3) и (2.7.11), $\mathrm{N}(A) = \Pr(\{\omega,\ X(\omega) \subset A\}) \leqslant \sup\{\widetilde{\Pr}(B),\ A \supset B \in \widetilde{\mathcal{A}}_h\} = \widetilde{\Pr}_*(A) \leqslant \widetilde{\Pr}^*(A) = \inf\{\widetilde{\Pr}(B),\ A \subset B \in \widetilde{\mathcal{A}}_h\} \leqslant \Pr(\{\omega,\ X(\omega) \supset A\}) \leqslant \Pr(\{\omega,\ X(\omega) \cap A \neq \varnothing\}) = \mathrm{P}(A)$. Здесь использован факт $\mathcal{A}$-измеримости множеств $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \cap A \neq \varnothing\}$ (2.7.2) и $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \subset A\}$ (2.7.10) и множества $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \supset A\}$. Последнее измеримо, так как $\{\omega \in \Omega,\ \omega < \inf_{x \in A} h(x)\} \subset \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \supset A\} = \bigcap_{x \in A} \{\omega \in \Omega,\ \omega < h(x)\} \subset \{\omega \in \Omega,\ \omega \leqslant \inf_{x \in A} h(x)\}$.

[1] $\widetilde{\mathcal{A}}_h$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измерима функция $h(\cdot)\colon (X,\ \widetilde{\mathcal{A}}_h), \to ([0,1],\ \mathcal{A})$.

Итак, искомая связь такова: для вариантов возможности $P(\cdot)$ (2.7.3) и необходимости $\mathrm{N}(\cdot)$ (2.7.11) $\mathrm{N}(A) \leqslant \mathrm{Pr}_*(A) \leqslant \mathrm{Pr}^*(A) \leqslant \mathrm{P}(A)$, $A \in \in \mathcal{P}(X)$.

2.8. Статистическое моделирование возможности и нечеткого элемента

Если речь идет о статистическом моделировании возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, то задача моделирования P сводится к статистическому моделированию любой вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, поскольку последняя определяет любую из взаимно эквивалентных возможностей в $\mathbb{P}_{(e)}$ равенством $\mathrm{P} = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma(\mathrm{Pr})$, см. § 2.3.1. Проблемы могут возникнуть в тех случаях, когда, кроме условия $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, требуется, чтобы возможность P имела некоторые специфические свойства.

Пусть, например, $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \ldots \times \Omega^{(n)}) \to [0,1]$, и должно быть выполнено следующее «условие независимости»: $\forall\, A^{(1)} \times \ldots \times A^{(n)} \in \in \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \times \ldots \times \Omega^{(n)})$

$$\mathrm{P}(A^{(1)} \times \ldots \times A^{(n)}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{P}^{(i)}(A^{(i)}), \tag{2.8.1}$$

где $\mathrm{P}^{(i)}(A^{(i)}) = \mathrm{P}(\Omega^{(1)} \times \ldots \times \Omega^{(i-1)} \times A^{(i)} \times \Omega^{(i+1)} \times \ldots \times \Omega^{(n)})$, $i = = 1, 2, \ldots, n$. Если, в частности, $\Omega^{(i)} = \{\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \ldots\}$, $i = 1, \ldots, n$, то требуется, чтобы $\forall\, \omega_{k_i}^{(i)} \in \Omega^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathrm{P}(\{\omega_{k_1}^{(1)}\} \times \ldots \times \{\omega_{k_n}^{(n)}\}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{P}^{(i)}(\{\omega_{k_i}^{(i)}\}). \tag{2.8.2}$$

В данном случае проблема моделирования возможности P обусловлена тем, что «условия независимости» (2.8.1), (2.8.2) не могут быть «автоматически» обеспечены «условиями независимости» для вероятности $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$:

$$\mathrm{Pr}(\{\omega_{k_1}^{(1)}\} \times \ldots \times \{\omega_{k_n}^{(n)}\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}^{(i)}(\{\omega_{k_i}^{(i)}\}), \tag{2.8.3}$$

где $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr}^{(1)} \times \ldots \times \mathrm{Pr}^{(n)}$.

В этой связи напомним, что возможностная независимость *согласована* с независимостью вероятностной в смысле определения 2.1.1 и теоремы 2.1.1 если неравенство (2.1.16), *верное для всех вероятностей* [1]) *из класса* $\mathbb{P}\mathrm{r}$, влечет неравенство (2.1.17) *для каждой возможности из класса* $\mathbb{P}$.

Проблемы статистического моделирования возможности при условиях (2.8.1), (2.8.2) рассмотрим на примере $n = 2$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega =$

[1]) Условие независимости $\mathrm{Pr}(A \cap B) = \mathrm{Pr}(A)\mathrm{Pr}(B)$ *формулируется для трех объектов: событий* A, B *и вероятности* Pr.

$= \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathrm{P}^{(1)} = \mathrm{P}^{(2)}$ и $\mathrm{Pr}^{(1)} = \mathrm{Pr}^{(2)}$. Обозначим

$$\mathrm{pr}_{ij} = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\} \times \{\omega_j\}) = \mathrm{Pr}^{(1)}(\{\omega_i\}) \cdot \mathrm{Pr}^{(2)}(\{\omega_j\}) = \mathrm{pr}_i \mathrm{pr}_j,$$
$$\mathrm{p}_{ij} = \mathrm{P}(\{\omega_i\} \times \{\omega_j\}) = \min\{\mathrm{P}^{(1)}(\{\omega_i\}), \mathrm{P}^{(2)}(\{\omega_j\})\} = \min\{\mathrm{p}_i, \mathrm{p}_j\},$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, \quad (2.8.4)$$

где

$$\mathrm{pr}_s = \mathrm{Pr}^{(1)}(\{\omega_s\}) = \mathrm{Pr}^{(2)}(\{\omega_s\}),\ \mathrm{p}_s = \mathrm{P}^{(1)}(\{\omega_s\}) = \mathrm{P}^{(2)}(\{\omega_s\}),$$
$$s = 1, 2, \ldots,\ 1 > \mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1,\ 1 = p_1 > p_2 > \ldots \quad (2.8.5)$$

Соотношения в (2.8.4), (2.8.5) проиллюстрированы на рис. 2.8.1, *а*, *б*.

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{pr}_{11} & \mathrm{pr}_{12} & \mathrm{pr}_{13} & \cdots \\ \mathrm{pr}_{21} & \mathrm{pr}_{22} & \mathrm{pr}_{23} & \cdots \\ \mathrm{pr}_{31} & \mathrm{pr}_{32} & \mathrm{pr}_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} = \begin{array}{cccc} \mathrm{pr}_1\mathrm{pr}_1 & \mathrm{pr}_1\mathrm{pr}_2 & \mathrm{pr}_1\mathrm{pr}_3 & \cdots \\ \mathrm{pr}_2\mathrm{pr}_1 & \mathrm{pr}_2\mathrm{pr}_2 & \mathrm{pr}_2\mathrm{pr}_3 & \cdots \\ \mathrm{pr}_3\mathrm{pr}_1 & \mathrm{pr}_3\mathrm{pr}_2 & \mathrm{pr}_3\mathrm{pr}_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \overline{\mathrm{pr}}_1 & \overline{\mathrm{pr}}_2 & \overline{\mathrm{pr}}_3 & \cdots \\ \overline{\mathrm{pr}}_2 & \overline{\mathrm{pr}}_2 & \overline{\mathrm{pr}}_3 & \cdots \\ \overline{\mathrm{pr}}_3 & \overline{\mathrm{pr}}_3 & \overline{\mathrm{pr}}_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

а *в*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{p}_{11} & \mathrm{p}_{12} & \mathrm{p}_{13} & \cdots \\ \mathrm{p}_{21} & \mathrm{p}_{22} & \mathrm{p}_{23} & \cdots \\ \mathrm{p}_{31} & \mathrm{p}_{32} & \mathrm{p}_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} = \begin{array}{cccc} \mathrm{p}_1 & \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 & \cdots \\ \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_2 & \mathrm{p}_3 & \cdots \\ \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_3 & \mathrm{p}_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & \Omega \times \Omega & & \\ \Omega_1 & (\omega_1, \omega_1) & (\omega_1, \omega_2) & (\omega_1, \omega_3) & \cdots \\ \Omega_2 & (\omega_2, \omega_1) & (\omega_2, \omega_2) & (\omega_2, \omega_3) & \cdots \\ \Omega_3 & (\omega_3, \omega_1) & (\omega_3, \omega_2) & (\omega_3, \omega_3) & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

б *г*

Рис. 2.8.1. *а*) Матрица вероятностей $\mathrm{pr}_{\mathrm{ij}}$ элементарных событий $\{\omega_i\} \times \{\omega_j\} = (\omega_i, \omega_j) \in \Omega \times \Omega$ в (2.8.3); *б*) матрица возможностей p_{ij} элементарных событий $\{\omega_i\} \times \{\omega_j\} = (\omega_i, \omega_j) \in \Omega \times \Omega$ в (2.8.2); *в*) матрица вероятностей (2.8.13); *г*) гранулы $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ (2.8.7) в $\Omega \times \Omega$

Выберем в (2.8.5)

$$\mathrm{pr}_k = q/(1+q)^k,\ k = 1, 2, \ldots, \quad (2.8.6)$$

где при любом $q > 0$ $\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1$. Тогда в (2.8.5) при условии $\mathrm{Pr}^{(1)} = \mathrm{Pr}^{(2)} \approx> \mathrm{P}^{(1)} = \mathrm{P}^{(2)}$ $\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots \Rightarrow 1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \ldots$, если $q > 1$, и $\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots \Rightarrow 1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \ldots$, если $0 < q \leqslant 1$, см. пример 2.3.1. Поскольку упорядоченность $\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots$ не определяет линейную упорядоченность вероятностей $\mathrm{pr}_i \mathrm{pr}_k$, $i, k = 1, 2, \ldots$, в (2.8.4), гранулируем $\Omega \times \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$, определив

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \{\omega_1\} \times \{\omega_1\},\ \Omega_2 = (\{\omega_1, \omega_2\} \times \{\omega_1, \omega_2\}) \setminus \Omega_1, \ldots, \\ &\Omega_j = (\{\omega_1, \ldots, \omega_j\} \times \{\omega_1, \ldots, \omega_j\}) \setminus (\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_{j-1}), \ldots, \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

как показано на рис. 2.8.1, *г*, и линейно упорядочим вероятности гранул

$$\mathrm{Pr}(\Omega_j) = (\sum_{i=1}^{j} \mathrm{pr}_i)^2 - \sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Pr}(\Omega_i) = \frac{2q}{(1+q)^j} - \frac{2q+q^2}{(1+q)^{2j}},\ j = 1, 2, \ldots, \tag{2.8.8}$$

полученные в (2.8.6). В равенствах (2.8.8)

$$\mathrm{Pr}(\Omega_1) > \mathrm{Pr}(\Omega_2) > \ldots, \tag{2.8.9}$$

если и только если $q > \sqrt{2}$, а условие $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\approx\!>} \mathrm{P}$ максимальной согласованности P с Pr на σ-алгебре $\mathcal{A} = \sigma(\Omega_1, \Omega_2, \ldots)$, а именно,

$$\mathrm{Pr}(\Omega_1) + \ldots + \mathrm{Pr}(\Omega_{j-1}) + 2\mathrm{Pr}(\Omega_j) > 1,\ j = 1, 2, \ldots,$$

обеспечивающее упорядоченность $1 = \mathrm{P}(\Omega_1) > \mathrm{P}(\Omega_2) > \ldots$ как следствие упорядоченности в (2.8.9), будет выполнено, если и только если $q > 1 + \sqrt{2}$. При этом условии, если $(\omega_i, \omega_j) \in \Omega_k$ — исход двух статистически независимых испытаний, то $\mathrm{P}(\Omega_k) = \min(\mathrm{p}_i, \mathrm{p}_j) = \mathrm{p}_k = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}(\Omega_k)$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma(\mathrm{Pr})$. Для возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$, продолженной на $\mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$, исход $(\omega_i, \omega_j) \in \Omega_k$ двух статистически независимых испытаний ω_i, ω_j при оговоренных условиях означает, что $\mathrm{P}((\omega_i, \omega_j)) = \mathrm{p}_k$, но при этом, вообще говоря, *условие* $\mathrm{P}((\omega_i, \omega_j)) = \widetilde{\gamma} \circ \mathrm{Pr}((\omega_i, \omega_j))$, $\widetilde{\gamma} \in \Gamma(\mathrm{Pr})$, *не выполнено*.

Рассмотрим теперь статистическое моделирование нечеткого элемента.

Определение 2.8.1. Пусть $\xi(\cdot)\colon \Omega \to X$ — нечеткий элемент (н. э.), определенный на $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ \mathrm{P})$, распределение возможностей значений которого задано возможностью $\mathrm{P}(\cdot) \in \mathbb{P}_{(e)}$:

$$\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega,\ \xi(\omega) = x_i\}), x_i \in X = \{x_1,\ x_2,\ \ldots\},\ i = 1, 2, \ldots \tag{2.8.10}$$

Стохастической моделью н. э. $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, называется случайный элемент, определенный на $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ \mathrm{Pr})$, заданный той же функцией $\xi(\cdot)\colon \Omega \to X$, распределение вероятностей значений которого определено вероятностью $\mathrm{Pr}(\cdot) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $e \in (0, 1)$,

$$\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega \in \Omega,\ \xi(\omega) = x_i\}),\ x_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots \tag{2.8.11}$$

Подчеркнем, что при любой вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ в (2.8.11) случайный элемент $\xi(\cdot)$ является стохастической моделью н. э. $\xi(\cdot)$ при любой возможности $\mathrm{P}(\cdot) \in \mathbb{P}_{(e)}$ в (2.8.10). Вместе с тем не всякий н. э. имеет стохастическую модель, см. § 2.5.

Согласно определению реализацию $\xi = x_i$ случайного элемента будем интерпретировать как значение x_i н. э. ξ, возможность которого $\mathrm{P}(\{\xi = x_i\})$ равна p_i, $i = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим технику статистического моделирования нечеткого вектора $\xi = (\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$ с независимыми координатами.

Пусть $n = 2$. Поскольку матричные элементы

$$\mathrm{p}_{j_i j_k} = \mathrm{P}(\xi_i = x_{j_i}, \xi_k = x_{j_k}) = \min\{\mathrm{p}_{j_i}, \mathrm{p}_{j_k}\}, \quad i,k \in \{1,2\},\ j_i, j_k \in \{x_1, x_2, \ldots\}, \tag{2.8.12}$$

матрицы, представленной на рис. 2.8.1, *б*, сгруппированы в блоки равных возможностей, определим соответствующую матрицу вероятностей разбитой на такие же блоки матричных элементов $\mathrm{pr}_{j_i j_k} = \mathrm{Pr}(\xi_i = x_{j_i}, \xi_k = x_{j_k})$, $i,k \in \{1,2\}$, $j_i, j_k \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, равных вероятностей

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_{11} = \overline{\mathrm{pr}}_1 > \mathrm{pr}_{12} = \mathrm{pr}_{22} = \mathrm{pr}_{21} = \overline{\mathrm{pr}}_2 > \\ &> \mathrm{pr}_{13} = \mathrm{pr}_{23} = \mathrm{pr}_{33} = \mathrm{pr}_{32} = \mathrm{pr}_{31} = \overline{\mathrm{pr}}_3 > \ldots, \end{aligned} \tag{2.8.13}$$

как это представлено на рис. 2.8.1, *в*, а значения $\overline{\mathrm{pr}}_1 > \overline{\mathrm{pr}}_2 > \overline{\mathrm{pr}}_3 > \ldots$ ограничим условиями

$$\begin{aligned} &1/2 < \overline{\mathrm{pr}}_1 \leqslant 1,\ \overline{\mathrm{pr}}_1 + 2\overline{\mathrm{pr}}_2 \leqslant 1,\ \overline{\mathrm{pr}}_1 + \overline{\mathrm{pr}}_2 + 2\overline{\mathrm{pr}}_2 \leqslant 1, \\ &\overline{\mathrm{pr}}_1 + 2\overline{\mathrm{pr}}_2 + 2\overline{\mathrm{pr}}_2 > 1,\ \overline{\mathrm{pr}}_1 + 3\overline{\mathrm{pr}}_2 + 2\overline{\mathrm{pr}}_3 \leqslant 1, \\ &\overline{\mathrm{pr}}_1 + 3\overline{\mathrm{pr}}_2 + 3\overline{\mathrm{pr}}_3 \leqslant 1, \ldots, \overline{\mathrm{pr}}_1 + 3\overline{\mathrm{pr}}_2 + 5\overline{\mathrm{pr}}_3 \leqslant 1, \\ &\overline{\mathrm{pr}}_1 + 3\overline{\mathrm{pr}}_2 + 6\overline{\mathrm{pr}}_3 > 1,\ \overline{\mathrm{pr}}_1 + 3\overline{\mathrm{pr}}_2 + 5\overline{\mathrm{pr}}_3 + 2\overline{\mathrm{pr}}_4 \leqslant 1, \ldots, \end{aligned} \tag{2.8.14}$$

необходимыми и достаточными для того, чтобы распределение (2.8.12) возможности P, максимально согласованной с вероятностью Pr, распределенной согласно (2.8.13), (2.8.14), удовлетворяло условиям

$$\begin{aligned} &1 = \mathrm{p}_{11} = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_{12} = \mathrm{p}_{22} = \mathrm{p}_{21} = \mathrm{p}_2 > \\ &> \mathrm{p}_{13} = \mathrm{p}_{23} = \mathrm{p}_{33} = \mathrm{p}_{32} = \mathrm{p}_{31} = \mathrm{p}_3, \ldots, \end{aligned} \tag{2.8.15}$$

подобным (2.8.13).

Заметим, что, согласно условиям (2.8.13), (2.8.14),

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} < \overline{\mathrm{pr}}_1 \leqslant 1,\ \frac{1 - \overline{\mathrm{pr}}_1}{4} < \overline{\mathrm{pr}}_2 \leqslant \frac{1 - \overline{\mathrm{pr}}_1}{3}, \\ \frac{1 - \overline{\mathrm{pr}}_1 - 3\overline{\mathrm{pr}}_2}{6} < \overline{\mathrm{pr}}_3 \leqslant \frac{1 - \overline{\mathrm{pr}}_1 - 3\overline{\mathrm{pr}}_2}{5}, \ldots, \\ \overline{\mathrm{pr}}_1 + 3\overline{\mathrm{pr}}_2 + 5\overline{\mathrm{pr}}_3 + \ldots + (2k-1)\overline{\mathrm{pr}}_k + \ldots = 1. \end{gathered}$$

При этом

$$\mathrm{Pr}(\xi_i = x_{j_i}, \xi_k = x_{j_k}) = \min\{\overline{\mathrm{pr}}_{j_i}, \overline{\mathrm{pr}}_{j_k}\},\ i,k \in \{1,2\},\ j_i, j_k \in \{x_1, x_2, \ldots\},$$

$$\overline{\mathrm{pr}}_{j_i} = \mathrm{Pr}(\xi_i = x_{j_i}) = \sum_{s=1}^{\infty} \min\{\overline{\mathrm{pr}}_{j_i}, \overline{\mathrm{pr}}_s\},\ i \in \{1,2\},\ j_i \in \{x_1, x_2, \ldots\},$$

$$\mathrm{Pr}(\xi_i = x_{j_i} | \xi_k = x_{j_k}) = \min\{\overline{\mathrm{pr}}_{j_i}, \overline{\mathrm{pr}}_{j_k}\} \Big/ \sum_{s=1}^{\infty} \min\{\overline{\mathrm{pr}}_s, \overline{\mathrm{pr}}_{j_k}\},\ i,k \in \{1,2\}, \quad j_i, j_k \in \{x_1, x_2, \ldots\},$$

т. е. координаты ξ_1, ξ_2 *случайного вектора* $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, статистически моделирующего *нечеткий вектор* $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ *с независимыми координатами*, *статистически зависимы*.

В общем случае произвольного n имеет место следующий результат [63].

Теорема 2.8.1. *Для стохастического моделирования n независимых в совокупности одинаково распределенных нечетких элементов ξ_k, $k = 1, \ldots, n$, принимающих значения в множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ с возможностями $1 = \mathrm{p}_1 > \ldots > \mathrm{p}_m > 0$, можно использовать n случайных величин η_k, $k = 1, \ldots, n$, маргинальное распределение каждой из которых*

$$\Pr(\eta_k = x_j) = \sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_{n-1}=1}^{m} \min\{\overline{\mathrm{pr}}_j, \overline{\mathrm{pr}}_{i_1}, \ldots, \overline{\mathrm{pr}}_{i_{n-1}}\}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

условные распределения

$$\Pr(\eta_{k+1} = x_{j_{k+1}} | \eta_1 = x_{j_1}, \ldots, \eta_k = x_{j_k}) = \\ = \frac{\sum\limits_{i_{k+2}=1}^{m} \ldots \sum\limits_{i_n=1}^{m} \min\{\overline{\mathrm{pr}}_{j_1}, \ldots, \overline{\mathrm{pr}}_{j_{k+1}}, \overline{\mathrm{pr}}_{i_{k+2}}, \ldots, \overline{\mathrm{pr}}_{i_n}\}}{\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{m} \ldots \sum\limits_{i_n=1}^{m} \min\{\overline{\mathrm{pr}}_{j_1}, \ldots, \overline{\mathrm{pr}}_{j_k}, \overline{\mathrm{pr}}_{i_{k+1}}, \ldots, \overline{\mathrm{pr}}_{i_n}\}}, \\ k = 1, \ldots, n-1, \; j_{k+1} = 1, \ldots, m,$$

где вероятности $\overline{\mathrm{pr}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{pr}}_{m-1}$ удовлетворяют условиям:

$$1/2 < \overline{\mathrm{pr}}_1 \leqslant 1,$$

$$\frac{1 - \sum\limits_{r=1}^{k-1} (r^n - (r-1)^n)\, \overline{\mathrm{pr}}_r}{k^n - (k-1)^n + 1} < \overline{\mathrm{pr}}_k < \frac{1 - \sum\limits_{r=1}^{k-1} (r^n - (r-1)^n)\, \overline{\mathrm{pr}}_r}{k^n - (k-1)^n},$$

$k = 2, \ldots, m-1$, *а вероятность $\overline{\mathrm{pr}}_m$ определяется условием нормировки*:

$$(m^n - (m-1)^n)\, \overline{\mathrm{pr}}_m = 1 - \sum_{r=1}^{m-1} (r^n - (r-1)^n)\, \overline{\mathrm{pr}}_r.$$

При этом распределение возможностей

$$g^{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} p_{k_i}, \quad x_{k_1}, \ldots, x_{k_m} \in X,$$

значений нечеткого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ будет максимально согласованным с любым распределением случайного вектора $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, охарактеризованным условиями теоремы.

Статистическое моделирование возможности в связи с рандомизацией нечеткой стратегии матричной игры рассмотрено в §6.5.5 гл. 6.

Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЭМПИРИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЗМОЖНОСТИ

Введение

Свойства стохастической измеримости возможности, рассмотренные в § 2.3, 2.4, 2.5 гл. 2, позволяют свести задачу эмпирического восстановления последней к статистической задаче проверки гипотез о классах $\mathbb{P}_m$, $m \in M$, эквивалентных возможностей, каждый из которых определен конкретной упорядоченностью значений возможностей элементарных событий. Дело в том, что эти классы образуют разбиение $\mathbb{P}_* = \bigcup\limits_{m \in M} \mathbb{P}_m$ (2.5.13) гл. 2 класса $\mathbb{P}_*$ «всех возможностей» и определяют разбиение $\mathbb{P}\mathrm{r}_* = \bigcup\limits_{m \in M} \mathbb{P}\mathrm{r}_m$ (2.5.14) гл. 2 класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ «всех вероятностей» на классы вероятностей $\mathbb{P}\mathrm{r}_m, m \in M$, причем так, что каждая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_m$ максимально согласована с каждой вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_m$ и определяется [1] последней равенством (2.5.22) гл. 2, $m \in M$.

Последнее означает, что задача эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности, *как задача выбора одного из классов эквивалентных возможностей, образующих разбиение* $\mathbb{P}_*$, сводится к статистической задаче проверки гипотез, в которой, в предположении, что результаты испытаний контролируются, вообще говоря, изменяющимися от испытания к испытанию вероятностями $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{m_0}$, требуется на основе результатов испытаний определить значение $m_0 \in M$, *фиксированное условиями испытаний.*

Рассмотрим в качестве примера статистическую задачу проверки гипотез о вероятности $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_*$, определяющей стохастическую модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ испытания, в которой на основе наблюдения исходов n взаимно независимых испытаний требуется принять решение в пользу одного из включений $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $m \in M$. Если принимается гипотеза, согласно которой $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{m_0}$, то наблюденные исходы свидетельствуют в пользу любой из эквивалентных возможностных моделей $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{m_0}$, каждого испытания.

---

[1] С точностью до эквивалентности. Напомним, что каждая возможность $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_m$ называется $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$- или Pr-измеримой, где Pr — любая вероятность из $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, класс $\mathbb{P}_m$ эквивалентных возможностей называется $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$-измеримым и максимально согласованным с классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $m \in M$.

Рассмотрим сперва задачу эмпирического определения возможностной модели испытаний, в вероятностной модели $(\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ которых вероятности $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$, неизвестны, а испытания могут быть взаимно независимо воспроизведены n раз *при неизменных значениях* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3$. В этом случае вероятность того, что при таких испытаниях исход ω_i реализуется x_i раз, $i = 1,\ 2,\ 3$, равна

$$\mathrm{Pr}^{\xi}(x_1,\ x_2,\ x_3|\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2,\ \mathrm{pr}_3) = \frac{n!}{x_1! x_2! x_3!}(\mathrm{pr}_1)^{x_1}(\mathrm{pr}_2)^{x_2}(\mathrm{pr}_3)^{x_3}, \qquad (3.0.1)$$

где $(x_1, x_2, x_3) \in X = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_i = 0, \ldots, n,\ i = 1, 2, 3,\ x_1 + x_2 + x_3 = n\}$, и $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_* = \{(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3), 0 \leqslant \mathrm{pr}_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, 3, \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 = 1\}$. В равенстве (3.0.1) значения pr_1, pr_2, $\mathrm{pr}_3 = 1 - \mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2$ суть неизвестные значения параметров полиномиального распределения, относительно которых, на основе полученных значений $x = (x_1, x_2, x_3)$ случайного элемента $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, распределенного согласно (3.0.1), надлежит принять одну из $M = 25$ гипотез, представленных на рис. 2.5.1 из гл. 2. Эта задача эквивалентна задаче выбора одной из 25 возможностных моделей на основе полученных значений x_1, x_2, x_3, или — на основе значений $f_i = x_i/n$ частот $\nu_i = \xi_i/n$ исходов ω_i, $i = 1, 2, 3$.

При априори произвольных $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3$ решение задачи состоит в том, что по наблюденному вектору $f = (f_1, f_2, f_3)$ выбирается *упорядоченность* возможностей $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3$, определяемая тем классом $\mathbb{P}\mathrm{r}_m \in \mathbb{P}\mathrm{r}_*$, который содержит [1] f, см. рис. 2.5.1 гл. 2.

Рассмотрим решение аналогичной задачи в байесовской постановке, см. § 6.1 гл. 6. Допустим, что в (3.0.1) $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3)$ является значением случайного элемента $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, имеющего, например, распределение Дирихле с плотностью

$$d_s^{\pi}(\mathrm{pr}) = \frac{\Gamma(s_1 + s_2 + s_3)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)\Gamma(s_3)} \prod_{i=1}^{3} (\mathrm{pr}_i)^{s_i - 1} \cdot \delta(\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \mathrm{pr}_3 - 1),$$
$$\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\ \mathrm{pr}_2,\ \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_*,$$
$$s = (s_1, s_2, s_3) \in S = \{(s_1, s_2, s_3), s_i > 0,\ i = 1, 2, 3\}, \qquad (3.0.2)$$

локализованной на треугольнике $\mathbb{P}\mathrm{r}_* \subset \mathcal{R}^3$, где $s = (s_1, s_2, s_3)$ — параметры распределения, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция. В таком случае в (3.0.1) $d^{\xi|\pi}(x|\mathrm{pr}) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pr}^{\xi}(x|\mathrm{pr})$ — условная вероятность значения $x = (x_1, x_2, x_3)$ случайного элемента $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ при условии $\pi = \mathrm{pr}$ и $d_s^{\pi|\xi}(\mathrm{pr}|x) = d_{s+x}^{\pi}(\mathrm{pr})$ — плотность условного распределения π при условии, что исход ω_i в n испытаниях наблюдается x_i раз, $i = 1, 2, 3$, [11]. При этом отличными от нуля будут условные вероятности не всех 25, а лишь выделенных на рисунке 2.5.1 девяти

[1] Заметим, что $f = (f_1, f_2, f_3)$ является оценкой максимального правдоподобия $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3)$.

гипотез $\mathbb{P}\mathrm{r}_1, \mathbb{P}\mathrm{r}_2, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_9$:

$$\mathrm{Pr}^{\pi|\xi}(\pi \in \mathbb{P}\mathrm{r}_j|x) = \int\limits_{\mathrm{pr}\in\mathbb{P}\mathrm{r}_j} d^{\pi}_{s+x}(\mathrm{pr})d(\mathrm{pr}), \qquad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, 9.$$

Байесовское решение, минимизирующее математическое ожидание доли ошибочных решений, предписывает при наблюдении $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ принять гипотезу $\mathbb{P}\mathrm{r}_{j(x)}$, где $j(x) = \arg\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 9} \mathrm{Pr}^{\pi|\xi}(\pi \in \mathbb{P}\mathrm{r}_i|x)$, а класс $\{(\Omega, \mathrm{P}(\Omega), \mathrm{P}),\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{j(x)}\}$ эквивалентных пространств с возможностью считать искомой возможностной моделью каждого испытания. Минимальное значение математического ожидания доли ошибочных решений равно $1 - \sum\limits_{x\in X} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant 9} \mathrm{Pr}^{\pi|\xi}(\pi \in \mathbb{P}\mathrm{r}_j|x)\mathrm{Pr}^{\xi}(x)$, где $\mathrm{Pr}^{\xi}(x) = \int\limits_{\mathbb{P}\mathrm{r}_*} \mathrm{Pr}^{\xi|\pi}(x|\mathrm{pr})d^{\pi}_{s}(\mathrm{pr})d(\mathrm{pr})$, см. § 6.1.2, 6.1.4 гл. 6.

На самом деле, предположение о том, что при восстановлении возможностной модели испытания *выполняются при неизменных вероятностях* $\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3$, не соответствует сути дела. Такое предположение естественно при восстановлении *вероятностной* модели и обычно формулируется как условие устойчивости частот исходов испытаний, согласно которому *модель испытаний не определяет их исходы, но фиксирует их вероятности.*

Для эмпирического восстановления модели *каждого испытания* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ это предположение может быть существенно ослаблено, а именно: в то время как для построения модели $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$ требуется, чтобы при испытаниях было фиксировано значение $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3)$, при восстановлении возможностной модели требуется, чтобы при испытаниях значение $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1,\, \mathrm{pr}_2,\, \mathrm{pr}_3)$ оставалось в пределах одного из классов $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $m = 1, \ldots, 25$, например, чтобы при i-м испытании $\mathrm{pr}^{(i)} = (\mathrm{pr}^{(i)}_1,\, \mathrm{pr}^{(i)}_2,\, \mathrm{pr}^{(i)}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{m_0}$, $i = 1, \ldots, n$, где m_0 *фиксировано условиями испытаний*. Это условие определяет $\mathbb{P}\mathrm{r}_{m_0}$-измеримость возможности P, задача эмпирического восстановления которой эквивалентна задаче идентификации класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{m_0}$ вероятностей, контролирующих испытания.

В еще более простой модели испытаний с двумя исходами, вероятности которых $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_* \subset \mathcal{R}^2$, пять областей $\mathbb{P}\mathrm{r}_1, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_5$ значений $\mathrm{pr} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ (см. рис. 3.0.1) определяют пять неприводимых возможностных моделей:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\mathrm{r}_1 = \{\mathrm{pr},\, \mathrm{pr}_1 = 1,\, \mathrm{pr}_2 = 0\} && \Leftrightarrow \{1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 = 0\} = \mathbb{P}_1,\\
&\mathbb{P}\mathrm{r}_2 = \{\mathrm{pr},\, 1 > \mathrm{pr}_1 > \tfrac{1}{2} > \mathrm{pr}_2 > 0\} && \Leftrightarrow \{1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > 0\} = \mathbb{P}_2,\\
&\mathbb{P}\mathrm{r}_3 = \{\mathrm{pr},\, \mathrm{pr}_1 = \mathrm{pr}_2 = \tfrac{1}{2}\} && \Leftrightarrow \{1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 > 0\} = \mathbb{P}_3,\\
&\mathbb{P}\mathrm{r}_4 = \{\mathrm{pr},\, 1 > \mathrm{pr}_2 > \tfrac{1}{2} > \mathrm{pr}_1 > 0\} && \Leftrightarrow \{1 = \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_1 > 0\} = \mathbb{P}_4,\\
&\mathbb{P}\mathrm{r}_5 = \{\mathrm{pr},\, \mathrm{pr}_1 = 0,\, \mathrm{pr}_2 = 1\} && \Leftrightarrow \{1 = \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_1 = 0\} = \mathbb{P}_5.
\end{aligned}$$

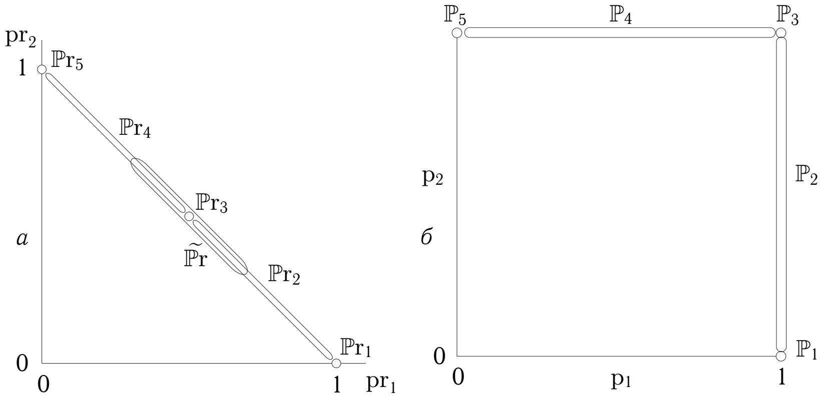


Рис. 3.0.1. Гипотезы $\mathbb{P}\mathrm{r}_1, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_5$ (*а*) определяют неприводимые возможностные модели $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_5$ с двумя исходами, гипотеза $\widetilde{\mathbb{P}\mathrm{r}}$ (*а*) определяет приводимую возможностную модель $\mathbb{P}_2 \cup \mathbb{P}_3 \cup \mathbb{P}_4$ (*б*)

В данном случае условия испытаний должны фиксировать один из пяти классов $\mathbb{P}\mathrm{r}_1, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_5$ значений вероятностей $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$, каждый из которых определяет неприводимую возможностную модель каждого испытания. *Если условия испытаний фиксируют класс* $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, *то возможностная модель каждого испытания и определяющая ее возможность называются* $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$*-измеримыми*, $m = 1, \ldots, 5$.

Заметим, что если условия испытаний гарантируют, например, лишь включение $\mathrm{pr} \in \widetilde{\mathbb{P}\mathrm{r}}$ (см. рис. 3.0.1), то их возможностной моделью является класс трех пространств с возможностью $(\{\omega_1, \omega_2\}, \mathcal{P}(\{\omega_1, \omega_2\}), \mathrm{P}_i)$, $i = 1, 2, 3$, в которых возможности P_1, P_2 и P_3 определяются распределениями, удовлетворяющими соответственно условиям: $\mathrm{P}_1 \sim 1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > 0$, $\mathrm{P}_2 \sim 1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2$ и $\mathrm{P}_3 \sim 1 = \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_1 > 0$, см. рис. 3.0.1.

В этой главе рассматриваются математические методы и алгоритмы эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности. Напомним в этой связи некоторые факты теории вероятностей.

3.1. Предельные теоремы теории вероятностей

3.1.1. Модель бесконечной последовательности наблюдений. Рассмотрим бесконечную последовательность $Э_1, Э_2, \ldots$ взаимно независимых экспериментов и некоторую конечную ее подпоследовательность $Э_{i_1}, \ldots, Э_{i_n}$. Обозначим $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_i)$ стохастическую модель i-го эксперимента $Э_i$, в которой Ω — множество элементарных событий в $Э_i$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, определяющих все события в $Э_i$, $\mathrm{Pr}_i(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ — вероятность, $i = 1, 2, \ldots$ Соответственно $(\Omega^n, \mathcal{A}^{(n)}, \mathrm{Pr}_{i_1, \ldots, i_n})$ обозначим *стохастическую модель последовательности* $Э_{i_1}, \ldots, Э_{i_n}$ *взаимно независимых экспериментов*, обозначаемой далее $Э_{i_1,\ldots,i_n}$, где $\Omega^n = \underbrace{\Omega\times\ldots\times\Omega}_{n}$ — пространство элементарных событий в $Э_{i_1,\ldots,i_n}$, $\mathcal{A}^{(n)} = \sigma(\mathcal{A}\times\ldots\times\mathcal{A})$ — σ-алгебра всех событий в $Э_{i_1,\ldots,i_n}$, т. е. минимальная σ-алгебра подмножеств Ω^n, содержащая все $A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n}$, $A_{i_k}\in\mathcal{A}$, $k=1,\ldots,n$, $\mathrm{Pr}_{i_1,\ldots,i_n} = \mathrm{Pr}_{i_1}\times\times\ldots\times\mathrm{Pr}_{i_n}$ — вероятность на $\mathcal{A}^{(n)}$, однозначно определяемая на $\mathcal{A}^{(n)}$ своими значениями на $A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n}$:

$$\mathrm{Pr}_{i_1,\ldots,i_n}(A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n}) = \mathrm{Pr}_{i_1}(A_{i_1})\ldots\mathrm{Pr}_{i_n}(A_{i_n}),\ A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n}\in\mathcal{A}^{(n)}.$$

Вероятностной моделью бесконечной последовательности взаимно независимых экспериментов $Э_{1,2,\ldots}$ является вероятностное пространство $(\Omega^\infty, \mathcal{A}^{(\infty)}, \mathrm{Pr}_{1,2,\ldots})$, в котором Ω^∞ — множество последовательностей[1] $(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\ldots)$, $\omega^{(i)}\in\Omega$, $i=1,2,\ldots$, $\mathcal{A}^{(\infty)}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все $A_1\times A_2\times\ldots$, где $A_i\in\mathcal{A}$, $i=1,2,\ldots$, $\mathrm{Pr}_{1,2,\ldots}$ — вероятность на $\mathcal{A}^{(\infty)}$, однозначно определяемая своими значениями

$$\mathrm{Pr}_{1,2,\ldots}(\underbrace{\Omega\times\ldots\times\Omega}_{i_1-1}\times A_{i_1}\times\underbrace{\Omega\times\ldots\times\Omega}_{i_2-i_1-1}\times A_{i_2}\times\ldots$$
$$\times\,\Omega\times\ldots\times\Omega\times A_{i_n}\times\Omega\times\ldots) = \mathrm{Pr}_{i_1,\ldots,i_n}(A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n})$$

при любых $A_{i_k}\in\mathcal{A}$, $k=1,\ldots,n$, для любых подпоследовательностей $i_1,\ldots,i_n$ последовательности $1,2,\ldots$, $n=1,2,\ldots$

Рассмотрим бесконечную последовательность

$$(\xi_1(\omega^{(1)}),\xi_2(\omega^{(2)}),\ldots)\in\mathcal{R}^\infty,\ \omega^{(i)}\in\Omega,\ i=1,2,\ldots, \tag{3.1.1}$$

случайных величин $\xi_i(\cdot)$, $i=1,2,\ldots$, определенных соответственно на $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{Pr}_i)$, $i=1,2,\ldots$, т. е. $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-измеримых функций[2] $\xi_i(\cdot)\colon\Omega\to\mathcal{R}$, где $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathcal{R}=\mathcal{R}^1$, $i=1,2,\ldots$, и ее подпоследовательность

$$(\xi_{i_1}(\omega^{(i_1)}),\ldots,\xi_{i_n}(\omega^{(i_n)}))\in\mathcal{R}^n,\ (\omega^{(i_1)},\ldots,\omega^{(i_n)})\in\Omega^n, \tag{3.1.2}$$

выделенную из последовательности (3.1.1) некоторой функцией $i.\colon\{1,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots\}$. Условимся считать, что в каждом эксперименте $Э_i$ наблюдается случайная величина ξ_i, $i=1,2,\ldots$, и рассмотрим *вероятностную модель бесконечной последовательности наблюдений* (3.1.1), далее называемых также испытаниями.

[1] Последовательность $(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\ldots)$ — элемент Ω^∞, последовательность $\{\omega^{(1)},\omega^{(2)},\ldots\}$ — одноточечное подмножество Ω^∞, $\{\omega^{(1)},\omega^{(2)},\ldots\}\subset\Omega^\infty$.

[2] Каждую функцию $\xi_i(\cdot)\colon\Omega\to\mathcal{R}^1$, определяющую исход $Э_i$, можно представить как функцию $\xi_{(i)}(\cdot)\colon\Omega^\infty\to\mathcal{R}^1$ равенством $\xi_i(\omega^{(i)})\triangleq\xi_{(i)}(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\ldots)$, определяющим исход $Э_i$ как i-й исход $Э_{1,2,\ldots}$, и считать ее определенной на $(\Omega^\infty,\mathcal{A}^{(\infty)},\mathrm{Pr}_{1,2,\ldots})$, $i=1,2,\ldots$

Подпоследовательность (3.1.2) определяет вероятностное пространство $(\mathcal{R}^n, \mathcal{B}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n})$, в котором $\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \ldots \times \mathcal{R}$ (n раз), $\mathcal{B}^{(n)}$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathcal{R}^n$ и вероятность

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}(A^{(n)}) = \mathrm{Pr}_{i_1} \times \ldots \times \mathrm{Pr}_{i_n}(\{(\omega^{(i_1)}, \ldots, \omega^{(i_n)}) \in \Omega^n,$$

$$(\xi_{i_1}(\omega^{(i_1)}), \ldots, \xi_{i_n}(\omega^{(i_n)})) \in A^{(n)}\}),\ A^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}.$$

Вероятностное пространство $(\mathcal{R}^n, \mathcal{B}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n})$ *назовем вероятностной моделью последовательности* n *взаимно независимых испытаний, соответствующей последовательности* (3.1.2) *экспериментов* $Э_{i_1}, \ldots, Э_{i_n}$. Класс всех вероятностных пространств $(\mathcal{R}^n, \mathcal{B}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n})$, $i_\cdot : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *определяет вероятностное пространство* $(\mathcal{R}^\infty, \mathcal{B}, \mathrm{Pr}^{(\infty)})$ — *вероятностную модель бесконечной последовательности взаимно независимых испытаний* (*наблюдений*) (3.1.1). Действительно, определим борелевское цилиндрическое множество в $\mathcal{R}^\infty$

$$A^{(\infty)}_{i_1,\ldots,i_n} = \{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}, \ldots) \in \mathcal{R}^\infty,\ (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in A^{(n)}\}$$

с основанием $A^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}$ и вероятность $\mathrm{Pr}^{(\infty)}_0(\cdot)\colon \mathcal{B}_0 \to [0, 1]$ на алгебре $\mathcal{B}_0$ всех цилиндрических множеств $A^{(\infty)}_{i_1,\ldots,i_n}$ (3.1.4) в $\mathcal{R}^\infty$, получаемых при любых функциях $i_\cdot : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots\}$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{Pr}^{(\infty)}_0(A^{(\infty)}_{i_1,\ldots,i_n}) = \mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}(A^{(n)}),\ A^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)},$$

$$i_\cdot : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots\},\ n = 1, 2, \ldots$$

$\mathrm{Pr}^{(\infty)}_0$ — счетно-аддитивная вероятность на $\mathcal{B}_0$, определяющая единственную счетно-аддитивную вероятность $\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(\infty)} \to [0, 1]$ на σ-алгебре $\mathcal{B}^{(\infty)}$ борелевских множеств в $\mathcal{R}^\infty$ и соответствующее вероятностное пространство $(\mathcal{R}^\infty, \mathcal{B}^{(\infty)}, \mathrm{Pr}^{(\infty)})$ — *модель бесконечной последовательности взаимно независимых наблюдений* (3.1.1), как выборочное пространство бесконечной последовательности взаимно независимых экспериментов $Э_{1,2,\ldots}$

3.1.2. Законы больших чисел. Законы больших чисел (З. Б. Ч.) позволяют (эмпирически) определять математические ожидания случайных величин в терминах их наблюдаемых значений. Приведем формулировки некоторых из них.

Теорема 3.1.1. (А. Н. Колмогоров, усиленный З. Б. Ч.) *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *последовательность взаимно независимых случайных величин*, $\mathsf{E}^{(\infty)}\xi_i = m_i$, $\mathbf{D}^{(\infty)}\xi_i = \mathsf{E}^{(\infty)}(\xi_i - m_i)^2 = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$ *Тогда* *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2/n^2<\infty$, *то*[1] *при* $n\to\infty$ $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-*п. н.* $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\to 0$, *или, что то же самое*[2], *для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}\Big(\Big\{\sup_{n\geqslant N}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)\Big|>\varepsilon\Big\}\Big)=0. \tag{3.1.3}$$

Согласно условию (3.1.3) для любого $\varepsilon>0$ выполняется $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-п. н. конечное число неравенств среди $\Big|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)\Big|>\varepsilon$, $n=1,2,\ldots$

Действительно, событие $\mathrm{C}_\varepsilon=\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geqslant N}\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)|>\varepsilon\}$ происходит, если и только если происходит бесконечно много событий в последовательности $\big\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)|>\varepsilon\big\}$, $n=1,2,\ldots$ Согласно равенству (3.1.3) $\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\mathrm{C}_\varepsilon)=\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}\big(\bigcup\limits_{n\geqslant N}\big\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)|>\varepsilon\big\}\big)=$ $=\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}\big(\big\{\sup\limits_{n\geqslant N}|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)|>\varepsilon\big\}\big)=0.$

Замечание 3.1.1. Множество $Q=\Big\{(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in\mathcal{R}^\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)\Big)=0\Big\}\in\mathcal{B}^{(\infty)}$. В самом деле, для любых $n=1,2,\ldots$ и $r=1,2,\ldots$ $\Big\{(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in\mathcal{R}^\infty,\ \frac{1}{n}\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)\Big|<1/r\Big\}\in$ $\in\mathcal{B}^{(\infty)}$ и, следовательно, множество $Q=\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=s}^{\infty}\Big\{(\xi_1,\xi_2,\ldots)\in\mathcal{R}^\infty,\ \Big|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)\Big|<1/r\Big\}$ последовательностей $\xi_1,\xi_2,\ldots$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)=0$, содержится в $\mathcal{B}^{(\infty)}$. Поэтому если $\mathrm{Pr}^{(\infty)}(Q)=1$, то $\forall\varepsilon>0$ $\mathrm{Pr}^{(\infty)}\Big(\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=s}^{\infty}|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)|\leqslant\varepsilon\Big)=1$, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N$: $\forall n\geqslant N$ $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-п. н. выполнены все[3] неравенства $|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)|\leqslant\varepsilon$,

---

[1] Для краткости сходимость с $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-вероятностью единица будем называть сходимостью почти наверное (п. н.), или $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-п. н., если из контекста не ясно, о какой вероятности идет речь.

[2] См. § 3.1.2 гл. 3 и § 7 гл. 1 в [66].

[3] Событие $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=s}^{\infty}\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)|\leqslant\varepsilon\}$, дополнительное к C_ε, выполнено тогда и только тогда, когда выполнены все неравенства $\Big|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-m_i)\Big|\leqslant\varepsilon$, $n=1,2,\ldots$, исключая, быть может, конечное их число.

что можно записать как $\mathrm{Pr}^{(\infty)}\Big(\Big\{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - m_i)) = 0\Big\}\Big) = 1$, или как $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - m_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0$.

Замечание 3.1.2. Последовательность $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathcal{R}^\infty$, определенную на $(\mathcal{R}^\infty, \mathcal{B}^{(\infty)}, \mathrm{Pr}^{(\infty)})$, можно рассматривать и как функциональную последовательность $(\xi_1(\omega^{(1)}), \xi_2(\omega^{(2)}), \ldots)$, $\omega^{(i)} \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots$, определенную на $(\Omega^\infty, \mathcal{A}^{(\infty)}, \mathrm{Pr}_{1,2,\ldots})$ равенствами $\xi_i(\omega^{(i)}) = \xi_{(i)}(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как $\Big\{(\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \mathcal{R}^\infty$, $\frac{1}{n}\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - m_i)\Big| < 1/r\Big\} \in \mathcal{B}^{(\infty)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $r = 1, 2, \ldots$, то в силу $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-измеримости функций $\xi_i(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\Big\{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots) \in \Omega^\infty$, $\frac{1}{n}\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i(\omega^{(i)}) - m_i)\Big| < 1/r\Big\} \in \mathcal{A}^{(\infty)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $r = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\Big\{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots) \in \Omega^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i(\omega^{(i)}) - m_i)\Big) = 0\Big\} \equiv \bigcap\limits_{r=1}^{\infty}\bigcup\limits_{s=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=s}^{\infty}\Big\{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots) \in \Omega^\infty$, $\frac{1}{n}\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i(\omega^{(i)}) - m_i)\Big| < 1/r\Big\} \in \mathcal{B}^{(\infty)}$. Поэтому согласно теореме 3.1.1 $\mathrm{Pr}_{1,2,\ldots}\Big(\Big\{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i(\omega^{(i)}) - m_i)) = 0\Big\}\Big) = 1$.

Теорема 3.1.2. (П. Л. Чебышев, слабый З. Б. Ч.) *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ последовательность попарно некоррелированных случайных величин, $\mathsf{E}^{(\infty)}\xi_i = m_i$, $\mathbf{D}^{(\infty)}\xi_i = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n^2)\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2 = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}\Big(\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m_i)\Big| > \varepsilon\Big\}\Big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\Big(\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m_i)\Big| > \varepsilon\Big\}\Big) = 0. \quad (3.1.3^*)$$

В этом случае говорят, что при $n \to \infty$ последовательность $\zeta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - m_i)$, $n = 1, 2, \ldots$, по $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-вероятности сходится к нулю, или, что то же самое, $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}$-вероятность любого уклонения ζ_n от нуля стремится к нулю при $n \to \infty$.

Замечание 3.1.3. Если $\zeta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - m_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-п. н., то $\zeta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и по $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-вероятности. Действительно, $\forall\ \varepsilon > 0$ $\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{|\zeta_N| > \varepsilon\}) \leqslant \mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{\sup\limits_{n\geqslant N}|\zeta_n| > \varepsilon\})$, поэтому $\limsup\limits_{N\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{|\zeta_N| > \varepsilon\}) \leqslant \lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{\sup\limits_{n\geqslant N}|\zeta_n| > \varepsilon\}) = 0$, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{|\zeta_N| > \varepsilon\})$ существует и равен нулю.

Замечание 3.1.4. Если в теоремах 3.1.1 и 3.1.2 $\mathsf{E}^{(\infty)}\xi_i = m$, $i = 1, 2, \ldots$, то в них определен факт сходимости к m последовательности $(1/n)\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i, n = 1, 2, \ldots$

Следующий результат позволит оценить скорость сходимости в (3.1.3), (3.1.3*) в ситуациях, характерных для задач эмпирического построения стохастически измеримой возможности.

Лемма 3.1.1 (Хефдинг [98]). *Если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы и $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(a_k \leqslant \xi_k \leqslant b_k) = 1$, $k = 1, \ldots, n$, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\zeta_n - \mathsf{E}\zeta_n > n\varepsilon) \leqslant \exp\Big(-2n^2\varepsilon^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2\Big), \tag{3.1.4}$$

где $\zeta_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$.

Следствие 3.1.1. При условиях леммы 3.1.1

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\zeta_n - \mathsf{E}\zeta_n < -n\varepsilon) \leqslant \exp\Big(-2n^2\varepsilon^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2\Big),$$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(|\zeta_n - \mathsf{E}\zeta_n| > n\varepsilon) \leqslant 2\exp\Big(-2n^2\varepsilon^2 \Big/ \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2\Big).$$

Заметим, что если для любого $\varepsilon > 0$ при условиях леммы 3.1.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\exp\big(-2n^2\varepsilon^2/\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2\big) < \infty$, то при $n \to \infty$ $\gamma_n \triangleq \dfrac{1}{n}(\zeta_n - \mathsf{E}\zeta_n) \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$. Действительно, вероятность того, что для любого $\varepsilon > 0$ произойдет бесконечно много событий $\{|\gamma_n| > \varepsilon\}, n = 1, 2, \ldots$,

$$\mathrm{Pr}^{(\infty)}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n}\{|\gamma_k| > \varepsilon\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}\Big(\bigcup_{k\geqslant n}\{|\gamma_k| > \varepsilon\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}\big(\{|\gamma_k| > \varepsilon\}\big) \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\exp\big(-2k^2\varepsilon^2\big)/\sum_{s=1}^{k}(b_s - a_s)^2 = 0.$$

Следствие 3.1.2. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть взаимно независимые случайные векторы $\mathcal{R}^n$, ξ_{ik} — i-я координата k-го вектора и $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(a_{ik} \leqslant \xi_{ik} \leqslant b_{ik}) = 1$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$. Согласно лемме 3.1.1

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\big(\exists\, i \in \{1, \ldots, m\}\ \sum_{k=1}^{n}(\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) > n\varepsilon\big) =$$

$$= \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\big(\bigcup_{i=1}^{m}\big\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik} > n\varepsilon)\big\}\big) \leqslant \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\big(\sum_{k=1}^{n}(\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) > n\varepsilon\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\exp\big(-2n^2\varepsilon^2/\sum_{k=1}^{n}(b_{ik} - a_{ik})^2\big).$$

Если сверх того для каждого $k = 1, \ldots, n$ координаты $\xi_{1k}, \ldots, \xi_{mk}$ взаимно независимы, то

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\exists\, i \in \{1, \ldots, m\} \ \sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) > n\varepsilon) = \\
&= 1 - \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \ \sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) \leqslant n\varepsilon) = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) \leqslant n\varepsilon) = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) > n\varepsilon)) \leqslant \\
&\leqslant 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \exp(-2n^2\varepsilon^2 / \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} - a_{ik})^2)) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \exp(-2n^2\varepsilon^2 / \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} - a_{ik})^2)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \ \sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) > n\varepsilon) = \\
&= \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik} - \mathsf{E}\xi_{ik}) > n\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{m} \exp(-2n^2\varepsilon^2 / \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} - a_{ik})^2).
\end{aligned}$$

3.1.3. Асимптотические свойства последовательностей частот. Зададим случайные величины в последовательности (3.1.1) равенствами, см. замечание 3.1.2,

$$\xi_i^A(\omega^{(i)}) = \xi_{(i)}^A(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega^{(i)} \in A, \\ 0, & \text{если } \omega^{(i)} \in \Omega \backslash A, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.1.5}$$

для некоторого события $A \in \mathcal{A}$. В таком случае последовательность

$$(\xi_{i_1}^A(\omega^{(i_1)}), \ldots, \xi_{i_n}^A(\omega^{(i_n)})) \in \{0, 1\}^n \triangleq \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$$

определит вероятностное пространство $(\{0, 1\}^n, \mathcal{P}(\{0, 1\}^n), \ \mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n})$, в котором вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}$ задана значениями на событиях $(\xi_{i_1}^A, \ldots$ $\ldots, \xi_{i_n}^A) = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathrm{Pr}^{(n)}_{i_1,\ldots,i_n}(\xi_{i_1}^A =$ $= x_1, \ldots, \xi_{i_n}^A = x_n) = \mathrm{pr}_{i_1}^{x_1} \ldots \mathrm{pr}_{i_n}^{x_n} (1 - \mathrm{pr}_{i_1})^{1 - x_1} \ldots (1 - \mathrm{pr}_{i_n})^{1 - x_n}$, где $\mathrm{pr}_{i_k} \triangleq \mathrm{Pr}_{i_k}(\xi_{i_k}^A(\omega^{(i_k)}) = 1) = \mathrm{Pr}_{i_k}(A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим асимптотические свойства *последовательности частот*

$$\nu^{(n)}(A) = (\xi_1^A + \ldots + \xi_n^A)/n, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{3.1.6}$$

события $A \in \mathcal{A}$ в последовательности взаимно независимых испытаний.

Так как $\mathsf{E}^{(\infty)}\xi_i^A = \mathrm{pr}_i$, $\mathbf{D}^{(\infty)}\xi_i^A = \mathrm{pr}_i(1 - \mathrm{pr}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{D}^{(\infty)}\xi_n^A)/n^2 < \infty$, то, согласно теореме 3.1.1, для последовательности $\xi_1^A, \xi_2^A, \ldots$ выполнен усиленный З. Б. Ч., согласно которому

$$\nu^{(n)}(A) - \mathsf{E}^{(\infty)}\nu^{(n)}(A) = \nu^{(n)}(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Pr}_i(A) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0, \qquad (3.1.7)$$

и, в частности, — для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\mathrm{Pr}^{(\infty)}$-п. н. конечное число неравенств среди

$$|\nu^{(n)}(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Pr}_i(A)| > \varepsilon,\ n = 1, 2, \ldots, \qquad (3.1.8)$$

причем, поскольку в (3.1.6) $0 \leqslant \xi_i^A \leqslant 1$, $A \in \mathcal{A}$, и ξ_i^A, $i = 1, 2, \ldots$, взаимно независимы, то, согласно лемме 3.1.1, равномерно по $A \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\Big(\{|\nu^{(n)}(A) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Pr}_i(A)| > \varepsilon\}\Big) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}, n = 1, 2, \ldots \quad (3.1.9)$$

Замечание 3.1.5. В более общей ситуации, характерной для задач эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности, требуется оценить скорость сходимости линейной комбинации частот $\zeta_s^{(n)} = \sum\limits_{t=1}^{s} a_t\nu^{(n)}(A_t)$ при $n \to \infty$ к ее математическому ожиданию $\mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\zeta_s^{(n)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{t=1}^{s} a_t\mathrm{Pr}_j(A_t)$. Согласно лемме 3.1.1, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\zeta_s^{(n)} - \mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\zeta_s^{(n)} > \varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n\varepsilon^2/\mathrm{c}_s^2),$$
$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\zeta_s^{(n)} - \mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\zeta_s^{(n)} < -\varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n\varepsilon^2/\mathrm{c}_s^2), \quad (3.1.10)$$

где $\mathrm{c}_s = \sup\limits_{\omega\in\Omega}\sum\limits_{t=1}^{s} a_t\xi^{A_t}(\omega) - \inf\limits_{\omega\in\Omega}\sum\limits_{t=1}^{s} a_t\xi^{A_t}(\omega)$, $\xi^{A_t}(\omega) = 1$, если $\omega \in A_t$, $\xi^{A_t}(\omega) = 0$, если $\omega \in \Omega\backslash A_t$, $t = 1, \ldots, s$, а в том случае, когда $A_i \bigcap A_k = \varnothing$, $i \neq k$, $i, k = 1, \ldots, s$, $\mathrm{c}_s = \max(0, a_1, \ldots, a_s) - \min(0, a_1, \ldots, a_s)$.

Если в (3.1.7), (3.1.8) $\mathrm{Pr}_1 = \mathrm{Pr}_2 = \ldots = \mathrm{Pr}$, то речь идет о взаимно независимых испытаниях, каждое из которых является копией первого. В этом случае последовательность частот $\nu^{(1)}(A), \nu^{(2)}(A), \ldots$ события A п. н. сходится к $\mathrm{Pr}(A)$. Этот факт, а именно: $\forall\,\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}\left(\sup_{n\geqslant N}\Big|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}(A)\Big| > \varepsilon\right) = 0 \qquad (3.1.11)$$

— и оценка в (3.1.9), согласно которой равномерно по $A \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(|\nu^{(n)}(A) - \mathrm{Pr}(A)| > \varepsilon) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2},\ n = 1, 2, \ldots, \qquad (3.1.12)$$

лежат в основе эмпирического событийно-частотного толкования вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$, согласно которому по наблюдениям за частотами $\nu^{(n)}(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, событий $A \in \mathcal{A}$ можно сколь угодно точно оценить вероятность Pr, контролирующую каждое испытание.

В этой связи частоту $\nu^{(n)}(\cdot)$ называют эмпирической вероятностью $\widehat{\mathrm{Pr}}_{(n)}(\cdot,\cdot)$; $\widehat{\mathrm{Pr}}_{(n)}(\cdot,\omega^\infty)\colon\ \mathcal{A}\to[0,1]$, $\omega^\infty=(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\ldots)\in\Omega^\infty$, — случайная функция, определенная условием [1] $\widehat{\mathrm{Pr}}_{(n)}(A,\omega^\infty)\triangleq\nu^{(n)}(A)$, $A\in\mathcal{A}$. При этом $\mathrm{Pr}^{(\infty)}\big(\{\omega^\infty\in\Omega^\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\mathrm{Pr}}_{(n)}(A,\omega^\infty)=\mathrm{Pr}(A)\}\big)=1$, $A\in\mathcal{A}$.

Но когда вероятность изменяется от испытания к испытанию, *эмпирической вероятностью события* $A\in\mathcal{A}$ *естественно считать* $\mathrm{Pr}_{(n)}(A)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Pr}_i(A)$ (последняя, как показано в этой главе, определяет возможность A), а $\widehat{\mathrm{Pr}}_{(n)}(A)=\nu^{(n)}(A)$ — считать *эмпирической оценкой* $\mathrm{Pr}_{(n)}(A)$.

3.1.4. Предельные теоремы. Закон повторного логарифма. Законы больших чисел (3.1.11) и (3.1.12) определяют факт и характер сходимости последовательности случайных величин, но при известном качестве последних характер сходимости может быть существенно уточнен. Асимптотические оценки скорости сходимости можно получить, обратившись к центральной предельной теореме (Ц. П. Т.) и к закону повторного логарифма (З. П. Л.). Для наших целей достаточна Ц. П. Т. в следующей формулировке.

Теорема 3.1.3. (А. М. Ляпунов, Ц. П. Т.) *Пусть* $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — *последовательность взаимно независимых случайных величин, и для всех* $n=1,2,\ldots$ *существуют моменты* $\mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\xi_n=m_n$, $\mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n,}(\xi_n-m_n)^2=\sigma_n^2$, $\mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n,}|\xi_n-m_n|^3=\alpha_n^3$. *В таком случае если* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^3)^{1/3}/(\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}=0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\big(\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-m_k)/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}<x\}\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du=$$
$$=\Phi(x)\ \text{равномерно по}\ x\in(-\infty,\infty).\quad(3.1.13)$$

Скорость сходимости в (3.1.13) оценивается неравенством (Эссеен)

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-m_k)/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}<x\})-\Phi(x)|\leqslant$$
$$\leqslant a\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^3/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{3/2},\ n=1,2,\ldots,\quad(3.1.14)$$

где a — абсолютная постоянная.

[1] Эмпирическая вероятность $\widehat{\mathrm{Pr}}_{(n)}(\cdot,\omega^\infty)$ определяется равномерным дискретным распределением на Ω, сосредоточенным в случайных точках $\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(n)}$, $\widehat{\mathrm{Pr}}_{(n)}(A,\omega^\infty)=\sum\limits_{i:\ \omega^{(i)}\in A}\mathrm{pr}^{(i)}$, $\mathrm{pr}^{(1)}=\ldots=\mathrm{pr}^{(n)}=1/n$, $A\in\mathcal{A}$, [7].

В (3.1.13), (3.1.14) и всюду далее в этой главе $\Phi(\cdot)$ — символ гауссовской $\mathcal{N}(0,1)$ функции распределения.

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ взаимно независимы и одинаково распределены, например, являются взаимно независимыми копиями случайной величины ξ, $\mathsf{E}\xi = m$, $\mathsf{E}(\xi - m)^2 = \sigma^2$, $\mathsf{E}|\xi - m|^3 = \alpha^3$, то выполнены условия теоремы 3.1.3, а скорость сходимости в (3.1.13) оценивается неравенством (Берри–Эссеен)

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big|\Pr\nolimits^{(n)}_{1,\ldots,n}\Big(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m)/(\sigma\sqrt{n}\,) < x\Big) - \Phi(x)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant c\alpha^3\big/(\sigma^3\sqrt{n}\,), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 1\big/\sqrt{2\pi} \leqslant c \leqslant 0{,}8. \quad (3.1.15)$$

Хотя при $n \to \infty$ согласно (3.1.13) $\Pr^{(n)}_{1,\ldots,n}\Big(\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}\Big| > x\Big) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{x}^{\infty} e^{-u^2/2}du = 2(1-\Phi(x))$, это условие не исключает того, что значения $\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}\Big|$, $n = 1, 2, \ldots$, могут оказаться произвольно большими для бесконечно многих n. Какими именно могут оказаться эти значения, определяет так называемый *закон повторного логарифма* (З. П. Л.).

Теорема 3.1.4. (А. Н. Колмогоров, З. П. Л.) *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *последовательность взаимно независимых случайных величин*, $\mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\xi_n = m_n$, $\mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\xi_n - m_n)^2 = \sigma_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, *при* $n \to \infty$ $\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \to \infty$ *и существует последовательность чисел* $M_1, M_2, \ldots$ *такая, что* $M_n = o\big((\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2/\ln\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}\big)$ *и* $|\xi_n - m_n| \leqslant M_n$ *п. н.*, $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\ln\ln\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}\Big) = 1 \ \text{п. н.}$$
$$\liminf_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\ln\ln\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}\Big) = -1 \ \text{п. н.} \quad (3.1.16)$$

Согласно теореме 3.1.4 при $n \to \infty$ и любом $\delta > 1$ происходит $\Pr^{(\infty)}$-п. н. конечное число событий

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\ln\ln\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2} > \delta,$$
$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\ln\ln\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2} < -\delta,$$

$n = 1, 2, \ldots$, а при любом $\delta < 1$ — бесконечно много. То же самое можно сказать и о событиях

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2} > \delta(2\ln\ln\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}(\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty),$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2} < -\delta(2\ln\ln\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}(\xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty),$$

хотя, согласно (3.1.13), статистика $\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - m_k)/(\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2)^{1/2}$ асимптотически при $n \to \infty$ нормальна $\mathcal{N}(0,1)$.

Случай одинаково распределенных $\xi_1, \xi_2, \ldots$ более полно охарактеризован в следующей теореме.

Теорема 3.1.4* (Хартман, Винтнет, З. П. Л.). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *взаимно независимые копии случайной величины* ξ, $\mathsf{E}\xi = m$, $\mathsf{E}(\xi - m)^2 = \sigma^2$, *тогда* $\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\limsup\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{k}(\xi_s - m)/(2\sigma^2 k\ln\ln k)^{1/2} = 1) = 1$, $\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\liminf\limits_{k\to\infty}(\sum\limits_{s=1}^{k}(\xi_s - m)/(2\sigma^2 k\ln\ln k)^{1/2}) = -1) = 1$ *и каждая точка интервала* $[-1, 1]$ *является предельной* (*в смысле сходимости п. н.*) *для последовательности* $\sum\limits_{s=1}^{k}(\xi_s - m)/(2\sigma^2 k\ln\ln k)^{1/2}$, $k = 1, 2, \ldots$

3.1.5. Предельные распределения последовательностей частот. Согласно равенствам (3.1.5) в теореме 3.1.3 при $\xi_i = \xi_i^A$, $i = 1, 2, \ldots$, $m_k = \mathrm{Pr}_k(A)$, $\sigma_k^2 = \sigma_k^2(A) = \mathrm{Pr}_k(A)(1 - \mathrm{Pr}_k(A))$ и $\alpha_k^3 = \alpha_k^3(A) = \sigma_k^2(A)(1 - 2\sigma_k^2(A))$. Поэтому при $n \to \infty$, если $\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A) \to \infty$, то $(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^3(A))^{1/3}/(\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A))^{1/2} \to 0$, т. е. условия теоремы 3.1.3 выполнены. Следовательно, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k^2(A) = \infty$, то, см.(3.1.6),

$$\nu^{(n)}(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k(A) + \eta^{(n)}(A)\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A)\Big)^{1/2}, \qquad (3.1.17)$$

где случайная величина $\eta^{(n)}(A)$ асимптотически при $n \to \infty$ нормальна $\mathcal{N}(0,1)$. Последнее означает, что распределение $\eta^{(n)}(A)$ при $n \to \infty$ сходится к распределению $\mathcal{N}(0,1)$ и, в частности, при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{Pr}_{1,\ldots,n}^{(n)}\Big(n|\nu^{(n)}(A) - (1/n)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k(A)|\Big/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A))^{1/2} > \varepsilon\Big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 2(1 - \Phi(\varepsilon)). \qquad (3.1.18)$$

Поэтому для больших n

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\Big(|\nu^{(n)}_n(A)-(1/n)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k(A)|>\varepsilon\Big)\approx$$
$$\approx 2\Big(1-\Phi\big(n\varepsilon(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A))^{-\frac{1}{2}}\big)\Big)\leqslant$$
$$\leqslant 2(1-\Phi(2\varepsilon\sqrt{n}\,))\sim\frac{\theta}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2 n}}e^{-2\varepsilon^2 n},\ 0<\theta<1,\ [38],\quad (3.1.19)$$

ср. с (3.1.9), а, согласно (3.1.14),

$$\sup_{-\infty<\kappa<\infty}|\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\big(n(\nu^{(n)}(A)-(1/n)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k(A))/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A))^{\frac{1}{2}}<$$
$$<x\big)-\Phi(x)|\leqslant a\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A)(1-2\sigma_k^2(A))/(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A))^{\frac{3}{2}},\ n=1,2,\ldots,\quad (3.1.20)$$

причем если в (3.1.20) $\mathrm{Pr}_k(A)=\mathrm{Pr}(A)$, $\sigma_k^2(A)=\sigma^2(A)$, $k=1,2,\ldots$, то, согласно оценке в (3.1.15), правую часть в (3.1.20) можно заменить на $c(1-2\sigma^2(A))/\sigma(A)$, где $\sqrt{2\pi}\leqslant c\leqslant 0{,}8$.

Наконец, если в теореме 3.1.4 $\xi_k=\xi_k^A$, $k=1,2,\ldots$, и при $n\to\infty$ $\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A)\to\infty$, то выполнены условия и этой теоремы, поэтому

$$\begin{matrix}\limsup\limits_{n\to\infty}\\ \liminf\limits_{n\to\infty}\end{matrix}\left\{\frac{n(\nu^{(n)}(A)-(1/n)\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k(A))}{(2\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A)\ln\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A))^{\frac{1}{2}}}\right\}=\left\{\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}\right.\ \text{п. н.}\quad (3.1.16^*)$$

Равенства в (3.1.16*) оценивают величину максимальных флуктуаций $\nu^{(n)}(A)-(1/n)\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k(A)$, $n=1,2,\ldots$

Согласно оценке в (3.1.20) приближение распределения статистики

$$n\Big(\nu^{(n)}(A)-(1/n)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Pr}_k(A)\Big)\Big/\Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(A)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

распределением $\mathcal{N}(0,1)$ при каждом n тем хуже, чем меньше дисперсия $\sigma_k^2(A)=\mathrm{Pr}_k(A)(1-\mathrm{Pr}_k(A))$, $k=1,2,\ldots$, т. е. чем ближе значения $\mathrm{Pr}_k(A)$, $k=1,2,\ldots$, к нулю или к единице. В том случае когда $\mathrm{Pr}_1=\mathrm{Pr}_2=\ldots=\mathrm{Pr}$ и $\mathrm{Pr}(A)$ близко к нулю, асимптотику распределения $\nu^{(n)}(A)-\mathrm{Pr}(A)$ можно получить, рассмотрев *схему серий* взаимно независимых испытаний, в которой моделью k-го испытания является вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{Pr}_k)$, а моделью k-й серии — $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_k)^k = (\Omega^k, \mathcal{A}^{(k)}(\Omega), \mathrm{Pr}^{(k)})$, где $\mathrm{Pr}^{(k)} = \underbrace{\mathrm{Pr}_k \times \ldots \times \mathrm{Pr}_k}_{k \text{ раз}}, k = 1, 2, \ldots$

Теорема 3.1.5 (Пуассон). *Пусть* $\xi_{k,1}^A, \ldots, \xi_{k,k}^A$ *взаимно независимые копии случайной величины* $\xi_k^A(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega \in A, \\ 0, \ \omega \in \Omega \backslash A, \end{cases}$ *наблюдаемые в* k-*й серии*, $\mathsf{E}_k \xi_k^A(\cdot) = \mathrm{Pr}_k(A)$, $\nu^{(k)}(A) = (\xi_{k,1}^A + \ldots + \xi_{k,k}^A)/k$, $k = 1, 2, \ldots$, *и* $k\mathrm{Pr}_k(A) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \lambda(A)$. *Тогда* [1]

$$\mathrm{pr}_k^A(m) = \mathrm{Pr}^{(k)}\Big(\nu^{(k)}(A) - \mathrm{Pr}_k(A) = \frac{m - k\mathrm{Pr}_k(A)}{k}\Big) = \tag{3.1.21}$$
$$= C_k^m (\mathrm{Pr}_k(A))^m (1 - \mathrm{Pr}_k(A))^{k-m} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^m(A) e^{-\lambda(A)}}{m!} = \pi_m^A, \ \ m = 0, 1, \ldots$$

Скорость сходимости в (3.1.21) оценивается следующим неравенством (Ю. В. Прохоров): если $\widetilde{\mathrm{pr}}_k^A(m) = \begin{cases} \mathrm{pr}_k^A(m), & 0 \leqslant m \leqslant k, \\ 0, & m > k, \end{cases}$ то

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\widetilde{\mathrm{pr}}_k^A(m) - \pi_m^A| \leqslant \frac{2\lambda(A)}{k} \min(2, \lambda(A)). \tag{3.1.22}$$

Следствие 3.1.1. Для любого $\varepsilon > 0$ при $k \to \infty$

$$\mathrm{Pr}^{(k)}(k(\nu^{(k)}(A) - \mathrm{Pr}_k(A)) > \varepsilon) = \sum_{m < k\mathrm{Pr}_k(A) + \varepsilon} \mathrm{pr}_k^A(m) \to$$
$$\to \sum_{m < \lambda(A) + \varepsilon} \pi_m^A \tag{3.1.21*}$$

$$\mathrm{Pr}^{(k)}(|\nu^{(k)}(A) - \mathrm{Pr}_k(A)| > \varepsilon/k) = \sum_{m:\ |m - k\mathrm{Pr}_k(A)| > \varepsilon} \mathrm{pr}_k^A(m) \to \sum_{m:\ |m - \lambda(A)| > \varepsilon} \pi_m^A.$$

Поэтому $\nu^{(k)}(A) = \mathrm{Pr}_k(A) + \eta^{(k)}(A)/k$, где случайная величина $\eta^{(k)}(A)$ асимптотически при $k \to \infty$ распределена согласно условию

$$\mathrm{Pr}^{(k)}(\eta^{(k)}(A) < x) \to \sum_{m < \lambda(A) + x} \pi_m^A, \ x > 0.$$

Замечание 3.1.6. Если в пределах k-й серии вероятность не постоянна, т. е. если моделью k-й серии является $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_{k,1}) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_{k,k})$, $k = 1, 2, \ldots$, и при $k \to \infty$ $\sum_{s=1}^{k} \mathrm{Pr}_{k,s}(A) \longrightarrow \lambda(A)$, то,

[1] π_m^A, $m = 0, 1, \ldots$, — распределение Пуассона, $\mathrm{pr}_k^A(m)$, $m = 0, 1, \ldots, k$, — биномиальное распределение.

определив $\mathrm{Pr}^{(k)} = \mathrm{Pr}_{k,1} \times \ldots \times \mathrm{Pr}_{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, вместо (3.1.21) найдем

$$\mathrm{Pr}^{(k)}\Big(\nu^{(k)}(A) - \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}_{k,s}(A) = \frac{1}{k}(m - \sum_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}_{k,s}(A))\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda(A)}{m!}e^{-\lambda(A)}, \tag{3.1.23}$$

$$m = 0, 1, \ldots,$$

причем формулы (3.1.21*) верны и в этом случае, если считать, что в них $\mathrm{Pr}_k(A) = \frac{1}{k}\sum\limits_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}_{k,s}(A)$, точнее для любого $\varepsilon > 0$ при $k \to \infty$

$$\mathrm{Pr}^{(k)}(k(\nu^{(k)}(A) - \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}_{k,s}(A) < \varepsilon) \to \sum_{m<\lambda(A)+\varepsilon}\pi_m^A,$$

$$\mathrm{Pr}^{(k)}(|\nu^{(k)}(A) - \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}_{k,s}(A)| > \varepsilon/k) \to \sum_{m\colon\, |m-\lambda(A)|>\varepsilon}\pi_m^A. \tag{3.1.23*}$$

3.1.6. Асимптотические представления линейных комбинаций частот. Рассмотрим асимптотическое при $n \to \infty$ представление для случайной величины

$$\zeta^{(n)} = \sum_{s=1}^{m} a_s\nu^{(n)}(A_s) = \sum_{s=1}^{m} a_s\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi^{A_s}(\omega^{(i)})\Big), \tag{3.1.24}$$

получаемой при регистрации частот событий $A_1, \ldots, A_m$ в последовательности n взаимно независимых испытаний, модель каждого из которых определена как вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$.

Так как

$$\mathsf{E}^{(\infty)}\zeta^{(n)} = \sum_{s=1}^{m} a_s\mathrm{Pr}(A_s), \quad \mathsf{E}^{(\infty)}(\zeta^{(n)} - \mathsf{E}^{(\infty)}\zeta^{(n)})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{s,t=1}^{m} a_s a_t(\mathrm{Pr}(A_s \bigcap A_t) - \mathrm{Pr}(A_s)\mathrm{Pr}(A_t)) \triangleq \sigma^2(a, A)/n, \tag{3.1.25}$$

где $A = (A_1, \ldots, A_m)$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$, то в силу Ц. П. Т. 3.1.3 для $\zeta^{(n)}$ (3.1.24) найдем следующее асимптотическое представление

$$\zeta^{(n)} = \sum_{s=1}^{m} a_s\nu^{(n)}(A_s) = \sum_{s=1}^{m} a_s\mathrm{Pr}(A_s) + (\sigma(a, A)/\sqrt{n}\,)\eta^{(n)}(a, A), \tag{3.1.26}$$

в котором случайная величина $\eta^{(n)}(a, A)$ асимптотически при $n \to \infty$ нормальна $\mathcal{N}(0, 1)$.

В общем случае последовательности n взаимно независимых испытаний, моделью которой является $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_1) \times (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_2) \times \ldots \times$

$\times (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_n)$, частота $\nu^{(n)}(A)$ (3.1.6) события $A \in \mathcal{A}$ согласно определению (3.1.5) дается равенством

$$\nu^{(n)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^A(\omega^{(i)}), \tag{3.1.27}$$

в котором

$$\mathsf{E}^{(\infty)} \xi_i^A(\cdot) = \mathrm{Pr}_i(A), \;\; \mathbf{D}^{(\infty)} \xi_i^A(\cdot) = \mathrm{Pr}_i(A)(1 - \mathrm{Pr}_i(A)) \triangleq \sigma_i^2(A) \tag{3.1.28}$$

и при этом

$$\alpha_i^3(A) = \mathsf{E}^{(\infty)} |\xi_i(\cdot) - \mathrm{Pr}_i(A)|^3 = \sigma_i^2(A)(1 - 2\sigma_i^2(A)), \; i = 1, 2, \ldots \tag{3.1.29}$$

Предположим, что при $n \to \infty$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A) \to \infty$, тогда согласно (3.1.28), (3.1.29) при $n \to \infty$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^3(A)\Big)^{1/3} \Big/ \Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)\Big)^{1/2} < \Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A)\Big)^{-1/6} \to 0$$

и, следовательно, для последовательности $\xi_i^A(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots$, в (3.1.27) выполнены условия теоремы 3.1.3. Поэтому

$$\nu^{(n)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A) + (\sigma^{(n)}(A)/\sqrt{n}\,)\eta^{(n)}(A), \tag{3.1.30}$$

где

$$(\sigma^{(n)}(A))^2 \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A), \; n = 1, 2, \ldots, \tag{3.1.31}$$

а случайная величина $\eta^{(n)}(A)$ при $n \to \infty$ асимптотически нормальна $\mathcal{N}(0, 1)$.

Если среди вероятностей $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ в (3.1.30) лишь конечное число k различных, обозначим их $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, то в равенстве (3.1.31)

$$(\sigma^{(n)}(A))^2 = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n) \sigma_{(s)}^2(A), \tag{3.1.32}$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность Pr^s встречается в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \ldots, \mathrm{Pr}_n$, и $\sigma_{(s)}^2(A) = \mathrm{Pr}^s(A)(1 - \mathrm{Pr}^s(A))$, $s = 1, \ldots, k$. В этом случае представление (3.1.30) имеет место, если, например, $\sigma_{(s)}(A) > 0$, $s = 1, \ldots, k$, поскольку тогда при $n = \sum\limits_{s=1}^{k} n_s \to \infty$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A) = \sum\limits_{s=1}^{k} n_s \sigma_{(s)}^2(A) \longrightarrow \infty$.

В дальнейшем нам потребуются асимптотические свойства последовательности

$$\zeta^{(n)}(a, A) = \sum_{i=1}^{m} a_i \Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \xi_l^{A_i}(\omega^{(l)})\Big), \quad n = 1, 2\ldots, \tag{3.1.33}$$

— аналога последовательности (3.1.24) в том случае, когда в последовательности испытаний, модель которых определена как $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_1) \times$ $\times(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_2) \times \ldots$, регистрируются различные события $A_1, \ldots, A_m$; в (3.1.33) $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $A = (A_1, \ldots, A_m)$.

Для последовательности (3.1.33)

$$\mathsf{E}^{(\infty)}\zeta^{(n)}(a, A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{l=1}^{n} \mathrm{Pr}_l(A_i), \tag{3.1.34}$$

$$\mathbf{D}^{(\infty)}\zeta^{(n)}(a, A) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j \sum_{l=1}^{n}(\mathrm{Pr}_l(A_i \bigcap A_j) - \mathrm{Pr}_l(A_i)\mathrm{Pr}_l(A_j)),$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Скорость сходимости $\zeta^{(n)}(a, A) - \mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\zeta^{(n)}(a, A) \to 0$ при $n \to \infty$ оценена в замечании 3.1.5 неравенством (3.1.10).

Если среди вероятностей $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots, \mathrm{Pr}_n$ в (3.1.33) конечное число k различных $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, причем Pr^s встречается среди $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ $\ldots, \mathrm{Pr}_n$ n_s раз, $s = 1, \ldots, k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$, то в равенствах (3.1.34)

$$\mathsf{E}^{(\infty)}\zeta^{(n)}(a, A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{s=1}^{k} n_s \mathrm{Pr}^s(A_i), \tag{3.1.35}$$

$$\mathbf{D}^{(\infty)}\zeta^{(n)}(a, A) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{m} a_i a_j \sum_{s=1}^{k} n_s(\mathrm{Pr}^s(A_i \bigcap A_j) - \mathrm{Pr}^s(A_i)\mathrm{Pr}^s(A_j)).$$

В этом случае условия теоремы 3.1.3 выполнены, поэтому

$$\zeta^{(n)}(a, A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{s=1}^{k} n_s \mathrm{Pr}^s(A_i) + (\mathbf{D}^{(\infty)}\zeta^{(n)}(a, A))^{1/2}\eta^{(n)}(a, A), \tag{3.1.36}$$

где $\eta^{(n)}(a, A)$ — асимптотически при $n \to \infty$ нормальная $\mathcal{N}(0, 1)$ случайная величина.

Далее особый интерес представит случай, в котором $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $a_i \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, m$, и соответственно, согласно (3.1.35),

$$\mathbf{D}^{(\infty)}\zeta^{(n)}(a,A)=\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{k}\frac{n_s}{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\mathrm{Pr}^s(A_i)-\Big(\sum_{i=1}^{m}a_i\mathrm{Pr}^s(A_i)\Big)^2\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{n_s}{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}a_i\mathrm{Pr}^s(A_i)\big(\max_{1\leqslant j\leqslant m}a_j-\sum_{i=1}^{m}a_i\mathrm{Pr}^s(A_i)\big)\Big)\leqslant$$
$$\leqslant(\max_{1\leqslant j\leqslant m}a_j)^2/(4n),\quad(3.1.37)$$

ибо для любого a $\max\limits_{-\infty<t<\infty}t(a-t)=a^2/4$.

3.2. Асимптотические свойства эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности

В этом параграфе рассмотрены асимптотические свойства эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности $\mathrm{P}\in\mathbb{P}_m$, или, что эквивалентно, — класса $\mathbb{P}_m$ эквивалентных возможностей, см. § 2.5.2 гл. 2, на основе результатов взаимно независимых испытаний $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{Pr}_1),\times(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{Pr}_2)\times\ldots$, в которых $\mathrm{Pr}_i\in\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $i=1,2,\ldots$ Значение $m\in M$, фиксированное условиями испытаний, разумеется, неизвестно и должно быть определено на основе их исходов. Напомним, что класс $\mathbb{P}_m$ и любая возможность $\mathrm{P}\in\mathbb{P}_m$ называются $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$-измеримыми, класс вероятностей $\mathbb{P}r_m$ называется стохастической моделью класса $\mathbb{P}_m$ и любой возможности $\mathrm{P}\in\mathbb{P}_m$, определяющей возможностную модель $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ каждого испытания $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{Pr}_i)$, $i==1,2,\ldots$

Вначале, в § 3.2.1, рассмотрен случай равных вероятностей, $\mathrm{Pr}_1==\mathrm{Pr}_2=\ldots=\mathrm{Pr}$, затем, в § 3.2.2, — попарно различных; всюду $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$, причем в § 3.2.1, 3.2.2 априори известна упорядоченность вероятностей элементарных событий, т. е. известно, что $\mathrm{Pr}_i\in\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $i=1,2,\ldots$, но $e\in(0,1)$ неизвестно. В § 3.2.3 на примере задачи эмпирического восстановления возможности, рассмотренной во введении, разобран общий случай $\mathrm{Pr}_i\in\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $i=1,2,\ldots$, в котором должно быть определено значение $m\in M$.

Показано, что при выполнении достаточно слабых требований к последовательности $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{Pr}_i)$, $i=1,2,\ldots$, во всех перечисленных случаях возможностная модель $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{P})$, единая для всех $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{Pr}_i)$, $i=1,2,\ldots$, восстанавливается, в смысле определения 3.2.1, *безошибочно* на основе результатов *п. н. конечного числа испытаний.*

3.2.1. Эмпирическое восстановление Pr-измеримой возможности, Pr $\in\mathbb{P}\mathrm{r}$. Рассмотрим вопрос об эмпирическом восстановлении возможности P, согласованной с вероятностью Pr, в случае, когда априори *известна упорядоченность вероятностей*

$$\mathrm{pr}_1\geqslant\mathrm{pr}_2\geqslant\ldots\geqslant0,\ \mathrm{pr}_1+\mathrm{pr}_2+\ldots=1,\ \mathrm{pr}_i=\mathrm{Pr}(\{\omega_i\}),\ i=1,2,\ldots,\quad(3.2.1)$$

и с ней согласована упорядоченность возможностей

$$1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots \geqslant 0,\ \mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\}),\ i = 1, 2, \ldots \tag{3.2.2}$$

В § 2.4 гл. 2 показано, что *конкретная* упорядоченность возможностей в (3.2.2) при условии $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$ определяется следующими условиями, связывающими ее со *значениями* вероятностей в (3.2.1),

$$\begin{array}{l} e_j = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_j > \mathrm{p}_{j+1} \Longleftrightarrow f_j \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j > 1; \\ e_j = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_j = \mathrm{p}_{j+1} \Longleftrightarrow f_j \leqslant 1,\ j = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{3.2.3}$$

Задача состоит в том, чтобы, наблюдая за исходами испытаний, модель которых определена как $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}) \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}) \times \ldots$, решить, какие из неравенств в (3.2.3) выполняются для вероятностей в (3.2.1), тем самым определить конкретную упорядоченность возможностей в (3.2.2), а следовательно, — восстановить возможностную модель каждого испытания.

Разумеется, в случае счетного $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ эмпирически в (3.2.2) может быть восстановлена фактическая упорядоченность возможностей только конечного числа элементарных событий.

Определение 3.2.1. Возможность $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ условимся называть эмпирически определенной (безошибочно на основе данных п. н. конечного числа испытаний), если для каждого $s = 1, 2, \ldots$ эмпирически определено (безошибочно на основе данных п. н. конечного числа испытаний) сужение [1] $[\mathrm{P}]_s(\cdot)\colon \sigma(\omega_1, \ldots, \omega_s) \to [0, 1]$ возможности P на $\sigma(\omega_1, \ldots, \omega_s)$.

Заметим, что если возможность $[\mathrm{P}]_s$ известна, то для любых $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ таких, что $A \cap \{\omega_1, \ldots, \omega_s\} \neq \varnothing$, $B \cap \{\omega_1, \ldots, \omega_s\} \neq \varnothing$, известно, какое из отношений $\mathrm{P}(A) > \mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$ или $\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B)$ выполнено, если $A \cap \{\omega_1, \ldots, \omega_s\} \neq \varnothing$, $B \cap \{\omega_1, \ldots, \omega_s\} = \varnothing$, то $\mathrm{P}(A) \geqslant \mathrm{P}(B)$, наконец, если $A, B \subset \Omega \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$, то, согласно (3.2.2), известно лишь, какое из неравенств, $\mathrm{P}(A) \geqslant \mathrm{P}(B)$ или $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, выполнено, причем для любого $A \in \sigma(\omega_1, \ldots, \omega_s)$ $\mathrm{P}(A) \geqslant \mathrm{P}(\Omega \setminus \{\omega_1, \ldots, \omega_s\})$.

Пусть в (3.1.11) $A = \{\omega_j\}$, $\mathrm{pr}_j = \mathrm{Pr}(\{\omega_j\})$ — вероятность и $\nu_j^{(n)} = \nu^{(n)}(\{\omega_j\})$ — частота элементарного события $\{\omega_j\}$ в последовательности n взаимно независимых испытаний, $j = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как для каждого $j = 1, 2, \ldots$ при $n \to \infty$ $\nu_j^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}_j$, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N = N(\varepsilon, m)$, такой, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon, m)$

$$\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{\ \ |\nu_1^{(n)} - \mathrm{pr}_1| < \varepsilon, \ldots, |\nu_m^{(n)} - \mathrm{pr}_m| < \varepsilon\ \ \}) = 1. \tag{3.2.4}$$

---

[1] $\sigma(\omega_1, \ldots, \omega_s)$ — минимальная подалгебра $\mathcal{P}(\Omega)$, содержащая $\{\omega_1\}, \ldots$ $\ldots, \{\omega_s\}$.

Поскольку в (3.2.3) $f_j = f_j(\overline{\mathrm{pr}}_{(j)}) = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j$, где $\overline{\mathrm{pr}}_{(j)} = (\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_j)$, — непрерывная функция в каждой точке $\overline{\mathrm{pr}}_{(j)} \in \in \{(\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_j),\ 1 > \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_j > \mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_j > 0\}$, $j = 1, \ldots, m$, то, согласно (3.2.4), для всякого $\varepsilon > 0$ и любого $m = 1, 2, \ldots$ можно указать номер $\overline{N}(\varepsilon, m)$ такой, что для всех $n \geqslant \overline{N}(\varepsilon, m)$

$$\mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\widehat{f}_j^{(n)} - f_j| < \varepsilon\}) = 1, \tag{3.2.5}$$

где

$$\widehat{f}_j^{(n)} = \nu_j^{(n)} + \ldots + \nu_{j-1}^{(n)} + 2\nu_j^{(n)},\ j = 1, \ldots, m,\ m = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.2.6}$$

Этот факт при дополнительном предположении *вполне регулярности вероятности*, контролирующей испытания, позволит охарактеризовать асимптотически при $n \to \infty$ решение задачи эмпирического восстановления возможности.

Определение 3.2.2. Вероятность Pr, удовлетворяющую условию (3.2.1), назовем *вполне регулярной*, если либо для всех $j = 1, 2, \ldots$

$$f_j = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j \neq 1, \tag{3.2.7}$$

либо *известно* $k < \infty$, для которого $\mathrm{pr}_k > 0 = \mathrm{pr}_{k+1} = \ldots$ и $f_j \neq 1$, $j = 1, \ldots, k$. Вероятность Pr назовем *регулярной*, если неравенство $\mathrm{pr}_j > 0$ влечет неравенство

$$f_j \neq 1, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots \tag{3.2.7*}$$

Замечание 3.2.1. Условие $\mathrm{pr}_j > 0 \Rightarrow f_j \neq 1$, $j = 1, 2, \ldots$, на самом деле эквивалентно условию $\mathrm{pr}_j > 0 \Leftrightarrow f_j \neq 1$, $j = 1, 2, \ldots$, поскольку, как нетрудно проверить, $f_j \overset{>}{\leqslant} 1 \Leftrightarrow \mathrm{pr}_j \overset{>}{\leqslant} \overline{\mathrm{pr}}_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\overline{\mathrm{pr}}_{j+1} = \mathrm{pr}_{j+1} + \mathrm{pr}_{j+2} + \ldots$ Отсюда и из (3.2.1) следует, что $f_j \neq 1 \Rightarrow \mathrm{pr}_j > 0$, ибо $f_j \neq 1 \Leftrightarrow \mathrm{pr}_j \neq \overline{\mathrm{pr}}_{j+1}$, и $\mathrm{pr}_j = 0 \Rightarrow f_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots$ Заметим, что и в случае регулярной вероятности возможно, что для некоторого $k < \infty$ $\mathrm{pr}_k > 0 = \mathrm{pr}_{k+1} = \ldots$, но *значение* k *неизвестно*. Поскольку в таком случае $\exists N\ \forall n \geqslant N\ \nu_1^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{>} 0, \ldots, \nu_k^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{>} 0$ и $\forall n = 1, 2, \ldots\ \nu_{k+1}^{(n)} = \nu_{k+2}^{(n)} = \ldots = 0$, то значение k может быть определено, причем, как было отмечено в предисловии, решение $\mathrm{pr}_{k+1} = \ldots = \mathrm{pr}_m$ может оказаться ошибочным с вероятностью $\mathrm{Pr}(\nu_{k+1}^{(n)} = \ldots = \nu_m^{(n)} = 0;\ \mathrm{pr}_m \geqslant \delta > 0) \leqslant (1 - (m-k)\delta)^n \leqslant \beta$, если $n \geqslant n(m, \delta, \beta) = \ln(1/\beta)/ln(1/(1 - (m-k)\delta))$, $\delta \in (0, 1/(m-k))$. Так как в данном случае m можно выбрать произвольно большим, выберем $\delta > 0$ и $\beta > 0$ достаточно малыми, причем так, чтобы $0 < \delta < \beta < 1$ и нашлось целое m такое, что $\dfrac{1-\beta}{\delta} \leqslant m - k \leqslant \dfrac{1}{\delta}$. При таковом выборе $n(m, \delta, \beta) \leqslant 1$ и для $n \geqslant N$ вероятность ошибочного решения $\mathrm{pr}_{k+1} = \ldots = \mathrm{pr}_m = 0$ не больше β. Например, при $\delta = 10^{-3}$

и $\beta = (1{,}1)10^{-3}$ условие $\dfrac{1-\beta}{\delta} = 10^3 - 1{,}1 \leqslant m - k \leqslant 10^3$ выполнено при $m = 10^3 + k - 1$.

Теорема 3.2.1. *Если распределение вероятностей элементарных событий удовлетворяет условиям* (3.2.1), (3.2.7), *то возможность восстанавливается безошибочно на основе результатов* Pr^∞*-п. н. конечного числа взаимно независимых испытаний.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что при условиях теоремы речь идет о выборе в (3.2.3) одной из альтернатив $f_j < 1$, или $f_j > 1$ для каждого $j = 1, 2, \ldots$, основанном на результатах испытаний. А поскольку при любой из альтернатив значение f_j принадлежит одному из интервалов $(0, 1)$ или [1] $(1, 2)$ вместе с некоторой окрестностью, то, согласно (3.2.5), вместе с f_j при достаточно большом $n = n_j$ и все $\widehat{f}_j^{(n_j)}, \widehat{f}_j^{(n_j+1)}, \ldots$ в (3.2.6) п. н. принадлежат этому же интервалу, а следовательно, вместе с $f_1, \ldots, f_m$ соответствующим интервалам $(0, 1)$ или $(1, 2)$ п. н. принадлежат и все $\widehat{f}_1^{(n(m))}, \ldots, \widehat{f}_m^{(n(m))}; \widehat{f}_1^{(n(m)+1)}, \ldots, \widehat{f}_m^{(n(m)+1)}, \ldots$, где $n(m) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \{n_j\}$. Это, в свою очередь, означает, что для любого $m = 1, 2, \ldots$ на основе п. н. конечного числа $n \geqslant n(m)$ испытаний безошибочно восстанавливается упорядоченность $\mathrm{p}_j > \mathrm{p}_{j+1}$ или $\mathrm{p}_j = \mathrm{p}_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, m$. ■

Заметим, что эта теорема, гарантируя *существование* решения задачи эмпирического восстановления Pr-измеримой возможности, не показывает, как это решение получить, поскольку значение $n(m)$ неизвестно.

Замечание 3.2.2. В случае нерегулярного распределения вероятностей в (3.2.1), например, если на самом деле $\mathrm{pr}_j > 0$ и $f_j = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $N(\varepsilon, j)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon, j)$ $1 - \varepsilon \overset{\text{п. н.}}{<} \widehat{f}_j^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{<} 1 + \varepsilon$, т. е. все $\widehat{f}_j^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, исключая, быть может, конечное их число, п. н. попадают в сколь угодно малую окрестность единицы, и на этом основании нельзя выбрать одну из альтернатив $f_j \leqslant 1$ или $f_j > 1$.

Следующие факты полезны при решении задачи эмпирического восстановления возможности в том случае, когда условие (3.2.1) не задано.

Теорема 3.2.2. *Обозначим* $\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_q^{(n)}$ *случайные частоты* q *исходов в последовательности* n *взаимно независимых полиномиальных испытаний, распределенные согласно равенствам*

$$\mathrm{Pr}(\nu_1^{(n)} = x_1/n, \ldots, \nu_q^{(n)} = x_q/n) = \frac{n!}{x_1! \ldots x_q!} \mathrm{pr}_1^{x_1} \ldots \mathrm{pr}_q^{x_q},$$

[1] $f_j = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j < 1 + \mathrm{pr}_j \leqslant 1 + 1/j < 2$.

$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_q \geqslant 0$, $x_1 + \ldots + x_q = n$, *в которых вероятности* $\mathrm{pr}_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{pr}_q$, $\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_q = 1$, *неизвестны. В задаче проверки гипотезы, согласно которой* $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_q$ — *истинные вероятности исходов, против альтернативы, согласно которой это не так, асимптотически при* $n \to \infty$ *байесовский критерий уровня значимости* $1 - \varepsilon$ *определяет любую из следующих областей принятия гипотезы* [7]:

$$N_{1-\varepsilon}^{(n)} = \Big\{(\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_q^{(n)}),\ \ \sum_{i=1}^{q} \frac{(\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i)^2}{\mathrm{pr}_i} < \frac{\delta_\varepsilon}{n}\Big\},$$

или

$$N_{1-\varepsilon}^{(n)} = \Big\{(\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_q^{(n)}),\ \sum_{i=1}^{q} \frac{(\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i)^2}{\nu_i^{(n)}} < \frac{\delta_\varepsilon}{n}\Big\},$$

где $\delta_\varepsilon > 0$ *определено условием* $\mathrm{Pr}(\chi^2_{q-1} < \delta_\varepsilon) = 1 - \varepsilon$, *в котором* χ^2_{q-1} — *статистика хи-квадрат с* $q - 1$ *степенями свободы.*

Соответственно любое из случайных множеств: $\Pi_{1-\varepsilon}^{(n)} \triangleq \{(\widetilde{\mathrm{pr}}_1, \ldots, \widetilde{\mathrm{pr}}_q),\ \ \widetilde{\mathrm{pr}}_1 + \ldots + \widetilde{\mathrm{pr}}_q = 1,\ \ \sum_{i=1}^{q} \frac{(\nu_i^{(n)} - \widetilde{\mathrm{pr}}_i)^2}{\widetilde{\mathrm{pr}}_i} < \frac{\delta_\varepsilon}{n}\}$ *или эллипсоид* $\Pi_{1-\varepsilon}^{(n)} = \{(\widetilde{\mathrm{pr}}_1, \ldots, \widetilde{\mathrm{pr}}_q), \widetilde{\mathrm{pr}}_1 + \ldots + \widetilde{\mathrm{pr}}_q = 1, \sum_{i=1}^{q} \frac{(\nu_i^{(n)} - \widetilde{\mathrm{pr}}_i)^2}{\nu_i^{(n)}} < \frac{\delta_\varepsilon}{n}\}$ *являются доверительными множествами асимптотически при* $n \to \infty$ *уровня доверия* $1 - \varepsilon$ *и минимального объема, т. е. для истинных* $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_q$ *при* $n \to \infty$ $\mathrm{Pr}((\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_q) \in \Pi_{1-\varepsilon}^{(n)}) \to 1 - \varepsilon$ [65].

В связи с задачей выбора одной из 25 возможностных моделей для $q = 3$, см. рис. 2.5.1 гл. 2, для девяти из них, представленных множествами $\mathbb{P}\mathrm{r}_1, \ldots, \mathbb{P}\mathrm{r}_9$, факт включения $\Pi_{1-\varepsilon}^{(n)} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}_i$ при $n \to \infty$ означает, что с вероятностью, не меньшей $1 - \varepsilon$, $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_i$, а это определяет конкретную упорядоченность возможностей $1 = \mathrm{p}_{i_1} \geqslant \mathrm{p}_{i_2} \geqslant \mathrm{p}_{i_3} \geqslant 0$ в соответствии с условиями в (3.2.3).

3.2.2. Эмпирическое восстановление $\mathbf{Pr}^1$-, …, $\mathbf{Pr}^k$-измеримой возможности, $\mathbf{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $s = 1, \ldots, k$. Пусть в бесконечной последовательности взаимно независимых испытаний, модель которых определена как $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_1) \times (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_2) \times \ldots$, среди вероятностей Pr_i, $i = 1, 2, \ldots$, конечное число k различных, скажем, $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, и $A \in \mathcal{A}$ — некоторое событие. Тогда при любом $n = 1, 2, \ldots$ в З. Б. Ч. (3.1.7)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(A) = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n) \mathrm{Pr}^s(A) \in [\min_{1 \leqslant s \leqslant k} \mathrm{Pr}^s(A), \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \mathrm{Pr}^s(A)],$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность $\mathrm{Pr}^s(A)$ встречается в последовательности $\mathrm{Pr}_1(A), \ldots, \mathrm{Pr}_n(A)$, $s = 1, \ldots, k$, $n_1 + \ldots + n_k = n$. Поскольку при $n \to \infty$ частоты n_s/n, $s = 1, \ldots, k$, принимают, вообще говоря, произвольные значения[1]) из $[0,1]$, удовлетворяющие лишь условию $n_1/n + \ldots + n_k/n = 1$, то при $n = 1,2,\ldots$ значение $\mathrm{Pr}_{(n)}(A) = \sum\limits_{s=1}^{k}(n_s/n)\mathrm{Pr}^s(A)$ произвольно «блуждает» по отрезку $[\min\limits_{1\leqslant s\leqslant k}\mathrm{Pr}^s(A), \max\limits_{1\leqslant s\leqslant k}\mathrm{Pr}^s(A)]$, и согласно (3.1.7) с увеличением n за ним все более точно следует частота $\nu^{(n)}(A)$ (3.1.6). *В этом случае знание вероятностей* $\mathrm{Pr}^1(A),\ldots,\mathrm{Pr}^k(A)$ *не позволяет оценить частоту* $\nu^{(n)}(A)$, *а по наблюдениям за частотами* $\nu^{(n)}(A)$, $n=1,2,\ldots$, $A \in \mathcal{A}$, *не может быть восстановлена стохастическая модель испытаний. Однако если* $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$ *— вполне регулярные вероятности и существует* $e \in (0,1)$ *такое, что* $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $s=1,\ldots,k$, *то может быть восстановлена возможностная модель каждого испытания, причем безошибочно на основании результатов п. н. конечного числа испытаний.*

Действительно, рассмотрим последовательность взаимно независимых испытаний, в модели $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{Pr}_1) \times (\Omega,\mathcal{A},\mathrm{Pr}_2) \times \ldots$ которых $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ и среди вероятностей $\mathrm{Pr}_1,\mathrm{Pr}_2,\ldots$ конечное число k различных $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$, удовлетворяющих условиям

$$\mathrm{pr}_1^s \geqslant \mathrm{pr}_2^s \geqslant \ldots > 0,\ \mathrm{pr}_1^s + \mathrm{pr}_2^s + \ldots = 1, \tag{3.2.8}$$

где $\mathrm{pr}_i^s = \mathrm{Pr}^s(\{\omega_i\})$, $s=1,\ldots,k$, $i=1,2,\ldots$ Предположим, что все вероятности $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$ содержатся в некотором классе $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ (см. (2.0.11) гл. 2), P — любая возможность из класса $\mathbb{P}_{(e)}$ (см. (2.0.8) гл. 2), $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримая согласно замечанию 2.4.3 гл. 2, *максимально согласованная с каждой вероятностью* $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$. Конкретную упорядоченность распределения $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i=1,2,\ldots$,

$$1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{p}_2 \geqslant \ldots > 0, \tag{3.2.9}$$

или, иначе говоря, — число $e = 0.e_1e_2\ldots \in (0,1)$, надлежит определить на основе результатов взаимно независимых испытаний, каждое из которых контролируется одной из вероятностей $\mathrm{Pr}^1,\ldots,\mathrm{Pr}^k$.

Максимальная согласованность распределения (3.2.9) со всеми k распределениями в (3.2.8) определяется следующими условиями:

$$\begin{gathered} e_i = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \forall\, s=1,\ldots,k\ f_i^s = \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}^s + 2\mathrm{pr}_i^s > 1; \\ e_i = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \forall\, s=1,\ldots,k\ f_i^s \leqslant 1,\ i=1,2,\ldots \end{gathered} \tag{3.2.10}$$

[1]) Если $\mathrm{Pr}^1(A),\ldots,\mathrm{Pr}^k(A)$ встречаются в последовательности $\mathrm{Pr}_1(A)$, $\mathrm{Pr}_2(A),\ldots$ с определенной закономерностью, например, с вероятностями $\mathrm{pr}^1,\ldots,\mathrm{pr}^k$ (байесовская модель!), то при $n\to\infty$ $n_s/n \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^s$, $s=1,\ldots,k$, и $\sum\limits_{s=1}^{k}(n_s/n)\mathrm{Pr}^s(A) \xrightarrow{\text{п. н.}} \sum\limits_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}^s(A)\mathrm{pr}^s$. В этом случае при $n\to\infty$ $\nu^{(n)}(A) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{Pr}(A) = \sum\limits_{s=1}^{k}\mathrm{Pr}^s(A)\mathrm{pr}^s$.

При эмпирическом восстановлении возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, $e = 0.e_1e_2\ldots$, *условия* $f_i^1 > 1, \ldots, f_i^k > 1$, *либо* $f_i^1 \leqslant 1, \ldots, f_i^k \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, *в* (3.2.10), *эквивалентные условию включения вероятностей* $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$ *в класс* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, *играют такую же роль, как условие неизменности вероятности при ее эмпирическом восстановлении по выборке, контролируемой этой вероятностью.*

Лемма 3.2.1. *Пусть* $\mathrm{pr}_i = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \mathrm{pr}_i^s$, $i = 1, 2, \ldots$, *где* $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. *Тогда* $f_j = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j > 1$ $(\leqslant 1)$, *если для всех* $s = 1, \ldots, k$ *соответственно* $f_j^s = \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1}^s + 2\mathrm{pr}_j^s > 1$ $(\leqslant 1)$, $j = 1, 2, \ldots$

Доказательство следует из равенств $f_j = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s f_j^s$, $j = 1, 2, \ldots$ ■

Заметим, что $\mathrm{pr}_i = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \mathrm{pr}_i^s$, $i = 1, 2, \ldots$, при любых $\lambda_s \geqslant 0$, $s = 1, \ldots, k$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, является распределением $\mathrm{Pr}(\cdot) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \mathrm{Pr}^s(\cdot)$, и если $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $s = 1, \ldots, k$, то и $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ в силу выпуклости класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$.

Введем обозначения

$$\mathrm{pr}_j^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_i(\{\omega_j\}) = \sum_{s=1}^{k} \frac{n_s}{n} \mathrm{pr}_j^s, \; j = 1, 2, \ldots, \tag{3.2.11}$$

где n_s/n — частота, с которой вероятность Pr^s встречается в последовательности $\mathrm{Pr}_1, \ldots, \mathrm{Pr}_n$, $n_1 + \ldots + n_k = n$,

$$\nu_j^{(n)} = \nu^{(n)}(\omega_j) = \sum_{s=1}^{k} \frac{n_s}{n} \nu_j^{(n_s)}, \; j = 1, 2, \ldots, \tag{3.2.12}$$

где $\nu_j^{(n_s)}$ — частота, с которой ω_j встречается в n_s испытаниях, исход которых контролируется вероятностью Pr^s, $s = 1, \ldots, k$.

Так как для любых $\varepsilon > 0$, k и m существует число $N = N(\varepsilon, k, m)$, такое, что для всех $s = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, для всех $n \geqslant N(\varepsilon, k, m)$ $|\nu_j^{(n_s)} - \mathrm{pr}_j^s| \overset{\text{п. н.}}{<} \varepsilon$, то для любых $\varepsilon > 0$, $j = 1, \ldots, m$ и для всех $n \geqslant N(\varepsilon, k, m)$

$$|\nu_j^{(n)} - \mathrm{pr}_j^{(n)}| \overset{\text{п. н.}}{\leqslant} \sum_{s=1}^{k} (n_s/n) |\nu_j^{(n_s)} - \mathrm{pr}_j^s| < \varepsilon. \tag{3.2.13}$$

Наконец, поскольку функция

$$f_j(\overline{\mathrm{pr}}_{(j)}) = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1} + 2\mathrm{pr}_j, \; \overline{\mathrm{pr}}_{(j)} = (\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_j) \in \\ \in \mathcal{D}_j = \{(\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_j), \; 1 > \mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_j > 0\}, \; j = 1, \ldots, m, \tag{3.2.14}$$

равномерно непрерывна на множестве $\overline{\mathrm{pr}}_{(j)} = \{\sum_{s=1}^{k} \lambda_s \overline{\mathrm{pr}}^s_{(j)},\ \lambda_s \geqslant 0,\ s = 1, \ldots, k,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1\} \subset \mathcal{D}_j$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $j = 1, \ldots, m$ существует число $N(\varepsilon, m)$ такое, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon, m)$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\widehat{f}_j^{(n)} - f_j^{(n)}| \overset{\text{п. н.}}{<} \varepsilon,\ m = 1, 2, \ldots, \tag{3.2.15}$$

где (см. (3.2.11), (3.2.12))

$$\begin{aligned} f_j^{(n)} &= \mathrm{pr}_1^{(n)} + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1}^{(n)} + 2\mathrm{pr}_j^{(n)}, \\ \widehat{f}_j^{(n)} &= \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{j-1}^{(n)} + 2\nu_j^{(n)}, \quad j = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Предположим, что при условиях (3.2.8) $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$ — *вполне регулярные* вероятности, т. е. в (3.2.10) $f_j^s = \mathrm{pr}_1^s + \ldots + \mathrm{pr}_{j-1}^s + 2\mathrm{pr}_j^s \neq 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots$ и $s = 1, \ldots, k$. Тогда вместо (3.2.10) конкретная упорядоченность в (3.2.9) определится условиями

$$\begin{aligned} &e_i = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \forall\, s = 1, \ldots, k\ f_i^s > 1; \\ &e_i = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \forall\, s = 1, \ldots, k\ f_i^s < 1,\ i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

а так как

$$f_j^{(n)} = \sum_{s=1}^{k} (n_s/n) f_j^s,\ j = 1, 2, \ldots, \tag{3.2.18}$$

то, согласно лемме 3.2.1 и эквивалентностям [1] в (3.2.17),

$$\text{либо } \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \forall\, s = 1, \ldots, k,\ f_i^s > 1 \Leftrightarrow f_i^{(n)} > 1,$$

$$\text{либо } \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \forall\, s = 1, \ldots, k,\ f_i^s < 1 \Leftrightarrow f_i^{(n)} < 1,\ i = 1, 2, \ldots,$$

причем, согласно (3.2.18), если $f_j^s < 1$, $s = 1, \ldots, k$, то $\forall\, n = 1, 2, \ldots$ $f_j^{(n)} \leqslant \max_{1 \leqslant s \leqslant k} f_j^s < 1$, а если $f_j^s > 1$, $s = 1, \ldots, k$, то $\forall\, n = 1, 2, \ldots$ $f_j^{(n)} \geqslant \min_{1 \leqslant s \leqslant k} f_j^s > 1$, $j = 1, 2, \ldots$, т. е., иначе говоря, для любого $n = 1, 2, \ldots$ в (3.2.16) $f_j^{(n)}$ вместе *с независящей от* n *окрестностью* либо строго левее единицы, либо строго правее. А отсюда и из (3.2.15) следует, что существует номер $N(m)$ такой, что для всех $n \geqslant N(m)$ в (3.2.16) либо $\widehat{f}_j^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{<} 1$, либо $\widehat{f}_j^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{>} 1$ для каждого $j = 1, \ldots, m$.

Верно и обратное утверждение, а именно: если существует номер N, начиная с которого для всех $n = N, N+1, \ldots$ либо $\widehat{f}_j^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{<} 1$,

---

[1] Импликации $\forall\, s = 1, \ldots, k\ f_i^s < 1\ (> 1) \Rightarrow f_i^{(n)} < 1\ (> 1)$ очевидны, обратные импликации $f_i^{(n)} < 1\ (> 1) \Rightarrow \forall\, s = 1, \ldots, k\ f_i^s < 1\ (> 1)$ выполнены, поскольку *все* $f_i^1, \ldots, f_i^k$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$ либо < 1, либо > 1, ибо *априори* $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, $s = 1, \ldots, k$ и вполне регулярные.

либо $\widehat{f}_j^{(n)} \overset{\text{п. н.}}{>} 1$ для каждого $j = 1, \ldots, m$, то соответственно либо $f_j^{(n)} < 1$, либо $f_j^{(n)} > 1$, $j = 1, \ldots, m$, $n \geqslant N$.

Эти рассуждения определяют следующий результат.

Теорема 3.2.3. *Пусть в последовательности* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_2) \times \ldots$ *взаимно независимых испытаний среди вероятностей* $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ *конечное число различных* $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$. *Если существует возможность* P, *максимально согласованная с вероятностями* $\mathrm{Pr}^1, \ldots, \mathrm{Pr}^k$, *каждая из которых распределена согласно* (3.2.8) *и вполне регулярна, то возможностная модель* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ *каждого испытания восстанавливается безошибочно на основании результатов п. н. конечного числа испытаний.*

Доказательство может быть завершено по схеме доказательства теоремы 3.2.1. ■

Эта теорема, как и теорема 3.2.1, является теоремой существования решения задачи эмпирического восстановления.

3.2.3. Эмпирическое восстановление Pr^1-, …, $\mathrm{Pr}^{s(m)}$-измеримой возможности, $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $s = 1, \ldots, s(m)$, $m \in M$. Теперь откажемся от условия априорной упорядоченности распределений вероятностей (3.2.8), но предположим, что для некоторого $m \in M$, см. § 2.5 гл. 2, $\mathrm{Pr}^s \in \mathbb{P}\mathrm{r}_m, s = 1, \ldots, s(m)$, причем значение $m \in M$, определяющее класс $\mathbb{P}_m$ эквивалентных возможностей, максимально согласованный с $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, неизвестно. Рассмотрим метод эмпирического восстановления Pr^1-, …, $\mathrm{Pr}^{s(m)}$-измеримой возможности на примере задачи эмпирического восстановления возможности, исследованной во введении к настоящей главе.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ и $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ — произвольная вероятность, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}), i = 1, 2, 3$. На рис. 2.5.1 гл. 2 представлено разбиение треугольника $\mathbb{P}\mathrm{r}_*$ всех таких вероятностей на 25 классов $\mathbb{P}\mathrm{r}_m, m = 1, \ldots, 25$, каждому из которых отвечает класс $\mathbb{P}_m$ взаимно эквивалентных возможностей. Обозначим $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n)$ последовательность n взаимно независимых испытаний, организованных таким образом, что

► для некоторого фиксированного $m \in M = \{1, \ldots, 25\}$ $\mathrm{Pr}_i \in \mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $i = 1, \ldots, n$;

► среди вероятностей $\mathrm{Pr}_i \in \mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $i = 1, \ldots, n$, при любом достаточно большом n лишь $s(m)$ различных, обозначим их $\mathrm{Pr}_m^1, \ldots \mathrm{Pr}_m^{s(m)}$.

Определим *схему испытаний* как последовательность троек

$$(\omega_{j_1}, s_1, m), \ldots, (\omega_{j_n}, s_n, m), \tag{3.2.19}$$

в которой $\omega_{j_i} \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — результат i-го испытания, s_i определяет вероятность $\mathrm{Pr}_m^{s_i}$, контролирующую i-е испытание, m — номер класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, содержащего вероятность $\mathrm{Pr}_m^{s_i}$, один и тот же для всех испытаний $i = 1, \ldots, n$. В последовательности (3.2.19) ω_{j_i}, $i = 1, \ldots, n$, наблюдаемы, а s_i, $i = 1, \ldots, n$, и m — нет.

В рассматриваемой задаче на основе последовательности $\overline{\omega}^{(n)} = (\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n})$ результатов n взаимно независимых испытаний требуется определить номер класса m при условии, что для каждого $m \in \{1, \ldots, 25\}$ известны вероятности $\mathrm{Pr}_m^s(\{\omega_j\})$, $s = 1, \ldots, s(m)$, $j = 1, 2, 3$, определяющие стохастическую *модель схемы испытаний* (3.2.19) как класс вероятностей

$$\mathrm{Pr}_m^{\overline{s}^{(n)}}(\{\overline{\omega}^{(n)}\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Pr}_m^{s_i}(\{\omega_{j_i}\}),$$
$$\overline{\omega}^{(n)} = (\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n}) \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^n, \quad (3.2.20)$$

зависящих от $m \in \{1, \ldots, 25\}$ и $\overline{s}^{(n)} = (s_1, \ldots, s_n) \in \{1, \ldots, s(m)\}^n$.

Для решения этой задачи воспользуемся результатами, полученными в § 6.1.7 гл. 6 для частично байесовских моделей идентификации.

Для любых $\omega \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $s \in S(m) = \{1, \ldots, s(m)\}$ и $m \in M = \{1, \ldots, 25\}$ в последовательности (3.2.19) обозначим $n(\omega, s|m)$ число равенств $(\omega_{j_i}, s_i, m) = (\omega, s, m)$, $i = 1, \ldots, n$, их частоту обозначим $\nu^{(n)}(\omega, s|m) = n(\omega, s|m)/n$ и определим частоты

$$\nu^{(n)}(s|m) = \sum_{\omega\in\Omega} \nu^{(n)}(\omega, s|m), \;\; \nu^{(n)}(\omega|s, m) = \nu^{(n)}(\omega, s|m)/\nu^{(n)}(s|m),$$
$$\nu^{(n)}(\omega|m) = \sum_{s\in S(m)} \nu^{(n)}(\omega|s, m)\nu^{(n)}(s|m). \quad (3.2.21)$$

Так как в (3.2.21) для любых $\omega \in \Omega$ и $m \in M$ согласно модели (3.2.20) при $n \to \infty$ $\max\limits_{s\in S(m)} |\nu^{(n)}(\omega|s, m) - \mathrm{Pr}_m^s(\{\omega\})| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, то $\forall\, \omega \in \Omega$, $\forall\, m \in M$ при $n \to \infty$ $\max\limits_{\omega\in\Omega} |\nu^{(n)}(\omega|m) - \sum\limits_{s\in S(m)} \mathrm{Pr}_m^s(\{\omega\})\nu^{(n)}(s|m)| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, или, иначе говоря, $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \omega \in \Omega\ \forall\, m \in M$ выполняется п. н. конечное число неравенств среди

$$|\nu^{(n)}(\omega|m) - \sum_{s\in S(m)} \mathrm{Pr}_m^s(\{\omega\})\nu^{(n)}(s|m)| > \varepsilon, \;\; n = 1, 2, \ldots, \quad (3.2.22)$$

причем в рассматриваемом случае конечных Ω и M для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $N = N(\varepsilon)$ такое, что для п. н. всех $n \geqslant N$

$$\max_{\omega\in\Omega} |\nu^{(n)}(\omega|m) - \sum_{s\in S(m)} \mathrm{Pr}_m^s(\{\omega\})\nu^{(n)}(s|m)| \leqslant \varepsilon.$$

Заметим, что в (3.2.22) значение $m \in M$ и частоты $\nu^{(n)}(s|m)$, $s \in S(m)$, неизвестны, причем последние с увеличением n, вообще говоря, произвольно изменяются в пределах интервала $[0, 1]$, подчиняясь лишь условиям $\nu^{(n)}(s|m) \geqslant 0$, $s \in S(m)$, $\sum\limits_{s\in S(m)} \nu^{(n)}(s|m) = 1$, $m \in M$.

Эти факты подсказывают следующий путь рещения задачи определения $m \in M$, см. § 6.1.7 гл. 6.

Пусть $\widehat{\nu}^{(n)}(s|\overline{\omega}^{(n)}, m', m)$, $s \in S(m)$, — решение задачи линейного программирования

$$h(\nu(\cdot), \overline{\omega}^{(n)}, m', m) = \max_{j=1,2,3} |\nu^{(n)}(\omega_j|m) - \sum_{s \in S(m')} \mathrm{Pr}^s_{m'}(\{\omega_j\})\nu(s)| \sim \min_{\nu(\cdot)},$$

в которой $\overline{\omega}^{(n)} = (\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n}) \in \Omega^n$, m — истинный (неизвестный!) номер класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, $m \in M$, и минимум вычисляется на множестве $\{\nu(s) \geqslant 0,\ s \in S(m'),\ \sum\limits_{s \in S(m')} \nu(s) = 1\}$. Пусть далее $\widehat{m}^{(n)}(\overline{\omega}^{(n)})$ — решение следующей задачи на минимум

$$h(\widehat{\nu}^{(n)}(\cdot|\overline{\omega}^{(n)}, m', m), \overline{\omega}^{(n)}, m', m) \sim \min_{m' \in M}.$$

В § 6.1.7 гл. 6 приведены достаточные условия сильной состоятельности оценки $\widehat{m}^{(n)}(\overline{\omega}^{(n)})$ номера класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_m$, гарантирующие, что при $n \to \infty$ $\widehat{m}^{(n)}(\overline{\omega}^{(n)}) \xrightarrow{\text{п. н.}} m$, см. теорему 6.1.3 гл. 6. Иначе говоря, при условиях теоремы 6.1.3 гл. 6 на основе наблюдений $\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots$ п. н. безошибочно восстанавливается класс $\mathbb{P}_m$ Pr^1_m-, $\ldots$, $\mathrm{Pr}^{s(m)}_m$-измеримых взаимно эквивалентных возможностей.

3.3. Алгоритмы эмпирического упорядочения и интервального оценивания вероятностей

3.3.1. Введение. В задаче эмпирического упорядочения вероятностей *элементарных событий* моделью последовательности n взаимно независимых испытаний является вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n)$, в котором $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n} = \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n$ и $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_j)$ — модель j-го испытания, $j = 1, \ldots, n$. Вероятности $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2 \ldots$, *попарно различны и одинаково упорядочены при всех испытаниях* $j = 1, 2, \ldots$, *а именно, будем считать, что для каждой пары* ω_i, ω_k, $i \neq k$, *либо* $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) > \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})$, *либо* $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) < \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})$, *для всех* $j = 1, 2, \ldots$ Значения $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, разумеется, неизвестны, представляет интерес их упорядоченность, определяемая знаками разностей $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) - \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots$

Результатом n испытаний является совокупность частот элементарных событий

$$\nu^{(n)}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_i(\omega^{(j)}),\ i = 1, 2 \ldots, \tag{3.3.1}$$

где $\omega^{(j)}$ — исход j-го испытания, $\chi_i(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega = \omega_i, \\ 0, \ \omega \neq \omega_i, \end{cases}$ $\omega \in \Omega$, — индикаторная функция элементарного события $\{\omega_i\}$, и все слагаемые $\chi_i(\omega^{(j)})$, $j = 1, \ldots, n$, взаимно независимы, $i = 1, 2, \ldots$

Для построения алгоритма эмпирического упорядочения вероятностей [1)] $\mathrm{Pr}_j(\omega_1), \mathrm{Pr}_j(\omega_2), \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, воспользуемся фактами, приведенными в § 3.1.2, 3.1.3.

Если в лемме 3.1.1 и в ее следствии 3.1.1 $\xi_k = \chi_i(\omega^{(k)})$, где $\omega^{(k)}$ — исход k-го испытания, модель которого $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_k)$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\nu_i^{(n)} - \mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\nu_i^{(n)} > \varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n\varepsilon^2), \tag{3.3.2}$$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\nu_i^{(n)} - \mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\nu_i^{(n)} < -\varepsilon\}) \leqslant \exp(-2n\varepsilon^2), \tag{3.3.3}$$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{|\nu_i^{(n)} - \mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\nu_i^{(n)}| > \varepsilon\}) \leqslant 2\exp(-2n\varepsilon^2), \ i = 1, 2, \ldots \tag{3.3.4}$$

Неравенства (3.3.2)–(3.3.4) позволяют получить интервальные оценки для «эмпирических вероятностей» [2)] $\mathrm{pr}_i^{(n)} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) = \mathsf{E}^{(n)}_{1,\ldots,n}\nu_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, а именно

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\left(\left\{\mathrm{pr}_i^{(n)} \geqslant \nu_i^{(n)} - \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) \geqslant 1 - \alpha, \ i = 1, 2, \ldots, \tag{3.3.5}$$

если в (3.3.2) $\exp(-2n\varepsilon^2) = \alpha$,

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\left(\left\{\mathrm{pr}_i^{(n)} \leqslant \nu_i^{(n)} + \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) \geqslant 1 - \alpha, \ i = 1, 2, \ldots, \tag{3.3.6}$$

если в (3.3.3) $\exp(-2n\varepsilon^2) = \alpha$ и

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}\left(\left\{\nu_i^{(n)} - \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{pr}_i^{(n)} \leqslant \nu_i^{(n)} + \left(\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) \geqslant \\ \geqslant 1 - \alpha, \ i = 1, 2, \ldots, \tag{3.3.7}$$

если в (3.3.4) $2\exp(-2n\varepsilon^2) = \alpha$, характеризующие ошибки приближения «эмпирических вероятностей» $\mathrm{pr}_i^{(n)}$ частотами $\nu_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ Заметим, что согласно (3.3.4) при $n \to \infty$, $\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, ибо при любом $\varepsilon > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2n\varepsilon^2) < \infty$, и, следовательно, при любом

[1)] Вместо элементарных можно рассматривать любые события, вероятности которых попарно различны и одинаково упорядочены при всех $j = 1, 2, \ldots$

[2)] При каждом $n = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{pr}_i^{(n)} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i^{(n)} = 1$.

$\varepsilon > 0$, согласно лемме Бореля–Кантелли[1]), может произойти лишь п. н. конечное число событий $\{|\nu_i^{(n)} - \mathrm{pr}_i^{(n)}| > \varepsilon\}$, $n = 1, 2, \ldots$, см. следствие 3.1.2 леммы 3.1.1.

3.3.2. Алгоритмы эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий, не изменяющихся в процессе испытаний. Моделью последовательности n взаимно независимых испытаний в рассматриваемом случае является вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n),\ \mathrm{Pr}^{(n)}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, в котором $\mathrm{Pr}^{(n)} = \underbrace{\mathrm{Pr} \times \ldots \times \mathrm{Pr}}_{n \text{ раз}}$. Задача эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, s$, состоит в том, чтобы на основе наблюдений частот $\nu_1^{(n)}, \ldots, \nu_s^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, (3.3.1) элементарных событий $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_s\}$ определить с гарантированной вероятностью правильные отношения $\mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_k$ или $\mathrm{pr}_i < \mathrm{pr}_k$ для $s(s-1)/2$ пар $(i < k) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, s\}$, $s = 2, 3, \ldots$

Обозначим
$$\nu_{ik}^{(n)} = \nu_i^{(n)} - \nu_k^{(n)},\ \mathrm{pr}_{ik} = \mathrm{pr}_i - \mathrm{pr}_k = \mathsf{E}^{(n)} \nu_{ik}^{(n)},\ i, k = 1, 2, \ldots,\ i < k, \tag{3.3.8}$$
и сформулируем задачу эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_s$ как задачу определения знаков pr_{ik}, $i < k$, на основе наблюденных значений $\nu_{ik}^{(n)}$, $i < k$, $i, k = 1, \ldots, s$, $n = 1, 2 \ldots$, $s = 2, 3, \ldots$

Так как
$$\nu_{ik}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\chi_i(\omega^{(j)}) - \chi_k(\omega^{(j)})), \tag{3.3.9}$$
где слагаемые для $j = 1, \ldots, n$ взаимно независимы и принимают значения -1, 0 и 1, то, согласно лемме 3.1.1, подобно оценкам (3.3.2)–(3.3.4) для любого $\delta > 0$ соответственно
$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta\}) \leqslant \exp(-n\delta^2/2), \tag{3.3.10}$$
$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} < -\delta\}) \leqslant \exp(-n\delta^2/2), \tag{3.3.11}$$
$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}| > \delta\}) \leqslant 2\exp(-n\delta^2/2), \tag{3.3.12}$$
и подобно (3.3.5)–(3.3.7) соответственно
$$\mathrm{Pr}^{(n)}\left(\left\{\mathrm{pr}_{ik} \geqslant \nu_{ik}^{(n)} - \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) > 1 - \alpha, \tag{3.3.13}$$

---

[1]) Действительно, событие $\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geqslant n} A_k$ происходит тогда и только тогда, когда происходит бесконечно много событий в последовательности $A_1, A_2, \ldots$ Если $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Pr}(A_k) < \infty$, то $\mathrm{Pr}(\overline{A}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Pr}(\bigcup_{k \geqslant n} A_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k \geqslant n} \mathrm{Pr}(A_k) = 0$.

$$\Pr{}^{(n)}\left(\left\{\mathrm{pr}_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) > 1-\alpha, \qquad (3.3.14)$$

если в (3.3.10), (3.3.11) $\exp(-n\delta^2/2)=\alpha$, и

$$\Pr{}^{(n)}\left(\left\{\nu_{ik}^{(n)} - \left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{pr}_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}\right) > 1-\alpha, \qquad (3.3.15)$$

если в (3.3.12) $2\exp(-n\delta^2/2)=\alpha$.

Условия (3.3.13 – 3.3.15) определяют случайные множества

$$\left\{\mathrm{pr}_{ik} \in [-1,1],\ \mathrm{pr}_{ik} \geqslant \nu_{ik}^{(n)} - \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}, \qquad (3.3.16)$$

$$\left\{\mathrm{pr}_{ik} \in [-1,1],\ \mathrm{pr}_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}, \qquad (3.3.17)$$

$$\left\{\mathrm{pr}_{ik} \in [-1,1],\ \nu_{ik}^{(n)} - \left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{pr}_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} + \left(\frac{2}{n}\ln\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\right\}, \qquad (3.3.18)$$

покрывающие истинное значение pr_{ik} с вероятностью, большей $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, $i<k$, $i,k=1,2,\ldots$, $n=1,2,\ldots$

Поскольку согласно оценкам (3.3.10)–(3.3.15) для определения знака pr_{ik} требуется тем больше испытаний, чем меньше $|\mathrm{pr}_{ik}|$, *алгоритм эмпирического упорядочения* $\mathrm{pr}_1,\ldots,\mathrm{pr}_s$ *должен «распознавать малость»* $|\mathrm{pr}_{ik}|$ *и «принимать решение» продолжить испытания, если значение* $|\nu_{ik}^{(n)}|$ *свидетельствует о малости* $|\mathrm{pr}_{ik}|$.

Рассмотрим следующий алгоритм статистических решений об упорядоченности вероятностей $\mathrm{pr}_1,\ldots,\mathrm{pr}_s$ [46]:

для всех пар $(i<k) \in \{1,\ldots,s\} \times \{1,\ldots,s\}$ и каждого $n=1,2,\ldots$

- ► если $\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}$, то $\square_1$: считать $\mathrm{pr}_{ik} > 0$;
- ► если $\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}$, то $\square_2$: считать $\mathrm{pr}_{ik} < 0$; (3.3.19)
- ► если $|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}$, то $\circlearrowright$: продолжить испытания.

В алгоритме (3.3.19) при каждом $n=1,2,\ldots$ проверяются условия решений $\square_1$, $\square_2$ и $\circlearrowright$ для всех $s(s-1)/2$ пар $i<k$, $i,k=1,\ldots,s$. Если для всех пар при некотором n приняты только решения $\square_1$ или $\square_2$, то алгоритм (3.3.19) завершен, если же хотя бы для одной пары принято решение $\circlearrowright$, то при каждом следующем испытании проверяются условия решений $\square_1$, $\square_2$ и $\circlearrowright$, и ранее принятые решения корректируются для всех $s(s-1)/2$ пар $i<k$, $i,k=1,\ldots,s$. Подчеркнем, что решения $\square_1$ и $\square_2$ относятся к каждой отдельной паре $i<k$, а решение $\circlearrowright$ относится ко всем $s(s-1)/2$ парам.

Задача эмпирического упорядочения вероятностей $\mathrm{pr}_1,\ldots,\mathrm{pr}_s$ будет решена, если на основе наблюденных значений $\nu_{ik}^{(n)}$, $(i<k) \in \{1,\ldots,s\} \times \{1,\ldots,s\}$ будут приняты все $s(s-1)/2$ решений $\square_1$ или $\square_2$ и оценены вероятности сопутствующих ошибок, поскольку это

позволит определить упорядоченность $\mathrm{pr}_{i_1} > \ldots > \mathrm{pr}_{i_s}$ вероятностей $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_s$, с гарантированной вероятностью совпадающую с истинной их упорядоченностью.

Рассмотрим подробнее алгоритм (3.3.19) для фиксированной пары $i < k$. В (3.3.19) $\square_1, \square_2$ — символы прекращения испытаний и принятия одного из двух решений $\mathrm{pr}_{ik} > 0$ или $\mathrm{pr}_{ik} < 0$, $\circlearrowright$ — символ продолжения испытаний как реакции на условие $|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}$, свидетельствующее о малости $|\mathrm{pr}_{ik}|$ и недостаточности количества n испытаний для определения знака pr_{ik}; $\delta^{(n,s)} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом в алгоритме (3.3.19) число испытаний n увеличивается до тех пор, пока для всех $s(s-1)/2$ пар $i < k$ не завершены циклы $\circlearrowright$ и не закончена обусловленная ими ревизия решений, принятых ранее для всех $s(s-1)/2$ пар $i < k$, $i, k = 1, \ldots, s$.

Если n_s — число испытаний, при котором первый раз завершены все $s(s-1)/2$ циклов $\circlearrowright$, то на n_s-м испытании алгоритм (3.3.19) завершен.

Для определения в (3.3.19) значений $\delta^{(n,s)}$, $n = 1, 2, \ldots$, зададим оценку сверху $\alpha^{(s)}$ вероятности ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$.

Пусть наблюденное значение $\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}$, в то время как на самом деле $\mathrm{pr}_{ik} < 0$. В таком случае решение $\square_1$: «считать $\mathrm{pr}_{ik} > 0$» ошибочно, а его вероятность [1])

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} < 0) \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} < 0) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) \triangleq \alpha^{(s)}. \quad (3.3.20)$$

Первое неравенство в (3.3.20) является следствием того, что событие $\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}$, в силу условия $\mathrm{pr}_{ik} < 0$, характеризующего вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)}$, влечет событие $\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}$, второе неравенство есть следствие (3.3.10) неравенства Хёфдинга, см. лемму 3.1.1. Значение $\alpha^{(s)}$ оценивает сверху вероятность ошибочного решения $\square_1$ и определяет значение

$$\delta^{(n,s)} = \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}, \ n = 1, 2, \ldots, \ s = 2, 3, \ldots \quad (3.3.21)$$

Вероятность ошибочного решения $\square_2$ оценивается сверху тем же значением $\alpha^{(s)}$, ибо если на самом деле $\mathrm{pr}_{ik} > 0$, то

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} > 0) \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} > \\ > 0) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}. \quad (3.3.22)$$

[1]) Условие $|\mathrm{pr}_{ik} < 0$ в $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot|\mathrm{pr}_{ik} < 0)$ записано как *характеристика вероятности* $\mathrm{Pr}^{(n)}$. Если после вертикальной черты записано условие в фигурных скобках, то, например, $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot|\{\})$ — *условная при условии* $\{\}$ *вероятность*.

Покажем, что событие $\{-\delta^{(n,s)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, свидетельствующее о недостаточности числа n испытаний как в случае $\mathrm{pr}_{ik} > 0$, так и в случае $\mathrm{pr}_{ik} < 0$, для каждого $s = 2, 3, \ldots$ может выполняться лишь для п. н. конечного числа испытаний $n = 1, 2, \ldots$, и алгоритм будет завершен при $n_s = \min\{n \mid \min\limits_{1 \leqslant i < k \leqslant s} |\nu_{ik}^{(n)}| > \delta^{(n,s)}\}$.

Пусть $|\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} > 0$. Тогда при всех $n \geqslant \min\{k \mid \delta^{(k,s)} < \varepsilon_{ik}\} = n_{ik}^{(s)}$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\mathrm{pr}_{ik}| - |\nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{ik}\} \leqslant 2\exp(-n\varepsilon_{ik}^2/2). \quad (3.3.23)
\end{aligned}$$

Дело в том, что если $|\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}$, то событие $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$ влечет событие $\{|\mathrm{pr}_{ik}| - |\nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}$, которое, в свою очередь, влечет событие $\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}$, откуда следуют первое и второе неравенства в (3.3.23). Далее, так как согласно (3.3.21) для любого $s = 2, 3, \ldots$ при $n \to \infty$ $\delta^{(n,s)} \to 0$, то для всех $n \geqslant n_{ik}^{(s)}$ событие $\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)}\}$ влечет событие $\{|\mathrm{pr}_{ik} - \nu_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{ik}\}$, откуда следует предпоследнее неравенство в (3.3.23). Последнее неравенство в (3.3.23) является вариантом неравенства (3.3.12). Вследствие (3.3.23)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_{ik}^{(s)}}^{\infty} \mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}||\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} > 0) = \\
&\quad = \sum_{n=n_{ik}^{(s)}}^{\infty} \mathrm{Pr}^{(\infty)}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}||\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik}) \leqslant 2\sum_{n=n_{ik}^{(s)}}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_{ik}^2/2) < \infty,
\end{aligned} \quad (3.3.24)$$

и согласно лемме Бореля–Кантелли для любого $s = 2, 3, \ldots$ может произойти лишь п. н. конечное число событий $\{-\delta^{(n,s)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, после которых будет принято одно из решений $\square_1$ или $\square_2$.

Согласно (3.3.24) для любого $s = 1, 2, \ldots$, и любых $i, k = 1, \ldots, s$ существует $N_{ik}^{(s)}$, такое, что для $n \geqslant N_{ik}^{(s)}$ $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}) = 0$, а так как для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}) + \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}) + \mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}) = 1$, то для $n \geqslant N_{ik}^{(s)}$ $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}) + \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}) = 1$, и если одно из решений, скажем $\square_1$, ошибочно, то $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}) \leqslant \alpha^{(s)}$, а вероятность верного решения $\square_2$ $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}) \geqslant 1 - \alpha^{(s)}$.

Уточним приведенные оценки для достаточно больших n, конкретизировав условие $|\mathrm{pr}_{ik}| \geqslant 2\varepsilon_{ik} > 0$, например, как $\mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}$. В таком случае в (3.3.23) для $n \geqslant n_{ik}^{(s)}$ и $\delta^{(k,s)} < \varepsilon_{ik}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}^{(n)}(\{-\delta^{(n,s)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} < \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{-\delta^{(n,s)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)}\}|\mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\varepsilon_{ik} - \delta^{(n,s)} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}\}|\mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\varepsilon_{ik} \leqslant \nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}\}|\mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) \leqslant \exp(-n\varepsilon_{ik}^2/2) \triangleq \beta_{ik}^{(n,s)} \leqslant \alpha^{(s)}.\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Соответственно для $n \geqslant n_{ik}^{(s)}$ согласно (3.3.25) вероятность правильного решения $\square_2$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) = \\ = 1 - \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} \geqslant -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) \geqslant 1 - \beta_{ik}^{(n,s)} \geqslant 1 - \alpha^{(s)},\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

и для любого $n = 1, 2, \ldots$ вероятность ошибочного решения $\square_2$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\} \,|\, \mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik} > \delta^{(n,s)} + 2\varepsilon_{ik}\} \,|\, \mathrm{pr}_{ik} \leqslant -2\varepsilon_{ik}) \leqslant \\ \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)} + 2\varepsilon_{ik})^2/2) \leqslant \exp(-2n\varepsilon_{ik}^2) = (\beta_{ik}^{(n,s)})^4 \\ (\leqslant (\alpha^{(s)})^4 \text{для } n \geqslant \min\{k, \delta^{(n,s)} < 2\varepsilon_{ik}\} \\ \text{и } \leqslant (\alpha^{(s)})^9 \text{ для } n \geqslant n_{ik}^{(s)} = \min\{k, \delta^{(n,s)} < \varepsilon_{ik}\}).\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Чтобы оценить фактическую вероятность хотя бы одной ошибки в $s(s-1)/2$ решениях $\square_1$ и $\square_2$, принятых по завершении алгоритма (3.3.19), представим себе, что алгоритм исчерпан на $n = n_s$-м испытании,

$$\nu_{i_1}^{(n)} > \nu_{i_2}^{(n)} > \ldots > \nu_{i_s}^{(n)}, \; n = n_s, \tag{3.3.28}$$

— полученная в результате n_s испытаний упорядоченность по убыванию частот i_1-го, i_2-го, $\ldots, i_s$-го элементарных событий [1]) и

$$\nu_{i_1,i_2}^{(n)} > \delta^{(n,s)}, \ldots, \nu_{i_{s-1},i_s}^{(n)} > \delta^{(n,s)}, \; n = n_s, \tag{3.3.29}$$

— $(s-1)$ условие, обеспечившее принятие $(s-1)$ решений $\square_1$ или [2]) $\square_2$, согласно которым $\mathrm{pr}_{i_1,i_2} > 0, \ldots, \mathrm{pr}_{i_{s-1},i_s} > 0$; при этом вероятность

[1]) Строгие неравенства в (3.3.28) следуют из условий (3.3.29) принятия решений $\square_1$ или $\square_2$, согласно которым $\nu_{i_t}^{(n)} - \nu_{i_{t+1}}^{(n)} = \nu_{i_t,i_{t+1}}^{(n)} > \delta^{(n,s)}$, $t = 1, \ldots, s-1$.

[2]) Дело в том, что возможно как $i_t < i_{t+1}$, так и $i_t > i_{t+1}$, $t = 1, \ldots, s-1$.

хотя бы одной ошибки среди этих $(s-1)$ решений не превосходит $(s-1)\alpha^{(s)}$.

Последнее замечание требует разъяснений, поскольку $(i_1, \ldots, i_s)$ — *реализация случайной последовательности* $(\iota_1, \ldots, \iota_s)$, упорядочивающей частоты $\nu_{\iota_1}^{(n)} \geqslant \nu_{\iota_2}^{(n)} \geqslant \ldots \geqslant \nu_{\iota_s}^{(n)}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, а n_s — реализация случайного числа испытаний, при котором первый раз приняты все $s(s-1)/2$ решений $\square_1$ и $\square_2$. Тем не менее,

$$\mathrm{Pr}^{(n_s)}(\{\nu_{\iota_t,\iota_{t+1}}^{(n_s)} > \delta^{(n_s,s)}\}|\{\mathrm{pr}_{\iota_t,\iota_{t+1}} < 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{(i_t,i_{t+1})} \mathrm{Pr}^{(n_s)}(\{\nu_{\iota_t,\iota_{t+1}}^{(n_s)} - \mathrm{pr}_{\iota_t,\iota_{t+1}} > \delta^{(n_s,s)}\}|\{\mathrm{pr}_{\iota_t,\iota_{t+1}} < 0\}) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-n(\delta^{(n_s,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}, \quad (3.3.30)$$

поскольку неравенства (3.3.30) выполняются для любой реализации $\iota_t = i_t$, $t = 1, \ldots, s$, удовлетворяющей условиям (3.3.28) и (3.3.29).

Что касается остальных $s(s-1)/2 - (s-1) = (s-1)(s-2)/2$ решений, то, поскольку в силу неравенств (3.3.28), (3.3.29) для $q > t$ выполнено неравенство $\nu_{i_t,i_q}^{(n_s)} = \nu_{i_t,i_{t+1}}^{(n_s)} + \nu_{i_{t+1},i_{t+2}}^{(n_s)} + \ldots + \nu_{i_{q-1},i_q}^{(n_s)} > > (q-t)\delta^{(n_s,s)}$, то вероятность ошибочности фактического решения в этом случае

$$\mathrm{Pr}^{(n_s)}(\{\nu_{i_t,i_q}^{(n_s)} > (q-t)\delta^{(n_s,s)}\}|\mathrm{pr}_{i_t,i_q} < 0) \leqslant$$
$$\leqslant \exp(-n(q-t)^2(\delta^{(n_s,s)})^2/2) = (\alpha^{(s)})^{(q-t)^2}.$$

Поэтому вероятность хотя бы одной ошибки во всех $s(s-1)/2$ решениях не больше, чем [1]) вероятность хотя бы одной ошибки в фактически принятых: $(s-1)$ решениях $\nu_{i_t,i_{t+1}} > \delta^{(n_s,s)}$, $t = 1, \ldots, s-1$, $(s-2)$ решениях $\nu_{i_t,i_{t+2}} > 2\delta^{(n_s,s)}$, $t = 1, \ldots, s-2$, $\ldots$, $(s-(s-1))$ решениях $\nu_{i_t,i_s} > (\delta^{(n_s,s)})^{s-1}$, т.е. не больше, чем $\dfrac{(s-1)\alpha}{1-\alpha} - \dfrac{\alpha^2(1-\alpha^{s-1})}{(1-\alpha)^2}\Big|_{\alpha=\alpha^{(s)}} = (s-1)\alpha^{(s)} + (s-2)(\alpha^{(s)})^2 + \ldots + + 2(\alpha^{(s)})^{s-2} + (\alpha^{(s)})^{s-1} = (s-1)\alpha^{(s)} + o(\alpha^{(s)})$.

Теорема 3.3.1 ([46]). *Пусть в алгоритме* (3.3.19) *эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий* $\mathrm{pr}_1, \ldots \mathrm{pr}_s$, $\alpha^{(s)} \in (0,1)$ *оценивает сверху вероятность* $s(s-1)/2$ *ошибочных решений* $\square_1$ *или* $\square_2$. *Тогда все решения будут приняты на основе п.н. конечного числа испытаний, и если* n_s *— число испытаний, при котором первый раз приняты все* $s(s-1)/2$ *решений, и* $\nu_{i_1}^{(n_s)} > \nu_{i_2}^{(n_s)} > \ldots > \nu_{i_s}^{(n_s)}$ *— полученная упорядоченность частот, то искомая упорядоченность вероятностей элементарных событий*

---

[1]) $\sum\limits_{j=1}^{s-1}(s-j)\alpha^j = -\alpha^{s+1}\dfrac{d}{d\alpha}\sum\limits_{j=1}^{s-1}\alpha^{j-s} = (s-1)\dfrac{\alpha}{1-\alpha} - \dfrac{\alpha^2(1-\alpha^{s-1})}{(1-\alpha)^2}$.

есть $\mathrm{pr}_{i_1} > \mathrm{pr}_{i_2} > \ldots > \mathrm{pr}_{i_s}$, *и вероятность того, что найденная упорядоченность совпадает с их истинной упорядоченностью, больше* $\dfrac{1-s\alpha}{1-\alpha} + \dfrac{\alpha^2(1-\alpha^{s-1})}{(1-\alpha)^2}\Big|_{\alpha=\alpha^{(s)}} = 1-(s-1)\alpha^{(s)} + o(\alpha^{(s)})$.

Замечание 3.3.1. Если число s упорядочиваемых в алгоритме (3.3.19) вероятностей элементарных событий априори любое, то оценки вероятностей ошибочных решений целесообразно выбрать согласно условию $\alpha^{(s)} = \alpha/(s-1)$, $s = 2, 3, \ldots$, где α — *априорная оценка вероятности ошибочного упорядочения вероятностей элементарных событий*. При таком определении $\alpha^{(s)}$, $s = 2, 3, \ldots$, вероятность ошибочного упорядочения вероятностей любого конечного числа элементарных событий оценивается сверху значением $\alpha + o(\alpha)$.

3.3.3. Алгоритм эмпирического интервального оценивания вероятностей элементарных событий. Алгоритм (3.3.19) эмпирического *упорядочения* вероятностей элементарных событий позволит *оценить и их значения*, если упорядоченность частот (3.3.28) получить как результат $(s-1)$ решений, обусловленных событием $\mathrm{Q}_s \triangleq \bigcap\limits_{k=1}^{s-1} \left\{\nu_{i_k,i_{k+1}}^{(n_s)} > 2\widehat{\delta}^{(n_s,s)}\right\}$, для которого, согласно теореме 3.3.1, $\mathrm{Pr}^{(n_s)}(\mathrm{Q}_s) > 1-(s-1)\widehat{\alpha}^{(s)} + o(\widehat{\alpha}^{(s)})$, где $\widehat{\alpha}^{(s)} = \exp\left(-n(2\widehat{\delta}^{(n_s,s)})^2/2\right) = \exp\left(-2n(\widehat{\delta}^{(n_s,s)})^2\right)$, и учесть, что при этом вероятность события $\mathrm{R}_s \triangleq \bigcap\limits_{k=1}^{s} \left\{\nu_{i_k}^{(n_s)} - \widehat{\delta}^{(n_s,s)} \leqslant \mathrm{pr}_{i_k} \leqslant \nu_{i_k}^{(n_s)} + \widehat{\delta}^{(n_s,s)}\right\}$ больше [1]), чем $1-2s\widehat{\alpha}^{(s)}$. Дело в том, что *событие* $\Big\{\nu_{i_1}^{(n_s)} + \widehat{\delta}^{(n_s,s)} \geqslant \mathrm{pr}_{i_1} \geqslant \nu_{i_1}^{(n_s)} - \widehat{\delta}^{(n_s,s)} > \nu_{i_2}^{(n_s)} + \widehat{\delta}^{(n_s,s)} \geqslant \mathrm{pr}_{i_2} \geqslant \nu_{i_2}^{(n_s)} - \widehat{\delta}^{(n_s,s)} > \ldots > \nu_{i_s}^{(n_s)} + \widehat{\delta}^{(n_s,s)} \geqslant \mathrm{pr}_{i_s} \geqslant \nu_{i_s}^{(n_s)} - \widehat{\delta}^{(n_s,s)}\Big\}$, *интервально оценивающее вероятности* $\mathrm{pr}_{i_1} > \mathrm{pr}_{i_2} > \ldots > \mathrm{pr}_{i_s}$, *равно событию* $\mathrm{Q}_s \cap \mathrm{R}_s$, *и, следовательно, его вероятность больше, чем* $1-(3s-1)\widehat{\alpha}^{(s)} + o(\widehat{\alpha}^{(s)})$.

Заметим, что если вероятности $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$ неизвестны, но известно, что $\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots$, то, согласно (3.3.4), (3.3.7), интервальная оценка pr_i определится условием $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_i^{(n)} - \delta^{(n)} \leqslant \mathrm{pr}_i \leqslant \nu_i^{(n)} + \delta^{(n)}\}) \geqslant 1-\alpha$, где $\delta^{(n)} = \left(\dfrac{1}{2n}\ln\dfrac{2}{\alpha}\right)^{1/2}$, но при этом случайные интервалы $[\nu_i^{(n)} - \delta^{(n)}, \nu_i^{(n)} + \delta^{(n)}]$, $i = 1, 2, \ldots$, могут попарно пересекаться.

3.3.4. Алгоритм эмпирического упорядочения вероятностей элементарных событий, изменяющихся в процессе испытаний. В этом параграфе моделью последовательности n взаимно независимых испытаний является вероятностное пространство $(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n)$,

[1]) Если $\mathrm{Pr}(A_i) \geqslant 1-\widehat{\alpha}_i$, то $\mathrm{Pr}(\bigcap\limits_{i=1}^{s} A_i) \geqslant 1-\sum\limits_{i=1}^{s}\widehat{\alpha}_i$.

$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n)$, охарактеризованное во введении к этому параграфу.

Определим «эмпирические вероятности» элементарных событий и оценивающие их частоты равенствами

$$\mathrm{pr}^{(n)}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}),\ \nu^{(n)}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_i(\omega^{(j)}),\ i = 1, 2\ldots,\ n = 1, 2, \ldots,$$

в которых $\chi_i(\cdot)$ — индикаторная функция $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, и, разумеется, $\mathsf{E}^{(n)}_{(1,\ldots,n)}\nu^{(n)}_i = \mathrm{pr}^{(n)}_i$, причем при $n \to \infty$ $\nu^{(n)}_i - \mathrm{pr}^{(n)}_i \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$. Поскольку упорядоченности как вероятностей $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\}), \mathrm{Pr}_j(\{\omega_2\}), \ldots$ для всех $j = 1, 2, \ldots$, так и «эмпирических вероятностей» $\mathrm{pr}^{(n)}_1, \mathrm{pr}^{(n)}_2, \ldots$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ одинаковы, а упорядоченность последних может быть определена эмпирически, то эмпирически может быть определена и упорядоченность $\mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\}), \mathrm{Pr}_j(\{\omega_2\}), \ldots$

Рассмотрим аналогичный алгоритму (3.3.19) алгоритм эмпирического упорядочения «эмпирических вероятностей» $\mathrm{pr}^{(n)}_1, \mathrm{pr}^{(n)}_2, \ldots$ [46]: для всех $i < k$, $i, k \in \{1, \ldots, s\}$, и каждого $n = 1, 2, \ldots$

- ▶ если $\nu^{(n)}_{ik} > \delta^{(n,s)}$, то $\square_1$: считать $\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} > 0$;
- ▶ если $\nu^{(n)}_{ik} < -\delta^{(n,s)}$, то $\square_2$: считать $\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} < 0$; (3.3.31)
- ▶ если $|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}$, то ↻: продолжить испытания.

В (3.3.31)

$$\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} = \mathrm{pr}^{(n)}_i - \mathrm{pr}^{(n)}_k,\ \nu^{(n)}_{ik} = \nu^{(n)}_i - \nu^{(n)}_k,\ 1 \leqslant i < k \leqslant s,\ n = 1, 2, \ldots$$

Свойства алгоритма (3.3.31) подобны свойствам алгоритма (3.3.19). Для определения значений $\delta^{(n,s)}$ зададим оценки сверху $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, вероятностей ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$. Если выполнено событие $\{\nu^{(n)}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}$ и принято решение $\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} > 0$, в то время как на самом деле $\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} < 0$, то вероятность ошибочного решения $\square_1$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\nu^{(n)}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} < 0) \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\nu^{(n)}_{ik} - \mathrm{pr}^{(n)}_{ik} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} < 0) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) \triangleq \alpha^{(s)}. \quad (3.3.32)$$

В (3.3.32) заданное априори значение $\alpha^{(s)}$ оценивает сверху вероятность ошибочного решения $\square_1$ и определяет значение

$$\delta^{(n,s)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{1/2},\ n = 1, 2, \ldots,\ s = 2, 3, \ldots, \quad (3.3.33)$$

такое же, как и в (3.3.21).

Аналогично, вероятность ошибочного решения $\square_2$ $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{\nu^{(n)}_{ik} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} > 0) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}$.

Если при этом для $s = 1, 2, \ldots$ и всех достаточно больших n существуют $\varepsilon^{(n,s)} > 0$, такие, что $|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon^{(n,s)}$, $i, k \in \{1, \ldots, s\}$, и при $n \to \infty$

$$n(\varepsilon^{(n,s)} - \delta^{(n,s)})^2 \to \infty, \tag{3.3.34}$$

то для всех достаточно больших n и $(i < k) \in \{1, \ldots, s\} \times \{1, \ldots, s\}$ вероятности правильных решений $\square_1$, $\square_2$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} > \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} > 0) \geqslant 1 - \exp(-n(\varepsilon^{(n,s)} - \delta^{(n,s)})^2/2),\\ &\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\nu_{ik}^{(n)} < -\delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} < 0) \geqslant 1 - \exp(-n(\varepsilon^{(n,s)} - \delta^{(n,s)})^2/2)\end{aligned} \tag{3.3.35}$$

и стремятся к единице при $n \to \infty$.

Что касается событий $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, приводящих к решению ↻ продолжить испытания, то, в отличие от рассмотренного в параграфе 3.3.2 случая неизменной вероятности, контролирующей исходы испытаний, при изменяющейся вероятности условие, при котором будет выполняться п. н. конечное число таких событий, требует дополнительных требований к модели испытаний, более сильных, чем в (3.3.34).

Речь, разумеется, идет о моделях, в которых при $n \to \infty$ для некоторых [1] $i \neq k$ $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} \to 0$. В следующей лемме показано, что если при $n \to \infty$ $\mathrm{pr}_{ik}^{(n)} \to 0$, но «не слишком быстро», то решение ↻ в (3.3.31) всякий раз будет принято лишь для п. н. конечного числа испытаний.

Лемма 3.3.1 ([46]). *Если при всех достаточно больших n и всех $i < k$, $i, k = 1, \ldots, s$ $|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, где $\delta^{(n,s)}$ определены в* (3.3.33), *а $\varepsilon_{n,s} > 0$ и удовлетворяют условиям $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp(-n(\varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)})^2/2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha^{(s)})^{\varepsilon_{n,s}^2} < \infty$, в которых $\alpha^{(s)} = \alpha/(s-1)$, $s = 2, 3, \ldots$, то с вероятностью единица для каждого $s = 2, 3, \ldots$ происходит конечное число событий* [2] $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Если $|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, то событие $\{|\nu_{ik}^{(n)}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$ влечет событие $\{|\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\}$, ибо $|\nu_{ik}^{(n)} - \mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant |\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| - |\nu_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)} - \delta^{(n,s)} = \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}$. Следовательно,

---

[1] Если для всех $(i < k) \in \{1, \ldots, s\}^2$ $|\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| > \mathrm{pr}_{ik} > 0$ при любом $n = 1, 2, \ldots$, в частности, если *среди вероятностей* $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ *конечное число различных*, то ситуация не отличается от рассмотренной в § 3.3.2.

[2] Условие леммы можно сформулировать как требование к модели испытаний, а именно: для всех $j = 1, \ldots, n$ при всех достаточно больших n $|\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) - \mathrm{Pr}_j(\{\omega_k\})| > (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)} \Rightarrow |\mathrm{pr}_{ik}^{(n)}| \geqslant (1 + \varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}$, $i, k = 1, \ldots, s$, $n = 1, 2, \ldots$, $s = 2, 3, \ldots$

$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}^{(n)}_{ik}| \geqslant (1+\varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{|\nu^{(n)}_{ik} - \mathrm{pr}^{(n)}_{ik}| \geqslant \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\}|\ |\mathrm{pr}^{(n)}_{ik}| \geqslant (1+\varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) \leqslant 2\exp(-n(\varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)})^2/2) = 2(\alpha^{(s)})^{\varepsilon^2_{n,s}}$, и, в силу условий леммы, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} \geqslant (1+\varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Pr}^{(\infty)}_{1,2,\ldots}(\{|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\mathrm{pr}^{(n)}_{ik} \geqslant (1+\varepsilon_{n,s})\delta^{(n,s)}) \leqslant 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha^{(s)})^{\varepsilon^2_{n,s}} < \infty,\ s = 2,3,\ldots$

Согласно лемме Бореля–Кантелли это означает, что происходит п. н. конечное число событий в последовательности $\{|\nu^{(n)}_{ik}| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $i,k = 1,\ldots,s$, $n = 1,2,\ldots$, $s = 2,3,\ldots$ ■

Заметим, что при условиях, сформулированных в лемме 3.3.1, теорема 3.3.1 верна и в случае изменяющейся вероятности, а *условия леммы* 3.3.1 *выполнены, если в последовательности* $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ *вероятностей, контролирующих* 1-*е*, 2-*е*, … *испытания, конечное число различных.*

3.4. Алгоритмы эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности

3.4.1. Алгоритм эмпирического восстановления возможности, максимально согласованной с вероятностью, не изменяющейся в процессе испытаний. В этом параграфе рассмотрен алгоритм эмпирического восстановления возможности P, максимально согласованной с *вполне регулярной* вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, основанный на результатах взаимно независимых испытаний, в модели которых

$$(\Omega^n, \mathcal{P}(\Omega^n), \mathrm{Pr}^{(n)}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ n = 1,2,\ldots, \tag{3.4.1}$$

вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)} = \mathrm{Pr} \times \ldots \times \mathrm{Pr}$ неизвестна, но включение $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ означает, что априори $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1,2,\ldots$

Речь идет о задаче эмпирического восстановления класса $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} \subset \mathbb{P}\mathrm{r}$ вероятностей, содержащего вероятность Pr, определяющую модель испытаний (3.4.1), поскольку класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, будучи восстановлен, определит класс $\mathbb{P}_{(e)}$ взаимно эквивалентных возможностей P и, следовательно, — класс $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ взаимно эквивалентных возможностных моделей каждого испытания.

Так как для любой возможности $\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, максимально согласованной с вероятностью $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$, удовлетворяющей уловиям (3.2.1), (3.2.7), упорядоченность возможностей $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1,2,\ldots$, определяется условиями

$$\text{либо } e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1, \tag{3.4.2}$$

$$\text{либо } e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow f_i < 1,\ i = 1,2,\ldots,s, \tag{3.4.3}$$

то задача эмпирического восстановления возможности сводится к задаче теории статистических решений, в которой на основе значений частот $\nu_i^{(n)}$, $i=1,2,\ldots,s$, элементарных событий $\{\omega_i\}$, $i=1,2,\ldots,s$, наблюденных в последовательности n взаимно независимых испытаний, $n=1,2,\ldots$, модель которых определена в (3.4.1), для всех $i=1,\ldots,s$ требуется принять одну из гипотез (3.4.2) или (3.4.3).

Рассмотрим следующий алгоритм проверки гипотез (3.4.2), (3.4.3), [46]. Для всех $i=1,\ldots,s$ и каждого $n=1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}
&\blacktriangleright \text{ если } \widehat{f}_i^{(n)} > 1+\delta^{(n,s)}, \text{ то } \square_1\text{: считать } f_i > 1;\\
&\blacktriangleright \text{ если } \widehat{f}_i^{(n)} < 1-\delta^{(n,s)}, \text{ то } \square_2\text{: считать } f_i < 1;\\
&\blacktriangleright \text{ если } |\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}, \text{ то } \circlearrowright\text{: продолжить испытания,}
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

где

$$\widehat{f}_i^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_{i-1}^{(n)} + 2\nu_i^{(n)},\ i=1,2,\ldots \tag{3.4.5}$$

В алгоритме (3.4.4) при каждом $n=1,2,\ldots$ проверяются условия решений $\square_1$, $\square_2$ и $\circlearrowright$ для всех $i=1,\ldots,s$; если при этом приняты только решения $\square_1$ или $\square_2$, то алгоритм завершен, если же хотя бы для одного i принято решение $\circlearrowright$, то после каждого дополнительного испытания для всех $i=1,\ldots,s$ проверяются условия решений $\square_1$, $\square_2$ и $\circlearrowright$, ранее принятые решения корректируются, ..., и так — до тех пор, пока, наконец, алгоритм будет завершен.

Значения $\delta^{(n,s)}$, $n=1,2,\ldots$, в (3.4.4) определим, задав верхние границы $\alpha^{(s)}$, $s=2,3,\ldots$, вероятностей ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$. Вероятность ошибочного решения $\square_1$, при котором наблюдено значение $\widehat{f}_i^{(n)} > 1+\delta^{(n,s)}$, но на самом деле $f_i<1$,

$$\begin{aligned}
\Pr{}^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} > 1+\delta^{(n,s)}\}|f_i<1) \leqslant \Pr{}^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\}|f_i<1) \leqslant \\
\leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)},\ i=1,\ldots,s.
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Первое неравенство в (3.4.6) обусловлено тем, что событие $\{\widehat{f}_i^{(n)} - f_i > \delta^{(n,s)}\}$ является следствием события $\{\widehat{f}_i^{(n)} > 1+\delta^{(n,s)}\}$, если $f_i<1$, второе неравенство является вариантом неравенства Хёфдинга, см. лемму 3.1.1, поскольку, согласно (3.4.5), в равенстве

$$\widehat{f}_i^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\chi_1(\omega^{(j)}) + \ldots + \chi_{i-1}(\omega^{(j)}) + 2\chi_i(\omega^{(j)}))$$

все слагаемые при $j=1,2,\ldots,n$ взаимно независимы, принимают значения 0, 1 или 2, и $\mathsf{E}^{(n)}\widehat{f}_i^{(n)} = f_i$, $i=1,2,\ldots$ Значение $\alpha^{(s)}$ в (3.4.6) оценивает сверху вероятность ошибочного решения $\square_1$ и определяет

$$\delta^{(n,s)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{\frac{1}{2}},\ n=1,2,\ldots,\ s=1,2,\ldots \tag{3.4.7}$$

Аналогично вероятность неверного решения $\square_2$

$$\Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}\}|f_i > 1) \leqslant \Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} - f_i < -\delta^{(n,s)}\}|f_i > 1) \leqslant \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)}.$$

Покажем, что событие $\{1 - \delta^{(n,s)} \leqslant \widehat{f}_i^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,s)}\}$, приводящее в алгоритме (3.4.4) к решению ↻ о продолжении испытаний, при любом условии $f_i > 1$ или $f_i < 1$, $i = 1, \ldots, s$, для каждого $s = 1, 2, \ldots$ может выполняться лишь для п. н. конечного числа n испытаний,и алгоритм будет завершен при минимальном n, при котором $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} |\widehat{f}_i^{(n)} - 1| > \delta^{(n,s)}$.

Действительно, пусть $|f_i - 1| \geqslant 2\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда для каждого $s = 1, 2, \ldots$ и всех $n \geqslant n_i^{(s)} = \min\{k \mid \delta^{(k,s)} < \varepsilon_i\}$,

$$\begin{aligned} &\Pr^{(n)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\, |f_i - 1| \geqslant 2\varepsilon_i) \leqslant \\ &\leqslant \Pr^{(n)}(\{|f_i - 1| - |\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \geqslant 2\varepsilon_i - \delta^{(n,s)}\}|\, |f_i - 1| \geqslant 2\varepsilon_i) \leqslant \\ &\leqslant \Pr^{(n)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - f_i| \geqslant 2\varepsilon_i - \delta^{(n,s)}\}) \leqslant \Pr^{(n)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - f_i| \geqslant \varepsilon_i\}) = \\ &= \Pr^{(\infty)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - f_i| \geqslant \varepsilon_i\}) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon_i^2/2), \end{aligned}$$

и утверждение, согласно которому для каждого $s = 1, 2, \ldots$ происходит п. н. конечное число событий $\{1 - \delta^{(n,s)} \leqslant \widehat{f}_i^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,s)}\} = \{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, следует теперь из леммы Бореля–Кантелли, так как $\sum\limits_{n=n_i^{(s)}}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_i^2/2) < \infty$, $i = 1, \ldots, s$. Поэтому для любого $s = 1, 2, \ldots$, и любого $i = 1, \ldots, s$ существует $N_i^{(s)}$ такое, что для любого $n \geqslant N_i^{(s)}$ $\Pr^{(n)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}) = 0$, а поскольку для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\}) + \Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}\}) + \Pr^{(n)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}) = 1$, то для любого $n \geqslant N_i^{(s)}$ $\Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\}) + \Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}\}) = 1$, и если одно из решений, например, $\square_1$, ошибочно, то $\Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\}) \leqslant \alpha^{(s)}$, при этом вероятность верного решения $\square_2$ $\Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}\}) \geqslant 1 - \alpha^{(s)}$.

Заметим, что если на самом деле $f_i \leqslant 1 - 2\varepsilon_i < 1$, то подобно (3.3.25), (3.3.26), (3.3.27) найдем, что для $n \geqslant n_i^s$ $\Pr^{(n)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}) \leqslant \exp(-n\varepsilon_i^2/2) = \beta_i^{(s)} \leqslant \alpha^{(s)}$, неравенства $\Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}\}) \geqslant 1 - \beta_i^{(s)} \geqslant 1 - \alpha^{(s)}$ оценивают вероятность правильного $\square_2$, и для любого $n = 1, 2, \ldots$ неравенство $\Pr^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\}) \leqslant \exp -n\varepsilon_i^2/2 = (\beta_i^{(s)})^4$ оценивает вероятность ошибочного решения, причем для $n \geqslant n_i^s$ $(\beta_i^{(s)})^4 \leqslant (\alpha^{(s)})^4$.

Теорема 3.4.1 ([46]). *Для любого* $s = 1, 2, \ldots$ *алгоритм* (3.4.4) *согласно условиям* (3.4.2), (3.4.3) *на основе п. н. конечного числа испытаний восстанавливает упорядоченность возможностей элементарных событий* $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_s$, *совпадающую с истинной их* *упорядоченностью с вероятностью, большей* $1 - s\,\alpha^{(s)} = 1 - \alpha$, *если* $\alpha^{(s)} = \alpha/s$, *где* α — *априорная оценка вероятности ошибочного упорядочения возможностей* s *элементарных событий*, $s = 1, 2, \ldots$

Действительно, вероятность того, что среди s решений $\square_1, \square_2$, полученных по завершении алгоритма, по меньшей мере одно ошибочно, не больше $s\alpha^{(s)}$.

3.4.2. Алгоритм эмпирического восстановления возможности, максимально согласованной с вероятностью, изменяющейся в процессе испытаний. В этом параграфе модель n взаимно независимых испытаний определена как вероятностное пространство

$$(\Omega^{(n)}, \mathcal{P}(\Omega^{(n)}), \mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_1) \times \ldots \times (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}_n), \quad (3.4.8)$$

в котором $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n} = \mathrm{Pr}_1 \times \ldots \times \mathrm{Pr}_n$, для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ вероятности $\mathrm{Pr}_j \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ вполне регулярные, и, следовательно, для каждого $i = 1, 2, \ldots$

$$\text{либо } e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \mathrm{F}^{(j)}_i = \mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\}) + \ldots + \mathrm{Pr}_j(\{\omega_{i-1}\}) + 2\mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\}) > 1, \quad (3.4.9)$$

$$\text{либо } e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow \mathrm{F}^{(j)}_i < 1, \ j = 1, \ldots, n, \quad (3.4.10)$$

для $n = 1, 2, \ldots$ Значение $e = 0.e_1e_2\ldots$, определяющее упорядоченность возможностей $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, разумеется, неизвестно и должно быть определено на основе результатов испытаний.

В рассматриваемом случае проверяемые гипотезы определяются следующими условиями:

$$\text{либо } e_i = 1 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow f^{(n)}_i = \mathrm{pr}^{(n)}_1 + \ldots + \mathrm{pr}^{(n)}_{i-1} + 2\mathrm{pr}^{(n)}_i > 1, \quad (3.4.11)$$

$$\text{либо } e_i = 0 \Leftrightarrow \mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1} \Leftrightarrow f^{(n)}_i < 1, \ \ i = 1, \ldots, s, \quad (3.4.12)$$

где $\mathrm{pr}^{(n)}_i = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Pr}_j(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, s$, суть «эмпирические вероятности» элементарных событий.

Так как модель испытаний такова, что условия (3.4.9), (3.4.10) $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$-измеримости восстанавливаемой возможности выполнены для каждого $i = 1, 2, \ldots$ и всех $j = 1, 2, \ldots$, то гипотезы (3.4.11), (3.4.12) суть следствия условий (3.4.9), (3.4.10), но, в отличие от последних, могут быть проверены эмпирически, поскольку при $n \to \infty$ $\widehat{f}^{(n)}_i - f^{(n)}_i \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, где $\widehat{f}^{(n)}_i = \nu^{(n)}_1 + \ldots + \nu^{(n)}_{i-1} + 2\nu^{(n)}_i$, $\nu^{(n)}_i$ — частота элементарного события $\{\omega_i\}$ в последовательности n испытаний, $i = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим алгоритм решения задач проверки гипотез (3.4.11), (3.4.12), [46], согласно которому для всех $i = 1, \ldots, s$ и каждого

$n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
&\blacktriangleright \text{ если } \widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}, \text{ то } \square_1\text{: считать } f_i^{(n)} > 1,\\
&\blacktriangleright \text{ если } \widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}, \text{ то } \square_2\text{: считать } f_i^{(n)} < 1,\\
&\blacktriangleright \text{ если } |\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}, \text{ то } \circlearrowright\text{: продолжить испытания.}
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Значения $\delta^{(n,s)}$, $n = 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots$ в (3.4.13) определим, как и в параграфе 3.4.1, задав соответственно верхние границы $\alpha^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, вероятностей ошибочных решений $\square_1$ и $\square_2$. Так как

$$\widehat{f}_i^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\chi_1(\omega^{(j)}) + \ldots + \chi_{i-1}(\omega^{(j)}) + 2\chi_i(\omega^{(j)})),$$

где слагаемые при $j = 1, 2, \ldots, n$ взаимно независимы, принимают значения 0, 1 или 2 и $\mathsf{E}_{1,\ldots,n}^{(n)}\widehat{f}_i^{(n)} = f_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, то, как и в § 3.4.1, вероятности ошибочно принять решения $\square_1, \square_2$

$$\begin{gathered}
\begin{aligned}
&\Pr{}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)}\}|f_i^{(n)} < 1) \leqslant \Pr{}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} - f_i^{(n)} > \\
&> \delta^{(n,s)}\}|f_i < 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)};
\end{aligned}\\
\begin{aligned}
&\Pr{}_{1,\ldots,n}^{(n)}(\{\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)}\}|f_i^{(n)} > 1) \leqslant\\
&\leqslant \exp(-n(\delta^{(n,s)})^2/2) = \alpha^{(s)},\ i = 1, \ldots, s.
\end{aligned}
\end{gathered} \tag{3.4.14}$$

Поэтому и связь между $\alpha^{(s)}$ и $\delta^{(n,s)}$ определена, как и при неизменяющейся вероятности, равенством (3.4.7). Если же наблюденное значение

$$\widehat{f}_i^{(n)} \in \left[1 - \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{\frac{1}{2}},\ 1 + \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \mathrm{I}^{(n,s)}, \tag{3.4.15}$$

то, согласно (3.4.13), принимается решение $\circlearrowright$, и испытания должны быть продолжены, причем при изменяющейся вероятности событие $\{\widehat{f}_i^{(n)} \in \mathrm{I}^{(n,s)}\}$, вообще говоря, может выполняться для бесконечно многих $n = 1, 2, \ldots$

Сформулируем требования к модели испытаний (3.4.8), гарантирующие, что произойдет п. н. конечное число событий (3.4.15).

Лемма 3.4.1 ([46]). *Пусть при всех достаточно больших n и всех $i = 1, \ldots, s$ $|f_i^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s})$, где $\delta^{(n,s)}$ определены в* (3.4.7), *$\varepsilon_{n,s} > 0$ и удовлетворяют условиям $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha^{(s)})^{\varepsilon_{n,s}^2} < \infty$, в которых $\alpha^{(s)} = \alpha/s$, $s = 1, 2, \ldots$ Тогда для каждого $s = 1, 2, \ldots$ происходит п. н. конечное число событий* (3.4.15).

Доказательство. Так как при условии $|f_i^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s})$, $\varepsilon_{n,s} > 0$, выполнены следующие включения событий

$$\{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\} \subset \{|f_i^{(n)} - 1| - |\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s}) - \delta^{(n,s)} = \\ = \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\} \subset \{|\widehat{f}_i^{(n)} - f_i^{(n)}| \geqslant \varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)}\},$$

то

$$\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}|\; |f_i^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,s)}(1 + \varepsilon_{n,s})) \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - \\ - f_i^{(n)}| \geqslant \varepsilon_n \delta^{(n,s)}\}) \leqslant 2\exp(-n(\varepsilon_{n,s}\delta^{(n,s)})^2/2) = 2(\alpha^{(s)})^{\varepsilon^2_{n,s}}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Pr}^{(\infty)}_{1,2,\ldots}(\{|\widehat{f}_i^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,s)}\}) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^{(s)})^{\varepsilon^2_{n,s}} < \infty.$$

Последнее неравенство гарантирует, что происходит п. н. конечное число событий (3.4.15). ■

Если модель испытаний удовлетворяет условиям, сформулированным в лемме[1] 3.4.1, то теорема 3.4.1 верна и в случае вероятности, изменяющейся от испытания к испытанию, если существует $e = 0.e_1e_2\ldots$, для которого условия (3.4.9), (3.4.10) выполнены для всех $j = 1, 2, \ldots$

Замечание 3.4.1. Если $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}, \mathrm{N})$ — нечеткая модель стохастического объекта, *то задача эмпирического восстановления* N сводится к задаче эмпирического восстановления P, поскольку согласно результатам, полученным в § 2.3.2 гл. 2, $\mathrm{Pr} \approx\triangleright \mathrm{N}$, если и только если $\mathrm{Pr} \approx\triangleright \mathrm{P}$, и при этом $\exists\vartheta(\cdot) \in \Theta\ \mathrm{N}(A) = \vartheta \circ \mathrm{P}(\Omega\backslash A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Замечание 3.4.2. Если априори известно, что $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, то условия (3.4.11)–(3.4.13), представленные в виде: $\widehat{f}_i^{(n)} > 1 + \delta^{(n,s)} \Rightarrow e_i = 1$, $\widehat{f}_i^{(n)} < 1 - \delta^{(n,s)} \Rightarrow e_i = 0$, иначе $\Rightarrow$ продолжить испытания, $i = 1, \ldots, s$, где $\delta^{(n,s)} = \left(\dfrac{2}{n}\ln\dfrac{1}{\alpha^{(s)}}\right)^{1/2}$, любопытно исследовать как *алгоритм непосредственного* восстановления P, не связанный с предположением о *вероятностной* модели случайности, зависящий от $\alpha^{(s)} \in [0, 1]$ как от параметра.

3.5. Гранулирование пространства элементарных событий

Как отмечено в § 2.3.3 гл. 2, градации вероятностей элементарных событий $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, упорядоченных согласно условию

$$\mathrm{pr}_1 > \mathrm{pr}_2 > \ldots > 0,\ \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1, \tag{3.5.1}$$

[1] Условия леммы 3.4.1, очевидно, выполнены, если среди вероятностей $\mathrm{Pr}_1, \mathrm{Pr}_2, \ldots$ конечное число различных.

вообще говоря, недостаточны для того, чтобы максимально согласованное с распределением вероятностей в (3.5.1) распределение возможностей $\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, «различало» вероятности в (3.5.1), т. е. удовлетворяло условию

$$1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \ldots \tag{3.5.2}$$

Согласно результатам, представленным в § 2.4.1 гл. 2, для упорядоченности в (3.5.2) необходимо и достаточно, чтобы вероятности в (3.5.1) удовлетворяли более сильным условиям (упорядоченности, см. замечание 3.5.1)

$$f_i = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1} + 2\mathrm{pr}_i > 1,\ i = 1, 2, \ldots, \tag{3.5.3}$$

или, что эквивалентно условиям (3.5.3),

$$\mathrm{pr}_i/(1 - (\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1})) = \Pr(\{\omega_i\} | \, \Omega \backslash \{\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}\}) > 1/2, \tag{3.5.4}$$

см. замечание 2.4.2 гл. 2.

Если же в (3.5.3) $f_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots$, то распределение возможностей, максимально согласованное с распределением вероятностей в (3.5.1), не «различает» вероятности в (3.5.1), поскольку в этом случае $1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \ldots$, и, следовательно, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1$ для любых событий $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, в то время как отношение $\Pr(A)/\Pr(B)$ их вероятностей может быть сколь угодно велико. В таком случае модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$ слишком «детальна» для того, чтобы модель $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ могла отражать ее «стохастические детали».

Замечание 3.5.1. Упорядоченность в (3.5.1) *необходима* для выполнения условий (3.5.3). Действительно, согласно (3.5.3) $\mathrm{pr}_1 > 1/2$, $\mathrm{pr}_2 \leqslant 1 - \mathrm{pr}_1 < 1/2 < \mathrm{pr}_1$, согласно (3.5.4) $\mathrm{pr}_i > (1/2)(1 - (\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}))$, с другой стороны $\mathrm{pr}_{i+1} \leqslant 1 - (\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_i) < 1 - (\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1}) - (1/2)(1 - (\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1})) = (1/2)(1 - (\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{i-1})) < \mathrm{pr}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, т. е. условия $\mathrm{pr}_i > \mathrm{pr}_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, являются следствием условий (3.5.3).

3.5.1. Гранулирование $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}}$. Заметим, что согласно условию (3.5.3) неравенство $\mathrm{p}_i > \mathrm{p}_{i+1}$ будет выполнено, если и только если вероятность $\mathrm{pr}_i = \Pr(\{\omega_i\})$ больше $\mathrm{pr}_{i+1} + \mathrm{pr}_{i+2} + \ldots = \Pr(\{\omega_{i+1}, \omega_{i+2}, \ldots\})$, причем *независимо от того, как соотносятся между собой вероятности* $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_i$, $i = 2, 3, \ldots$ Поэтому, чтобы возможность отражала градации вероятностей, следует гранулировать Ω, объявив наблюдаемыми[1] не элементарные события $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots$, а гранулы $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся подмножества Ω, образующие разбиение $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Вероятности гранул, которые будем считать упорядоченными подобно (3.5.1), согласно условию

$$\Pr(\Omega_1) > \Pr(\Omega_2) > \ldots > 0,\ \Pr(\Omega_1) + \Pr(\Omega_2) + \ldots = 1, \tag{3.5.5}$$

[1]) Наблюдаемыми для возможностной модели.

можно сделать достаточно «контрастными», чтобы их возможности удовлетворяли такому же условию упорядоченности

$$1 = \mathrm{P}(\Omega_1) > \mathrm{P}(\Omega_2) > \ldots, \tag{3.5.6}$$

если потребовать, чтобы $\Pr \overset{\mathcal{A}}{\approx\!\triangleright} \mathrm{P}$, где $\mathcal{A}$ — минимальная σ-алгебра [1]), содержащая гранулы $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, а $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ построить так, чтобы неравенства в (3.5.6) были следствием неравенств в (3.5.5).

Напомним, что речь идет о вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr|_{\mathcal{A}})$ и о максимально согласованном с ним пространстве с возможностью $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}|_{\mathcal{A}})$, в которых вероятность $\Pr|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ и возможность $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ — суть сужения $\Pr(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ и соответственно $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ на σ-алгебру $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, определенные своими значениями на гранулах $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ $\Pr|_{\mathcal{A}}(\Omega_k) = \Pr(\Omega_k)$, $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(\Omega_k) = \mathrm{P}(\Omega_k)$, $k = 1, 2, \ldots$

В рассматриваемом случае, когда σ-алгебра $\mathcal{A}$ порождена разбиением $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, символы $\Pr \overset{\mathcal{A}}{\approx\!\triangleright} \mathrm{P}$ и $\Pr|_{\mathcal{A}} \approx\!\triangleright \mathrm{P}|_{\mathcal{A}}$ можно пояснить, исходя из символа $\Pr \approx\!\triangleright \mathrm{P}$ максимальной согласованности P сPr на $\mathcal{P}(\Omega)$. Согласно определению 2.0.3, данному во введении к гл. 2, и результатам § 2.3 гл. 2 условия максимальной согласованности $\Pr \overset{\mathcal{A}}{\approx\!\triangleright} \mathrm{P}$ сводятся к построению монотонно неубывающей функции $\widetilde{\gamma}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, непрерывной и положительной на $(0,1]$, удовлетворяющей условиям $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $\widetilde{\gamma}(1) = 1$ и обеспечивающей для вероятностей в (3.5.5) максимальное число строгих неравенств среди $\widetilde{\gamma}(\Pr(\Omega_1)) \geqslant \widetilde{\gamma}(\Pr(\Omega_2)) \geqslant \ldots$ при условии, что для любого $A \in \mathcal{A}$ $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\Pr(A))$.

Всем этим требованиям можно удовлетворить, используя рассмотренный в § 2.3 гл. 2 алгоритм построения зависящей от $\widetilde{\Pr}$ функции $\widetilde{\gamma}(\cdot)$, обеспечивающий максимальную согласованность возможности $\widetilde{\mathrm{P}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\widetilde{\Omega}) \to [0,1]$, определенной равенствами

$$\widetilde{\mathrm{P}}(\widetilde{A}) = \widetilde{\gamma}(\widetilde{\Pr}(\widetilde{A})),\ \ \widetilde{A} \in \mathcal{P}(\widetilde{\Omega}),$$

с вероятностью $\widetilde{\Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\widetilde{\Omega}) \to [0,1]$, определив: $\widetilde{\Omega} = \{\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \ldots\}$, $\widetilde{\Pr}(\{\widetilde{\omega}_k\}) = \Pr|_{\mathcal{A}}(\Omega_k)$, $\widetilde{\mathrm{P}}(\{\widetilde{\omega}_k\}) = \mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(\Omega_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и воспользовавшись изоморфностью вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr|_{\mathcal{A}})$ и $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{P}(\widetilde{\Omega}), \widetilde{\Pr})$ и пространств с возможностью $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}|_{\mathcal{A}})$ и $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{P}(\widetilde{\Omega}), \widetilde{\mathrm{P}})$, гарантирующей, что равенства $\widetilde{\mathrm{P}}(\widetilde{A}) = \widetilde{\gamma}(\widetilde{\Pr}(\widetilde{A}))$, $\widetilde{A} \in \mathcal{P}(\widetilde{\Omega})$, означающие, что $\widetilde{\Pr} \approx\!\triangleright \widetilde{\mathrm{P}}$, эквивалентны равенствам $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(A) = \widetilde{\gamma}(\Pr|_{\mathcal{A}}(A))$, $A \in \mathcal{A}$, означающим, что $\Pr|_{\mathcal{A}} \approx\!\triangleright \mathrm{P}|_{\mathcal{A}}$.

---

[1]) $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, пустого $\varnothing$ и представимых в виде конечных или счетных объединений Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$, $\Pr \overset{\mathcal{A}}{\approx\!\triangleright} \mathrm{P}$ означает, что возможность P максимально согласована с вероятностью Pr на σ-алгебре $\mathcal{A}$, см. определение 2.0.3 в гл. 2.

Для получения максимальной согласованности $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\approx\!\triangleright} \mathrm{P}$ (исходной) вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ с возможностью $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ на $\mathcal{A}$ достаточно в качестве P взять любую [1] возможность, получаемую продолжением $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ на $\mathcal{P}(\Omega)$, удовлетворяющую условию

$$\mathrm{P}(\Omega_k) = \widetilde{\mathrm{P}}(\{\widetilde{\omega}_k\}) = \widetilde{\gamma}(\widetilde{\mathrm{Pr}}(\{\widetilde{\omega}_k\})) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(\Omega_k)),\ k = 1,2,\ldots, \qquad (3.5.7)$$

и условию, следующему из априорной согласованности возможности P с вероятностью Pr, означающей, что для любых $\omega_i, \omega_j \in \Omega_k$,

$$\begin{aligned} &\text{если } \mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\}) \leqslant \mathrm{Pr}(\{\omega_j\}) = \mathrm{pr}_j,\\ &\text{то } \ \mathrm{p}_i = \mathrm{P}(\{\omega_i\}) \leqslant \mathrm{P}(\{\omega_j\}) = \mathrm{p}_j. \end{aligned} \qquad (3.5.8)$$

При этом для любой возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, полученной таким продолжением $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}$ на $\mathcal{P}(\Omega)$, и (исходной) вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ будет выполнено условие $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\approx\!\triangleright} \mathrm{P}$, означаюшее, что равенство $\mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A))$ выполняется не для всех $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, а лишь для всех $A \in \mathcal{A}$.

Итак, для обеспечения условий $\mathrm{Pr}|_{\mathcal{A}} \approx\!\triangleright \mathrm{P}|_{\mathcal{A}}$ и (3.5.6) достаточно определить гранулы $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ так, чтобы выполнялись неравенства (3.5.3) или (3.5.4), в которых $\{\omega_i\}$ следует заменить на Ω_i, $i = 1,2,\ldots$,:

$$\begin{gathered} \mathrm{Pr}(\Omega_1) + \ldots + \mathrm{Pr}(\Omega_{k-1}) + 2\mathrm{Pr}(\Omega_k) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Pr}(\Omega_k) > \mathrm{Pr}(\Omega_{k+1}) + \\ + \mathrm{Pr}(\Omega_{k+2}) + \ldots,\ k = 1,2,\ldots, \end{gathered} \qquad (3.5.9)$$

или, что эквивалентно условиям (3.5.9),

$$\mathrm{Pr}(\Omega_k \mid \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_{k-1})) > 1/2,\ k = 1,2,\ldots,\ \Omega_0 = \varnothing. \qquad (3.5.10)$$

Замечание 3.5.2. Условия (3.5.9), будучи выполненными, влекут условия (3.5.5). Действительно, согласно (3.5.9) $\mathrm{Pr}(\Omega_k) > (1/2)(1 - (\mathrm{Pr}(\Omega_1) + \ldots + \mathrm{Pr}(\Omega_{k-1})))$, а, с другой стороны, учитывая это неравенство и тот факт, что $\Omega_{k+1} \subset \Omega\setminus(\Omega_1 \bigcup \ldots \bigcup \Omega_k)$, найдем, что $\mathrm{Pr}(\Omega_{k+1}) \leqslant 1 - (\mathrm{Pr}(\Omega_1) + \ldots + \mathrm{Pr}(\Omega_k)) < (1/2)(1 - (\mathrm{Pr}(\Omega_1) + \ldots + \mathrm{Pr}(\Omega_{k-1}))) < \mathrm{Pr}(\Omega_k)$, $k = 1,2,\ldots$, см. замечание 3.5.1.

3.5.2. Алгоритмы гранулирования $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Условия оптимальности. Гранулировать Ω, удовлетворив условиям (3.5.9),

[1] В § 1.9 гл. 1 рассмотрено продолжение $\overline{\mathrm{P}}$ возможности $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ на $\mathcal{P}(\Omega)$, названное максимальным в том смысле, что для любого другого продолжения $\widehat{\mathrm{P}}$ $\overline{\mathrm{P}}(A) \geqslant \widehat{\mathrm{P}}(A)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. В данном случае для любых $\omega, \omega' \in \Omega_k$ $\overline{\mathrm{P}}(\{\omega\}) = \overline{\mathrm{P}}(\{\omega'\}) = \overline{\mathrm{P}}(\Omega_k)$, в то время как $\widehat{\mathrm{P}}(\{\omega\}) \leqslant \widehat{\mathrm{P}}(\{\omega'\}) \leqslant \widehat{\mathrm{P}}(\Omega_k) = \overline{\mathrm{P}}(\Omega_k)$, если $\mathrm{Pr}(\{\omega\}) \leqslant \mathrm{Pr}(\{\omega'\}) \leqslant \mathrm{Pr}(\Omega_k)$, причем $\widehat{\mathrm{P}}(\Omega_k) = \max\limits_{\omega_i \in \Omega_k} \widehat{\mathrm{P}}(\{\omega_i\})$, $k = 1,2,\ldots$

можно многими способами. Например, исходя из упорядоченностей в (3.2.1), (3.5.8) и в (3.5.5), найдем

$$j_1 = \min\{j \mid 2(\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_j) > 1\}, \tag{3.5.11}$$

$$j_2 = \min\{j \mid \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j_1} + 2(\mathrm{pr}_{j_1+1} + \ldots + \mathrm{pr}_j) > 1\},$$

$$\ldots$$

$$j_{k+1} = \min\{j \mid \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j_k} + 2(\mathrm{pr}_{j_k+1} + \ldots + \mathrm{pr}_j) > 1\},$$

$$\ldots$$

и, имея в виду условия (3.5.9), определим

$$\Omega_1^{(1)} = \{\omega_1, \ldots, \omega_{j_1}\},\ \Omega_2^{(1)} = \{\omega_{j_1+1}, \ldots, \omega_{j_2}\}, \ldots,$$
$$\Omega_{k+1}^{(1)} = \{\omega_{j_k+1}, \ldots, \omega_{j_{k+1}}\}, \ldots \tag{3.5.12}$$

Согласно (3.5.11), (3.5.12) будут выполнены условия (3.5.5), (3.5.6) и $\mathrm{Pr}|_{\mathcal{A}} \approx\!\rhd \mathrm{P}|_{\mathcal{A}}$, а для любой возможности $\mathrm{P}(\cdot) = \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, полученной продолжением возможности $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$, будет выполнено условие $\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\approx\!\rhd} \mathrm{P}$, если, кроме прочего, потребовать, чтобы выполнялись условия (3.5.7), (3.5.8). При этом если $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ — максимальное продолжение $\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}(\cdot)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$, то

$$1 = \mathrm{P}(\{\omega_1\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{\omega_{j_1}\}) > \mathrm{P}(\{\omega_{j_1+1}\}) = \ldots =$$
$$= \mathrm{P}(\{\omega_{j_2}\}) > \mathrm{P}(\{\omega_{j_2+1}\}) = \ldots,$$

а для любого другого продолжения, с учетом требований (3.2.1), (3.5.7) и (3.5.8),

$$1 = \mathrm{P}(\{\omega_1\}) \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{P}(\{\omega_{j_1}\}) > \mathrm{P}(\{\omega_{j_1+1}\}) \geqslant \ldots \geqslant$$
$$\geqslant \mathrm{P}(\{\omega_{j_2}\}) > \mathrm{P}(\{\omega_{j_2+1}\}) \geqslant \ldots$$

Однако разбиение Ω на гранулы (3.5.12) не экономно; назовем его разбиением первого приближения. Желательно, чтобы гранулы удовлетворяли условиям (3.5.5), (3.5.6), но при этом

► содержали минимальное количество элементарных событий ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, и

► имели минимальные вероятности, удовлетворяющие условиям (3.5.9).

Эти требования минимальности актуальны при гранулировании конечных $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, поскольку обеспечивают максимальное число m гранул в разбиении $\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} \Omega_j$.

Рассмотрим алгоритм гранулирования Ω, позволяющий до некоторой степени учесть эти рекомендации. Как и в алгоритме (3.5.11), (3.5.12) найдем

$$j_1 = \min\{j \mid 2(\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_j) > 1\}. \tag{3.5.13}$$

Если $j_1 = 1$, то определим [1] $\Omega_1^{(1)} = \{\omega_1\}$, если же $j_1 > 1$, то найдем

$$k_1 = \max\{k \mid 2(\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j_1-1} + \mathrm{pr}_{j_1-1+k}) > 1\}. \tag{3.5.14}$$

В этом случае определим первую гранулу второго приближения

$$\Omega_1^{(2)} = \{\omega_1, \ldots, \omega_{j_1-1}, \omega_{j_1-1+k_1}\}. \tag{3.5.15}$$

Определенная так первая гранула $\Omega_1^{(2)}$ содержит столько же элементарных событий, сколько содержит $\Omega_1^{(1)}$, но при этом ее вероятность меньше, чем вероятность $\Omega_1^{(1)}$.

Для построения первой гранулы третьего приближения определим согласно (3.5.13) j_1. Если $j_1 = 1$, то $\Omega_1^{(3)} = \{\omega_1\}$, если же $j_1 > 1$, то найдем согласно (3.5.14) k_1 и, если $k_1 = 1$, то определим $\Omega_1^{(3)} = \Omega_1^{(2)}$, а если [2] $k_1 > 1$, то найдем $k_2 = \max\{k|(2(\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_{j_1-1} + \mathrm{pr}_{j_1-1+k_1-1} + \mathrm{pr}_{j_1-1+k_1-1+k}) > 1\}$ и определим

$$\Omega_1^{(3)} = \{\omega_1, \ldots, \omega_{j_1-1}, \omega_{j_1-1+k_1-1}, \omega_{j_1-1+k_1-1+k_2}\}. \tag{3.5.16}$$

Гранула $\Omega_1^{(3)}$ в (3.5.16) содержит столько же элементарных событий, сколько их содержит гранула $\Omega_1^{(2)}$ в (3.5.15), но вероятность $\Omega_1^{(3)}$ меньше, чем вероятность $\Omega_1^{(2)}$.

Этот алгоритм позволяет построить первую гранулу любого приближения. Остановившись на любом из них, например, на втором в (3.5.15), рассмотрим алгоритм построения второй гранулы, заметив вначале, что условия (3.5.13), (3.5.14), (3.5.15), означают, что $\mathrm{Pr}(\Omega_1^{(2)})/(1 - \mathrm{Pr}(\Omega_1^{(2)})) > 1$, или, что то же самое, $\mathrm{Pr}(\Omega_1^{(2)}) > 1/2$, и гарантируют, что $1 = \mathrm{P}(\Omega_1^{(2)}) > \mathrm{P}(\Omega_2)$ при любом определении Ω_2, Ω_3, …

Для определения гранулы Ω_2 образуем новое пространство элементарных событий $\Omega^{(1)} = \Omega \backslash \Omega_1^{(2)}$, перенумеруем заново его точки, сохранив их упорядоченность, принятую в (3.2.1), например, для $j_1 > 1$ $\Omega^{(1)} = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_1-1+k_1-1}, \omega_{j_1-1+k_1+1} \ldots\} = \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \ldots\}$ и определим вероятности $\{\omega_1^{(1)}\}, \{\omega_2^{(1)}\}, \ldots$ как условные при условии $\Omega \backslash \Omega_1^{(2)}$,

[1] Если $j_1 = 1$, то в любом приближении $\Omega_1^{(\cdot)} = \{\omega_1\}$.

[2] Если $k_1 = 1$, то в любом приближении $\Omega_1^{(\cdot)} = \Omega_1^{(2)}$.

то есть

$$\mathrm{pr}_k^{(1)} = \Pr(\{\omega_k^{(1)}\} \mid \Omega\backslash\Omega_1^{(2)}) = \frac{\Pr(\{\omega_k^{(1)}\})}{\Pr(\Omega\backslash\Omega_1^{(2)})}, \ \ k = 1, 2, \ldots \tag{3.5.17}$$

Последнее равенство в (3.5.17) является следствием включений $\omega_k^{(1)} \in \in \Omega\backslash\Omega_1^{(2)} = \Omega^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ Теперь гранула $\Omega_2^{(2)}$ второго приближения определится как подмножество $\Omega^{(1)}$ подобно тому, как гранула $\Omega_1^{(2)}$ была определена как подмножество Ω. А именно, определим

$$j_1 = \min\{j \mid 2(\mathrm{pr}_1^{(1)} + \ldots + \mathrm{pr}_j^{(1)}) > 1 \tag{3.5.18}$$

и если $j_1 = 1$, то положим $\Omega_2^2 = \{\omega_1^{(1)}\}$, а если $j_1 > 1$, то найдем

$$k_1 = \max\{k \mid 2(\mathrm{pr}_1^{(1)} + \ldots + \mathrm{pr}_{j_1-1}^{(1)} + \mathrm{pr}_{j_1-1+k}^{(1)}) > 1\} \tag{3.5.19}$$

и определим

$$\Omega_2^{(2)} = \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \ldots, \omega_{j_1-1}^{(1)}, \omega_{j_1-1+k_1}^{(1)}\}. \tag{3.5.20}$$

Так определенная гранула $\Omega_2^{(2)}$ второго приближения удовлетворяет условию

$$\Pr(\Omega_2^{(2)} \mid \Omega\backslash\Omega_1^{(2)}) = \Pr(\Omega_2^{(2)})/\Pr(\Omega\backslash\Omega_1^{(2)}) > 1/2, \tag{3.5.21}$$

гарантирующему неравенство $\mathrm{P}(\Omega_2^{(2)}) > \mathrm{P}(\Omega_3)$. Гранула $\Omega_2^{(2)}$ имеет вероятность, удовлетворяющую условию (3.5.21) и условию $\Pr(\Omega_1^{(2)}) > > \Pr(\Omega_2^{(2)})$, которое, согласно замечанию 3.5.2, является следствием (3.5.21).

Гранула $\Omega_3^{(2)}$ определяется как подмножество $\Omega^{(1)}\backslash\Omega_2^{(2)}$ по такому же правилу, как гранула $\Omega_2^{(2)}$ определена как подмножество $\Omega\backslash\Omega_1^{(2)}$ в (3.5.18), (3.5.19) и (3.5.20). Это гарантирует выполнение неравенств $\Pr(\Omega_2^{(2)}) > \Pr(\Omega_3^{(2)})$ и $\mathrm{P}(\Omega_2^{(2)}) > \mathrm{P}(\Omega_3^{(2)})$.

Описанный алгоритм гранулирования *позволяет построить последовательность σ-алгебр $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, \ldots$, в которой $\mathcal{A}^{(k+1)}$ согласует вероятность* Pr *и возможность* P *«более детально», чем $\mathcal{A}^{(k)}$*, $k = 1, 2, \ldots$

Определение 3.5.1. Обозначим $\mathcal{A}^{(k)}$ и назовем σ-алгеброй k-го приближения минимальную σ-алгебру $\sigma(\Omega_1^{(k)}, \Omega_2^{(k)}, \ldots)$, содержащую гранулы $\Omega_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots$, и максимально (среди всех σ-алгебр $\mathcal{A}^{(1)}, \ldots, \mathcal{A}^{(k)}$) согласующую между собой вероятность Pr и возможность P, максимально в том смысле, что $\Pr \overset{\mathcal{A}^{(k)}}{\approx>} \mathrm{P}$, $\Pr(\Omega_i^{(k)}) > \Pr(\Omega_{i+1}^{(k)})$, $\mathrm{P}(\Omega_i^{(k)}) > \mathrm{P}(\Omega_{i+1}^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots$, и при этом $\Pr(\Omega_i^{(1)}) > \Pr(\Omega_i^{(2)}) > \ldots > > \Pr(\Omega_i^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots$

Рассмотренные алгоритмы гранулирования, как таковые, разумеется, не представляют интереса, поскольку они основаны на *известных вероятностях* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$, а в таком случае возможность, как альтернатива вероятности, вряд ли может быть востребована (если не учитываются вычислительные аспекты). На самом деле подобные алгоритмы будут использованы далее *для эмпирического гранулирования и для построения возможности при неизвестных вероятностях* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \ldots$

Замечание 3.5.3. Если возможности гранул удовлетворяют условию (3.5.6) и $S_{(k)} \triangleq \mathrm{Pr}(\Omega_k) + \mathrm{Pr}(\Omega_{k+1}) + \ldots$, то $S_{(k)} > \mathrm{Pr}(\Omega_k) = S_{(k)} - S_{(k+1)} > S_{(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, см. (3.5.9). Поэтому $S_{(k+1)} < (1/2)S_{(k)} < \ldots < (1/2^k)S_{(1)} = 1/2^k$ и $S_{(k+1)} < \mathrm{Pr}(\Omega_k) < S_{(k)} < 1/2^{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$ Следовательно, $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k \cup \overline{\Omega}_{k+1}$, $1 = \mathrm{P}(\Omega_1) > \ldots > \mathrm{P}(\Omega_k) > \mathrm{P}(\overline{\Omega}_{k+1}) > 0$, где $\overline{\Omega}_{k+1} = \Omega_{k+1} \cup \Omega_{k+2} \cup \ldots$, $\mathrm{Pr}(\overline{\Omega}_{k+1}) = S_{(k+1)} < 1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Эти оценки позволяют при эмпирическом гранулировании сопоставить количество восстанавливаемых гранул с вероятностью ошибочного их восстановления.

3.6. Алгоритмы эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности и σ-алгебры, максимально согласующей вероятность с возможностью, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$

В этом параграфе рассмотрен алгоритм эмпирического восстановления стохастически измеримой возможности и σ-подалгебры $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1)} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ первого приближения [1]), на которой вероятность и возможность максимально согласованы между собой в том смысле, что возможность максимально согласована на $\mathcal{A}$ с вероятностью, и атомы $\mathcal{A}$ содержат (в первом приближении) минимальные количества элементарных событий, при которых их вероятности достаточно «контрастны», чтобы их возможности были различны.

Такую σ-алгебру $\mathcal{A}$ можно построить, представив Ω в виде разбиения $\mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2 \cup \ldots$ на взаимно непересекающиеся гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1}\}$, $\mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1+1}, \ldots, \omega_{q_2}\}, \ldots$ и определив $\mathcal{A}$ как минимальную σ-алгебру, содержащую все гранулы G_1, G_2, $\ldots$, при минимальных значениях $q_1, q_2, \ldots$ удовлетворяющие условиям [2])

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1) > \mathrm{Pr}(\mathrm{G}_2) > \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Pr}(\mathrm{G}_i) = 1, \ 1 = \mathrm{P}(\mathrm{G}_1) > \mathrm{P}(\mathrm{G}_2) > \ldots \quad (3.6.1)$$

---

[1]) См. определение 3.5.1 и условия (3.5.11), (3.5.12).

[2]) Так как $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$, то всюду речь идет об априори упорядоченных вероятностях элементарных событий $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$; согласно условиям (3.6.1) возможность P «максимально передает вероятностные отличия» гранул как атомов $\mathcal{A}$.

При этом эмпирическое восстановление возможности P и σ-алгебры $\mathcal{A}$, на которой вероятность Pr и возможность P максимально согласованы между собой, сводится к задаче эмпирического гранулирования $\Omega = \mathrm{G}_1 \cup \mathrm{G}_2 \cup \ldots$, удовлетворяющего условиям (3.6.1).

3.6.1. Эмпирическое гранулирование Ω. Вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$ и неизменна при испытаниях. В этом параграфе модель последовательности независимых испытаний определена как в § 3.4.1.

Первая гранула $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_t\}$, согласно равенствам (3.5.11), (3.5.12), определяется следующими условиями:

$$2S_{t-1} < 1,\ 2S_t > 1, \tag{3.6.2}$$

где $S_t = \mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_t$, $t = 1, 2, \ldots$

Задачу эмпирического построения первой гранулы рассмотрим как задачу теории статистических решений, в которой на основе наблюдения результатов взаимно независимых испытаний требуется принять одну из следующих гипотез:

$$\mathrm{H}_1\colon 2S_1 > 1;\ \mathrm{H}_2\colon 2S_1 < 1,\ 2S_2 > 1;\ \ldots;\ \mathrm{H}_t\colon 2S_{t-1} < 1,\ 2S_t > 1;\ \ldots \tag{3.6.3}$$

Если в (3.6.3) верна гипотеза H_t, то $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_t\}$.

Рассмотрим (первый) сценарий эмпирического построения первой гранулы, состоящий из последовательности актов принятия решений, в каждом из которых принимается одно из трех решений [46]:
для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} 2\mathrm{N}_1^{(n)} < 1 - \delta^{(n,1)} & \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}_1^{(n)} > 1 + \delta^{(n,1)} & \square \\ |2\mathrm{N}_1^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,1)} & \circlearrowright \\ \text{первый акт решения} & \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\mathrm{N}_2^{(n)} < 1 - \delta^{(n,2)} & \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}_2^{(n)} > 1 + \delta^{(n,2)} & \square \\ |2\mathrm{N}_2^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,2)} & \circlearrowright \\ \text{второй акт решения} & \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad \ldots \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)} & \Longrightarrow \quad \ldots \\ 2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)} & \square \\ |2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)} & \circlearrowright \\ q\text{-й акт решения} & \end{cases} \tag{3.6.4}$$

В сценарии (3.6.4)

$$\mathrm{N}_q^{(n)} = \nu_1^{(n)} + \ldots + \nu_q^{(n)}, \tag{3.6.5}$$

где $\nu_i^{(n)}$ — частота i-го элементарного события, n — число испытаний, зависящее от номера акта принятия решений [1]), выделенного фигурной скобкой. Алгоритм принятия решений, представленных символами $\Longrightarrow$, $\square$ и $\circlearrowright$, состоит в следующем. Если в q-м акте, $q = 1, 2, \ldots$, наблюдено значение $2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}$, то принимается

[1]) Это обстоятельство, как обычно, не будет отражаться в обозначениях.

решение $\Longrightarrow$ «перейти к следующему акту», если наблюдено значение $2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}$, то принимается решение $\square$ «завершить первый сценарий (на q-м акте) и объявить первой гранулой $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$», если же $1 - \delta^{(n,q)} \leqslant 2\mathrm{N}_q^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,q)}$, то принимается решение $\circlearrowright$: «продолжить испытания в q-м акте и после каждого дополнительного испытания проверить каждое из трех условий принятия решений во всех q актах, должным образом скорректировать решения, т. е. во всех q актах принять решения, определенные наблюдением $\mathrm{N}_q^{(n+1)}$». Если при этом хотя бы в одном из q актов будет принято решение $\circlearrowright$, то после дополнительного испытания корректируются решения во всех q актах, …; коррекции заканчиваются, если либо во всех q актах приняты решения $\Longrightarrow$ о переходе к следующему акту, либо в акте $q_1 \leqslant q$ принято решение $\square$ о завершении первого сценария построением первой гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1}\}$.

Определим значения $\delta^{(n,q)}$, $n = 1, 2, \ldots$, задав значения $\alpha^{(q)}$, $q = 1, 2, \ldots$, оценивающие сверху вероятности ошибочных решений $\Longrightarrow$ и $\square$. Пусть наблюдено событие $2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}$ и соответственно принято решение $\Longrightarrow$ о переходе к следующему акту, в то время как на самом деле $2S_q > 1$ и следовало бы завершить первый сценарий и определить $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$. В такой ситуации вероятность ошибочного решения

$$\begin{aligned} &\Pr^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}\} | 2S_q > 1) \leqslant \\ &\leqslant \Pr^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q < -\delta^{(n,q)}\} | 2S_q > 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q)})^2/2) = \alpha^{(q)} \end{aligned} \tag{3.6.6}$$

и, как следствие, равенство

$$\delta^{(n,q)} = \left(\frac{2}{n} \ln \frac{1}{\alpha^{(q)}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.6.7}$$

определит искомую связь $\alpha^{(q)}$ и $\delta^{(n,q)}$, $n = 1, 2, \ldots$, такую же, как в (3.3.21) и в (3.4.7).

Аналогично, если в q-м акте наблюдено событие $\{2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}\}$ и принятно решение $\square$, согласно которому первый сценарий должен быть завершен определением первой гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_q\}$, а на самом деле $2S_q < 1$ и следовало бы перейти к следующему акту, то вероятность такого ошибочного решения $\square$

$$\begin{aligned} &\Pr^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}\} | 2S_q < 1) \leqslant \\ &\leqslant \Pr^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_p > \delta^{(n,q)}\} | 2S_p < 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q)})^2/2) = \alpha^{(q)} \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

оценивается сверху значением $\alpha^{(q)}$ как в (3.6.6).

Проверим, что при любом условии $2S_q < 1$ или $2S_q > 1$ события $\{1 - \delta^{(n,q)} \leqslant 2\mathrm{N}_q^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,q)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, могут происходить для п. н. конечного числа испытаний, $q = 1, 2, \ldots$ Действительно, пусть, скажем, $|2S_q - 1| \geqslant 2\varepsilon_q > 0$. Тогда поскольку для любого q при $n \to \infty$ $\delta^{(n,q)} \to 0$, то для всех $n \geqslant n^{(q)} = \min\{k \mid \varepsilon_q - \delta^{(k,q)} > 0\}$,

$$\begin{aligned}&\Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)}\} |\, |2S_q - 1| \geqslant 2\varepsilon_q) \leqslant \\ &\leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|2S_q - 1| - |2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \geqslant 2\varepsilon_q - \delta^{(n,q)}\} |\, |2S_q - 1| \geqslant 2\varepsilon_q) \leqslant \\ &\leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q| \geqslant 2\varepsilon_q - \delta^{(n,q)}\}) \leqslant \\ &\leqslant \Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 2S_q| \geqslant \varepsilon_q\}) \leqslant 2\exp(-n\varepsilon_q^2/2),\end{aligned} \tag{3.6.9}$$

где предпоследнее неравенство выполняется для всех n, при которых $\varepsilon_q - \delta^{(n,q)} > 0$. А так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_q^2/2) < \infty$, то в силу леммы Бореля–Кантелли и оценки (3.6.9) для любого $q = 1, 2, \ldots$ может произойти п. н. конечное число событий последовательности $\{1 - \delta^{(n,q)} \leqslant \mathrm{N}_q^{(n)} \leqslant 1 + \delta^{(n,q)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, после которых будет принято одно из решений: $\Longrightarrow$ или $\square$.

Итак, для любого $q = 1, 2, \ldots$ существует $\overline{n}^{(q)}$ такое, что для любого $n \geqslant \overline{n}^{(q)}$

$$\Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)}\}) = 0, \tag{3.6.10}$$

а так как для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}\}) + \Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}\}) + \\ + \Pr{}^{(n)}(\{|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)}\}) = 1,\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

то для любого $n \geqslant \overline{n}^{(q)}$

$$\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}\}) + \Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}\}) = 1, \tag{3.6.12}$$

и если одно из решений, скажем $\Longrightarrow$, ошибочно, то его вероятность $\Pr^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} < 1 - \delta^{(n,q)}\}) \leqslant \alpha^q$, а вероятность верного решения $\square$

$$\Pr{}^{(n)}(\{2\mathrm{N}_q^{(n)} > 1 + \delta^{(n,q)}\}) \geqslant 1 - \alpha^q. \tag{3.6.13}$$

Пусть n_1 — число испытаний, при котором в q_1-м акте первого сценария первый раз решением $\square$ завершена последовательность решений

$$\begin{array}{lllll}\Longrightarrow & \Longrightarrow & \ldots & \Longrightarrow & \square. \\ \text{в 1-м} & \text{во 2-м} & & \text{в } (q_1 - 1)\text{-м} & \text{в } q_1\text{-м} \\ \text{акте} & \text{акте} & & \text{акте} & \text{акте}\end{array} \tag{$*$}$$

Обозначим $n(q)$ число испытаний, использованных в q актах, $q = 1, 2, \ldots$, зададим оценку сверху $\alpha \in (0, 1)$ вероятности ошибочно построить первую гранулу и определим $\alpha^{(q)} = \alpha/q$, $q = 1, 2, \ldots$ Тогда, учитывая, что все решения, принятые вплоть до q_1-го акта, скорректированы на основе результатов $n_1 = n(q_1)$ испытаний, получим, что каждое решение в последовательности $(*)$ может быть ошибочным с вероятностью, не превосходящей $\alpha^{(q_1)}$, вероятность того, что хотя бы одно из q_1 решений ошибочно, не больше $q_1\alpha^{(q_1)} = \alpha$, наконец, вероятность того, что первая гранула $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1}\}$ построена верно, больше $1 - q_1\alpha^{(q_1)} = 1 - \alpha$.

Пусть согласно первому сценарию (3.6.4) в q_1-м акте принята гипотеза H_{q_1} и в качестве первой гранулы выбрано множество $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1}\}$. При этом условии согласно условиям (3.5.11) при $k = 2$ вторая гранула $\mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1+1}, \ldots, \omega_{q_2}\}$ должна быть определена условиями

$$S_{q_1} + 2(\mathrm{pr}_{q_1+1} + \ldots + \mathrm{pr}_{q_2-1}) \equiv \\ \equiv S_{q_1} + 2(S_{q_2-1} - S_{q_1}) \equiv 2S_{q_2-1} - S_{q_1} < 1,\ \ 2S_{q_2} - S_{q_1} > 1, \quad (3.6.14)$$

и для ее эмпирического построения воспользуемся вторым сценарием: для $n = n(q_1) + 1, n(q_1) + 2, \ldots$

$$\begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} < 1 - \delta^{(n,q_1+1)} \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+1)} \ \ \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - 1| \leqslant \delta^{(n,q_1+1)} \ \ \circlearrowleft \\ \text{первый акт} \end{cases} \begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} < 1 - \delta^{(n,q_1+2)} \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+2)} \ \ \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - 1| \leqslant \delta^{(n,q_1+2)} \ \ \circlearrowleft \\ \text{второй акт} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \ldots \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} < 1 - \delta^{(n,q_1+q)} \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+q)} \ \ \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - 1| \leqslant \delta^{(n,q_1+q)} \ \ \circlearrowleft \\ q\text{-й акт} \end{cases} \quad \ldots \quad (3.6.15)$$

Рассмотрим q-й акт второго сценария. Зададим верхние границы $\alpha^{(q_1+q)} = \alpha/(q_1 + q)$, $q = 1, 2, \ldots$, вероятностей ошибочных решений $\Longrightarrow$ и $\square$ в сценарии (3.6.15), отвечающих событиям $\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}_{q_1} < 1 - \delta^{(n,q_1+q)}\}$ и, соответственно, $\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+q)}\}$, и определим значение $\delta^{(n,q_1+q)}$. Пусть в q-м акте наблюдено значение $2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} < 1 - \delta^{(n,q_1+q)}$ и принято решение $\Longrightarrow$ о переходе к следующему акту, в то время как на самом деле $2S_{q_1+q} - S_{q_1} > 1$. В таком случае вероятность ошибочного решения $\Longrightarrow$

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} < 1 - \delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q} - S_{q_1} > 1) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - (2S_{q_1+q} - S_{q_1}) < -\delta^{(n,q_1+q)}\}|2S_{q_1+q} - \\ - S_{q_1} > 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q_1+q)})^2/2) = \alpha^{(q_1+q)}. \quad (3.6.16)$$

Последнее неравенство в (3.6.16) есть следствие того, что $\mathsf{E}^{(n)}(2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1}) = 2S_{q_1+q} - S_{q_1}$, и при этом слагаемые под знаком суммы в правой части равенства

$$2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(\chi_1(\omega^{(j)}) + \ldots$$
$$\ldots + \chi_{q_1}(\omega^{(j)}) + 2(\chi_{q_1+1}(\omega^{(j)}) + \ldots + \chi_{q_1+q}(\omega^{(j)}))\big) \quad (3.6.17)$$

взаимно независимы и принимают значения 0, 1 или 2.

Согласно равенству в (3.6.16) выполняется равенство $\delta^{(n,q_1+q)} = \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(q_1+q)}}\right)^{\frac{1}{2}}$, такое же, как равенство (3.6.7), связывающее значения $\alpha^{(q)}$ и $\delta^{(n,q)}$ в первом сценарии.

Аналогично, если в q-м акте наблюдено значение $2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+q)}$, в то время как на самом деле $2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1$, то будет принято ошибочное решение $\square$, вероятность которого

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} > 1 + \delta^{(n,q_1+q)}\} | 2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1) \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} - (2S_{q_1+q} - S_{q_1}) > \delta^{(n,q_1+q)}\} | 2S_{q_1+q} - S_q < \\ &< 1) \leqslant \exp(-n(\delta^{(n,q_1+q)})^2/2) = \alpha^{(q_1+q)}.\end{aligned} \quad (3.6.18)$$

Наконец, что касается события

$$\{1 - \delta^{(n,q_1+q)} \leqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q} \leqslant 1 + \delta^{(n,q_1+q)}\} \equiv$$
$$\equiv \{1 - \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(q_1+q)}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\mathrm{N}^{(n)}_{q_1+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{q_1} \leqslant 1 + \left(\frac{2}{n}\ln\frac{1}{\alpha^{(q_1+q)}}\right)^{\frac{1}{2}}\}, \quad (3.6.19)$$

при котором согласно сценарию (3.6.15) принимается решение $\circlearrowright$ о продлении испытаний (и при каждом дополнительном испытании проверяются и корректируются как все решения, требующиеся для выполнения первого сценария, так и все решения, принятые вплоть до последнего дополнительного испытания во втором сценарии), то при любом из условий $2S_{q_1+q} - S_{q_1} > 1$ или $2S_{q_1+q} - S_{q_1} < 1$ события (3.6.19) могут выполняться лишь для п. н. конечного числа испытаний. В этом легко убедиться точно так же, как это было показано при анализе первого сценария, подобно тому, как в (3.6.13) оценена вероятность верного решения, для достаточно больших n, и в этом случае вероятность верного решения оценивается снизу значением $1 - \alpha^{(q_1+q)}$.

Обозначим $q_1^{(2)}$ номер завершающего акта первого сценария, скорректированного по результатам выполнения второго сценария, и $q_2^{(2)}$ — номер завершающего акта второго сценария, в результате которого первый раз выполнена следующая последовательность решений, где акты имеют сквозную нумерацию,

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{решения} & \Longrightarrow & \ldots & \Longrightarrow & \square & \Longrightarrow & \ldots & \Longrightarrow & \square \\ \text{акты} & \underbrace{1 \quad\quad\quad\quad q_1^{(2)}-1 \quad\quad q_1^{(2)}}_{} & & & & \underbrace{q_1^{(2)}+1 \quad\quad q_2^{(2)}-1 \quad\quad q_2^{(2)}}_{} & & & \\ \text{сценарии} & 1 & & & & 2 & & & \end{array}$$

Обозначим $n(q)$ число испытаний, использованных в q актах, $q = 1, \ldots$ $\ldots, q_2^{(2)}$, зададим оценку сверху $\alpha \in (0, 1)$ вероятности ошибки при построении первой и второй гранул и определим $\alpha^{(q)} = \alpha/q$, $q = 1, \ldots, q_2^{(2)}$. Учитывая, что все решения в первом и втором сценариях, принятые вплоть до $q_2^{(2)}$-го акта, скорректированы на основе $n(q_2^{(2)})$ испытаний, получим следующую оценку сверху вероятности ошибки при построении 1-й и 2-й гранул $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_{q_1^{(2)}}\}$, $\mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1^{(2)}+1}, \ldots, \omega_{q_2^{(2)}}\}$: $q_2^{(2)} \cdot \alpha/q_2^{(2)} = \alpha$.

Если отработано m сценариев и найдены гранулы $\mathrm{G}_1 = \{\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_{q_1^{(m)}}\}$, $\mathrm{G}_2 = \{\omega_{q_1^{(m)}+1}, \ldots, \omega_{q_2^{(m)}}\}$, $\ldots$, $\mathrm{G}_m = \{\omega_{q_{m-1}^{(m)}+1}, \ldots, \omega_{q_m^{(m)}}\}$, то для отыскания гранулы $\mathrm{G}_{m+1} = \{\omega_{q_m^{(m+1)}+1}, \ldots, \omega_{q_{m+1}^{(m+1)}}\}$ требуется найти целое положительное q, при котором

$$2S_{\widetilde{q}_m^{(m)}+q-1} - S_{\widetilde{q}_m^{(m)}} < 1, \;\; 2S_{\widetilde{q}_m^{(m)}+q} - S_{\widetilde{q}_m^{(m)}} > 1 \qquad (3.6.20)$$

и определить $q_{m+1}^{(m+1)} = \widetilde{q}_m^{(m)} + q$, где волна $\widetilde{\ }$ символизирует возможную коррекцию гранул $\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_m$ в процессе построения $(m+1)$-й гранулы. В свою очередь, для отыскания q, удовлетворяющего условиям (3.6.20), запустим $(m+1)$-й сценарий, в котором для $n = n(q_m^{(m)}) +$ $+ 1, n(q_m^{(m)}) + 2, \ldots$:

$$\begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} < 1 - \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+1)} & \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} > 1 + \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+1)} & \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+1} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} - 1| \leqslant \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+1)} & \circlearrowright \\ \text{первый акт} & \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} < 1 - \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+2)} & \Longrightarrow \quad \ldots \quad \Longrightarrow \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} > 1 + \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+2)} & \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+2} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} - 1| \leqslant \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+2)} & \circlearrowright \\ \text{второй акт} & \end{cases} \qquad (3.6.21)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} 2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} < 1 - \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+q)} & \Longrightarrow \quad \ldots \\ 2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} > 1 + \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+q)} & \square \\ |2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+q} - \mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}} - 1| \leqslant \delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+q)} & \circlearrowright \\ q\text{-й акт} & \end{cases}$$

Здесь, в $(\widetilde{q}_m^{(m)} + q)$-м акте, как и в подобных актах первого, второго, $\ldots$, m-го сценариев, $\Longrightarrow$ символизирует переход к $(q_m^{(m)} + q + 1)$-му акту, $\square$ символизирует окончание $(m+1)$-го сценария построением G_{m+1}, $\circlearrowright$ символизирует продолжение испытаний в $(q_m^{(m)} + q)$-м акте, причем по истечении п. н. конечного числа испытаний, в ходе которых проверяется выполнение каждого из трех условий в $(\widetilde{q}_m^{(m)}+q)$-м акте, во всех предшествующих актах этого сценария (что может привести к завершению сценария до $(\widetilde{q}_m^{(m)}+q)$-го акта) и во всех актах всех предшествующих сценариев, в $(\widetilde{q}_m^{(m)}+q)$-ом акте в конечном счете должно быть реализовано одно из двух условий: либо $2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}}>1+\delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+q)}$, либо $2\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}+q}-\mathrm{N}^{(n)}_{\widetilde{q}_m^{(m)}}<1-\delta^{(n,\widetilde{q}_m^{(m)}+q)}$.

Если $n(q_{m+1}^{(m+1)})$ — число испытаний, при котором первый раз завершены все $(m+1)$ сценариев, каждый соответственно на $q_1^{(m+1)}$-м, $q_2^{(m+1)}$-м, $\ldots$, $q_m^{(m+1)}$-м и $q_{m+1}^{(m+1)}$ актах, то построенные гранулы $\mathrm{G}_1=\{\omega_1,\ldots,\omega_{q_1^{(m+1)}}\}$, $\ldots$, $\mathrm{G}_{m+1}=\{\omega_{q_m^{(m+1)}+1},\ldots,\omega_{q_{m+1}^{(m+1)}}\}$ будут определены безошибочно с вероятностью, большей $1-\alpha$, если вероятность ошибочного решения в q-м акте оценивается значением $\alpha^{(q)}=\alpha/q$, $q=1,\ldots,q_{m+1}^{(m+1)}$.

Заметим, что поскольку $2\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1)>1$, $\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1)+2\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_2)>1,\ldots$, $\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_q\cup\ldots\cup\mathrm{G}_{m-1})+2\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_m)>1$, $\ldots$, то $\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1\cup\ldots\cup\mathrm{G}_m)>1-2^{-m}$ и, следовательно, $\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_{m+1}\cup\mathrm{G}_{m+2}\cup\ldots)<2^{-m}$, что влечет ограничение на выбор α, а именно, $\alpha<2^{-m}$, см. замечание 3.5.1.

3.6.2. Эмпирическое гранулирование Ω. Вероятность $\mathrm{Pr}\in\mathbb{Pr}$ и изменяется от испытания к испытанию. В этом параграфе модель n взаимно независимых испытаний определена как вероятностное пространство

$$(\Omega^n,\mathcal{P}(\Omega^n),\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n})=(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{Pr}_1)\times\ldots\times(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathrm{Pr}_n),\quad(3.6.22)$$

в котором $\mathrm{Pr}^{(n)}_{1,\ldots,n}=\mathrm{Pr}_1\times\ldots\times\mathrm{Pr}_n$, $(\Omega,\mathcal{P}(\omega),\mathrm{Pr}_j)$ — модель j-го испытания и предполагается выполненным *условие гранулируемости* Ω, *согласно которому существуют* $k_1<k_2<\ldots$ *такие, что* $\Omega=\mathrm{G}_1\cup\mathrm{G}_2\cup\ldots$, *где* $\mathrm{G}_1=\{\omega_1,\ldots,\omega_{k_1}\}$, $\mathrm{G}_2=\{\omega_{k_1+1},\ldots,\omega_{k_2}\}$, $\ldots$, $\mathrm{G}_t=\{\omega_{k_{t-1}+1},\ldots,\omega_{k_t}\},\ldots$ *и для всех* $j=1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}&2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1\backslash\{\omega_{k_1}\})<1,\ 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1)>1;\\&2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_2\backslash\{\omega_{k_2}\})<1-\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1),\ 2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_2)>1-\mathrm{Pr}(\mathrm{G}_1);\\&\ldots\\&2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_t\backslash\{\omega_{k_t}\})<1-\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1\cup\ldots\cup\mathrm{G}_{t-1}),\\&2\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_t)>1-\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1\cup\ldots\cup\mathrm{G}_{t-1});\\&\ldots\end{aligned}\quad(3.6.23)$$

Условия (3.6.23) гарантируют, что существуют единственная σ-алгебра $\mathcal{A}=\sigma(\mathrm{G}_1,\mathrm{G}_2,\ldots)$, порожденная разбиением $\Omega=\mathrm{G}_1\cup\mathrm{G}_2\cup\ldots$, и возможность P, максимально согласованная на $\mathcal{A}$ с каждой вероятностью Pr_j, $j=1,2,\ldots$, такие, что для всех $j=1,2,\ldots$ $\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_1)>$ $>\mathrm{Pr}_j(\mathrm{G}_2)>\ldots$ и $\mathrm{P}(\mathrm{G}_1)>\mathrm{P}(\mathrm{G}_2)>\ldots$

Условия (3.6.23) позволяют решить задачу эмпирического гранулирования Ω на основе наблюдения значений функций $\mathrm{N}_k^{(n)}=\sum\limits_{i=1}^{k}\nu_i^{(n)}$, $k=1,2,\ldots$, частот $\nu_1^{(n)},\ldots,\nu_t^{(n)},\ldots$ элементарных событий, оценивающих соответственно «эмпирические вероятности» $\mathrm{pr}_1^{(n)}=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{(n)}\mathrm{Pr}_j(\{\omega_1\})$, $\ldots$, $\mathrm{pr}_t^{(n)}=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{(n)}\mathrm{Pr}_j(\{\omega_t\})$, $\ldots$, поскольку согласно требованиям (3.6.23)

$$\begin{aligned}
&2S_{k_1-1}^{(n)}<1,\ 2S_{k_1}^{(n)}>1;\\
&2S_{k_2-1}^{(n)}-S_{k_1}^{(n)}<1,\ 2S_{k_2}^{(n)}-S_{k_1}^{(n)}>1;\\
&\ldots\\
&\ldots\\
&2S_{k_t-1}^{(n)}-S_{k_{t-1}}^{(n)}<1,\ 2S_{k_t}^{(n)}-S_{k_{t-1}}^{(n)}>1;\\
&\ldots
\end{aligned}\tag{3.6.24}$$

где

$$S_k^{(n)}=\mathrm{pr}_1^{(n)}+\ldots+\mathrm{pr}_k^{(n)}=\mathsf{E}_{1,\ldots,n}^{(n)}\mathrm{N}_k^{(n)},\ k=1,2,\ldots,\tag{3.6.25}$$

и при $n\to\infty$ $\mathrm{N}_k^{(n)}-S_k^{(n)}\xrightarrow{\text{п. н.}}0$, $k=1,2,\ldots$ Речь идет о задаче эмпирического определения значений $k_1<k_2<\ldots$, удовлетворяющих условиям (3.6.24), при условии, что выполнены требования (3.6.23) *гранулируемости* Ω. Поскольку существуют единственные [1] $k_1<k_2<\ldots$, удовлетворяющие требованиям (3.6.23), их значения могут быть определены из условий (3.6.24).

Сценарии эмпирического гранулирования, позволяющие на основе наблюдения значений статистик

$$\mathrm{N}_k^{(n)}=\nu_1^{(n)}+\ldots+\nu_k^{(n)},\ k=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots,\tag{3.6.26}$$

оценить $k_1<k_2<\ldots$ в (3.6.24), подобны сценариям (3.6.4), (3.6.15) и (3.6.21), более того, их формальная запись не отличается от записи последних. Минимальные отличия будут лишь в записи условий, определяющих значение $\delta^{(n,q)}$ по заданному значению $\alpha^{(q)}$ вероятности ошибки решения $\Longrightarrow$ или $\square$, а именно, например, в формуле (3.6.6) вместо $S_q=\mathrm{pr}_1+\ldots+\mathrm{pr}_q$ следует писать $S_q^{(n)}=\mathrm{pr}_1^{(n)}+\ldots+\mathrm{pr}_q^{(n)}$, но при этом связь между $\alpha^{(q)}$ и $\delta^{(n,q)}$ будет такой же, как в (3.6.7). Существенные отличия будут лишь при анализе решения $\circlearrowright$ о продолжении испытаний. Дело в том, что при изменяющейся вероятности, контролирующей результаты испытаний, при $n\to\infty$, возможно, $|2S_q^{(n)}-1|\to 0$ и, как следствие, возможно бесконечно много событий $|2\mathrm{N}_q^{(n)}-1|\leqslant\delta^{(n,q)}$, $n=1,2,\ldots$, требующих продолжения испытаний и тем самым не позволяющих завершить первый акт в сценарии (3.6.4).

[1] Условия (3.6.23) гарантируют существование $k_1<k_2<\ldots$ и обеспечивают их единственность.

Если, однако, при $n \to \infty$ $|2S_q^{(n)} - 1| \to 0$ «не слишком быстро», например, см. лемму 3.4.1, так, что для всех достаточно больших n $|2S_q^{(n)} - 1| \geqslant \delta^{(n,q)}(1 + \varepsilon_{n,q})$, $\varepsilon_{n,q} > 0$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n(\varepsilon_{n,q}\delta^{(n,q)})^2/2) = \sum (\alpha^{(q)})^{\varepsilon_{n,q}^2} < \infty, \text{ где } \alpha^{(q)} = \alpha/q,$$

то число событий в последовательности $|2\mathrm{N}_q^{(n)} - 1| \leqslant \delta^{(n,q)}$, $n = 1, 2, \ldots$, будет п. н. конечным, $q = 1, 2, \ldots$, [46].

3.7. Гранулирование $\Omega = \mathcal{R}^n$

В § 2.6 гл. 2 рассмотрен класс $\mathbf{Pr}^{(\varphi)} \triangleq \{\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(n)} \to [0,1],$ $t(\cdot) \in \mathcal{T}_\varphi\}$ вероятностей

$$\mathrm{Pr}^{(t)}(A) = \int_A t(\varphi(x))dx, A \in \mathcal{B}^{(n)}, \tag{3.7.1}$$

в котором $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to [0,1]$ — заданная функция, удовлетворяющая условию $\sup\limits_{x \in \mathcal{R}^n} \varphi(x) = 1$, $\mathcal{T}_\varphi$ — класс монотонно неубывающих функций $t(\cdot)\colon [0,1] \to [0,\infty)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathcal{R}^n} t(\varphi(x))dx = 1. \tag{3.7.2}$$

Класс $\mathbb{P}\mathrm{r}^{(\varphi)}$ — абсолютно непрерывный аналог класса $\mathbb{P}\mathrm{r}$ дискретных вероятностей, охарактеризованных упорядоченностью $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$ вероятностей элементарных событий.

В § 2.6.3 гл. 2 показано, что каждая возможность $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(n)} \to$ $\to [0,1]$, заданная распределением $s(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, где $s(\cdot)\colon [0,1] \to$ $\to [0,1]$ — монотонно неубывающая функция, непрерывная и удовлетворяющая условиям $s(0) = 0$, $s(1) = 1$, согласованная с вероятностью $\mathrm{Pr}^{(t)}$, — тривиальна в том смысле, что $\mathrm{P}^{(s)}(A) = 1$, $A \in \mathcal{B}^{(n)}$, если $\mathrm{Pr}^{(t)}(A) > 0$; иначе говоря, возможность $\mathrm{P}^{(s)}$ не несет информации о вероятности $\mathrm{Pr}^{(t)}$, даже если она максимально согласована с $\mathrm{Pr}^{(t)}$.

Следовательно, в этом случае для построения возможности $\mathrm{P}^{(s)}$, максимально отражающей свойства вероятности $\mathrm{Pr}^{(t)}$, пространство $\mathcal{R}^n$ следует гранулировать, т. е. представить в виде разбиения

$$\mathcal{R}^n = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \tag{3.7.3}$$

на множества — гранулы $G_1, G_2, \ldots$, $G_i \cap G_k = \varnothing$, $i \neq k$, $k = 1, 2, \ldots$, причем так, чтобы учитывались следующие условия оптимальности:

► возможность $\mathrm{P}^{(s)}$, максимально согласованная с вероятностью $\mathrm{Pr}^{(t)}$ на σ-алгебре $\mathcal{G}$, порожденной разбиением (3.7.3), и вероятность $\mathrm{Pr}^{(t)}$

удовлетворяли условиям

$$\mathrm{Pr}^{(t)}(G_1) > \mathrm{Pr}^{(t)}(G_2) > \ldots, \ \mathrm{P}^{(s)}(G_1) > \mathrm{P}^{(s)}(G_2) > \ldots, \tag{3.7.4}$$

показывающим, что возможность $\mathrm{P}^{(s)}$, «максимально отражает» свойства вероятности $\mathrm{Pr}^{(t)}$ как функции $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{G} \to [0,1]$;

► σ-алгебра $\mathcal{G}$ должна быть как можно более обширной, в частности, желательно, чтобы гранулы $G_1, G_2, \ldots$ имели минимальные вероятности, обеспечивающие свойства (3.7.4).

3.7.1. Алгоритм «почти оптимального» гранулирования $\boldsymbol{\Omega = \mathcal{R}^n}$. Понятно, что оптимальное гранулирование следует определить системой гранул:

$$G_1 = \{x \in \mathcal{R}^n, \ g^1 \leqslant \varphi(x)\}, \ G_2 = \{x \in \mathcal{R}^n, \ g^2 \leqslant \varphi(x) < g^1\}, \ldots, \\ \ldots, \ G_k = \{x \in \mathcal{R}^n, \ g^k \leqslant \varphi(x) < g^{k-1}\}, \ldots, \tag{3.7.5}$$

где $1 \geqslant g^1 > g^2 > \ldots \geqslant 0$ и должны быть выбраны так, чтобы, во-первых, выполнялись неравенства для возможности P в (3.7.4), максимально согласованной на $\mathcal{G}$ с вероятностью $\mathrm{Pr}^{(t)}$, т. е. так, чтобы

$$2\mathrm{Pr}^{(t)}(G_1) > 1, \ \mathrm{Pr}^{(t)}(G_1) + 2\mathrm{Pr}^{(t)}(G_2) > 1, \ldots, \\ \mathrm{Pr}^{(t)}(G_1) + \ldots + \mathrm{Pr}^{(t)}(G_{i-1}) + 2\mathrm{Pr}^{(t)}(G_i) > 1, \ldots, \tag{3.7.6}$$

а во-вторых, *желательно*, чтобы гранулы $G_1, G_2, \ldots$ имели минимальные вероятности, достаточные для выполнения неравенств в (3.7.6).

Пусть в (3.7.6), см. пример 2.3.1 в гл. 2,

$$\mathrm{Pr}^{(t)}(G_i) = a/(a+1)^i, \quad i = 1, 2, \ldots, a > 0. \tag{3.7.7}$$

Тогда для всех $i = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{Pr}^{(t)}(G_1) + \ldots + \mathrm{Pr}^{(t)}(G_{i-1}) + 2\mathrm{Pr}^{(t)}(G_i) = 1 + \frac{a-1}{(a+1)^i} > 1 \ \ (\leqslant 1), \tag{3.7.8}$$

если и только если $a > 1$ $(0 < a \leqslant 1)$.

Определим семейство множеств

$$D(g) = \{x \in \mathcal{R}^n, \ g \leqslant \varphi(x)\}, \ g \in [0,1], \tag{3.7.9}$$

и выразим множества в равенствах (3.7.8) через множества (3.7.9):

$$G_1 = D(g^1), \ G_2 = D(g^2) \backslash D(g^1), \ldots, \ G_i = D(g^i) \backslash D(g^{i-1}), \ldots \tag{3.7.10}$$

Тогда согласно (3.7.8)–(3.7.10)

$$\mathrm{Pr}^{(t)}(G_1) + \ldots + \mathrm{Pr}^{(t)}(G_{i-1}) + 2\mathrm{Pr}^{(t)}(G_i) \equiv \\ \equiv 2\mathrm{Pr}^{(t)}(D(g^i)) - \mathrm{Pr}^{(t)}(D(g^{i-1})) = 1 + \frac{a-1}{(a+1)^i}, \\ i = 1, 2, \ldots, \ D(g^0) = \varnothing, \tag{3.7.11}$$

где $a > 1$, $i = 1, 2, \ldots$, или, что эквивалентно (3.7.10),

$$\Pr^{(t)}(D(g^i)) = 1 - (a+1)^{-i},\ i = 1, 2, \ldots, a > 1. \tag{3.7.12}$$

Заметим, что упорядоченность возможностей гранул в (3.7.4) выполняется при любом $a > 1$ в (3.7.7), (3.7.8). При этом условии объемы гранул тем меньше, чем меньше $a - 1 > 0$. Это означает, что в данном случае можно говорить лишь *о почти оптимальном гранулировании*, если разность $a - 1 > 0$ достаточно мала.

В данном случае максимально согласованный с вероятностью (3.7.7) на σ-алгебре $\mathcal{G}$ вариант возможности, полученный максимальным продолжением возможности

$$\mathrm{P}^{(s)}(G_i)\big|_{\mathcal{G}} = \widetilde{\gamma}(a/(a+1)^i),\ i = 1, 2, \ldots,\ \widetilde{\gamma}(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\Pr^{(t)}), \tag{$*$}$$

определится условием

$$\mathrm{P}^{(s_1)}(\{x\}) = \widetilde{\gamma}(a/(a+1)^i) = s_1(\varphi(x)),\ x \in G_i,\ i = 1, 2, \ldots,$$

где функция $s_1(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ монотонно не убывает и принимает постоянные значения, равные $\widetilde{\gamma}(a/(a+1)^i)$ на множествах $\varphi(G_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Любая другая возможность, максимально согласованная на $\mathcal{G}$ с вероятностью (3.7.7), полученная продолжением возможности $(*)$, определится условием

$$\mathrm{P}^{(s_2)}(\{x\}) = s_2(\varphi(x)), x \in X, \sup_{x \in G_i} s_2(\varphi(x)) = \widetilde{\gamma}(a/(a+1)^i), i = 1, 2, \ldots,$$

где $s_2(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ монотонно не убывает.

На рис. 3.7.1, *а*, поясняющем гранулирование $\mathcal{R}^n$ для $n = 1$, представлены функции $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{R}^1 \to [0,1]$, $s(\varphi(\cdot))\colon \mathcal{R}^1 \to [0,1]$, $t(\varphi(\cdot))\colon \mathcal{R}^1 \to$ $\to [0,\infty)$, гранулированное $\mathcal{R}^1$ и два варианта максимально согласованных с вероятностью $\Pr^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(1)} \to [0,1]$ на σ-алгебре $\mathcal{G}$, порожденной разбиением $\mathcal{R}^1 = G_1 \cup G_2 \cup \ldots$, возможностей $\mathrm{P}^{(s_i)}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\mathcal{R}^1) \to [0,1]$, $i = 1, 2$; на рис. 3.7.1, *б* показаны графики функций $s_i(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $i = 1, 2$.

Заметим, что если вероятность $\Pr^{(t)}$ известна, то гранулирование, как уже было сказано, бессмысленно, а если — не известна, то алгоритм (3.7.12) невыполним. Тем не менее, как показано в следующем параграфе, результаты, полученные в этом, позволяют решать задачи *эмпирического гранулирования* при неизвестной функции $t(\cdot)$ в (3.7.1), (3.7.2).

3.8. Эмпирическое гранулирование методом стохастической аппроксимации

3.8.1. Эмпирическое гранулирование $\Omega = \mathcal{R}^n$. Условия (3.7.12), разумеется, не позволяют определить в (3.7.5) $1 \geqslant g^1 > g^2 > \ldots \geqslant 0$, поскольку функция $t(\cdot)\colon [0,1] \to [0,\infty]$ в (3.7.1) не известна. Но тот

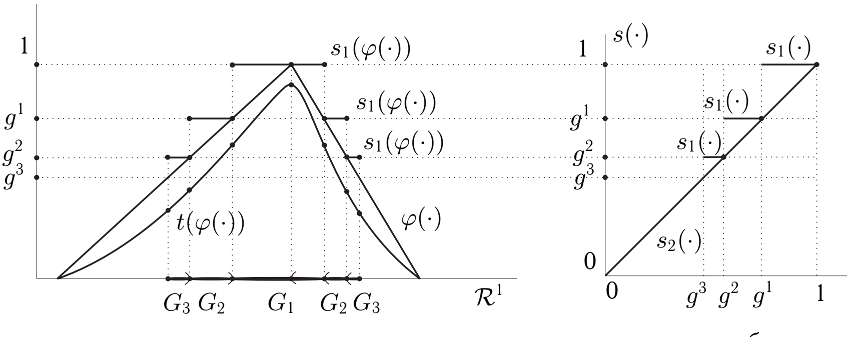


Рис. 3.7.1. *а*) Гранулирование $\mathcal{R}^1 = G_1 \cup G_2 \cup \ldots$, $\mathrm{Pr}^{(t)}(G_i) = a/(a+1)^i$, $a > 1$, $i = 1, 2, \ldots$ $\mathrm{P}^{(s_1)}(\{x\}) = g^{i-1}$, $x \in G_i$, $g^0 = 1$, $i = 1, 2, \ldots,$ — максимально согласованный с вероятностью $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{B}^{(1)} \to [0,1]$ на σ-алгебре $\mathcal{G}$ вариант возможности $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\mathcal{R}^1) \to [0,1]$, полученный *максимальным продолжением* (см. § 1.9, гл. 1) возможности $\mathrm{P}(\cdot)|_{\mathcal{G}}$, $\mathrm{Pr}^{(t)}|_{\mathcal{G}} \approx\!\rhd \mathrm{P}|_{\mathcal{G}}$. $\mathrm{P}^{(s_2)}(\{x\}) = \varphi(x)$, $x \in \mathcal{R}^1$, — максимально согласованный с вероятностью $\mathrm{Pr}^{(t)}(\cdot)\colon \mathcal{B} \to [0,1]$ на σ-алгебре $\mathcal{G}$ вариант возможности $\mathrm{P}^{(s)}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\mathcal{R}^1) \to [0,1]$, полученный *продолжением* возможности $\mathrm{P}(\cdot)|_{\mathcal{G}}$, $\mathrm{Pr}^{(t)}|_{\mathcal{G}} \approx\!\rhd \mathrm{P}|_{\mathcal{G}}$; *б*) функции $s_1(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $s_1(a) = 1$, если $a > g^1$, $s_1(a) = g^{i-1}$, если $g^i \geqslant a > g^{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots,$ $s_2(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $s_2(a) = a$, $a \in [0,1]$

факт, что доступны наблюдению случайные векторы $\xi_1, \xi_2 \ldots,$ распределенные согласно $\mathrm{Pr}^{(t)}$ (3.7.1), позволяет применить для определения $g^1, g^2, \ldots$ процедуру стохастической аппроксимации Роббинса–Монро, см., например, [2].

С этой целью определим функцию, см. (3.7.9),

$$F(g) = \mathrm{Pr}^{(t)}(D(g)) = \int\limits_{D(g)} t(\varphi(x))dx, \ g \in [0,1], \tag{3.8.1}$$

и рассмотрим метод стохастической аппроксимации решения уравнения

$$F(g) = q, \ q \in [0,1], \tag{3.8.2}$$

совпадающего с уравнениями (3.7.12) относительно g^i при $q = 1 - (a+1)^{-i}$, $i = 1, 2 \ldots$ Пусть $\chi_g(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to [0,1]$, $g \in [0,1]$, — семейство индикаторных функций множеств $D(g)$, $g \in [0,1]$, (3.7.9):

$$\chi_g(x) = \begin{cases} 1, \ x \in D(g), \\ 0, \ x \in \mathcal{R}^n \backslash D(g), \end{cases} \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad g \in [0,1].$$

Если случайный вектор $\xi \in \mathcal{R}^n$ распределен согласно $\mathrm{Pr}^{(t)}$, то

$$\mathsf{E}^{(t)}\chi_g(\xi) = \mathrm{Pr}^{(t)}(\chi_g(\xi) = 1) = \int\limits_{D(g)} t(\varphi(x))dx = F(g), \ g \in [0,1],$$

и, следовательно,
$$\chi_g(\xi) = F(g) + \nu(\xi),$$
где
$$E^{(t)}\nu(\xi) = 0,\ D^{(t)}\nu(\xi) = F(g)(1 - F(g)) \leqslant 1/4,\ g \in [0, 1],$$
т. е. случайная величина $\chi_g(\xi)$ — несмещенная состоятельная оценка $F(g)$, поскольку если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — взаимно независимые копии ξ, то при $n \to \infty$ $\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \chi_g(\xi_j) \xrightarrow{\text{п. н.}} F(g)$, $g \in [0, 1]$.

Процедура Роббинса–Монро решения уравнения (3.8.2) в данном случае состоит в следующем. Для некоторого $g_0 \in [0, 1]$ и положительных $a_1, a_2, \ldots$, таких, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty$, на основе наблюдаемых взаимно независимых одинаково распределенных согласно $\Pr^{(t)}$ (3.7.1) случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots$ определим рекуррентный процесс (Роббинса–Монро)

$$\begin{gathered} g_1(\xi_1) = g_0 + a_1(\chi_{g_0}(\xi_1) - q), \\ g_2(\xi_1, \xi_2) = g_1(\xi_1) + a_2(\chi_{g_1(\xi_1)}(\xi_2) - q), \\ \ldots \\ g_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = g_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) + a_k(\chi_{g_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})}(\xi_k) - q), \\ \ldots \end{gathered} \tag{3.8.3}$$

В данном случае согласно (3.8.3) условные математические ожидания

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}^{(t)}(g_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) \,|\, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) = \\ &\qquad = g_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) + a_k(F(g_{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})) - q),\ k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

поэтому, определив марковскую последовательность случайных величин $\gamma_k = g_k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, получим

$$\mathsf{E}^{(t)}(\gamma_k | \gamma_{k-1} = g_{k-1}) = g_{k-1} + a_k(F(g_{k-1}) - q),\ k = 1, 2, \ldots \tag{3.8.4}$$

Пусть $g(q)$ — корень уравнения (3.8.2). Тогда поскольку при достаточно слабых требованиях к функции $t(\varphi(x))$, $x \in \mathcal{R}^n$, в (3.8.1) абсолютно непрерывная функция

$$F(g) = \int\limits_{x\colon \varphi(x) \geqslant g} t(\varphi(x))dx = \int\limits_{g}^{1} t(\varphi)d\varphi \int\limits_{\varphi(x)=\varphi} r(x, \varphi)d\sigma(x),\ g \in [0, 1],$$

строго монотонно убывает, то согласно (3.8.4), если $g_{k-1} < g(q)$, то $\mathsf{E}^{(t)}(\gamma_k|\gamma_{k-1}) > g_{k-1}$, а если $g_{k-1} > g(q)$, то $\mathsf{E}^{(t)}(\gamma_k|\gamma_{k-1}) < g_{k-1}$, т. е. с увеличением k условия (3.8.4) «направляют» γ_k к $g(q)$.

Как известно, на самом деле при названных условиях при $k \to \infty$ $\gamma_k \to g(q)$ как почти наверное, так и в среднем квадратичном [2].

Обратившись к исходной задаче определения корней уравнения (3.7.12), запустив сразу m процессов Роббинса–Монро (3.8.3):

$$g^i_k(\xi_1,\ldots\xi_k) = g^i_{k-1}(\xi_1,\ldots\xi_{k-1}) + a_k(\chi_{g^i_{k-1}(\xi_1,\ldots\xi_{k-1})}(\xi_k) - q^i),\ k=1,2,\ldots,$$

где $q^i = 1-(a+1)^{-i}$, $i=1,2,\ldots,m$, получим для каждого $i=1,\ldots,m$ при $k\to\infty$ $\gamma^i_k \triangleq g^i_k(\xi_1,\ldots,\xi_k) \xrightarrow{\text{п. н.}} g^i$ и, как следствие, согласно равенствам (3.7.11) при $k\to\infty$ $2\mathrm{Pr}^{(t)}(D(\gamma^i_k)) - \mathrm{Pr}^{(t)}(D(\gamma^{i-1}_k)) \xrightarrow{\text{п. н.}} 1 + (a-1)/(a+1)^i$, $a>1$, $i=1,2,\ldots,m$. Поэтому для любого $m = 1,2,\ldots$ и любого $a>1$ можно указать число $k(m,a)$, такое, что для всех $k\geqslant k(m,a)$ с вероятностью единица $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(2\mathrm{Pr}^{(t)}(D(\gamma^i_k)) - \mathrm{Pr}^{(t)}(D(\gamma^{i-1}_k))) > 1$, а это, опять-таки согласно равенствам (3.7.11), означает, что гранулы $G^{(k)}_i = D(\gamma^i_k)\backslash D(\gamma^{i-1}_k)$, $i=1,2,\ldots,m$, где $D(\gamma^0_k)=\varnothing$, обеспечат почти наверное для всех $k\geqslant k(m,a)$ выполнение неравенств

$$1 = \mathrm{P}^{(s)}(G^{(k)}_1) > \ldots > \mathrm{P}^{(s)}(G^{(k)}_m) > 0,$$
$$1 > \mathrm{Pr}^{(t)}(G^{(k)}_1) > \ldots > \mathrm{Pr}^{(t)}(G^{(k)}_m) > 0.$$

Согласно первой группе неравенств для любого $k\geqslant k(m,a)$ точность гранулирования достаточна, чтобы максимально согласованная с вероятностью $\mathrm{Pr}^{(t)}$ на σ-алгебре [1] $\mathcal{G}^{(k)}$ возможность $\mathrm{P}^{(s)}$ «отражала» неравенства вероятностей гранул и определяла возможностную модель $(\mathcal{R}^n, \mathcal{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{P}^{(s)})$, максимально согласованную с $(\mathcal{R}^n, \mathcal{B}^{(n)}, \mathrm{Pr}^{(t)})$ на $\mathcal{G}^{(k)}$, но во второй группе неравенств вероятности гранул для каждого $k\geqslant k(m,a)$ известны, вообще говоря, недостаточно точно, чтобы их можно было использовать в $(\mathcal{R}^n, \mathcal{G}^{(k)}, \mathrm{Pr}^{(t)})$ согласно равенствам (3.7.7).

Замечание 3.8.1. В общем случае вероятностного пространства $(\mathcal{R}^N, \mathcal{B}^N, \mathrm{Pr})$, в котором $\mathrm{Pr}(A) = \int\limits_A r(x)\mu(dx)$, $A\in\mathcal{B}^{(N)}$, где $r(\cdot)\colon \mathcal{R}^N \to \mathcal{R}^1_+$ — произвольная плотность, задачу эмпирического гранулирования $\mathcal{R}^N$ можно решать методами, рассмотренными в параграфах 3.3 и 3.6, см. также теорему 3.2.2. Пусть $\mathcal{R}^N = \bigcup\limits_{i=1}^q \mathcal{R}^N_i$, $\mathcal{R}^N_i \cap \mathcal{R}^N_j = \varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,\ldots,q$, — «достаточно детальное» $\mathcal{B}^{(N)}$-измеримое разбиение [2]

[1] $\mathcal{G}^{(k)}$ — σ-алгебра, порожденная разбиением $\mathcal{R}^n = G^{(k)}_1 \cup G^{(k)}_2 \cup \ldots$

[2] «Достаточно детальное» в смысле следующей «аппроксимационной теоремы» [10]. Пусть измеримое пространство (X, A) таково, что существует последовательность $\{X_{n,k},\ k=1,2,\ldots\}$, $n=1,2,\ldots$, $\mathcal{A}$-измеримых разбиений X такая, что 1) $X_{n,k}\in\mathcal{A}$, $X_{n,k}\cap X_{n,j}=\varnothing$, $k\neq j$, $k,j=1,2,\ldots$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_{n,k} = X$, $n=1,2,\ldots$; 2) $(n+1)$-е разбиение X является продолжением n-го в том смысле, что $\forall j\ \exists k=k(n)\ X_{n+1,j}\subset X_{n,k}$, и 3) $\sigma(X_{n,k},\ k=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots) = \mathcal{A}$. Тогда для любой $\mathcal{A}$-измеримой

$\mathcal{R}^N$ на субгранулы $\mathcal{R}_1^N, \ldots, \mathcal{R}_q^N$, $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\mathcal{R}_i^N)$, $\nu_i^{(n)}$ — частота события $\mathcal{R}_i^N$ в последовательности n независимых испытаний, моделью которых является вероятностное пространство $(\mathcal{R}^N, \mathcal{B}^N, \mathrm{Pr})$, $i = 1, \ldots, q < n$. Тогда алгоритм (3.3.19) и его модификация, приведенная в замечании 3.3.3, позволят упорядочить и оценить вероятности $\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_q$, а алгоритмы (3.6.4), (3.6.15), …, (3.6.21) позволят построить гранулы из субгранул. Случай вероятностей, изменяющихся от испытания к испытанию, может быть исследован методами, рассмотренными в § 3.3.4 и 3.6.2.

3.8.2. Эмпирическое гранулирование $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ методом стохастической аппроксимации. Рандомизация. Рассмотрим метод приближенного рандомизированного гранулирования $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, применимый, например, в том случае, когда $\Omega \subset \mathcal{R}^N$, т. е. когда $\omega_1, \omega_2, \ldots$ суть элементы (векторы) $\mathcal{R}^N$. Обозначим их $x_1, x_2, \ldots$ и будем считать значениями дискретного случайного элемента ξ, которые он принимает с вероятностями $\mathrm{pr}_i = \mathrm{Pr}(\xi = x_i) = t(\varphi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, где $1 = \varphi_1 > \varphi_2 > \ldots \geqslant 0$ и $t(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ — некоторая монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} t(\varphi_i) = 1$. Обозначим η случайный элемент, также принимающий значения в $\mathcal{R}^N$, но абсолютно непрерывный относительно меры Лебега, $h(y)$, $y \in \mathcal{R}^N$, обозначим плотность его распределения и рассмотрим случайный элемент $\zeta^{(k)} = \xi + \eta/k$, считая, что ξ и η независимы, $k = 1, 2, \ldots$

Лемма 3.8.1. *При каждом* $n = 1, 2, \ldots$

1. $\zeta^{(k)}$ — *абсолютно непрерывный случайный элемент, причем если* $\mathsf{E}||\eta||^2 < \infty$, *то при* $k \to \infty$:
2. $\zeta^{(k)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$ *и для любого* $A \in \mathcal{B}^{(N)}$, *такого, что* $\mathrm{Pr}(\partial A) = 0$ [1]);
3. $\mathrm{Pr}(\zeta^{(k)} \in A) = \mathrm{Pr}^{(k)}(A) \to \mathrm{Pr}(A) = \mathrm{Pr}(\xi \in A)$.

Доказательство. 1. Действительно, для любого $A \in \mathcal{B}^{(N)}$ $\mathrm{Pr}(\zeta^{(k)} \in A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i \mathrm{Pr}(\eta/k + x_i \in A) = \int\limits_A dz \sum\limits_{i=1}^{\infty} k^N \mathrm{pr}_i h(k(z - x_i))$, т. е. $h^{\zeta^{(k)}}(z) = k^N \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i h(k(z - x_i))$, $z \in \mathcal{R}^N$, — плотность распределения $\zeta^{(k)}$.

2. Так как для любого $\delta > 0$ $\mathrm{Pr}(||\zeta^{(k)} - \xi|| \geqslant \delta) = \mathrm{Pr}(||\eta|| \geqslant k\delta) \leqslant \mathsf{E}||\eta||^2/(k^2\delta^2)$, то при $k \to \infty$ $\|\zeta^{(k)} - \xi\| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$,

---

и μ-интегрируемой функции $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{R}^1$ μ-почти для всех $x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n(x)} f(x')\mu(dx')/\mu(X_n(x)) = f(x)$, где $X_n(x)$ — то множество $X_{n,k}$, которое содержит x, $n = 1, 2, \ldots$

[1]) $\partial A = (c\ell A) \bigcap c\ell(\mathcal{R}^n \backslash A)$, в данном случае для $\mathrm{Pr}(\partial A) = 0$ достаточно, чтобы $x_i \in \mathcal{R}^n \backslash \partial A$, $i = 1, 2, \ldots$

поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Pr(||\zeta^{(k)} - \xi|| \geqslant \delta) \leqslant (\mathsf{E}||\eta||^2/(\delta^2)) \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1/k)^2 < \infty$, и, следовательно, согласно лемме Бореля–Кантелли для любого $\delta > 0$ выполняется лишь конечное число неравенств среди $||\zeta^{(k)} - \xi|| \geqslant \delta$, $k = 1, 2, \ldots$

3. Этот факт является следствием сходимости по вероятности $\zeta^{(k)} \to \xi$ при $k \to \infty$ [5], которая, в свою очередь, — следствие сходимости $\zeta^{(k)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$. ■

Следовательно, при достаточно большом k абсолютно непрерывный случайный элемент $\zeta^{(k)}$ сколь угодно точно приближает дискретный случайный элемент ξ в смысле утверждений 2 и 3 леммы 3.8.1.

Согласно лемме задачу приближенного гранулирования $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$ можно рассматривать как задачу гранулирования содержащего Ω пространства $\mathcal{R}^N$, рассмотренную в § 3.8.1. В данном случае процесс Роббинса–Монро должен быть организован на основе наблюдения значений случайного элемента $\zeta^{(k)} = \xi + \eta/k$, плотность распределения которого

$$h_t^{\zeta^{(k)}}(z) = k^N \sum_{i=1}^{\infty} t(\varphi_i) h(k(z - x_i)),\ z \in \mathcal{R}^N,$$

зависит от неизвестной монотонно неубывающей функции $t(\cdot)\colon [0,1] \to \to [0,1]$, определяющей распределение $\mathrm{pr}_i = t(\varphi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, случайного элемента ξ. Если наблюдается $\xi = x_i$, то для получения значения $\zeta^{(k)}$ «разыгрывается» случайный элемент η, распределенный с плотностью $h(y)$, $y \in \mathcal{R}^N$, и если при этом $\eta = y_i$, то $\zeta^{(k)} = x_i + y_i/k$, $i = 1, 2, \ldots$ Если $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \ldots$ — получаемые таким путем гранулы $\mathcal{R}^N$, то $G_1, G_2, \ldots$ — соответствующие гранулы Ω, где G_s — множество тех x_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые содержатся в $\overline{G}_s$, $s = 1, 2, \ldots$

Что касается собственно процесса Роббинса–Монро, то аналогично (3.7.5), (3.7.7), (3.8.1) и (3.7.9) его «составляющие» для $k = 1, 2, \ldots$ суть соответственно

$$\mathrm{G}_i^{(k)} = \{z \in \mathcal{R}^N,\ g_i \leqslant \varphi^{(k)}(z) < g_{i-1}\},\ i = 1, 2, \ldots,\ g_0 = \infty, \tag{3.7.5*}$$

где $\varphi^{(k)}(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j h(k(z - x_j))$, $z \in \mathcal{R}^N = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{G}_i^{(k)}$;

$$\Pr{}^{(t,k)}(\mathrm{G}_i^{(k)}) = k^N \int\limits_{\mathrm{G}_i^{(k)}} \sum_{j=1}^{\infty} t(\varphi_j) h(k(z - x_j)) dz; \tag{3.7.7*}$$

$$F^{(k)}(g) = \Pr{}^{(t,k)}(D^{(k)}(g)), \tag{3.8.1*}$$

где

$$D^{(k)}(g) = \{z \in \mathcal{R}^N,\ g \leqslant \varphi^{(k)}(z)\},\ g \in [0, \infty), \tag{3.7.9*}$$

а сам процесс организуется аналогично (3.8.3) на основе наблюдений случайных векторов $\zeta_1^{(k)}, \zeta_2^{(k)}, \ldots$, распределенных согласно $\Pr^{(t,k)}$.

В заключение рассмотрим еще один рандомизированный алгоритм эмпирического гранулирования. С этой целью дополним пространство $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ до $\overline{\Omega} = \Omega \times [0, 1]$ и на подмножествах нового пространства элементарных событий $\overline{\Omega}$ определим вероятность [1])

$$\overline{\Pr}^{(t)}(Q) = \sum_i \Big(t(\varphi_i) \int\limits_{(\omega_i, z) \in Q} dz\Big), \;\; Q \subset \overline{\Omega}. \tag{3.8.5}$$

Результат наблюдения теперь определяет не реализация $\omega_i \in \Omega$ случайного элемента ω, а реализация случайного элемента $\xi = (\omega, \zeta)$, где случайная величина ζ не зависит от ω и равномерно распределена на $[0, 1]$. Если ω_i — реализация ω, то для получения соответствующей реализации ξ должна быть «разыграна» случайная величина ζ и, если выпадет $z \in [0, 1]$, то (ω_i, z) — реализация ξ, см. рис. 3.8.1.

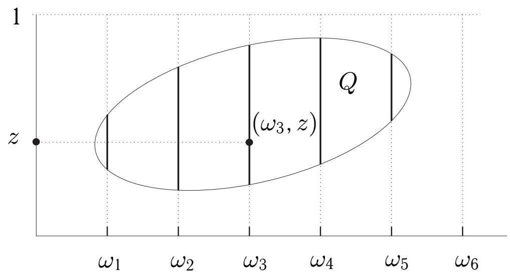


Рис. 3.8.1. Множество $Q \subset \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \times [0,\, 1]$. Выделены отрезки (борелевские подмножества $[0,\, 1]$), содержащиеся в Q, по которым вычислены интегралы в (3.8.5), и элементарное событие $(\omega_2, t) \in \overline{\Omega}$

Как будет показано ниже, замена $\omega \to \xi = (\omega, \zeta)$ позволит свести задачу эмпирического гранулирования $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ к задаче эмпирического гранулирования $\overline{\Omega} = \Omega \times [0, 1]$, аналогичной задаче эмпирического гранулирования $\Omega = \mathcal{R}^n$.

Определим семейство подмножеств $\overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} D(g, u) = (\{\omega_1, \ldots, \omega_{j-1},\ \varphi_{j-1} \geqslant g\} \times [0,\, 1]) \cup \\ \cup \left(\{\omega_j,\ \varphi_j \geqslant g > \varphi_{j+1}\} \times [0, 1-u]\right),\ (g, u) \in [0,\, 1] \times [0,\, 1], \end{aligned} \tag{3.8.6}$$

для которых

$$\overline{\Pr}^{(t)}(D(g, u)) = t(\varphi_1) + \ldots + t(\varphi_{j-1}) + (1-u)t(\varphi_j), \tag{3.8.7}$$

где, как отмечено в (3.8.6), $\varphi_j \geqslant g > \varphi_{j+1}$ и $(g, u) \in [0,\, 1] \times [0,\, 1]$. Значения (g, u), $i = 1, 2, \ldots$, должны быть найдены из условий

$$\overline{\Pr}^{(t)}(D(g, u)) = 1 - \frac{1}{(a+1)^i},\ \ i = 1, 2, \ldots \tag{3.8.8}$$

[1]) Далее ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, удобно считать значениями случайного элемента ω.

Определим индикаторную функцию $\chi_{(g,u)}(\cdot,\cdot)\colon \Omega\times[0,\,1]\to[0,\,1]$ множества $D(g,u)$

$$\chi_{(g,u)}(\omega_i,z)=\begin{cases}1, \text{ если } (\omega_i,z)\in D(g,u),\\ 0, \text{ если } (\omega_i,z)\in\overline{\Omega}\backslash D(g,u),\end{cases}\quad (g,u)\in[0,\,1]\times[0,\,1], \tag{3.8.9}$$

для которой

$$\overline{\Pr}^{(t)}((\omega,\zeta)\in\Omega\times[0,1],\ \chi_{(g,u)}(\omega,\zeta)=1)=\overline{\Pr}^{(t)}(D(g,u)). \tag{3.8.10}$$

В (3.8.10) $\xi=(\omega,\zeta)$ — случайный элемент, распределенный согласно равенству

$$\overline{\Pr}^{(t)}((\omega,\zeta)\in Q)=\overline{\Pr}^{(t)}(Q),\ Q\in\overline{\Omega}, \tag{3.8.11}$$

где случайный элемент $\omega\in\Omega$ наблюдаем, $\Pr^{(t)}(\omega=\omega_i)=\mathrm{pr}_i=t(\varphi_i)$, случайная величина $\zeta\in[0,1]$ равномерно распределена на $[0,1]$, ω и ζ $\overline{\Pr}^{(t)}$-независимы. При любом наблюдаемом значении $\omega=\omega_i\in\Omega$ случайная величина ζ разыгрывается согласно равномерному распределению на $[0,1]$, и если $\zeta=z$ — результат, то $\xi=(\omega_i,z)$, $\omega_i\in\Omega$, $z\in[0,1]$. Таким способом вместо последовательности взаимно независимых наблюдений $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\ldots$ получаем ее рандомизированный аналог — последовательность $\xi_1=(\omega_{i_1},\zeta_1),\xi_2=(\omega_{i_2},\zeta_2),\ldots$ взаимно независимых одинаково распределенных согласно (3.8.11) случайных элементов, для которых уравнение (3.8.8)

$$\overline{\Pr}^{(t)}(D(g,u))=t(\varphi_1)+\ldots+t(\varphi_{j-1})+(1-u)t(\varphi_j)=1-(a+1)^{-i}, \tag{3.8.12}$$

относительно (g,u), $\varphi_j\geqslant g>\varphi_{j+1}$, $g\in[0,\,1]$, $u\in[0,\,1]$ разрешимо при любых $a>1$ и, если (g^i,u^i) — его решение, то $\overline{G}_i=D(g^i,u^i)\backslash D(g^{i-1},u^{i-1})$, $i=1,2,\ldots$, где $D(g^0,u^0)=\varnothing$, — искомые гранулы $\overline{\Omega}=\Omega\times[0,1]$. В этом случае речь идет о пространстве с возможностью $(\Omega\times[0,1],\mathcal{P}(\Omega\times[0,1]),\overline{\mathrm{P}})$, в котором возможность $\overline{\mathrm{P}}$ максимально согласована с вероятностью (3.8.12) на σ-алгебре $\overline{\mathcal{G}}$, порожденной разбиением $\Omega\times[0,1]=\overline{G}_1\bigcup\overline{G}_2\bigcup\ldots$, и определена условиями $\overline{\mathrm{P}}(\{(\omega,z)\})=\gamma(\varphi_i),(\omega,z)\in\overline{G}_i$, $i=1,2,\ldots$, где $1=\gamma(\varphi_1)>\gamma(\varphi_2)>\ldots$

Процесс Роббинса–Монро в задаче решения уравнения (3.8.8)

$$\begin{gathered}
g_1(\xi_1)=g_0+a_1(\chi_{(g_0,u_0)}(\xi_1)-q),\\
u_1(\xi_1)=u_0+b_1(\chi_{(g_0,u_0)}(\xi_1)-q);\\
g_2(\xi_1,\xi_2)=g_1(\xi_1)+a_2(\chi_{(g_1(\xi_1),u_1(\xi_1))}(\xi_2)-q),\\
u_2(\xi_1,\xi_2)=u_1(\xi_1)+b_2(\chi_{(g_1(\xi_1),u_1(\xi_1))}(\xi_2)-q);\\
\ldots\\
g_k(\xi_1,\ldots,\xi_k)=g_{k-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1})+\\
+a_k(\chi_{(g_{k-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}),u_{k-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}))}(\xi_k)-q),\\
u_k(\xi_1,\ldots,\xi_k)=u_{k-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1})+\\
+b_k(\chi_{(g_{k-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}),u_{k-1}(\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}))}(\xi_k)-q);\\
\ldots
\end{gathered}$$

запускается для $q = 1 - 1/(a+1)^i$, $i = 1, 2, \ldots$, согласно условиям $g_0 = 1$, $u_0 = 0$, $a_k = 1/k$, $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, при которых эволюционирует лишь «g-составляющая» процесса, и продолжается согласно этим условиям до появления «колебаний»

$$g_0 > g_1 \geqslant \ldots \geqslant g_k < g_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant g_{k+s+1} \geqslant \ldots \geqslant g_{k+s_1+s_2} < \ldots$$

Вслед за этим, скажем, на $k + s_1 + s_2$ такте «включается демпфирующая» эти колебания «u-составляющая» процесса: $b_{k+s_1+s_2-1} = 0$, $b_{k+s_1+s_2} = 1/k$, $b_{k+s_1+s_2+1} = 1/(k+1)$, $\ldots$ и обеспечивающая его сходимость.

3.9. Экспертное построение возможности и правдоподобия

В этом параграфе будут рассмотрены примеры моделирования невероятностной случайности.

Речь пойдет о методах построения коллективной экспертной оценки *распределения возможностей значений* $\xi = x_j$, $j = 1, \ldots, n$, нечеткого элемента ξ, неформальная модель которого в той или иной степени известна экспертам [1]), или, что эквивалентно, см. § 1.3.2 гл. 1, — об *эмпирическом построении пространства с возможностью* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^{\xi})$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, для которого ξ — канонический нечеткий элемент, и об экспертном оценивании распределения правдоподобий значений неопределенного элемента.

3.9.1. Построение распределения нечеткого элемента путем парных сравнений возможностей его значений. Эксперты могут оценивать *возможности равенств* $\xi = x_1, \ldots, \xi = x_n$ в своих шкалах, но, поскольку коллективное решение, представляющее мнения всех экспертов, должно быть инвариантным относительно выбора их шкал, для построения коллективной экспертизы каждому эксперту следует оценить максимальный инвариант распределения возможностей — упорядоченность значений

$$\mathrm{p}_j = \mathrm{P}(\xi = x_j),\ j = 1, \ldots, n, \tag{3.9.1}$$

где $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{p}_j = 1$, $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{p}_j \geqslant 0$, или, что то же самое, — оценить $(n+1) \times (n+1)$ *матрицу* $m = m(\mathrm{p}.)$, $\mathrm{p}. \sim \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$, $\mathrm{p}_{n+1} = 0$, *парных сравнений*, см. § 2.5.1 гл. 2, определяющую *класс взаимно*

---

[1]) Примеры: оценивание возможностей стоимостей валюты, возможностей решений консилиума и т. п.

эквивалентных распределений ξ. Матричные элементы $m(\mathrm{p}.)$ кортежа $\mathrm{p}. \sim \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n, \mathrm{p}_{n+1} = 0$ определим равенствами

$$(m(\mathrm{p}.))_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{p}_k > \mathrm{p}_j, \\ 0, & \text{если } \mathrm{p}_k = \mathrm{p}_j, \quad k, j = 1, 2, \ldots, n+1. \\ -1, & \text{если } \mathrm{p}_k < \mathrm{p}_j, \end{cases} \qquad (*)$$

Рассмотрим задачу оценивания матрицы $m(\mathrm{p}.)$, представляющей коллективное экспертное решение. Пусть $\xi^{(i)}$ — нечеткий элемент, предложенный i-м экспертом в качестве оценки ξ, $\mathrm{p}_j^{(i)}$ — возможность равенства $\xi^{(i)} = x_j$, определенная i-м экспертом, $j = 1, \ldots, n$, $m^{(i)} = m(\mathrm{p}.^{(i)})$ — матрица парных сравнений кортежа $\mathrm{p}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{p}_n^{(i)}$, $\mathrm{p}_{n+1} = 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Предлагаемое ниже решение $m_* \in M_{n+1} = \{m(\mathrm{p}.),\ \mathrm{p}. \sim \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n,$ $\mathrm{p}_{n+1} = 0,\ \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{p}_j = 1,\ \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{p}_j \geqslant 0\}$ определяет коллективную экспертизу, в известном смысле лучше других согласованную с мнениями всех экспертов и с точностью до эквивалентности определяющую искомое распределение ξ. Речь идет о решении m_* задачи

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 \rho^2(m^{(i)}, m_*) = \min_{m \in M_{n+1}} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \rho^2(m^{(i)}, m), \qquad (3.9.2)$$

где

$$\rho(a, b) = \Big(\sum_{k,j=1}^{n+1} (a_{kj} - b_{kj})^2 \Big)^{1/2},\ a = \{a_{kj}\}, b = \{b_{kj}\} \qquad (3.9.3)$$

и w_i^2 — «вес» i-го эксперта [1]), $i = 1, \ldots, N$, причем $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 = 1$.

Поскольку в (3.9.2), как нетрудно убедиться,

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 \rho^2(m^{(i)}, m) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \rho^2(m^{(i)}, \overline{m}) + \rho^2(\overline{m}, m), \qquad (3.9.4)$$

где

$$\overline{m} = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 m^{(i)}, \qquad (3.9.5)$$

то задача (3.9.2) эквивалентна задаче отыскания матрицы $m_* \in$ $\in M_{n+1}$, ближайшей (в смысле (3.9.3)) к матрице $\overline{m}$, которая, вообще говоря, не является матрицей парных сравнений, ибо, хотя $\overline{m}_{kj} = -\overline{m}_{jk} \in [-1, 1]$, но, возможно, $\overline{m}_{kj} \notin \{-1, 0, 1\}$, $k, j = 1, \ldots,$ $n+1$. В данном случае очевидно, что «естественным претендентом» на *решение задачи* $\rho^2(\overline{m}, m) \sim \min\limits_{m \in M_{n+1}}$ *является матрица* $\overline{m}_*$,

[1]) «Вес» позволяет учесть «относительную компетентность» эксперта.

удовлетворяющая условию $\rho^2(\overline{m}, \overline{m}_*) = \min\limits_{m \in \overline{M}_{n+1}} \rho^2(\overline{m}, m)$, в котором $\overline{M}_{n+1} = \{m,\ m_{kj} = -m_{jk},\ m_{kj} \in \{-1, 0, 1\},\ k, j = 1, \ldots, n\}$. *Ее матричные элементы суть*

$$\overline{m}_{*kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{m}_{kj} > 1/2, \\ 0, & \text{если } |\overline{m}_{kj}| \leqslant 1/2, \quad k, j = 1, \ldots, n+1. \\ -1, & \text{если } \overline{m}_{kj} < -1/2, \end{cases} \tag{3.9.6}$$

Если $\overline{m}_* \notin M_{n+1} \subset \overline{M}_{n+1}$, то есть если $\overline{m}_*$ — не матрица парных сравнений и, следовательно, *не может представлять* коллективную экспертизу, то и коллективной экспертизе, представленной матрицей m_*, $\rho^2(\overline{m}, m_*) = \min\limits_{m \in M_{n+1}} \rho^2(\overline{m}, m)$, являющейся решением задачи (3.9.2), *доверять не следует*, ибо включение $\overline{m}_* \in \overline{M}_{n+1} \setminus M_{n+1}$ матрицы $\overline{m}_*$, наиближайшей к матрице $\overline{m}$ (3.9.5), естественно рассматривать как свидетельство превышения критического уровня взаимно противоречивых заключений экспертов. Если же $\overline{m}_* \in M_{n+1}$, то матрица $m_* = \overline{m}_*$ *представляет* коллективную экспертизу N экспертов, *но насколько этой экспертизе следует доверять*, позволит судить значение первого слагаемого в правой части (3.9.4), если считать, что *неадекватность коллективной экспертизы может быть обусловлена, в частности, некомпетентностью экспертов.*

Действительно, рассмотрим *вероятностную модель принятия решений* экспертами, в которой: $m^{(i)} \in M_{n+1}$, $i = 1, \ldots, N$, суть значения *взаимно независимых случайных матриц* $\widetilde{m}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, $\omega = (\widetilde{m}^{(1)}, \ldots, \widetilde{m}^{(N)})$, Ω — множество всех $(q(n))^N$ таких ω, где $q(n)$ — число всех $(n+1) \times (n+1)$ матриц $m \in M_{n+1}$, $\Pr(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ — вероятность на $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, определенная своими значениями

$$\Pr(\{\omega\}) = (q(n))^{-N}, \quad \omega \in \Omega, \tag{3.9.7}$$

так, чтобы *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$ *моделировало заключения* N *экспертов, принимающих решения наугад и взаимно независимо. Согласно определению* (3.9.7) *все* $(q(n))^N$ *их возможных экспертиз равновероятны.*

В этой модели первое слагаемое в правой части (3.9.4) следует рассматривать как одно из значений статистики

$$\sigma(\omega) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \rho^2(\widetilde{m}^{(i)}, \overline{m}),\ \omega \in \Omega, \tag{3.9.8}$$

определенной на $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \Pr)$ и принимающей $L = L(n)$ различных значений в множестве $S = \{\sigma(\omega), \omega \in \Omega\} = \{s_1, \ldots, s_L\}$ с вероятностями $\mathrm{pr}_l = \Pr(\{\omega \in \Omega, \sigma(\omega) = s_l\})$, $l = 1, \ldots, L$, которые будем считать упорядоченными по убыванию, $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_L > 0$, $\mathrm{pr}_1 + \ldots + \mathrm{pr}_L = 1$. Матрица $\overline{m}$ в (3.9.8) определена решениями экспертов $m^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, равенством (3.9.5).

Если H — *гипотеза*, согласно которой эксперты *принимают решения наугад и взаимно независимо*, то критерий, *отвергающий* H *ошибочно* с вероятностью $\leqslant \varepsilon$, где, например, $\varepsilon = 0.01$, определится критическим множеством $S_\varepsilon = \{s_{l(\varepsilon)}, \ldots, s_L\}$, где $l(\varepsilon) = \min\{l, \mathrm{pr}_l + \ldots + \mathrm{pr}_L \leqslant \varepsilon\}$. Если при этом в правой части (3.9.4) $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 \rho^2(m^{(i)}, \overline{m}) \in S \setminus S_\varepsilon$, то коллективной экспертизе, представленной матрицей m_*, *доверять не следует*, ибо если эксперты и в самом деле принимают решения наугад и взаимно независимо, то для статистики (3.9.8) $\Pr(\{\omega \in \Omega, \sigma(\omega) \in S \setminus S_\varepsilon\}) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Суммируем полученные результаты.

Теорема 3.9.1.

► *Если определенная условиями* (3.9.6) *матрица* $\overline{m}_* \in \overline{M}_{n+1} \setminus M_{n+1}$, *то решение задачи* (3.9.2) *определит «сомнительную» коллективную экспертизу, искаженную взаимно противоречивыми решениями экспертов.*

► *Если* $\overline{m}_* \in M_{n+1}$, *то решение* $m_* = \overline{m}_*$ *задачи* (3.9.2) *определит коллективную экспертизу, возможная неадекватность которой, обусловленная патологической несогласованностью частных экспертиз* $m^{(1)}, \ldots, m^{(N)}$ *некомпетентных экспертов, может быть установлена с вероятностью* $\geqslant 1 - \varepsilon$, *если в* (3.9.8) $\sigma(\omega) \in S \setminus S_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, *где* $\omega = (m^{(1)}, \ldots, m^{(N)})$.

Замечание 3.9.1. Если вместо матрицы $\overline{m}_*$, определенной в (3.9.6), ввести параметрический класс матриц $\overline{m}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, положив

$$\overline{m}_{\alpha kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{m}_{kj} > \alpha, \\ 0, & \text{если } |\overline{m}_{kj}| \leqslant \alpha, \quad k, j = 1, \ldots, n, \\ -1, & \text{если } \overline{m}_{kj} < -\alpha, \end{cases}$$

то можно, выбрав $\alpha = \alpha_* \in (0,1)$, ослабить влияние противоречивости решений экспертов так, чтобы $\overline{m}_{\alpha_*} \in M_{n+1}$.

Пример 3.9.1. Пусть $N = 5$, $n = 3$, $\mathrm{p}_j > 0$, $j = 1, 2, 3$,
$m^{(i)} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & m_i' & & 1 \\ & & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$, $i = 1, \ldots, 5$, где $m_1' = m_2' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m_3' = m_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $m_5' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $\overline{m} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & \overline{m}' & & 1 \\ & & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$, $\overline{m}' = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$,

$\overline{m}_* = \begin{pmatrix} & \overline{m}'_* & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{m}'_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_3$ и «определяет» противоречивые условия парных сравнений[1] $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 < \mathrm{p}_3$, $\mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_3$. Но, выбрав $\alpha_* \in (0, 0.2)$, получим $\overline{m}'_{\alpha_*} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3$, $\overline{m}_{\alpha_*} \in M_4$.

Замечание 3.9.2. *Правдоподобие гипотезы* H, согласно которой коллективной экспертизе доверять не следует, удобно охарактеризовать значением статистики $\mathrm{P}l(H, \omega) \overset{\triangle}{=} 1 - \min\{\overline{\mathrm{pr}}_l, \sigma(\omega) \in \{s_l, \ldots, s_L\}\}$ при $\omega = (m^{(1)}, \ldots, m^{(N)})$, где $\overline{\mathrm{pr}}_l \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_l + \ldots + \mathrm{pr}_L$, ибо чем меньше вероятность $\overline{\mathrm{pr}}_l$, при которой $\sigma(\omega) \in \{s_l, \ldots, s_L\}$, тем более правдоподобна гипотеза H и более сомнительна коллективная экспертиза, см. § 5.3 гл. 5.

На самом деле некомпетентность экспертов — не единственная причина неадекватности их коллективной экспертизы. Подобные заключения о качестве коллективной экспертизы возможны и при компетентных экспертах, если удается обнаружить их «злой умысел», «сговор» или другие противоправные действия.

Для обнаружения подобных «дефектов» коллективной экспертизы можно воспользоваться *матрицей корреляции частных экспертных решений*, элементы которой определим равенствами

$$< m^{(i)}, m^{(i')} > = (m^{(i)}, m^{(i')})_2 / (\|m^{(i)}\|_2 \|m^{(i')}\|_2), \quad i, i' = 1, \ldots, N, \tag{3.9.9}$$

в которых $(m^{(i)}, m^{(i')})_2 = \sum\limits_{j,k=1}^{n+1} m_{jk}^{(i)} m_{jk}^{(i')}$ — скалярное произведение матриц $m^{(i)}$ и $m^{(i')}$ как элементов евклидова пространства $\mathcal{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ квадратных матриц, $\|m^{(i)}\|_2 = \sqrt{(m^{(i)}, m^{(i')})_2}$ — соответствующая (евклидова) норма $m^{(i)}$.

Заметим, что $-1 \leqslant < m^{(i)}, m^{(i')} > \leqslant 1$, $i, i' = 1, \ldots, N$, в частности,
1) $< m^{(i)}, m^{(i')} > = 1$, если $m^{(i)} = m^{(i')} = m$ и
2) $< m^{(i)}, m^{(i')} > = -1$, если $m^{(i)} = -m^{(i')} = m$,

причем в обоих случаях экспертизы $m^{(i)}$ и $m^{(i')}$ вызывают подозрение в «сговоре» экспертов «i» и «i'». А так как первое слагаемое в правой части (3.9.4)

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 \rho^2(m^{(i)}, \overline{m}) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \|m^{(i)}\|_2^2 - \sum_{i,i'=1}^{N} w_i^2 w_{i'}^2 (m^{(i)}, m^{(i')})_2, \tag{3.9.10}$$

то, например, при $N = 2$ в случаях 1 и 2 согласно (3.9.10) значения статистики (3.9.8) суть соответственно ее минимальное $\|m\|_2^2 - \|m\|_2^2 = 0$

[1] Пример М. Байдасова.

и максимальное $\|m\|_2^2(1-(w_1^2-w_2^2)^2)|_{w_1=w_2}=\|m\|_2^2$ значения, что не свидетельствует о некомпетентности экспертов.

Замечание 3.9.3. Правую часть равенства (3.9.9) можно *обозначить* $<\xi^{(i)},\xi^{(i')}>$ и назвать *матричным элементом матрицы ковариаций распределений* $\mathrm{p}_1^{(i)},\ldots,\mathrm{p}_{n+1}^{(i)}$ и $\mathrm{p}_1^{(i')},\ldots,\mathrm{p}_{n+1}^{(i')}$ *нечетких элементов* $\xi^{(i)}$ и $\xi^{(i')}$, *инвариантной относительно выбора шкал значений возможностей* $\mathrm{p}_1^{(i)},\ldots,\mathrm{p}_{n+1}^{(i)}$ *и возможностей* $\mathrm{p}_1^{(i')},\ldots,\mathrm{p}_{n+1}^{(i')}$.

Замечание 3.9.4. Если вместо $\rho(\cdot,\cdot)$ (3.9.3) выбрать $\rho(a,b)=\sum\limits_{k,j=1}^{n+1}|a_{kj}-b_{kj}|$, то матрицу $m^*\in M_{n+1}$, представляющую коллективную экспертизу, следует определить как решение задачи

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k,j=1}^{n+1}|m_{kj}^{(i)}-m_{kj}^*|=\min_{m\in M_{n+1}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k,j=1}^{n+1}|m_{kj}^{(i)}-m_{kj}|. \tag{3.9.2*}$$

Заметим в этой связи, что если множество $\{m_{kj}^{(1)},\ldots,m_{kj}^{(N)}\}$ содержит N_-^{kj} значений $m_{kj}^{(\cdot)}=-1$, N_0^{kj} значений $m_{kj}^{(\cdot)}=0$ и N_+^{kj} значений $m_{kj}^{(\cdot)}=+1$, $N_-^{kj}+N_0^{kj}+N_+^{kj}=N$, то

$$\sum_{i=1}^{N}|m_{kj}^{(i)}-m_{kj}|=\begin{cases}N_0^{kj}+2N_+^{kj}, & \text{если } m_{kj}=-1,\\ N_-^{kj}+N_+^{kj}, & \text{если } m_{kj}=0,\\ N_0^{kj}+2N_-^{kj}, & \text{если } m_{kj}=+1,\ k,j=1,\ldots,n+1.\end{cases}$$

Поэтому значения этой суммы, а следовательно, и суммы в (3.9.2*), будут минимальны, если матрицу $\overline{m}^*\in\overline{M}_{n+1}$ (аналог $\overline{m}_*$ в (3.9.6)) определить равенствами

$$\overline{m}_{kj}^*=\begin{cases}-1, & \text{если } N_0^{kj}+2N_+^{kj}\leqslant\min\{N_-^{kj}+N_+^{kj},N_0^{kj}+2N_-^{kj}\},\\ & \qquad\text{т. е. если } N_0^{kj}\leqslant N_-^{kj}-N_+^{kj},\\ 0, & \text{если } N_-^{kj}+N_+^{kj}\leqslant\min\{N_0^{kj}+2N_+^{kj},N_0^{kj}+2N_-^{kj}\},\\ & \qquad\text{т. е. если } N_0^{kj}\geqslant|N_-^{kj}-N_+^{kj}|,\\ +1, & \text{если } N_0^{kj}+2N_-^{kj}\leqslant\min\{N_-^{kj}+N_+^{kj},N_0^{kj}+2N_+^{kj}\},\\ & \qquad\text{т. е. если } N_0^{kj}\leqslant N_+^{kj}-N_-^{kj},\end{cases} \tag{3.9.6*}$$

$k,j=1,\ldots,n+1$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{N}|m_{kj}^{(i)}-\overline{m}_{kj}^*|=\min\{N_0^{kj}+2N_-^{kj},N_-^{kj}+N_+^{kj},N_0^{kj}+2N_+^{kj}\}$ и соответственно $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k,j=1}^{n+1}|m_{kj}^{(i)}-\overline{m}_{kj}^*|=\sum\limits_{k,j=1}^{n+1}\min\{N_0^{kj}+2N_-^{kj},N_-^{kj}+N_+^{kj},N_0^{kj}+N_+^{kj}\}$. Далее следует проверить, выполнено ли включение [1] $m^* \in M_{n+1}$, затем рассмотреть случай возможной некомпетентности экспертов, оценив вероятность значения $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k,j=1}^{n+1}|m_{kj}^{(i)} - \overline{m}_{kj}^*|$ статистики $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k,j=1}^{n+1}|\widetilde{m}_{kj}^{(i)} - \overline{m}_{kj}^*|$ и т. д.

Замечание 3.9.5. Во втором варианте теории возможностей аналогом матрицы, см. (∗), парных сравнений является матрица $m'^{(i)}$, матричные элементы которой $m'^{(i)}_{jk} = \ln \mathrm{p}_j^{(i)} / \ln \mathrm{p}_k^{(i)}$, $j, k = 1, \ldots, n$, не зависят от выбора шкалы i-м экспертом, $i = 1, \ldots, N$. Однако поскольку ее матричные элементы $m'^{(i)}_{jk}\Big|_{\mathrm{p}_j^{(i)}=\mathrm{p}_k^{(i)}=0} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$ и $m'^{(i)}_{jk}\Big|_{\mathrm{p}_j^{(i)}=\mathrm{p}_k^{(i)}=1} = \dfrac{-0}{-0}$ не определены, а при $\mathrm{p}_j^{(i)} = 0$, $\mathrm{p}_k^{(i)} \in (0, 1]$ и при $\mathrm{p}_j^{(i)} =\in [0, 1)$, $\mathrm{p}_k^{(i)} = 1$ $m'^{(i)}_{jk} = \infty$, то при определении коллективной экспертизы $\mathrm{p}'_{*1}, \ldots, \mathrm{p}'_{*n}$ удобнее решать задачу

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}((\mathrm{p}_j^{(i)})^{\alpha_{*i}} - \mathrm{p}'_{*j})^2 = \min_{\alpha.\in A}\min_{\mathrm{p}'_{\cdot}\in \mathrm{P}'}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}((\mathrm{p}_j^{(i)})^{\alpha_i} - \mathrm{p}'_j)^2,$$

где $A = \{\alpha. = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \alpha_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, N, \alpha_1 + \ldots + \alpha_N = 1\}$, $\mathrm{P}' = \{\mathrm{p}'_{\cdot} = (\mathrm{p}'_1, \ldots, \mathrm{p}'_n), \mathrm{p}'_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{p}'_j = 1\}$, или задачу

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\alpha_{*i}\ln \mathrm{p}_j^{(i)} - \ln \mathrm{p}'_{*j}\right| = \min_{\alpha.\in A}\min_{\mathrm{p}'_{\cdot}\in \mathrm{P}'}\max_{1\leqslant i\leqslant N}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\alpha_i \ln \mathrm{p}_j^{(i)} - \ln \mathrm{p}'_j\right|,$$

которая сводится к задаче линейного программирования.

Рассмотренные методы построения коллективной экспертизы позволяют получить заключение *одного* эксперта, оценивающего, например, качество объекта на основе результатов анализа *нескольких* его характеристик.

Пусть i-я характеристика объекта в терминах *субъективных суждений*, см. § 5.2 гл. 5, эксперта, по его мнению, свидетельствует о качестве объекта распределением правдоподобий $\mathrm{pl}_1^{(i)}, \ldots, \mathrm{pl}_5^{(i)}$ истинности его заключений: 1 ∼ «низкое», 2 ∼ «скорее низкое, чем высокое», 3 ∼ «посредственное», 4 ∼ «скорее высокое, чем низкое», 5 ∼ «высокое», ω_i^2 — «вес» i-й характеристики, $i = 1, \ldots, N$, и пусть заключение эксперта о качестве объекта должно быть представлено *распределением правдоподобий* $\mathrm{pl}_1, \ldots, \mathrm{pl}_5$ *истинности* его заключений $1, \ldots, 5$ о качестве объекта. Тогда заключение эксперта может быть получено как решение задачи (3.9.2), в которой матрицы $m^{(i)} = m(\mathrm{p}_{\cdot}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, N$, следует заменить на матрицы $m^{(i)} = m(\mathrm{pl}_{\cdot}^{(i)})$, $i = 1, \ldots, N$, p_{n+1} — на $\mathrm{pl}_{n+1} = 0$, $n = 5$.

---

[1] В примере 3.9.1 $\overline{m}^* = \overline{m}_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_{n+1}$.

В данном случае «качество объекта» моделируется как неопределенный элемент $\widetilde{x}$ с лингвистическими значениями $1, \ldots, 5$, его распределение $t^{\widetilde{x}}(j) = \mathrm{pl}_j = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = j)$, $j = 1, \ldots, 5$, эмпирически определено экспертом на основе результатов анализа характеристик объекта, качество экспертизы эксперт может проанализировать и охарактеризовать сам, воспользовавшись моделями, рассмотренными в связи с анализом коллективной экспертизы.

В заключение определим значение $q(n)$ в (3.9.7). Заметим прежде всего, что любую конкретную упорядоченность в $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{p}_n \geqslant 0$ можно задать, выбрав $s \in \{1, \ldots, n\}$, указав множества $Q_1, \ldots, Q_s$ так, чтобы

$$\overbrace{1 = \mathrm{p}_1 = \ldots = \mathrm{p}_{k_1}}^{Q_1} > \overbrace{\mathrm{p}_{k_1+1} = \ldots = \mathrm{p}_{k_1+k_2}}^{Q_2} > \\ > \ldots > \overbrace{\mathrm{p}_{k_1+\ldots+k_{s-1}+1} = \ldots = \mathrm{p}_{k_1+\ldots+k_s}}^{Q_s} \geqslant 0, \quad (3.9.11)$$

и выбрав в (3.9.11) условие > 0 или $= 0$ для Q_s (при $s = 1$ — лишь > 0). Поскольку в (3.9.11)

► для каждого $s = 1, \ldots, n$ множества $Q_1, \ldots, Q_s$ можно выбрать одним из $C_{n-1}^{s-1} = =(n-1)!/((s-1)!(n-s)!)$ способов, распределив $s-1$ неравенств $>$ среди $n-1$ вакантных промежутков между $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$,

► при каждом выборе $Q_1, \ldots, Q_s$ можно $n!/(k_1! \ldots k_s!)$ способами переупорядочить значения p_i, $i = 1, \ldots, n$, и

► при $s > 1$ двумя способами выбрать условие > 0 или $= 0$ для наименьшей возможности среди $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ (при $s = 1$ — лишь > 0, ибо $1 = \mathrm{p}_1 = \ldots = \mathrm{p}_n > 0$), и, наконец, каждому из указанных способов упорядочения $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$, $\mathrm{p}_{n+1} = 0$ отвечает одна $(n+1) \times (n+1)$ матрица парных сравнений, то имеет место

Лемма 3.9.1. *Число $q(n)$ всех $(n+1) \times (n+1)$ матриц в M_{n+1} определяется равенством*

$$q(n) = 2 \sum_{s=2}^{n} \sum_{\{k_1, \ldots, k_s\}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!} + 1, \quad (3.9.12)$$

где сумма $\sum\limits_{\{k_1, \ldots, k_s\}}$ содержит C_{n-1}^{s-1} слагаемых $n!/(k_1! \ldots k_s!)$, $s = 2, \ldots, n$, двойка учитывает две возможности выбора в (3.9.11): > 0 или $= 0$, последнее слагаемое отвечает $s = 1$ $(1 = \mathrm{p}_1 = \ldots = \mathrm{p}_n > 0$, $k_s|_{s=1} = = n$, $n!/n! = 1)$.

Например, при $n = 3$ $q(n) = 2 \cdot 3! + 2(3!/2!) + 2(3!/2!) + 1 = 25$, где первое слагаемое отвечает $s = 3$, в (3.9.11) $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 \geqq 0$, второе и третье слагаемые отвечают $s = 2$, в (3.9.11) $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 \geqq 0$ и $1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 > \mathrm{p}_3 \geqq 0$, четвертое отвечает $s = 1$, в (3.9.11) $1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = = \mathrm{p}_3 > 0$, см. рис. 2.5.1 гл. 2; при $n = 2$ $q(n) = 2 \cdot 2! + 1 = 5$, где первое слагаемое отвечает $s = 2$, в (3.9.11) $1 = \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 \geqq 0$, второе отвечает $s = 1$, в (3.9.11) $1 = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 > 0$, см. рис. 3.0.1.

Заметим, что если эксперты *непременно должны различать* возможности $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$, то в (3.9.12) $q(n) = 2n!$, а если к тому же *обязательно* считать, что $\mathrm{p}_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n$, то $q(n) = n!$. Этот случай будет рассмотрен иначе в следующем параграфе.

3.9.2. Построение распределения нечеткого элемента путем упорядочения возможностей его значений. Рассмотрим задачу экспертного построения распределения нечеткого элемента ξ (3.9.1), в которой каждый эксперт представляет свое решение, указав перестановку $\pi(\cdot)\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, упорядочивающую, по его мнению, значения $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ в (3.9.1) по убыванию.

Пусть $\pi_i(\cdot)\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, — перестановка, упорядочивающая, по мнению i-го эксперта, значения возможностей в (3.9.1):

$$1 = \mathrm{p}_{i_1} > \mathrm{p}_{i_2} > \ldots > \mathrm{p}_{i_n} > 0, \tag{3.9.13}$$

где $\mathrm{p}_{i_k} = (\pi_i * \mathrm{p})_k \overset{\triangle}{=} \mathrm{p}_{\pi_i^{-1}(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, N$, и для простоты считается, что эксперты обязаны использовать только строгие неравенства.

В таком случае расстояние $r(\pi_i, \pi_s)$ между «мнениями» i-го и s-го экспертов можно определить, например, следующим выражением:

$$r(\pi_i, \pi_s) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (\pi_i^{-1}(k) - \pi_s^{-1}(k))^2\Big)^{1/2} \equiv \Big(\sum_{k=1}^{n} (i_k - s_k)^2\Big)^{1/2}. \tag{3.9.14}$$

Пусть $\pi_*^{-1}(1), \ldots, \pi_*^{-1}(n)$ — номера, упорядочивающие (не обязательно строго) значения возможностей, которые указал бы «эталонный» эксперт, выражая мнения всех N экспертов. Тогда перестановка π_* может быть определена, например, как решение задачи

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \pi_*) = \min_{\pi} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \pi), \tag{3.9.15}$$

в которой минимум вычисляется на множестве всех перестановок $\pi(\cdot)\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

В задаче (3.9.15), как и в задаче (3.9.2), можно получить, в известном смысле, полное решение, а именно, — найти коллективную экспертизу π_* и оценить, в какой степени ей следует доверять [62]. Так как в (3.9.15), как и в (3.9.2),

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \pi) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \overline{\pi}) + r^2(\overline{\pi}, \pi), \tag{3.9.16}$$

где $\overline{\pi}^{-1}(k) = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 \pi_i^{-1}(k)$, $k = 1, \ldots, n$, то задача (3.9.15) эквивалентна задаче отыскания перестановки π_*, ближайшей к функции [1] $\overline{\pi}$: $r^2(\overline{\pi}, \pi_*) = \min\limits_{\pi} r^2(\overline{\pi}, \pi)$. Если для некоторой перестановки $\widehat{\pi}$ $\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(1)) \leqslant \leqslant \ldots \leqslant \overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(n))$, то, очевидно, $\pi_* = \widehat{\pi}$, ибо $\sum\limits_{k=1}^{n} (\overline{\pi}^{-1}(k) - \widehat{\pi}^{-1}(k))^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(k)) - k)^2$ и для любых целых $s, k = 1, \ldots, n$, $1 \leqslant s \leqslant s + k \leqslant n$, $(\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s)) - s)^2 + (\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s+k)) - s + k)^2 - (\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s+k)) - s)^2 - (\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s)) - s + k)^2 = 2k(\overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s)) - \overline{\pi}^{-1}(\widehat{\pi}(s+k))) \leqslant 0$.

В вероятностной модели экспертных решений, аналогичной рассмотренной в § 3.9.1, значение первого слагаемого в правой части (3.9.16) позволяет судить, насколько следует доверять «коллективной экспертизе» π_*.

Обозначим $\omega = (\widetilde{\pi}_1, \ldots, \widetilde{\pi}_N)$ — кортеж N случайных взаимно независимых перестановок, Π^N — класс всех $(n!)^N$ таких ω, $\Pr(\{\omega\}) = (n!)^{-N}$, $\omega \in \Pi^N$, — значения, определяющие вероятность $\Pr$ на $(\Pi^N, \mathcal{P}(\Pi^N))$.

Вероятностное пространство $(\Pi^N, \mathcal{P}(\Pi^N), \Pr)$ моделирует заключения N экспертов, взаимно независимо принимающих решения наугад: все $(n!)^N$ возможных их экспертиз равновероятны.

Статистика $t(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\widetilde{\pi}_i, \overline{\pi})$, $\omega \in \Pi^N$, принимает значения в $T = \{t(\omega),\ \omega \in \Pi^N\} = \{t_1, \ldots, t_K\}$ с вероятностями $\mathrm{pr}_k = \Pr(\{\omega \in \Pi^N, t(\omega) = t_k\})$, $k = 1, \ldots, K$, которые определим упорядоченными по убыванию: $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}_K$. Если H — гипотеза, *согласно которой эксперты принимают решения наугад и взаимно независимо*, то критерий, отвергающий H ошибочно с вероятностью $\leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, определится критическим множеством $T_\varepsilon = \{t_{k(\varepsilon)}, t_{k(\varepsilon)+1}, \ldots, t_K\}$, где $k(\varepsilon) = \min\{k, t_k \in T,\ \mathrm{pr}_k + \ldots + \mathrm{pr}_K \leqslant \varepsilon\}$.

Поэтому включение $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i^2 r^2(\pi_i, \overline{\pi}) \in T \setminus T_\varepsilon$ означает, что «коллективной» экспертизе π_* доверять не следует в силу «патологической» несогласованности частных экспертиз.

З а м е ч а н и е 3.9.6. Эксперты могут сами выбирать значения $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}$, $i = 1, \ldots, N$, нечеткого элемента ξ, но для определения коллективной экспертизы необходимо, чтобы они в своих заключениях *упорядочили возможности всех значений* ξ из $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_i}}\}$.

[1] $\overline{\pi}^{-1}(1), \ldots, \overline{\pi}^{-1}(n)$, вообще говоря, не образуют перестановку $1, \ldots, n$.

3.10. Экспертное построение распределения неопределенного нечеткого элемента

Заметим, что решения задач (3.9.2), (3.9.15) позволили выразить недоверие к коллективной экспертизе, хотя *эксперты не имели математических средств для выражения правдоподобий собственных заключений*. Учесть мнения каждого эксперта о правдоподобии его собственного решения позволит конструкция *неопределенного нечеткого* (н. н.) *элемента* [52], см. § 5.4 гл. 5.

Н. н. элементом со значениями в X называется функция $\widetilde{\xi} = q(\eta, \widetilde{s})$ нечеткого η и неопределенного $\widetilde{s}$ элементов, канонических для пространств $(Y, \mathcal{P}(Y),\ \mathrm{P}^{\eta})$ с возможностью P^{η} и $(S, \mathcal{P}(S), \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ с правдоподобием $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}$, при отображении $q(\cdot,\cdot)\colon Y \times S \to X$. В $(S, \mathcal{P}(S), \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ S — множество элементарных высказываний, $\mathcal{P}(S)$ — множество всех подмножеств S, каждое подмножество $E \subset S$ взаимно однозначно представляет высказывание [1] e как множество элементарных высказываний, каждое из которых влечет e: $e \leftrightarrow E \overset{\triangle}{=} \bigcup\limits_{\substack{s\in S,\\ s\to e}} \{s\} \equiv \{s \in S,\ s \to e\}$, где $\leftrightarrow$ символизирует взаимно однозначное соответствие, а $s \to e$ означает «s влечет e»; наконец, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ — правдоподобие (мера правдоподобия), значение $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(E) \overset{\triangle}{=} \sup\limits_{s\in E} t^{\widetilde{s}}(s)$, — правдоподобие истинности высказывания $e \leftrightarrow E \in \mathcal{P}(S)$, где $t^{\widetilde{s}}(s) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\widetilde{s} = s)$ — правдоподобие истинности элементарного высказывания $s \in S$.

Поясним связь между *логикой высказываний и ее теоретико-множественным представлением*, на котором определена мера Pl правдоподобия высказываний. Обозначим $a, b, \ldots$ высказывания, $a = 1$ $(a = 0)$ — истинность (ложность) a, $\mathbf{1}$ $(\mathbf{0})$ — всегда истинное (ложное) высказывание, логические операции: отрицания $\neg$, конъюнкции $\&$, дизъюнкции $\vee$, импликации $\to$, определяющие высказывания: $\neg\, a = 1 \Leftrightarrow a = 0$, $a \,\&\, b = 1 \Leftrightarrow a = 1$ и $b = 1$, $a \vee b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ и $b = 0$, $a \to b \equiv (\neg\, a) \vee b = 0 \Leftrightarrow a = 1$ и $b = 0$, где $\Leftrightarrow$ означает «если и только если», $\equiv$ — «равносильно». Обозначим: s элементарное высказывание, по определению не следующее ни из какого высказывания, кроме s и $\mathbf{0}$ (т. е. $\forall\, s\ a \to s$ только для $a \equiv s$ и $a \equiv \mathbf{0}$), S, как было сказано, — множество всех элементарных высказываний. Любое высказывание можно взаимно однозначно *представить* подмножеством S: элементарное $s \in S$ — одноточечным множеством $\{s\} \subset S$, $s \leftrightarrow \{s\}$, произвольное a — множеством $A \subset S$ тех $s \in S$, каждое из которых влечет a, $a \leftrightarrow A \overset{\triangle}{=} \bigcup\limits_{\substack{s\in S\\ s\to a}} \{s\}$. При этом $\mathbf{1} \leftrightarrow S$, $\mathbf{0} \leftrightarrow \varnothing$ и логические операции над высказываниями будут *представлены* операциями над представляющими их множествами: $\neg\, a \leftrightarrow S \setminus A$, $a \,\&\, b \leftrightarrow A \cap B$, $a \vee b \leftrightarrow A \cup B$,

[1] $a, b, \ldots$ — высказывания, $A, B, \ldots$ — представляющие их подмножества S.

$a \to b \equiv (\neg\, a) \vee b \leftrightarrow (S \setminus A) \cup B$. Поэтому, например, для любых высказываний a, b и представляющих их множеств A, B: $a \to b \equiv \equiv (\neg\, a) \vee b \equiv \mathbf{1} \leftrightarrow \neg\,(a \to b) \equiv a \,\&\, (\neg\, b) \equiv \mathbf{0} \leftrightarrow A \cap (S \setminus B) = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$, ибо $\neg\,(\neg\, a) \equiv a$, $\neg\,(a \vee b) \equiv (\neg\, a) \,\&\, (\neg\, b)$, $\neg\,(a \,\&\, b) \equiv (\neg\, a) \vee (\neg\, b)$. Если $\mathrm{Pl}(\cdot)\colon \mathcal{P}(S) \to [0,\, 1]$ — некоторая мера правдоподобия, см. [52], то $\mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(\widetilde{s} = s) = \mathrm{Pl}(\{s\})$, $s \in S$.

В н. н. модели объекта, определенной н. н. элементом $\widetilde{\xi}$, пространство с возможностью $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta})$ моделирует *нечеткость формулировок*, характеризующих *свойства объекта*, относящуюся к их содержанию, пространство с правдоподобием $(S, \mathcal{P}(S), \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}})$ моделирует *субъективные суждения* эксперта *о правдоподобии нечетких формулировок*, истинность которых, разумеется, не абсолютна в силу принципиальной неполноты и недостоверности знания свойств объекта [52], подробнее см. § 5.2 гл. 5.

Для каждого $s \in S$ $\xi_s = q(\eta, s)$ — нечеткий элемент, $g^{\xi_s}(x) = = \mathrm{P}^{\eta}(\xi_s = x) = \sup\{g^{\eta}(y) \,|\, y \in Y,\, q(y,s) = x\}$, $x \in X$, — его распределение, понимаемое как значение *неопределенной функции* $g^{\xi_{\widetilde{s}}}(\cdot) \triangleq g^{\widetilde{s}}(\cdot)$ (т. е. функции $g^{\xi_{\widetilde{s}}}(\cdot)\colon X \to [0,1]$, зависящей от неопределенного элемента $\widetilde{s}$, как от параметра) при $\widetilde{s} = s$. Поэтому

$$t^{g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)}(g(\cdot)) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g(\cdot)) = \sup\{t^{\widetilde{s}}(s) | s \in S,\ \forall\, x \in X\ g^{\xi_s}(x) = g(x)\},$$
$$g(\cdot)\colon X \to [0,1], \quad (3.10.1)$$

— *правдоподобие истинности суждения, согласно которому неопределенное распределение* $g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)$ *равно* $g(\cdot)$, а

$$t^{g^{\widetilde{\xi}}(x)}(\mathrm{p}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(x) = \mathrm{p}) = \sup\{t^{\widetilde{s}}(s) | s \in S,\ g^{\xi_s}(x) = \mathrm{p}\} = \tau_x^{\widetilde{\xi}}(\mathrm{p}), \quad (3.10.2)$$

— *правдоподобие истинности суждения, согласно которому возможность равенства* $\widetilde{\xi} = x \in X$ *равна* $\mathrm{p} \in [0,1]$, [52].

Функция $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot)\colon X \times [0,1] \to [0,1]$ называется *распределением правдоподобий возможностей значений* н. н. *элемента* $\widetilde{\xi}$, соответственно, $t^{g^{\widetilde{\xi}}(\cdot)}(g(\cdot))$, $g(\cdot)\colon X \to [0,1]$, — *распределение правдоподобий распределений возможностей значений* н. н. *элемента* $\widetilde{\xi}$, короче — *распределение* н. н. *элемента* $\widetilde{\xi}$, которое обозначим $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to [0,1]$.

Покажем, что задача экспертного восстановления распределения н. н. элемента $\widetilde{\xi}$ как задача восстановления функции $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)\colon \overline{\mathcal{L}}(X) \to \to [0,1]$ или (и) функции $\tau_{\cdot}^{\widetilde{\xi}}(\cdot)\colon X \times [0,1] \to [0,1]$ может быть решена аналогично тому, как были решены задачи (3.9.14), (3.9.15) или (3.9.2), (3.9.3) восстановления распределения нечеткого элемента ξ [62].

Рассмотрим случай, в котором каждый из N экспертов предлагает семейство, по его мнению, в той или иной степени правдоподобных вариантов (значений) неопределенного распределения возможностей $g^{\widetilde{\xi}}(x)$, $x \in X$, значений $\widetilde{\xi}$, а затем все N предложенных экспертами семейств объединяются в одно семейство $g^{\xi_{s_k}}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n$, и каждый эксперт по своему усмотрению упорядочивает его по убыванию правдоподобий распределений возможностей. Если по мнению i-го эксперта

$$1 = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_1}}}(\cdot)) > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_2}}}(\cdot)) > \ldots > \\ > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{i_n}}}(\cdot)) > 0, \; i = 1, \ldots, N, \quad (3.10.3)$$

то он в качестве своей экспертизы сообщает перестановку $\pi_i^{-1}(k) = i_k$, $k = 1, \ldots, n$, упорядочивающую правдоподобия распределений семейства $g^{\xi_{s_k}}(\cdot)$, $k = 1, \ldots, n$, по убыванию, $i = 1, \ldots, N$.

Коллективное заключение о распределении $\tau^{g^{\widetilde{\xi}}}(\cdot)$ (3.10.1), которое может быть получено аналогично решению задачи (3.9.14), (3.9.15), определит перестановку π_*, упорядочивающую, подобно (3.10.3), правдоподобия распределений возможностей

$$1 = \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(1)}}}(\cdot)) > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(2)}}}(\cdot)) > \ldots > \\ > \mathrm{Pl}^{\widetilde{s}}(g^{\widetilde{\xi}}(\cdot) = g^{\xi_{s_{\pi_*^{-1}(n)}}}(\cdot)) > 0$$

согласно коллективной экспертизе, и оценит, в какой степени последней следует доверять. Задача экспертного восстановления распределения $\tau^{\widetilde{\xi}}_{\cdot}(\cdot)$ (3.10.2) решается аналогично.

Глава 4

СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЧЕТКИХ ЭЛЕМЕНТОВ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Введение

Предельные теоремы теории вероятностей устанавливают факт, условия и характер сходимости последовательностей некоторых функций случайных элементов к определенным постоянным, см. § 3.1 гл. 3. Такие функции определяют правила комбинирования случайных наблюдений, позволяющие с увеличением числа наблюдений уменьшать влияние их случайных составляющих и выявлять в достаточно длинных сериях наблюдений закономерности, сколь угодно близкие к неслучайным.

Во введении и в § 4.1–4.3 рассмотрены некоторые виды сходимости последовательности нечетких элементов и получены предельные теоремы, свидетельствующие о том, что в случае варианта возможности со значениями в шкале $([0,1],\leqslant,\max,\min)$ не следует ожидать эффекта «накопления информации» и «подавления нечеткости» при многократных повторениях независимых наблюдений *«с одной стороны»* за объектом исследования. Эффект «накопления информации» при независимых наблюдениях *«с разных сторон»* показан в (5.2.35) и в § 5.4.2. В § 4.4 показано, что в случае возможности со значениями в шкале $([0,1],\leqslant,\max,\times)$, где $\times$ — символ обычного умножения, наблюдается эффект «подавления нечеткости» при повторных независимых наблюдениях и получены теоретико-возможностные аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы.

Следующие примеры иллюстрируют эффект «неподавления нечеткости» при повторениях независимых наблюдений «с одной стороны». Рассмотрим асимптотические при $n\to\infty$ свойства распределений некоторых функций $f_n(\xi_1,\ldots,\xi_n)=\zeta_n$ взаимно независимых нечетких элементов $\xi_1,\ldots,\xi_n$, каждый из которых *является копией* нечеткого элемента ξ. Если $g^{\xi}(\cdot)\colon X\to[0,1]$ — распределение ξ и $f_n(\cdot,\ldots,\cdot)\colon X^n\to Z$, то распределение $g^{\zeta_n}(\cdot)\colon Z\to[0,1]$ нечеткого элемента ζ_n дается равенством

$$g^{\zeta_n}(z)=\sup\bigl\{\min\bigl\{g^{\xi}(x_1),\ldots,g^{\xi}(x_n)\bigr\}\mid x_1\in X,\ldots,x_n\in X,\\ f_n(x_1,\ldots,x_n)=z\bigr\},\quad z\in Z. \quad (4.0.1)$$

Пусть, например, $\zeta^{(n)} = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $X = Z = \mathcal{R}^1$. Тогда согласно (4.0.1)

$$g^{\zeta^{(n)}}(z) = \sup\bigl\{\min\bigl\{g^{\xi}(x_1), \ldots, g^{\xi}(x_n)\bigr\} \mid x_1 \in \mathcal{R}^1, \ldots, x_n \in \mathcal{R}^1, \\ \max\{x_1, \ldots, x_n\} = z\bigr\},\ z \in \mathcal{R}^1.$$

Поскольку, положив $x_1 = z, \ldots, x_n = z$, найдем, что $g^{\zeta^{(n)}}(z) \geqslant g^{\xi}(z)$, а условие $\max\{x_1, \ldots, x_n\} = z$ означает, что все $x_j \leqslant z$, $j = 1, \ldots, n$, причем для некоторого j_k $x_{j_k} = z$, где x_{j_k} может быть любым из $x_1, \ldots, x_n$ и $\sup\limits_{x_k \leqslant z} g^{\xi}(x_k) \geqslant g^{\xi}(z)$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$g^{\zeta^{(n)}}(z) \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Bigl\{\min\Bigl\{\sup_{x_1 \leqslant z} g^{\xi}(x_1), \ldots, \sup_{x_{k-1} \leqslant z} g^{\xi}(x_{k-1}), g^{\xi}(z), \\ \sup_{x_{k+1} \leqslant z} g^{\xi}(x_{k+1}), \ldots, \sup_{x_n \leqslant z} g^{\xi}(x_n)\Bigr\}\Bigr\} = g^{\xi}(z), \quad z \in \mathcal{R}^1, \quad (4.0.2)$$

Поэтому $g^{\zeta^{(n)}}(z) = g^{\xi}(z)$, $z \in \mathcal{R}^1$, $n = 1, 2, \ldots$

Нетрудно показать, что и для $\zeta_{(n)} = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$

$$g^{\zeta_{(n)}}(z) = g^{\xi}(z),\ z \in \mathcal{R}^1,\ n = 1, 2, \ldots \qquad (4.0.3)$$

Равенства (4.0.2) и (4.0.3) представляют *простейшие предельные теоремы теории возможностей*.

Теорема 4.0.1. *Если нечеткие элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ суть взаимно независимые копии нечеткого элемента ξ, принимающего значения в $\mathcal{R}^1$, то нечеткие элементы $\zeta^{(n)} = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и $\zeta_{(n)} = \min\{\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n\}$ при любом $n = 1, 2, \ldots$ распределены как ξ.*

4.1. Сходимости последовательности нечетких элементов

В этом параграфе $\xi_i(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}^m$, $i = 1, 2, \ldots$, и $\xi(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}^m$ суть нечеткие элементы, определенные на $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}, \mathrm{N})$, со значениями в $\mathcal{R}^m$, возможность P и необходимость N считаются вполне согласованными, $\mathrm{P} <\!\approx\!> \mathrm{N}$, см. § 1.5.1 гл. 1.

4.1.1. Сходимости по необходимости и по возможности.

Определение 4.1.1. Последовательность нечетких элементов $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *сходится* к нечеткому элементу ξ *по необходимости*, $\xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{N}} \xi$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathrm{N}(\{\omega \in \Omega,\ \|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\|_m \leqslant \varepsilon\}) \to 1, \qquad (4.1.1)$$

или, что эквивалентно сходимости[1)] (4.1.1), $\forall\,\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega,\ \|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\|_m > \varepsilon\}) = \sup_{\substack{x,y \in \mathcal{R}^m,\\ \|x-y\|_m > \varepsilon}} g^{\xi,\xi_n}(x,y) \to 0, \tag{4.1.2}$$

где $g^{\xi,\xi_n}(\cdot,\cdot)$ — распределение возможностей значений ξ, ξ_n. Согласно (4.1.2) $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi \iff$ «возможность любого уклонения ξ_n от ξ стремится к нулю при $n \to \infty$».

Нечеткий элемент $\xi(\cdot)\colon \Omega \to \mathcal{R}^m$ назовем *собственным*, если

$$\liminf_{r\to\infty} \mathrm{N}(\{\omega \in \Omega,\ \|\xi(\omega)\|_m \leqslant r\}) = 1, \tag{4.1.3}$$

или, что эквивалентно (4.1.3),

$$\limsup_{r\to\infty} \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega,\ \|\xi(\omega)\|_m > r\}) = 0; \tag{4.1.4}$$

ξ — собственный нечеткий элемент, если, например, $\exists\, r > 0$ $\mathrm{P}(\|\xi(\omega)\|_m > r) = 0$.

Теорема 4.1.1. *Пусть ξ — собственный нечеткий элемент и $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi$. Тогда для любой непрерывной функции $f(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^k$ $f(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} f(\xi)$.*

Доказательство. Покажем, что $\forall\,\varepsilon > 0$, $\forall\,\delta > 0$ $\exists\, n = n(\varepsilon,\delta)$ $\forall\, n \geqslant n(\varepsilon,\delta)$

$$\mathrm{N}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \delta. \tag{4.1.5}$$

Поскольку в любом шаре $O_r \triangleq \{x \in \mathcal{R}^m,\ \|x\|_m \leqslant r\}$ $f(\cdot)$ — равномерно непрерывная функция, то $\forall\,\varepsilon > 0$ $\forall\, x \in O_r$, $\forall\, y \in \mathcal{R}^m$ $\exists\,\gamma = \gamma(\varepsilon, r)$ $\forall\,\gamma \leqslant \gamma(\varepsilon,r)$

$$\|x - y\|_m \leqslant \gamma \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_k \leqslant \varepsilon. \tag{4.1.6}$$

Поэтому для этих ε, r и $\gamma(\varepsilon,r)$ согласно (4.1.6) $\forall\,\gamma \leqslant \gamma(\varepsilon,r)$

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathrm{N}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon,\ \xi \in O_r) \geqslant \\ \geqslant \mathrm{N}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma,\ \xi \in O_r) = \min(\mathrm{N}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma), \mathrm{N}(\xi \in O_r)).\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Зададим произвольно ε и δ в (4.1.5), выберем r так, чтобы согласно (4.1.3) $\mathrm{N}(\xi \in O_r) \geqslant 1 - \delta$ и, наконец, выберем $\gamma(\varepsilon,r)$ в (4.1.6) и $n = n(\gamma(\varepsilon,r),\delta)$ так, чтобы $\forall\, n \geqslant n(\gamma(\varepsilon,r),\delta)$ $\mathrm{N}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma) \geqslant 1 - \delta$, тогда согласно (4.1.7) $\forall\, n \geqslant n(\gamma(\varepsilon,r),\delta)$ и $\mathrm{N}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \delta$. ■

[1)] Так как $\mathrm{P} <\approx> \mathrm{N} \Longrightarrow \exists\,\vartheta(\cdot) \in \Theta$ $\forall\,\varepsilon \geqslant 0$ $\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon) = \theta(\mathrm{N}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon))$, $\mathrm{N}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) = \theta^{-1}(\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon))$.

Определение 4.1.2. Последовательность нечетких элементов $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *сходится* к нечеткому элементу ξ *по возможности*, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega,\ \|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\|_m \leqslant \varepsilon\}) = \sup_{\substack{x,y\in\mathcal{R}^m,\\ \|x-y\|_m \leqslant \varepsilon}} g^{\xi,\xi_n}(x,y) \to 1, \quad (4.1.8)$$

или, что эквивалентно сходимости в (4.1.8),

$$\mathrm{N}(\{\omega \in \Omega,\ \|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\|_m > \varepsilon\}) \to 0. \quad (4.1.9)$$

Замечание 4.1.1. Так как $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{P}(A) < 1 \Rightarrow \mathrm{N}(A) = 0$, $\mathrm{N}(A) > 0 \Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1$, то при $n \to \infty$ $\mathrm{N}(A_n) \to 1 \Rightarrow \mathrm{P}(A_n) \to 1$, $\mathrm{P}(A_n) \to 0 \Rightarrow \mathrm{N}(A_n) \to 0$. Поэтому $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi \Longrightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$.

Теорема 4.1.2. *Пусть ξ — собственный нечеткий элемент и $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$. Тогда для любой непрерывной функции $f(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^k$ $f(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} f(\xi)$.*

Доказательство. Покажем[1]), что $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists n = n(\varepsilon, \delta)$ $\forall n \geqslant n(\varepsilon, \delta)$

$$\mathrm{P}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \delta. \quad (4.1.10)$$

Поскольку, как в теореме 4.1.1, $\forall \varepsilon > 0$ $\forall y \in \mathcal{R}^m$ $\forall x \in O_r$ $\exists \gamma = \gamma(\varepsilon, r)$ $\forall \gamma \leqslant \gamma(\varepsilon, r)$

$$\|x - y\|_m \leqslant \gamma \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_k \leqslant \varepsilon, \quad (4.1.11)$$

то для этих ε и γ согласно (4.1.11)

$$\mathrm{P}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathrm{P}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon,\ \xi \in O_r) \geqslant \\ \geqslant \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma,\ \xi \in O_r). \quad (4.1.12)$$

А так как $\forall \gamma > 0$ и $\forall r > 0$ $\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma) = \max(\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma,$ $\xi \in O_r),\ \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma,\ \xi \in \mathcal{R}^m \setminus O_r)) \leqslant \max(\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma,\ \xi \in O_r),$ $\mathrm{P}(\xi \in \mathcal{R}^m \setminus O_r)) \leqslant \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma,\ \xi \in O_r) + \mathrm{P}(\xi \in \mathcal{R}^m \setminus O_r)$, то

$$\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma,\ \xi \in O_r) \geqslant \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma) - \mathrm{P}(\xi \in \mathcal{R}^m \setminus O_r). \quad (4.1.13)$$

Выберем теперь r и $n(\gamma(\varepsilon, r), \delta)$ так, чтобы в (4.1.13) $\mathrm{P}(\xi \in \mathcal{R}^m \setminus O_r) \leqslant \delta/2$, см. (4.1.4), и для $\forall n \geqslant n(\gamma(\varepsilon, r), \delta)$ $\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \gamma) \geqslant 1 - \delta/2$, тогда согласно (4.1.13) и (4.1.12) $\forall \gamma \leqslant \gamma(\varepsilon, \delta)$ $\forall n \geqslant n(\gamma(\varepsilon, r), \delta)$ $\mathrm{P}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \delta$. ■

В качестве иллюстраций рассмотрим простейшие примеры законов больших чисел.

---

[1]) Далее для краткости зависимость от $\omega \in \Omega$ опускается, $\mathrm{P}(\|f(\xi_n) - f(\xi)\|_k \leqslant \varepsilon) \equiv \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega,\ \|f(\xi_n(\omega)) - f(\xi(\omega))\|_k \leqslant \varepsilon\}), \ldots$

1. *Теория вероятностей.* Пусть ξ — случайная величина, принимающая два значения, 1 и 0, $\Pr(\xi=1)=p>0$, $\Pr(\xi=0)=$ $=q=1-p$, $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — взаимно независимые копии ξ. Тогда, как известно, см. § 3.1.2 гл. 3 и [64], $\forall\varepsilon>0$ $\Pr(|\zeta^{(n)}-p|\geqslant\varepsilon)=$ $=\sum\limits_{k:\,|k/n-p|\geqslant\varepsilon} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, где $\zeta^{(n)}=(\xi_1+\ldots+\xi_n)/n$, $n=1,2,\ldots$, т. е. $\zeta^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{\Pr} p$.

2. *Теория возможностей, первый вариант.* Пусть ξ — нечеткая величина, $\mathrm{P}(\xi=1)=p>0$, $\mathrm{P}(\xi=0)=1$, $\mathrm{P}(\xi\neq1,\xi\neq0)=0$, $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — взаимно независимые копии ξ, $\zeta^{(n)}=\dfrac{1}{n}\bullet(\xi_1 \boldsymbol{+}\ldots\boldsymbol{+}\xi_n)=$ $=\min\left\{\dfrac{1}{n},\max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}\right\}$, $n=1,2,\ldots$ Поскольку нечеткая величина $\max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ распределена как ξ, см. теорему 4.0.1, то $\mathrm{P}(\zeta^{(n)}=$ $=1/n)=p$, $\mathrm{P}(\zeta^{(n)}=0)=1$, $\mathrm{P}(\zeta^{(n)}\neq1/n,\zeta^{(n)}\neq0)=0$ и, следовательно, $\forall\varepsilon>0$ $\mathrm{P}(|\zeta^{(n)}-0|\geqslant\varepsilon)=\mathrm{P}(\zeta^{(n)}\geqslant\varepsilon)=\begin{cases}p, & \text{если } 1/n\geqslant\varepsilon,\\ 0, & \text{если } 1/n<\varepsilon,\end{cases}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т. е.[1] $\zeta^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} 0$.

3. *Теория возможностей, второй вариант*, см. § 1.16 гл. 1. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — взаимно независимые копии нечеткой величины ξ, $\mathrm{P}(\xi=$ $=1)=p>0$, $\mathrm{P}(\xi=0)=1$, $\mathrm{P}(\xi\neq1,\,\xi\neq0)=0$, $\zeta^{(n)}=\dfrac{1}{n}\boldsymbol{\times}(\xi_1\boldsymbol{+}\ldots$ $\ldots\boldsymbol{+}\xi_n)=\dfrac{1}{n}\max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Тогда $\zeta^{(n)}=1/n$, если $\exists\, i\ \xi_i=1$, $\zeta^{(n)}=0$, если $\forall\, i\ \xi_i=0$, поэтому $\mathrm{P}(\zeta^{(n)}=\dfrac{1}{n})=\mathrm{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{\xi_i=1\})=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{P}(\xi_i=1)=$ $=p$, $\mathrm{P}(\zeta^{(n)}=0)=\mathrm{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{\xi_i=0\})=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}(\xi_i=0)=1$. Следовательно, $\forall\varepsilon>0$ $\mathrm{P}(|\zeta^{(n)}-0|\geqslant\varepsilon)=\mathrm{P}(\zeta^{(n)}\geqslant\varepsilon)=\max\{\mathrm{P}(\zeta^{(n)}=1/n\geqslant\varepsilon),$ $\mathrm{P}(\zeta^{(n)}=0\geqslant\varepsilon)\}=\begin{cases}p, & \text{если } 1/n\geqslant\varepsilon,\\ 0, & \text{если } 1/n<\varepsilon,\end{cases}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т. е. $\zeta^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} 0$.

Если же, как в теории вероятностей, $\zeta^{(n)}=(\xi_1+\ldots+\xi_n)/n$, то, как нетрудно убедиться, $\mathrm{P}\big(\zeta^{(n)}=\dfrac{k}{n}\big)=p^k$, $k=1,\ldots,n$, и $\forall\varepsilon>0$ $\mathrm{P}(|\zeta^{(n)}-$ $-1|\geqslant\varepsilon)=\max\big\{p^k\,\big|\,k,\ |\dfrac{k}{n}-1|\geqslant\varepsilon\big\}=\max\big\{p^k\,\big|\,k\in\{k\geqslant(1+\varepsilon)n\}\cup$ $\cup\{k\leqslant(1-\varepsilon)n\}\big\}=p^0=1$, $\mathrm{P}(|\zeta^{(n)}-0|\geqslant\varepsilon)=\max\big\{p^k\,\big|\,k,\ k\geqslant\varepsilon n\big\}=$ $=p^{\varepsilon n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т. е. $\zeta^{(n)}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} 0$; см. § 4.3, 4.4.

4.1.2. Сходимости с необходимостью единица и с возможностью единица.

Определение 4.1.3. Последовательность нечетких элементов $\xi_1,\xi_2,\ldots$ *сходится* к нечеткому элементу ξ *с необходимостью*

[1] Предельные распределения $\zeta^{(n)}=(\xi_1+\ldots+\xi_n)/n$ рассмотрены в § 4.3.

единица, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \pmod{\mathrm{N}}$, если $\forall\,\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(\sup_{s\geqslant n} \|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) = 1. \tag{4.1.14}$$

Так как $\mathrm{N}(\sup_{s\geqslant n} \|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) = \mathrm{N}(\bigcap_{s\geqslant n} \{\|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon\}) = \inf_{s\geqslant n} \mathrm{N}(\|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon)$, то условие (4.1.14) эквивалентно следующему условию [1]: $\forall\,\varepsilon > 0$

$$\mathrm{N}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s\geqslant n} \{\|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon\}) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{N}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) = 1, \tag{4.1.15}$$

что, в свою очередь, эквивалентно условию [2]: $\forall\,\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geqslant n} \{\|\xi_s - \xi\|_m > \varepsilon\}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon) = \\ = \limsup_{n\to\infty} \sup_{\substack{x,y\in\mathcal{R}^m,\\ \|x-y\|_m > \varepsilon}} g^{\xi,\xi_n}(x,y) = 0. \tag{4.1.16}$$

В отличие от сходимости по необходимости (4.1.1), (4.1.2) сходимость с необходимостью единица, согласно (4.1.15), (4.1.16), означает, что $\forall\,\varepsilon > 0$ N(*«выполнены все неравенства* $\|\xi_n - \xi\| \leqslant \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, *исключая, быть может, конечное их число»*) $= 1$, P(*«выполнено бесконечно много неравенств среди* $\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$*»*) $= 0$.

Определение 4.1.4. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *сходится* к нечеткому элементу ξ *с возможностью единица*, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi \pmod{\mathrm{P}}$, если $\forall\,\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\sup_{s\geqslant n} \|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) = 1, \tag{4.1.17}$$

или, что эквивалентно условию (4.1.17), $\forall\,\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(\sup_{s\geqslant n} \|\xi_s - \xi\|_m > \varepsilon) = 0. \tag{4.1.18}$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\sup_{s\geqslant n} \|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) = \mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s\geqslant n} \{\|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon\})$, то, согласно (4.1.17), сходимость $(\mathrm{mod}\,\mathrm{P})$ означает, что $\forall\,\varepsilon > 0$ P(*«выполнены все неравенства* $\|\xi_n - \xi\| \leqslant \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, *исключая, быть может, конечное их число»*) $= 1$, а поскольку $\mathrm{N}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\geqslant n} \{\|\xi_s - \xi\|_m > \varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{N}(\sup_{s\geqslant n} \|\xi_s - \xi\| > \varepsilon)$, то, согласно (4.1.18), при

---

[1] Так как $\mathrm{N}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s\geqslant n} A_s) \geqslant \sup_n \mathrm{N}(\bigcap_{s\geqslant n} A_s) = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{N}(A_n)$.

[2] Так как $\mathrm{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s\geqslant n} A_k) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

$\mathrm{P} <\!\approx\!> \mathrm{N}$ сходимость $(\operatorname{mod}\mathrm{P})$ означает, что $\forall\varepsilon > 0$ N(*«выполнено бесконечно много неравенств среди* $\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$»$) = 0$.

Замечание 4.1.2. Так как $\sup\limits_{s\geqslant n}\|\xi_s - \xi\|_m \leqslant \varepsilon \Rightarrow \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi\ (\operatorname{mod}\mathrm{N}) \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi$ и $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi\ (\operatorname{mod}\mathrm{P}) \Rightarrow \Rightarrow \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \xi$.

4.1.3. Сходимость по распределению.

Определение 4.1.5. Последовательность нечетких элементов $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ сходится к нечеткому элементу ξ по распределению, $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$, если [1] в каждой точке $x \in \mathcal{R}^m$

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z) = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi}(x+z) \doteq g^{\xi}(x),$$

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\inf_{\|z\|_m\leqslant\delta} h^{\xi_n}(x+z) = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\inf_{\|z\|_m\leqslant\delta} h^{\xi_n}(x+z) = \lim_{\delta\to 0}\inf_{\|z\|_m\leqslant\delta} h^{\xi}(x+z) \doteq h^{\xi}(x) \quad (4.1.19)$$

где равенства $\doteq$ выполнены в точках $x \in \mathcal{R}^m$, в которых функция $g^{\xi}(\cdot)$ полунепрерывна сверху [2], а $h^{\xi}(\cdot)$ — полунепрерывна снизу [3].

Теорема 4.1.3. 1. *Если* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi$, *то* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$.

2. *Если* $g^{\xi_n}(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{} g^{\xi}(\cdot)$ *локально равномерно на* $\mathcal{R}^m$, *т. е. если* $\forall x \in \mathcal{R}^m$ $\exists\delta(x) > 0$ $\forall\delta \leqslant \delta(x)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta}\left|g^{\xi_n}(x+z) - g^{\xi}(x+z)\right| = 0$, *то* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$.

Доказательство. 1. Для любого $x \in \mathcal{R}^m$, любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta) = \max\bigl\{&\mathrm{P}(\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta,\ \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon),\\ &\mathrm{P}(\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta,\ \|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon)\bigr\} \leqslant\\ &\leqslant \mathrm{P}(\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta, \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon) \leqslant\\ &\leqslant \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta + \varepsilon) + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon), \quad (4.1.20)\end{aligned}$$

---

[1] $g^{\xi}(x) = \mathrm{P}(\xi = x)$, $h^{\xi}(x) = \mathrm{N}(\xi \neq x)$, $x \in \mathcal{R}^m$, в данном случае $\mathrm{P}<\!\approx\!>\mathrm{N} \Rightarrow \Rightarrow \exists\vartheta(\cdot) \in \Theta$ $h^{\xi}(x) = \theta \circ g^{\xi}(x)$, $x \in X$.

[2] Функция $f(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$ полунепрерывна сверху в точке $x \in \mathcal{R}^m$, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\delta \leqslant \delta(\varepsilon)$ $\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} f(x+z) \leqslant f(x) + \varepsilon$ $(\Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} f(x+z) = f(x))$.

[3] В данном случае в силу $\mathrm{P} <\!\approx\!> \mathrm{N}$ достаточны лишь первое условие в (4.1.19) и полунепрерывность сверху $g^{\xi}(\cdot)$.

так как событие $\{\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta,\ \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon\}$ влечет событие $\{\|\xi - x\|_m \leqslant \delta + \varepsilon\}$. С другой стороны, при $\delta > \varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta) \geqslant \mathrm{P}(\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta,\ \|\xi_n - \xi\| \leqslant \varepsilon) \geqslant \\ \geqslant \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon,\ \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon) - \\ - \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

так как событие $\{\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon,\ \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon\}$ влечет событие $\{\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta,\ \|\xi - \xi_n\|_m \leqslant \varepsilon\}$ и

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon) = \max\{\mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \\ \leqslant \delta - \varepsilon, \|\xi - \xi_n\|_m \leqslant \varepsilon), \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon, \|\xi - \xi_n\|_m > \varepsilon)\} \leqslant \\ \leqslant \max\{\mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon, \|\xi - \xi_n\|_m \leqslant \varepsilon), \mathrm{P}(\|\xi - \xi_n\|_m > \varepsilon)\} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon, \|\xi - \xi_n\|_m \leqslant \varepsilon) + \mathrm{P}(\|\xi - \xi_n\|_m > \varepsilon). \end{aligned}$$

Согласно неравенствам в (4.1.20) и (4.1.21)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta - \varepsilon) - \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon) \leqslant \mathrm{P}(\|\xi_n - x\|_m \leqslant \delta) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{P}(\|\xi - x\|_m \leqslant \delta + \varepsilon) + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

или, что то же самое, — в терминах распределений:

$$\begin{aligned} \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta - \varepsilon} g^{\xi}(x+z) - \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon) \leqslant \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi_n}(x+z) \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta + \varepsilon} g^{\xi}(x+z) + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon). \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

Если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi$, то, перейдя в (4.1.23) к пределу при $n \to \infty$, согласно (4.1.2), получим [1])

$$\begin{aligned} \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta - \varepsilon} g^{\xi}(x+z) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi_n}(x+z) \leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi_n}(x+z) \leqslant \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta + \varepsilon} g^{\xi}(x+z),\ x \in \mathcal{R}^m. \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Поскольку $\sup\limits_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi}(x+z)$ при каждом $x \in \mathcal{R}^m$ монотонно не убывает по $\delta > 0$, то, устремив в (4.1.24) $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ так, чтобы $0 < \delta - \varepsilon \to 0$, получим

[1]) Если шар $\{y \in \mathcal{R}^m,\ \|y - x\|_m \leqslant \delta\}$, $\delta > 0$, P, ξ-непрерывен, см. замечание 4.1.4, то, устремив в (4.1.24) $\varepsilon \to 0$, найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi_n}(x+z) = \sup\limits_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi}(x+z)$; в данном случае достаточно непрерывности $g^{\xi}(\cdot)$ на сфере $\{y \in \mathcal{R}^m,\ \|y - x\|_m = \delta\}$.

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi}(x+z)=\lim_{\delta-\varepsilon\to 0}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta-\varepsilon} g^{\xi}(x+z)=\lim_{\delta+\varepsilon\to 0}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta+\varepsilon} g^{\xi}(x+z)=$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)=\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z),\quad(4.1.25)$$

а если при этом $g^{\xi}(\cdot)$ п. н. св. в точке $x\in\mathcal{R}^m$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)=\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)=g^{\xi}(x).\quad(4.1.26)$$

Согласно (4.1.25) $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$.

2. Так как $0=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta}(g^{\xi_n}(x+z)-g^{\xi}(x+z))\geqslant \geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)-\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi}(x+z)$ и $0=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta}(g^{\xi}(x+ + z)-g^{\xi_n}(x+z))\geqslant\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi}(x+z)-\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)=\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi}(x+z)$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)= =\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi}(x+z)$, а если $g^{\xi}(\cdot)$ п. н. св. в точке $x\in\mathcal{R}^m$, то, согласно последнему равенству, $\lim\limits_{\delta\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)=g^{\xi}(x)$, т. е. по определению (4.1.19) $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$. ■

В качестве примера заметим, что, согласно теоремам 4.0.1 и 4.1.3, $\zeta^{(n)}=\mathop{\boldsymbol{+}}\limits_{j=1}^{n}\xi_j \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$ и $\zeta_{(n)}=\mathop{\bullet}\limits_{j=1}^{n}\xi_j \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$.

Замечание 4.1.3. Сходимость[1] $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi=c=\mathrm{const}\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{N})$ эквивалентна условию

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(x+z)=g^{\xi}(x)=\left\{\begin{array}{l}1,\text{ если } x=c,\\ 0,\text{ если } x\neq c,\ x,c\in\mathcal{R}^m\end{array}\right\},\quad(4.1.27)$$

согласно которому $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$. Действительно, сходимость $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi=c\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{N})$ означает, что $\forall\,\delta>0$ при $n\to\infty$

$$\mathrm{P}(\|\xi_n-\xi\|_m>\delta)=\sup_{x\in\mathcal{R}^m}\mathrm{P}(\xi=x,\ \|\xi_n-x\|_m>\delta)=$$
$$=\mathrm{P}(\|\xi_n-c\|_m>\delta)=\sup_{\|z\|_m\leqslant\delta} g^{\xi_n}(c+z)\to 0,\quad(4.1.28)$$

[1] Сходимость к $\mathrm{const}=c$. Равенство $\xi=c\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{N})$ означает, что $\mathrm{N}(\xi= =x)=\mathrm{P}(\xi=x)=g^{\xi}(x)=\left\{\begin{array}{l}1,\ x=c,\\ 0,\ x\neq c\end{array}\right\}$.

т. е. что возможность любого уклонения ξ_n от c стремится к нулю при $n \to \infty$, и, как следствие, $\forall\, x \neq c\ \ \forall\, \delta < \|x - c\|$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi_n}(x+z) = 0, \tag{4.1.29}$$

кроме того, согласно (4.1.8) и замечанию 4.1.1 $\forall\, \delta > 0$

$$\mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \delta) = \sup_{\|z\|_m \leqslant \delta} g^{\xi_n}(c+z) \to 1. \tag{4.1.30}$$

Условия (4.1.30), (4.1.29) эквивалентны равенствам в (4.1.27), где функции $g^{\xi}(\cdot)$ п. н. св. всюду в $\mathcal{R}^m$.

Замечание 4.1.4. Аналогично тому, как были получены оценки (4.1.20) и (4.1.21), нетрудно показать, что $\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^m)\ \ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \forall\, n = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{P}(\xi_n \in A) \geqslant \mathrm{P}(\xi_n \in A,\ \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^-) - \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon), \tag{4.1.31}$$

где $A_\varepsilon^- = A \setminus (\partial A)_\varepsilon^+$, $(\partial A)_\varepsilon^+ = \bigcup\limits_{y \in \partial A} \{x \in \mathcal{R}^m,\ \|x - y\|_m \leqslant \varepsilon\}$, $\partial A = (\mathrm{cl}\, A) \cap (\mathrm{cl}(\mathcal{R}^m \setminus A))$ — граница A, и

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi_n \in A) \leqslant \max\{\mathrm{P}(\xi_n \in A, \|\xi_n - \xi\|_m \leqslant \varepsilon),\ \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon)\} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^+) + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon),\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

где $A_\varepsilon^+ = A \cup (\partial A)_\varepsilon^+$.

Следствием (4.1.31), (4.1.32) является оценка

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^-) - \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon) \leqslant \mathrm{P}(\xi_n \in A) \leqslant \mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^+) + \\ + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\|_m > \varepsilon).\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

Устремив в (4.1.31) $n \to \infty$, получим: $\forall\, \varepsilon > 0$ $\mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^-) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi_n \in A) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(\xi_n \in A) \leqslant \mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^+)$ и, если A P, ξ*-непрерывное множество*, т. е. если [1] $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^-) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^+) = \mathrm{P}(\xi \in A)$, *то сходимость* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi$ *влечет сходимость* $\mathrm{P}(\xi_n \in A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}(\xi \in A)$ для каждого P, ξ*-непрерывного множества* $A \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^m)$.

Замечание 4.1.5. В частном случае $A = A_x \triangleq \{y \in \mathcal{R}^m,\ y \leqslant x\}$, где $y \leqslant x$ означает, что выполнены неравенства $y_{(i)} \leqslant x_{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, для координат векторов $x, y \in \mathcal{R}^m$, найдем

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\xi_n \leqslant x) = \max\big\{\mathrm{P}(\xi_n \leqslant x,\ \|\xi_n - \xi\| \leqslant \varepsilon),\ \mathrm{P}(\xi_n \leqslant x, \\ \|\xi_n - \xi\| > \varepsilon)\big\} \leqslant \mathrm{P}(\xi_n \leqslant x, \|\xi_n - \xi\| \leqslant \varepsilon) + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\| > \varepsilon) \leqslant \\ \leqslant \mathrm{P}(\xi \leqslant x + \varepsilon) + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\| > \varepsilon),\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

[1] Пределы существуют в силу монотонности $\mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^-)$ и $\mathrm{P}(\xi \in A_\varepsilon^+)$ по $\varepsilon > 0$.

где $\|x-y\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |x_{(i)} - y_{(i)}|$, $x, y \in \mathcal{R}^m$, и неравенство $\xi \leqslant x+\varepsilon$ означает, что $\xi_{(i)} \leqslant x_{(i)} + \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$. Аналогично

$$\mathrm{P}(\xi_n \leqslant x) \geqslant \mathrm{P}(\xi_n \leqslant x,\ \|\xi_n - \xi\| \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathrm{P}(\xi \leqslant x-\varepsilon) - \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\| > \varepsilon). \tag{4.1.35}$$

Согласно оценкам в (4.1.34), (4.1.35)

$$\sup_{z\leqslant x+\varepsilon} g^{\xi}(z) - \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\| > \varepsilon) \leqslant \sup_{z\leqslant x} g^{\xi_n}(z) \leqslant \sup_{z\leqslant x+\varepsilon} g^{\xi}(z) + \\ + \mathrm{P}(\|\xi_n - \xi\| > \varepsilon), \tag{4.1.36}$$

и если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{N}} \xi$, то, устремив в (4.1.36) $n \to \infty$, получим

$$\sup_{z\leqslant x-\varepsilon} g^{\xi}(z) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sup_{z\leqslant x} g^{\xi_n}(z) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sup_{z\leqslant x} g^{\xi_n}(z) \leqslant \sup_{z\leqslant x+\varepsilon} g^{\xi}(z). \tag{4.1.37}$$

Следовательно, если *«функция распределения»* $F^{\xi}(x) = \sup\limits_{z\leqslant x} g^{\xi}(z)$, $x \in \mathcal{R}^m$, *непрерывна* в точке $x_0 \in \mathcal{R}^m$, то, устремив в (4.1.37) $\varepsilon \to 0$, найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\leqslant x_0} g^{\xi_n}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} F^{\xi_n}(x_0) = F^{\xi}(x_0)$.

4.2. Класс пределов последовательностей индикаторных функций нечетких множеств $\mathrm{co}\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность взаимно независимых копий нечеткого элемента $\xi = q(\eta)$, $q(\cdot)\colon Y \to \mathcal{R}^m$, определенного на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}, \mathrm{N}^{\eta})$,

$$g^{\tilde{\xi}}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(\xi = x), \quad h^{\xi}(x) = \mathrm{N}^{\eta}(\xi \neq x), \quad x \in \mathcal{R}^m, \tag{4.2.1}$$

— его распределения,

$$A_k^{\eta} = \mathrm{co}\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.2.2}$$

— индуцированная последовательность нечетких множеств $A_k^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(\mathcal{R}^m)$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\} \triangleq \{\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_k x_k \mid \lambda_0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda_0 + \ldots + \lambda_k = 1\}$ — выпуклая оболочка множества $\{x_0, \ldots, x_k\}$ точек $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m$. Так как $\forall\, y \in Y$

$$A_0^y \subset A_1^y \subset A_2^y \subset \ldots, \tag{4.2.3}$$

то последовательность нечетких множеств (4.2.2) сходится и нечеткое множество

$$A^{\eta} = \lim_{k\to\infty} A_k^{\eta} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^{\eta} \tag{4.2.4}$$

— ее предел.

Поэтому для любого $A \in \mathcal{P}(\mathcal{R}^m)$ согласно (4.2.3), (4.2.4)

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{P}^\eta(A_k^\eta \cap A \neq \varnothing) = \sup_k \mathrm{P}^\eta(A_k^\eta \cap A \neq \varnothing) = \mathrm{P}^\eta\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{A_k^\eta \cap A \neq \varnothing\}\right) = \\ = \mathrm{P}^\eta\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{A_k^\eta \cap A\} \neq \varnothing\right) = \mathrm{P}^\eta(A^\eta \cap A \neq \varnothing), \quad (4.2.5)$$

причем $\mathrm{P}^\eta(A_k^\eta \cap A \neq \varnothing) = \mathrm{P}^\eta\left(A_k^\eta \cap \{\bigcup_{x\in A}\{x\} \neq \varnothing\}\right) = \mathrm{P}^\eta\left(\bigcup_{x\in A}\{(A_k^\eta \cap \cap\{x\}) \neq \varnothing\}\right) = \mathrm{P}^\eta\left(\bigcup_{x\in A}\{A^\eta \cap \{x\} \neq \varnothing\}\right) = \mathrm{P}^\eta\left(\bigcup_{x\in A}\{x \in A_k^\eta\}\right) = \sup_{x\in A} g^{A_k^\eta}(x)$, где согласно (4.2.1) в силу взаимной независимости $\xi_0, \xi_1, \ldots$

$$g^{A_k^\eta}(x) = \mathrm{P}^\eta(x \in A_k^\eta) = \sup\Big\{\min\big\{g^{\tilde\xi}(x_0), \ldots, g^{\tilde\xi}(x_k)\big\} \;\Big|\; \\ x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m,\ x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}\Big\},\ x \in \mathcal{R}^m,\ k = 0, 1, \ldots, \quad (4.2.6)$$

суть возможности покрытий $x \in A_k^\eta$, $k = 0, 1, \ldots,$ — значения индикаторных функций одноточечного покрытия нечетких множеств (4.2.2), и

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{N}^\eta(A_k^\eta \cap A = \varnothing) = \inf_k \mathrm{N}^\eta(A_k^\eta \cap A = \varnothing) = \mathrm{N}^\eta\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\{A_k^\eta \cap A = \varnothing\}\right) = \\ = \mathrm{N}^\eta\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{A_k^\eta \cap A\} = \varnothing\right) = \mathrm{N}^\eta(A^\eta \cap A = \varnothing), \quad (4.2.7)$$

причем $\mathrm{N}^\eta(A_k^\eta \cap A = \varnothing) = \mathrm{N}^\eta\left(\bigcup_{x\in A}\{A_k^\eta \cap \{x\}\} = \varnothing\right) = \mathrm{N}^\eta\left(\bigcap_{x\in A}\{(A_k^\eta \cap \cap \{x\}) = \varnothing\}\right) = \mathrm{N}^\eta\left(\bigcap_{x\in A}\{x \notin A_k^\eta\}\right) = \inf_{x\in A} h^{A_k^\eta}(x)$, где в силу (4.2.1) и взаимной независимости $\xi_0, \xi_1, \ldots$

$$h^{A_k^\eta}(x) = \mathrm{N}^\eta(x \in \mathcal{R}^m \backslash A_k^\eta) = \inf\Big\{\max\big\{h^{\xi}(x_0), \ldots, h^{\xi}(x_k)\big\} \;\Big|\; \\ x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m,\ x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}\Big\},\ x \in \mathcal{R}^m,\ k = 0, 1, \ldots, \quad (4.2.8)$$

суть необходимости непокрытий $x \notin A_k^\eta$, $k = 0, 1, \ldots,$ — значения индикаторных функций одноточечного непокрытия нечетких множеств (4.2.2).

Поскольку согласно (4.2.3) $g^{A_0^\eta}(\cdot) \leqslant g^{A_1^\eta}(\cdot) \leqslant \ldots$ и $h^{A_0^\eta}(\cdot) \geqslant h^{A_1^\eta}(\cdot) \geqslant \geqslant \ldots$, то существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} g^{A_k^\eta}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{P}^\eta(x \in A_k^\eta) = \sup_k \mathrm{P}^\eta(x \in A_k^\eta) = \\ = \mathrm{P}^\eta\left(x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^\eta\right) = \mathrm{P}^\eta(x \in A^\eta) = g^{A^\eta}(x),\ x \in \mathcal{R}^m, \quad (4.2.9)$$

$$\lim_{k\to\infty} h^{A_k^\eta}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{N}^\eta(x \notin A_k^\eta) = \inf_k \mathrm{N}^\eta(x \notin A_k^\eta) =$$
$$= \mathrm{N}^\eta\Bigg(\bigcap_{k=0}^{\infty}(x \notin A_k^\eta)\Bigg) = \mathrm{N}^\eta(x \notin A^\eta) = h^{A^\eta}(x),\ x \in \mathcal{R}^m. \quad (4.2.10)$$

Рассмотрим детальнее сходимости в (4.2.9), (4.2.10) и охарактеризуем классы функций $g^{A^\eta}(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$ и $h^{A^\eta}(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$.

Заметим, однако, что на самом деле достаточно рассмотреть свойства сходимости (4.2.9), поскольку в силу Р $<\approx>$ N выражения в (4.2.8), (4.2.10) могут быть получены из (4.2.6), (4.2.9) путем формальной замены символа g на $\theta \circ h$, где $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ непрерывная строго монотонно убывающая функция, удовлетворяющая условиям $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, а, следовательно, свойства сходимости (4.2.8), (4.2.10) могут быть получены путем такой замены из свойств сходимости (4.2.6), (4.2.9). Поэтому далее детально рассмотрим лишь свойства сходимости (4.2.6), (4.2.9). Для этого нам потребуются дополнительные математические конструкции.

4.2.1. Класс $\Phi(\mathcal{D})$ квазивогнутых функций. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое множество в $\mathcal{R}^m$. Обозначим $\Phi(\mathcal{D})$ *класс квазивогнутых функций* $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{D} \to [0,\,1]$, то есть таких, что для любых [1] $x_0,\, x_1 \in \mathcal{D}$ и $x \in \mathrm{co}\{x_0,\, x_1\}$

$$\varphi(x) \geqslant \min\{\varphi(x_0),\, \varphi(x_1)\}. \quad (4.2.11)$$

Класс $\Phi(\mathcal{D})$ удобно охарактеризовать, выделив его из класса $\Psi(\mathcal{D})$ всех функций $\psi(\cdot)\colon \mathcal{D} \to [0,\,1]$. С этой целью определим оператор [2] $\mathrm{T}_k\colon \Psi(\mathcal{D}) \to \Psi(\mathcal{D})$

$$(\mathrm{T}_k\psi)(x) = \sup\big\{\min\{\psi(x_0),\dots,\psi(x_k)\} \mid x_i \in \mathcal{D},\ i = 0,\dots,k,$$
$$x \in \mathrm{co}\{x_0,\dots,x_k\}\big\},\ x \in \mathcal{D},\ k = 0,1,\dots \quad (4.2.12)$$

Класс $\Phi(\mathcal{D})$ и операторы T_k, $k = 1,\,2,\,\dots$, очевидно, инвариантны относительно преобразований $\gamma\circ \in \Gamma\circ$ (см. § 1.15 гл. 1), а именно, $\forall\,\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})\ \ \forall\,\psi(\cdot) \in \Psi(\mathcal{D})\ \ \forall\,\gamma \in \Gamma\ \ \gamma \circ \varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$ и $(\mathrm{T}_k\gamma \circ \psi)(\cdot) = \gamma \circ (\mathrm{T}_k\psi)(\cdot)$, $k = 1,2,\dots$

Лемма 4.2.1. *Для того, чтобы $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, достаточно, чтобы хотя бы для одного $k = 1,\,2,\,\dots$ и необходимо, чтобы для любого $k = 1,\,2,\,\dots$ выполнялось одно из следующих (эквивалентных) условий:*

---

[1] Для рассмотрения свойств (4.2.8), (4.2.10) следует ввести *класс* $\widetilde{\Phi}(\mathcal{D})$ *квазивыпуклых функций* $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{D} \to [0,1]$ (заменив в (4.2.11) $\varphi(\cdot)$ на $\widetilde{\varphi}(\cdot) = \theta \circ \varphi(\cdot)$), удовлетворяющих условию $\widetilde{\varphi}(x) \leqslant \max\{\widetilde{\varphi}(x_0), \widetilde{\varphi}(x_1)\}$ при любых $x_0, x_1 \in \mathcal{D}$ и $x \in \mathrm{co}\{x_0, x_1\}$.

[2] Для анализа сходимости в (4.2.10) $\left(\widetilde{\mathrm{T}}_k\widetilde{\psi}\right)(x) = \inf\Big\{\max\Big\{\widetilde{\psi}(x_0),\dots$ $\dots,\widetilde{\psi}(x_k)\Big\}\Big|\, x_i \in \mathcal{D},\ i = 0,\dots,k,\ x \in \mathrm{co}\{x_0,\dots,x_k\}\Big\}$, $x \in \mathcal{D}$, $k = 0,1,\dots$

1. *для любых* $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{D}$ *и любого* $x \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_k\}$
$$\varphi(x) \geqslant \min\{\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_k)\}; \tag{4.2.13}$$
2.
$$(\mathrm{T}_k\varphi)(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathcal{D}. \tag{4.2.14}$$

Доказательство. 1. Достаточность условия (4.2.13) очевидна. Необходимость проверим по индукции. Пусть выполнено (4.2.11) и для некоторого $k > 1$ выполнено (4.2.13), тогда для любых $x_0, \ldots, x_{k+1} \in \mathcal{D}$, $z \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_k\}$ и $x \in \operatorname{co}\{z, x_{k+1}\}$
$$\min\{\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_k), \varphi(x_{k+1})\} \leqslant \min\{\varphi(z), \varphi(x_{k+1})\} \leqslant \varphi(x). \tag{4.2.15}$$
Поскольку в (4.2.15) $z \in \operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_k\}$ принимает любое значение $\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_k x_k$ при $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_0 + \ldots + \lambda_k = 1$, а x принимает любое значение $\mu_0 z + \mu_1 x_{k+1}$, $\mu_0, \mu_1 \geqslant 0$, $\mu_0 + \mu_1 = 1$, то $x = \mu_0(\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_k x_k) + \mu_1 x_{k+1} = \theta_0 x_0 + \ldots + \theta_{k+1} x_{k+1}$, где $\theta_0 = \mu_0 \lambda_0 \geqslant 0, \ldots, \theta_k = \mu_0 \lambda_k \geqslant 0$, $\theta_{k+1} = \mu_1 \geqslant 0$, $\theta_0 + \ldots + \theta_{k+1} = 1$, т. е. в (4.2.15) x — любой элемент из $\operatorname{co}\{x_0, \ldots, x_{k+1}\}$.

2. Пусть $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, тогда выполнено условие (4.2.13) и согласно (4.2.12)
$$(T_k\varphi)(x) \leqslant \varphi(x), \quad x \in \mathcal{D}.$$
С другой стороны, выбрав в (4.2.13) $x_0 = \ldots = x_k = x$, получим равенство. Наоборот, если верно (4.2.14), то согласно (4.2.12) отсюда следует (4.2.12). Эти же рассуждения доказывают эквивалентность условий (4.2.13) и (4.2.14). ■

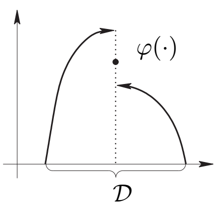


Рис. 4.2.1. Пример невогнутой, но квазивогнутой функции $\varphi(\cdot)$

Заметим, что любая функция $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{D} \to [0,1]$, *вогнутая на* $\mathcal{D}$, *то есть* такая, что
$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2),\ x_1, x_2 \in \mathcal{D},$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$
является квазивогнутой, $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, ибо $\lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) \geqslant \min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}$, см. рис. 4.2.1.

Если $\overline{\varphi}(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$ — продолжение $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{D} \to [0,1]$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^m$, на $\mathcal{R}^m$, определенное условием
$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathcal{D}, \\ 0, & x \in \mathcal{R}^m \backslash \mathcal{D}, \end{cases}$$
то включения $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$ и $\overline{\varphi}(\cdot) \in \Phi(\mathcal{R}^m)$ эквивалентны: $\varphi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$, если и только если $\overline{\varphi}(\cdot) \in \Phi(\mathcal{R}^m)$. Действительно, если $x_0, x_1 \in \mathcal{D}$, то $\overline{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0)$, $\overline{\varphi}(x_1) = \varphi(x_1)$ и $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in \operatorname{co}\{x_0, x_1\} \subset \mathcal{D}$. Если же хотя бы одна точка, скажем $x_0 \notin \mathcal{D}$, то $\overline{\varphi}(x) \geqslant \min\{\overline{\varphi}(x_0), \overline{\varphi}(x_1)\} = 0$, $x \in \operatorname{co}\{x_0, x_1\}$. Для вогнутой $\varphi(\cdot)\colon \mathcal{D} \to [0,1]$ функция $\overline{\varphi}(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$, вообще говоря, лишь квазивогнутая.

Если $\widehat{\psi}(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{D}} \to [0,1]$ — сужение $\psi(\cdot)\colon \mathcal{D} \to [0,1]$, $\widehat{\mathcal{D}}$ — выпуклое подмножество $\mathcal{D}$, $\widehat{\psi}(x) = \psi(x)$, $x \in \widehat{\mathcal{D}}$, то, очевидно, включение $\psi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{D})$ влечет включение $\widehat{\psi}(\cdot) \in \Phi(\widehat{\mathcal{D}})$.

Далее $\mathcal{D}$ всюду отождествляется с $\mathcal{R}^m$.

4.2.2. Свойства семейства операторов T_k, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим семейство операторов $\mathrm{T}_k\colon \Psi(\mathcal{R}^m) \to \Psi(\mathcal{R}^m)$, $k = 1, 2, \ldots$, (4.2.12). Пусть $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathcal{R}^m)$, определим семейство множеств

$$\mathcal{E}_t = \psi^{-1}(t) = \{x \in \mathcal{R}^m, \psi(x) = t\}, \quad t \in [0,1]. \tag{4.2.16}$$

Лемма 4.2.2. *Для любой функции $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathcal{R}^m)$ и любого $x \in \mathcal{R}^m$:*

1. $(\mathrm{T}_1\psi)(x) \leqslant (\mathrm{T}_2\psi)(x) \leqslant \ldots \leqslant (\mathrm{T}_m\psi)(x) = (\mathrm{T}_{m+1}\psi)(x) = \ldots;$
2. $(\mathrm{T}_k\psi)(x) = \sup\{t \,|\, t \in [0,1],\, \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t \ni x\}$, $x \in \mathcal{R}^m$, $k = m, m+1, \ldots$

Доказательство. 1. Согласно представлению (4.2.12)

$$(\mathrm{T}_k\psi)(x) = \sup\big\{\min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \,|\, x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m,$$
$$x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}\big\} \geqslant \sup\big\{\min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \,|\, x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m,$$
$$x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\},\, x_{k-1} = x_k\big\} = (T_{k-1}\psi)(x), \;\; x \in \mathcal{R}^m, \;\; k = 2, 3, \ldots$$

2. Так как согласно (4.2.16) $\mathcal{R}^m = \bigcup\limits_{t\in[0,1]} \mathcal{E}_t = \bigcup\limits_{t\in[0,1]} \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t$, то выражению (4.2.12) при $k = m, m+1, \ldots$ можно придать следующий вид:

$$(\mathrm{T}_k\psi)(x) = \sup_{t\in[0,1]} \sup\big\{\min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \,|\, x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t,$$
$$x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}\big\} = \sup_{t\in[0,1]} \sup\big\{\min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \,|\, x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t,$$
$$x \in \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t\big\}, \quad x \in \mathcal{R}^m. \tag{4.2.17}$$

В представлении (4.2.17) использован тот факт, что при любом $k = m, m+1, \ldots$ для любых $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t$ включение $x \in \mathrm{co}\{x_0, \ldots, x_k\}$ $\Longrightarrow x \in \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t$, и наоборот, любой элемент $x \in \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t$ может быть представлен в виде выпуклой комбинации не более чем $m+1$ элементов из $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t$. Следовательно, для тех $t \in [0,1]$, для которых $x \in \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t$,

$$\psi_k(x,t) = \sup\{\min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \mid x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{E}_t,\; x \in \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t\} = t,$$

если же $x \notin \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t$, то $\psi_k(x,t) = 0$ как точная верхняя грань пустого множества. Поэтому для любого $k = m, m+1, \ldots$ и $x \in \mathcal{R}^m$

$$(\mathrm{T}_k\psi)(x) = \sup\{\psi_k(x,t) \,|\, t \in [0,1]\} = \sup\{t \,|\, x \in \mathrm{co}\,\mathcal{E}_t\} = (\mathrm{T}_m\psi)(x). \quad \blacksquare$$

Теорема 4.2.1. *Для любой функции $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathcal{R}^m)$ функция $(\mathrm{T}_k\psi)(\cdot) \in \Phi(\mathcal{R}^m)$ при $k = m, m+1, \ldots$*

Доказательство. Выберем произвольно $z_0, z_1 \in \mathcal{R}^m$ и $x \in \mathrm{co}\{z_0, z_1\}$, так что при некоторых $\mu_0, \mu_1 \geqslant 0$, $\mu_0 + \mu_1 = 1$ $x = \mu_0 z_0 + \mu_1 z_1$. Согласно формуле (4.2.12) для любых $k = 1, 2, \ldots$ и $x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m$, таких, что при некоторых $\lambda_0, \dots, \lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$, $x = \mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k$, получим соотношения:

$$(\mathrm{T}_k\psi)(x) = (\mathrm{T}_k\psi)(\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1) \geqslant \min\{\psi(x_0), \dots, \psi(x_k)\}. \qquad (4.2.18)$$

Положим в (4.2.18)

$$\mu_0 z_0 = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_s x_s, \quad \mu_0 = \lambda_0 + \dots + \lambda_s,$$
$$\mu_1 z_1 = \lambda_{s+1} x_{s+1} + \dots + \lambda_k x_k, \quad \mu_1 = \lambda_{s+1} + \dots + \lambda_k, \quad 1 \leqslant s < k,$$

так что

$$z_0 \in \mathrm{co}\{x_0, \dots, x_s\}, \quad z_1 \in \mathrm{co}\{x_{s+1}, \dots, x_k\}.$$

Из (4.2.18) следует, что при любом $s \in \{1, \dots, k-1\}$

$$(\mathrm{T}_k\psi)(\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1) \geqslant \min\Big[\sup\big\{\min\{\psi(x_0), \dots, \psi(x_s)\} \,\big|\, x_0, \dots, x_s \in \mathcal{R}^m, z_0 \in co\{x_0, \dots, x_s\}\big\}, \sup\big\{\min\{\psi(x_{s+1}), \dots, \psi(x_k)\} \,\big|\, x_{s+1}, \dots, x_k \in \mathcal{R}^m, z_1 \in co\{x_{s+1}, \dots, x_k\}\big\}\Big] = \min\{(\mathrm{T}_s\psi)(z_0), (\mathrm{T}_{k-s-1}\psi)(z_1)\}, \; z_0, z_1 \in \mathcal{R}^m. \qquad (4.2.19)$$

Выберем в (4.2.19) $k \geqslant 2m+1$, $s \geqslant m$, $k - s \geqslant m+1$, тогда $(\mathrm{T}_k\psi)(\cdot) = (\mathrm{T}_s\psi)(\cdot) = (\mathrm{T}_{k-s-1}\psi)(\cdot) = (\mathrm{T}_m\psi)(\cdot)$, как это следует из леммы 4.2.2. Поэтому для любых $z_0, z_1 \in \mathcal{R}^m$ $(\mathrm{T}_m\psi)(z) \geqslant \min((\mathrm{T}_m\psi)(z_0), (T_m\psi)(z_1))$, если $z \in \mathrm{co}\{z_0, z_1\}$. ■

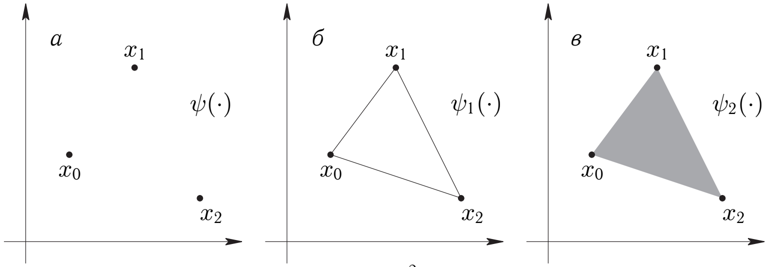


Рис. 4.2.2. Множества точек $x \in \mathcal{R}^2$, в которых: *а*) $\psi(x) = 1$; *б*) $\psi_1(x) = (\mathrm{T}_1\psi)(x) = 1$; *в*) $\psi_2(x) = (\mathrm{T}_2\psi)(x) = 1$

Пример 4.2.1. Пусть $\psi(\cdot)\colon \mathcal{R}^2 \to \{0,1\}$ ($\widetilde{\psi}(\cdot)\colon \mathcal{R}^2 \to \{0,1\}$), $\psi(x) = 1$ ($\widetilde{\psi}(x) = 0$) при $x = x_0, x_1$ и $x_2 \in \mathcal{R}^2$ и $\psi(x) = 0$ ($\widetilde{\psi}(x) = 1$) в остальных точках $\mathcal{R}^2$ (см. рис. 4.2.2, *а*). Тогда функция $\psi_1(\cdot) = (\mathrm{T}_1\psi)(\cdot)$ ($\widetilde{\psi}_1(\cdot) = (\widetilde{\mathrm{T}}_1\widetilde{\psi})(\cdot)$) равна единице (нулю) лишь на сторонах треугольника с вершинами x_0, x_1, x_2 (рис. 4.2.2, *б*), $\psi_2(\cdot) = (\mathrm{T}_2\psi)(\cdot)$ ($\widetilde{\psi}_2(\cdot) = (\widetilde{\mathrm{T}}_2\widetilde{\psi})(\cdot)$) равна единице (нулю) лишь всюду в этом треугольнике, ра́вно как и все функции $(\mathrm{T}_k\psi)(\cdot)$, $k = 2, 3, \dots$ ($(\widetilde{\mathrm{T}}_k\widetilde{\psi})(\cdot), k = 2, 3, \dots$) (см. рис. 4.2.2, *в*).

Следствием теоремы 4.2.1 является теорема 4.2.2, характеризующая свойства сходимости в (4.2.9).

Теорема 4.2.2. *Последовательность* $g^{A_k^\eta}(\cdot)$, $k = 0, 1, \ldots$, *индикаторных функций одноточечного покрытия* (4.2.6) *нечетких множеств* A_k^η, $k = 0, 1, \ldots$, (4.2.2) *поточечно сходится к индикаторной функции* $g^{A^\eta}(\cdot)$ (4.2.9) *нечеткого множества* $g^{A^\eta}(\cdot) = \lim_{k\to\infty} g^{A_k^\eta}(\cdot) = g^{A_m^\eta}(\cdot) = g^{A_{m+1}^\eta}(\cdot) = \ldots$, *где* $g^{A_k^\eta}(\cdot)$, $k = m, m+1, \ldots$, *и* $g^{A^\eta}(\cdot)$ — *квазивогнутые функции* $\mathcal{R}^m \to [0,1]$.

Приведем аналог теоремы 4.2.2 для сходимости (4.2.8), (4.2.10).

Теорема 4.2.2. *Последовательность* $h^{A_k^\eta}(\cdot)$, $k = 0, 1, \ldots$, *индикаторных функций одноточечного непокрытия* (4.2.8) *нечетких множеств* A_k^η, $k = 0, 1, \ldots$, (4.2.2) *поточечно сходится к индикаторной функции* $h^{A^\eta}(\cdot)$ (4.2.10) *нечеткого множества* A^η (4.2.4), *причем так, что* $h^{A^\eta}(\cdot) = \lim_{k\to\infty} h^{A_k^\eta}(\cdot) = h^{A_m^\eta}(\cdot) = h^{A_{m+1}^\eta}(\cdot) = \ldots$, *где* $h^{A_k^\eta}(\cdot)$, $k = m, m+1, \ldots$, и $h^{A^\eta(\cdot)}$ — *квазивыпуклые функции* $\mathcal{R}^m \to [0,1]$.

4.3. Класс предельных при $k \to \infty$ распределений нечеткого элемента $\zeta_k = (\xi_0 + \ldots + \xi_k)/(k+1)$

Пусть как в § 4.2 $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность взаимно независимых копий нечеткого элемента $\xi = q(\eta)$, $q(\cdot)\colon Y \to \mathcal{R}^m$, определенного на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta, \mathrm{N}^\eta)$, $g^{\tilde{\xi}}((\cdot))\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$, $h^\xi(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$ — его распределения, и

$$\zeta_k = (\xi_0 + \ldots + \xi_k)/(k+1), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.3.1}$$

— последовательность нечетких элементов — «центров тяжести» нечетких множеств $A_k^\eta = \mathrm{co}\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, (4.2.1). Рассмотрим класс предельных при $k \to \infty$ распределений нечеткого элемента ζ_k, причем, как и выше, ограничимся распределениями $g^{\zeta_k}(\cdot)$, $k = 0, 1, \ldots$

Лемма 4.3.1. *Пусть* $\psi(\cdot) \in \Psi(\mathcal{R}^m)$ — *непрерывная функция. Тогда*

$$(\mathrm{M}_k\psi)(x) = \sup\left\{ \min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \,\middle|\, x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m, \; x = \frac{x_0 + \ldots + x_k}{k+1} \right\} \xrightarrow[k\to\infty]{} (\mathrm{T}_m\psi)(x), \quad x \in \mathcal{R}^m.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что

$$(\mathrm{M}_k\psi)(x) = \sup\Big\{\min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \,\Big|\, x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m, \; x = \frac{x_0 + \ldots + x_k}{k+1}, \, x \in co\{x_0, \ldots, x_k\}\Big\} \leqslant \sup\big\{ \min\{\psi(x_0), \ldots, \psi(x_k)\} \,\big|\, x_0, \ldots, x_k \in \mathcal{R}^m, \, x \in co\{x_0, \ldots, x_k\}\big\} = (\mathrm{T}_k\psi)(x) \leqslant (\mathrm{T}_m\psi)(x), \; x \in \mathcal{R}^m, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.3.2}$$

Далее выберем произвольно $\varepsilon > 0$, $x \in \mathcal{R}^m$ и определим выпуклую комбинацию $\lambda_0^{(\varepsilon)} x_0^{(\varepsilon)} + \ldots + \lambda_m^{(\varepsilon)} x_m^{(\varepsilon)} = x$ так, чтобы

$$\min\{\psi(x_0^{(\varepsilon)}), \ldots, \psi(x_m^{(\varepsilon)})\} \geqslant (\mathrm{T}_m\psi)(x) - \varepsilon. \tag{4.3.3}$$

Для достаточно большого k запишем следующее представление для x

$$x = \frac{x_0^{(k)} + \ldots + x_k^{(k)}}{k+1} = \frac{k_0(k)}{k+1} y_0^{(k)} + \ldots + \frac{k_m(k)}{k+1} y_m^{(k)},$$

где среди $x_0^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ $k_0(k)$ равных $y_0^{(k)}$, $\ldots$, $k_m(k)$ равных $y_m^{(k)}$. Для этого достаточно выбрать $y_0^{(k)} = \dfrac{x_0^{(\varepsilon)} \lambda_0^{(\varepsilon)}}{k_0(k)/(k+1)}$, $\ldots$, $y_m^{(k)} = \dfrac{x_m^{(\varepsilon)} \lambda_m^{(\varepsilon)}}{k_m m(k)/(k+1)}$. Выбрав $k_0(k), \ldots, k_m(k)$ так, чтобы при $k \to \infty$

$$\frac{k_0(k)}{k+1} \to \lambda_0^{(\varepsilon)}, \ \ldots, \ \frac{k_m(k)}{k+1} \to \lambda_m^{(\varepsilon)},$$

получим, что $y_0^{(k)} \to x_0^{(\varepsilon)}$, $\ldots$, $y_m^{(k)} \to x_m^{(\varepsilon)}$ и, учитывая непрерывность $\psi(\cdot)$ и соотношения (4.3.2), (4.3.3), найдем:

$$(\mathrm{T}_m\psi)(x) \geqslant (\mathrm{M}_k\psi)(x) \geqslant \min\{\psi(x_0^{(k)}), \ldots, \psi(x_k^{(k)})\} = \min(\psi(y_0^{(k)}), \ldots,$$
$$\psi(y_m^{(k)})) \xrightarrow[k\to\infty]{} \min\{\psi(x_0^{(\varepsilon)}), \ldots, \psi(x_n^{(\varepsilon)})\} \geqslant (\mathrm{T}_m\psi)(x) - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $(\mathrm{T}_m\psi)(x) = \lim\limits_{k\to\infty} (\mathrm{M}_k\psi)(x)$, $x \in \mathcal{R}^m$. ■

Следующий результат, см. теорему 4.2.1 и лемму 4.3.1, показывает, что $\Phi(\mathcal{R}^m)$ — класс предельных при $k \to \infty$ распределений нечеткого элемента ζ_k (4.3.1).

Теорема 4.3.1. *Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность взаимно независимых нечетких элементов, каждый из которых является копией нечеткого элемента ξ, и $\zeta_k = \dfrac{\xi_0 + \ldots + \xi_k}{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$ Тогда*

▶ *если $g^\xi(\cdot)\colon \mathcal{R}^m \to [0,1]$ — непрерывная функция, то при $k \to \infty$ $g^{\zeta_k}(x) \to g^\zeta(x) = (T_m g^\xi)(x)$, $x \in \mathcal{R}^m$, то есть ζ_k при $k \to \infty$ сходится по распределению к нечеткому элементу ζ, распределение которого $g^\zeta(\cdot) = (\mathrm{T}_m g^\xi)(\cdot) \in \Phi(\mathcal{R}^m)$,*

▶ *если $g^\xi(\cdot) \in \Phi(\mathcal{R}^m)$, то $g^{\zeta_k}(x) = g^\xi(x)$, $x \in \mathcal{R}^m$, $k = 0, 1 \ldots$*

На рис. 4.3.1 приведен пример распределений $g^\xi(\cdot)$ и $g^\zeta(\cdot)$.

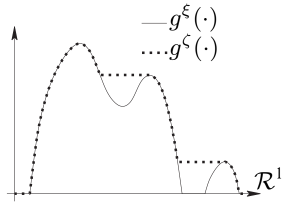


Рис. 4.3.1. Пример исходного $g^\xi(\cdot)$ (тонкая сплошная) и предельного $g^\zeta(\cdot)$ (пунктир) распределений

4.4. Предельные теоремы для второго варианта теории возможностей

Рассмотрим последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимых копий нечеткого элемента ξ, моделью которой является пространство с возможностью $(\mathcal{R}^n, \mathrm{P}(\mathcal{R}^n), \mathrm{P}_n)$, где возможность P_n задана распределением $g_n^\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^\xi(x_1) g^\xi(x_2) \ldots g^\xi(x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{R}^1$, см. § 1.7 гл. 1. Для распределения $\eta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$ найдем

$$g^{\eta_n}(y) = \sup\left\{g^\xi(x_1) \ldots g^\xi(x_n) \,\middle|\, x_1 \in \mathcal{R}^1, \ \ldots, \ x_n \in \mathcal{R}^1, \right. \\ \left. (x_1 + \ldots + x_n)/n = y\right\}, \ y \in \mathcal{R}^1. \quad (4.4.1)$$

Теорема 4.4.1. 1. *Пусть* $g^\xi(x) = \exp(-\psi(x))$, $x \in \mathcal{R}^1$, *где* $\psi(\cdot)\colon \mathcal{R}^1 \to \to [0, \infty]$ — *выпуклая функция. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} g^{\eta_n}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } g^\xi(y) = 1, \\ 0, & \text{если } g^\xi(y) < 1, \end{cases} \quad y \in \mathcal{R}^1. \qquad (4.4.2)$$

2. *Если для каждого* $y \in \mathcal{R}^1$ *и всех достаточно больших* n *точная верхняя грань в* (4.4.1) *достигается, причем в единственной точке, то выполнены равенства* (4.4.2).

Доказательство. 1. Рассмотрим функцию

$$\lambda_n(y) = \inf\{\Psi(x_1, \ldots, x_n) \,|\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n, \ x_1 + \ldots + x_n = ny\}, \ y \in \mathcal{R}^1,$$

где $\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1) + \ldots + \psi(x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$, — выпуклая функция (на $\mathcal{R}^n$), обладающая следующим свойством симметрии: $\Psi(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = \Psi(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$, для любой перестановки $\pi(\cdot)\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ индексов в $(x_1, \ldots, x_n)$. Понятно, что в (4.4.1) $g^{\eta_n}(y) = \exp(-\lambda_n(y))$, $y \in \mathcal{R}^1$. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и точку $(x_{1,\varepsilon}, \ldots, x_{n,\varepsilon}) \in \mathcal{R}^n$ так, чтобы

$$n\psi(y) = \Psi(y, \ldots, y) \geqslant \lambda_n(y) \geqslant \Psi(x_{1,\varepsilon}, \ldots, x_{n,\varepsilon}) - \varepsilon. \qquad (4.4.3)$$

В силу выпуклости $\Psi(\cdot, \ldots, \cdot)$ и симметрии

$$\Psi\left(\frac{1}{n!}\sum_{\pi(\cdot)} x_{\pi(1),\varepsilon}, \ldots, \frac{1}{n!}\sum_{\pi(\cdot)} x_{\pi(n),\varepsilon}\right) = \Psi\left(\frac{1}{n!}\sum_{\pi(\cdot)} \big(x_{\pi(1),\varepsilon}, \ldots, x_{\pi(n),\varepsilon}\big)\right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{n!}\sum_{\pi(\cdot)} \Psi\big(x_{\pi(1),\varepsilon}, \ldots, x_{\pi(n),\varepsilon}\big) = \Psi\big(x_{1,\varepsilon}, \ldots, x_{n,\varepsilon}\big), \qquad (4.4.4)$$

где суммирование выполняется по $n!$ перестановкам $\pi(\cdot)$. Поскольку

$$\frac{1}{n!}\sum_{\pi(\cdot)} x_{\pi(1)\varepsilon} = \ldots = \frac{1}{n!}\sum_{\pi(\cdot)} x_{\pi(n)\varepsilon} = y,$$

то согласно соотношениям (4.4.3), (4.4.4) для любого $\varepsilon > 0$ $n\psi(y) \geqslant \geqslant \lambda_n(y) \geqslant n\psi(y) - \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lambda_n(y) = n\psi(y)$ и

$$g^{\eta_n}(y) = \exp(-n\psi(y)) = (g^\xi(y))^n \to \begin{cases} 1, \text{ если } g^\xi(y) = 1, \\ 0, \text{ если } g^\xi(y) < 1, \end{cases} \quad y \in \mathcal{R}^1. \tag{4.4.5}$$

2. Действительно, пусть в (4.4.1) sup достигается в точке $(x_1(y), \ldots \ldots, x_n(y))$. В силу симметрии задачи то же значение arg sup будет в любой точке $(x_{\pi(1)}(y), \ldots, x_{\pi(n)}(y))$, полученной из исходной точки перестановкой значений «координат». А поскольку такая точка единственная, все получаемые таким образом точки совпадают, т. е. имеют равные «координаты»: $x_1(y), \ldots, x_n(y) = y$. Следовательно, $g^{\eta_n}(y) = = \left(g^\xi(y)\right)^n$. ■

Замечание 4.4.1. Согласно равенству (4.4.2), последовательность нечетких элементов $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *по распределению сходится к нечеткому элементу* η, распределение которого

$$g^\eta(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } g^\xi(y) = 1, \\ 0, & \text{если } g^\xi(y) < 1, \end{cases} \quad y \in \mathcal{R}^1.$$

Если $y^* \in \mathcal{R}^1$ — единственная точка максимума $g^\xi(\cdot)$, $g^\xi(y^*) = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|y-y^*|>\varepsilon} g^{\eta_n}(y) = 0.$$

В этом случае *возможность любого уклонения* η_n *от* y^* *стремится к нулю при* $n \to \infty$, *то есть последовательность нечетких элементов* $\eta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится по необходимости к максимально возможному значению* y^* *нечеткого элемента* ξ, см. определение 4.1.1.

Теорема 4.4.2. *Пусть в теореме* 4.4.1 *распределение* $g^\xi(x)$, $x \in \mathcal{R}^1$, *дифференцируемо* $2k$ *раз в точке* $y^* \in \mathcal{R}^1$ *его максимума* $g^\xi(y^*) = 1$. *Если производная порядка* $2k$ $g^\xi_{(2k)}(y^*) \neq 0$, *а производные* $g^\xi_{(1)}(y^*) = = \ldots = g^\xi_{(2k-1)}(y^*) = 0$, *то распределение* $g^{\zeta_n}(z)$, $z \in \mathcal{R}^1$, *нечеткого элемента* $\zeta_n = (\eta_n - y^*)(n|g^\xi_{(2k)}(y^*)|)^{1/(2k)}$ *при* $n \to \infty$ *сходится к* $\exp(-z^{2k}/(2k)!)$, $z \in \mathcal{R}^1$, *причем при преобразовании шкалы значений возможности* (см. § 1.15 гл. 1) *для любого* [1] $\alpha > 0$

$$g^\xi(x) \to (g^\xi(x))^\alpha,\ x \in \mathcal{R}^1,\ \Longrightarrow\ \exp(-z^{2k}/(2k)!) \to \exp(-\alpha z^{2k}/(2k)!), \tag{4.4.6}$$

$z \in \mathcal{R}^1$.

---

[1] Поэтому в любой шкале при $n \to \infty$ $g^{\zeta_n}(z) \to \exp(-qz^{2k})$, $z \in \mathcal{R}^1$, где лишь константа $q > 0$ определяется шкалой.

Доказательство. Согласно равенству (4.4.5)

$$\begin{aligned} g^{\zeta_n}(z) &= (g^{\xi}(y^* + z/(n|g^{\xi}_{(2k)}(y^*)|)^{1/(2k)}))^n = \\ &= (1 + z^{2k} g^{\xi}_{(2k)}(y^*)/((2k)!n|g^{\xi}{}_{(2k)}(y^*)|) + o(1/n))^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-z^{2k}/(2k)!),\ z \in \mathcal{R}^1, \quad (4.4.7) \end{aligned}$$

ибо $g^{\xi}(y^*) = 1$, $g^{\xi}_{(1)}(y^*) = \ldots = g^{\xi}_{(2k-1)}(y^*) = 0$, $g^{\xi}_{(2k)}(y^*) < 0$. Импликация (4.4.6) следует из (4.4.7). ■

Эта теорема при $k = 1$ — формальный аналог центральной предельной теоремы, см. § 3.1.4 гл. 3.

Глава 5

НЕЧЕТКИЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ЭЛЕМЕНТЫ В СТАТИСТИЧЕСКИХ, ВЕРОЯТНОСТНЫХ И ДРУГИХ МОДЕЛЯХ

Введение

Напомним основы теории проверки статистических гипотез. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, $x \in X$, — семейство вероятностных пространств, моделирующих стохастический эксперимент, в котором по наблюдению $\omega \in \Omega$ требуется проверить гипотезу о значении параметра x вероятности, контролировавшей его случайные исходы. Рассмотрим, например, статистическую задачу проверки гипотезы о параметре семейства вероятностей $\mathrm{Pr}(\cdot; x)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$, $x \in X$, согласно которой $x = x_0$. В качестве альтернативы примем равенство $x = x_1 \neq x_0$ [22]. Обозначим $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}) \subset \Omega$ *область принятия гипотезы*, отвечающую *наиболее мощному критерию уровня доверия* pr. Последнее означает, что гипотеза принимается всякий раз, когда наблюдение $\omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$, и отвергается, если $\omega \notin \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$, причем вероятность принять гипотезу, когда она и на самом деле верна, $\mathrm{Pr}(\omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_0) \equiv \mathrm{Pr}\big(\{\omega \in \in \Omega,\ \omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})\}; x_0\big) = \mathrm{pr} \in [0,1]$. Область $\Omega \setminus \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$ называется *критической*, вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу $\mathrm{Pr}(\omega \notin \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_0) = 1 - \mathrm{pr} = \alpha$ называется *уровнем значимости критерия*, вероятность $\mathrm{Pr}(\omega \notin \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_1) = \beta$ отвергнуть гипотезу, когда верна альтернатива, называется *мощностью критерия* [1]. *Правило принятия решения*, согласно которому гипотеза отвергается, если $\omega \in \Omega \setminus \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$, и принимается, если $\omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$, называется *критерием гипотезы* $x = x_0$ при альтернативе $x = x_1$, см. [22] и, например, гл. 4 в [50].

Область $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$, отвечающая *наиболее мощному критерию*, выделяется среди любых других областей $\widetilde{\Phi}(x_0, x_1, \mathrm{pr})$ принятия гипотезы (того же уровня pr) тем, что *обеспечивает наибольшую вероятность отвергнуть гипотезу, когда верна альтернатива*, или, что то же самое, — *наименьшую вероятность принять гипотезу ошибочно, когда на самом деле верна альтернатива*, а именно, если

$$\mathrm{pr} = \mathrm{Pr}(\omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_0) = \mathrm{Pr}(\omega \in \widetilde{\Phi}(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_0), \tag{5.0.1}$$

[1] Далее pr и α называем уровнями доверия и значимости, β — мощностью наиболее мощного критерия.

то
$$\Pr(\omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_1) \leqslant \Pr(\omega \in \widetilde{\Phi}(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_1). \tag{5.0.2}$$

Кроме того, область $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$ обладает свойством *несмещенности* [22], согласно которому вероятность принять гипотезу, когда она верна, не меньше, чем вероятность принять ее ошибочно:
$$\Pr(\omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}); x_1) \leqslant \mathrm{pr},\ \mathrm{pr} \in [0,1]. \tag{5.0.3}$$

Заметим, что в общем случае *существование* области $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$ для любого $\mathrm{pr} \in [0,1]$ гарантировано лишь в $\Omega \times [0,1]$ *в классе рандомизированных критериев*, когда наблюдение понимается как пара независимых случайных элементов $(\omega, \theta) \in \Omega \times [0,1]$, в которой первый контролируется вероятностью $\Pr(\cdot; x)$, $x \in X$, а второй при любом $x \in X$ равномерно распределен на $[0,1]$, см. гл. 6, [22], [50]. Точнее, дело обстоит следующим образом.

Пусть $l(\omega; x)$, $\omega \in \Omega$, — плотность вероятности $\Pr(\cdot; x)$, $x \in X$, относительно некоторой меры $m(\cdot)$ на $\mathcal{A}$, не зависящей от x. Как известно [22], в задаче проверки гипотезы $x = x_0$ против альтернативы $x = x_1$ существует *наиболее мощный критерий* уровня $\mathrm{pr} \in [0,1]$, определяемый *критической* ($\mathcal{A}$-измеримой) *функцией* $r(\omega)$, $\omega \in \Omega$, принимающей значения в $[0,1]$ и *удовлетворяющей условиям*
$$\mathsf{E}|_{x=x_0} r(\cdot) = \alpha, \text{ или } \mathsf{E}|_{x=x_0}(1 - r(\cdot)) = \mathrm{pr} \equiv 1 - \alpha, \tag{5.0.4}$$
$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \Omega_1 = \{\omega' \in \Omega,\ l(\omega'; x_1) > \lambda l(\omega'; x_0)\}, \\ 0, & \text{если } \omega \in \Omega_0 = \{\omega' \in \Omega,\ l(\omega'; x_1) < \lambda l(\omega'; x_0)\}. \end{cases}$$

Величина $r(\omega)$ определяет *вероятность отвергнуть гипотезу на основании наблюдения* $\omega \in \Omega$, причем согласно равенствам (5.0.4) при $\omega \in \Omega_1$ ($\omega \in \Omega_0$) гипотеза отвергается (принимается) с вероятностью единица. Если области Ω_0 и Ω_1 таковы, что $\Pr(\Omega \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1); x_0) = 0$, то и $\Pr(\Omega \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1); x_1) = 0$, и можно считать, что $\Omega_0 = \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$. В противном случае *достаточно* считать, что на $\Omega_2 = \Omega \setminus (\Omega_0 \cup \cup\, \Omega_1) = \{\omega \in \Omega,\ l(\omega; x_1) = \lambda l(\omega; x_0))\}$ $r(\omega) = r = \mathrm{const}$, т. е. *что при* $\omega \in \Omega_2$ *гипотеза должна быть отвергнута с вероятностью* r, *где* $r = r_{\mathrm{pr}} \in [0,1]$ *и* $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \geqslant 0$ *определяются условиями* (5.0.4) [1]), (5.0.5), [22].

В случае $\omega \in \Omega_2$ принятие решения должно быть *рандомизировано*, например, так, что результатом наблюдения объявляется пара $(\omega, \theta) \in \in \Omega \times [0,1]$, в которой случайная величина θ считается равномерно распределенной на $[0,1]$, не зависящей от $\omega \in \Omega$, а множество принятия гипотезы определяется как следующее множество в $\Omega \times [0,1]$:
$$\begin{aligned} &\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}) = \{(\omega, \theta) \in \Omega \times [0,1], r(\omega) \leqslant \theta \leqslant 1\}, \\ &\Pr\bigl(\{(\omega, \theta) \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})\}; x_0\bigr) = \mathrm{pr}. \end{aligned} \tag{5.0.5}$$

[1]) В (5.0.4) $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$ при условии, что $\infty \cdot 0 = 0$.

Согласно (5.0.5) гипотеза принимается, если $\omega \in \Omega_0$ ($\Pr(\theta \in [0,1]) = 1$), отвергается, если $\omega \in \Omega_1$ ($\Pr(\theta \in [1,1]) = 0$), а когда $\omega \in \Omega_2$, то разыгрывается θ и, если выпадает $\theta \in [r_{\rm pr}, 1]$ ($\theta \in [0, r_{\rm pr})$), то гипотеза принимается (отвергается), ибо условная при условии $\omega \in \Omega$ вероятность $\Pr(\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}) \mid \omega; x_0) = \Pr(r(\omega) \leqslant \theta \leqslant 1 \mid \omega; x_0) = 1 - r(\omega)$ есть вероятность принять гипотезу при наблюдении ω, и $\Pr(\{(\omega,\theta) \in \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})\}; x_0) = \Pr(\Omega_0; x_0) + (1 - r_{\rm pr})\Pr(\Omega_2; x_0) = \mathsf{E}_{x_0}(1 - r(\cdot)) = \mathrm{pr}$.

В равенстве (5.0.4) величина $\alpha \in [0,1]$, равная вероятности ошибочно отвергнуть гипотезу, как уже было сказано, называется *уровнем значимости критерия* $r(\cdot)$, вероятность $\mathsf{E}|_{x=x_0} r(\cdot) = \beta(\alpha)$ отвергнуть гипотезу, когда она и на самом деле неверна, называется *мощностью критерия* $r(\cdot)$. Наконец, условия $r(\omega) = r$, $\omega \in \Omega_2$, и (5.0.4), (5.0.5) определяют *наиболее мощный критерий*, $\beta(\alpha) \sim \max$, [22].

Поскольку в $\Omega \times [0,1]$ решение оказывается *нерандомизированным, в дальнейшем* (*если не оговорено противное*) *ограничимся нерандомизированными критериями*, *понимая*, *если это необходимо*, *под* $\omega \in \Omega$ *пару* $(\omega, \theta) \in \Omega \times [0,1]$.

Заметим, что критическая функция $r(\cdot)$ определяется условиями (5.0.4), (5.0.5) однозначно $m(\cdot)$-почти всюду на Ω, если $m(\Omega_2) = 0$. Соответствующий критерий при этом будет нерандомизированным, а множество принятия гипотезы можно определить произвольно в рамках условия $\Omega_0 \subset \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}) \subset \Omega_0 \cup \Omega_2$, например, — равенством $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}) = \{\omega \in \Omega,\ l(\omega; x_1) \leqslant \lambda l(\omega; x_0)\} = \Omega_0 \cup \Omega_2$, в котором $\lambda = = \lambda(\mathrm{pr})$ определено так, что

$$\Pr(\Omega_0 \cup \Omega_2; x_0) = \Pr(\Omega_0; x_0) = \int\limits_{\Omega_0 \cup \Omega_2} l(\omega; x_0) dm(\omega) = \mathrm{pr}.$$

Необходимость рандомизации возникает лишь тогда, когда для требуемого уровня доверия $\mathrm{pr} \in [0,1]$ область $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$ не может быть представлена в виде $\{\omega \in \Omega, l(\omega; x_1) \leqslant \lambda(\mathrm{pr}) l(\omega; x_0)\}$, см. § 2 гл. 4 в [50].

Пусть $Z \subset X \times X \equiv X^2$ — симметричное антирефлексивное отношение [1]). Рассмотрим семейство задач проверки гипотез $x = x_0 \in X$ против альтернатив $x = x_1 \in X$, $(x_0, x_1) \in Z$. Для семейства пар гипотеза–альтернатива $z = (x_0, x_1) \in Z$ для каждого $\mathrm{pr} \in [0,1]$ определим *дискриминантные множества*:

$$\mathcal{D}_{Z,\mathrm{pr}} = \bigcup_{z \in Z} \Big(\Phi(z, \mathrm{pr}) \times \{z\}\Big) = \{(\omega, z) \in \Omega \times X^2,\ \omega \in \Phi(z, \mathrm{pr}),\ z \in Z\}$$

в $\Omega \times X^2$, где $\Phi(z, \mathrm{pr}) \equiv \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$, $z = (x_0, x_1)$, и

$$\mathcal{D}_{\mathrm{pr}} = \{(\omega, x_0) \in \Omega \times X,\ \omega \in \Phi(x_0, \mathrm{pr})\}, \quad (5.0.6)$$

[1]) То есть *если* $(x_0, x_1) = $ (*гипотеза*, альтернатива) $\in Z$, *то* $x_0 \neq x_1$ *и* $(x_1, x_0) = $ (*гипотеза*, альтернатива) $\in Z$.

«представляющее $\mathcal{D}_{Z,\mathrm{pr}}$» в $\Omega \times X$, *если* $x_1 = x_1(x_0)$, $x_0 \in X$, — *заданная функция*, $\bigl(x_0, x_1(x_0)\bigr) \in Z$, $x_0 \in X$. В (5.0.6) $\Phi(x_0, \mathrm{pr}) = \Phi(x_0, x_1(x_0), \mathrm{pr})$, $x_0 \in X$, причем зависимость $\Phi(x_0, \mathrm{pr})$, $(x_0, \mathrm{pr}) \in X \times [0,1]$, от Z опущена, поскольку *множество* $Z \subset X \times X$ *считается фиксированным*.

В последнем случае для каждого $\omega \in \Omega$ определим множество $\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) = \{x_0 \in X,\ (\omega, x_0) \in \mathcal{D}_{\mathrm{pr}}\} \subset X$, которое назовем *оценивающим* $x_0 \in X$ (*или доверительным*) *множеством* уровня доверия $\mathrm{pr} \in [0,1]$ [22], [50]. Согласно определениям включения $\omega \in \Phi(x_0, \mathrm{pr}) \subset \Omega$, $x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \subset X$ и $(\omega, x_0) \in \mathcal{D}_{\mathrm{pr}} \subset \Omega \times X$, для всех $\omega \in \Omega$, $x_0 \in X$, эквивалентны. Поэтому для любых $x_0 \in X$, $\bigl(x_0, x_1(x_0)\bigr) \in Z$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$ и $x \in X$ $\Pr((\omega, x_0) \in \mathcal{D}_{\mathrm{pr}}; x) \equiv \Pr(\omega \in \Phi(x_0, \mathrm{pr}); x) = \Pr(x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}); x)$, причем $\Pr(x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}); x_0) = \mathrm{pr}$, $x_0 \in X$.

Множество $\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ следует понимать как случайное, покрывающее (и тем самым — оценивающее) истинное значение параметра семейства $x_0 \in X$ с вероятностью $\mathrm{pr} \in [0,1]$; $\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ выделяется среди других оценивающих множеств $\widetilde{\Phi}^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ уровня pr тем, что

$$\Pr(x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}); x_1) \leqslant \Pr(x_0 \in \widetilde{\Phi}^{-1}(\omega, \mathrm{pr}); x_1), \quad (x_0, x_1) \in Z, \qquad (5.0.2^*)$$

$$\Pr(x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}); x_1) \leqslant \mathrm{pr} \qquad (5.0.3^*)$$

(несмещенность).

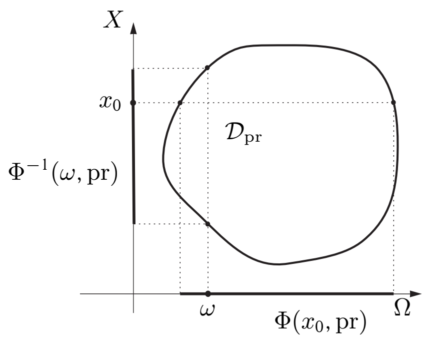


Рис. 5.0.1. Множества $\Phi(x_0, \mathrm{pr})$, $\mathcal{D}_{\mathrm{pr}}$ и $\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$, $\omega \in \Omega$, $x_0 \in X$ (для некоторых $\mathrm{pr} \in [0,1]$ и $Z \subset X \times X$)

Иначе говоря, если для некоторого $x_0 \in X$ в $\Pr(\cdot; x)$ $x = x_1 = x_1(x_0)$, $(x_0, x_1) \in Z$, то вероятность покрытия $x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ (и ошибочного принятия гипотезы) не превосходит pr, см. (5.0.3*), и не превосходит вероятности покрытия $x_0 \in \widetilde{\Phi}^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ для любого оценивающего множества $\widetilde{\Phi}^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ уровня pr, см. (5.0.2*).

Заметим, что $\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ — *множество тех* $x_0 \in X$, $(x_0, x_1) \in Z$, *при которых гипотеза* $x = x_0$ *принимается в случае наблюдения* $\omega \in \Omega$; $\Phi(x_0, \mathrm{pr})$ — *множество тех наблюдений* $\omega \in \Omega$, *при которых принимается гипотеза* $x = x_0$. Оба аспекта этих доверительных утверждений для семейства пар $(x_0, x_1) \in Z$ гипотеза–альтернатива представлены дискриминантным множеством $\mathcal{D}_{\mathrm{pr}}$ (5.0.6): оценивающее множество $\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ — проекция на X сечения $\mathcal{D}_{\mathrm{pr}}$, отвечающего фиксированному $\omega \in \Omega$, $\Phi(x_0, \mathrm{pr})$ — проекция на Ω сечения $\mathcal{D}_{\mathrm{pr}}$, отвечающего фиксированному $x_0 \in X$, $(x_0, x_1) \in Z$.

В общем случае оценивающее пару $(x_0, x_1) \in Z$ случайное множество $\Phi_Z^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \subset X^2$ определим равенством $\Phi_Z^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) = \bigl\{z \in Z,$

$\omega \in \Phi(z, \mathrm{pr})\}$, $\omega \in \Omega$, согласно которому для любых $\omega \in \Omega$, $z \in Z$ и $\mathrm{pr} \in [0,1]$ включения $\omega \in \Phi(z, \mathrm{pr})$, $z \in \Phi_Z^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ и $(\omega, z) \in \mathcal{D}_{Z,\mathrm{pr}}$ эквивалентны.

Поскольку обычно Z фиксировано и задана функция $x_1 = x_1(x_0)$, $x_0 \in X$, $\big(x_0, x_1(x_0)\big) \in Z$, то далее вместо отображений $\Phi(\cdot, \mathrm{pr})\colon Z \to \mathcal{A}$ и $\Phi_Z^{-1}(\cdot, \mathrm{pr})\colon \Omega \to \mathcal{P}(Z)$, как правило, рассматриваются $\Phi(\cdot, \mathrm{pr})\colon X \to \mathcal{A}$ и $\Phi^{-1}(\cdot, \mathrm{pr})\colon \Omega \to \mathcal{P}(X)$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$.

5.1. Параметр семейства вероятностей как нечеткий элемент

В этом параграфе рассмотрен метод «естественной фазификации» априори неизвестного параметра семейства $\mathrm{Pr}(\cdot; x)$, $x \in X$, вероятностей, фазификации, «*индуцированной*» статистической задачей проверки гипотез о значениях параметра, см. введение.

5.1.1. Простые гипотеза и альтернатива. В рассматриваемом случае согласно (5.0.4), (5.0.5), (5.0.2*), (5.0.3*) $\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \subset \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}')$, $\omega \in \Omega$, если $\mathrm{pr} < \mathrm{pr}'$. Поэтому чем *больше минимальное* $\mathrm{pr} \in [0,1]$, при котором наблюдение $\omega \in \Omega$ влечет принятие гипотезы $x = x_0$, $x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$, тем значительнее ω свидетельствует против гипотезы, тем *меньше возможность* (*правдоподобие*) равенства $x = x_0$ при этом ω. В пользу такого заключения свидетельствует неравенство (5.0.3*), согласно которому вероятность включения $x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ при верной гипотезе не меньше, чем при верной альтернативе, причем согласно неравенству (5.0.2*) в последнем случае эта вероятность не больше, чем вероятность включения x_0 в любое оценивающее множество $\widetilde{\Phi}^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$ того же уровня pr. Эти замечания позволяют рассматривать параметр распределения как *случайный нечеткий* [1]) *элемент* ξ *со значениями в* X, определив (случайный) вариант его распределения [2]) равенством

$$g^{\xi}(x_0 \mid \omega) = \mathrm{P}(\{x_0\} \mid \omega) \triangleq 1 - \inf\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1],\ x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\}, \tag{5.1.1}$$

в котором $g^{\xi}(x_0 \mid \omega)$ есть значение (*случайной*) *возможности равенства* $\xi = x_0 \in X$ *при наблюдении* $\omega \in \Omega$.

---

[1]) На самом деле, учитывая статистический контекст, ξ естественно считать (случайной) не нечеткой, а неопределенной (высказывательной) переменной, соответственно (случайное) значение $g^{\xi}(x_0 \mid \omega)$ естественно понимать как зависящее от наблюдаемого $\omega \in \Omega$ значение *правдоподобия* истинности высказывания, согласно которому $\xi = x_0$, см. § 5.2, [52] и § 3.10 гл. 3.

[2]) Вообще говоря, в шкале $\mathcal{L}$ $\sup\limits_{x_0 \in X} g^{\xi}(x_0|\omega) \leqslant 1$, правильная нормировка будет в случайной, изоморфной $\mathcal{L}$ шкале $\gamma_\omega \mathcal{L}$, где $\gamma_\omega(\cdot)\colon [0, \sup\limits_{x_0 \in X} g^{\xi}(x_0|\omega)] \to [0,1]$ — непрерывная, строго монотонная функция, $\gamma_\omega(0) = 0$, $\gamma_\omega(\sup\limits_{x_0 \in X} g^{\xi}(x_0|\omega)) = 1$.

С другой стороны, чем *больше максимальное* $\mathrm{pr} \in [0,1]$, при котором наблюдение $\omega \in \Omega$ отклоняет гипотезу $x = x_0$, $x_0 \notin \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})$, тем значительнее ω свидетельствует против гипотезы, тем *меньше возможность равенства* $x = x_0$ при этом ω. Можно показать, что в том случае, когда область $\Phi(x_0, \mathrm{pr})$ существует для любого $\mathrm{pr} \in [0,1]$,

$$g^{\xi}(x_0 \mid \omega) = 1 - \sup\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1], x_0 \notin \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\} = \\ = \inf\{1 - \mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1], x_0 \notin \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\}, \qquad (5.1.1^*)$$

откуда следует, что значение $g^{\xi}(x_0 \mid \omega)$ можно интерпретировать как *возможность ошибочно отвергнуть гипотезу* $x = x_0$ *как неверную* [1]).

Лемма 5.1.1. *Пусть для любого* $\mathrm{pr} \in [0,1]$ *существует наиболее мощный* (*нерандомизированный*) *критерий проверки гипотезы* $x = x_0$ *против альтернативы* $x = x_1$, *см.* (5.0.4), *тогда*

$$\inf\{\mathrm{pr} \in [0,1] \mid x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\} = \sup\{\mathrm{pr} \in [0,1] \mid \\ x_0 \notin \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\}, \ \omega \in \Omega, \qquad (5.1.2)$$

т. е. правые части в (5.1.1) *и* (5.1.1*) *равны.*

Доказательство. В рассматриваемом случае $\mathrm{pr}_1 < \mathrm{pr}_2 \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}_1) \subset \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}_2)$ и поэтому если для некоторого $x \in X$ $x \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}_2)$ и $x \notin \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}_1)$, то $\mathrm{pr}_1 < \mathrm{pr}_2$. Следовательно,

$$\overline{\mathrm{pr}} = \inf\{\mathrm{pr} \in [0,1] \mid x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\} \geqslant \\ \sup\{\mathrm{pr} \in [0,1] \mid x_0 \notin \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\} = \underline{\mathrm{pr}}, \quad \omega \in \Omega. \qquad (5.1.3)$$

Если $\Phi^{-1}(\omega, \underline{\mathrm{pr}}) \ni x_0$, то $\overline{\mathrm{pr}} = \inf\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1], x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\} \leqslant \underline{\mathrm{pr}}$, и в силу (5.1.3) выполняется равенство (5.1.2). Если же $\Phi^{-1}(\omega, \underline{\mathrm{pr}}) \not\ni x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ $\Phi^{-1}(\omega, \underline{\mathrm{pr}} + \varepsilon) \ni x_0$, $\overline{\mathrm{pr}} \leqslant \underline{\mathrm{pr}} + \varepsilon$ и, следовательно, $\overline{\mathrm{pr}} = \underline{\mathrm{pr}}$. ■

Замечание 5.1.1. Лемма 5.1.1 не верна, если *наиболее мощный нерандомизированный критерий* для некоторых $\mathrm{pr} \in [0,1]$ не существует. В таком случае $\inf\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1], x_0 \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\} \geqslant \sup\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0,1], x_0 \notin \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\}$, $\omega \in \Omega$ и, следовательно, правая часть в (5.1.1) не больше правой части в (5.1.1*). Но, как уже было сказано, в этой ситуации будем считать, что в качестве Ω используется $\Omega \times [0,1]$, в качестве ω используется (ω, θ), и $\Phi(x_0, \mathrm{pr}) \triangleq \Phi(x_0, x_1(x_0), \mathrm{pr})$ определено [2]) в (5.0.5).

[1]) В виде (5.1.1*) в [50] определена надежность гипотезы $x = x_0$.

[2]) Иначе говоря, далее считается, что наиболее мощный нерандомизированный критерий существует для любого $\mathrm{pr} \in [0,1]$, если не оговорено противное.

Подчеркнем, что случайный нечеткий элемент ξ и его распределение $g^{\xi}(\cdot\,|\,\omega)$ определены не только семейством $\Pr(\cdot;x)$, $x \in X$, и наблюдением $\omega \in \Omega$, но и *позицией исследователя, выраженной как в формулировке задачи проверки гипотезы, так и в определении* (5.1.1) (*варианта*) *распределения* ξ, *отражающем его интерпретацию того, в какой степени и как наблюдение* $\omega \in \Omega$ *свидетельствует за или против тех или иных возможных значений* $x \in X$. Этот аспект в § 5.2 охарактеризован в контексте математического моделирования субъективных суждений в научных исследованиях [48, 51].

Разумеется, *вместо варианта распределения* $g^{\xi}(\cdot\,|\,\omega)$ (5.1.1), *принимающего значения, определенные значениями вероятностей* $\Pr(\cdot;x)$, $x \in X$, *можно использовать* $\gamma(g^{\xi}(\cdot\,|\,\omega))$, *где* $\gamma(\cdot)$ — *любая непрерывная строго монотонная функция* $[0,1] \to [0,1]$, *удовлетворяющая условиям* $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$, т. е. $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, (см. § 1.15 гл. 1).

Определение 5.1.1. Вариант (случайной) возможности события $A \subset X$, состоящего в том, что значение $x \in X$, определяющее вероятность $\Pr(\cdot;x)$, содержится в A, т. е. вариант возможности [1] события $\xi \in A$, определим равенством

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^{\xi}(A|\omega) &= 1 - \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1],\ A \cap \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr}) \neq \varnothing\} = \\ &= \sup\left\{g^{\xi}(x_0\,|\,\omega) \,\middle|\, x_0 \in A\right\} = 1 - \sup\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1], A \cap \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr}) = \varnothing\} = \\ &= \mathrm{P}^{\xi}(\xi \in A|\,\omega),\ A \in \mathcal{P}(X),\ A \neq \varnothing,\ \mathrm{P}^{\xi}(\varnothing\,|\,\omega) = 0,\ \omega \in \Omega, \quad (5.1.4)\end{aligned}$$

и, как следствие, вариант (случайной) необходимости [2] $A \subset X$, дуальной $\mathrm{P}^{\xi}(\cdot\,|\,\omega)$, и соответствующий вариант ее распределения определим равенствами

$$\begin{aligned}\mathrm{N}^{\xi}(A\,|\,\omega) &= 1 - \mathrm{P}^{\xi}(X \backslash A|\omega) = \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1], (X\backslash A) \cap \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr}) \neq \\ &\neq \varnothing\} = \sup\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1], (X\backslash A) \cap \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr}) = \varnothing\} \equiv \\ &\equiv \sup\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1], \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr}) \subset A\} = \inf_{x \in X\backslash A} \widetilde{h}^{\xi}(x|\omega), \\ &\qquad A \in \mathcal{P}(x),\ A \neq X,\ \mathrm{N}^{\xi}(X\,|\,\omega) = 1,\ \omega \in \Omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{h}^{\xi}(x_0\,|\,\omega) &= \mathrm{N}^{\xi}(X\backslash\{x_0\}\,|\,\omega) = \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1], x_0 \in \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr})\} \equiv \\ &\equiv \sup\left\{\mathrm{pr} \,\middle|\, \mathrm{pr} \in [0,1],\ x_0 \notin \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr})\right\},\ \omega \in \Omega. \quad (5.1.4^*)\end{aligned}$$

Проверим, что равенства (5.1.4) и (5.1.4*) действительно определяют возможность и необходимость.

Лемма 5.1.2. *Пусть при каждом* $\omega \in \Omega$ $\inf\left\{\mathrm{pr} \in [0,1] \,\middle|\, \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr}) \neq \varnothing\right\} = \sup\left\{\mathrm{pr} \in [0,1] \,\middle|\, \Phi^{-1}(\omega,\mathrm{pr}) = \varnothing\right\} = 0$. *Тогда равенства* (5.1.4) *и* (5.1.1) *определяют соответственно* (*случайную*) *возможность* $\mathrm{P}^{\xi}(\cdot\,|\,\omega)$ *на классе* $\mathcal{P}(X)$ *всех подмножеств* X *и ее распределение*

[1] Со значениями, определенными значениями вероятностей $\Pr(\cdot;x)$, $x \in X$.

$g^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$ *на* X. *Равенства* (5.1.4*) *определяют дуальную* $\mathrm{P}^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$ (*случайную*) *необходимость* $\mathrm{N}^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$ *и ее распределение* $h^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$.

Доказательство. Проверим, что $\mathrm{P}^\xi(A\cup B|\omega)=\max(\mathrm{P}^\xi(A|\omega),\mathrm{P}^\xi(B|\omega))$, $A, B \in \mathcal{P}(X)$, и кроме того, что для любого семейства множеств A_j, $j \in J$, $\mathrm{P}^\xi(\bigcup\limits_{j\in J} A_j\,|\,\omega) = \sup\limits_{j\in J} \mathrm{P}^\xi(A_j\,|\,\omega)$.

Действительно, так как $\inf\{\mathrm{pr}\,|\,(A \cup B) \cap \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \neq \varnothing\} = \min\left[\inf\{\mathrm{pr}\,|\,A \cap \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \neq \varnothing\},\ \inf\{\mathrm{pr}\,|\,B \cap \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \neq \varnothing\}\right]$, то $\mathrm{P}^\xi(A \cup B\,|\,\omega) = \max(\mathrm{P}^\xi(A\,|\,\omega),\ \mathrm{P}^\xi(B\,|\,\omega))$ и, следовательно, $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}^\xi(A) \leqslant \mathrm{P}^\xi(B)$.

Так как $\mathrm{P}^\xi(A\,|\,\omega) = \sup\{1 - \mathrm{pr}\,|\,A \cap \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \neq \varnothing\}$, то $\mathrm{P}^\xi(\bigcup\limits_{j\in J} A_j\,|\,\omega) = \sup\{1 - \mathrm{pr}\,|\,\bigcup\limits_{j\in J} (A_j \cap \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})) \neq \varnothing\} = \sup\limits_{j\in J}\sup\{1 - \mathrm{pr}\,|\,\mathrm{pr} \in [0,1],\ A_j \cap \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \neq \varnothing\}$, т. е. действительно

$$\mathrm{P}^\xi\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\,|\,\omega\Big) = \sup_{j\in J} \mathrm{P}^\xi(A_j\,|\,\omega).$$

Если выполнено условие леммы 5.1.1, то $\mathrm{P}^\xi(X\,|\,\omega) = 1 - \inf\{\mathrm{pr}\,|\,\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) \neq \varnothing\} = 1$. Тот факт, что $g^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$ (5.1.1) — распределение $\mathrm{P}^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$, следует из (5.1.4). Наконец, согласно равенствам (5.1.4*), $\mathrm{N}^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$ и $h^\xi(\cdot|\omega)$ суть варианты необходимости и ее распределения как дуально сопряженные $\mathrm{P}^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$ и $g^\xi(\,\cdot\,|\,\omega)$. ■

Пример 5.1.1. Пусть $\Omega = \mathcal{R}^1$, $\omega \sim \mathcal{N}(x_0, 1)$, $x_0 \in X = \mathcal{R}^1$, $Z = \left\{(x_0, x_1) \in \mathcal{R}^2,\ x_0 \neq x_1\right\}$. Речь идет о семействе задач проверки гипотез, в которых либо $x_0 > x_1$, либо $x_0 < x_1$, $(x_0, x_1) \in \mathcal{R}^2$.

В случае $x_0 > x_1$ наиболее (равномерно по x_1) мощному критерию гипотезы x_0 отвечает интервал $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}) \equiv \Phi(x_0, \mathrm{pr}) = [x_0 - \varphi^{-1}(\mathrm{pr}), \infty)$ принятия $x_0 > x_1$ уровня[1] $\mathrm{pr} \in [0,1]$. Согласно (5.1.1) $g^\xi(x_0\,|\,\omega)\big|_{x_0>x_1} = 1 - \inf\left\{\mathrm{pr}\,|\,\omega \in [x_0 - \varphi^{-1}(\mathrm{pr}), \infty)\right\} = 1 - \mathrm{pr}_\omega(x_0) = \int\limits_{x_0-\omega}^{\infty} e(t)dt$, где $\mathrm{pr}_\omega(x_0) = \varphi(x_0 - \omega)$. В случае $x_0 < x_1$ $\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}) \equiv \Phi(x_0, \mathrm{pr}) = (-\infty, x_0 + \varphi^{-1}(\mathrm{pr})]$, $g^\xi(x_0|\omega)\big|_{x_0<x_1} = \int\limits_{\omega-x_0}^{\infty} e(t)dt$, см. рис. 5.1.1.

Заметим, что если наблюдаются (взаимно) независимые $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \sim \mathcal{N}(x, 1)$, то $\omega_{(n)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j \sim \mathcal{N}(x, \dfrac{1}{n})$ — достаточная статистика в задаче проверки гипотезы $x = x_0$ против $x = x_1$, причем если $x_0 > x_1$, то $\Phi_{(n)}(x_0, x_1, \mathrm{pr}) = (x_0 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\varphi^{-1}(\mathrm{pr}), \infty)$, а если $x_0 < x_1$, то $\Phi_{(n)}(x_0, x_1, \mathrm{pr}) = (-\infty,\ x_0 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\varphi^{-1}(\mathrm{pr}))$.

---

[1] В этой главе $\varphi(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} e(t)dt$, $e(t) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-t^2/2)$, $-\infty < t < \infty$, $\varphi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная $\varphi(\cdot)$.

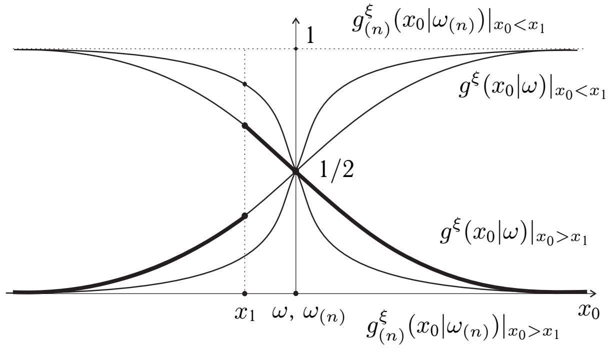


Рис. 5.1.1. $g^{\xi}(x_0|\omega)|_{x_0>x_1}$ — возможность значения $\xi = x_0$ при любом альтернативном значении $x_1 < x_0$, $g^{\xi}(x_0|\omega)|_{x_0<x_1}$ — возможность значения $\xi = x_0$ при любом конкурирующем значении $x_1 > x_0$. При фиксированном x_1 распределение $g^{\xi}(x_0|\omega)$, $x_0 \in \mathcal{R}^1$, выделено утолщенной линией [1])

В следующем примере используется рандомизированный критерий.

Пример 5.1.2. Рассмотрим семейство задач проверки гипотез о параметре $x \in X = [0,1]$ биномиального распределения $Bi(x,n)$, $\Omega = \{0,1,\ldots,n\}$, $\Pr(\omega = k; x) = l(k,x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$. Речь пойдет о задачах, в которых либо $x = a$ — гипотеза, $x = b$ — альтернатива, либо $x = b$ — гипотеза, $x = a$ — альтернатива, $(a,b) \in Z = \{(x_0,x_1) \in [0,1]^2,\ x_0 \neq x_1\}$. Пусть для определенности $a > b$. Поскольку условие $l(k;b)/l(k;a) = \left(\dfrac{1-b}{1-a}\right)^n \left(\dfrac{b(1-a)}{a(1-b)}\right)^k > \lambda$ в (5.0.5) можно представить как $k < t$, критическая функция (5.0.5)

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < t, \\ r, & \omega = t, \\ 0, & \omega > t, \end{cases} \tag{5.1.5}$$

где t следует выбрать из множества $\{0,1,\ldots,n\}$, и условие (5.0.4) имеет вид $\mathsf{E}_a r(\cdot) = \Pr(\omega < t)\Pr(0 \leqslant \theta \leqslant 1) + \Pr(\omega = t)\Pr(0 \leqslant \theta \leqslant r) = \alpha = 1 - \mathrm{pr} = \sum\limits_{k=0}^{t-1} C_n^k a^k (1-a)^{n-k} + r C_n^t a^t (1-a)^{n-t}$, соответствующий критическому множеству $(\Omega \times [0,1]) \setminus \Phi(a,b,1-\alpha) = \{(\omega,\theta) \in \Omega \times [0,1], 0 \leqslant \theta \leqslant r(\omega)\}$ в $\Omega \times [0,1]$). Здесь $t = t_\alpha$ и $r = r_\alpha$ для каждого уровня $\alpha \in [0,1]$ определяются условиями:

$$\sum_{k=0}^{t_\alpha - 1} C_n^k a^k (1-a)^{n-k} \leqslant \alpha < \sum_{k=0}^{t_\alpha} C_n^k a^k (1-a)^{n-k}$$

---

[1]) В данном случае $\max\{g^{\xi}(a), g^{\xi}(b)\} < 1$, т. е. оба значения возможны, но любое из них — не вполне.

и

$$r_\alpha = \left(\alpha - \sum_{k=0}^{t_\alpha-1} C_n^k a^k (1-a)^{n-k}\right) \Big/ \left(C_n^{t_\alpha} a^{t_\alpha}(1-a)^{n-t_\alpha}\right).$$

При реализации $(\omega, \theta) \in \Omega \times [0,1]$ и данном $\alpha \in [0,1]$ гипотеза $x = a$ отвергается, если либо $\omega < t_\alpha$, θ — любое, либо $\omega = t_\alpha$, $\theta \leqslant r_\alpha$. Поэтому согласно определению (5.1.1*)

$$\begin{aligned} &g^\xi(a \mid \omega, \theta) = \inf\{\alpha \mid \alpha \in [0,1], \omega \leqslant t_\alpha, \theta < r_\alpha\} = \\ &\sum_{k=0}^{\omega-1} C_n^k a^k (1-a)^{n-k} + \theta C_n^\omega a^\omega (1-a)^{n-\omega}, \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

— возможность значения $\xi = a > b$ параметра биномиального распределения (b — фиксировано) при условии, что наблюдается $\omega \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

В случае гипотезы $x = b$ против альтернативы $x = a$, $a > b$, критическая функция

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > t, \\ 1 - r, & \omega = t, \\ 0, & \omega < t, \end{cases} \tag{5.1.7}$$

а условие (5.0.4) теперь записывается в виде $\mathsf{E}_b r(\cdot) = \Pr(\omega > t)\Pr(0 < \theta < 1) + \Pr(\omega = t)\Pr(r < \theta < 1) = \alpha = 1 - \mathrm{pr} = \sum_{t+1}^{n} C_n^k b^k (1 - b)^{n-k} + (1 - r) C_n^t b^t (1 - b)^{n-t} = \alpha$, где $t = t_\alpha, r = r_\alpha$ определяются условиями: $\sum_{t_\alpha+1}^{n} C_n^k b^k (1 - b)^{n-k} \leqslant \alpha < \sum_{t_\alpha}^{n} C_n^k b^k (1 - b)^{n-k}$, $r_\alpha = \left(\alpha - \sum_{t_\alpha+1}^{n} C_n^k b^k (1-b)^{n-k}\right) \Big/ (C_n^{t_\alpha} b^{t_\alpha} (1-b)^{n-t_\alpha})$.

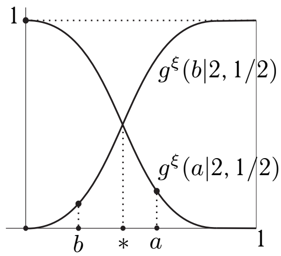


Рис. 5.1.2. Графики распределений $g^\xi(a \mid \omega, \theta) = \sum_{k=0}^{1} C_{10}^k a^k (1 - a)^{10-k} + (1/2) C_{10}^2 a^2 (1 - a)^8$, $a > b$, $a, b \in [0, 1]$, $g^\xi(b \mid \omega, \theta) = \sum_{k=3}^{10} C_{10}^k b^k (1 - b)^{10-k} + (1/2) C_{10}^2 b^2 (1 - b)^8$, $b < a$, $a, b \in [0, 1]$, при $n = 10$, $\omega = 2$, $\theta = 1/2$; $*$ — корень уравнения $\sum_{k=0}^{1} C_{10}^k x^k (1 - x)^{10-k} = \sum_{k=3}^{10} C_{10}^k x^k (1 - x)^{10-k}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

При реализации (ω, θ) гипотеза $x = b$ отвергается, если либо $\omega > t_\alpha$, θ — любое, либо $\omega = t_\alpha$ и $r_\alpha \leqslant \theta \leqslant 1$. Поэтому $g^\xi(b \,|\, \omega, \theta) = \sum\limits_{\omega+1}^{n} C_n^k b^k (1 - b)^{n-k} + (1-\theta) C_n^\omega b^\omega (1-b)^{n-\omega}$ — возможность значения $\xi = b < a$, a — фиксировано, $a, b \in [0,1]$, при наблюдении $\omega \in \{0, 1, \ldots, n\}$, см. рис. 5.1.2.

5.1.2. Простая гипотеза, сложная альтернатива. Рассмотрим семейство задач проверки гипотез $(\mathcal{H}(x), \mathcal{K}(x))$, $x \in X$, в которых для каждого $x \in X$ гипотеза $\mathcal{H}(x) = \{x\}$ и альтернатива $\mathcal{K}(x)$ — подмножество X, не содержащее x. Например, $\mathcal{H}(x)$ — гипотеза, согласно которой x — значение параметра вероятности $\Pr(\cdot; x)$, контролирующей наблюдения, $\mathcal{K}(x)$ — альтернатива, согласно которой значение параметра не равно x, $\mathcal{K}(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in X$.

Пусть $\Phi^{-1}(x, \mathrm{pr})$ — область принятия $\mathcal{H}(x)$, $x \in X$, уровня доверия $\mathrm{pr} \in [0,1]$. Как и выше, для $\omega \in \Omega$ $\{\mathcal{H}(x),\, x \in \Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr})\}$ — множество принимаемых гипотез, $\Phi(x, \mathrm{pr})$ — множество тех $\omega \in \Omega$, при которых принимается гипотеза $\mathcal{H}(x) = \{x\}$.

Возможностью $\mathcal{H}(x)$, или, иначе говоря, возможностью того, что при $\omega \in \Omega$ параметр семейства вероятностей равен $x \in X$, назовем, см. (5.1.1), (5.1.1*), $g^\xi(x \,|\, \omega) = 1 - \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1],\ \omega \in \Phi(x, \mathrm{pr})\}$.

Пример 5.1.3. Пусть $\mathcal{H}(x)$: x — значение параметра распределения $\mathcal{N}(x, 1)$, $\mathcal{K}(x)$: параметр семейства не равен x, $x \in X = \mathcal{R}^1$. Область принятия $\mathcal{H}(x)$ уровня $\mathrm{pr} \in [0,1]$ в классе равномерно наиболее мощных *несмещенных* критериев $\Phi(x, \mathrm{pr}) = \{\omega \in \mathcal{R}^1, |\omega - x| \leqslant \alpha_1(\mathrm{pr})\}$, где $\alpha_1(\mathrm{pr})$ — корень уравнения $\int\limits_{-\alpha_1(\mathrm{pr})}^{\alpha_1(\mathrm{pr})} \exp(-z^2/2) dz / \sqrt{2\pi} = \mathrm{pr} \in [0,1]$. Поэтому

$$g^\xi(x \,|\, \omega) = 1 - \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1], |\omega - x| \leqslant \alpha_1(\mathrm{pr})\} = 2\varphi(-|\omega - x|). \quad (5.1.8)$$

Если наблюдаются взаимно независимые $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \sim \mathcal{N}(x, 1)$, то область принятия гипотезы $\mathcal{H}(x)$ против альтернативы $\mathcal{K}(x)$, отвечающая равномерно наиболее мощному несмещенному критерию, $\Phi_{(n)}(x, \mathrm{pr}) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, |\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j - x| \leqslant \alpha_n(\mathrm{pr})\}$, где $\int\limits_{-\alpha_n(\mathrm{pr})}^{\alpha_n(\mathrm{pr})} \exp(-nz^2/2)\sqrt{n/2\pi}\, dz = \mathrm{pr}$ и, следовательно, $\alpha_n(\mathrm{pr}) = \alpha_1(\mathrm{pr})/\sqrt{n}$. Поэтому

$$g_{(n)}(x \,|\, \omega_{(n)}) = 1 - \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1], |\omega_{(n)} - x| \leqslant \leqslant \alpha_1(\mathrm{pr})/\sqrt{n}\,\} = 2\varphi(-\sqrt{n}\,|\omega_{(n)} - x|), \quad (5.1.9)$$

где $\omega_{(n)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j$, см. рис. 5.1.3.

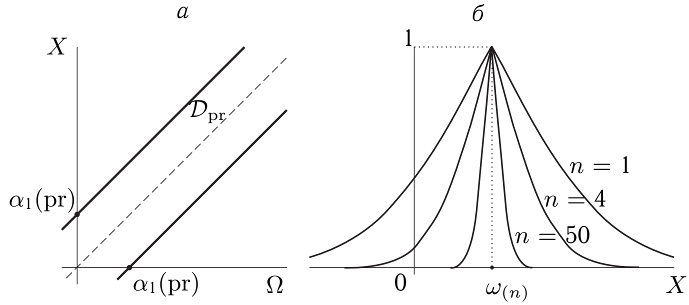


Рис. 5.1.3. *а*) Дискриминантное множество $\mathcal{D}_{\rm pr}$ уровня pr, его границы — пара прямых $\omega - x = \pm\alpha_1(\rm pr)$, $\omega \in \Omega = \mathcal{R}^1$, $x \in X = \mathcal{R}^1$. *б*) Распределения возможностей (5.1.8) и (5.1.9) значений $\xi = x \in \mathcal{R}^1 = X$. Возможность значения $\xi = x$, равного оценке $\omega_{(n)}$ математического ожидания y семейства $\mathcal{N}(y,1)$, $y \in \mathcal{R}^1$, равна единице и при больших n «быстро» убывает при удалении x от $\omega_{(n)}$

Пример 5.1.3 позволяет охарактеризовать возможностную интерпретацию измерения параметра $x \in \mathcal{R}^1$, выполненного по схеме $\omega = x + \nu$, где $\nu \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ — ошибка измерения, шум. Равенство (5.1.8) определяет вариант распределения возможностей значений параметра как нечеткого элемента: $g_\sigma^\xi(x\,|\,\omega) = 2\varphi(-|\omega - x|/\sigma), x \in \mathcal{R}^1$. При любой дисперсии $\sigma^2 > 0$ независимо от выбора шкалы значений возможности $g_\sigma^\xi(x\,|\,\omega)\big|_{x=\omega} = 1$, и $g_{\sigma_1}^\xi(x\,|\,\omega) > g_{\sigma_2}^\xi(x\,|\,\omega)$, $x \in \mathcal{R}^1$, если $\sigma_1 < \sigma_2$.

Пример 5.1.4. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $\mathcal{H}(a)\colon x = a \in [0,1]$ против сложной альтернативы $\mathcal{K}(a) = \{x \in [0,1], 0 \leqslant x < a\}$ для биномиального распределения $Bi(x,n)$. Поскольку, как известно [22], $Bi(x,n)$ — распределение с монотонным отношением правдоподобия, то существует равномерно наиболее мощный критерий проверки $\mathcal{H}(a)$, причем его критическая функция совпадает с $r(\cdot)$ (5.1.5). Поэтому в этой задаче параметр a, как нечеткая переменная, распределен согласно равенству (5.1.6). Более того, критическая функция (5.1.5) задает равномерно наиболее мощный критерий и для проверки гипотезы $\mathcal{H}(a) = \{x \in [0,1], x \geqslant a\}$ против альтернативы $\mathcal{K}(a) = \{x \in [0,1], x < a\}$, а так как правая часть (5.1.6) при любых ω, θ — монотонно убывающая функция $a \in [0,1]$, то в данном случае $\mathrm{P}(\mathcal{H}(a)\,|\,\omega,\theta) = \mathrm{P}(x \geqslant a\,|\,\omega,\theta) = \max\limits_{x \geqslant a} g^\xi(x\,|\,\omega,\theta)$, где $g^\xi(x\,|\,\omega,\theta)$ дается равенством (5.1.6) при $a = x$.

Пример 5.1.5. Пусть случайный вектор $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_m) \in \Omega = \big\{(n_1,\ldots,n_m), n_i \geqslant 0, i = 1,\ldots,m, n_1 + \ldots + n_m = n\big\}$ полиномиально распределен, т. е. пусть

$$\Pr(\omega_1 = n_1,\ldots,\omega_m = n_m; x) = \frac{n!}{n_1!\ldots n_m!} x_1^{n_1}\ldots x_m^{n_m},$$
$$(n_1,\ldots,n_m) \in \Omega, \quad (5.1.10)$$

где $x = (x_1,\ldots,x_m) \in X$ — параметр распределения, $X = \{(x_1,\ldots\ldots,x_m),\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,m,\ x_1 + \ldots + x_m = 1\}$. Распределение (5.1.10) определяет полиномиальную модель испытаний, согласно которой каждое испытание заканчивается одним из m исходов, причем x_i — вероятность i-го исхода, $i = 1, \ldots, m$. Равенство (5.1.10) определяет вероятность того, что в результате n независимых испытаний первый исход будет получен в n_1 испытаниях, второй — в n_2, …, m-й — в n_m испытаниях, $n_1 + \ldots + n_m = n$.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы $\mathcal{H}(x)$, согласно которой $x \in X$ — истинное значение параметра вероятности (5.1.10), контролирующей испытания, против альтернативы $\mathcal{K}(x)$, согласно которой истинное значение параметра — любой вектор из X, отличный от x. Как известно [22], если гипотеза $\mathcal{H}(x)$ верна, то распределение статистики

$$\zeta_{(n)}(\omega, x) = n \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - x_i)^2}{x_i}, \ \nu_i = \omega_i / n, \ i = 1, \ldots, m, \qquad (5.1.11)$$

при $n \to \infty$ сходится к распределению χ^2 с $m-1$ степенью свободы.

В задаче проверки $\mathcal{H}(x)$ против $\mathcal{K}(x)$ множество $\Phi_n(x, \mathrm{pr}) = \{\omega \in \Omega_n,\ \zeta_{(n)}(\omega, x) \leqslant c(\mathrm{pr})\}$ является областью принятия $\mathcal{H}(x)$ уровня $\mathrm{pr} \in [0,1]$, отвечающей *асимптотически при $n \to \infty$ байесовсому критерию*, если $c(\mathrm{pr})$ удовлетворяет условию [1)] $\int\limits_0^{c(\mathrm{pr})} \chi^2_{m-1}(t)\, dt = \mathrm{pr}$. Следовательно, *при достаточно больших n распределение нечеткого вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in X$, отвечающее наблюдению $\omega = (\omega_1, \ldots \ldots, \omega_m)$, дается равенством $g^{\xi}_{(n)}(x \,|\, \omega) = \int\limits_{\zeta_n(\omega,x)}^{\infty} \chi^2_{m-1}(t)\, dt$, $x \in X$, в котором правая часть есть* $1 - \inf\{\mathrm{pr} \,|\, \mathrm{pr} \in [0,1],\ \omega \in \Phi_n(x, \mathrm{pr})\} = 1 - \int\limits_0^{\zeta_n(\omega,x)} \chi^2_{m-1}(t)\, dt$ *и статистика $\zeta_n(\omega, x)$ определена в* (5.1.11).

Пример 5.1.6. В ряде случаев проблема адекватности модели эксперимента цели исследования сводится к проверке гипотезы, согласно которой параметр $x \geqslant 0$ нецентральности χ^2-распределения с m степенями свободы равен 0, при конкурирующем значении $x > 0$ [50]. Область принятия гипотезы $x = 0$ уровня pr, отвечающая равномерно наиболее мощному критерию, имеет вид $\Phi(0, \mathrm{pr}) = \{\omega \in \Omega, 0 \leqslant \omega \leqslant c(\mathrm{pr})\}$, где $\int\limits_0^{c(\mathrm{pr})} \chi^2_m(0,t) dt = \mathrm{pr}$, $\chi^2_m(0, \cdot)$ — плотность центрального χ^2-распределения с m степенями свободы, $\Omega = \{0 \leqslant \omega < \infty\}$ — множество значений χ^2-статистики. Поэтому $g^{\xi}(0|\omega) = 1 - \int\limits_0^{\omega} \chi^2_m(0,t) dt = \int\limits_{\omega}^{\infty} \chi^2_m(0,t) dt$ — *вариант возможности равенства $x = 0$, если наблюдается значение χ^2_m, равное ω*. С другой стороны

[1)] См. теорему 3.2.2 гл. 3, $\chi^2_{m-1}(t)$, $0 < t < \infty$, — плотность χ^2-распределения с $m-1$ степенью свободы.

$\Phi(x, \mathrm{pr}) = \{c(x, \mathrm{pr}) < \omega < \infty\}$ — область принятия гипотезы, согласно которой $x > 0$ — значение параметра нецентральности, при альтернативе $x = 0$. Здесь $\int\limits_{c(x,\mathrm{pr})}^{\infty} \chi_m^2(x,t)dt = \mathrm{pr}$ и поэтому $g^{\xi}(x\,|\,\omega) = 1 - \int\limits_{\omega}^{\infty} \chi_m^2(x,t)dt = \int\limits_{0}^{\omega} \chi_m^2(x,t)dt$ — *вариант возможности того, что* $x > 0$ — *значение параметра нецентральности* χ^2*-статистики, принявшей значение* ω, *при альтернативном значении*, *равном нулю*.

5.2. Меры правдоподобия и доверия. Моделирование субъективных суждений

Введение. Вероятностные и возможностные методы применяются при моделировании многих аспектов как неясности и неопределенности, отражающих неполноту и недостоверность информации, так и случайности, нечеткости и неточности, относящихся к ее содержанию. Модель случайности и нечеткости обычно считается вероятностной, см., например, [50, 71], или возможностной [43, 92], а неясность и неопределенность обусловлены неполным знанием последней [1] и «моделируются», как правило, вербально. Обычно «неполное знание» вероятностной $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot\,; x))$ или возможностной $(\Omega, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}(\cdot\,; x))$ моделей обусловлено их зависимостью от *неизвестного* («мешающего») параметра $x \in X$.

В научной, технической и прочей исследовательской и творческой деятельности невозможно исключить использование противоречивой, неполной и недостоверной информации, ассоциированной с опытными фактами, с практикой их использования и с полученными ранее знаниями.

В этом параграфе рассмотрены методы математического моделирования подобной информации, выраженной в форме субъективных суждений, в частности, коллективных, см. § 3.10 гл. 3, [48, 51, 52, 62].

В § 5.2.1–5.2.3 рассмотрены методы математического моделирования неполного и недостоверного знания модели $M(x)$ объекта исследования, выраженного в форме субъективных суждений модельера-исследователя (м.-и.) о возможных значениях *определяющего модель* неизвестного параметра $x \in X$.

В § 5.2.5–5.2.9 рассмотрен метод математического моделирования субъективных суждений исследователя о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$, определяющего модель $M(x) = \big(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot\,; x)\big)$ вероятностного объекта. Существо метода иллюстрирует конструкция *неопределенного случайного элемента*, ассоциированного с вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot\,; x))$, известным с точ-

[1] Неясность и неопределенность характерны и при точно известной модели, если речь идет о предсказании результата испытания.

ностью до значения параметра $x \in X$ и *моделирующим объект исследования*, и с предложенным модельером-исследователем пространством $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, в котором $\widetilde{x}$ — неопределенный элемент со значениями в X, моделирующий «неизвестный параметр» $x \in X$, а меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, как и в § 5.2.1–5.2.3, характеризуют субъективные суждения модельера-исследователя (м.-и.) об истинности каждого значения $x \in X$ значениями $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$.

В § 5.4.1–5.4.4 рассмотрено понятие неопределенного нечеткого элемента $\widetilde{\eta}$, как нечеткого элемента η с неопределенными распределениями возможностей и необходимостей его значений, и субъективная неопределенная нечеткая модель $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}, \mathrm{N}^{\widetilde{\eta}})$ объекта исследования, ассоциированная с его нечеткой моделью $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}(\cdot; x)$, $\mathrm{N}^{\eta}(\cdot; x))$, заданной с точностью до неизвестного параметра $x \in X$, и с предложенным м.-и. пространством $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в котором неопределенный элемент $\widetilde{x}$ моделирует субъективные представления м.-и. о возможных значениях неизвестного $x \in X$.

5.2.1. Неопределенный элемент. Меры правдоподобия Pl и доверия Bel. Предположим, что семейство моделей $M(X)$, $x \in X$, характеризует объект исследования как его *неопределенная модель*. Рассмотрим в качестве математической модели «неизвестного параметра» *неопределенный элемент* (н. э.) $\widetilde{x}$, *канонический* для пространства с правдоподобием и доверием $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в котором X — множество значений $\widetilde{x}$, $\mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, меры правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$, где (далее в этой главе) $\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times) = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$ и $\widehat{\mathcal{L}} = (\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]}, \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = ([0,1], \geqslant, \min, \max)$, где $\widehat{0} = 1$, $\widehat{1} = 0$ и $\widehat{[\widehat{0}, \widehat{1}]} = [0,1]$, суть шкалы их значений, определены равенствами[1])

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) \triangleq \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \sup_{x \in E} t^{\widetilde{x}}(x),\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) \triangleq 0, \\ &\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) \triangleq \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \inf_{x \in X \setminus E} \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x),\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) \triangleq 1, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

в которых $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x),\ \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x),\ x \in X, \tag{5.2.2}$$

и использован тот факт, что $E = \bigcup\limits_{x \in E} \{x\} \equiv \bigcap\limits_{x \in X \setminus E} (X \setminus \{x\})$.

Функции $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$ *задают н. э.* $\widetilde{x}$ и называются *распределениями правдоподобий и доверий его значений*. Согласно (5.2.2) $t^{\widetilde{x}}(x)$ и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)$ суть правдоподобие равенства $\widetilde{x} = x$ и доверие неравенства $\widetilde{x} \neq x$, а согласно (5.2.1) н. э. $\widetilde{x}$ *определяет* меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$

---

[1]) $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и $\widetilde{x}$ суть формальные аналоги мер возможности P, необходимости N и нечеткого элемента, шкалы $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ — аналоги шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$.

и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и поэтому называется каноническим для пространства $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, а последнее *называется моделью* н. э. $\widetilde{x}$.

В этой главе меры Pl и Bel следует интерпретировать как математические аналоги неформальных терминов «правдоподобие» и «доверие», используемых в математической статистике. Заметим также, что $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ удовлетворяет условиям Шеффера [138], которым должна удовлетворять его «belief function», в частности, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E_1 \cup \ldots \cup E_n) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E_i) - \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E_i \cap E_j) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E_1 \cap \ldots \cap E_n)$.

Определения (5.2.1), (5.2.2) и их содержательная интерпретация суть следствия условий:

► модельер-исследователь *может*, см. замечание 5.2.3, основываясь на своих, как правило, ассоциативных, интуитивных и других неполных и недостоверных априорных знаниях свойств объекта исследования, *предложить* (субъективную) *модель* $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$, указав в (5.2.2), насколько, по его мнению, *относительно правдоподобны* равенства $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, и насколько *следует относительно доверять* неравенствам $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$.

В данном случае «относительно» означает, что в модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ неопределенного элемента $\widetilde{x}$

1) *численные значения* мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)$, $E \in \mathcal{P}(X)$, в (5.2.1), *отличные от нуля и единицы, не могут быть содержательно истолкованы* [1]), а *существенна лишь их упорядоченность*;

2) меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}$ ($\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}$) считаются эквивалентными, если $\exists\, \gamma(\cdot) \in \Gamma \;\; \forall\, E \in \mathcal{P}(X) \;\; \gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Pl}'^{\widetilde{x}}(E)$ $(\exists\, \gamma(\cdot) \in \Gamma \;\; \forall\, E \in \mathcal{P}(X)$ $\gamma(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)) = \mathrm{Bel}'^{\widetilde{x}}(E))$, где Γ — класс непрерывных, строго монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$, образующий группу относительно групповой операции «$\circ$», $\gamma \circ \gamma'(a) = \gamma(\gamma'(a))$, $a \in [0,1]$. Следовательно, если $\gamma \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) = \gamma(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E))$, $E \in \mathcal{P}(X)$, $(\gamma \circ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) = \gamma(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E))$, $E \in \mathcal{P}(X))$, то меры правдоподобия $\gamma \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ (доверия $\gamma \circ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$) *взаимно эквивалентны*, каждая из них называется вариантом (меры) правдоподобия (доверия). В частности, каждое из взаимно эквивалентных распределений $\gamma \circ t^{\widetilde{x}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, правдоподобий (доверий $\gamma \circ \widehat{s}^{\widetilde{x}}$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$) значений н. э. $\widetilde{x}$ называется *вариантом распределения* правдоподобий (доверий) значений $\widetilde{x}$.

Условия 1), 2) в терминах свойств шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$, означают, что

► группа Γ функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ определяет:

[1]) См., однако, § 1.16 гл. 1, где показано, что м.-и. могут «договориться», как «содержательно истолковывать» и другие значения мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$.

1. *группу* $\overline{\Gamma}$ *автоморфизмов* $\gamma\colon \mathcal{L}\to\mathcal{L}$ *и* $\gamma\colon \widehat{\mathcal{L}}\to\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$, *шкал* $\mathcal{L} = ([0,1],\leqslant,+,\times) = ([0,1],\leqslant,\max,\min)$ и $\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1],\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times}) = ([0,1],\geqslant,\min,\max)$ значений мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X)\to\mathcal{L}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X)\to\widehat{\mathcal{L}}$. Это означает, что $\forall\,\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \forall\,a,b\in[0,1]\ \gamma([0,1])=[0,1]$, $\gamma(a*b)=\gamma(a)*\gamma(b)$, где $*$ — символ любой из *бинарных операций*: сложения $+$, $\widehat{+}$ и умножения $\times$, $\widehat{\times}$, и для *бинарных отношений*: $a\leqslant b\Leftrightarrow\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\widetilde{\leqslant}b\Leftrightarrow\gamma(a)\widetilde{\leqslant}\gamma(b)$;

2. *группу изоморфизмов*, обозначим и ее $\overline{\Gamma}$, $\gamma\colon\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\colon\widehat{\mathcal{L}}\to\gamma\widehat{\mathcal{L}}$, $\gamma\in\overline{\Gamma}$, согласно которым $\forall\,\gamma(\cdot)\in\Gamma\ \forall\,a\in\mathcal{L},\widehat{\mathcal{L}}\Leftrightarrow\gamma(a)\in\gamma\mathcal{L},\gamma\widehat{\mathcal{L}}$ и *определены* бинарные операции $*$ и бинарные отношения $\leqslant$, $\widehat{\leqslant}$ в изоморфных $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ шкалах $\gamma\mathcal{L}$ и $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$: $\forall\,\gamma\in\Gamma\ \ a*b\to\gamma(a*b)\overset{\triangle}{=}\gamma(a)*\gamma(b)$, $a\leqslant b\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}\gamma(a)\leqslant\gamma(b)$, $a\,\widehat{\leqslant}\,b\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}\gamma(a)\,\widehat{\leqslant}\,\gamma(b)$, $a,b\in\mathcal{L},\widehat{\mathcal{L}}$.

► Что касается операций сложения и умножения, то равенства $a+b=a\,\widehat{\times}\,b=\max\{a,b\}$, $a\times b=a\,\widehat{+}\,b=\min\{a,b\}$, $a,b\in[0,1]$ в $\mathcal{L}$ и в $\widehat{\mathcal{L}}$, *следуют* теперь из требований:

непрерывности операции $*$ *как отображения* $[0,1]^2\to[0,1]$, коммутативности $a*b=b*a$, $a,b\in[0,1]$,

эквивалентности $a\leqslant b\Leftrightarrow b\,\widehat{\leqslant}\,a$ и следующих *свойств элементов* 0 и 1 шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ [52]: $a+0=a\,\widehat{\times}\,0=a\times 1=a\,\widehat{+}\,1=a$, $a+1=a\,\widehat{\times}\,1=1$, $a\times 0=a\,\widehat{+}\,0=0$, $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=1$, $\gamma(\cdot)\in\Gamma$, согласно которым $\widehat{\mathcal{L}}=(\widehat{[\widehat{0},\widehat{1}]},\widehat{\leqslant},\widehat{+},\widehat{\times})$, где $\widehat{0}=1$, $\widehat{1}=0$, $\widehat{[\widehat{0},\widehat{1}]}=[0,1]$.

Поскольку согласно условию 2 шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\in\Gamma$, и шкалы $\widehat{\gamma}\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\gamma}\in\Gamma$, называемые далее *координатными представлениями шкал* [1] $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$, *эквивалентны*, любой модельер-исследователь может сообразно своим предпочтениям выбрать любую пару $\gamma\mathcal{L}$ и $\widehat{\gamma}\mathcal{L}$ координатных представлений шкал $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ для формулировки модели н. э. $\widetilde{x}$, выбрав изоморфизмы $\gamma\colon\mathcal{L}\to\gamma\mathcal{L}$ и $\widehat{\gamma}\colon\widehat{\mathcal{L}}\to\widehat{\gamma}\widehat{\mathcal{L}}$, согласно которым $\mathcal{L}\ni a\to\gamma(a)\in\gamma\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}\ni\widehat{a}\to\widehat{\gamma}(\widehat{a})\in\widehat{\gamma}\widehat{\mathcal{L}}$. При этом, будучи сформулированными в некоторых парах координатных представлений шкал $\mathcal{L}'$, $\widehat{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{L}''$, $\widehat{\mathcal{L}}''$, модели считаются *эквивалентными*, если *существует* пара координатных представлений шкал [2] $\mathcal{L}=\gamma'\mathcal{L}'=\gamma''\mathcal{L}''$ и $\widehat{\mathcal{L}}=\widehat{\gamma}'\widehat{\mathcal{L}}'=\widehat{\gamma}''\widehat{\mathcal{L}}''$, $\gamma',\gamma'',\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}''\in\overline{\Gamma}$, в которых их формулировки совпадают, а *содержательно истолкованы* могут быть только те, формулировки которых *не зависят* от выбора шкал $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$, т. е. одинаковы для всех модельеров-исследователей.

---

[1] «Координаты» $a,\widehat{a}\in[0,1]$ в шкалах $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ представлены «координатами» $\gamma(a),\gamma(\widehat{a})\in[0,1]$ в шкалах $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma\widehat{\mathcal{L}}$.

[2] Далее условимся для краткости вместо «выбор координатного представления шкалы» говорить и писать «выбор шкалы».

В терминах операций сложения и умножения в шкалах $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ равенства в (5.2.1) для любого $E \in \mathcal{P}(X)$ имеют вид

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \underset{x \in E}{+} t^{\widetilde{x}}(x),\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E) = \underset{x \in X \setminus E}{\widehat{+}} \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x),$$

причем для $E = X$ и $E = \varnothing$:

► принимаются независящие от выбора шкал $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$ условия нормировки

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X) = \underset{x \in X}{+} t^{\widetilde{x}}(x) = 1,\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing) = \underset{x \in X}{\widehat{+}} \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = 0, \tag{5.2.1*}$$

в случае конечного X означающие, что среди значений $x \in X$ непременно есть истинное, определяющее модель объекта исследования, и

► $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varnothing) = \underset{x \in \varnothing}{+} t^{\widetilde{x}}(x) \triangleq 0$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(X) = \underset{x \in \varnothing}{\widehat{+}} \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \triangleq 1$.

5.2.2. Интегрирование относительно мер Pl и Bel; pl- и bel-интегралы. Обозначим $\mathcal{L}(X)$ ($\widehat{\mathcal{L}}(X)$) класс функций $g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$ ($\widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$) с операциями $(g_1 * g_2)(x) \triangleq g_1(x) * g_2(x)$, $x \in X$, $((\widehat{g}_1 \mathbin{\widehat{*}} \widehat{g}_2)(x) \triangleq \widehat{g}_1(x) \mathbin{\widehat{*}} \widehat{g}_2(x)$, $x \in X)$, где $*$ ($\widehat{*}$) — любая из операций $+$, $\times$ ($\widehat{+}$, $\widehat{\times}$). Далее $\mathcal{L}(X)$ и $\widehat{\mathcal{L}}(X)$ суть классы *всех* функций $X \to [0,1]$ с операциями сложения и умножения $+$, $\times$ и $\widehat{+}$, $\widehat{\times}$ и отношениями $\leqslant$ и $\widehat{\leqslant}$ соответственно.

Определение 5.2.1. Назовем pl- (bel-) интегралом функцию $\mathrm{pl}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ ($\mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{L}}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$),

► однородную: $\forall\, a \in [0,1]\ \forall\, g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}\ \mathrm{pl}((a \times g)(\cdot)) = a \times \mathrm{pl}(g(\cdot))$, где в левой части равенства $a(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, $a(x) = a$, $x \in X$, $(\forall\, \widehat{a} \in [0,1]$ $\forall\, \widehat{g}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}\ \mathrm{bel}((\widehat{a} \mathbin{\widehat{\times}} \widehat{g})(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}(\widehat{a} \mathbin{\widehat{\times}} \widehat{g}(\cdot)) = \widehat{a} \mathbin{\widehat{\times}} \mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)))$ и

► вполне аддитивную: $\forall\, g_j(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, $j \in J$, $\mathrm{pl}((\underset{j \in J}{+} g_j)(\cdot)) = \underset{j \in J}{+} \mathrm{pl}(g_j(\cdot))$ $(\forall\, \widehat{g}_j(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$, $j \in J$, $\mathrm{bel}((\underset{j \in J}{\widehat{+}} \widehat{g}_j)(\cdot)) = \underset{j \in J}{\widehat{+}} \mathrm{bel}(\widehat{g}_j(\cdot)))$, где J — произвольное множество индексов.

Определим меры правдоподобия $\mathrm{Pl}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widehat{\mathcal{L}}$ равенствами: $\forall\, E \in \mathcal{P}(X)$ $\mathrm{Pl}(E) \triangleq \mathrm{pl}(\chi_E(\cdot))$ и $\mathrm{Bel}(E) \triangleq \mathrm{bel}(\widehat{\chi}_E(\cdot))$, где $\widehat{\chi}_E(\cdot) = \theta \circ \chi_{X \setminus E}(\cdot) = \chi_E(\cdot)$, $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases}$ $x \in X$.

Теорема 5.2.1. $\forall\, \mathrm{pl}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}\quad \exists\, t(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}\quad \forall\, g(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$

$$\mathrm{pl}(g(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min\{t(x), g(x)\} \equiv \underset{x \in X}{+} (t(x) \times g(x)) = \mathrm{pl}_t(g(\cdot)), \tag{5.2.3}$$

$$\forall\,\mathrm{bel}(\cdot)\colon \widehat{\mathcal{L}}(X)\to\widehat{\mathcal{L}}\quad \exists\,\widehat{s}(\cdot)\colon X\to\widehat{\mathcal{L}}\quad \forall\,\widehat{g}(\cdot)\colon X\to\widehat{\mathcal{L}}$$

$$\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \inf_{x\in X}\max\{\widehat{s}(x),\widehat{g}(x)\} \equiv \mathop{\widehat{+}}_{x\in X}(\widehat{s}(x)\,\widehat{\times}\,\widehat{g}(x)) = \mathrm{bel}_{\widehat{s}}(\widehat{g}(\cdot)). \quad (5.2.4)$$

Доказательство. Для любых функций $g(\cdot)\colon X\to\mathcal{L}$ и $\widehat{g}(\cdot)\colon X\to\widehat{\mathcal{L}}$ имеют место следующие «интегральные представления»:

$$g(x) = \sup_{y\in X}\min\{g(y),\chi_{\{y\}}(x)\} \equiv \mathop{+}_{y\in X}(g(y)\times\chi_{\{y\}}(x)),\ x\in X,$$

$$\widehat{g}(x) = \inf_{y\in X}\max\{\widehat{g}(y),\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(x)\} \equiv \mathop{\widehat{+}}_{y\in X}(\widehat{g}(y)\,\widehat{\times}\,\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(x)),\ x\in X.$$

Поэтому в силу однородности и полной аддитивности pl- и bel-интегралов,

$$\mathrm{pl}(g(\cdot)) = \mathop{+}_{y\in X}(g(y)\times\mathrm{pl}(\chi_{\{y\}}(\cdot))) \equiv \mathop{+}_{y\in X}(g(y)\times t(y)) = \mathrm{pl}_t(g(\cdot)),$$

где $t(y) = \mathrm{pl}(\chi_{\{y\}}(\cdot)) = \mathrm{pl}_t(\chi_{\{y\}}(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pl}_t(\{y\}),\ y\in X$;

$$\mathrm{bel}(\widehat{g}(\cdot)) = \mathop{\widehat{+}}_{y\in X}(\widehat{g}(y)\,\widehat{\times}\,\mathrm{bel}(\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(\cdot))) \equiv \mathop{\widehat{+}}_{y\in X}(\widehat{g}(y)\,\widehat{\times}\,\widehat{s}(y)) = \mathrm{bel}_{\widehat{s}}(\widehat{g}(\cdot)),$$

где $\widehat{s}(y) = \mathrm{bel}(\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(\cdot)) = \mathrm{bel}_{\widehat{s}}(\widehat{\chi}_{X\setminus\{y\}}(\cdot)) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Bel}_{\widehat{s}}(X\setminus\{y\}),\ y\in X.$ ■

Следствия. 1. Равенства (5.2.1) и (5.2.2) *суть следствия* определения 5.2.1: $\forall\,E\in\mathcal{P}(X)\ \ \mathrm{Pl}(E) = \mathrm{pl}_t(\chi_E(\cdot)) = \mathrm{Pl}_t(E) = \mathop{+}_{x\in E} t(x)$, $\mathrm{Bel}(E) = \mathrm{bel}_{\widehat{s}}(\widehat{\chi}_E(\cdot)) = \mathrm{Bel}_{\widehat{s}}(E) = \mathop{\widehat{+}}_{x\in X\setminus E}\widehat{s}(x)$.

2. Соответственно pl- и bel-интегралы (5.2.3) и (5.2.4) суть интегралы Лебега относительно мер Pl и Bel (5.2.1), см. § 1.6.1, 1.6.3.

3. Полная аддитивность мер Pl_t и $\mathrm{Bel}_{\widehat{s}}$: $\mathrm{Pl}_t(\bigcup\limits_{j\in J}E_j) = \mathrm{pl}_t(\chi_{\bigcup\limits_{j\in J}E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{pl}_t((\mathop{+}\limits_{j\in J}\chi_{E_j})(\cdot)) = \mathop{+}\limits_{j\in J}\mathrm{Pl}_t(E_j) \equiv \sup\limits_{j\in J}\mathrm{Pl}_t(E_j)$, $\mathrm{Bel}_{\widehat{s}}(\bigcap\limits_{j\in J}E_j) = \mathrm{bel}_{\widehat{s}}(\widehat{\chi}_{\bigcap\limits_{j\in J}E_j}(\cdot)) \equiv \mathrm{bel}_{\widehat{s}}((\mathop{\widehat{+}}\limits_{j\in J}\widehat{\chi}_{E_j})(\cdot)) = \mathop{\widehat{+}}\limits_{j\in J}\mathrm{Bel}_{\widehat{s}}(E_j) \equiv \inf\limits_{j\in J}\mathrm{Bel}_{\widehat{s}}(E_j)$, т. е. Pl_t и $\mathrm{Bel}_{\widehat{s}}$ — *вполне аддитивные меры.*

В заключение охарактеризуем н. э. $\widetilde{x}$, канонический для $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}_t,\mathrm{Bel}_{\widehat{s}})$, следующими распределениями

$$t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x) = \mathrm{Pl}_t(\{x\}) = t(x),\ x\in X,$$
$$\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x) = \mathrm{Bel}_{\widehat{s}}(X\setminus\{x\}) = \widehat{s}(x),\ x\in X, \quad (5.2.5)$$

согласно которым

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(x\in E) = \mathrm{Pl}_t(E) = \mathop{+}_{x\in E} t^{\widetilde{x}}(x),$$
$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(x\in E) = \mathrm{Bel}_{\widehat{s}}(E) = \mathop{\widehat{+}}_{x\in X\setminus E}\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)$$

и, следовательно, $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}) \equiv (X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}_{t^{\widetilde{x}}},\mathrm{Bel}_{\widehat{s}^{\widetilde{x}}})$.

5.2.3. Неопределенный элемент как неопределенная высказывательная переменная. Математическая модель субъективных суждений. В рассматриваемом контексте естественно считать, что н. э. $\widetilde{x}$ моделирует субъективные суждения модельера-исследователя, как его *неопределенные высказывания* о возможных значениях $x \in X$, и их модальности. Такая модель н. э. основана на *теоретико-множественном представлении логики высказываний*, согласно которому в $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ X — множество элементарных высказываний, любое высказывание a взаимно однозначно представлено множеством $A \in \mathcal{P}(X)$ элементарных высказываний $x \in X$, каждое из которых влечет a: $a \leftrightarrow A = \bigcup\limits_{\substack{x \in X \\ x \to a}} \{x\} \equiv \{x \in X,\ x \to a\}$, где $\leftrightarrow$ и $\to$ суть символы взаимно однозначного соответствия и логической импликации соответственно. Наконец, каждое элементарное высказывание $x \in X$ представлено в X одноточечным множеством $\{x\}$, $x \leftrightarrow \{x\}$, и выделено среди всех высказываний условием, согласно которому любое элементарное высказывание $x \in X$ не следует ни из какого высказывания, кроме x и всегда ложного высказывания $\mathbf{0}$.

При таком представлении, если $a \leftrightarrow A$, $b \leftrightarrow B$, то конъюнкция $a \,\&\, b \leftrightarrow A \cap B$, дизъюнкция $a \vee b \leftrightarrow A \cup B$, отрицание $\neg\, a \leftrightarrow X \setminus A$, импликация $a \to b \equiv (\neg\, a) \vee b \leftrightarrow (X \setminus A) \cup B$, всегда истинное высказывание $\mathbf{1} \leftrightarrow X$, всегда ложное $\mathbf{0} \leftrightarrow \varnothing$, а меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ следует интерпретировать как *модальные операторы*, определенные на множестве всех высказываний $\mathcal{P}(X)$ и принимающие значения в шкалах $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ соответственно.

В этой связи правдоподобие $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$ $(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E))$ будем интерпретировать как правдоподобие истинности неопределенного высказывания (н. в.), согласно которому $\widetilde{x} = x$ $(\widetilde{x} \in E)$, где $x \leftrightarrow \{x\}$ $(e \leftrightarrow E)$. Соответственно доверие $s^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$ $(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E))$ будем интерпретировать как доверие истинности н. в. (субъективного суждения), согласно которому $\widetilde{x} \in X \setminus \{x\}$ $(\widetilde{x} \in E)$, где $\neg\, x \leftrightarrow X \setminus \{x\}$ $(e \leftrightarrow E)$, $x \in X$.

Замечание 5.2.1. Пусть $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$ — некоторая функция, задающая н. э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, тогда согласно (5.2.1), (5.2.2) $\widetilde{y}$ — н. э., канонический для пространства $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$, в котором

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \sup_{y \in A} t^{\widetilde{y}}(y),$$
$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \in A) = \inf_{y \in Y \setminus A} \widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(y),\ A \in \mathcal{P}(Y),$$

где

$$t^{\widetilde{y}}(y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) = y) = \sup_{\substack{x \in X \\ \varphi(x) = y}} t^{\widetilde{x}}(x), \tag{5.2.6}$$
$$\widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x}) \neq y) = \inf_{\substack{x \in X, \\ \varphi(x) = y}} \widehat{s}^{\,\widetilde{x}}(x)$$

суть правдоподобие истинности н. в., согласно которому $\varphi(\widetilde{x})=y$, и соответственно доверие истинности н. в., согласно которому $\varphi(\widetilde{x})\neq y$, $y\in Y$, причем $\sup\limits_{y\in Y} t^{\widetilde{y}}(y)=1$, $\inf\limits_{y\in Y}\widehat{s}^{\widetilde{y}}(y)=0$, ибо $\varphi^{-1}(Y)=X$, см. (5.2.1*).

Замечание 5.2.2. Пусть $A^{\cdot}\colon X\to\mathcal{P}(Y)$ и $A_{\cdot}\colon Y\to\mathcal{P}(X)$ — взаимно обратные отображения: $\forall\, x\in X$ $A^x=\{y\in Y,\ x\in A_y\}$, $\forall\, y\in Y$ $A_y=\{x\in X,\ y\in A^x\}$. Назовем *неопределенным множеством* (н. м.), заданным на $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $\mathcal{P}(Y)$, образ $A^{\widetilde{x}}$ н. э. $\widetilde{x}$, его индикаторными функциями одноточечного покрытия назовем

$$\begin{aligned} &t^{A^{\widetilde{x}}}(y)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}})\equiv\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in A_y),\ y\in Y, \\ &\widehat{s}^{A^{\widetilde{x}}}(y)=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}})\equiv\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in A_y),\ y\in Y; \end{aligned} \tag{5.2.6*}$$

в данном случае $t^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ и $\widehat{s}^{A^{\widetilde{x}}}(y)$ суть правдоподобие и доверие истинности н. в., согласно которому $y\in A^{\widetilde{x}}$ или, что эквивалентно, $\widetilde{x}\in A_y$, $y\in Y$.

Пусть н. м. $A^{\widetilde{x}}$ и н. э. $\varphi(\widetilde{x})$ независимы в смысле одноточечного покрытия, см. § 1.12.2 гл. 1, т. е. пусть $\forall\, y\in Y$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}}\ \&\ y=\varphi(\widetilde{x}))=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}})\times\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y=\varphi(\widetilde{x}))=t^{A^{\widetilde{x}}}(y)\times t^{\varphi(\widetilde{x})}(y),$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}}\vee y\neq\varphi(\widetilde{x}))=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y\in A^{\widetilde{x}})\,\widehat{\times}\,\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(y\neq\varphi(\widetilde{x}))=\widehat{s}^{A^{\widetilde{x}}}(y)\,\widehat{\times}\,\widehat{s}^{\varphi(\widetilde{x})}(y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x})\in A^{\widetilde{x}})&=\mathop{+}_{y\in Y}(t^{\varphi(\widetilde{x})}(y)\times t^{A^{\widetilde{x}}}(y))=\mathrm{pl}_{t^{\varphi(\widetilde{x})}}(t^{A^{\widetilde{x}}}(\cdot)) \\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varphi(\widetilde{x})\in A^{\widetilde{x}})&=\mathop{\widehat{+}}_{y\in Y}(\widehat{s}^{\varphi(\widetilde{x})}(y)\,\widehat{\times}\,\widehat{s}^{A^{\widetilde{x}}}(y))=\mathrm{bel}_{\widehat{s}^{\varphi(\widetilde{x})}}(\widehat{s}^{A^{\widetilde{x}}}(\cdot)) \end{aligned} \tag{5.2.6**}$$

суть правдоподобие и доверие истинности н. в., согласно которому $\widetilde{y}=\varphi(\widetilde{x})\in A^{\widetilde{x}}$, см. теорему 5.2.1.

Замечание 5.2.3. В тех редких случаях, когда модельер-исследователь «абсолютно ничего не знает» об объекте исследования и считает, что «не может» априори охарактеризовать его модель $M(x)$ в терминах относительных правдоподобий и доверий истинности значений параметра $x\in X$, ему следует воспользоваться *представлением* «полного, абсолютного незнания» *инвариантными относительно выбора* (*координатных представлений*) *шкал* $\mathcal{L}$ *и* $\widehat{\mathcal{L}}$ *значений* мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ следующими их *распределениями*:

$t^{\widetilde{x}}(x)=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x)=1$, $x\in X$, согласно которому все значения н. э. $\widetilde{x}$ равноправдоподобны, $\sup\limits_{x\in X} t^{\widetilde{x}}(x)=1$, и

$\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x)=0$, $x\in X$, согласно которому любому неравенству $\widetilde{x}\neq x$, $x\in X$, доверять нельзя, $\inf\limits_{x\in X}\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)=0$, см. (5.2.2), (5.2.1*).

В этих случаях *такие же распределения в* (5.2.6) *будет иметь любая функция* $\varphi(\widetilde{x})=\widetilde{y}$, а именно, $t^{\widetilde{y}}(y)=1$, $\widehat{s}^{\widetilde{y}}(y)=0$, $y\in Y$, см. (5.2.6).

С другой стороны, «полное, абсолютное знание» модели объекта означает, что $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0, \\ 0, & \text{если } x \neq x_0, \end{cases}$ $x \in X$, т.е. что x_0 — единственное правдоподобное значение параметра модели, а $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq x_0, \\ 0, & \text{если } x = x_0, \end{cases}$ $x \in X$, т.е. что x_0 — единственное значение параметра, при котором неравенству $\widetilde{x} \neq x_0$ доверять нельзя; иначе говоря, x_0 — истинное значение параметра модели, доподлинно известное модельеру-исследователю, а в (5.2.6) в этом случае $t^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y = y_0, \\ 0, & y \neq y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, $\widehat{s}^{\widetilde{y}}(y) = \begin{cases} 1, & y \neq y_0, \\ 0, & y = y_0, \end{cases}$ $y \in Y$, где $y_0 = \varphi(x_0)$.

Следовательно, на самом деле модельер-исследователь *в любом случае может предложить* модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$.

Эти замечания позволят модельеру-исследователю, исходя из модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$, определять правдоподобия и доверия истинности (его) н. в. о *любых* значениях *любых* характеристик объекта как функций н. э. $\widetilde{x}$. Пусть, например, $M(\widetilde{x})$ — субъективная модель объекта исследования, предложенная модельером-исследователем (как следствие его модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$) вместо модели $M(x)$ объекта, параметр $x \in X$ которой неизвестен. Тогда для любой неопределенной характеристики последнего $\varphi(\widetilde{x}) = \Phi(M(\widetilde{x}))$ или $A^{\widetilde{x}} = \mathrm{F}(M(\widetilde{x}))$ правдоподобие и доверие истинности н. в., согласно которым $\varphi(\widetilde{x}) = y$, $\varphi(\widetilde{x}) \neq y$, $y \in A^{\widetilde{x}}$, $y \in Y$, и $\varphi(\widetilde{x}) \in A^{\widetilde{x}}$ определены в (5.2.6), (5.2.6*) и в (5.2.6**). Рассмотрим несколько примеров использования сказанного в замечаниях 5.2.1–5.2.3 в прикладных задачах.

5.2.3.1. Субъективная модель измерительного эксперимента. Интерпретация данных. Рассмотрим задачу интерпретации данных измерительного эксперимента (И. Э.), выполненного согласно схеме

$$\widetilde{z} = A\widetilde{f} + \widetilde{h}, \tag{5.2.7}$$

в которой $\widetilde{z}$, $\widetilde{f}$ и $\widetilde{h}$ суть н. э., моделирующие: $\widetilde{z}$ — результат измерения (данные И. Э.) как выходной сигнал измерительного преобразователя (И. П.), $\widetilde{f}$ — сигнал, поступивший на вход И. П. от измеряемого объекта, и, наконец, $\widetilde{h}$ — шум, исказивший данные $\widetilde{z}$ И. Э., см. гл. 7.

Речь идет о так называемых «косвенных измерениях» в И. Э., когда значения $\widetilde{u}$ представляющих интерес параметров исследуемого объекта не могут быть «измерены непосредственно», а измеряются значения $\widetilde{f}$ других параметров, связанных с параметрами, представляющими интерес, причем значения последних при этом оказываются искаженными, поскольку объект возмущен измерением. Задача интерпретации данных И. Э. состоит в том, чтобы из данных $\widetilde{z}$ И. Э. максимально точно извлечь правдоподобные значения $\widetilde{u}$ представляющих интерес параметров, причем — не участвующего в И. Э. объекта *измеряемого*, а невозмущенного измерением объекта *исследуемого*.

Обозначим $[A, t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}]$ *субъективную модель* И. П. (и схемы измерения (5.2.7)), в которой $A\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^n$ — известный оператор, $t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}(f,h)$, $f \in \mathcal{R}^m$, $h \in \mathcal{R}^n$, — распределение правдоподобий значений пары н. э. $\widetilde{f}, \widetilde{h}$, *предложенное исследователем*; в данном случае согласно использованным ранее обозначениям $(\widetilde{f}, \widetilde{h}) = \widetilde{x}$, $[A, t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}] = M(\widetilde{x})$, $\mathcal{R}^m \otimes \mathcal{R}^n = X$.

Задачу интерпретации данных $\widetilde{z}$ И. Э. рассмотрим как задачу редукции данных [50] $\widetilde{z}$ к виду, свойственному измерению на *идеальном* И. П. по схеме

$$\widetilde{u} = U\widetilde{f} + \widetilde{v}, \tag{5.2.8}$$

в которой $\widetilde{u}$, $\widetilde{f}$ и $\widetilde{v}$ суть н. э., моделирующие: $\widetilde{u}$ — выходной сигнал идеального И. П., который определяет значения недоступных для непосредственного измерения параметров *исследуемого* объекта, интересующих исследователя, $\widetilde{f}$ — входной сигнал идеального И. П., поступивший от измеряемого объекта[1]), н. э. $\widetilde{v}$, подобно $\widetilde{h}$ в (5.2.7), моделирует шум, но, в отличие от $\widetilde{h}$, правдоподобие неравенства $\widetilde{v} \neq 0$ равно нулю, т. е. в идеальном И. П. $\widetilde{v}$ не искажает $\widetilde{u}$. В модели $[U, t^{\widetilde{f},\widetilde{v}}]$ идеального И. П. $U\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^k$ — заданный оператор, $t^{\widetilde{f},\widetilde{v}}(f,v)$, $f \in \mathcal{R}^m$, $v \in \mathcal{R}^k$, — распределение правдоподобий значений н. э. $\widetilde{f}, \widetilde{v}$, удовлетворяющее условию $t^{\widetilde{f},\widetilde{v}}(f,v) = t^{\widetilde{f}}(f)$, если $v = 0$, $t^{\widetilde{f},\widetilde{v}}(f,v) = 0$, если $\widetilde{v} \neq 0$, $f \in \mathcal{R}^m$, $v \in \mathcal{R}^k$, согласно которому $t^{\widetilde{v}}(v) = \sup\limits_{f \in \mathcal{R}^m} t^{\widetilde{f},\widetilde{v}}(f,v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v = 0, \\ 0, & \text{если } v \neq 0, \end{cases}$ т. е. в (5.2.8) шум $\widetilde{v}$ не вносит искажений в $\widetilde{u}$, соответственно $[U, t^{\widetilde{f},\widetilde{v}}] = [U, t^{\widetilde{f}}]$ — модель идеального И. П. и в (5.2.8) $\widetilde{u} = U\widetilde{f}$.

В задаче редукции измерения, выполненного по схеме (5.2.7), которую далее будем называть и задачей редукции И. П. $[A, t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}]$ к идеальному И. П. $[U, t^{\widetilde{f}}]$, $[A, t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}] \to [U, t^{\widetilde{f}}]$, требуется преобразовать данные И. Э. $\widetilde{z}$ в максимально точную оценку $R\widetilde{z}$ выходного сигнала $\widetilde{u} = U\widetilde{f}$ идеального И. П.

Поставим задачу редукции $[A, t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}] \to [U, t^{\widetilde{f}}]$ как задачу на минимум максимальной погрешности интерпретации $R\widetilde{z}$ как $U\widetilde{f}$

$$\overline{\rho}(z) = \sup\{\|Rz - Uf\| \mid f \in \mathcal{F}(z)\} = \min_{r \in \mathcal{R}^k} \sup\{\|r - Uf\| \mid f \in \mathcal{F}(z)\}, \tag{5.2.9}$$

---

[1]) Идеальный И. П. взаимодействует с *измеряемым* объектом как И. П. в (5.2.7) и поэтому на его входе $\widetilde{f}$, но на его выходе — значения параметров *исследуемого* объекта, неискаженного измерением; идеальный И. П., как правило, не может быть реализован «в железе», его выходной сигнал *вычисляется* вычислительным преобразователем, см. гл. 7. Задача эмпирического восстановления модели $M(\widetilde{x}) = [A, t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}]$ рассмотрена в § 5.4.3.

в которой [1] $R\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^k$ — искомый оператор редукции, $\overline{\rho}(z)$ оценивает сверху погрешность редукции $[A, t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}] \to [U, t^{\widetilde{f}}]$,

$$\mathcal{F}(z) = \{f \in \mathcal{R}^m,\ t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}(f, z - Af) > 0\},\ z \in \mathcal{R}^n. \tag{5.2.10}$$

Решение Rz, $z \in \mathcal{R}^n$, задачи (5.2.9), (5.2.10) определяет решение $R\widetilde{z}$ задачи интерпретации данных $\widetilde{z}$ И. Э., которое охарактеризуем совместным распределением правдоподобий значений *оценки* $R\widetilde{z}$ параметров $U\widetilde{f}$ исследуемого объекта и значений *погрешности* $\|R\widetilde{z} - U\widetilde{f}\|$ интерпретации $R\widetilde{z}$ как оценки $U\widetilde{f}$:

$$t^{R\widetilde{z},\|R\widetilde{z}-U\widetilde{f}\|}(r, \rho) = \sup\{t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}(f, h) \mid (f, h) \in \mathcal{R}^m \otimes \mathcal{R}^n,\ R(Af + h) = r,\\ \|R(Af + h) - Uf\| = \rho\},\ r \in \mathcal{R}^k,\ \rho \geqslant 0. \tag{5.2.11}$$

Задачу (5.2.9), (5.2.10) рассмотрим детальнее в частном случае, в котором $A\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^n$, $n \geqslant m$, невырожденный линейный оператор, т. е. $Af = 0 \Rightarrow f = 0$, $f \in \mathcal{R}^m$, $t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}(f, h) = \min\{t^{\widetilde{f}}(f), t^{\widetilde{h}}(h)\}$, $f \in \mathcal{R}^m$, $h \in \mathcal{R}^n$, т. е. н. э. $\widetilde{f}$ и $\widetilde{h}$ независимы, причем $t^{\widetilde{f}}(f) = 1$, $f \in \mathcal{R}^m$ т. е. $\widetilde{f}$ — априори любой сигнал, наконец, $t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}(f, h) = t^{\widetilde{h}}(h) = t(\|Qh\|)$, $h \in \mathcal{R}^n$, где $Q\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ — невырожденный линейный оператор, функция $t(\cdot)\colon \mathcal{R}^1_+ \to [0, 1]$ непрерывно и строго монотонно убывает на $[0, \Delta]$: $t(0) = 1$, $t(a) > 0$, $a \in [0, \Delta)$, $t(a) = 0$, $a \in [\Delta, \infty)$. Соответственно в (5.2.10)

$$\mathcal{F}(z) = \{f \in \mathcal{R}^m,\ \|Q(z - Af)\| < \Delta\}. \tag{5.2.12}$$

Пусть в задаче (5.2.9), (5.2.12) $z \in \mathcal{R}^n_\Delta = \{z \in \mathcal{R}^n,\ \|(I - \Pi_{QA})Qz\| < \Delta\}$, где $\Pi_{QA}\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}(QA) \overset{\triangle}{=} \{QAf,\ f \in \mathcal{R}^m\}$ — ортогональный проектор на пространство $\mathcal{R}(QA)$ значений оператора QA, $\Pi_{QA} = QASA^*Q^*$, где $S = (A^*Q^*QA)^{-1}$. Тогда существует единственное решение задачи (5.2.9), (5.2.12), см. введение в [50], § 7.6 гл. 7,

$$Rz = USA^*Q^*Qz,\ z \in \mathcal{R}^n_\Delta,\ \overline{\rho}(z) = \overline{\rho} = \Delta\delta^{1/2}(USU^*), \tag{5.2.13}$$

где $\delta(USU^*)$ — максимальное собственное значение оператора $USU^* \geqslant 0$. Если $z \notin \mathcal{R}^n_\Delta$, то в (5.2.12) $\mathcal{F}(z) = \varnothing$ и данные $\widetilde{z} = z$ противоречат модели $[A, t^{\widetilde{h}}]$ схемы измерения (5.2.7).

Для простоты ограничимся примерами маргинальных распределений правдоподобий значений н. э. $\|R(\widetilde{z} - A\widetilde{f})\|$ и $R\widetilde{z}$. Поскольку $t^{\widetilde{f},\widetilde{h}}(f, h) = t(\|Qh\|)$ и согласно (5.2.13) $R(Af + h) = Uf + Rh$, то распределение погрешности редукции $\overline{\rho}(\widetilde{z})$

$$t^{\|R(\widetilde{z}-A\widetilde{f})\|}(\rho) = t(\inf\{\|Qh\| \mid h \in \mathcal{R}^n,\ \|Rh\| = \rho\}) = t(\rho\delta^{-1/2}(USU^*)),\\ \rho \geqslant 0, \tag{5.2.14}$$

[1] В этом параграфе $\|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы, если не оговорено противное.

при условии, что $h \in \mathcal{R}^n_\Delta = \{h \in \mathcal{R}^n,\ \|(I - \Pi_{QA})Qh\| < \Delta\}$. Последнее равенство в (5.2.14) очевидно, если заметить, что условие $\|Rh\| = \rho$ относится лишь к ортогональной составляющей $\Pi_{QA}Qh$, поскольку $Rh = USA^*Q^*Qh = USA^*Q^*\Pi_{QA}Qh$, $h \in \mathcal{R}^n$.

Так как

$$t^{\widetilde{z}}(z) = t(\inf\{\|Qh\| \mid Af + h = z\}) = t(\inf\{\|Qh\| \mid QAf + Qh = Qz\}) = \\ = t(\inf\{\|Qh\| \mid Qh = (I - \Pi_{QA})z\}) = t(\|(I - \Pi_{QA})Qz\|),\ z \in \mathcal{R}^n_\Delta,$$

то распределение оценки $R\widetilde{z}$

$$t^{R\widetilde{z}}(r) = t(\inf\{\|(I - \Pi_{QA})Qz\| \mid z \in \mathcal{R}^n_\Delta, Rz = r\}) = 1,\ r \in \{R(z), z \in \mathcal{R}^n_\Delta\},$$

поскольку равенство $Rz = r$ ограничивает лишь значения $\Pi_{QA}Qz$ (и можно положить $(I - \Pi_{QA})Qz = 0$).

Восстановление модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$ по заданным: 1) н. э. $\varphi(\widetilde{x})$, 2) неопределенному множеству $A_{\widetilde{x}}$.

1) Рассмотрим важный случай, когда исследователь на практике имеет дело не с моделью $M(x)$, $x \in X$, объекта, а с некоторой его характеристикой $y = \varphi(x) = \Phi(M(x))$ и, естественно, готов предложить не модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$, а модель $(Y, \mathcal{P}(Y)\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$ н. э. $\widetilde{y}$. Рассмотрим, позволяет ли и в какой степени модель н. э. $\widetilde{y} = \varphi(\widetilde{x})$, где $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$ — *известная функция*, восстановить модель н. э. $\widetilde{x}$, либо неизвестный параметр $x \in X$ модели $M(x)$ в этом случае следует охарактеризовать иначе. Дело в том, что полный прообраз $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$, вообще говоря, определяет многозначное отображение $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ и, следовательно, $\varphi^{-1}(\widetilde{y}) = A^{\widetilde{y}}$ — неопределенное множество, а $\varphi^{-1}(\widetilde{y}) = \widetilde{x}$, лишь если функция $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$ имеет обратную $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to X$. Далее обозначение $\varphi^{-1}(\cdot)$ сохраним за функцией $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to X$, обратной $\varphi(\cdot)\colon X \to Y$, многозначное отображение $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ обозначим $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, где $A^y = \{x \in X,\ y = \varphi(x)\}$, $y \in Y$, обратное к $A^{\cdot}$ отображение обозначим $A_{\cdot}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, где $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\} = \{\varphi(x)\}$, $x \in X$; заметим, что $\forall\, x \in X\ \forall\, y \in Y\ x \in A^y \Leftrightarrow y \in A_x$.

В рассматриваемом случае, воспользовавшись предложенными исследователем распределениями правдоподобий $t^{\widetilde{y}}(\cdot)$ и доверий $\widehat{s}^{\widetilde{y}}(\cdot)$ н. э. $\widetilde{y}$, неизвестный параметр $x \in X$ модели $M(x)$ естественно охарактеризовать индикаторной функцией одноточечного покрытия неопределенного множества (о. п. н. м.) $A^{\widetilde{y}}$

$$t^{A^{\widetilde{y}}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(x \in A^{\widetilde{y}}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in A_x = \{\varphi(x)\}) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x)) \stackrel{\triangle}{=} t(x) = \mathrm{Pl}(\{x\}), \\ x \in X, \quad (5.2.15)$$

значение $t(x)$ которой есть правдоподобие истинности н. в., согласно которому $x \in A^{\widetilde{y}}$, $x \in X$, и индикаторной функцией одноточечного непокрытия неопределенного множества $A^{\widetilde{y}}$ (о. п. н. м. $X \setminus A^{\widetilde{y}}$)

$$\widehat{s}^{X\setminus A^{\widetilde{y}}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \subset X \setminus \{x\},\ A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(x \notin A^{\widetilde{y}}, A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) =$$
$$= \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \notin \{\varphi(x)\}, A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = \min\{\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq \varphi(x)), \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing)\} =$$
$$= \widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(\varphi(x)) \overset{\triangle}{=} \widehat{s}(x) = \mathrm{Bel}(X \setminus \{x\}),\ x \in X, \quad (5.2.16)$$

значение $\widehat{s}(x)$ которой есть доверие истинности н. в., согласно которому $x \notin A^{\widetilde{y}}$, $x \in X$, если считать, что, естественно, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = 1$. Равенства $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(x \in A^{\widetilde{y}}) = t(x)$, $x \in X$, (5.2.15) и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(x \notin A^{\widetilde{y}}) = \widehat{s}(x)$, $x \in X$, (5.2.16) следует рассматривать как *расширения* на случай, когда функция $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to X$ не существует, *равенств*

$$t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(x = \varphi^{-1}(\widetilde{y})) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = \varphi(x)) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x)),\ x \in X, \quad (5.2.17)$$

и

$$\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(x \neq \varphi^{-1}(\widetilde{y})) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \neq \varphi(x)) = \widehat{s}(\varphi(x)),\ x \in X, \quad (5.2.18)$$

имеющих смысл и эквивалентных равенствам $t^{\widetilde{y}}(y) = \sup\limits_{\substack{x \in X,\\ \varphi(x)=y}} t^{\widetilde{x}}(x)$ и $\widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(y) = \inf\limits_{\substack{x \in X,\\ \varphi(x)=y}} \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)$, $y \in Y$, в (5.2.6), лишь если существует функция $\varphi^{-1}(\cdot)\colon Y \to X$.

Наконец, меры правдоподобия $\mathrm{Pl}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ и доверия $\mathrm{Bel}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}$ в правых частях равенств (5.2.15) и (5.2.16), как нетрудно проверить, суть следующие: $\forall\, B \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}(B) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \cap B \neq \varnothing) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\bigcup_{x \in B}(A^{\widetilde{y}} \cap \{x\}) \neq \varnothing) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\bigcup_{x \in B}(\widetilde{y} \in A_x)) =$$
$$= \sup_{x \in B} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} = \varphi(x)) = \sup_{x \in B} t^{\widetilde{y}}(\varphi(x)) = \sup_{x \in B} t(x), \quad (5.2.19)$$

$$\mathrm{Bel}(B) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \subset B, A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \cap (X \setminus B) = \varnothing, A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) =$$
$$= \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\bigcup_{x \in X \setminus B}(A^{\widetilde{y}} \cap \{x\}) = \varnothing, A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\bigcap_{x \in X \setminus B}(x \notin A^{\widetilde{y}}), A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) =$$
$$= \min\{\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing), \inf_{x \in X \setminus B} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \notin A_x = \{\varphi(x)\})\} = \inf_{x \in X \setminus B} \widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(\varphi(x)) =$$
$$= \inf_{x \in X \setminus B} \widehat{s}(x), \quad (5.2.20)$$

где последние два равенства получены при естественном условии $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = 1$, которому должно удовлетворять неопределенное множество $A^{\widetilde{y}}$. Согласно (5.2.15), (5.2.16), (5.2.19), (5.2.20) пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ как модель н. э. $\widetilde{x}$ может быть задано следующими равенствами:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot) = \mathrm{Pl}(\cdot),\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot) = \mathrm{Bel}(\cdot),\\ &t^{\widetilde{x}}(x) = t(x) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x)),\ \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \widehat{s}(x) = \widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(\varphi(x)),\ x \in X, \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

в которых $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)$, как нетрудно проверить, удовлетворяют условиям в (5.2.6) как уравнениям относительно $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)$.

Согласно равенствам (5.2.15), (5.2.16) и определениям (5.2.19)–(5.2.21) неизвестный параметр $x \in X$ модели $M(x)$ моделируется как н. э. $\widetilde{x}$ неопределенными множествами $A^{\widetilde{y}}$ и $X \setminus A^{\widetilde{y}}$, согласно равенствам (5.2.15) и (5.2.16) определяющими правдоподобие равенства $x = \widetilde{x}$ и доверие неравенства $\widetilde{x} \neq x$ значениями и. ф. о. п.: $t^{\widetilde{x}} = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(x \in A^{\widetilde{y}}) = t^{A^{\widetilde{y}}}(x) = t^{\widetilde{y}}(\varphi(x))$, $x \in X$, и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \subset \subset X \setminus \{x\}) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(x \in X \setminus A^{\widetilde{y}}) = \widehat{s}^{X \setminus A^{\widetilde{y}}}(x) = \widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(\varphi(x))$, $x \in X$, при условии $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = 1$.

Понятно, что так определенная модель н. э. $\widetilde{x}$ не единственная, удовлетворяющая условиям в (5.2.6), поскольку, например, любая функция $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to [0,1]$, максимальное значение которой, равное $t^{\widetilde{y}}(y)$, достигается на множестве $A^y = \{x \in X,\ \varphi(x) = y\}$, $y \in Y$, и любая функция $\widehat{s}(\cdot)\colon X \to [0,1]$, минимальное значение которой, равное $\widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(y)$, достигается на этом же множестве при каждом $y \in Y$, также удовлетворяют этим условиям. Если же функция $\varphi(\cdot)$ имеет обратную, то условия (5.2.21) определяют единственную модель н. э. $\widetilde{x}$, поскольку в этом случае множества A^y, $y \in Y$, одноточечные, $A^y = \{\varphi^{-1}(y)\}$, $y \in Y$.

2) В более общем случае знакомая исследователю характеристика объекта определена равенствами $A_x = F(M(x))$, $x \in X$, как многозначное отображение $A_{\cdot}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, и он предлагает модель $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}})$ н. э. $\widetilde{y}$. В таком случае и. ф. о. п. $t^{A^{\widetilde{y}}}(\cdot)$ и $\widehat{s}^{X \setminus A^{\widetilde{y}}}(\cdot)$ неопределенного множества $A^{\widetilde{y}}$, как образа н. э. $\widetilde{y}$, заданного отображением $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, $A^y = \{x \in X,\ y \in A_x\}$, $y \in Y$, обратным $A_{\cdot}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, и соответственно неопределенного множества $X \setminus A^{\widetilde{y}}$, как образа н. э. $\widetilde{y}$, заданного отображением $X \setminus A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, $X \setminus A^y = \{x \in X,\ y \in Y \setminus A_x\}$, $y \in Y$, обратным $Y \setminus A_{\cdot}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, индуцируют следующие распределения правдоподобий $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и доверий $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ значений н. э. $\widetilde{x}$:

$$t^{A^{\widetilde{y}}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(x \in A^{\widetilde{y}}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \in A_x) = \sup_{y \in A_x} t^{\widetilde{y}}(y) \overset{\triangle}{=} t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x), \tag{5.2.22}$$

$$\widehat{s}^{X \setminus A^{\widetilde{y}}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(x \notin A^{\widetilde{y}}) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \notin A_x) = \\ = \inf_{y \in A_x} \widehat{s}^{\,\widetilde{y}}(y) \overset{\triangle}{=} \widehat{s}^{\,\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x),\ x \in X. \tag{5.2.23}$$

Согласно определениям (5.2.22), (5.2.23), подобно (5.2.19), (5.2.20)

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in B) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \cap B \neq \varnothing) = \sup_{x \in B} t^{\widetilde{x}}(x),\ B \in \mathcal{P}(X),$$

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in B) \overset{\triangle}{=} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \subset B, A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = \\ = \min\{\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing),\ \inf_{x \in X \setminus B} \mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(\widetilde{y} \notin A_x)\} = \inf_{x \in X \setminus B} \widehat{s}^{\,\widetilde{x}}(x),\ B \in \mathcal{P}(X),$$

при условии, что $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}(A^{\widetilde{y}} \neq \varnothing) = 1$.

В равенствах (5.2.22) и (5.2.23), как и в равенствах (5.2.15) и (5.2.16), представлена двойственность в моделировании *неопределенности значений параметра* $x \in X$, определяющих модель $M(x)$, а именно — при моделировании неопределенности распределениями *правдоподобий* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ *равенств* $\widetilde{x} = x$ и *доверий* $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ *неравенств* $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$, как *значений неопределенного элемента* $\widetilde{x}$, и при моделировании неопределенности распределениями *правдоподобий* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{y}}$ *покрытий* $x \in A^{\widetilde{y}}$ и *доверий* $\mathrm{Bel}^{\widetilde{y}}$ *непокрытий* $x \notin A^{\widetilde{y}}$, $x \in X$, неопределенным множеством $A^{\widetilde{y}}$.

Рассмотрим детальнее вопрос о неопределенности и информативности субъективных суждений м.-и., моделью которых является н. э. $\widetilde{x}$.

5.2.4. Энтропии распределений н. э. $\widetilde{x}$, моделирующего субъективные суждения м.-и., как меры их неопределенности/информативности. Как известно, см., например, § 5.6 в [50], энтропию $\mathrm{H}(\mathrm{pr.})$ как меру средней неопределенности/информативности случайного исхода испытания, модель которого — вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$, $\mathrm{Pr}(\{\omega_i\}) = \mathrm{pr}_i$, $i = 1, \ldots, k$, К. Шеннон определил равенством

$$\mathrm{H}(\mathrm{pr.}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{pr}_i \log(1/\mathrm{pr}_i), \tag{5.2.24}$$

в котором $\log(\cdot) = \log_a(\cdot)$, $a > 1$, $\log(1/\mathrm{pr}_i)$ — мера неопределенности [1]) случайного события $\{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathrm{H}(\mathrm{pr.})$ — ее математическое ожидание, называемое энтропией распределения $\mathrm{pr.} \sim \{\mathrm{pr}_1, \ldots, \mathrm{pr}_k\}$. Значение $\log(1/\mathrm{pr}_i)$ можно интерпретировать и как меру (*относительного* количества) информации в исходе $\{\omega_i\}$ испытания [2]). При такой интерпретации $\mathrm{H}(\mathrm{pr.})$ — математическое ожидание меры информации в случайном результате испытания, модель которого $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$.

Некоторые характеристические свойства энтропии/информации $\mathrm{H}(\mathrm{pr.})$ (5.2.24) рассмотрим на примере $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}) = (\Omega^{(1)} \otimes \Omega^{(2)}, \mathcal{P}(\Omega^{(1)} \otimes \Omega^{(2)}), \mathrm{Pr}^{(1,2)})$, где $\Omega^{(1)} \otimes \Omega^{(2)} = \{(\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)}),\ i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m\}$, $\mathrm{Pr}(\{(\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)})\}) = \mathrm{pr}_{i,j}^{(1,2)}$ — вероятность результата $\{(\omega_i^{(1)}, \omega_j^{(2)})\}$ пары испытаний $(1, 2)$. Согласно равенству (5.2.24)

---

[1]) Чем меньше pr_i, тем неопределеннее (определеннее) событие $\{\omega_i\}$ $(\Omega \setminus \{\omega_i\})$ и — больше (меньше) мера $\log(1/\mathrm{pr}_i)$ $(\log(1/(1 - \mathrm{pr}_i)))$ его неопределенности, $i = 1, \ldots, k$.

[2]) Относительного, ибо $\log_a(\cdot) = (\log_a b \cdot \log_b)(\cdot)$; чем меньше pr_i, тем неожиданнее наблюдение $\{\omega_i\}$, тем больше информации $\log(1/\mathrm{pr}_i)$ в наблюдении $\{\omega_i\}$, тем оно более *информативно*, и меньше информации $\log(1/(1 - \mathrm{pr}_i))$ в наблюдении $\{\omega\} \neq \{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.

$$\mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot,\cdot}^{(1,2)}) = \sum_{i,j} \mathrm{pr}_{i,j}^{(1,2)} \log(1/\mathrm{pr}_{i,j}^{(1,2)}) = \sum_{i,j} \mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)} \mathrm{pr}_{j}^{(2)} \log(1/(\mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)} \mathrm{pr}_{j}^{(2)})) =$$
$$= \sum_{j} \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot|j}^{(1|2)}) \mathrm{pr}_{j}^{(2)} + \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot}^{(2)}) \triangleq \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot|\cdot}^{(1|2)}) + \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot}^{(2)}), \quad (5.2.25)$$

где $\mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)} = \mathrm{pr}_{i,j}^{(1,2)}/\mathrm{pr}_{j}^{(2)}$ — условная вероятность исхода $\{\omega_i^{(1)}\}$ испытания (1) при условии, что $\{\omega_j^{(2)}\}$ — результат испытания (2), $\mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot|j}^{(1|2)}) = \sum_i \mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)} \log(1/\mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)})$ — энтропия условного распределения $\mathrm{pr}_{\cdot|j}^{(1|2)} \sim \{\mathrm{pr}_{1|j}^{(1|2)}, \ldots, \mathrm{pr}_{k|j}^{(1|2)}\}$, $j = 1, \ldots, m$, $\mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot|\cdot}^{(1|2)}) = \sum_j \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot|j}^{(1|2)}) \mathrm{pr}_j^{(2)}$ — условная энтропия.

Если (1) и (2) — независимые (статистически) испытания, т. е. если $\mathrm{pr}_{i,j}^{(1,2)} = \mathrm{pr}_i^{(1)} \mathrm{pr}_j^{(2)}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, то, как нетрудно убедиться, повторив для этого случая выкладки (5.2.25),

$$\mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot}^{(1)} \mathrm{pr}_{\cdot}^{(2)}) = \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot}^{(1)}) + \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot}^{(2)}). \quad (5.2.26)$$

Следствием равенства (5.2.25) является неравенство

$$\max\{\mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot}^{(2)}), \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot|\cdot}^{(1|2)})\} \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot,\cdot}^{(1,2)}), \quad (5.2.27)$$

а следствием вогнутости (выпуклости вверх) функции $\varphi(z) = z \log(1/z)$, $0 < z < \infty$, является неравенство

$$\mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot|\cdot}^{(1|2)}) \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{pr}_{\cdot}^{(1)}), \quad (5.2.28)$$

ибо вогнутость $\varphi(\cdot)$ означает, что $\forall\, i = 1, \ldots, k$

$$\sum_j (\mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)} \log(1/\mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)}) \mathrm{pr}_j^{(2)}) \leqslant \sum_j \left(\mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)} \mathrm{pr}_j^{(2)}\right) \log\left(1/\sum_j (\mathrm{pr}_{i|j}^{(1|2)} \mathrm{pr}_j^{(2)})\right) =$$
$$= \mathrm{pr}_i^{(1)} \log(1/\mathrm{pr}_i^{(1)}).$$

Неравенство (5.2.28) свидетельствует, что, будучи известными, результаты испытаний (2) в среднем уменьшают *неопределенность* и *информативность* результатов испытаний (1).

Энтропии $\mathrm{H}(t^{\widetilde{x}}(\cdot))$ и $\widehat{\mathrm{H}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot))$ распределений правдоподобий $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и доверий $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ н. э. $\widetilde{x}$, моделирующего субъективные суждения, определим, как *меры относительной информативности/неопределенности* последних, равенствами

$$\mathrm{H}_{\widehat{s}^{\widetilde{x}}}(t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min\{t^{\widetilde{x}}(x), s^{\widetilde{x}}(x)\} = \underset{x \in X}{\dot{+}} (t^{\widetilde{x}}(x) \times s^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{pl}_{t^{\widetilde{x}}}(s^{\widetilde{x}}(\cdot)), \quad (5.2.29)$$

$$\widehat{\mathrm{H}}_{t^{\widetilde{x}}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \inf_{x \in X} \max\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x), \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)\} = \underset{x \in X}{\widehat{\dot{+}}} (\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \widehat{\times} \widehat{t}^{\widetilde{x}}(x)) = \mathrm{bel}_{\widehat{s}^{\widetilde{x}}}(\widehat{t}^{\widetilde{x}}(\cdot)), \quad (5.2.30)$$

в которых $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot)$, $s^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\widehat{s^{\widetilde{x}}}(\cdot)$ суть обозначения функций $X \to \to [0,1]$ в зависимости от того, как определены операции сложения и умножения их значений, т. е. $t^{\widetilde{x}}(\cdot), s^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot), \widehat{s^{\widetilde{x}}}(\cdot)\colon X \to \widehat{\mathcal{L}}$.

Подобно интерпретации правой части равенства (5.2.24), как *меры неопределенности*, см. сноску [1] на с. 355, в равенстве (5.2.29):

▶ чем меньше *правдоподобие* $t^{\widetilde{x}}(x)$ *истинности равенства* $\widetilde{x} = x$, тем больше *доверие*[1] $s^{\widetilde{x}}(x)$ *истинности неравенства* $\widetilde{x} \neq x$ *как мера неопределенности равенства* $\widetilde{x} = x$; в равенстве (5.2.30):

▶ чем меньше *доверие* $\widehat{s^{\widetilde{x}}}(x)$ *истинности неравенства* $\widetilde{x} \neq x$, тем больше *правдоподобие* $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)$ *истинности равенства* $\widetilde{x} = x$ *как мера неопределенности неравенства* $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$.

Подобно интерпретации правой части равенства (5.2.24), как *меры информации* в наблюдении случайного события, см. сноску [2] на с. 355, в равенстве (5.2.29):

▶ чем меньше *правдоподобие* $t^{\widetilde{x}}(x)$ *истинности равенства* $x = \widetilde{x}$, тем больше *доверие* $s^{\widetilde{x}}(x)$ *истинности неравенства* $\widetilde{x} \neq x$ *как мера информативности события* $\widetilde{x} = x$; в равенстве (5.2.30):

▶ чем меньше *доверие* $\widehat{s^{\widetilde{x}}}(x)$ *истинности неравенства* $\widetilde{x} \neq x$, тем больше *правдоподобие* $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)$ *истинности равенства* $\widetilde{x} = x$ *как мера информативности события* $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$.

Условимся считать, что в равенстве (5.2.29):

▶ $s^{\widetilde{x}}(x)$ — *мера информативности субъективного суждения м.-и., согласно которому* $\widetilde{x} = x$, *правдоподобие истинности которого равно* $t^{\widetilde{x}}(x)$, $x \in X$; в равенстве (5.2.30):

▶ $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(x)$ — *мера неопределенности субъективного суждения м.-и., согласно которому* $\widetilde{x} \neq x$, *доверие истинности которого равно* $\widehat{s^{\widetilde{x}}}(x)$, $x \in X$.

Поэтому в (5.2.29):

▶ $\mathrm{H}_{\widehat{s}^{\widetilde{x}}}(t^{\widetilde{x}}(\cdot))$ *есть* (*относительная*) *мера информативности субъективного суждения о правдоподобиях истинности равенств* $\widetilde{x} = x$, $x \in X$; в (5.2.30):

▶ $\widehat{\mathrm{H}}_{t^{\widetilde{x}}}(\widehat{s^{\widetilde{x}}}(\cdot))$ *есть* (*относительная*) *мера неопределенности субъективного суждения о довериях истинности неравенств* $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$.

Если меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ вполне (дуально) согласованы, т. е. если для некоторой функции $\theta(\cdot) \in \Theta$ $s^{\widetilde{x}}(\cdot) = \theta \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot) = \theta^{-1} \circ \widehat{s^{\widetilde{x}}}(\cdot)$, где $\widehat{s^{\widetilde{x}}}(\cdot) = s^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\widehat{t^{\widetilde{x}}}(\cdot) = t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, как функции $X \to [0,1]$, то

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot)) &= \mathrm{pl}_{t^{\widetilde{x}}}(\theta \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \underset{x \in X}{+}(t^{\widetilde{x}}(x) \times \theta \circ t^{\widetilde{x}}(x)), \\ \widehat{\mathrm{H}}_{\theta^{-1}}(\widehat{s^{\widetilde{x}}}(\cdot)) &= \mathrm{bel}_{\widehat{s}^{\widetilde{x}}}(\theta^{-1} \circ \widehat{s^{\widetilde{x}}}(\cdot)) = \underset{x \in X}{\widehat{+}}(\widehat{s^{\widetilde{x}}}(x) \widehat{\times} \theta^{-1} \circ \widehat{s^{\widetilde{x}}}(x)). \end{aligned} \tag{5.2.31}$$

---

[1] Меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ считаются согласованными, см. § 1.5 гл. 1.

Правые части в равенствах (5.2.31) формально аналогичны правой части (5.2.24), поскольку $\theta(a \times b) = \theta(\min\{a, b\}) = \max\{\theta(a), \theta(b)\} = \theta(a) + \theta(b)$, $\theta^{-1}(a \widehat{\times} b) = \theta^{-1}(a) \widehat{+} \theta^{-1}(b)$, $a, b \in [0, 1]$, как и $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$, $x, y \in (0, \infty)$.

Если $\theta(\cdot)$ в (5.2.31) инволюция, т. е. если $\theta^{-1}(\cdot) = \theta(\cdot)$, то

$$\theta(\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot))) = \theta(\underset{x\in X}{+}(t^{\widetilde{x}}(x) \times s^{\widetilde{x}}(x))) = \underset{x\in X}{\widehat{+}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mathbin{\widehat{\times}} \theta \circ \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)) = \widehat{\mathrm{H}}_{\theta^{-1}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)), \tag{5.2.32}$$

т. е. энтропии в (5.2.31) однозначно связаны между собой.

Замечание 5.2.4. Если в (5.2.31) $t^{\widetilde{x}}(X) = [0, 1]$, то и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(X) = [0, 1]$, а $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \sup\Big\{\min\{a, \theta(a)\} \mid a \in [0, 1]\Big\} = \mathrm{H}_\theta$ и $\widehat{\mathrm{H}}_{\theta^{-1}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \inf\Big\{\max\{a, \theta^{-1}(a)\} \mid a \in [0, 1]\Big\} = \widehat{\mathrm{H}}_{\theta^{-1}} = \theta^{-1}(H_\theta)$ не зависят от распределений $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и, соответственно, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)$. Если же $t(X) \neq [0, 1]$, т. е. если, в частности, в (5.2.31)–(5.2.37) $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$ (подобно $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ в (5.2.24)), то $\mathrm{H}_\theta(\cdot)$, вообще говоря, зависят и от распределений $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot, \cdot)$, $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $t^{\widetilde{y}}(\cdot)$.

Пусть, например, $X = \{1, \ldots, k\}$, $t^{\widetilde{x}}(i)$ и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(i)$, $i = 1, \ldots, k$, — согласованные [1)] распределения правдоподобий и доверий истинности значений н. э. $\widetilde{x}$. Если $t^{\widetilde{x}}(1) = 1$, $t^{\widetilde{x}}(i) = 0$, $i = 2, \ldots, k$, и соответственно $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(1) = 0$, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(i) = 1$, $i = 2, \ldots, k$, см. замечание 5.2.3, то в (5.2.29) информативность $\mathrm{H}_{\widehat{s}^{\widetilde{x}}}(t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = 0$ и в (5.2.30) неопределенность $\widehat{\mathrm{H}}_{t^{\widetilde{x}}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)) = 1$. В этом случае равенство $\widetilde{x} = 1$ «абсолютно правдоподобно», $t^{\widetilde{x}}(1) = 1$, но его мера информативности $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(1) = 0$, остальные равенства $\widetilde{x} = i$, $i = 2, \ldots, k$, «абсолютно неопределенны и информативны», $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(i) = 1$, $i = 2, \ldots, k$, но «абсолютно неправдоподобны», $t^{\widetilde{x}}(i) = 0$, $i = 2, \ldots, k$. Вероятностный аналог: $\mathrm{H}(\mathrm{pr}_.) = 0$, если $\mathrm{pr}_1 = 1$, $\mathrm{pr}_i = 0$, $i = 2, \ldots, k$.

Если $t^{\widetilde{x}}(i) = 1$, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, то любое равенство $\widetilde{x} = i$, $i = 1, \ldots, k$, «абсолютно правдоподобно», т. е. «абсолютно ожидаемо и неинформативно», $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. При этом, как и в первом случае, $\mathrm{H}_{\widehat{s}^{\widetilde{x}}}(t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = 0$ и $\widehat{\mathrm{H}}_{t^{\widetilde{x}}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)) = 1$. Вероятностного аналога этому случаю «абсолютного незнания» нет, см. замечание 5.2.3.

Заметим, что подобно правой части (5.2.24), как интегралу от меры $\log(1/\mathrm{pr}_i)$ информации/неопределенности в событии $\{\omega_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, в правой части (5.2.29) — pl-интеграл от меры $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)$ информативности события $\widetilde{x} = x$, $x \in X$, а в правой части (5.2.30) — bel-интеграл от меры $t^{\widetilde{x}}(x)$ неопределенности события $\widetilde{x} \neq x$, $x \in X$.

Рассмотрим подробнее энтропию $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot))$ в (5.2.31). Пусть

$$t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x, y) = t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y) \times t^{\widetilde{y}}(y),\ x \in X,\ y \in Y, \tag{5.2.33}$$

— распределение правдоподобий значений пары $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ н. э., представленное распределением $t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)$ переходного правдоподобия, см. § 1.10.4

[1)] См. § 1.5 гл. 1.

гл. 1, которое можно интерпретировать и как условное, при условии $\widetilde{y}=y$, распределение правдоподобий $t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)$ значений $\widetilde{x}=x$, $x\in X$, $y\in Y$, см. замечание 1.10.2 в § 1.10.4 гл. 1. Согласно (5.2.31)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot,\cdot)) &= \underset{\substack{x\in X\\ y\in Y}}{+}(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)\times\theta\circ t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)) = \\
&= \underset{x,y}{+}(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times t^{\widetilde{y}}(y)\times(\theta\circ t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)+\theta\circ t^{\widetilde{y}}(y))) = \\
&= \underset{x,y}{+}(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times\theta\circ t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times t^{\widetilde{y}}(y)+t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times t^{\widetilde{y}}(y)\times\theta\circ t^{\widetilde{y}}(y)) = \\
&= \mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot))+\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{y}}(\cdot)), \qquad (5.2.34)
\end{aligned}
$$

где $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot))=\underset{y}{+}(\underset{x}{+}(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times\theta\circ t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y))\times t^{\widetilde{y}}(y))=\underset{y}{+}\big(\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|y))\times$ $\times\, t^{\widetilde{y}}(y)\big)$ — условная энтропия, аналог $\mathrm{H}(\mathrm{pr}^{(1|2)}_{\cdot|\cdot})$, $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|y))$ — энтропия условного, при условии $\widetilde{y}=y$, распределения $t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|y)$ н. э. $\widetilde{x}$, $y\in Y$, — аналог $\mathrm{H}(\mathrm{pr}^{(1|2)}_{\cdot|j})$, $j=1,\ldots,m$, наконец, правая часть равенства (5.2.34) — аналог правой части равенства (5.2.25).

Если н. э. $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ независимы, т. е. если $t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(x,y)=t^{\widetilde{x}}(x)\times t^{\widetilde{y}}(y)$, $x\in X$, $y\in Y$, то, как нетрудно убедиться, подобно (5.2.26)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_\theta\big((t^{\widetilde{x}}\times t^{\widetilde{y}})(\cdot,\cdot)\big) &= \underset{x,y}{+}(t^{\widetilde{x}}(x)\times t^{\widetilde{y}}(y)\times\theta(t^{\widetilde{x}}(x)\times t^{\widetilde{y}}(y))) = (\underset{x}{+}(t^{\widetilde{x}}(x)\times \\
&\times\theta\circ t^{\widetilde{x}}(x))) + (\underset{y}{+}(t^{\widetilde{y}}(y)\times\theta\circ t^{\widetilde{y}}(y))) = \mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot))+\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{y}}(\cdot)). \qquad (5.2.35)
\end{aligned}
$$

Следствием равенства (5.2.34) являются неравенства

$$
\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot))\leqslant\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot,\cdot)),\ \mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{y}}(\cdot))\leqslant\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot,\cdot)), \qquad (5.2.36)
$$

причем в отличие от (5.2.27) согласно (5.2.34) $\max\{\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot)),$ $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{y}}(\cdot))\}=\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x},\widetilde{y}}(\cdot,\cdot))$. Наконец, неравенство $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot))\leqslant\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot))$, аналог *неравенства* (5.2.28), вообще говоря, *неверно*, т. е. будучи известными данные $\widetilde{y}=y$, $y\in Y$, могут и увеличивать энтропию $H_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot))$. Действительно, функция $\psi(z)=z\times\theta(z)$, $z\in[0,1]$, (аналог функции $\varphi(z)=z\log(1/z)$, $z\in(0,\infty)$) не удовлетворяет «условию вогнутости» $\overset{k}{\underset{j=1}{+}}(a_j\times\psi(z_j))\leqslant\psi(\overset{k}{\underset{j=1}{+}}(a_j\times z_j))$, $0\leqslant a_j\leqslant 1$, $0\leqslant z_j\leqslant 1$, $j=1,\ldots,k$, $\overset{k}{\underset{j=1}{+}}a_j=\overset{k}{\underset{j=1}{+}}z_j=1$, и если, например, $a_{j_0}=z_{j_0}=1$, $0<a_j<1$, $0<z_j<1$, $j=1,\ldots,k$, $j\neq j_0$, то при этих условиях $\psi(\overset{k}{\underset{j=1}{+}}(a_j\times z_j))=0$, $\overset{k}{\underset{j=1}{+}}(a_j\times\psi(z_j))>0$ и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(\cdot|\cdot)) &= \underset{x}{+}\underset{y}{+}t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times(\theta\circ t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y))\times t^{\widetilde{y}}(y)>0= \qquad (5.2.37)\\
&= +_x(+_y(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times t^{\widetilde{y}}(y))\times\theta(\underset{y}{+}(t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y)\times t^{\widetilde{y}}(y))))=\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot)),
\end{aligned}
$$

если при $y = y_0$ и всех $x \in X$ $t^{\widetilde{y}}(y_0) = 1$, $t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y_0) = 1$, а при остальных $y \in Y$, $y \neq y_0$ и всех $x \in X$ $0 < t^{\widetilde{y}}(y) < 1$, $0 < t^{\widetilde{x}|\widetilde{y}}(x|y) < 1$.

Все результаты, полученные для энтропий (5.2.31), разумеется, верны и в общем случае (5.2.29), (5.2.30).

Заметим, что энтропии в (5.2.31) зависят от выбора шкалы $\gamma\mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, и от $\theta(\cdot) \in \Theta$. Если м.-и. согласен изменять $\theta(\cdot)$ при преобразовании $\mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$ по правилу $\theta(\cdot) \to \gamma \circ \theta \circ \gamma^{-1}(\cdot)$, см. § 1.15.4 гл. 1, то $\mathrm{H}_\theta(\gamma \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \gamma(\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot)))$ и $\widehat{\mathrm{H}}_{\theta^{-1}}(\gamma \circ \widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \gamma(\widehat{\mathrm{H}}_{\theta^{-1}}(\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)))$.

Замечание 5.2.5. Аналогом меры информативности $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \mathrm{p}l_{t^{\widetilde{x}}}(\theta \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot))$ в (5.2.31) в случае мер правдоподобия и доверия, формально эквивалентных мерам возможности и необходимости во втором варианте теории возможностей, см. сноску [1] на стр. 342, является [1]

$$\mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \mathrm{p}l'_{t'^{\widetilde{x}}}(\theta'_\beta \circ t'^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in X}(t'^{\widetilde{x}}(x) \boldsymbol{\times} (1 - (t'^{\widetilde{x}}(x))^\beta)),\ \beta > 0. \tag{5.2.38}$$

Соответственно для пары $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ независимых неопределенных элементов

$$\mathrm{H}'_\beta((t'^{\widetilde{x}} \times t'^{\widetilde{y}})(\cdot,\cdot)) = \mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in X}\mathop{\boldsymbol{+}}_{y\in Y}(t'^{\widetilde{x}}(x) \boldsymbol{\times} t'^{\widetilde{y}}(y) \times (1 - (t'^{\widetilde{x}}(x) \boldsymbol{\times} t'^{\widetilde{y}}(y))^\beta)), \tag{5.2.39}$$

где $(t'^{\widetilde{x}} \times t'^{\widetilde{y}})(x,y) = t'^{\widetilde{x}}(x) \boldsymbol{\times} t'^{\widetilde{y}}(y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Если в (5.2.38), (5.2.39) $t'^{\widetilde{x}}(X) = t'^{\widetilde{y}}(Y) = [0,1]$, то $\mathrm{H}'_\beta((t'^{\widetilde{x}} \times t'^{\widetilde{y}})(\cdot,\cdot)) = \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \sup\{a(1-a^\beta) \mid a \in [0,1]\} = \mathrm{H}'_\beta = (1/(1+\beta))^{1/\beta}$ не зависит от $t'^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $t'^{\widetilde{y}}(\cdot)$. Но если $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_l\}$, см. замечание 5.2.4, то

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}'_\beta((t'^{\widetilde{x}} \times t'^{\widetilde{y}})(\cdot,\cdot)) \geqslant \\
&\quad\geqslant \mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in X}(t'^{\widetilde{x}}(x) \boldsymbol{\times} t'^{\widetilde{y}}(y) \boldsymbol{\times} (1 - (t'^{\widetilde{x}}(x) \boldsymbol{\times} t'^{\widetilde{y}}(y))^\beta))\big|_{t'^{\widetilde{y}}(y) = t'^{\widetilde{y}}(y_j) = 1} = \\
&\qquad = \mathop{\boldsymbol{+}}_{x\in X}(t'^{\widetilde{x}}(x) \boldsymbol{\times} (1 - (t'^{\widetilde{x}}(x))^\beta)) = \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}}(\cdot)),
\end{aligned}$$

где $t'^{\widetilde{y}}(y_j) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant l} t'^{\widetilde{y}}(y_i) = 1$. Следовательно, в этом случае, в отличие от равенства (5.2.35), для второго варианта теории возможностей

$$\mathrm{H}'_\beta((t'^{\widetilde{x}} \times t'^{\widetilde{y}})(\cdot,\cdot)) \geqslant \max\{\mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}}(\cdot)), \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{y}}(\cdot))\} = \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}}(\cdot)) \boldsymbol{+} \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{y}}(\cdot)).$$

В частности, если $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ суть независимые копии неопределенного элемента $\widetilde{x}$, то $\mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}_1} \times t'^{\widetilde{x}_2}(\cdot,\cdot)) \geqslant \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}_1}(\cdot)) \boldsymbol{+} \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}_2}(\cdot)) = \mathrm{H}'_\beta(t'^{\widetilde{x}}(\cdot))$, т. е. в то время как для первого варианта теории возможностей характерно, что повторение независимых «однотипных» наблюдений не приводит к накоплению информации, для второго варианта теории возможностей, как и для теории вероятностей, эффект накопления информации при повторении независимых «однотипных» наблюдений возможен. Об этом свидетельствуют и предельные теоремы для второго варианта теории возможностей, приведенные в § 4.4.

---

[1] Во втором варианте теории возможностей $a \boldsymbol{+} b = \max\{a,b\}$, $a \boldsymbol{\times} b = ab$, $a, b \in [0,1]$, см. § 1.16.1.

Замечание 5.2.6. Второй вариант теории возможностей, см. § 1.16 гл. 1, можно изменить так, чтобы для мер правдоподобия и доверия, формально эквивалентных измененным мерам возможности и необходимости, получить аналог меры информативности $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot))$ в (5.2.31), подобный мере информации (5.2.24). Действительно, определим шкалу $\widetilde{\mathcal{L}}'' = ([0,\infty], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}', \widetilde{\times}')$, дуально изоморфную шкале $\mathcal{L}'' \equiv \mathcal{L}' = ([0,1], \leqslant, +, \times)$ значений возможности, см. § 1.16.1 гл. 1, задав семейство дуальных изоморфизмов $\theta''_\alpha \colon \mathcal{L}'' \to \theta''_\alpha\mathcal{L}'' \triangleq \widetilde{\mathcal{L}}''$ отображениями $\theta''_\alpha(\cdot) \colon [0,1] \to [0,\infty]$, $\theta''_\alpha(t) = \begin{cases}\log_\alpha t^{-1}, & t > 0,\\ \infty, & t = 0,\end{cases}$ $t \in [0,1]$, $\theta''^{-1}_\alpha(s) = \begin{cases}\alpha^{-s}, & s < \infty,\\ 0, & s = \infty,\end{cases}$ $s \in [0,\infty]$, $\alpha > 1$, и определив бинарные операции $\widetilde{+}'$ и $\widetilde{\times}'$ в шкале $\widetilde{\mathcal{L}}''$ условиями

$$\theta''_\alpha(t_1 + t_2) = \log_\alpha(\max\{t_1, t_2\})^{-1} =$$
$$= \min\{\log_\alpha t_1^{-1}, \log_\alpha t_2^{-1}\} \triangleq \theta''_\alpha(t_1)\,\widetilde{+}'\,\theta''_\alpha(t_2),$$

$$\theta''_\alpha(t_1 \times t_2) = \log_\alpha(t_1 \times t_2)^{-1} = \log_\alpha t_1^{-1} + \log_\alpha t_2^{-1} \triangleq \theta''_\alpha(t_1)\,\widetilde{\times}'\,\theta''_\alpha(t_2),$$
$$t_1, t_2 \in [0,1],\ \alpha > 1,$$

согласно которым $s_1 \widetilde{+}' s_2 = \min\{s_1, s_2\}$, $s_1 \widetilde{\times}' s_2 = s_1 + s_2$, $s_3 \widetilde{\times}' (s_1 \widetilde{+}' s_2) = (s_3 \widetilde{\times}' s_1) \widetilde{+}' (s_3 \widetilde{\times}' s_2)$, $s_1, s_2, s_3 \in [0,\infty]$; «$+$» — «обычное» сложение.

Для мер правдоподобия и доверия, формально эквивалентных мерам возможности $\mathrm{P}''(\cdot) \equiv \mathrm{P}'(\cdot) \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}''$ и необходимости $\mathrm{N}''(\cdot) \colon \mathcal{P}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}''$ в так определенном, *третьем* варианте теории возможностей, аналогом $\mathrm{H}_\theta(t^{\widetilde{x}}(\cdot))$ в (5.2.31) является выражение

$$\mathrm{H}_{\theta_\alpha}(t^{\widetilde{x}}(\cdot)) = \mathop{+}_{x\in X}(t^{\widetilde{x}}(x) \times \theta''_\alpha \circ t^{\widetilde{x}}(x)) = \sup_{x\in X}(t^{\widetilde{x}}(x) \cdot \log_\alpha(t^{\widetilde{x}}(x))^{-1}),$$

подобное (5.2.24).

Что касается *третьего варианта теории возможностей*, то

► группа $\overline{\Gamma}''$ автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}''$ совпадает с группой $\overline{\Gamma}'$ автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}'$, см. § 1.16.1 гл. 1, и порождается группой Γ' отображений $\gamma'_\beta(a) = a^\beta$, $a \in [0,1]$, $\beta > 0$; $\gamma'_\beta(a + b) = \gamma'_\beta(a) + \gamma'_\beta(b)$, $\gamma'_\beta(a \times b) = \gamma'_\beta(a) \times \gamma'_\beta(b)$, $a, b \in [0,1]$, $\beta > 0$;

► группа $\widetilde{\overline{\Gamma}}''$ автоморфизмов шкалы $\widetilde{\mathcal{L}}''$ порождается группой отображений $\widetilde{\gamma}''_\beta(s) = \beta s$, $s \in [0,\infty]$, $\beta > 0$, где $\widetilde{\gamma}''_\beta(\cdot) = \widetilde{\gamma}_{\beta,\alpha}(\cdot) = \theta''_\alpha \circ \gamma'_\beta \circ \theta''^{-1}_\alpha(\cdot)$ не зависит от $\alpha > 0$; $\widetilde{\gamma}''_\beta(s_1 \widetilde{+}' s_2) = \widetilde{\gamma}''_\beta(s_1) \widetilde{+}' \widetilde{\gamma}''_\beta(s_2)$, $\widetilde{\gamma}''_\beta(s_1 \widetilde{\times}' s_2) = \widetilde{\gamma}''_\beta(s_1) \widetilde{\times}' \widetilde{\gamma}''_\beta(s_2)$, $s_1, s_2 \in [0,\infty]$, $\beta > 0$;

► p″-, n″-интегралы: $\mathrm{p}''(\cdot)\colon \mathcal{L}''(X) \to \mathcal{L}''$, $\mathrm{n}''(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}''(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}''$, $\mathrm{p}''_g(f(\cdot)) \equiv \mathrm{p}'_g(f(\cdot)) = \underset{x\in X}{\boldsymbol{+}}(g(x) \boldsymbol{\times} f(x)) = \sup_{x\in X}(g(x)\cdot f(x))$, $\mathrm{n}''_{\widetilde{g}}(\widetilde{f}(\cdot)) =$ $= \theta''_\alpha(\mathrm{p}''_g(\theta''^{-1}_\alpha \circ \widetilde{f}(\cdot))) = \underset{x\in X}{\widetilde{\boldsymbol{+}}'}(\theta''_\alpha \circ g(x) \widetilde{\boldsymbol{\times}}' \widetilde{f}(x)) = \inf_{x\in X}(\widetilde{g}(x) + \widetilde{f}(x))$, где $\widetilde{g}(x) = \theta''_\alpha \circ g(x) = \log_\alpha(g(x))^{-1}$, $x \in X$;

► P″, N″-меры: $\mathrm{P}''(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}''$, $\mathrm{N}''(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}''$, $\mathrm{P}''_g(A) =$ $= \mathrm{p}''_g(\chi_A(\cdot)) = \underset{x\in X}{\boldsymbol{+}}(g(x)\cdot\chi_A(x)) = \underset{x\in A}{\boldsymbol{+}} g(x)$, $\mathrm{N}''_{\widetilde{g}}(A) = \mathrm{n}''_{\widetilde{g}}(\widetilde{\chi}_A(\cdot)) =$ $= \theta''_\alpha(\mathrm{p}''_g(\theta''^{-1}_\alpha \circ \widetilde{\chi}_A(\cdot))) = \inf_{x\in X}(\theta''_g \circ g(x) \widetilde{\boldsymbol{\times}}' \widetilde{\chi}_A(x)) = \min\{\inf_{x\in X\setminus A}(\widetilde{g}(x) +$ $+ \widetilde{\chi}_A(x)), \inf_{x\in A}(\widetilde{g}(x) + \widetilde{\chi}_A(x))\} = \inf_{x\in X\setminus A}\widetilde{g}(x)$, где $\widetilde{\chi}_A(x) = \theta''_\alpha \circ \chi_{X\setminus A}(x) =$ $= \begin{cases} \widetilde{0} = \infty, & x \in A, \\ \widetilde{1} = 0, & x \in X \setminus A, \end{cases}$ $\forall a \in [0,\infty]$: $a \widetilde{\boldsymbol{\times}}' \widetilde{0} = \widetilde{0}$, $a \widetilde{\boldsymbol{\times}}' \widetilde{1} = a$, $a \widetilde{\boldsymbol{+}}' \widetilde{0} = a$; $\mathrm{N}''_{\widetilde{g}}(A) = \theta''_\alpha(\mathrm{P}''_g(X \setminus A))$, $A \in \mathcal{P}(X)$.

5.2.5. Неопределенный случайный элемент. Далее $M(x) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, $x \in X$, и речь пойдет о таких, например, характеристиках модели $M(\widetilde{x})$, как неопределенные вероятности $\widetilde{\mathrm{Pr}}(A) \triangleq \mathrm{Pr}(A; \widetilde{x})$, $A \in \mathcal{A}$, неопределенные числовые характеристики случайных величин, заданных на неопределенном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \widetilde{\mathrm{Pr}})$, решения задачи статистической идентификации состояния неопределенного стохастического объекта и т. д. Также будет рассмотрен вопрос о том, как минимизировать риск потерь, сопутствующий принятию решения модельера-исследователя о значении н. э.

Введем пару пространств: вероятностное $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{Pr}^\eta)$ и с правдоподобием и доверием $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в которых η — канонический для $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{Pr}^\eta)$ случайный элемент, определяющий вероятность $\mathrm{Pr}^\eta(B)\mathrm{Pr}^\eta(\eta \in B)$, $B \in \mathcal{B}$, $\widetilde{x}$ — канонический для $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э., определяющий правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверие $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ согласно формулам (5.2.1), (5.2.2), и рассмотрим отображение $q(\cdot,\cdot)\colon (Y, \mathcal{B}) \otimes (X, \mathcal{P}(X)) \to (\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{B}, \mathcal{A}$-измеримое при каждом $x \in X$, т. е. такое, что $\forall x \in X$ $\forall A \in \mathcal{A}$ множество $\{y \in Y, q(y,x) \in A\} \in \mathcal{B}$, и $\forall x \in X$ $q^{-1}(\Omega, x) = Y$.

Определение 5.2.2. Функцию $\widetilde{\xi} = q(\eta, \widetilde{x})$ случайного η и неопределенного $\widetilde{x}$ элементов, рассматриваемую как случайный элемент с неопределенным распределением вероятностей его значений, назовем *неопределенным случайным элементом, заданным на произведении пространств* $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{Pr}^\eta) \otimes (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ *и принимающим значения в* $(\Omega, \mathcal{A})$.

При $\widetilde{x} = x$ $\widetilde{\xi}\Big|_{\widetilde{x}=x} \triangleq \xi(x) = q(\eta, x)$ — случайный элемент, заданный на $(Y, \mathcal{B}, \mathrm{Pr}^\eta)$ со значениями в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, $x \in X$, определяющий *вероятность*

$$\Pr(A;x) \triangleq \Pr^{\xi(x)}(\xi(x) \in A) = \Pr^{\eta}(q(\eta,x) \in A) = \int\limits_{\substack{y\in Y,\\ q(y,x)\in A}} \Pr^{\eta}(dy),\ A \in \mathcal{A}, \qquad (*)$$

и семейство вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot;x))$, $x \in X$, соответственно н. э. $\widetilde{x}$ определит *неопределенную вероятность* $\widetilde{\Pr}(A) \triangleq \Pr(A;\widetilde{x})$, $A \in \mathcal{A}$, и *неопределенное вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, \widetilde{\Pr})$ как *неопределенную* (*субъективную*) *модель объекта исследования*. Поэтому согласно (5.2.6) и $(*)$

$$t^{\widetilde{\Pr}(A)}(\mathrm{pr}) \triangleq \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\Pr(A;\widetilde{x}) = \mathrm{pr}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\Pr^{\eta}(\widetilde{\xi} \in A) = \mathrm{pr}) = \\ = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \Pr(A;x) = \mathrm{pr}\}$$

— правдоподобие истинности н. в., согласно которому неопределенная вероятность $\widetilde{\Pr}(A)$ события A равна pr; это н. в. для каждого $A \in \mathcal{A}$ представлено множеством $\{x \in X,\ \Pr(A;x) = \mathrm{pr}\}$ элементарных высказываний, $\mathrm{pr} \in [0,1]$. Соответственно

$$\widehat{s}^{\widetilde{\Pr}(A)}(\mathrm{pr}) \triangleq \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\Pr(A;\widetilde{x}) \neq \mathrm{pr}) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\Pr^{\eta}(\widetilde{\xi} \in A) \neq \mathrm{pr}) = \\ = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \Pr(A,x) = \mathrm{pr}\}$$

— доверие истинности н. в., согласно которому $\widetilde{\Pr}(A) \neq \mathrm{pr}$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$.

Если модель объекта исследования априори задана как семейство $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot;x))$, $x \in X$, то неопределенный случайный элемент $\widetilde{\xi}$ можно охарактеризовать непосредственно неопределенной вероятностью $\Pr^{\widetilde{\xi}}(\widetilde{\xi} \in A) \triangleq \Pr(A;\widetilde{x})$, $A \in \mathcal{A}$, как ассоциированный с пространствами семейства $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot\,;x))$, $x \in X$, и с пространством $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, моделирующим субъективные суждения м.-и. о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$, см. введение.

В качестве примера рассмотрим семейство дискретных вероятностей $\Pr(\cdot;x)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $x \in X = (0,\infty)$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ — класс всех подмножеств Ω, x — значение н. э. $\widetilde{x}$ со значениями в $(0,\infty)$,

$$\Pr(\{\omega_i\};x) = \mathrm{pr}_i(x) = x/(1+x)^i,\ i = 1,2,\ldots,\ x \in X, \qquad (5.2.40)$$

и неопределенное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \widetilde{\Pr})$, в котором $\widetilde{\Pr}(A) = \Pr(A;\widetilde{x})$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, как *неопределенную* (*субъективную*) *модель объекта исследования*.

Рассмотрим н. в., согласно которому $\forall\, i = 1,2,\ldots\ \widetilde{\mathrm{pr}}_i = \mathrm{pr}_i(\widetilde{x}) = \mathrm{pr}_i$. Правдоподобие $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\forall\, i \in \{1,2,\ldots\}\ \widetilde{\mathrm{pr}}_i = \mathrm{pr}_i)$ его истинности не равно нулю лишь на семействе $\mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_i(y) = y/(1+y)^i$, $i = 1,2,\ldots$, $y \in (0,\infty)$, поэтому $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\forall\, i \in \{1,2,\ldots\}\ \widetilde{\mathrm{pr}}_i = \mathrm{pr}_i(y)) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = y) = t^{\widetilde{x}}(y)$

и, соответственно, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\exists i \in \{1,2,\ldots\}\ \widetilde{\mathrm{pr}}_i \neq \mathrm{pr}_i(y)) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq y) = \widehat{s}^{\widetilde{x}}(y)$ суть правдоподобие и доверие истинности н. в., согласно которым $\widetilde{\mathrm{Pr}}(\cdot) = \mathrm{Pr}(\cdot; y)$ и соответственно $\widetilde{\mathrm{Pr}}(\cdot) \neq \mathrm{Pr}(\cdot; y)$, $y \in (0,\infty)$. Следовательно, $t^{\widetilde{x}}(y)$ — *правдоподобие истинности н. в., согласно которому* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}(\cdot; y))$ *есть истинная модель объекта исследования*, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(y)$ — *доверие истинности н. в., согласно которому* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}(\cdot; y))$ *не есть истинная его модель*, $y \in (0,\infty)$.

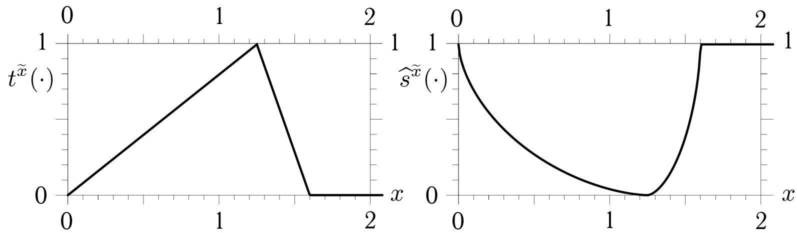


Рис. 5.2.1. Слева: распределение правдоподобий значений $\widetilde{x}$ в (5.2.42). Справа: распределение доверий значений $\widetilde{x}$, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot) = \theta_\alpha \circ t^{\widetilde{x}}(\cdot)$, $\theta_\alpha(a) = (1 - a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a \in [0,1]$, $\alpha = 0.63$, в (5.2.43)

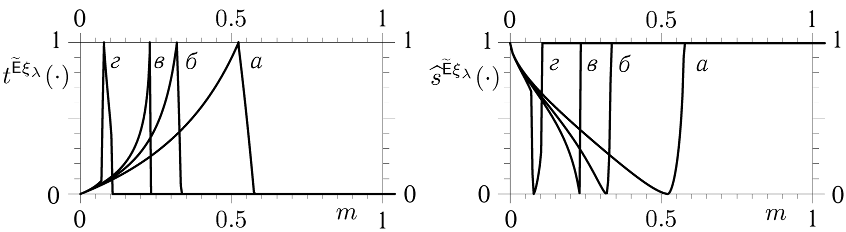


Рис. 5.2.2. Графики зависимостей: $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\mathsf{E}_{\widetilde{x}}\xi_\lambda(\cdot) = m) = t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)$, (5.2.42) (слева), $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\mathsf{E}_{\widetilde{x}}\xi_\lambda(\cdot) \neq m) = \widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)$, (5.2.43) (справа), $m \in [0,\infty)$, где $\mathsf{E}_{\widetilde{x}}\xi_\lambda = \widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda$, при значениях $\lambda = 0.11$ (*а*), $\lambda = 1$ (*б*), $\lambda = 1.58$ (*в*), $\lambda = 3.55$ (*г*)

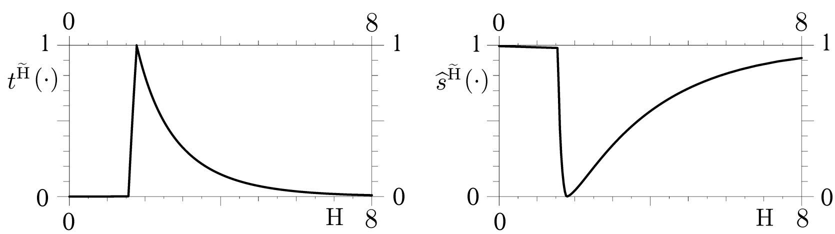


Рис. 5.2.3. Графики зависимостей $t^{\widetilde{\mathrm{H}}}(\mathrm{H})$ (слева), $\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{H}}}(\mathrm{H})$ (справа), $\mathrm{H} \in (0,\infty)$

Рассмотрим неопределенное математическое ожидание $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = \mathsf{E}_{\widetilde{x}}\xi_\lambda(\cdot)$ случайной величины $\xi_\lambda(\cdot)\colon \Omega \to [0,1]$, зависящей от *контролируемого* м.-и. параметра $\lambda > 0$, заданной на семействе $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, $x \in X$, равенствами

$$\xi_\lambda(\omega_i) = \lambda^{i-1} e^{-\lambda}/(i-1)!,\ i = 1, 2, \ldots$$

Так как согласно (5.2.40)

$$\mathsf{E}_x \xi_\lambda(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda} \frac{x}{(x+1)^i} = \frac{x}{x+1} \exp\Big(-\frac{\lambda x}{x+1}\Big),\ x \in X, \quad (5.2.41)$$

то согласно (5.2.6), (5.2.41) для каждого $\lambda > 0$

$$t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\mathsf{E}_{\widetilde{x}}\xi_\lambda(\cdot) = m) = \\ = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in (0, \infty), \mathsf{E}_x \xi_\lambda = m\},\ m \in [0, \infty), \quad (5.2.42)$$

— распределение правдоподобий н. в., согласно которым $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m$, $m \in [0, \infty)$.

Соответственно

$$\widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\mathsf{E}_{\widetilde{x}}\xi_\lambda(\cdot) \neq m) = \\ = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in (0, \infty),\ \mathsf{E}_x \xi_\lambda = m\},\ m \in [0, \infty), \quad (5.2.43)$$

— распределение доверий н. в., согласно которым $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda \neq m$, $m \in [0, \infty)$, см. рис. 5.2.1, 5.2.2.

Рассмотрим семейство $\mathrm{H}(\mathrm{pr}_\cdot(x)) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{pr}_i(x) \log(1/\mathrm{pr}_i(x))$, $x \in X$, энтропий (5.2.25) распределений семейства (5.2.40) и соответствующую неопределенную энтропию–информацию $\widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{H}(\widetilde{\mathrm{pr}}_\cdot) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{pr}}_i \log(1/\widetilde{\mathrm{pr}}_i)$, где $\widetilde{\mathrm{pr}}_i = \mathrm{pr}_i(\widetilde{x})$, $i = 1, 2, \ldots$, распределения которой, см. рис. 5.2.3,

$$t^{\widetilde{\mathrm{H}}}(\mathrm{H}) = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in (0, \infty),\ \mathrm{H}(\mathrm{pr}_\cdot(x)) = \mathrm{H}\},\ \mathrm{H} \in (0, \infty),$$
$$\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{H}}}(\mathrm{H}) = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in (0, \infty),\ \mathrm{H}(\mathrm{pr}_\cdot(x)) \neq \mathrm{H}\},\ \mathrm{H} \in (0, \infty),$$

суть распределения правдоподобий и доверий истинности н. в. исследователя, согласно которым $\widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{H}$ и $\widetilde{\mathrm{H}} \neq \mathrm{H}$. Значения $t^{\widetilde{\mathrm{H}}}(\mathrm{H})$ и $\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{H}}}(\mathrm{H})$ выражают его мнение о *качестве* количества H информации, как о *степени адекватности* значения H реальному положению вещей, см. § 5.2.4.

5.2.6. Оптимальные значения неопределенного элемента. Иногда н. э., в частности, $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda$, удобнее охарактеризовать не распределениями $t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(\cdot)$ (5.2.42) и $s^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(\cdot)$ (5.2.43), а указав его, в известном смысле, *оптимальное значение*. Для этого модельер-исследователь должен определить семейство пространств $(\mathrm{L}, \mathcal{P}(\mathrm{L}), \mathrm{Pl}^{\widetilde{l}}(\cdot|m, m'), \mathrm{Bel}^{\widetilde{l}}(\cdot|m, m'))$, $(m, m') \in [0, \infty)^2$, в котором L — пространство *элементарных потерь*,

$\mathcal{P}(\mathrm{L})$ — класс всех подмножеств L, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{l}}(\cdot|\cdot,\cdot)$, $\mathrm{Bel}^{\widetilde{l}}(\cdot|\cdot,\cdot)$ суть переходные [1]) правдоподобие и доверие для пространств $([0,\infty)^2, \mathcal{P}([0,\infty)^2))$, $(\mathrm{L}, \mathcal{P}(\mathrm{L}))$, и для каждого $\lambda \in (0,\infty)$ выбрать множество $V(\lambda) \in \mathcal{P}(\mathrm{L})$ *существенных* для него элементарных потерь.

Обозначим $t^{\widetilde{l}}(l|m,m')$, $l \in L$, и $\widehat{s}^{\widetilde{l}}(l|m,m')$, $l \in L$, распределения переходных правдоподобий и доверий значений н. э. $\widetilde{l}$, канонического для $(L, \mathcal{P}(L), \mathrm{Pl}^{\widetilde{l}}(\cdot|m,m'), \mathrm{Bel}^{\widetilde{l}}(\cdot|m,m'))$, $m, m' \in [0,\infty)$. Тогда выражения $\mathrm{Pl}^{\widetilde{l}}(V(\lambda)|m,m') = \sup\limits_{l \in V(\lambda)} t^{\widetilde{l}}(l|m,m') \overset{\triangle}{=} \mathrm{pl}l_{m,m'}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{l}}(V(\lambda)|m,m') = \inf\limits_{l \in \mathrm{L}\setminus V(\lambda)} \widehat{s}^{\widetilde{l}}(l|m,m') \overset{\triangle}{=} \mathrm{bel}l_{m,m'}$ определят *правдоподобие* $\mathrm{pl}l_{m,m'}$ и *доверие* $\mathrm{bel}l_{m,m'}$ истинности *потерь, сопутствующих н. в.* (*решению*) м.-и. о значении неопределенного математического ожидания $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda$, согласно которому $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m'$, *в то время как на самом деле* $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m$, $m, m' \in [0,\infty)$. Соответственно $\mathrm{pl}l_{m,m'} \times t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m) =$ Pl (истинности потерь, сопутствующих н. в. (решению) м.-и., согласно которому $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m'$, в то время как на самом деле $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m$, И равенства $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m$), $m, m' \in [0,\infty)$, а $\mathop{\dot{+}}\limits_{m \in (0,\infty)} (\mathrm{pl}l_{m,m'} \times t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)) = \mathrm{pl}_{t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{pl}l_{\cdot,m'}) =$ Pl (истинности потерь, сопутствующих н. в. (решению м.-и.), согласно которому $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m'$, $m' \in [0,\infty)$). Аналогично $\mathrm{bel}l_{m,m'} \widehat{\times} \widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m) =$ Bel (истинности потерь, сопутствующих решению $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m'$, в то время как на самом деле $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m$, ИЛИ неравенства $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda \neq m$), $m, m' \in [0,\infty)$, а $\mathop{\widehat{\dot{+}}}\limits_{m \in (0,\infty)} (\mathrm{bel}l_{m,m'} \widehat{\times} \widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)) = \mathrm{bel}_{\widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{bel}l_{\cdot,m'}) =$ Bel (истинности потерь, сопутствующих решению $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda = m'$, $m' \in [0,\infty)$), см. равенства (5.2.3), (5.2.4). Это позволяет исследователю принять оптимальные решения m'^* и m'_* как *минимизирующие правдоподобие* $\mathrm{pl}_{t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{pl}l_{\cdot,m'})$ *и доверие* $\mathrm{bel}_{\widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{bel}l_{\cdot,m'})$ (*истинности*) *потерь* на множестве решений $m' \in [0,\infty)$ согласно условиям

$$\mathrm{pl}_{t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{pl}l_{\cdot,m'^*}) = \sup_{m \in [0,\infty)} \min\left\{\mathrm{pl}l_{m,m'^*}, t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)\right\} \equiv$$

$$\equiv \mathop{\dot{+}}_{m \in [0,\infty)} (\mathrm{pl}l_{m,m'^*} \times t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)) = \min_{m' \in [0,\infty)} \sup_{m \in [0,\infty)} \min\left\{\mathrm{pl}l_{m,m'}, t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)\right\},$$

$$\mathrm{bel}_{\widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{bel}l_{\cdot,m'_*}) = \inf_{m \in [0,\infty)} \max\left\{\mathrm{bel}l_{m,m'_*}, \widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)\right\} \equiv$$

$$\equiv \mathop{\widehat{\dot{+}}}_{m \in [0,\infty)} (\mathrm{bel}l_{m,m'_*} \widehat{\times} \widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)) = \min_{m' \in [0,\infty)} \inf_{m \in [0,\infty)} \max\left\{\mathrm{bel}l_{m,m'}, \widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)\right\},$$

[1]) Это означает, что при любой паре $(m,m') \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ для любого $Q \in \mathcal{P}(L)$ $\mathrm{Pl}^{\widetilde{l}}(Q|m,m')$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{l}}(Q|m,m')$ суть правдоподобие и доверие включения $\widetilde{l} \in Q$, где $\widetilde{l}$ — н. э., канонический для каждого пространства семейства; далее m — значение $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda$, m' — оценка $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda$, н. э. $\widetilde{l}$ и $\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda$ независимы, $\lambda > 0$.

в которых pl- и bel-интегралы $\mathrm{pl}_{t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{pl}l_{\cdot,m'}) = \sup\limits_{m\in[0,\infty)} \min\big\{\mathrm{pl}l^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}_{m,m'}, t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)\big\}$, $m'\in[0,\infty)$, и $\mathrm{bel}_{\widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}}(\mathrm{bel}l_{\cdot,m'}) = \inf\limits_{m\in[0,\infty)} \max\big\{\mathrm{bel}l^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}_{m,m'}, \widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(m)\big\}$, $m'\in[0,\infty)$, предполагаются полунепрерывными снизу.

Заметим, что для распределений $t^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(\cdot)$ и $\widehat{s}^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_\lambda}(\cdot)$ на рис. 5.2.2 при $\lambda = 0.11$, $m'^{*} = m'_{*} = 1.04$, если $\mathrm{pl}l^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_{0.11}}_{m,m'} = \begin{cases} 0, & m = m', \\ 1, & m \neq m', \end{cases}$ $\mathrm{bel}l^{\widetilde{\mathsf{E}}\xi_{0.11}}_{m,m'} = \begin{cases} 0, & m = m', \\ > 0, & m \neq m', \end{cases}$ $m, m' \in [0,\infty)$, но, вообще говоря, $m'^{*} \neq m'_{*}$.

5.2.7. Статистическая идентификация состояний неопределенного стохастического объекта. Рассмотрим байесовскую задачу *статистической идентификации*, в которой модель неопределенного стохастического объекта задана зависящим от неизвестного параметра $x \in X$ распределением [1] $\mathrm{pr}^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)$, $z \in Z$, $k \in \{1,\ldots,q\} = K$, пары $(\zeta,\varkappa)$ случайных элементов (наблюдение, состояние), первый из которых наблюдаем, а второй — нет, см. гл. 6. В задаче идентификации требуется по наблюдению значения $\zeta = z$ принять решение $d(z;x) \in K$ о состоянии объекта, если известно, что вероятность «потерь», сопутствующих эксплуатации объекта, находящегося в состоянии $k \in K$, по правилам, определенным для состояния $d(z;x)$, равна $\mathrm{pr}l_{k,d(z;x)}$, $z \in Z$.

Функцию $\mathrm{pr}l_{\cdot,\cdot}\colon K \times K \to [0,1]$ определяет субъект, принимающий решения (с. п. р.), осознающий последствия неверных решений. С этой целью он использует семейство вероятностных пространств $(L, \sigma(L), \mathrm{Pr}(\cdot|\cdot;d))$, $d \in K$, в котором L — пространство элементарных «потерь», $\sigma(L)$ — σ-алгебра подмножеств L, $\mathrm{Pr}(\,\cdot\,|\,\cdot;d)$ — переходная вероятность для $(K,\mathcal{P}(K))$ и $(L,\sigma(L))$ для каждого $d \in K$. Далее с. п. р. выделяет множество $V \in \sigma(L)$ *существенных* для него элементарных «потерь» и полагает $\mathrm{pr}l_{k,d} = \mathrm{Pr}(V\,|\,k;d)$, $(k;d) \in K \times K$.

Качество идентификации с. п. р. характризует зависящей от неизвестного значения $x \in X$ *ожидаемой вероятностью «потерь»*

$$\mathrm{Pr}\,\mathrm{L}(d(\cdot);x) = \int\limits_Z \mu(dz) \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}l_{k,d(z;x)}\mathrm{pr}^{\zeta,\varkappa}(z,k;x), \tag{5.2.44}$$

[1] Точнее, в байесовской задаче идентификации для каждого $x \in X$, как правило, $\mathrm{pr}^{\zeta,\varkappa}(z,k;x) = \mathrm{pr}^{\zeta|\varkappa}(z|k;x)\mathrm{pr}^{\varkappa}(k;x)$, $(z,k) \in Z \times K$, — *плотность вероятности* $\mathrm{Pr}^{\zeta,\varkappa}(\cdot,\cdot;x)\colon \sigma(Z\times K) \to [0,1]$ относительно некоторой, независящей от $x \in X$, меры $\mu \times \nu$ на $(Z \times K, \sigma(Z\times K))$, где $\mathrm{pr}^{\varkappa}(k;x)$, $k \in K$, — плотность относительно *считающей меры* ν на $(K,\mathcal{P}(K))$: $\nu(C)$ — число элементов в $C \in \mathcal{P}(K)$, $\mathrm{pr}^{\zeta|\varkappa}(z|k;x)$, $z \in Z$, — плотность относительно меры μ на $(Z,\sigma(Z))$ *переходной вероятности* $\mathrm{Pr}^{\zeta|\varkappa}(\cdot|k;x)\colon \sigma(Z) \to [0,1]$, $k \in K$, как отображения $\mathrm{Pr}^{\zeta|\varkappa}(\cdot|\cdot;x)\colon (K \times \sigma(Z)) \to [0,1]$, для каждого $k \in K$ являющегося вероятностью $\mathrm{Pr}^{\zeta|\varkappa}(\cdot|k;x)$ на $(Z,\sigma(Z))$ [4]; $\sigma(Q)$ — σ-алгебра подмножеств Q.

сопутствующих правилу идентификации состояния объекта, определенному $\sigma(Z)$-измеримой «решающей функцией» $d(\cdot)\colon Z\to K$.

Пусть для каждого $x\in X$ функция $d^*(\cdot;x)\colon Z\to K$ — решение задачи

$$\Pr_d(z;x)=\sum_{k=1}^{q}\mathrm{pr}l_{k,d}\mathrm{pr}^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)\sim\min_{d\in K},\ z\in Z. \tag{5.2.45}$$

Для любой функции $d^*(\cdot;\cdot)\colon Z\times X\to K$, такой что $\Pr_{d^*(z;x)}(z;x)=\min_{d\in K}\Pr_d(z;x)$, $z\in Z$, $x\in X$, функция $d^*(\cdot;x)\colon Z\to K$ при любом $x\in X$ удовлетворяет условию

$$d^*(z;x)\in D(z;x)=\{d\in K,\ \Pr_d(z;x)=\min_{d'\in K}\Pr_{d'}(z;x)\},\ z\in Z,\ x\in X, \tag{5.2.46}$$

и согласно (5.2.44), (5.2.45), (5.2.46), как нетрудно увидеть, является решением задачи

$$\min_{d(\cdot)}\Pr\mathrm{L}(d(\cdot);x)=\Pr\mathrm{L}(d^*(\cdot;x),x)=\int_Z\Pr_{d^*(z;x)}(z;x)\mu(\mathrm{d}z), \tag{5.2.47}$$

определяющей *оптимальное правило статистической идентификации* $d^*(\cdot;x)\colon Z\to K$, *для каждого* $x\in X$ *минимизирующее ожидаемую вероятность «потерь»*, см. § 6.1 гл. 6.

5.2.8. Оптимальные неопределенные правила идентификации и их качества. Пусть $t^{\widetilde{x}}(x)$ и $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)$ суть правдоподобие и доверие истинности н. в. м.-и., согласно которым $\widetilde{x}=x$ и $\widetilde{x}\neq x$, $x\in X$, соответственно, $\widetilde{d}^*(z)\triangleq d^*(z;\widetilde{x})$ — неопределенное оптимальное правило идентификации, $z\in Z$, $\mathrm{pr}l(x)=\Pr\mathrm{L}(d^*(\cdot;x);x)$ — минимальная для каждого $x\in X$ ожидаемая вероятность «потерь» и $\widetilde{\mathrm{pr}l}\triangleq\mathrm{pr}l(\widetilde{x})$ — *неопределенная минимальная ожидаемая вероятность «потерь»*, отвечающая минимальной для каждого $x\in X$ ожидаемой вероятности «потерь» в (5.2.47). Тогда для каждого значения $\zeta=z$ $t^{\widetilde{d}^*(z)}(d;z)=\sup\{t^{\widetilde{x}}(x)\mid x\in X,\ d^*(z;x)=d\}$ и $\widehat{s}^{\widetilde{d}^*(z)}(d;z)=\inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)\mid x\in X,\ d^*(z;x)=d\}$ суть правдоподобие и доверие истинности н. в. м.-и., согласно которым $\widetilde{d}^*(z)=d$ и соответственно $\widetilde{d}^*(z)\neq d$, $d\in K$.

Заметим, что неопределённость стохастического объекта обычно обусловлена неопределённостью вероятности $\Pr^{\varkappa}(\,\cdot\,;x)$, $x\in X$, в которой $x=e\in(0,1)=X$, $\Pr^{\varkappa}(\,\cdot\,;e)\in\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ и соответственно $\Pr^{\zeta,\widetilde{\varkappa}}(z,k)=\Pr^{\zeta|\widetilde{\varkappa}}(z|k)\Pr^{\widetilde{\varkappa}}(k)\triangleq\Pr^{\zeta|\varkappa}(z|k;\widetilde{e})\Pr^{\varkappa}(k;\widetilde{e})$, $z\in Z$, $k\in K$.

Для неопределенной минимальной ожидаемой вероятности «потерь»

$$t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr})=\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{\mathrm{pr}l}=\mathrm{pr})=\sup\{t^{\widetilde{x}}(x)|x\in X,\ \mathrm{pr}l(x)=\mathrm{pr}\} \tag{5.2.48}$$

и

$$\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr})=\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{\mathrm{pr}l}\neq\mathrm{pr})=\inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)|x\in X,\ \mathrm{pr}l(x)=\mathrm{pr}\} \tag{5.2.49}$$

суть правдоподобие и доверие истинности н. в. м.-и., согласно которым $\widetilde{\mathrm{pr}l}=\mathrm{pr}$ и соответственно $\widetilde{\mathrm{pr}l}\neq\mathrm{pr}$, $\mathrm{pr}\in[0,1]$.

Ожидаемое *качество* оптимального неопределенного правила идентификации $\widetilde{d}^*(\cdot) = d^*(\cdot;\widetilde{x})\colon Z \to K$, см. (5.2.46), *охарактеризуем значениями* $\mathrm{pr} \in [0,1]$ *неопределенной ожидаемой вероятности «потерь», при которых равенство* $\widetilde{\mathrm{pr}l} = \mathrm{pr}$ *имеет максимальное правдоподобие, а неравенство* $\widetilde{\mathrm{pr}l} \neq \mathrm{pr}$ — *минимальное доверие*, а именно, чем меньше значения $\operatorname*{argmax}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr})$ в (5.2.48) и $\operatorname*{argmin}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr})$ в (5.2.49), тем лучше оптимальное неопределенное правило решения $d^*(\cdot;\widetilde{x})$, где $\operatorname*{argmax}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr}) \overset{\triangle}{=} \inf_{\varepsilon>0} \inf_{x\in X_t^\varepsilon} \mathrm{pr}l(x)$, $\operatorname*{argmin}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr}) \overset{\triangle}{=} \inf_{\varepsilon>0} \inf_{x\in X_{\widehat{s}}^\varepsilon} \mathrm{pr}l(x)$, $X_t^\varepsilon = \{x \in X,\ t^{\widetilde{x}}(x) \geqslant 1-\varepsilon\}$, $X_{\widehat{s}}^\varepsilon = \{x \in X,\ \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \leqslant \varepsilon\}$, $\mathrm{pr}l(x) = \mathrm{Pr}\,\mathrm{L}(d^*(\cdot;x),x)$, $x \in X$, и учтено, что $\sup_{x\in X} t^{\widetilde{x}}(x) = 1$, $\inf_{x\in X} \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = 0$. Если же $t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to [0,1]$ полунепрерывна сверху, а $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X \to [0,1]$ полунепрерывна снизу, то $\operatorname*{argmax}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr}) = \min\{\mathrm{pr}l(x) | x \in X,\ t^{\widetilde{x}}(x) = 1\}$, $\operatorname*{argmin}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr}) = \min\{\mathrm{pr}l(x) | x \in X,\ \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = 0\}$.

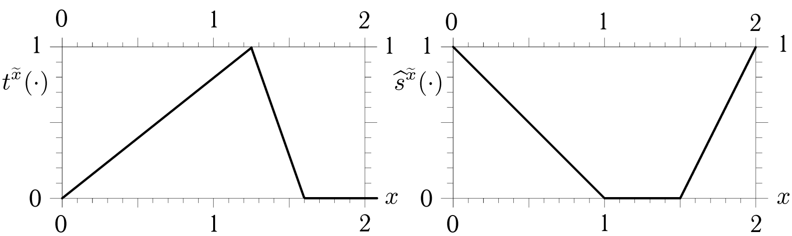


Рис. 5.2.4. Распределения (несогласованных, см. § 1.5 гл. 1) мер правдоподобий $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ в (5.2.48) (слева) и доверий $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ в (5.2.49) (справа) значений н. э. $\widetilde{x}$

Если в задаче идентификации распределения $t^{\widetilde{x}}(x)$, $x \in [0,2]$, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)$, $x \in [0,2]$, представлены графиками на рис. 5.2.4, $K = \{1,2\}$, $\mathrm{pr}^{\varkappa}(1;x) = x/2$, $\mathrm{pr}^{\varkappa}(2;x) = 1 - x/2$, $k \in \{1,2\}$, $x \in [0,2]$, $\mathrm{pr}^{\zeta|\varkappa}(z|1;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(z-\lambda)^2}{2})$, $\mathrm{pr}^{\zeta|\varkappa}(z|2;\lambda) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(-\frac{(z-2\lambda)^2}{4})$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $\mathrm{pr}l_{k,d} = \begin{cases} 0, & k = d, \\ 1, & k \neq d, \end{cases}$ $k, d \in \{1,2\}$, см. сноску [1]) (на с. 367), где $\lambda \geqslant 0$ выбирает м.-и., то минимальная для каждого $x \in [0,2]$ и каждого $\lambda \geqslant 0$ ожидаемая вероятность потерь $\mathrm{pr}l(x,\lambda) = \mathrm{Pr}\,\mathrm{L}(d^*(\cdot);x,\lambda)$ представлена на рис. 5.2.5. На рис. 5.2.6 показаны распределения правдоподобий и доверий $\widetilde{\mathrm{pr}l}(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, на рис. 5.2.7 приведена зависимость от $\lambda \geqslant 0$ $\mathrm{pr}_t(\lambda) = \operatorname*{argmax}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} t^{\widetilde{\mathrm{pr}l(\lambda)}}(\mathrm{pr}) \in \operatorname*{argmin}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l(\lambda)}}(\mathrm{pr}) = \mathrm{pr}_{\widehat{s}}(\lambda)$, где $\mathrm{pr}_{\widehat{s}}(\cdot)\colon (0,\infty) \to \mathcal{P}([0,1))$ — многозначное отображение.

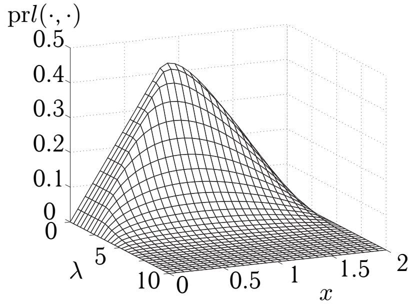


Рис. 5.2.5. Минимальная ожидаемая вероятность потерь $\mathrm{pr}l(x,\lambda) = \mathrm{Pr}\,\mathrm{L}(d^*(\cdot);x,\lambda)$, $x \in [0,2]$, $\lambda \geqslant 0$

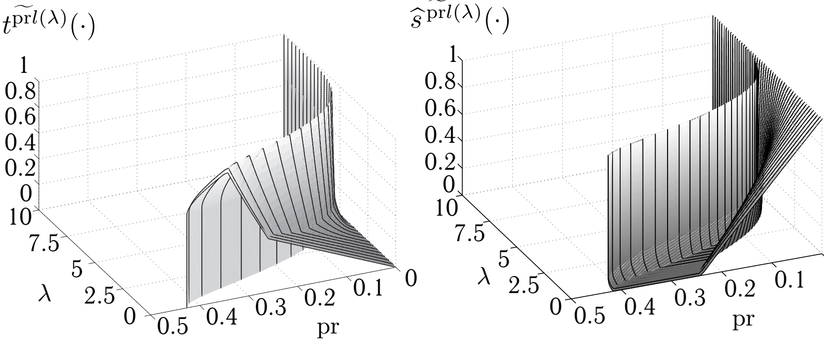


Рис. 5.2.6. Распределения правдоподобий и доверий неопределенной минимальной ожидаемой вероятности «потерь» $\widetilde{\mathrm{pr}l}(\lambda) = \mathrm{pr}l(\widetilde{x},\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$

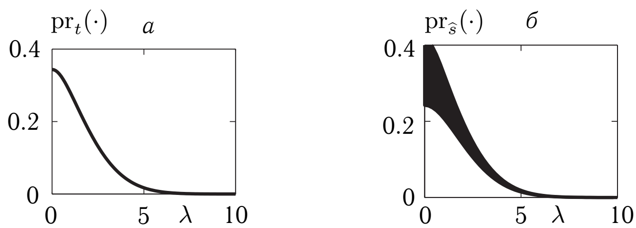


Рис. 5.2.7. Зависимости: *а*) $\mathrm{pr}_t(\lambda) = \operatorname*{argmax}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(\lambda)}(\mathrm{pr})$ и *б*) $\mathrm{pr}_{\widehat{s}}(\lambda) = \operatorname*{argmin}_{\mathrm{pr}\in[0,1]} \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(\lambda)}(\mathrm{pr})$, $\lambda \geqslant 0$, качество оптимального неопределенного правила идентификации характеризует функция $\mathrm{pr}_t(\cdot)$, так как $\mathrm{pr}_t(\lambda) \cap \mathrm{pr}_{\widehat{s}}(\lambda) = \mathrm{pr}_t(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$

Правила идентификации можно построить иначе, определив сперва распределения $t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}$ и $\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}$ неопределенной ожидаемой вероятности «потерь», отвечающие *некоторой* решающей функции $d(\cdot)\colon Z \to K$:

$$t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d(\cdot)) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\mathrm{Pr\,L}(d(\cdot); \widetilde{x}) = \mathrm{pr}) = \\ = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) | x \in X, \mathrm{Pr\,L}(d(\cdot); x) = \mathrm{pr}\},$$

$$\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d(\cdot)) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\mathrm{Pr\,L}(d(\cdot); \widetilde{x}) \neq \mathrm{pr}) = \\ = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) | x \in X, \mathrm{Pr\,L}(d(\cdot); x) = \mathrm{pr}\},\ \mathrm{pr} \in [0,1],$$

а соответствующие оптимальные правила $d^+(\cdot)$ и $d_+(\cdot)$ определив как решения задач

$$\underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmax}}\, t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d^+(\cdot)) = \min_{d(\cdot)} \underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmax}}\, t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d(\cdot)),$$
$$\underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmin}}\, \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d_+(\cdot)) = \min_{d(\cdot)} \underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmin}}\, \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d(\cdot)). \tag{5.2.50}$$

Правила $d^+(\cdot)$ и $d_+(\cdot)$ тем лучше, чем меньше соответствующие левые части равенств в (5.2.50). Однако неопределенное правило $d^*(\cdot; \widetilde{x})\colon Z \to K$ идентификации предпочтительнее правил $d^+(\cdot; \widetilde{x})\colon Z \to K$ и $d_+(\cdot; \widetilde{x})\colon Z \to K$, поскольку $\underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmax}}\, t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr}) \leqslant \underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmax}}\, t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d^+(\cdot))$ и $\underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmin}}\, \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}}(\mathrm{pr}) \leqslant \underset{\mathrm{pr}\in[0,1]}{\mathrm{argmin}}\, \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}'}(\mathrm{pr}; d_+(\cdot))$. Эти неравенства немедленно следуют из неравенств: $\forall\, d(\cdot)\colon Z \to K\ \forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, x \in X_t^\varepsilon \cup X_{\widehat{s}}^\varepsilon\ \mathrm{pr}l(x) = \mathrm{Pr\,L}(d^*(\cdot; x); x) \leqslant \mathrm{Pr\,L}(d(\cdot); x) = \mathrm{pr}_d(x)$, верных в силу определения $d^*(\cdot; x)$ (5.2.46).

Заметим в заключение, что оптимальное правило идентификации $d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot)$, отвечающее *правдоподобию* $\mathrm{pl} \in [0,1]$ *модели* неопределенного стохастического объекта, определяется как решение задачи $\min\limits_{d(\cdot)} \sup\{\mathrm{PrL}(d(\cdot); x) \mid x \in X_{\mathrm{pl}}\} = \mathrm{PrL}(d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot))$, где $X_{\mathrm{pl}} = \{x \in X,\ t^{\widetilde{x}}(x) = = \mathrm{pl}\}$ и $\mathrm{PrL}(d^*_{\mathrm{pl}}(\cdot)) \geqslant \sup\{\mathrm{pr}l(x) \mid x \in X_{\mathrm{pl}}\}$, $\mathrm{pl} \in [0,1]$.

5.2.9. Оптимальное неопределенное условное правило идентификации. Предположим, что в рассматриваемой задаче при каждом $x \in X$ существует условная, при условии $\zeta = z$, вероятность

$$\mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(k|z; x) = \mathrm{pr}^{\zeta,\varkappa}(z, k; x)/\mathrm{pr}^{\zeta}(z; x),\ k \in K,\ z \in Z, \tag{5.2.51}$$

состояния $\varkappa = k$, где

$$\mathrm{pr}^{\zeta}(z; x) = \sum_{k\in K} \mathrm{pr}^{\zeta,\varkappa}(z, k; x).$$

Рассмотрим несколько более узкий класс оптимальных правил идентификации $d^*(|\cdot; x)\colon Z \to K$, $x \in X$, заменив условие (5.2.46) на условие

$$d^*(|z; x) \in D(|z; x) = \{d \in K,\ \mathrm{Pr}_d(|z; x) = \min_{d'\in k} \mathrm{Pr}_{d'}(|z; x)\}, \tag{5.2.52}$$

в котором при каждом $x \in X$

$$\mathrm{Pr}_d(|z; x) = \sum_{k\in K} \mathrm{pr}l_{k,d}\mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(k|z; x) \tag{5.2.53}$$

— условная, при условии $\zeta = z$, вероятность «потерь», сопутствующих решению $d \in K$, см. § 6.4.11 гл. 6.

Всякое правило идентификации $d^*(\cdot|;x)\colon Z \to K$, согласно условию (5.2.52) при каждом $x \in X$ минимизирующее условную, при условии $\zeta = z$, вероятность «потерь» (5.2.53), минимизирует и ожидаемую вероятность «потерь» (5.2.44), поскольку, как и правило $d^*(\cdot;x)\colon Z \to K$, удовлетворяет условию (5.2.46).

Заметим, что правила $d^*(|\cdot;x)\colon Z \to K$; $x \in X$, в (5.2.52) можно определить, если для каждого $x \in X$ известна лишь переходная вероятность $\mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(k|z;x)$, $k \in K$, $z \in Z$, а распределения $\mathrm{pr}^{\zeta}(z;x)$, $z \in Z$, и, следовательно, $\mathrm{pr}^{\zeta,\varkappa}(z,k;x)$, $z \in Z$, $k \in K$, как это зачастую и бывает, неизвестны. Поэтому интерес представляет исследование оптимального неопределенного правила идентификации $d^*(|z;\widetilde{x})$, $z \in Z$.

Пусть для простоты $K = \{1,2\}$. Поясним графически, как в этом случае построить $d^*(|z;x)$, $z \in Z$, $x \in X$.

На рис. 5.2.8 отмечены точки $(1) \sim (l_1^{(1)}, l_2^{(1)}) = (\mathrm{pr} l_{1,1}, \mathrm{pr} l_{2,1})$ и $(2) \sim \sim (l_1^{(2)}, l_2^{(2)}) = (\mathrm{pr} l_{1,2}, \mathrm{pr} l_{2,2})$, координаты которых для состояний $k = 1,2$ суть вероятности «потерь», сопутствующих решениям $d = 1$ и $d = 2$ соответственно, α — отрезок прямой

$$\{(l_1,l_2),\ \mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(1|z;x)l_1 + \mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(2|z;x)l_2 = l^{\alpha}(|z;x),\ l_1 \geqslant 0,\ l_2 \geqslant 0\}. \tag{5.2.54}$$

Минимальное значение условной, при условии $\zeta = z$, вероятности «потерь» (5.2.53)

$$\mathrm{Pr}_{d^*(|z;x)}(|z;x) = l^{\alpha_{(2)}}(|z;x) = \mathrm{pr} l_{1,2}\mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(1|z;x) + \mathrm{pr} l_{2,2}\mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(2|z;x) = \mathrm{Pr}_2(|z;x)$$

достигается при $d^*(|z;x) = 2$, ибо, как видно на рис. 5.2.8, *а*, $\mathrm{Pr}_1(|z;x) = = l^{\alpha_{(1)}}(|z;x) > l^{\alpha_{(2)}}(|z;x) = \mathrm{Pr}_2(|z;x)$.

При фиксированном результате наблюдения $\zeta = z$ с изменением $x \in X$ изменяются значения условных вероятностей $\mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(k\,|\,z;x)$, $k = 1,2$, определяющих наклоны отрезков прямых, содержащих точки (1) и (2), и значения условных, при условии $\zeta = z$, вероятностей «потерь» (5.2.53), см. рис. 5.2.8. В обозначениях, использованных на рис. 5.2.8, условие (5.2.52) имеет вид

$$d^*(|z;x) \in D(|z;x) = \{d \in K,\ l^{\alpha_{(d)}}(z;x) = \min_{d' \in K} l^{\alpha_{(d')}}(z;k)\}.$$

Качество оптимального неопределенного условного правила идентификации, заданного неопределенной функцией $\widetilde{d}^*(|z) \triangleq d^*(|z;\widetilde{x})$, $z \in Z$, распределения правдоподобий и доверий значений которой суть

$$\begin{aligned} t^{\widetilde{d}^*(|z)}(d) &= \sup\{t^{\widetilde{x}}(x),\ x \in X,\ d^*(z,x) = d\}, \\ \widehat{s}^{\widetilde{d}^*(|z)}(d) &= \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x),\ x \in X,\ d^*(z,x) = d\}, \end{aligned} \quad d \in K,$$

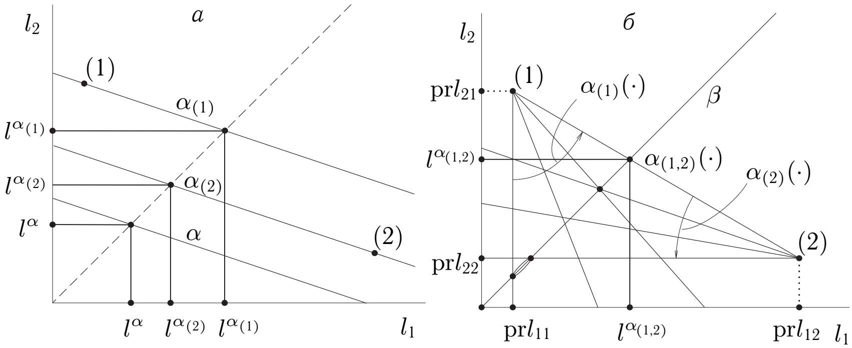


Рис. 5.2.8. *а*) Параллельные отрезку α (5.2.54) отрезки $\alpha_{(1)}$ и $\alpha_{(2)}$, содержащие точки (1) и (2), «определяют» условные, при условии $\zeta = z$, вероятности $l^{\alpha_{(1)}} = l^{\alpha_{(1)}}(|z;x)$ и $l^{\alpha_{(2)}} = l^{\alpha_{(2)}}(|z;x)$ «потерь», сопутствующих решениям $d = 1$ и $d = 2$ соответственно, причем $l^{\alpha_{(1)}}(|z;x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(1|z;x)l_1^{(1)} + \mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(2|z;x)l_2^{(1)} > \mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(1|z;x)l_1^{(2)} + \mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(2|z;x)l_2^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} l^{\alpha_{(2)}}(|z;x)$. *б*) Отрезки $\alpha_{(1)}(x)$, $x \in X_1$, $\alpha_{(1,2)}(x)$, $x \in X_{1,2}$, $\alpha_{(2)}(x)$, $x \in X_2$, $X_1 \cup X_{1,2} \cup X_2 = X$, «определяют» условные, при условии $\zeta = z$, вероятности «потерь», сопутствующие решениям $d = 1$ и $d = 2$, «определяют» как координаты $l^{\alpha_{(1)}}$, $l^{\alpha_{(2)}}$ точек пересечения $\alpha_{(1)}(x) \cap \beta$, $\alpha_{(2)}(x) \cap \beta$ отрезков $\alpha_{(1)}(x)$, $\alpha_{(2)}(x)$ с биссектрисой $\beta = \{(l_1, l_2),\ l_1 = l_2 \geqslant 0\}$, $x \in X$. Отрезок $\alpha_{(1,2)} = \alpha_{(1,2)}(x)$, $x \in X_{1,2}$, содержит обе точки (1) и (2) и «определяет» *максимальную* условную, при условии $\zeta = z$, вероятность «потерь», сопутствующую любому из решений $d = 1$ или $d = 2$; в этом смысле множество $X_{1,2}$ определяет «наихудшие для идентификации» условные (переходные) вероятности $\mathrm{pr}^{\varkappa|\zeta}(k|z;x)$, $k = 1, 2$, $x \in X_{1,2}$

охарактеризуем значением $\mathrm{pr}^*(\ |z)$ условной, при каждом условии $\zeta = z \in Z$, неопределенной вероятности «потерь»

$$\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z) = \mathrm{Pr}_{d^*(|z;\widetilde{x})}(|z;\widetilde{x}) = l^{\alpha(d^*(|z;\widetilde{x}))}(|z;\widetilde{x}),$$

при которой равенство $\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z) = \mathrm{pr}^*(|z)$ имеет максимальное правдоподобие

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z)}(\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z) = \mathrm{pr}) = t^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z)}(\mathrm{pr}) = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x),\ x \in X,\ \mathrm{pr}l(|z;x) = \mathrm{pr}\},\quad \mathrm{pr} \in [0,1],$$

где $\mathrm{pr}l(|z;x) = \mathrm{Pr}_{d^*(|z;x)}(|z;x)$, и — значением $\mathrm{pr}_*(|z)$, при котором неравенство $\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z) \neq \mathrm{pr}_*(|z)$ имеет минимальное доверие

$$\mathrm{Bel}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z)}(\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z) \neq \mathrm{pr}) = \widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z)}(\mathrm{pr}) = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x),\ x \in X,\ \mathrm{pr}l(|z;x) = \mathrm{pr}\},\quad \mathrm{pr} \in [0,1].$$

Чем меньше значения $\mathrm{pr}^*(|z)$ и $\mathrm{pr}_*(|z)$, тем лучше оптимальное неопределенное правило идентификации $\widetilde{d}^*(|z)$, $z \in Z$.

Заметим, что если шкалы $\mathcal{L}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ значений мер правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$ дуально изоморфны, то для некоторой непрерывной строго монотонной функции $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$, см. рис. 5.2.1, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \theta(t^{\widetilde{x}}(x))$, $x \in X$, и в этом случае

$$\theta(\mathrm{Pl}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z)}(\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z) = \mathrm{pr})) = \inf\{\theta(t^{\widetilde{x}}(x)) \mid x \in X,$$

$$\mathrm{pr}l(|z;x) = \mathrm{pr}\} = \mathrm{Bel}^{\widetilde{\mathrm{pr}l}(|z)}(\widetilde{\mathrm{pr}l} \neq \mathrm{pr}),\ \mathrm{pr} \in [0,1],$$

и, следовательно, можно считать, что $\mathrm{pr}^*(|z) = \mathrm{pr}_*(|z)$, $z \in Z$.

5.3. Эмпирическое восстановление модели неопределенного элемента. Проверка истинности субъективных суждений

Введение. Математическая модель «диалога модельера-исследователя (м.-и.) с моделью объекта исследования», рассмотренная в § 5.2, *должна* допускать как эмпирическую верификацию, основанную на данных наблюдений за объектом, так и эмпирическое построение на основе этих же данных. Настоящий параграф посвящен решению возникающих в этой связи задач в случае, когда модель объекта определена как вероятностное пространство $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot\,; x)\big)$, заданное с точностью до значения параметра $x \in X$, а модель «диалога» (до наблюдений за объектом) определена м.-и. как пространство $\big(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}\big)$ с мерами правдоподобия $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и доверия $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, в котором неопределенный элемент $\widetilde{x}$ моделирует (как неопределенная высказывательная переменная) его субъективные суждения о возможных значениях $x \in X$ в диалоге с моделью объекта.

В частности, в этом параграфе

► рассмотрен основанный на результатах наблюдений за вероятностным объектом метод статистического моделирования н. э. $\widetilde{x}$, позволяющий *построить* его эмпирическую модель и на ее основе *оценить состоятельность модели н. э.* $\widetilde{x}$, предложенной м.-и.;

► определено *правдоподобие согласия модели н. э.* $\widetilde{x}$ *с данными наблюдений за объектом.*

Пусть, как и в § 5.2, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot\,; x))$, $x \in X$, модель объекта исследования, в которой x — значение н. э. $\widetilde{x}$, но теперь исследователю доступны данные наблюдений за объектом, и он намерен использовать их для построения статистической модели н. э. $\widetilde{x}$. С этой целью исследователь для каждого $x \in X$ *формулирует статистическую задачу проверки гипотезы* $H(x) = \{x\}$, конкурирующей с *классом* $K(x)$ *альтернативных* $H(x)$ *гипотез* о возможных, отличных от x, значениях параметра, например, — с классом $K(x) = X \setminus \{x\}$, где x — неизвестное значение параметра вероятности $\mathrm{Pr}(\cdot\,; x)$, контролировавшей данные наблюдений за объектом, $x \in X$.

Обозначим: $\omega^{(n)} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$ — данные n наблюдений, $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot\,;x)\colon \mathcal{A}^n \to [0,1]$ — контролировавшую их вероятность, $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) \in \mathcal{A}^n$ — область в Ω^n принятия гипотезы $H(x) = \{x\}$ при конкурирующей частной альтернативе $\{x'\} \subset K(x)$, где

$$\mathrm{pr} = \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr})\}; x) \tag{5.3.1}$$

— вероятность принять гипотезу $H(x)$, когда она и на самом деле верна, т. е. когда данные $\omega^{(n)}$ контролировались вероятностью [1] $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot\,;x)$.

Вероятность

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr})\}; x') \tag{5.3.2}$$

принять $H(x)$ ошибочно, когда x' — истинное значение параметра вероятности, контролировавшей $\omega^{(n)}$, зависит от области $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$, и последнюю естественно выбрать так, чтобы при условии (5.3.1) вероятность (5.3.2) стала как можно меньше, точнее — чтобы для любой области $\Omega(x, x', \mathrm{pr})$ принятия $H(x)$, удовлетворяющей условию

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega(x, x', \mathrm{pr})\}; x) = \mathrm{pr}, \tag{5.3.3}$$

и для любого $x' \in K(x)$ выполнялось неравенство

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr})\}; x') \leqslant \mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega(x, x', \mathrm{pr})\}; x'). \tag{5.3.4}$$

Класс Ω_* областей $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$, $x' \in K(x)$, $x \in X$, удовлетворяющих условиям (5.3.1), (5.3.3) и (5.3.4), и каждую такую область $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ назовем *оптимальными для* $\mathrm{pr} \in [0,1]$. Далее для простоты ограничимся семействами $\mathrm{Pr}(\cdot\,;x)$, $x \in X$, для которых *оптимальная область* $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ *существует для любого* $\mathrm{pr} \in [0,1]$ и *для любых* $x' \in K(x)$, $x \in X$, см. замечание 5.3.2.

5.3.1. Неопределенная модель объекта охарактеризована условиями: $\boldsymbol{H(x) = \{x\}}$, $\boldsymbol{K(x) = \{x'(x)\} \neq \{x\}}$, $\boldsymbol{x \in X}$. Рассмотрим вначале случай, в котором объект исследования для каждого $x \in X$ может находиться в одном из двух «состояний», определенных либо значением x, либо (конкурирующим) значением $x' = x'(x) \neq x$, где $x'(\cdot)\colon X \to X$ — отображение, *известное исследователю*. Речь, стало быть, пойдет о семействе статистических задач проверки «простых» гипотез $H(x) = \{x\}$ против «простых» альтернатив $K(x) = \{x'(x)\}$, $x \in X$, в которых, как будет показано, *условие оптимальности* областей $\Omega_*(x, x'(x), \mathrm{pr})$, $x \in X$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, *достаточно* для построения статистической модели н. э. $\widetilde{x}$.

[1] Гипотеза $H(x)$ принимается, если $\omega^{(n)} \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$, разумеется, независимо от того, какая вероятность, $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot\,;x)$ или $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot\,;x')$, контролировала данные $\omega^{(n)}$; для простоты $\omega^{(n)}$ обозначает точку в Ω^n, случайный элемент со значениями в Ω^n и его значение.

Методы решения таких статистических задач проверки гипотез хорошо известны, см. Введение, и при оговоренных свойствах семейств вероятностей $\Pr(\cdot;x)$, $x \in X$, согласно «фундаментальной лемме Неймана–Пирсона» [22] оптимальная *область принятия* $H(x)=\{x\}$ против $K(x)=\{x'\} \neq \{x\}$

$$\Omega_*(x,x',\mathrm{pr}) = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n,\ \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x) \geqslant \lambda \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x')\}, \quad x,x' \in X,\ x \neq x', \tag{5.3.5}$$

где $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x)$, $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, — плотность вероятности $\Pr^{(n)}(\cdot;\ x)\colon \mathcal{A}^n \to [0,1]$ относительно некоторой, независящей от $x \in X$, меры μ, $\Pr^{(n)}(A;x) = \int\limits_A \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x)\mu(d\omega^{(n)})$, $A \in \mathcal{A}^n$, а значение $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \geqslant 0$ определено условием (5.3.1).

Заметим, что оптимальная область (5.3.5) принятия $H(x)$ удовлетворяет *условию несмещенности*

$$\Pr^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega_*(x,x',\mathrm{pr})\};x') \leqslant \mathrm{pr},\ x,x' \in X,\ x' \neq x,\ \mathrm{pr} \in [0,1], \tag{5.3.6}$$

согласно которому вероятность pr принять истинную гипотезу $H(x)$ не меньше, чем вероятность принять ее ошибочно, когда она не верна.

Заметим также, что для любых $x,x' \in X$, $x \neq x'$, согласно (5.3.5)

$$\Omega_*(x,x',\mathrm{pr}) \subset \Omega_*(x,x',\mathrm{pr}'),\ \text{если } \mathrm{pr} \leqslant \mathrm{pr}',\ \mathrm{pr},\mathrm{pr}' \in [0,1], \tag{5.3.7}$$

т. е. $\Omega_*(x,x',\cdot)\colon [0,1] \to \mathcal{P}(\Omega^n)$ — *монотонное по включению отображение*.

Определим для каждого $\mathrm{pr} \in [0,1]$ следующие взаимно обратные функции (отображения): $\Phi(\cdot;\mathrm{pr})\colon X \to \mathcal{A}^n$,

$$\Phi(x;\mathrm{pr}) = \Omega_*(x,x'(x),\mathrm{pr}),\ x \in X, \tag{5.3.8}$$

и $\Phi^{-1}(\cdot;\mathrm{pr})\colon \Omega^n \to \mathcal{P}(X)$,

$$\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) = \{x \in X,\ \omega^{(n)} \in \Phi(x;\mathrm{pr})\},\ \omega^{(n)} \in \Omega^n. \tag{5.3.9}$$

Функции (5.3.8) и (5.3.9) являются *статистическими характеристиками* объекта исследования, значение $\Phi(x;\mathrm{pr}) \in \mathcal{A}^n$ первой есть множество тех наблюдений $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, при которых исследователь принимает гипотезу $H(x)$, значение $\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) \in \mathcal{P}(X)$ второй есть множество тех $x \in X$, при которых исследователь принимает $H(x)$, если наблюдает $\omega^{(n)} \in \Omega^n$, причем согласно (5.3.8), (5.3.9)

$$\Pr^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Phi(x;\mathrm{pr})\};x) = \Pr^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n, x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr})\};x) = \mathrm{pr}, \quad \mathrm{pr} \in [0,1],\ x \in X, \tag{5.3.10}$$

где $\Pr^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n,\ x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}; x)$ — вероятность события, согласно которому *случайное множество* [1] $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ *покрывает* и, тем самым, *оценивает* значение x параметра вероятности $\Pr^{(n)}(\cdot\,; x)$, контролиовавшей наблюдения $\omega^{(n)}$. Согласно (5.3.6), (5.3.10) вероятность $\Pr^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n,\ x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}; x'(x))$ события, в соответствии с которым множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ покрывает x, в то время как параметр вероятности, контролировавшей наблюдения, равен конкурирующему значению $x'(x)$, не больше pr, а согласно (5.3.7) с вероятностью единица

$$\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}) \subset \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}'),\ \text{если } \mathrm{pr} \leqslant \mathrm{pr}'. \tag{5.3.11}$$

Следующие замечания, основанные на свойствах функций (5.3.8)–(5.3.11), как *статистических характеристик объекта исследования*, и правилах «принятия–отклонения» гипотез $H(x)$, $x \in X$, *позволяют исследователю рассматривать $x \in X$ как значения случайного, зависящего от $\omega^{(n)}$, неопределенного элемента $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\omega^{(n)})$*, а последний считать *эмпирической моделью* его субъективных суждений о возможных значениях неизвестного параметра $x \in X$ модели $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr(\cdot; x))$, контролировавшей данные наблюдений $\omega^{(n)}$.

1. Чем больше минимальное значение $\mathrm{pr} \in [0,1]$, при котором $\omega^{(n)} \in \Phi(x; \mathrm{pr})$ и, следовательно, принимается гипотеза $H(x)$, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$, тем менее *правдоподобно* равенство $\widetilde{x}(\omega^{(n)}) = x$;
2. Чем больше максимальное значение $\mathrm{pr} \in [0,1]$, при котором $\omega^{(n)} \in \Omega^n \setminus \Phi(x; \mathrm{pr})$ и, следовательно, отклоняется гипотеза $H(x)$, тем значительнее наблюдение $\omega^{(n)}$ свидетельствует против $H(x)$, тем менее *правдоподобно* равенство $\widetilde{x}(\omega^{(n)}) = x$.

Эти замечания определяют статистическую модель н. э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ следующими вариантами распределений правдоподобий его значений: $\forall\, x \in X$ согласно замечанию 1

$$\underline{t}^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x) \triangleq \underline{t}^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)}) = 1 - \inf\{\mathrm{pr} | \mathrm{pr} \in [0,1],\ x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}, \tag{5.3.12}$$

согласно замечанию 2

$$\overline{t}^{\widetilde{x}(\omega^{(n)})}(x) \triangleq \overline{t}^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)}) = 1 - \sup\{\mathrm{pr} | \mathrm{pr} \in [0,1],\ x \in X \setminus \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})\}. \tag{5.3.13}$$

Вообще говоря, с вероятностью единица $\overline{t}^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)}) \geqslant \underline{t}^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)})$, но поскольку, как было оговорено, область $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ (5.3.5) существует для любого $\mathrm{pr} \in [0,1]$ и всех $x, x' \in X$, $x \neq x'$, то с вероятностью

[1] В математической статистике случайное множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ называется доверительным, значение $\mathrm{pr} \in [0,1]$ называется уровнем доверия [22]. В этом параграфе случайное множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})$ названо оценивающим параметр $x \in X$, поскольку «доверие» истолковано иначе.

единица $\overline{t}^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = \underline{t}^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)})$, см. лемму 5.1.1. Поэтому

$$t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = \overline{t}^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = \underline{t}^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}),\ x \in X, \omega^{(n)} \in \Omega^n, \qquad (5.3.13^*)$$

— вариант распределения правдоподобий значений $\widetilde{x}$,

$$\widehat{s}_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = 1 - t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}),\ x \in X,\ \omega^{(n)} \in \Omega^n, \qquad (5.3.13^{**})$$

— вариант распределения доверий значений $\widetilde{x}$, а распределения

$$t^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = \gamma(t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)})),\ \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) = \widehat{\gamma}(\widehat{s}_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)})),\ x \in X,\ \omega^{(n)} \in \Omega^n,$$

суть эквивалентные им, где $\gamma(\cdot)$, $\widehat{\gamma}(\cdot)$ — любые функции из Γ.

Наконец, подобно (5.1.4), (5.1.4*) $\forall E \in \mathcal{P}(X)$, $E \neq \varnothing$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(E;\omega^{(n)}) &= 1 - \inf\{\mathrm{pr} \in [0,1] | E \cap \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) \neq \varnothing\} = \\ &= 1 - \sup\{\mathrm{pr} \in [0,1] | E \cap \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) = \varnothing\} = \sup_{x \in E} t_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) \triangleq \\ &\triangleq \mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E;\omega^{(n)}),\ \mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(\varnothing;\omega^{(n)}) = 0,\ \omega^{(n)} \in \Omega^n, \quad (5.3.14)\end{aligned}$$

— вариант случайного правдоподобия, $\forall E \in \mathcal{P}(X)$, $E \neq X$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Bel}_0^{\widetilde{x}}(E;\omega^{(n)}) &= 1 - \mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(X \setminus E;\omega^{(n)}) = \sup\{\mathrm{pr} \in [0,1] | \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) \subset E\} = \\ &= \inf_{x \in X \setminus E} \widehat{s}_0^{\widetilde{x}}(x;\omega^{(n)}) \triangleq \mathrm{Bel}_0^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in E;\omega^{(n)}),\ \mathrm{Bel}_0^{\widetilde{x}}(X;\omega^{(n)}) = 1,\ \omega^{(n)} \in \Omega^n, \\ &\qquad (5.3.15)\end{aligned}$$

— вариант случайного доверия, см лемму 5.1.2.

Замечание 5.3.1. Вообще говоря, $\mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(X;\omega^{(n)}) \leqslant 1$ ($\mathrm{Bel}_0^{\widetilde{x}}(\varnothing;\omega^{(n)}) \geqslant 0$). Однако $\omega^{(n)}$ определяет не только случайное правдоподобие (доверие), но и случайную, изоморфную $\mathcal{L}$ ($\widehat{\mathcal{L}}$) шкалу $\gamma_{\omega^{(n)}}\mathcal{L}$ ($\widehat{\gamma}_{\omega^{(n)}}\widehat{\mathcal{L}}$) его значений, в которой $\gamma_{\omega^{(n)}} \circ \mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(X;\omega^{(n)}) = 1$ ($\widehat{\gamma}_{\omega^{(n)}} \circ \mathrm{Bel}_0^{\widetilde{x}}(\varnothing;\omega^{(n)}) = 0$), где $\gamma_{\omega^{(n)}}(\cdot)\colon [0, \mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(X;\omega^{(n)})] \to [0,1]$ ($\widehat{\gamma}_{\omega^{(n)}}(\cdot)\colon [\mathrm{Bel}_0^{\widetilde{x}}(\varnothing;\omega^{(n)}), 1] \to [0,1]$) — строго монотонная, непрерывная функция, $\gamma_{\omega^{(n)}}(0) = 0$, $\gamma_{\omega^{(n)}}(\mathrm{Pl}_0^{\widetilde{x}}(X;\omega^{(n)})) = 1$ ($\widehat{\gamma}_{\omega^{(n)}}(\mathrm{Bel}_0^{\widetilde{x}}(\varnothing;\omega^{(n)})) = 0$, $\widehat{\gamma}_{\omega^{(n)}}(1) = 1$).

Замечание 5.3.2. В общем случае статистической задачи проверки гипотезы $H(X) = \{x\}$ против альтернативы $K(x) = \{x'\}$, $x' \neq x$, $x, x' \in X$, область $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ принятия $H(x)$, при любом $\mathrm{pr} \in [0,1]$ удовлетворяющая условиям (5.3.1), (5.3.5), возможно, и не существует, см. введение. Для решения задачи в таком случае введем $\mathcal{A}^n$-измеримую функцию $\rho(\cdot)\colon \Omega^n \to [0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\rho(\omega^{(n)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega^{(n)} \in \Omega^n_{x,\lambda} = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n, \\ & \qquad \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) > \lambda \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}, x')\}, \\ r, & \text{если } \omega^{(n)} \in \Omega^n_{\lambda} = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n, \\ & \qquad \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) = \lambda \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}, x')\}, \\ 0, & \text{если } \omega^{(n)} \in \Omega^n_{x',\lambda} = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n, \\ & \qquad \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x) < \lambda \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}, x')\}, \end{cases} \tag{5.3.16}$$

$$\mathsf{E}^{(n)}_x \rho(\cdot) = \mathrm{pr},\ \mathrm{pr} \in [0,1], \tag{5.3.17}$$

в которых $\rho(\omega^{(n)})$ — переходная вероятность принять $H(x)$ при наблюдении $\omega^{(n)}$, причем согласно равенствам (5.3.16) при $\omega^{(n)} \in \Omega^n_{x,\lambda}$ ($\omega^{(n)} \in \Omega^n_{x',\lambda}$) $H(x)$ принимается (отвергается) с вероятностью единица, а при $\omega^{(n)} \in \Omega^n_{\lambda}$ $H(x)$ принимается с вероятностью r, где $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \geqslant 0$ и $r = r(\mathrm{pr}) \in (0,1)$ определяются условием [1] (5.3.17):

$$\mathsf{E}^{(n)}_x \rho(\cdot) = \mathrm{Pr}^{(n)}(\Omega^n_{x,\lambda}; x) + r\mathrm{Pr}^{(n)}(\Omega^n_{\lambda}; x) = \mathrm{pr} \tag{5.3.18}$$

для каждого $\mathrm{pr} \in [0,1]$. При этом если $r(\mathrm{pr}) > 0$ и наблюдено $\omega^{(n)} \in \Omega^n_{\lambda(\mathrm{pr})}$, то для принятия решения требуется рандомизация, а именно, следует разыграть случайную величину θ, независящую от $\omega^{(n)}$ и равномерно распределенную на $[0,1]$, и либо принять $H(x)$, если выпадет $\theta \in [0, r(\mathrm{pr})]$, либо отвергнуть, если выпадет $\theta \in (r(\mathrm{pr}), 1]$.

Понятно, что рандомизированную процедуру решения нельзя реализовать, задав какое-либо множество в Ω^n принятия $H(x)$, но (расширив пространство наблюдений) можно реализовать в $\Omega^n \times [0,1]$, задав следующее (оптимальное!) множество принятия $H(x)$:

$$\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \{(\omega^{(n)}, \theta) \in \Omega^n \times [0,1],\ 0 \leqslant \theta \leqslant \rho(\omega^{(n)})\},$$

ибо

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pr}^{(n)+1}(\omega^{(n)+1} \triangleq (\omega^{(n)}, \theta) \in \Omega_*(x, x', \mathrm{pr}); x) = \\ &\qquad = \mathrm{Pr}^{(n)}(\Omega^n_{x,\lambda(\mathrm{pr})}; x) + r(\mathrm{pr})\mathrm{Pr}^{(n)}(\Omega^n_{\lambda(\mathrm{pr})}; x) = \mathrm{pr} = \mathsf{E}_x \rho(\cdot), \end{aligned}$$

$x \neq x'$, $x, x' \in X$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$.

Таким образом, все результаты, полученные в этом параграфе, верны и в общем случае, если в качестве данных наблюдений использовать не $\omega^{(n)} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$, а $\omega^{(n)+1} = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \theta) \in \Omega^n \times [0,1]$.

---

[1] Функция $\rho(\cdot)\colon \Omega^n \to [0,1]$, удовлетворяющая условиям (5.3.16), (5.3.17) всегда существует и определяет правило принятия $H(x) = \{x\}$ против $K(x) = \{x'\}$, $x' \neq x$, $x, x' \in X$, оптимальное в следующем смысле: для любой $\mathcal{A}^n$-измеримой функции $\widetilde{\rho}(\cdot)\colon \Omega^n \to [0,1]$, $\mathsf{E}^{(n)}_x \widetilde{\rho}(\cdot) = \mathrm{pr}$, $\mathsf{E}^{(n)}_{x'} \widetilde{\rho}(\cdot) \geqslant \mathsf{E}^{(n)}_{x'} \rho(\cdot)$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, [22].

Замечание 5.3.3. Случайный неопределенный элемент можно охарактеризовать подобно тому, как в § 5.2.5 охарактеризован неопределенный случайный элемент.

Пусть как в § 5.2.5 заданы пространства с мерами: дискретное вероятностное [1] $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pr}^{\eta})$ и с правдоподобием и доверием $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, и задано отображение $q(\cdot,\cdot)\colon (Y, \mathcal{P}(Y)) \otimes (X, \mathcal{P}(X)) \to \to (Z, \mathcal{P}(Z))$, такое, что $\forall\, x \in X$ $q^{-1}(Z, x) = Y$. Функцию $\widetilde{\zeta} = q(\eta, \widetilde{x})$, рассматриваемую как неопределенный элемент со случайными, зависящими от η, распределениями правдоподобий и доверий его значений, назовем случайным неопределенным элементом, заданным на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{Pr}^{\eta}) \otimes (X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $(Z, \mathcal{P}(Z))$. В таком случае $\forall\, y \in Y$ $\widetilde{\zeta}\Big|_{\eta=y} = \widetilde{z}(y) = q(y, \widetilde{x})$ есть неопределенный элемент, определяющий меры правдоподобия $\mathrm{Pl}(\cdot; y)$ и доверия $\mathrm{Bel}(\cdot; y)$ в $(Z, \mathcal{P}(Z), \mathrm{Pl}(\cdot; y), \mathrm{Bel}(\cdot; y))$:

$$\mathrm{Pl}(Q; y) \triangleq \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(q(y, \widetilde{x}) \in Q) = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ q(y, x) \in Q\}, \qquad (*)$$

$$\mathrm{Bel}(Q; y) \triangleq \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(q(y, \widetilde{x}) \in Q) = \\ = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ q(y, x) \in Z \setminus Q\},\ Q \in \mathcal{P}(Z),$$

и, подобно (5.3.13*) и (5.3.13**), — их распределения

$$t^{\widetilde{z}(y)}(z) \triangleq t^{\widetilde{z}}(z; y) = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ q(y, x) = z\},$$
$$\widehat{s}^{\widetilde{z}(y)}(z) \triangleq \widehat{s}^{\widetilde{z}}(z; y) = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ q(y, x) = z\},\ z \in Z.$$

Соответственно $\mathrm{Pl}(Q, \eta)$ и $\mathrm{Bel}(Q, \eta)$, $Q \in \mathcal{P}(Z)$, — случайные меры правдоподобия и доверия, для которых

$$\mathrm{Pr}^{\eta}(\mathrm{Pl}(Q; \eta) \in B) = \int\limits_{y \in Y,\, \mathrm{Pl}(Q; y) \in B} \mathrm{Pr}^{\eta}(dy),\ \ \mathrm{Pr}^{\eta}(\mathrm{Bel}(Q; \eta) \in B) = \int\limits_{y \in Y,\, \mathrm{Bel}(Q; y) \in B} \mathrm{Pr}^{\eta}(dy),$$

где $B \subset [0, 1]$.

5.3.2. Неопределенная модель объекта охарактеризована условиями: $\boldsymbol{H(x) = \{x\}}$, $\boldsymbol{K(x) \subset X \setminus \{x\}}$, $\boldsymbol{x \in X}$. В общем случае существования оптимального класса Ω_* недостаточно для построения статистической модели н. э. $\widetilde{x}$. Дело в том, что для каждого $x \in X$ оптимальная область $\Omega_*(x, x', \mathrm{pr})$ определяется «частной альтернативой» $\{x'\} \subset K(x)$, которая м.-и. неизвестна; при любом $x \in X$ м.-и. знает только $H(x) = \{x\}$ и $K(x)$. Для построения статистической модели н. э. $\widetilde{x}$ необходимо, чтобы $\forall\, x \in X$ $\forall\, x' \in K(x)$ $\forall\, \mathrm{pr} \in [0, 1]$

$$\exists\, \Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \Omega^*(x, K(x), \mathrm{pr}) = \Phi(x, \mathrm{pr}),$$

[1] Условие $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ позволяет не рассматривать непрозрачные требования измеримости функций $\mathrm{Pl}(Q; \cdot)\colon Y \to [0, 1]$ и $\mathrm{Bel}(Q; \cdot)\colon Y \to [0, 1]$ в $(*)$.

т. е. чтобы $\forall\,\mathrm{pr} \in [0,1]$ $\forall x \in X$ существовал класс равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальных областей $\Phi(x;\mathrm{pr})$ принятия гипотез $H(x)$, $x \in X$.

Пусть, например, $H(x) = \{x\}$, $K(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in X = \mathcal{R}^1 = (-\infty, \infty)$, $\Pr(\cdot\,, x)$ гауссовская вероятность $\mathcal{N}(x, \sigma^2)$, где x — математическое ожидание, $\sigma^2 = 1$ — дисперсия. Как известно [22], в *классе несмещенных* (5.3.6) *областей* существует равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальная область принятия $H(x)$

$$\Omega_*(x, x', \mathrm{pr}) = \Phi(x, \mathrm{pr}) = \{\omega^{(n)} \in \mathcal{R}^n,\ |\omega_{(n)} - x| \leqslant \alpha_n(\mathrm{pr})\}, \qquad (*)$$

где $\omega_{(n)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j$, ω_j, $j = 1, \ldots, n$, взаимно независимы, а $\alpha_{(n)} = \alpha_{(n)}(\mathrm{pr})$ — корень уравнения

$$\Pr{}^{(n)}(|\omega_{(n)} - x| \leqslant \alpha_{(n)}) \equiv \int\limits_{-\alpha_{(n)}}^{\alpha_{(n)}} \exp(-nz^2/2)\sqrt{n/2\pi}\,dz = \mathrm{pr} \in [0,1]. \qquad (5.3.19)$$

Поэтому согласно (5.3.12), (5.3.13), (5.3.13*) в данном случае статистическая модель н. э. $\widetilde{x}$ определяется вариантом распределения, см. рис. 5.3.1,

$$\begin{aligned} t_0^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)}) &= 1 - \inf\{\mathrm{pr} | \mathrm{pr} \in [0,1],\ |\omega_{(n)} - x| \leqslant \alpha_{(n)}(\mathrm{pr})\} = \\ &= \sqrt{2/\pi} \int\limits_{\sqrt{n}\,|\omega_{(n)} - x|}^{\infty} \exp(-z^2/2)dz,\ x \in \mathcal{R}^1. \end{aligned} \qquad (5.3.20)$$

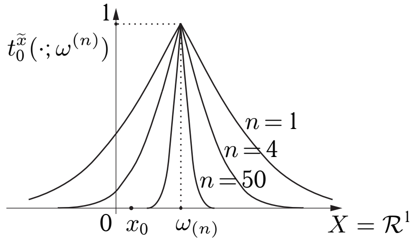


Рис. 5.3.1. Распределения правдоподобий (5.3.20) значений $\widetilde{x} = x \in \mathcal{R}^1 = X$. Правдоподобие значения $\widetilde{x}$, равного эффективной [7, 65] оценке (максимального правдоподобия!) $\omega_{(n)}$ математического ожидания семейства $\mathcal{N}(x, 1)$, $x \in \mathcal{R}^1$, максимально и равно единице, см. рис. 5.1.3, *б*

Если равномерно относительно $x' \in K(x)$ оптимальная область принятия гипотезы $H(x)$, $x \in X$, не существует, то можно попытаться найти область принятия $H(x)$, *локально оптимальную* для частных альтернатив $\{x'\} \subset K(x)$, «близких к $H(x) = \{x\}$» [65]. Пусть $\widehat{x}^*_{(n)}$ как в предыдущем примере $\Pr(\cdot\,; x) \sim \mathcal{N}(x, 1)$, $\Pr^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Phi(x, \mathrm{pr})\}; x') = f(x, x')$, где $\Phi(x, \mathrm{pr})$ — искомая *локально оптимальная* область принятия $H(x) = \{x\}$, удовлетворяющая условиям:

$f(x,x')|_{x'=x} = \mathrm{pr}$, $\partial f(x,x')/\partial x'|_{x'=x} = 0$, $\partial^2 f(x,x')/\partial (x')^2\big|_{x'=x} \sim \sim \min\limits_{\Phi(x,\mathrm{pr})}$, $x \in X$. В данном случае, как в предыдущем примере $\Phi(x,\mathrm{pr}) = \{\omega^{(n)} \in \mathcal{R}^n \ |\omega_{(n)} - x| \leqslant \alpha_{(n)}(\mathrm{pr})\}$, где $\alpha_{(n)}(\mathrm{pr})$ — корень уравнения (5.3.19).

Для семейства статистических задач проверки гипотез $H(x) = \{x\}$, $K(x) = X \setminus \{x\}$, $x \in X$, случайное множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr})$ можно определить *непосредственно как оценивающее* (неизвестный параметр $x \in X$ вероятности $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot;x)$, контролировавшей данные $\omega^{(n)}$) *множество максимального правдоподобия* (о. м. м. п.). В математической статистике функция $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x)$, $x \in X$, называется функцией правдоподобия, значение x' называется более правдоподобным, чем x, если $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x') > \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x)$, семейство случайных оценивающих множеств $\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, называется семейством о. м. м. п., если для любых $\omega^{(n)} \in \Omega^n$ и $\mathrm{pr} \in [0,1]$ включение $x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr})$ влечет включение $x' \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr})$ любого x', не менее правдоподобного, чем x: $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x') \geqslant \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x)$. Поэтому семейство о. м. м. п. $\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0,1]$, можно охарактеризовать условиями:

$$\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) = \{x \in X,\ \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x) \geqslant \lambda \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x(\omega^{(n)}))\} = \\ = X(\omega^{(n)};\lambda)\big|_{\lambda=\lambda(\mathrm{pr})},\ \omega^{(n)} \in \Omega^n, \quad (5.3.21)$$

где $x(\omega^{(n)}) = \arg\max\limits_{x\in X} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x)$ — оценка максимального правдоподобия параметра вероятности $\mathrm{Pr}^n(\cdot;x)$, контролировавшей $\omega^{(n)}$, а значение $\lambda = \lambda(\mathrm{pr}) \in [0,1]$ определяется из уравнения

$$\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n,\ x \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr})\};x) = \\ = \int\limits_{\omega^{(n)}:\ x\in X(\omega^{(n)};\lambda)} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x)\mu(d\omega^{(n)}) = \mathrm{pr},\ \mathrm{pr} \in [0,1]. \quad (5.3.22)$$

Соответственно варианты распределений провдоподобий и доверий н. э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ определяются как в (5.3.12) и в (5.3.13).

Для $\mathrm{Pr}(\cdot;x) \sim \mathcal{N}(x,1)$ $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\Big(-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(\omega_i - - x)^2\Big)$, $\omega^{(n)} = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega^n$, $x \in X = \mathcal{R}^1$, $x(\omega^{(n)}) = \omega_{(n)}$ и, как нетрудно проверить, о. м. м. п.

$$\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) = \{x \in X,\ |\omega_{(n)} - x| \leqslant (-2\ln\lambda(\mathrm{pr}))^{1/2}/\sqrt{n} = \\ = \alpha_{(n)}(\mathrm{pr}) = \alpha_{(1)}(\mathrm{pr})/\sqrt{n}\,\}, \quad (5.3.23)$$

где $\alpha_{(n)}(\mathrm{pr})$ — корень уравнения (5.3.19), см. пример 5.1.3.

Если $x = x_0$ — значение параметра вероятности $\mathrm{Pr}^{(n)}(\cdot;x)$, контролировавшей $\omega^{(n)}$, то $\omega_{(n)} - x_0 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0$ и в (5.3.23) $\Phi^{-1}(\omega^{(n)};\mathrm{pr}) =$

$= \{x \in X,\ |x_0 - x| \leqslant \rho(\omega_{(n)}, n, \mathrm{pr})\}$, где $\forall\,\mathrm{pr} \in [0,1]$ $\rho(\omega_{(n)}, n, \mathrm{pr}) = \alpha_{(1)}(\mathrm{pr})/\sqrt{n} + |\omega_{(n)} - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0$.

Асимптотическая при $n \to \infty$ оптимальность о. м. м. п. при известных требованиях к качеству семейства распределений $\mathrm{pr}^{(n)}(\cdot; x)$, $x \in X$, установлена методами исследования асимптотической оптимальности критерия отношения правдоподобия в статистических задачах проверки гипотез, рассмотренными в [7, 69].

5.3.3. Согласие модели н. э. $\widetilde{x}$, предложенной м.-и., со статистической моделью н. э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$. Если модельер-исследователь предложил модель $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$ прежде, чем ему стали доступны данные $\omega^{(n)} \in \Omega^n$ наблюдений за объектом, то он может воспользоваться ими для *анализа адекватности и коррекции предложенной им модели* н. э. $\widetilde{x}$, рассматривая случайный н. э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$, распределенный согласно (5.3.12)–(5.3.13**), как статистическую оценку н. э. $\widetilde{x}$. Действительно, пусть согласно модели последнего $x_0 \in X$ — единственное максимально правдоподобное значение параметра, $t^{\widetilde{x}}(x_0) = 1$. Если x_0 — истинное значение параметра, т. е. данные наблюдений контролировались гауссовской вероятностью $\mathcal{N}(x_0, 1)$, и для определенности, например, $x_0 < \omega_{(n)}$, см. рис. 5.3.1, то в таком случае *вероятность наблюденного значения* $\omega_{(n)}$, при котором в (5.3.20) $t^{\widetilde{x}}(\omega_{(n)}; \omega^{(n)}) = 1$, *или — любого другого* $\omega'_{(n)} > \omega_{(n)}$, равна

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int\limits_{\omega_{(n)}}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{(z - x_0)^2}{2/n}\Bigr) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt{n}\,(\omega_{(n)} - x_0)}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{z^2}{2}\Bigr) dz = \frac{1}{2} t_0^{\widetilde{x}}(x_0; \omega^{(n)}).$$

Если ее значение, скажем, $\sim 10^{-3}$, то н. э. $\widetilde{x}$ плохо согласуется с его статистической оценкой $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$.

Если x_0 не единственное значение параметра, при котором $t^{\widetilde{x}}(x_0) = 1$, а, скажем, $E = \{x \in X,\ t_0^{\widetilde{x}}(x) = 1\} = [a, b]$, причем, например, $b < \omega_{(n)}$, то наибольшая *вероятность* получить наблюденное значение $\omega_{(n)}$ или — любое $\omega'_{(n)} > \omega_{(n)}$ равна $\sup\limits_{x \in E} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int\limits_{\omega_{(n)}}^{\infty} \exp\left(\frac{(z - x)^2}{2/n}\right) dz = \frac{1}{2} \sup\limits_{x \in E} t_0^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)}) = \frac{1}{2} t_0^{\widetilde{x}}(b; \omega^{(n)}) = \frac{1}{2} \mathrm{Pl}_{t_0^{\widetilde{x}}}(E; \omega^{(n)})$, см. (5.3.15), и если значение $\mathrm{Pl}_{t_0^{\widetilde{x}}}(E; \omega^{(n)})$ мало́, то и в этом случае н. э. $\widetilde{x}$, формально выражающий априорные субъективные представления м.-и. о модели объекта, плохо согласуется с его статистической оценкой $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$, характеризующей объект эмпирическим распределением (5.3.13*).

В общем случае для определения согласия н. э. $\widetilde{x}$ с его оценкой $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$, разумеется, следует сравнивать не их распределения, каждое из которых определено с точностью до произвольного преобразования $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ его значений, а матрицы парных сравнений распределений $\widetilde{x}$ и $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$, см. § 3.9 гл. 3.

Наконец, если исследователь считает, что согласие его модели н. э. $\widetilde{x}$ со статистической моделью н. э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ удовлетворительное, то он может использовать последнюю для коррекции своей модели, применив методы построения «коллективной экспертизы», рассмотренные в §§ 3.9, 3.10 гл. 3, либо использовать случайный н. э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$ для определения правдоподобий и доверий значений характеристик объекта, обусловленных его моделью $M(x) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}(\cdot; x))$, $x \in X$, так, как использовал бы н. э. $\widetilde{x}$.

Заметим, что в терминах математической статистики [22] вероятность $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\omega^{(n)} \in \Omega^n \setminus \Phi(x; \mathrm{pr})\}; x) = 1 - \mathrm{pr}$ ошибочно отклонить гипотезу $H(x) = \{x\}$ называется уровнем (значимости) критической области $\Omega \setminus \Phi(x; \mathrm{pr})$, а согласно (5.3.13), (5.3.13*) значение правдоподобия $t_0^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)}) = \inf\{1 - \mathrm{pr} | \mathrm{pr} \in [0, 1],\ \omega^{(n)} \in \Omega^n \setminus \Phi(x; \mathrm{pr})\}$ в математической статистике называется критическим уровнем [22]; согласно (5.3.13), чем меньше критический уровень $t_0^{\widetilde{x}}(x; \omega^{(n)})$ (равный правдоподобию истинности равенства $\widetilde{x} = x$), тем значительнее $\omega^{(n)}$ свидетельствует против гипотезы $H(x) = \{x\}$.

5.3.4. Правдоподобие согласия субъективной модели н. э. $\widetilde{x}$ с данными наблюдений $\omega^{(n)}$ за объектом. Судить о том, насколько предложенная м.-и. модель н. э. $\widetilde{x}$ согласуется с данными наблюдений $\omega^{(n)}$, следует, не обращаясь к случайному н. э. $\widetilde{x}(\omega^{(n)})$. Воспользуемся в этой связи семейством отображений $\Phi(\cdot; \mathrm{pr})\colon X \to \mathcal{A}^n$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, (5.3.8) и рассмотрим соответствующее семейство неопределенных множеств (н. м.) $\Phi(\widetilde{x}; \mathrm{pr})$, $\mathrm{pr} \in [0, 1]$, см. замечание 5.2.2. Поскольку $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\omega^{(n)} \in \Phi(\widetilde{x}; \mathrm{pr})) \stackrel{\triangle}{=} \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \omega^{(n)} \in \Phi(x; \mathrm{pr})\}$ — правдоподобие истинности н. в., согласно которому н. м. $\Phi(\widetilde{x}, \mathrm{pr})$ покрывает $\omega^{(n)}$, то *чем больше минимальная вероятность* $\mathrm{pr}(\omega^{(n)}) = \inf\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0, 1],\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\omega^{(n)} \in \Phi(\widetilde{x}, \mathrm{pr})) = 1\}$ *покрытия* $\omega^{(n)}$ *н. м.* $\Phi(\widetilde{x}; \mathrm{pr})$, *при которой правдоподобие покрытия* $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\omega^{(n)} \in \Phi(\widetilde{x}; \mathrm{pr})) = 1$, *тем значительнее наблюдение* $\omega^{(n)}$ *свидетельствует против модели н. э.* $\widetilde{x}$, *предложенной м.-и.* Поэтому *вариант* (*случайного*) *правдоподобия истинности н. в., согласно которому модель н. э.* $\widetilde{x}$ *согласуется с данными наблюдений* $\omega^{(n)}$, $\widetilde{x} \sim \omega^{(n)}$, *определим равенством*

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \sim \omega^{(n)}) \stackrel{\triangle}{=} 1 - \mathrm{pr}(\omega^{(n)}) = \\ = 1 - \inf\{\mathrm{pr} \mid \mathrm{pr} \in [0, 1],\ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in \Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr})) = 1\}. \quad (5.3.24)$$

На рис. 5.3.1 множество $\Phi^{-1}(\omega^{(n)}; \mathrm{pr}(\omega^{(n)}))$ — отрезок минимальной длины с центром $\omega_{(n)}$, содержащий x_0.

5.4. Нечеткий неопределенный и неопределенный нечеткий элементы. Эмпирическое восстановление

Рассмотрим в общих чертах определения и свойства названных элементов.

5.4.1. Неопределенный нечеткий и нечеткий неопределенный элементы и их свойства. Введем:

▶ пространства с возможностью и необходимостью $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta, \mathrm{N}^\eta)$ и с правдоподобием и доверием $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, в которых $\forall\, B \in \in \mathcal{P}(Y)$

$$\mathrm{P}^\eta(B) \overset{\triangle}{=} \mathrm{P}^\eta(\eta \in B) = \sup_{y \in B} g^\eta(y),\ \mathrm{N}^\eta(B) \overset{\triangle}{=} \mathrm{N}^\eta(\eta \in B) = \inf_{y \in Y \setminus B} h^\eta(y),$$

где $g^\eta(y) = \mathrm{P}^\eta(\eta = y)$, $h^\eta(y) = \mathrm{N}^\eta(\eta \neq y)$, $y \in Y$, и $\forall\, A \in \mathcal{P}(X)$

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(A) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A) = \sup_{x \in A} t^{\widetilde{x}}(x),\ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(A) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in A) = \inf_{x \in X \setminus A} \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x), \tag{5.4.1}$$

где $t^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x)$, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x)$, $x \in X$, и

▶ отображение $q(\cdot,\cdot)\colon (Y, \mathcal{P}(Y)) \otimes (X, \mathcal{P}(X)) \to (Z, \mathcal{P}(Z))$.

В рассматриваемом случае меры P^η и N^η характеризуют нечеткость, неточность, случайность и т. п. *в формулировках моделей* сложных объектов и средств их исследования, соответственно неясность, неопределенность и т. п., обусловленные неполнотой и недостоверностью знания моделей объектов и средств их исследования, характеризуют меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}$, заданные модельером-исследователем.

Определение 5.4.1. Функцию $\widetilde{\zeta} = q(\eta, \widetilde{x})$ нечеткого η и неопределенного $\widetilde{x}$ элементов,

▶ рассматриваемую как нечеткий элемент с неопределенными распределениями возможностей и необходимостей его значений (с распределениями, зависящими от $\widetilde{x}$), *назовем неопределенным нечетким элементом со значениями в* $(Z, \mathcal{P}(Z))$;

▶ рассматриваемую как неопределенный элемент с нечеткими распределениями правдоподобий и доверий его значений (с распределениями, зависящими от η), *назовем нечетким неопределенным элементом со значениями в* $(Z, \mathcal{P}(Z))$.

Для *неопределенного нечеткого элемента*:

при $\widetilde{x} = x$ $\widetilde{\zeta}\Big|_{\widetilde{x}=x} = \zeta(x) = q(\eta, x)$ — нечеткий элемент на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta, \mathrm{N}^\eta)$ со значениями в $(Z, \mathcal{P}(Z), \mathrm{P}(\cdot; x), \mathrm{N}(\cdot; x))$, где

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(Q; x) = \mathrm{P}^\eta(q(\eta, x) \in Q) = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y,\ q(y, x) \in Q\},\\ &\mathrm{N}(Q; x) = \mathrm{N}^\eta(q(\eta, x) \in Q) = \inf\{h^\eta(y) \mid y \in Y,\ q(y, x) \in Z \setminus Q\},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Q \in \mathcal{P}(Z),\ x \in X. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Соответственно $\widetilde{\mathrm{P}}(Q) \overset{\triangle}{=} \mathrm{P}(Q; \widetilde{x})$ и $\widetilde{\mathrm{N}}(Q) \overset{\triangle}{=} \mathrm{N}(Q; \widetilde{x})$, $Q \in \mathcal{P}(Z)$, — неопределенные меры возможности и необходимости, $M(\widetilde{x}) = (Z, \mathcal{P}(Z), \widetilde{\mathrm{P}}, \widetilde{\mathrm{N}})$ — *неопределенная нечеткая модель* объекта исследования, в которой

$$\begin{aligned} t^{\widetilde{\mathrm{P}}(Q)}(p) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\mathrm{P}(Q; \widetilde{x}) = p) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\mathrm{P}^\eta(q(\eta, \widetilde{x}) \in Q) = p) = \\ = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \mathrm{P}(Q; x) = p\}, \end{aligned}$$

$$\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{P}}(Q)}(p) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\mathrm{P}(Q;\widetilde{x}) \neq p) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\mathrm{P}^{\eta}(q(\eta,\widetilde{x}) \in Q) \neq p) =$$
$$= \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \mathrm{P}(Q;x) = p\},$$
$$t^{\widetilde{\mathrm{N}}(Q)}(n) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\mathrm{N}(Q;\widetilde{x}) = n) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\mathrm{N}^{\eta}(q(\eta,\widetilde{x}) \in Q) = n) =$$
$$= \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \mathrm{N}(Q;x) = n\},$$
$$\widehat{s}^{\widetilde{\mathrm{N}}(Q)}(n) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\mathrm{N}(Q;\widetilde{x}) \neq n) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\mathrm{N}^{\eta}(q(\eta,\widetilde{x}) \in Q) \neq n) =$$
$$= \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ \mathrm{N}(Q;x) = n\},$$
$$p, n \in [0,1]. \quad (5.4.3)$$

В частности, при $Q = \{z\}$ согласно (5.4.2)

$$\mathrm{P}(\{z\};x) = \mathrm{P}^{\eta}(q(\eta,x) = \zeta(x) = z) = \sup\{g^{\eta}(y) \mid y \in Y,\ q(y,x) = z\} =$$
$$= g^{\zeta(x)}(z) \overset{\triangle}{=} g^{\zeta}(z;x),\ x \in X,$$
$$\widetilde{\mathrm{P}}(\{z\}) \overset{\triangle}{=} \mathrm{P}(\{z\};\widetilde{x}) = g^{\zeta(\widetilde{x})}(z) \equiv g^{\widetilde{\zeta}}(z) \overset{\triangle}{=} g^{\zeta}(z;\widetilde{x}) = \widetilde{g}^{\zeta}(z),\ z \in Z.$$

Поэтому согласно (5.4.3)

$$t^{\widetilde{g}^{\zeta}(z)}(\mathrm{p}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{g}^{\zeta}(z) = \mathrm{p}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(g^{\zeta}(z;\widetilde{x}) = \mathrm{p}) =$$
$$= \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ g^{\zeta}(z;x) = \mathrm{p}\} \overset{\triangle}{=} t_z^{\widetilde{\zeta}}(\mathrm{p})$$

— правдоподобие истинности неопределенного (элементарного) высказывания, согласно которому возможность равенства $\widetilde{\zeta} = z \in Z$ равна $\mathrm{p} \in \mathcal{L}$;

$$\widehat{s}^{\widetilde{g}^{\zeta}(z)}(\mathrm{p}) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{g}^{\zeta}(z) \neq \mathrm{p}) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(g^{\zeta}(z;\widetilde{x}) \neq \mathrm{p}) =$$
$$= \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ g^{\zeta}(z;x) = \mathrm{p}\} \overset{\triangle}{=} \widehat{s}_z^{\widetilde{\zeta}}(\mathrm{p})$$

— доверие истинности неопределенного (элементарного) высказывания, согласно которому возможность равенства $\widetilde{\zeta} = z \in Z$ не равна $\mathrm{p} \in \mathcal{L}$.

При $Q = Z \setminus \{z\}$ согласно (5.4.2)

$$\mathrm{N}(Z \setminus \{z\};x) = \mathrm{N}^{\eta}(q(\eta,x) = \zeta(x) \neq z) = \inf\{h^{\eta}(y) \mid y \in Y,\ q(y,x) = z\} =$$
$$= h^{\zeta(x)}(z) \overset{\triangle}{=} h^{\zeta}(z;x),\ x \in X,$$
$$\widetilde{\mathrm{N}}(Z \setminus \{z\}) \overset{\triangle}{=} \mathrm{N}(Z \setminus \{z\};\widetilde{x}) = h^{\zeta(\widetilde{x})}(z) \equiv h^{\widetilde{\zeta}}(z) \overset{\triangle}{=} h^{\zeta}(z;\widetilde{x}) = \widetilde{h}^{\zeta}(z),\ z \in Z.$$

Поэтому согласно (5.4.3)

$$t^{\widetilde{h}^{\zeta}(z)}(\mathrm{n}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{h}^{\zeta}(z) = \mathrm{n}) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(h^{\zeta}(z;\widetilde{x}) = \mathrm{n}) =$$
$$= \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ h^{\zeta}(z;x) = \mathrm{n}\} = t_z^{\widetilde{\zeta}}(\mathrm{n})$$

— правдоподобие истинности неопределенного (элементарного) высказывания, согласно которому необходимость неравенства $\widetilde{\zeta} \neq z$ равна $\mathrm{n} \in \mathcal{L}$;

$$\widehat{s}^{\widetilde{h}^\zeta(z)}(\mathrm{n}) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{h}^\zeta(z) \neq \mathrm{n}) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(h^\zeta(z;\widetilde{x}) \neq \mathrm{n}) = \\ = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ h^\zeta(z;x) = \mathrm{n}\} = \widehat{s}_z^{\widetilde{\zeta}}(\mathrm{n})$$

— доверие истинности неопределенного (элементарного) высказывания, согласно которому необходимость неравенства $\widetilde{\zeta} \neq z$ не равна $\mathrm{n} \in \mathcal{L}$.

В данном случае меры $\mathrm{P}^\eta(\cdot)$ и $\mathrm{N}^\eta(\cdot)$ играют роль модальных операторов, определенных на множестве всех событий $\mathcal{P}(Y)$, а меры $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)$ играют роль модальных операторов, определенных на множестве всех высказываний $\mathcal{P}(X)$.

В работе [52] исследованы и охарактеризованы некоторые классы высказываний, модальности которых могут быть выражены посредством модальностей элементарных высказываний.

Для *нечеткого неопределенного элемента***:**
при $\eta = y$ $\widetilde{\zeta}\Big|_{\eta=y} = \widetilde{z}(y) = q(y,\widetilde{x})$ — неопределенный элемент на $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ со значениями в $(Z, \mathcal{P}(Z), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot;y), \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot;y))$, где

$$\mathrm{Pl}(Q;y) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{z}(y)}(\widetilde{z}(y) \in Q) = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(q(y;\widetilde{x}) \in Q) = \\ = \sup\{t^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ q(y,x) \in Q\},$$
$$\mathrm{Bel}(Q;y) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{z}(y)}(\widetilde{z}(y) \in Q) = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(q(y;\widetilde{x}) \in Q) = \\ = \inf\{\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x) \mid x \in X,\ q(y,x) \in Z \setminus Q\}, \\ Q \in \mathcal{P}(Z),\ y \in Y, \quad (5.4.4)$$

соответственно $\mathrm{Pl}(Q;\eta)$ и $\mathrm{Bel}(Q;\eta)$, $Q \in \mathcal{P}(Z)$, — нечеткие меры правдоподобия и доверия, $M(\eta) = (Z, \mathcal{P}(Z), \mathrm{Pl}(\cdot;\eta), \mathrm{Bel}(\cdot;\eta))$ — нечеткая неопределенная модель объекта исследования, в которой

$$g^{\mathrm{Pl}(Q;\eta)}(pl) = \mathrm{P}^\eta(\mathrm{Pl}(Q;\eta) = pl) = \mathrm{P}^\eta(\mathrm{Pl}(\widetilde{\zeta} \in Q) = pl) = \\ = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y, \mathrm{Pl}(Q;y) = pl\},$$
$$h^{\mathrm{Pl}(Q;\eta)}(pl) = \mathrm{N}^\eta(\mathrm{Pl}(Q;\eta) \neq pl) = \mathrm{N}^\eta(\mathrm{Pl}(\widetilde{\zeta} \in Q) \neq pl) = \\ = \inf\{h^\eta(y) \mid y \in Y, \mathrm{Pl}(Q;y) = pl\},$$
$$g^{\mathrm{Bel}(Q;\eta)}(bel) = \mathrm{P}^\eta(\mathrm{Bel}(Q;\eta) = bel) = \mathrm{P}^\eta(\mathrm{Bel}(\widetilde{\zeta} \in Q) = bel) = \\ = \sup\{g^\eta(y) \mid y \in Y, \mathrm{Bel}(Q;y) = bel\},$$
$$h^{\mathrm{Bel}(Q;\eta)}(bel) = \mathrm{N}^\eta(\mathrm{Bel}(Q;\eta) \neq bel) = \mathrm{N}^\eta(\mathrm{Bel}(\widetilde{\zeta} \in Q) \neq bel) = \\ = \inf\{h^\eta(y) \mid y \in Y, \mathrm{Bel}(Q;y) = bel\}, \\ pl, bel \in [0,1]. \quad (5.4.5)$$

5.4.2. Задача идентификации как нечеткая задача различения гипотез. Рассмотрим задачу идентификации состояния объекта, в неопределенной нечеткой модели $M(x) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta(\cdot;x), \mathrm{N}^\eta(\cdot;x))$ которого параметр x может быть равен одному из двух *равнозначимых* значений, $x \in \{x_1, x_2\} \subset X$. Нас будут интересовать области в Y, «попадания» в которые результата наблюдения $\eta = y$ должны повлечь либо решение об истинности–ложности одного из значений $x = x_i$, $i = 1, 2$, параметра модели $M(x)$, контролировавшей наблюдения, либо — отказ от принятия решения о значении $x \in \{x_1, x_2\}$. Рассмотрим в этой связи инвариантное относительно выбора шкалы значений возможностей $\mathrm{P}^\eta(\cdot; x_i)$, $i = 1, 2$, семейство P^η-критических областей [1] для альтернативы $x = x_i$

$$\Psi_{i,\lambda} = \Big\{y \in Y, g^\eta(y; x_j) > \min\{\lambda, g^\eta(y; x_i)\}\Big\},\ \lambda \in (0, 1),\ i, j \in \{1, 2\},\ i \neq j, \tag{5.4.6}$$

где $g^\eta(\cdot; x_i)\colon Y \to \mathcal{L}$ — распределение нечеткого элемента η, канонического для $M(x_i)$, $i = 1, 2$. Попадание в $\Psi_{i,\lambda}$ значения $\eta = y$ при каждом $\lambda \in (0, 1)$ должно повлечь либо решение «отклонить значение $x = x_i$» как ложное, либо — отказ от принятия решения. Понятно, что следует отказаться от принятия решения, если наблюдение $\eta = y$ попадет в область

$$\Psi_\lambda = \Psi_{i,\lambda} \cap \Psi_{j,\lambda},\ i \neq j, \tag{5.4.7}$$

и отклонить альтернативу $x = x_i$, если $\eta = y$ попадет в область

$$\Psi_{i,\lambda} \setminus \Psi_\lambda = \Psi_{i,\lambda} \setminus \Psi_{j,\lambda} \equiv Y \setminus \Psi_{j,\lambda} = \Big\{y \in Y, g^\eta(y, x_i) \leqslant \min\{\lambda, g^\eta(y; x_j)\}\Big\}, \tag{5.4.8}$$

которая является областью принятия [2] альтернативы $x = x_j$.

Проверим равенства в (5.4.8). Так как согласно (5.4.6), (5.4.7) $\Psi_{i,\lambda} \setminus \Psi_{j,\lambda} = \Psi_{i,\lambda} \cap (Y \setminus \Psi_{j,\lambda}) = \Big\{y \in Y,\ g^\eta(y; x_j) > \min\{\lambda, g^\eta(y; x_i)\},$ $g^\eta(y; x_i) \leqslant \min\{\lambda, g^\eta(y; x_j)\}\Big\}$ и $\forall\, \lambda \in (0, 1)$, $\forall\, y \in Y$ $g^\eta(y; x_i) \leqslant \min\{\lambda,$ $g^\eta(y; x_j)\} \Rightarrow g^\eta(y; x_j) > \min\{\lambda, g^\eta(y; x_j)\} \geqslant g^\eta(y; x_i) \geqslant \min\{\lambda, g^\eta(y; x_i)\} \Rightarrow$ $\Rightarrow Y \setminus \Psi_{j,\lambda} \subset \Psi_{i,\lambda} \Rightarrow Y \setminus \Psi_{j,\lambda} \subset \Psi_{i,\lambda} \setminus \Psi_{j,\lambda} \Rightarrow Y \setminus \Psi_{j,\lambda} = \Psi_{i,\lambda} \setminus \Psi_{j,\lambda}$, ибо, очевидно, что $Y \setminus \Psi_{j,\lambda} \supset \Psi_{i,\lambda} \setminus \Psi_{j,\lambda}$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. ■

Определим возможность $\mathrm{p}^-_{i,\lambda}$ ошибочного решения «принять альтернативу $x = x_i$»

$$\mathrm{p}^-_{i,\lambda} = \mathrm{P}^\eta(\eta \in Y \setminus \Psi_{i,\lambda}; x_j) = \mathrm{P}^\eta(\eta \in \Psi_{j,\lambda} \setminus \Psi_\lambda)$$
$$= \sup\Big\{g^\eta(y; x_j) \mid y \in Y,\ g^\eta(y; x_j) \leqslant \min\{\lambda, g^\eta(y; x_i)\}\Big\}\ (\leqslant \lambda),\ j \neq i, \tag{5.4.9}$$

---

[1] Далее в этой главе для простоты рассмотрены семейства нечетких моделей $M(x) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta(\cdot; x), \mathrm{N}^\eta(\cdot; x))$, $x \in X$, в которых меры $\mathrm{P}^\eta(\cdot; x)$ и $\mathrm{N}^\eta(\cdot; x)$ при любом $x \in X$ дуально согласованы, см. § 1.5 гл. 1. Это означает, что $\forall\, \theta(\cdot) \in \Theta$ семейство N^η-критических для альтернативы $x = x_i$ областей $\{y \in Y,\ \theta \circ g^\eta(y; x_j) < \max\{\theta(\lambda), \theta \circ g^\eta(y; x_i)\}\}$, $\lambda \in (0, 1)$, можно не рассматривать, поскольку оно совпадает с семейством $\Psi_{i,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1)$, в (5.4.6).

[2] Так как множество $\overset{\circ}{Y} = \{y \in Y,\ g^\eta(y; x_i) = 0\} \cap \{y \in Y,\ g^\eta(y; x_j) = 0\}$ является областью принятия любой из альтернатив с нулевой возможностью, далее считаем, что $Y = Y \setminus \overset{\circ}{Y} = \{y \in Y,\ g^\eta(y; x_i) > 0\} \cup \{y \in Y,\ g^\eta(y; x_j) > 0\}$.

как возможность включения η в область $Y \setminus \Psi_{i,\lambda}$ принятия альтернативы $x = x_i$, когда значения нечеткого элемента η контролируются возможностью $\mathrm{P}^\eta(\cdot; x_j)$, и возможность $\mathrm{p}^+_{i,\lambda}$ верного решения «принять альтернативу $x = x_i$»

$$\mathrm{p}^+_{i,\lambda} = \mathrm{P}^\eta(\eta \in Y \setminus \Psi_{i,\lambda}; x_i) = \sup\Big\{g^\eta(y;x_i) \mid y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \\ \leqslant \min\{\lambda, g^\eta(y;x_i)\}\Big\},\ \ \lambda \in (0,1),\ i,j \in \{1,2\},\ i \neq j. \quad (5.4.10)$$

Следующая лемма, подобно «фундаментальной лемме Неймана–Пирсона» [22], определяет оптимальные свойства семейства P^η-критических областей (5.4.6).

Лемма 5.4.1. *Для любых* $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, *и* $\lambda \in (0,1)$ *таких, что множество* $\{y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \lambda \leqslant g^\eta(y;x_i)\} \neq \varnothing$, *область* $Y \setminus \Psi_{i,\lambda} = \{y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \min\{\lambda, g^\eta(y;x_i)\}\}$ *принятия альтернативы* $x = x_i$ *обладает следующими свойствами*:

1. $\mathrm{p}^+_{i,\lambda} = \mathrm{P}^\eta(\eta \in Y \setminus \Psi_{i,\lambda}; x_i) \geqslant \mathrm{P}^\eta(\eta \in Y \setminus \Psi_{i,\lambda}; x_j) = \mathrm{p}^-_{i,\lambda}$ (*несмещенность*);
2. *для любой области* $\Phi_\lambda \subset Y$ *принятия альтернативы* x_i, *удовлетворяющей условию* $\mathrm{P}^\eta(\eta \in \Phi_\lambda; x_j) \leqslant \lambda$, $\mathrm{P}^\eta(\eta \in \Phi_\lambda; x_i) \leqslant \mathrm{P}^\eta(\eta \in Y \setminus \Psi_{i,\lambda}; x_i) = \mathrm{p}^+_{i,\lambda}$ (*оптимальность*);
3. *если же множество* $\{y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \lambda \leqslant g^\eta(y;x_i)\} = \varnothing$, *то* $\mathrm{p}^-_{i,\lambda} \leqslant \mathrm{p}^+_{i,\lambda} \leqslant \lambda$.

Доказательство. 1. Так как $Y \setminus \Psi_{i,\lambda} = \Big\{y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \min\{\lambda, g^\eta(y;x_i)\}\Big\} = \{y \in Y,\ g^\eta(y,x_j) \leqslant \lambda \leqslant g^\eta(y;x_i)\} \cup \{y \in Y,\ g^\eta(y,x_j) \leqslant g^\eta(y;x_i) \leqslant \lambda\}$, то $\mathrm{p}^-_{i,\lambda} = \sup\Big\{g^\eta(y;x_j) \mid y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \min\{\lambda, g^\eta(y;x_i)\}\Big\} \leqslant \lambda$ и $\mathrm{p}^+_{i,\lambda} = \max[\sup\{g^\eta(y;x_i) \mid y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \lambda \leqslant g^\eta(y;x_i)\},\ \sup\{g^\eta(y;x_i) \mid y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant g^\eta(y;x_i) \leqslant \lambda\}] = \sup\{g^\eta(y;x_i) \mid y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \lambda \leqslant g^\eta(y;x_i)\} \geqslant \lambda \geqslant \mathrm{p}^-_{i,\lambda}$.

2. Так как $\mathrm{P}^\eta(\eta \in \Phi_\lambda; x_j) = \sup\{g^\eta(y;x_j) \mid y \in \Phi_\lambda\} \leqslant \lambda$, то $\Phi_\lambda \subset \{y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant \lambda,\ g^\eta(y;x_i) \geqslant \lambda\} \subset Y \setminus \Psi_{i,\lambda}$ и, следовательно, $\mathrm{P}^\eta(\eta \in \Phi_\lambda; x_i) \leqslant \mathrm{p}^+_{i,\lambda}$.

3. В этом случае $Y \setminus \Psi_{i,\lambda} = \{y \in Y,\ g^\eta(y;x_j) \leqslant g^\eta(y;x_i) \leqslant \lambda\}$ и, следовательно, $\mathrm{p}^-_{i,\lambda} \leqslant \mathrm{p}^+_{i,\lambda} \leqslant \lambda$. ■

Заметим, что в (5.4.7) $\Psi_\lambda = \Big\{y \in Y, \min\{g^\eta(y;x_1), g^\eta(y;x_2)\} > \lambda\Big\}$, и если $g(y) = \min\limits_{i=1,2} g^\eta(y;x_i)$, $y \in Y$, $\overline{\lambda} = \max\limits_{y \in Y} g^\eta(y)$, то $\mathrm{P}^\eta(g(\eta) > \lambda) = \begin{cases} \overline{\lambda}, & \lambda < \overline{\lambda}, \\ 0, & \lambda \geqslant \overline{\lambda}, \end{cases}$ $\lambda \in (0,1)$, при этом в (5.4.9), (5.4.10) $\mathrm{p}^-_{i,\overline{\lambda}} = \overline{\lambda}$, $\mathrm{p}^+_{i,\overline{\lambda}} = 1$, $i = 1,2$.

5.4.2.1. Алгоритм последовательной идентификации. Пусть теперь $\eta^s = y^s \in Y_s$, $s = 1, \ldots, n$, — результаты n взаимно независимых наблюдений за объектом «с разных сторон», модель которых

$(Y_1, \mathcal{P}(Y_1), \mathrm{P}^{\eta^1}(\cdot; x_i)) \times \ldots \times (Y_n, \mathcal{P}(Y_n), \mathrm{P}^{\eta^n}(\cdot; x_i))$, $g^{\eta^s}(y^s; x_i) \triangleq g_i^{\eta^s}(y^s)$, $s = 1, \ldots, n$, — их возможности, $i = 1, 2$. Рассмотрим *алгоритм последовательной идентификации* состояния объекта, согласно которому:

► испытания продолжаются все время, пока наблюдения

$$\eta^s \in \Psi_\lambda^{(s)} = \Big\{ y^1 \in Y_1, \ldots, y^s \in Y_s, \min\{g^{\eta^1}(y^1), \ldots, g^{\eta^s}(y^s)\} > \lambda \Big\}, \qquad s = 1, 2, \ldots, \quad (5.4.11)$$

где $g^{\eta^k}(y^k) = \min\{g_1^{\eta^k}(y^k), g_2^{\eta^k}(y^k)\}$, $k = 1, \ldots, s$, $\Psi_\lambda^{(s)} = \Psi_{1,\lambda}^{(s)} \cap \Psi_{2,\lambda}^{(s)}$, $\Psi_{i,\lambda}^{(s)} = \Big\{ y^k \in Y_k, g_j^{\eta^k}(y^k) > \min\{\lambda, g_i^{\eta^k}(y^k)\}, k = 1, \ldots, s \Big\}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$;

► испытания заканчиваются на n-м наблюдении, если первый раз, при $s = n$, нарушается условие (5.4.11), т. е. первый раз $g^{\eta^n}(y^n) \leqslant \lambda$, и отклоняется гипотеза $x = x_j$, если при этом [1] $g_j^{\eta^n}(y^n) \leqslant \min\{\lambda, g_i^{\eta^n}(y^n)\}$. Возможность отклонить гипотезу $x = x_j$ ошибочно равна

$$\sup\Big\{ \min_{1 \leqslant s \leqslant n} g_j^{\eta^s}(y^s) \mid y^k \in Y_k,\ k = 1, \ldots, n,\ \min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} g^{\eta^k}(y^k) > \lambda, g_j^{\eta^n}(y^n) \leqslant \min\{\lambda, g_i^{\eta^n}(y^n)\} \Big\} = \min\Big\{ \sup\Big[\min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} g_j^{\eta^k}(y^k) \mid y^k \in Y_k, k = 1, \ldots, n-1, \min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} g^{\eta^k}(y^k) > \lambda \Big]_{(1)}, \sup\Big[g_j^{\eta^n}(y^n) \mid y^n \in Y_n,\ g_j^{\eta^n}(y^n) \leqslant \min\{\lambda,\ g_i^{\eta^n}(y^n)\} \Big]_{(2)} \Big\} \leqslant \lambda,$$

ибо $\sup\Big[\ldots\Big]_{(1)} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \Big\{ \sup\{g_j^{\eta^k}(y^k) \mid y^k \in Y_k,\ g^{\eta^k}(y^k) > \lambda\} \Big\} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \overline{\lambda}_{k,j} > \lambda$, где $\overline{\lambda}_{k,j} = \sup\Big\{ g_j^{\eta^k}(y^k) \,|\, y^k \in Y_k, \min\{g_1^{\eta^k}(y^k), g_2^{\eta^k}(y^k)\} > \lambda \Big\} > \lambda$, $k = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, 2$, и $\sup\Big[\ldots\Big]_{(2)} \leqslant \lambda$.

При этом возможность на n-м испытании отклонить гипотезу $x = x_j$ безошибочно, т. е. безошибочно принять $x = x_i$,

$$\mathrm{p}_{i,\lambda}^{(n)+} = \sup\Big\{ g_i^{\eta^n}(y^n) \mid y^n \in Y_n,\ g_j^{\eta^n}(y^n) \leqslant \min\{\lambda,\ g_i^{\eta^n}(y^n)\} \Big\} \geqslant \lambda,$$

а если $\lambda = \overline{\lambda} = \max\{g^{\eta^n}(y^n) \mid y^n \in Y_n\}$, то $\mathrm{p}_{i,\overline{\lambda}}^{(n)+} = 1$.

В алгоритме последовательной идентификации состояния объекта используются данные наблюдений за объектом *«с разных сторон»*: $\eta^s = y^s \in Y_s$, $s = 1, 2, \ldots$ *Модель наблюдений назовём эффективной*, если $\forall\, \lambda > 0\ \exists\, s_\lambda = \min\big\{ s \in \{1, 2, \ldots\}, \Psi_\lambda^{(s)} = \varnothing \big\} = \min\big\{ s \in \{1, 2, \ldots\},$

[1] Заметим, что $\{y^n \in Y_n, g^{\eta^n}(y^n) \leqslant \lambda\} = \Big\{ y^\eta \in Y_n, g_2^{\eta^n}(y^\eta) \leqslant \min\{\lambda, g_1^{\eta^n}(y^n)\} \Big\} \cup \Big\{ y^n \in Y_n, g_1^{\eta^n}(y^n) \leqslant \min\{\lambda, g_2^{\eta^n}(y^n)\} \Big\}$.

$\mathrm{P}^{\eta^s}(\eta^s \in \Psi_\lambda^{(s)}; x_i) = 0,\ i = 1, 2\big\}$, ибо при этом условии (в любой шкале значений возможностей $\mathrm{P}^{\eta^1}, \mathrm{P}^{\eta^2}, \ldots$) алгоритм будет завершен на основе данных конечного числа s_λ наблюдений.

При наблюдениях за объектом *«с одной стороны»* нч. э. η^s, $s = 2, 3, \ldots$, суть взаимно независимые копии нч. э. η^1, поэтому $\sup\big[\ldots\big]_{(1)} = \overline{\lambda}_1 > \lambda$. Следовательно, повторение наблюдений «с одной стороны» не добавляет информации об объекте, см. также (5.2.35), и последовательный алгоритм либо будет завершен на первом испытании, либо не будет завершен вообще.

5.4.2.2. Последовательный критерий различения равнозначимых гипотез. Статистическим аналогом рассмотренного алгоритма последовательной идентификации является последовательный критерий отношения вероятностей А. Вальда [147], согласно которому *для равнозначимых гипотез* $x = x_i$, $i = 1, 2$, в обозначениях § 5.3.1:

► испытания продолжаются все время, пока наблюдения

$$\omega^{(s)} \in \Phi_{1,2,\lambda}^{(s)} = \{\omega^{(s)} \in \Omega^s,\ \lambda < \mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)}; x_2)/\mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)}; x_1) < 1/\lambda\} =$$
$$= \{\omega^{(s)} \in \Omega^s, \lambda < \mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)}; x_1)/\mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)}; x_2) < 1/\lambda\} = \Phi_{2,1,\lambda}^{(s)} \triangleq \Phi_\lambda^{(s)},$$
$$s = 1, 2, \ldots, \quad (5.4.12)$$

где $\lambda \in (0, 1)$ и множество $\Phi_\lambda^{(s)}$ инвариантно относительно перестановки гипотез $x = x_1 \rightleftarrows x = x_2$;

► испытания заканчиваются на n-м наблюдении, если первый раз, при $s = n$, нарушается условие (5.4.12) и либо отклоняется гипотеза $x = x_1$ (принимается $x = x_2$), если $\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_2)/\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_1) \geqslant 1/\lambda$, либо отклоняется гипотеза $x = x_2$ (принимается $x = x_1$), если $\lambda \geqslant \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_2)/\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_1)$.

Пусть

$$\Omega_1^{(n)} = \{\omega^{(n)} \in \Omega^n,\ \lambda < \mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)}; x_2)/\mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)}; x_1) < 1/\lambda,$$
$$s = 1, \ldots, n-1,\ \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_2)/\mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_1) \geqslant 1/\lambda\}$$

— множество в Ω^n наблюдений $\omega_1, \ldots, \omega_n$, заканчивающихся отклонением гипотезы $x = x_1$ и принятием $x = x_2$. Тогда вероятность того, что гипотеза $x = x_1$ отклоняется ошибочно,

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_1^{(n)}} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_1)\mu(d\omega^{(n)}) \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_1^{(n)}} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)}; x_2)\mu(d\omega^{(n)}) =$$
$$= \lambda(1 - \alpha_2), \quad (5.4.13)$$

где α_i — вероятность ошибочно отклонить гипотезу $x = x_i$, $i = 1, 2$. Если $\Omega_2^{(n)}$ — множество наблюдений, заканчивающихся отклонением гипотезы $x = x_2$ и принятием $x = x_1$, то

$$1-\alpha_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_2^{(n)}} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x_1)\mu(d\omega^{(n)}) \geqslant$$
$$\geqslant (1/\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_2^{(n)}} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x_2)\mu(d\omega^{(n)}) = \alpha_2/\lambda. \quad (5.4.14)$$

В обоих неравенствах учтено, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_1^{(n)}\cup\Omega_2^{(n)}} \mathrm{pr}^{(n)}(\omega^{(n)};x_i)\mu(d\omega^{(n)}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Pr}(\nu=n;x_i) = 1$, где ν — случайное число испытаний, приводящих к принятию гипотезы $x=x_1$ или $x=x_2$; иначе говоря, учтено, что случайное отношение $\mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)};x_2)/\mathrm{pr}^{(s)}(\omega^{(s)};x_1)$ с увеличением s покинет интервал $(\lambda,1/\lambda)$ после почти наверное конечного числа s испытаний.

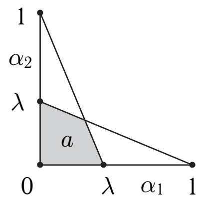


Рис. 5.4.1. Множество $a\subset[0,1]^2$, оценивающее вероятности ошибочных решений

Согласно неравенствам в (5.4.13), (5.4.14) неравенства $\alpha_1\leqslant\lambda(1-\alpha_2)$, $\alpha_2\leqslant\lambda(1-\alpha_1)$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, определяют множество a вероятностей α_1 и α_2 ошибочно отклонить гипотезы $x=x_1$ и $x=x_2$; при малом λ $\alpha_1\lesssim\lambda$, $\alpha_2\lesssim\lambda$, как и в алгоритме последовательной идентификации, см. рис. 5.4.1.

5.4.3. Эмпирическое построение модели неопределенного элемента, оценивающего значение неизвестного параметра нечеткой модели. Пусть $M(x)=(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}^\eta(\cdot;x),\mathrm{N}^\eta(\cdot;x))$ — заданная с точностью до значения параметра $x\in X$ нечеткая модель объекта исследования, и модельер-исследователь (м.-и.) предложил модель $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ неопределенного элемента $\widetilde{x}$, характеризующего модальности его субъективных суждений об истинности каждого $x\in X$ значениями мер $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x)$ и $\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x)$, см. § 5.2.1. Иначе говоря, м.-и. предложил субъективную неопределенную нечеткую модель $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}^{\widetilde{\eta}},\mathrm{N}^{\widetilde{\eta}})$ объекта исследования, в которой *неопределенный нечеткий элемент* $\widetilde{\eta}$ охарактеризован *неопределенными мерами возможности* $\widetilde{\mathrm{P}}(A)=\mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta}\in A)\overset{\triangle}{=}\mathrm{P}^\eta(A;\widetilde{x})$ и *необходимости* $\widetilde{\mathrm{N}}(A)=\mathrm{N}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta}\in A)\overset{\triangle}{=}\mathrm{N}^\eta(A;\widetilde{x})$, $A\in\mathcal{P}(Y)$, как ассоциированный с пространствами семейства $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}^\eta(\cdot;x),\mathrm{N}^\eta(\cdot;x))$, $x\in X$, моделирующего объект исследования, и с пространством $(X,\mathcal{P}(X),\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}},\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$, моделирующим его субъективные суждения о возможных значениях неизвестного параметра $x\in X$, см. §§ 5.4.1, 5.2.5. Распределения правдоподобий и доверий истинности значений $\widetilde{\mathrm{P}}$ и $\widetilde{\mathrm{N}}$ даны в (5.4.3).

Если м.-и. доступны данные наблюдений за объектом исследования, моделью которого является семейство $M(X) = (Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}(\cdot; x), \mathrm{N}^{\eta}(\cdot; x))$, $x \in X$, он может построить эмпирическую (нечеткую) модель неопределенного элемента $\widetilde{x}$, оценивающего неизвестное значение параметра $x \in X$, следуя схеме построения статистической модели неопределенного элемента, рассмотренной в § 5.3. В частности, для эмпирического построения *нечеткого неопределенного элемента* (нч. но. э.) по схеме, подобной схеме построения случайного неопределенного элемента, предложенной в § 5.3.1, рассмотрим нечеткую задачу проверки гипотезы, в которой альтернативы не равнозначимы (по важности последствий принимаемых решений), т. е. рассмотрим случай гипотезы и альтернативы, которые обозначим соответственно $\{x\}$ и $\{x'\} = \{x'(x)\}$, $x \neq x'(x)$, $x \in X$. Семейство P^{η}-критических для гипотезы $\{x\}$ областей обозначим $\Psi_{\lambda}(x)$, $\lambda \in (0, 1)$, где

$$\Psi_{\lambda}(x) = \{y \in Y,\ g^{\eta}(y; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y; x)\}\}. \tag{5.4.15}$$

При наблюдении $\eta = y$ гипотеза $\{x\}$ отвергается, если $y \in \Psi_{\lambda}(x)$, причем отвергается ошибочно с возможностью

$$\begin{aligned} \mathrm{q}_{\lambda}^{-}(x) = \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in \Psi_{\lambda}(x); x) = \\ = \sup\{g^{\eta}(y; x) \mid y \in Y,\ g^{\eta}(y; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y; x)\}\} \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

Понятно, что *чем больше минимальная по* $\lambda \in (0, 1)$ *возможность* $q_{\lambda}^{-}(x; y_0)$ *ошибочно отвергнуть гипотезу* $\{x\}$ *при наблюдении* $\eta = y_0$, *тем значительнее наблюдение* $\eta = y_0$ *свидетельствует о верности гипотезы* $\{x\}$, *согласно которой наблюдение* $\eta = y_0$ *контролировалось моделью* $M(x)$.

Поэтому нч. но. э. $\widetilde{x} = \widetilde{x}(\eta)$, эмпирически оценивающий значение параметра x модели $M(x)$, контролировавшей результат наблюдения $\eta = y_0$, определим зависящими от η распределениями правдоподобий

$$\begin{gathered} t^{\widetilde{x}}(x; \eta)\big|_{\eta = y_0} = \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x; y_0) = \gamma(\inf_{\lambda \in (0,1)} q_{\lambda}^{-}(x; y_0)) = \gamma(\inf_{\lambda \in (0,1)} \sup \Big\{g^{\eta}(y; x) \mid \\ \mid y \in Y,\ g^{\eta}(y; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y; x)\}, g^{\eta}(y_0; x') > \min\{\lambda, g^{\eta}(y_0; x)\}\Big\}) \end{gathered} \tag{5.4.17}$$

и доверий

$$\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x; \eta)\big|_{\eta = y_0} = \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \neq x; y_0) = \theta(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} = x; y_0)) = \theta(t^{\widetilde{x}}(x; \eta)|_{\eta = y_0}) \tag{5.4.18}$$

истинности его значений, где $h^{\eta}(\cdot, \cdot) = \theta \circ g^{\eta}(\cdot, \cdot)$, а $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ и $\theta(\cdot) \in \Theta$ — произвольные функции.

Заметим, что, вообще говоря, $\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X; y_0) \leqslant 1$ $(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing; y_0) \geqslant 0)$, но $\eta = y_0$ определяет изоморфную шкале $\mathcal{L}$ $(\widehat{\mathcal{L}})$ нечёткую шкалу $\gamma_{y_0}\mathcal{L}$ $(\widehat{\gamma}_{y_0}\widehat{\mathcal{L}})$, в которой $\gamma_{y_0} \circ \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X; y_0) = 1$ $(\widehat{\gamma}_{y_0} \circ \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing; y_0) = 0)$, где $\gamma_{y_0}(\cdot)\colon [0, \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X; y_0)] \to [0, 1]$ $(\widehat{\gamma}_{y_0}(\cdot)\colon [\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing; y_0), 1] \to [0, 1])$ — непрерывная, строго монотонная функция, $\gamma_{y_0}(0) = 0$, $\gamma_{y_0}(\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(X; y_0)) = 1$ $(\widehat{\gamma}_{y_0}(\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\varnothing; y_0)) = 0$, $\widehat{\gamma}_{y_0}(1) = 1)$.

Если в нечеткой задаче проверки гипотезы $H(x)=\{x\}$ альтернативой является множество $X \setminus \{x\}$, ср. с § 5.3.2, то семейством нечетких оценивающих $x \in X$ множеств максимального правдоподобия (о. м. м. п.), подобным семейству случайных о. м. м. п. (5.3.21), является семейство нечётких множеств $\Psi^{-1}(\eta, \lambda)$, $\lambda \in (0,1)$, значения которых при $\eta = y$ суть $\Psi^{-1}(y, \lambda) = \big\{x \in X,\ g^{\eta}(y; x) \geqslant \min\{\lambda, \max\limits_{x \in X} g^{\eta}(y; x)\} = \min\{\lambda, g(y)\}\big\}$, $\lambda \in (0,1)$, где $g(y) = \max\limits_{x \in X} g^{\eta}(y, x) = g^{\eta}(y, x(y))$, а $x(y)$ — «максимально правдоподобное» значение параметра $x \in X$ при $\eta = y$. Поскольку $\forall\, x \in X\ g(y) \geqslant g^{\eta}(y; x)$, то максимальное значение $\lambda \in (0,1)$, при котором множество $\Psi^{-1}(y; \lambda)$ покрывает x, равно $g^{\eta}(y, x)$. Следовательно, $t^{\widetilde{x}}(x; \eta)\big|_{\eta = y} = t^{\widetilde{x}}(x; y) = \gamma \circ g^{\eta}(y; x) = \mathrm{P}^{\eta}(\eta = y; x)$ — вариант нечёткого правдоподобия равенства $\widetilde{x} = x \in X$ при $\eta = y \in Y$, а $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x, \eta)\big|_{\eta = y} = \widehat{s}^{\widetilde{x}}(x; y) = \theta \circ g^{\eta}(y; x) = \mathrm{N}^{\eta}(\eta \neq y; x)$ — вариант нечёткого доверия неравенства $\widetilde{x} \neq x \in X$ при $\eta = y \in Y$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, $\theta \in \Theta$.

5.4.4. Правдоподобие согласия субъективной модели н. э. $\widetilde{x}$ с данными наблюдений за объектом исследования. Заметим, что аналогом семейства оценивающих множеств максимального правдоподобия (5.3.21) в рассматриваемом случае для каждого наблюдения $\eta = y \subset Y$ является семейство множеств *максимального правдоподобия*

$$\Phi_{\lambda}^{-1}(y) = \{x \in X,\ g^{\eta}(y; x) \geqslant \min\{\lambda, g^{\eta}(y)\}\},\ \lambda \in (0,1), \tag{5.4.19}$$

оценивающих значения параметра $x \in X$ распределения $g^{\eta}(\cdot; x)$, контролировавшего наблюдение $\eta = y \in Y$. Значения $\lambda \in (0,1)$ в (5.4.19) и значения возможности $\mathrm{p}^{\eta} \in [0,1]$ покрытия нечетким множеством $\Phi_{\lambda}^{-1}(\eta)$ параметра $x \in X$ возможности $\mathrm{P}^{\eta}(\,\cdot\,; x)$, контролировавшей результат $\eta = y$ наблюдения, связаны условием

$$\mathrm{p}^{\eta} = \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in Y,\ x \in \Phi_{\lambda}^{-1}(\eta); x), \tag{5.4.20}$$

подобным условию (5.3.22).

Если наблюдается $\eta = y \in Y$, то $\Phi_{\lambda}^{-1}(y)$ есть множество тех $x \in X$, при которых принимается гипотеза $H(x) = \{x\}$. Значение

$$\Phi_{\lambda}(x) = \{y \in Y, g^{\eta}(y; x) \geqslant \min\{\lambda, g^{\eta}(y)\}\} \tag{5.4.21}$$

отображения $\Phi_{\lambda}(\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, обратного к $\Phi_{\lambda}^{-1}(\cdot)\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ в (5.4.19), есть множество результатов наблюдений $\eta = y \in Y$, каждый из которых влечет принятие гипотезы $H(x) = \{x\} \subset X$, ср. с (5.3.8), (5.3.9).

Рассмотрим семейство неопределенных множеств, см. замечание 5.2.2, $\Phi_{\lambda}(\widetilde{x})$, $\lambda \in (0,1)$, где $\widetilde{x}$ — н. э., модель которого $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ предложена модельером-исследователем. Поскольку

$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in \Phi_\lambda(\widetilde{x}))$ — правдоподобие истинности н. в., согласно которому неопределенное множество $\Phi_\lambda(\widetilde{x})$ покрывает y, а согласно (5.4.21) $\forall x \in X\ \Phi_\lambda(x) \subset \Phi_{\lambda'}(x)$, если $\lambda \geqslant \lambda'$, то чем меньше максимальное $\lambda = \lambda(y) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in (0,1), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(y \in \Phi_\lambda(\widetilde{x})) = 1\}$, при котором правдоподобие покрытия y неопределенным множеством $\Phi_\lambda(\widetilde{x})$ равно единице, тем значительнее наблюдение $\eta = y$ свидетельствует против субъективной модели $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}, \mathrm{Bel}^{\widetilde{x}})$ н. э. $\widetilde{x}$. Поэтому *вариант нечеткого правдоподобия истинности н. в., согласно которому субъективная модель н. э. $\widetilde{x}$ согласуется с наблюдением η за объектом исследования, $\widetilde{x} \sim \eta$, определим равенством*

$$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \sim \eta) \stackrel{\triangle}{=} 1 - \lambda(\eta) = 1 - \sup\{\lambda \mid \lambda \in (0,1), \mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x} \in \Phi_\lambda^{-1}(\eta)) = 1\}, \tag{5.4.22}$$

ср. с (5.3.24).

5.5. Асимптотическое оценивание параметра случайного неопределенного элемента

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ — вероятностное пространство, на котором задан случайный элемент $\xi = q(t,\omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, со значениями в X, зависящий от параметра $t \in T$, $\xi_1 = q(t,\omega_1), \ldots, \xi_n = q(t,\omega_n)$, $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n$, — статистически взаимно независимые копии ξ, и при *неизвестной функции* $q(\cdot,\cdot)\colon T \times \Omega \to X$ по наблюдению $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n$ требуется оценить значение параметра $t \in T$, от которого зависит распределение $\zeta^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. В данном случае «неопределенность» ξ обусловлена «неизвестностью» функции $q(\cdot,\cdot)\colon T \times \Omega \to X$, не изменяющейся в процессе наблюдений.

Рассмотрим случай, когда, как в теории ошибок, при каждом $t \in T$ задано множество

$$\begin{aligned} &X(t) = \{x = q(t,\omega),\ \omega \in \Omega\} \subset X,\\ &\mathrm{Pr}(\{\omega \in \Omega, q(t,\omega) \in X(t)\}) = 1,\ t \in T. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Например, если X и T — векторные пространства,

$$q(t,\omega) = t + \nu(\omega), \tag{5.5.2}$$

то известно $X(0) = \{\nu(\omega) \in X,\ \omega \in \Omega\}$, $\mathrm{Pr}(\{\nu(\omega) \in X(0)\}) = 1$, а $X(t) = t + X(0)$, $t \in T$.

Обозначим

$$X^{-1}(x) = \{t \in T,\ x \in X(t)\} \tag{5.5.3}$$

множество возможных значений $t \in T$, отвечающих значению $x \in X$.

Согласно определениям (5.5.1), (5.5.3) включения $x \in X(t)$ и $t \in X^{-1}(x)$, $x \in X$, $t \in T$, эквивалентны.

Предположим, что кроме условий (5.5.1) $\forall s \neq t$, $s, t \in T$,

$$\mathrm{Pr}(q(s,\omega) \in X(t)) \equiv \mathrm{Pr}(t \in X^{-1}(q(s,\omega))) < 1. \tag{5.5.4}$$

Тогда согласно условию (5.5.1) при взаимно независимых $\omega_1, \ldots, \omega_n$

$\mathrm{Pr}(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega^n,\ q(s,\omega_1) \in X(s), \ldots, q(s,\omega_n) \in X(s)\}) =$

$$[\Pr(\{\omega \in \Omega,\ q(s,\omega) \in X(s)\})]^n = 1 =$$
$$= \Pr(\{(\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega^n, s \in \bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(q(s,\omega_i))\}),\ n = 1,2,\dots, \quad (5.5.5)$$

а согласно условию (5.5.4) при $t \neq s$ и $n \to \infty$

$$\begin{aligned}&\Pr(\{(\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega^n,\ q(s,\omega_1) \in X(t),\dots,q(s,\omega_n) \in X(t)\}) =\\ &\Pr(\{(\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega^n, t \in \bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(q(s,\omega_i))\}) =\\ &= [\Pr(\{\omega \in \Omega,\ q(s,\omega) \in X(t)\})]^n \to 0, \quad s,t \in T.\end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Поэтому при $n \to \infty$

$$\Pr(\{(\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega^n,\ t \in \bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(q(s,\omega_i))\}) \to \begin{cases} 1, & t = s,\\ 0, & t \neq s.\end{cases} \quad (5.5.7)$$

В такой ситуации неизвестный параметр $t \in T$ естественно моделировать как случайный неопределенный элемент $\widetilde{t}$, значение которого неизменно в процессе наблюдений и равно некоторому $s \in T$, которое желательно оценить.

Определим последовательность случайных неопределенных элементов $\widetilde{t}_n$, $n = 1,2,\dots$, распределения которых суть случайные функции

$$g_s^{\widetilde{t}_n}(t) = g^{\widetilde{t}_n}(t,\zeta_n^{(s)}) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} X^{-1}(\xi_k^{(s)}),\\ 0, \text{ если } t \in T \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} X^{-1}(\xi_k^{(s)}),\end{cases} \quad s,t \in T, \quad (5.5.8)$$

где $\xi_k^{(s)} = q(s,\omega_k)$, $k = 1,\dots,n$, суть взаимно независимые случайные элементы, $\zeta_n^{(s)} = (\xi_1^{(s)},\dots,\xi_n^{(s)})$, $s \in T$, и согласно условию (5.5.1) $\Pr(\sup\limits_{t \in T} g^{\widetilde{t}_n}(t,\zeta_n^{(t)}) = 1) = 1$, $n = 1,2,\dots$

Покажем, что при условиях (5.5.1), (5.5.4) последовательность случайных распределений (5.5.8) поточечно при $n \to \infty$ сходится по вероятности к распределению

$$g_s^{\widetilde{t}}(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = s,\\ 0, \text{ если } t \neq 0,\end{cases} \quad s,t \in T, \quad (5.5.9)$$

неопределенного элемента $\widetilde{t}$, равного истинному значению s параметра случайного элемента ξ. Действительно, пусть $s \in T$ — истинное значение параметра ξ и $\widetilde{t}$ — неопределенный элемент с распределением (5.5.9). Тогда согласно (5.5.6) для любого $\varepsilon \in [0,1)$ при $t \neq s$ и $n \to \infty$

$$\Pr(|g_s^{\widetilde{t}_n}(t) - g_s^{\widetilde{t}}(t)| > \varepsilon) = \Pr(g_s^{\widetilde{t}_n}(t) > \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \Pr(t \in \bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(\xi(s, \omega_i))) \to 0, \quad (5.5.10)$$

а при $t = s$ с учетом (5.5.8), (5.5.1)

$$\Pr(|g_s^{\widetilde{t}_n}(s) - 1| > \varepsilon) = \Pr(s \in T \setminus \bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(\xi(s, \omega_i))) = 0, \; n = 1, 2, \ldots, \quad (5.5.11)$$

т. е. для любого $\varepsilon \in [0, 1)$ при $n \to \infty$ $\Pr(|g_s^{\widetilde{t}_n}(t) - g_s^{\widetilde{t}}(t)| > \varepsilon) \to 0$, $s, t \in T$.

Согласно (5.5.10), (5.5.11)

$$\bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(q(s, \omega_i)) \xrightarrow[n \to \infty]{\Pr} \{s\}, \; s \in T.$$

Пример 5.5.1. Предположим, что в серии измерений $\xi_i = q(t, \omega_i) = t + \nu(\omega_i) = t + \nu_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, значения t по схеме (5.5.2) $T = X = \mathcal{R}^1$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — взаимно независимые копии *случайной* величины ν, причем $\Pr(l_1 < \nu < l_2) = 1$, и для любого $\varepsilon > 0$ $\Pr(\nu \leqslant l_2 - \varepsilon) < 1$, $\Pr(l_1 + \varepsilon \leqslant \nu) < 1$. Тогда $X(0) = \{x \in \mathcal{R}^1, l_1 < x < l_2\} = (l_1, l_2)$, $X(t) = (l_1 + t, l_2 + t)$, $t \in T = \mathcal{R}^1$, $X^{-1}(x) = (x - l_2, x - l_1)$ и $\bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(x_i) = (\max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - l_2, \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - l_1)$. Для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ $\Pr(t - \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(\xi_i - l_2) \geqslant \varepsilon) = \Pr(t - \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(\nu_i + t - l_2) \geqslant \varepsilon) = \Pr(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \nu_i \leqslant l_2 - \varepsilon) = [\Pr(\nu \leqslant l_2 - \varepsilon)]^n \to 0$, а это означает, что последовательность левых границ множеств $\bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(q(t, \omega_i))$ при $n \to \infty$ по вероятности сходится к t. Аналогично $\Pr(\min_{1 \leqslant i \leqslant n}(\xi_i - l_1) - t \geqslant \varepsilon) = \Pr(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \nu_\nu \geqslant l_1 + \varepsilon) = [\Pr(\nu \geqslant l_1 + \varepsilon)]^n \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. и последовательность правых границ множеств $\bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(q(t, \omega_i))$ при $n \to \infty$ по вероятности сходится к t. Следовательно, $\bigcap_{i=1}^{n} X^{-1}(q(t, \omega_i)) \xrightarrow[n \to \infty]{\Pr} \{t\}$, $t \in T$.

Глава 6
СТАТИСТИЧЕСКИЕ И НЕЧЕТКИЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Введение

Последние пять десятилетий внимание исследователей, работающих в различных предметных областях, привлекают проблемы оптимизации решений в нечеткой обстановке, при нечетких целях и предпочтениях, при нечетких ограничениях и множествах альтернатив. Исследованы нечеткие варианты теории игр, математического программирования, теории полезности и т. д., см., например, [16, 17, 21, 31, 33, 43, 52–60, 63, 74, 83, 85, 92, 117, 121, 126, 128, 130–134, 137, 138, 143, 152].

В этой главе с единой точки зрения представлены методы оптимальных статистических и нечетких решений. Рассмотрены возможностные методы оптимальной идентификации, оптимального оценивания и теории матричных игр двух субъектов. Качество решения определено в терминах риска сопутствующих решению потерь и охарактеризовано значениями возможности и (или) необходимости потерь. Изложение следует схеме, принятой в теории статистических решений [4, 11, 65, 147] и матричных игр [34].

Кроме этого, в § 6.8–6.10 рассмотрены методы оценивания нечетких множеств, их параметров и минимизации ошибки оценивания.

Для удобства читателя, желающего проследить аналогии между вероятностными и возможностными методами оптимизации решений, в § 6.1, 6.2, 6.3 изложены элементы теории оптимальных статистических решений, нечеткие аналоги которых получены в § 6.4, 6.5, 6.6.

6.1. Вероятностная модель. Идентификация

Обозначим ξ случайный элемент, принимающий значения в множестве X согласно одной из вероятностей $\Pr_1, \ldots, \Pr_q$, $\mathrm{pr}_k(\cdot)\colon X \to [0, \infty)$ обозначим плотность вероятности $\Pr_k$ относительно некоторой фиксированной меры μ, определенной на σ-алгебре $\sigma(X)$ подмножеств X, $k = 1, \ldots, q$. Если множество X конечное или счетное, то μ —

«считающая» мера [1]), $\mathrm{pr}_k(\cdot)\colon X \to [0,\,1]$, $k = 1,\ldots,q$. Далее функцию $\mathrm{pr}_k(\cdot)$ условимся называть *распределением как случайного элемента* ξ, *так и соответствующей вероятности* Pr_k, $k = 1,\ldots,q$. Это нестандартное соглашение призвано расширить «терминологическую общность» теорий вероятностей и возможностей, см. предисловие.

Еще одно соглашение, возможно, облегчит восприятие формализма теорий статистических и нечетких решений, придав ему прикладную ориентацию, а именно, условимся считать, что в §6.1.1–6.1.4 речь идет о стохастической системе, которая может находиться в одном из q состояний, значение $x \in X$ случайного элемента ξ определяет результат наблюдения за системой, причем если система находится в состоянии с номером k, то значения ξ контролируются распределением $\mathrm{pr}_k(\cdot)$, $\xi \sim \mathrm{pr}_k(\cdot)$, $k = 1,\ldots,q$. В рассматриваемых в этих параграфах задачах требуется по наблюдению значения ξ принять одно из q решений о состоянии системы, или, что то же самое, — о распределении случайного элемента ξ. Эти задачи назовем *задачами идентификации*.

В §6.1.5–6.1.7 рассмотрены задачи идентификации для стохастических систем нескольких *типов*, каждая из которых может находиться в одном из нескольких *состояний*. В связи с проблемой эмпирического восстановления стохастически измеримых нечетких моделей [46] представляют интерес рассмотренные в §6.1.7 частично стохастические системы, содержащие элементы нестохастической природы.

6.1.1. Идентификация при априори произвольном состоянии системы. Минимаксные решения. Рандомизация. Рассмотрим задачу статистической идентификации, в которой *модель системы*, которая априори может находиться в любом из q состояний, определена распределениями $\mathrm{pr}_1(\cdot),\ldots,\mathrm{pr}_q(\cdot)$ наблюдаемого случайного элемента ξ.

Простейшее *правило* (*принятия*) *решения* о состоянии системы по результату наблюдения $\xi = x \in X$ состоит в следующем: если значение $\xi = x \in X_k$, то принимается решение $\xi \sim \mathrm{pr}_k(\cdot)$, $k = 1,\ldots,q$, где $X_1,\ldots,X_q$ — некоторое упорядоченное $\sigma(X)$-измеримое разбиение множества X: $X = \bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j$, $X_j \in \sigma(X)$, $X_i \bigcap X_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,q$. Каждое разбиение $X = \bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j$, обозначаемое далее $X.$, *определяет правило решения* $R = R(X.)$ (или *решающее правило*).

Обозначим l_{kj} величину потерь [2]), сопутствующих решению в пользу состояния «j», в то время как на самом деле система находится

[1]) Если X конечное или счетное, то $\sigma(X) = \mathcal{P}(X)$ — класс всех подмножеств X, $\mu(A)$ — число элементов $A \in \mathcal{P}(X)$, если A конечное, иначе $\mu(A) = \infty$.

[2]) Модель $\mathrm{pr}_1,\ldots,\mathrm{pr}_q$ стохастической системы, характеризующая ее свойства, и значения $l_{k,j}$, $k,j = 1,\ldots,q$, потерь, обусловленных ошибочной идентификацией ее состояний, определяют *модель идентификации*. Значения $l_{k,j}$,

в состоянии «k», $k, j = 1, \ldots, q$. Так как такое решение принимается, когда $\xi \sim \mathrm{pr}_k(\cdot)$ и $\xi = x \in X_j$, т. е. случайно с вероятностью $\Pr_k(X_j) \overset{\triangle}{=} \Pr_k(\xi \in X_j)$, то при заданном разбиении $X.$ l_{kj} можно считать значением случайной величины $l_k(\xi)$, а именно, $l_k(\xi) = l_{kj}$, когда $\xi \in X_j$, $j = 1, \ldots, q$. Если система находится в состоянии «k», то математическое ожидание потерь, свойственных правилу решения, определенному разбиением $X.$, называемое также маргинальным риском (потерь), есть

$$L_k = L_k(X.) = \mathsf{E}_k(l_k(\xi)) = \int\limits_X \sum_{j=1}^{q} l_{kj}\chi_j(x)\mathrm{pr}_k(x)\mu(dx), \qquad k = 1, \ldots, q, \quad (6.1.1)$$

где $\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X_j, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus X_j, \end{cases}$ — индикаторная функция множества X_j, $j = 1, \ldots, q$.

Таким образом, правилу решения R, определенному упорядоченным разбиением $X.$, сопоставлены маргинальные риски $L_k = L_k(R)$, $k = 1, \ldots, q$, отвечающие состояниям $k = 1, \ldots, q$ системы. Поскольку решение тем лучше, чем меньше сопутствующие ему ожидаемые потери [1]), проблема выбора оптимального правила R, в данном случае эквивалентная проблеме выбора оптимального разбиения $X.$, свелась к задаче минимизации рисков $L_1, \ldots, L_q$.

Заметим, что если $l_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{когда } k = j, \\ 1, & \text{когда } k \neq j, \end{cases}$ то

$$L_k = \sum_{j=1}^{q} \int\limits_{X_j} \mathrm{pr}_k(x)\mu(dx) - \int\limits_{X_k} \mathrm{pr}_k(x)\mu(dx) = 1 - \Pr_k(X_k) = \Pr_k(X \setminus X_k) \quad (6.1.1^*)$$

— *вероятность ошибочного решения в случае, когда система находится в состоянии* «k». Критерий качества решения, минимизирующий L_k (6.1.1*), минимизирует долю (случайных) ошибочных решений, *принимаемых многократно* и взаимно независимо на основе наблюдений за системой, находящейся в состоянии k, $k = 1, \ldots, q$.

Рассмотрим *минимаксное правило решения*, в котором разбиение $X.$ определяется из условия минимальности максимального из рисков $L_1, \ldots, L_q$:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant q} L_k \sim \min_{X.}. \quad (6.1.2)$$

$k, j = 1, \ldots, q$, задает субъект, принимающий решения (с. п. р.) и осознающий последствия ошибочных решений.

[1]) Если система в состоянии «k», то маргинальный риск L_k характеризует величину потерь, усредненную по результатам случайных решений, принятых многократно и взаимно независимо.

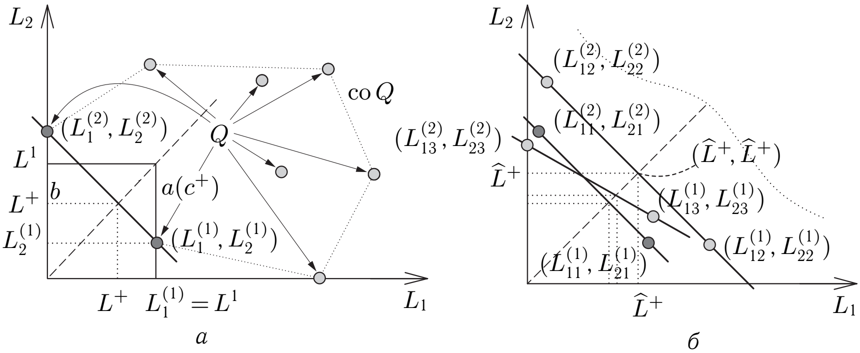


Рис. 6.1.1. *а*) Множество Q точек $(L_1(R^{(i)}), L_2(R^{(i)}))$, отвечающих восьми правилам решения $R^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 8$. Правилу $R^{(1)}$, определенному решением задачи (6.1.2), отвечает точка с координатами $L_1^{(1)} = L^1$, $L_2^{(1)}$; $a(c) = \{(L_1, L_2),\ \max\{L_1, L_2\} = c\}$, точке $(L_1^{(1)}, L_2^{(1)})$ отвечает минимальное значение $c = c^+$, при котором $a(c) \cap Q \neq \varnothing$. Точка (L^+, L^+) отвечает *рандомизированному* минимаксному правилу $\widetilde{R}^+$, определенному из условия (6.1.4), π^+ — решение уравнения $\pi^+ L_1^{(1)} + (1 - \pi^+) L_1^{(2)} = \pi^+ L_2^{(1)} + (1 - \pi^+) L_2^{(2)} = L^+$. *б*) Класс $\mathcal{P}r$ содержит три пары вероятностей $(\mathrm{Pr}_1^i, \mathrm{Pr}_2^i)$, $i = 1, 2, 3$, которым соответствуют три точки $(L_{1i}^{(1)}, L_{2i}^{(1)})$, $i = 1, 2, 3$, отвечающие разбиению $X = X_1^{(1)} \cup X_2^{(1)}$, и три точки $(L_{1i}^{(2)}, L_{2i}^{(2)})$, $i = 1, 2, 3$, отвечающие разбиению $X = X_1^{(2)} \cup X_2^{(2)}$, точки, отвечающие остальным разбиениям, не показаны. Минимаксное рандомизированное правило отвечает «наихудшей паре» $(\mathrm{Pr}_1^2, \mathrm{Pr}_2^2) \in \mathcal{P}r$, на которой достигается максимум в (6.1.4**). Ему отвечает точка $(\widehat{L}^+, \widehat{L}^+)$

Многообразие ситуаций, характерных для задачи (6.1.2), легко представить, рассмотрев случай $q = 2$. На рис. 6.1.1, *а* изображено множество Q точек, координаты L_1, L_2 (6.1.1) которых отвечают всем (σ-измеримым) упорядоченным разбиениям $X = X_1 \bigcup X_2 \equiv X_1 \bigcup (X \setminus X_1)$. Чтобы не отвлекаться на обсуждение не имеющих отношения к делу математических вопросов, связанных со структурой множества Q, рассмотрим случай $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, в котором каждая точка $(L_1, L_2) = (L_1(R), L_2(R))$ отвечает одному из восьми[1] правил R, определенных восемью упорядоченными разбиениями X. Точка $(L_1^{(1)}, L_2^{(1)})$ отвечает разбиению $X_1^{(1)} \bigcup X_2^{(1)}$, определенному как решение задачи (6.1.2), $\min\limits_{X\cdot} \max\{L_1(X\cdot), L_2(X\cdot)\} = L_1^{(1)} = L^1$, см. рис. 6.1.1.

Рассмотрим точки Q с координатами $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}$ и $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}$, которые отвечают разбиениям $X_1^{(1)} \bigcup X_2^{(1)}$ и $X_1^{(2)} \bigcup X_2^{(2)}$, определяющим правила

[1] Число упорядоченных разбиений $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ на q подмножеств, среди которых могут быть и пустые, равно числу $N = q^m$ размещений m различных объектов по q ячейкам.

$R^{(1)}$ и $R^{(2)}$. Обозначим $\widetilde{R} = \widetilde{R}(\pi)$ так называемое *рандомизированное правило принятия решения*, состоящее в том, что при любом наблюдении $\xi = x \in X$ *решение принимается случайно с вероятностью* π *согласно правилу* $R^{(1)}$ *и с вероятностью* $1-\pi$ *согласно правилу* $R^{(2)}$. *Математическое ожидание потерь*, свойственных правилу $\widetilde{R}(\pi)$ в случае, когда система находится в состоянии «k», есть

$$L_k(\pi) = \pi L_k^{(1)} + (1-\pi) L_k^{(2)}, \quad k = 1, 2. \tag{6.1.3}$$

Оптимальное рандомизированное минимаксное правило $\widetilde{R}^+$ определим из условия минимальности по $\pi \in [0,1]$ максимального из рисков $L_1(\pi)$, $L_2(\pi)$ (6.1.3), сопутствующих использованию правила $\widetilde{R}(\pi)$,

$$\min_{0 \leqslant \pi \leqslant 1} \max\{L_1(\pi),\ L_2(\pi)\} = L^+, \tag{6.1.4}$$

(см. рис. 6.1.1, a). Если π^+ — решение задачи (6.1.4), то точка с координатами $L_1(\pi^+) = L_2(\pi^+) = L^+$, лежащая на отрезке прямой, соединяющем точки $(L_1^{(1)}, L_2^{(1)})$ и $(L_1^{(2)}, L_2^{(2)})$, определит значение L^+ риска, сопутствующего оптимальному минимаксному рандомизированному правилу $\widetilde{R}^+ = \widetilde{R}(\pi^+)$. Очевидно, всегда $L^+ \leqslant L^1$. Это легко увидеть, обратившись к рассмотренному примеру и рис. 6.1.1, a. Дело в том, что $L_1^{(1)} > L_1^{(2)}$, $L_2^{(1)} < L_2^{(2)}$ и $\max\{L_1^{(2)}, L_2^{(2)}\} = L_2^{(2)} > L_1^{(1)} = \max\{L_1^{(1)}, L_2^{(1)}\}$, поэтому при любом $\pi \in [0,1]$ в (6.1.3)

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &= \max\{L_1^{(1)}, L_2^{(1)}\} > \pi L_1^{(1)} + (1-\pi) L_1^{(2)} = L_1(\pi), \\ L_2^{(2)} &= \max\{L_1^{(2)}, L_2^{(2)}\} > \pi L_2^{(1)} + (1-\pi) L_2^{(2)} = L_2(\pi), \end{aligned}$$

а для тех $\pi \in [0,1]$, для которых $L_1(\pi) \geqslant L_2(\pi)$, $\min\{L_1^{(1)}, L_2^{(2)}\} > \max\{L_1(\pi), L_2(\pi)\} \geqslant L^+$.

В рассматриваемом примере произвольное рандомизированное правило $\widetilde{R}$ определяется как «выпуклая комбинация» всех «чистых правил» $R^{(1)}, \ldots, R^{(8)}$; согласно правилу $\widetilde{R}$ при каждом наблюдении $\xi = x \in X$ правило $R^{(t)}$ используется с вероятностью [1] $\pi^{(t)} \geqslant 0$, $t = 1, \ldots, 8$, $\pi^{(1)} + \ldots + \pi^{(8)} = 1$. Если система находится в состоянии «k», то *ожидаемые потери*, свойственные правилу $\widetilde{R}$,

$$L_k(\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(8)}) = \sum_{t=1}^{8} \pi^{(t)} L_k^{(t)},\ k = 1, 2. \tag{6.1.5}$$

Оптимальное минимаксное рандомизированное правило $\widetilde{R}^+$ определится распределением $\pi^{+(1)}, \ldots, \pi^{+(8)}$, найденным из условия

[1] То есть разыгрывается независимая от ξ случайная величина τ, $\Pr(\tau = t) = \pi^{(t)}$, $t = 1, \ldots, 8$, и если выпадает $\tau = t$, то *при любом наблюдении* $\xi = x$ решение принимается по правилу $R^{(t)}$, а именно, — в пользу состояния k, если $x \in X_k^{(t)}$, $k = 1, 2$.

$\max\{L_1(\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(8)}), L_2(\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(8)})\} \sim \min$ по всем распределениям $\pi^{(t)} \geqslant 0$, $t = 1,\ldots,8$, $\pi^{(1)} + \ldots + \pi^{(8)} = 1$; согласно рис. 6.1.1, *а* $\pi^{+(3)} = \ldots = \pi^{+(8)} = 0$. Заметим, что множество $\mathrm{co\,Q}$ точек с координатами $L_1(\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(8)})$, $L_2(\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(8)})$, отвечающих всем распределениям $\pi^{(t)} \geqslant 0$, $t = 1,\ldots,8$, $\pi^{(1)} + \ldots + \pi^{(8)} = 1$, называемое выпуклой оболочкой Q, выпуклое и замкнутое в $\mathcal{R}^2$, поэтому искомое правило $\widetilde{R}^+$ всегда существует. А поскольку класс всех рандомизированных правил содержит и любое «чистое» правило (распределение $\pi^{(t)} = 1$, $\pi^{(s)} = 0$, $s \neq t$, $s = 1,\ldots,8$, дает чистое правило $R^{(t)}$, $t = 1,\ldots,8$), то *рандомизация позволяет улучшить качество решения* (см. рис. 6.1.1, *а*). Этот вывод, разумеется, верен и в общем случае: минимаксное правило следует искать в классе рандомизированных. В рассмотренном примере рандомизированное правило определено двумя «чистыми»: $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$.

В случае произвольного конечного $X = \{x_1,\ldots,x_m\}$ можно определить $N = q^m$ «чистых» правил $R^{(1)},\ldots,R^{(N)}$ идентификации, соответствующих N различным упорядоченным разбиениям $X = \bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j^{(t)}$, $t = 1,\ldots,N$. Если $\Pr_k(\xi = x_i) = \mathrm{pr}_k(x_i)$, $i = 1,\ldots,m$, $k = 1,\ldots,q$, то вместо равенств (6.1.1) получим

$$L_k^{(t)} = L_k(X_\cdot^{(t)}) = \sum_{j=1}^{q} l_{kj} \sum_{i:\ x_i \in X_j^{(t)}} \mathrm{pr}_k(x_i) = \sum_{j=1}^{q} l_{kj} \Pr_k(X_j^{(t)}),$$
$$k = 1,\ldots,q,\ t = 1,\ldots,N, \tag{6.1.1**}$$

равенства (6.1.5) преобразуем к виду

$$L_k(\pi) = \sum_{t=1}^{N} \pi^{(t)} L_k^{(t)},\ k = 1,\ldots,q, \tag{6.1.5*}$$

где $\pi = (\pi^{(1)},\ldots,\pi^{(N)})$, $\pi^{(i)} \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,N$, $\pi^{(1)} + \ldots + \pi^{(N)} = 1$, а *оптимальное рандомизированное минимаксное правило $\widetilde{R}^+$ определим распределением $\pi^+ = (\pi^{+(1)},\ldots,\pi^{+(N)})$*, найденным из условия

$$L^+ = \max_{1 \leqslant k \leqslant q} L_k(\pi^+) = \min_{\pi \in \Pi} \max_{1 \leqslant k \leqslant q} L_k(\pi), \tag{6.1.4*}$$

в котором минимум вычисляется на множестве $\Pi = \big\{\pi = (\pi^{(1)},\ldots \ldots,\pi^{(N)}),\ \pi^{(t)} \geqslant 0,\ t = 1,\ldots,N,\ \pi^{(1)} + \ldots + \pi^{(N)} = 1\big\}$.

Согласно правилу $\widetilde{R}^+$ решение о состоянии системы принимается случайно, точнее, если δ — случайная величина со значениями в $D = \{1,\ldots,q\}$, $\pi^{\delta|\xi}(d|x)$ — вероятность решения $\delta = d \in D$, когда $\xi = x \in X$, и τ — не зависящая от ξ случайная величина со значениями в $\{1, \ldots, N\}$, определяющая случайное разбиение $X^{(\tau)}_{\cdot}$, $\Pr(\tau = t) = = \pi^{+(t)}$, $t \in \{1, \ldots, N\}$, то $\pi^{\delta|\xi}(d|x) = \Pr(x \in X_d^{(\tau)}) = \sum\limits_{t:\, x \in X_d^{(t)}} \pi^{+(t)}$, $d \in D$.

Замечание 6.1.1. Задача (6.1.4*), (6.1.5*), (6.1.1**) сводится к задаче линейного программирования, поскольку она эквивалентна задаче минимизации линейной функции $z(\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(N)}, \delta) = \delta$ на множестве векторов $(\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(N)}, \delta)$, выделенном условиями

$$\delta \geqslant \sum_{t=1}^{N} \pi^{(t)} L_k^{(t)},\ k = 1, \ldots, q,\ \pi^{(t)} \geqslant 0,\ t = 1, \ldots, N, \pi^{(1)} + \ldots + \pi^{(N)} = 1,$$

в которых $L_k^{(t)}$, $k = 1, \ldots, q$, $t = 1, \ldots, N$, определены в (6.1.1**).

Альтернативный метод построения минимаксного рандомизированного правила идентификации, также приводящей к задаче линейного программирования, рассмотрен в § 6.1.3, см. замечание 6.1.4.

В случае эмпирически восстановленной модели стохастической системы вероятности $\Pr_1, \ldots, \Pr_q$ точно неизвестны, известно лишь множество $\mathcal{P}r$ и что $\Pr = (\Pr_1, \ldots, \Pr_q) \in \mathcal{P}r$. В таком случае распределение $\pi^{+(1)}, \ldots, \pi^{+(N)}$ должно быть найдено из условия

$$L^+ = \max_{\Pr \in \mathcal{P}r} \max_{1 \leqslant k \leqslant q} L_k(\pi^+, \Pr) = \min_{\pi \in \Pi} \max_{\Pr \in \mathcal{P}r} \max_{1 \leqslant k \leqslant q} L_k(\pi, \Pr), \qquad (6.1.4^{**})$$

в котором отмечена зависимость $L_k(\pi, \Pr)$ от $\Pr \in \mathcal{P}r$, определенная равенствами (6.1.1**) и (6.1.5*).

Решение задачи (6.1.4**) для конечного $\mathcal{P}r$ показано на рис. 6.1.1, *б*.

Далее оптимальное минимаксное рандомизированное правило $\widetilde{R}^+$ *принятия решения* (*и определяющее его распределение* π^+) *условимся называть минимаксным*; поэтому, например, правило $R^{(1)}$, определенное решением задачи (6.1.2), — не минимаксное.

Один из методов решения задачи (6.1.4*) основан на анализе байесовского уточнения модели системы, при котором ее состояния считаются случайными и известны их вероятности.

6.1.2. Правило идентификации для байесовской модели наблюдений. Рассмотрим задачу идентификации, в которой *модель стохастической системы* определена распределениями $\mathrm{pr}_1(\cdot), \ldots, \mathrm{pr}_q(\cdot)$ наблюдаемого случайного элемента ξ и априорным распределением вероятностей состояний системы. *Случайное* состояние системы будем отмечать случайной величиной $\varkappa$, принимающей значения $1, \ldots, q$ с вероятностями $r_1, \ldots, r_q$ или — $r_1^{\varkappa}, \ldots, r_q^{\varkappa}$ — при более подробной записи.

Рассматриваемую модель системы, которая *называется байесовской*, можно представить себе так, как будто имеется ансамбль идентичных стохастических систем, каждая из которых находится в одном из q состояний, причем в этом ансамбле a_k систем находится в состоянии «k» и $a_k/(a_1 + \ldots + a_q) = r_k$, $k = 1, \ldots, q$. Тогда вероятность того, что система, выбранная «наугад из этого ансамбля», будет в состоянии «k», есть r_k, $k = 1, \ldots, q$. В такой модели задано совместное распределение $\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x,k) = \mathrm{pr}_k(x) r_k \equiv \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) r_k^{\varkappa}$, $x \in X$, $k = 1, \ldots, q$, наблюдений $\xi = x \in X$ и состояний $\varkappa = k \in \{1, \ldots, q\}$ системы, где $\mathrm{pr}_k(\cdot) = \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(\cdot|k)$ — условное [1] распределение наблюдения ξ при условии, что система находится в состоянии «k», т. е. при условии, что $\varkappa = k$.

Сравнивая рассматриваемую модель с моделью, принятой в § 6.1.1, заметим, что последнюю можно назвать либо неполной байесовской, если состояние системы случайно, но распределение $r_1^{\varkappa}, \ldots, r_q^{\varkappa}$ неизвестно, либо — частично байесовской (частично стохастической), если ее состояния не могут быть охарактеризованы каким бы то ни было распределением вероятностей. Подробнее эти отличия рассмотрены в замечании 6.1.2 и в § 6.1.6, 6.1.7.

Если система выбирается «наугад из ансамбля», то для правила решения, определенного разбиением $X.$, математическое ожидание потерь, называемое риском (потерь),

$$L(X.) = \sum_{k=1}^{q} L_k r_k^{\varkappa} = \sum_{j=1}^{q} \int_{X_j} S_j(x) \mu(dx) = \int_X \sum_{j=1}^{q} \chi_j(x) S_j(x) \mu(dx), \quad (6.1.6)$$

где

$$S_j(x) = \sum_{k=1}^{q} l_{kj} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) r_k^{\varkappa} = \sum_{k=1}^{q} l_{kj} \mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x,k), \; x \in X, \; j = 1, \ldots, q. \quad (6.1.7)$$

В (6.1.6) $L_k = L_k(X.) = \sum_{j=1}^{q} l_{kj} \int_{X_j} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) \mu(dx)$ — условное математическое ожидание потерь при условии, что система находится в состоянии $\varkappa = k$, $k = 1, \ldots, q$.

Рассмотрим задачу определения оптимального решающего правила как задачу отыскания разбиения $X = X_1 \cup \ldots \cup X_q$, минимизирующего риск L (6.1.6),

$$L(X.) = \sum_{j=1}^{q} \int_{X_j} S_j(x) \mu(dx) \sim \min_{X.}. \quad (6.1.8)$$

Ее решение дано в следующей теореме [65].

[1] Точнее, в байесовской модели заданы распределение вероятностей $r_k^{\varkappa}$, $k = 1, \ldots, q$, состояний и распределение $\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(\cdot|k)\colon X \to \mathcal{R}_+$ переходной вероятности наблюдения ξ для каждого состояния $k = 1, \ldots, q$, определяющие совместное распределение ξ и $\varkappa$ равенствами $\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x,k) = \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) r_k^{\varkappa}$, $x \in X$, $k = 1, \ldots, q$, [4]; по соглашению, принятому в § 6.1, распределением $\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times \{1, \ldots, q\} \to [0, \infty)$ названа плотность вероятности относительно некоторой меры $\mu \times \nu$ на $\sigma(X \times \{1, \ldots, q\})$.

Теорема 6.1.1. *Минимум в* (6.1.8) *достигается на любом упорядоченном разбиении* $X = X_1^* \bigcup \ldots \bigcup X_q^*$ $(X_i^* \bigcap X_j^* = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, q)$, *удовлетворяющем условию*

$$X_j^* \subset \left\{ x \in X,\ S_j(x) = S(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant q} S_i(x) \right\} = \overline{X}_j, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{6.1.9}$$

Минимальное значение риска (6.1.6)

$$L^* = L(X_\cdot^*) = \sum_{j=1}^{q} \int\limits_{X_j^*} S_j(x)\mu(dx) = \int\limits_{X} S(x)\mu(dx). \tag{6.1.10}$$

Доказательство. Для любого разбиения $X = \bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j$:

$$\sum_{j=1}^{q} \Bigg(\int\limits_{X_j^*} S_j(x)\mu(dx) - \int\limits_{X_j} S_j(x)\mu(dx) \Bigg) = \sum_{j=1}^{q} \Bigg(\int\limits_{X_j^* \setminus (X_j \cap X_j^*)} S_j(x)\mu(dx) - $$
$$- \int\limits_{X_j \setminus (X_j \cap X_j^*)} S_j(x)\mu(dx) \Bigg) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \Bigg(\int\limits_{X_j^* \setminus (X_j \cap X_j^*)} S(x)\mu(dx) - $$
$$- \int\limits_{X_j \setminus (X_j \cap X_j^*)} S(x)\mu(dx) \Bigg) = \sum_{j=1}^{q} \Bigg(\int\limits_{X_j^*} S(x)\mu(dx) - \int\limits_{X_j} S(x)\mu(dx) \Bigg) = 0,$$

так как $S_j(x) = S(x)$, если $x \in X_j^* \setminus (X_j \cap X_j^*)$, и $S_j(x) \geqslant S(x)$, если $x \in X_j \setminus (X_j \cap X_j^*)$, $j = 1, \ldots, q$. ■

Правило решения, определяемое любым разбиением X, удовлетворяющим условию (6.1.9), называется *байесовским*, соответствующее значение (6.1.10) риска (6.1.6) называется *байесовским риском*.

Следствие 6.1.1. Правило идентификации, определенное разбиением $X_\cdot^*$, удовлетворяющим условию (6.1.9), можно определить как функцию $d^*(\cdot)\colon X \to \{1, \ldots, q\}$ такую, что для каждого $x \in X$ $d^*(x) = k$, если $x \in X_k^*$, $k = 1, \ldots, q$, или — *непосредственно для каждого* $x \in X$: $d^*(x) \in D^*(x) = \{d \in \{1, \ldots, q\},\ S_d(x) = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} S_j(x)\}$, или, наконец, *как решение* $d^*(\cdot)$ *задачи* $S_{d^*(x)}(x) = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} \sum\limits_{k=1}^{q} l_{kj} \mathrm{pr}^{\xi, \varkappa}(x, k)$, $x \in X$. Любая такая функция, называемая *решающей функцией*, определит множества $X_k^* = \{x \in X,\ d^*(x) = k\}$, $k = 1, \ldots, q$, образующие разбиение X, удовлетворяющее условиям (6.1.9).

Если наблюдения за системой невозможны, то, заменив в следствии 6.1.1 $S_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{q} l_{kj} \mathrm{pr}^{\xi, \varkappa}(x, k)$ на $S_j = \sum\limits_{k=1}^{q} l_{kj} r_k^{\varkappa}$, $j = 1, \ldots, q$,

$D^*(x)$ на $D^* = \{d \in \{1, \ldots, q\},\ S_d = S = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} S_j\}$ и $d^*(x)$ на любое $d^* \in D^*$, получим, что *решение* d^* *минимизирует ожидаемые потери в этой ситуации*: $S_{d^*} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} \sum\limits_{k=1}^{q} l_{kj} r_k^{\varkappa} = S = \sum\limits_{k=1}^{q} l_{kd^*} r_k^{\varkappa}$.

Заметим, что если в (6.1.7) $l_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{когда } k = j \\ 1, & \text{когда } k \neq j \end{cases}$, т. е. если при точном решении $(k = j)$ потерь нет, а в случае любой ошибки потери оцениваются единицей, то риск (6.1.6) равен *ожидаемой доле ошибочных решений*, или — *вероятности ошибочной идентификации* $(\mathrm{PrE}(X.)$ при разбиении $X.)$, а согласно (6.1.7)

$$S_j(x) = \sum_{k=1}^{q} r_k l_{kj} \mathrm{pr}_k(x) = \sum_{k \neq j} r_k \mathrm{pr}_k(x) = \mathrm{pr}(x) - r_j \mathrm{pr}_j(x),\ x \in X,\ j = 1, \ldots, q, \tag{6.1.7*}$$

где $\mathrm{pr}(x) = \sum\limits_{j=1}^{q} r_j \mathrm{pr}_j(x)$, $x \in X$, — распределение наблюдения ξ. В этом случае задача (6.1.8) вместо условия (6.1.9) определит условие

$$X_j^* \subset \{x \in X,\ r_j \mathrm{pr}_j(x) \geqslant \max_{i \neq j} r_i \mathrm{pr}_i(x)\} = \{x \in X,\ \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(j|x) \geqslant \geqslant \max_{i \neq j} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(i|x)\},\ j = 1, \ldots, q, \tag{6.1.9*}$$

согласно которому в X_j^* могут попасть лишь те наблюдения $\xi = x$, для которых значение условного (при условии $\xi = x$) распределения при $\varkappa = j$ максимально. Минимальное значение математического ожидания доли ошибочных решений согласно (6.1.7*) равно

$$\begin{aligned} \mathrm{PrE}(X_\cdot^*) &= \sum_{j=1}^{q} \int_{X_j^*} S_j(x)\mu(dx) = 1 - \sum_{j=1}^{q} \int_{X_j^*} r_j \mathrm{pr}_j(x)\mu(dx) = \\ &= 1 - \int_X \max_{1 \leqslant j \leqslant q} (r_j \mathrm{pr}_j(x))\mu(dx). \end{aligned} \tag{6.1.10*}$$

Согласно теореме 6.1.1 точки границы

$$\Gamma_{i_1 \ldots i_t} = \{x \in X,\ S(x) = S_{i_1}(x) = \ldots = S_{i_t}(x) < S_j,\ j = i_{t+1}, \ldots, i_q\} \tag{6.1.11}$$

смежных областей $\overline{X}_{i_1}, \ldots, \overline{X}_{i_t}$ (6.1.9) можно произвольно отнести к любой из областей $X_{i_1}^*, \ldots, X_{i_t}^*$, например, случайно с вероятностями

$$\pi_{i_1}(x), \ldots, \pi_{i_t}(x),\ \pi_{i_1}(x) + \ldots + \pi_{i_t}(x) = 1, \tag{6.1.12}$$

для каждой точки $x \in \Gamma_{i_1 \ldots i_t}$; если же $x \in \Gamma_i = \{x \in X,\ S_i(x) < < \min\limits_{j \neq i} S_j(x)\}$, то $\pi_i(x) = 1$, $\pi_j(x) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, q$.

Альтернативная точка зрения состоит в том, что множества $X_1^*, \ldots \ldots, X_q^*$, образующие разбиение X и удовлетворяющие условию (6.1.9), перед принятием решения выбираются случайно, причем так, что вероятность того, что точка $x \in \Gamma_{i_1,\ldots,i_t}$ будет покрыта множеством $X^*_{i_s}$, есть $\pi_{i_s}(x)$, $s = 1,\ldots,t$. При этом риск L^* (6.1.10) формально является случайной величиной, *но ее значение одно и то же для каждого случайного разбиения и, следовательно, совпадает с математическим ожиданием* L^*, см. замечание 6.1.3.

Далее нам потребуется другое представление для множества (6.1.11), которое может быть получено на основе решения задачи

$$S_j(x) \sim \min_j \tag{6.1.13}$$

для каждого $x \in X$. Пусть минимум в (6.1.13) достигается на значениях $j = i_1,\ldots,i_t$, и $\mathrm{J}(\cdot)\colon X \to \mathcal{P}\{1,\ldots,q\}$ — определенное на X многозначное отображение, значениями которого являются подмножества $\{1,\ldots,q\}$, в данном случае —

$$\mathrm{J}(x) = \{i_1,\ldots,i_t\}. \tag{6.1.14}$$

Тогда согласно определению (6.1.11)

$$\Gamma_{i_1,\ldots,i_t} = \{x \in X,\ \mathrm{J}(x) = \{i_1,\ldots,i_t\}\}. \tag{6.1.15}$$

В частности, если минимум в (6.1.13) достигается на единственном значении $\mathrm{J}(x) = \{i\}$, то

$$\Gamma_i = \left\{x \in X,\ S_i(x) < \min_{j\neq i} S_j\right\} = \big\{x \in X,\ \mathrm{J}(x) = \{i\}\big\}\ . \tag{6.1.15*}$$

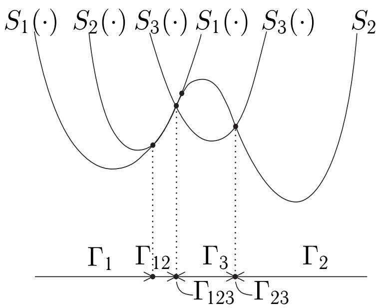


Рис. 6.1.2. Области: $\Gamma_i = \{x \in X,\ S_i(x) < \min_{j\neq i} S_j(x)\}$, $i = 1,2,3$; $\Gamma_{ij} = \{x \in X,\ S_i(x) = S_j(x) < S_k(x)\}$, $(i,j) = (1,2),(1,3),(2,3)$; $\Gamma_{123} = \{x \in X,\ S_1(x) = S_2(x) = S_3(x)\}$. Если $\widetilde{X}_k = \{x \in X,\ S_k(x) = \min_{i\neq k} S_i(x)\}$, $k = 1,2,3$, то $\Gamma_{ij} = \widetilde{X}_i \bigcap \widetilde{X}_j$, $\Gamma_{123} = \widetilde{X}_1 \bigcap \widetilde{X}_2 \bigcap \widetilde{X}_3$

Замечание 6.1.2. На практике в байесовской модели стохастической системы, описанной в начале §6.1.2, вероятности $r_1^{\varkappa},\ldots,r_q^{\varkappa}$ обычно не известны. Конечно, в такой ситуации «неполной байесовской модели» задача идентификации может быть решена методами, рассмотренными в §6.1.1 для «частично стохастических» систем. Но в тех случаях, когда возможны наблюдения «за системами, выбираемыми наугад (с возвращением) из ансамбля», можно оценить вероятности $r_1^{\varkappa}, \ldots, r_q^{\varkappa}$, а следовательно, — и байесовскую модель системы.

Действительно, пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant q$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — последовательность результатов n взаимно независимых наблюдений $\xi_1 \ldots \ldots, \xi_n$ за случайной системой, модель которой определена распределением $\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) r_k^{\varkappa}$, $x \in X$, $k = 1, \ldots, q$, $(x_{i_1}, k_1), \ldots, (x_{i_n}, k_n)$ — последовательность значений n взаимно независимых пар $(\xi_1, \varkappa_1), \ldots, (\xi_n, \varkappa_n)$ («наблюдение», «состояние»), определяющих *схему наблюдения за системой*, в которой значения $k_1, \ldots, k_n$ состояний системы, разумеется, *не известны*. Обозначим $n(x, k)$ случайное число пар в последовательности $(\xi_1, \varkappa_1), \ldots, (\xi_n, \varkappa_n)$, принявших значение (x, k), $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{q} n(x_i, k) = n$, $\nu^{(n)}(x, k) = n(x, k)/n$ обозначим частоту таких пар, $\nu^{(n)}(k) = \sum_{i=1}^{m} \nu^{(n)}(x_i, k)$, $\nu^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{q} \nu^{(n)}(x, k)$, $\nu^{(n)}(x|k) = \nu^{(n)}(x, k)/\nu^{(n)}(k)$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, так что $\nu^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{q} \nu^{(n)}(x|k) \nu^{(n)}(k)$, $x = \{x_1, \ldots, x_m\}$. В последнем равенстве значения $\nu^{(n)}(x|k)$ и $\nu^{(n)}(k)$, $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, неизвестны, известны лишь $\nu^{(n)}(x_1), \ldots, \nu^{(n)}(x_m)$.

Поскольку при $n \to \infty$ $\nu^{(n)}(x|k) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k)$, $\nu^{(n)}(k) \xrightarrow{\text{п. н.}} r_k^{\varkappa}$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, и, следовательно, $\max_{x \in X} \Big|\nu^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) r_k^{\varkappa}\Big| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, где распределение $\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(\cdot|\cdot)$ *известно*, то при достаточно большом n для определения оценок $r_1^{(n)\varkappa}, \ldots, r_q^{(n)\varkappa}$ вероятностей $r_1^{\varkappa}, \ldots, r_q^{\varkappa}$ получим задачу, сводящуюся к задаче линейного программирования, см. замечание 6.1.1,

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \Big|\nu^{(n)}(x_i) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x_i|k) r_k^{(n)\varkappa}\Big| \sim \min_{r_1^{(n)\varkappa}, \ldots, r_q^{(n)\varkappa}},$$

в которой минимум вычисляется на множестве $\Big\{r_k^{(n)\varkappa} \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, q,\ \sum_{k=1}^{q} r_k^{(n)\varkappa} = 1\Big\}$. Если $\widehat{r}_k^{(n)\varkappa}$, $k = 1, \ldots, q$, — ее решение, причем единственное, то $\widehat{\mathrm{pr}}^{(n)\xi,\varkappa}(x, k) = \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) \widehat{r}_k^{(n)\varkappa}$, $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $k \in \{1, \ldots \ldots, q\}$, — оценка распределения, определяющего байесовскую модель наблюдения, и при $n \to \infty$ $\widehat{\mathrm{pr}}^{(n)\xi,\varkappa}(x, k) \xrightarrow{\text{П.Н.}} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) r_k^{\varkappa} = \mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x, k)$, $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, но при этом возникают трудности при оценивании погрешности.

Заметим, что так как согласно лемме Хёфдинга [98], см. § 3.1 гл. 3, для всякого $\varepsilon > 0$ $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{|\nu^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k) r_k^{\varkappa}| > \varepsilon\}) \leqslant$

$\leqslant 2\exp(-2n\varepsilon^2)$, $x \in X$, то имеет место равномерная по $x \in X$ оценка: $\mathrm{Pr}^{(n)}(\{\max\limits_{x\in X}|\nu^{(n)}(x) - \sum\limits_{k=1}^{q}\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k)r_k^\varkappa| \leqslant \varepsilon\}) \geqslant 1 - 2m\exp(-2n\varepsilon^2)$, позволяющая оценить как вероятности $r_1^\varkappa,\ldots,r_q^\varkappa$, так и погрешность оценивания.

Действительно, оптимальную оценку $r_{*1}^\varkappa,\ldots,r_{*q}^\varkappa$ вероятностей $r_1^\varkappa,\ldots,r_q^\varkappa$ и оценку погрешности, *верные с вероятностью* $\geqslant 1 - 2m\exp(-2n\varepsilon^2)$, можно получить как решения следующей задачи, сводящейся к задаче линейного программирования: $\delta^{(n)} = \sup\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant q}|r_{*k}^\varkappa - r_k^\varkappa|\,|(r_1^\varkappa,\ldots,r_q^\varkappa) \in Q^{(n)}\} = \min\limits_{(r_1,\ldots,r_q)\in S}\sup\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant q}|r_k - r_k^\varkappa|\,|(r_1^\varkappa,\ldots,r_q^\varkappa) \in Q^{(n)}\}$, где $Q^{(n)} = \{(r_1^\varkappa,\ldots,r_q^\varkappa),\ \nu^{(n)}(x) - \varepsilon \leqslant \sum\limits_{k=1}^{q}\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k)r_k^\varkappa \leqslant \nu^{(n)}(x) + \varepsilon,\ x \in X,\ r_k^\varkappa \geqslant 0,$ $k = 1,\ldots,q,\ r_1^\varkappa + \ldots + r_q^\varkappa = 1\}$ и $\delta^{(n)}$ — погрешность оценки $r_{*1}^\varkappa,\ldots,r_{*q}^\varkappa$.

6.1.3. Рандомизация решения для байесовской модели. Наименее благоприятное распределение. Как было отмечено в §6.1.2, если $\xi = x \in \Gamma_j$ (6.1.15*), то с вероятностью $\pi_j(x) = 1$ принимается решение в пользу «j», если же $\xi = x \in \Gamma_{i_1\ldots i_t}$ (6.1.15), то — в пользу «i_s» с вероятностью $\pi_{i_s}(x)$, $s = 1,\ldots,t$, $\sum\limits_{s=1}^{t}\pi_{i_s}(x) = 1$, $x \in X$. Такое правило решения называется рандомизированным [1]). Для его построения можно для каждого наблюдения $\xi = x$ непосредственно искать распределение $\pi(x) = (\pi_1(x),\ldots,\pi_q(x))$ вероятностей решений в пользу соответственно «1»,…,«q», не обращаясь к построению разбиения $X = X_1^*\bigcup\ldots\bigcup X_q^*$. С этой целью вместо выражения $\int\limits_X\sum\limits_{k,j}r_k l_{kj}\chi_j(x)\mathrm{pr}_k(x)\mu(dx)$ для риска в (6.1.6) следует использовать

$$L(\pi(\cdot)) = \int\limits_X\sum_{k,j}r_k l_{kj}\pi_j(x)\mathrm{pr}_k(x)\mu(dx), \tag{6.1.6*}$$

а вместо задачи (6.1.8), решение которой определяет оптимальное разбиение $X_\cdot^*$, решить задачу

$$L(\pi(\cdot)) = \int\limits_X\sum_{j=1}^{q}\pi_j(x)S_j(x)\mu(dx) \sim \min_{\pi(\cdot)}, \tag{6.1.16}$$

в которой $S_j(x)$, $j = 1,\ldots,q$, определены в (6.1.7). Ее решение определит оптимальное распределение $\pi^*(\cdot) = (\pi_1^*(\cdot),\ldots,\pi_q^*(\cdot))$.

---

[1]) Рандомизация состоит в том, что при $\xi = x \in \Gamma_{i_1,\ldots,i_t}$ «разыгрывается» случайная величина δ, принимающая значения $1,\ldots,q$ с вероятностями (6.1.12), и если «выпадает» i_s, то i_s принимается в качестве решения.

Любое распределение $\pi(\cdot)$ *назовем рандомизированным правилом принятия решения, а те их них, на которых достигается минимум в* (6.1.16), — *байесовскими рандомизированными правилами принятия решения.*

Поскольку случайное решение $\delta = d$ о состоянии системы при наблюдении $\xi = x$ в (6.1.6) принимается с вероятностью [1)] $\pi^{\delta|\xi}(d|x) \equiv \equiv \chi_d(x)$, а в (6.1.6*) — с вероятностью $\pi^{\delta|\xi}(d|x) \equiv \pi_d(x)$, то выражение для риска (как (6.1.6), так и (6.1.6*)) можно записать единообразно в виде

$$L(\pi(\cdot)) = \sum_{k,d} \int_X r_k^{\varkappa} l_{kd} \pi^{\delta|\xi}(d|x) \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k)\mu(dx) = \sum_{k,d} l_{kd} \mathrm{pr}^{\varkappa,\delta}(k,d) = \mathsf{E} l_{\varkappa\delta}. \tag{6.1.17}$$

В (6.1.17) $\pi^{\delta|\xi}(d|x)$ — переходная вероятность решения $\delta = d$ при $\xi = = x$, $d \in \{1, \ldots, q\}$, $x \in X$, определяющая рандомизированное правило решения, $\mathrm{pr}^{\varkappa,\delta}(k,d) = \int\limits_X r_k^{\varkappa} \pi^{\delta|\xi}(d|x)\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa}(x|k)\mu(dx)$, $k, d \in \{1, \ldots, q\}$, — совместное распределение случайной пары $\varkappa, \delta$ «состояние, решение», определенное правилом $\pi^{\delta|\xi}(\cdot,\cdot)$.

Решение задачи (6.1.16) дано в следующей теореме.

Теорема 6.1.2. *Для каждого* $x \in X$ *упорядочим значения* $S_j(x)$, $j = 1, \ldots, q$, (6.1.7) *так, чтобы*

$$S(x) = S_{i_1}(x) = \ldots = S_{i_t}(x) < S_{i_{t+1}}(x) \leqslant \ldots \leqslant S_{i_q}(x), \tag{6.1.18}$$

---

1) В рассматриваемом контексте распределение $\pi^{\delta|\xi}(1|x), \ldots, \pi^{\delta|\xi}(k|x)$ определяет переходную вероятность $\Pi^{\cdot}(\cdot)$ на $(\{1, \ldots, q\},\ \mathcal{P}(\{1, \ldots, q\}))$, которую, как и распределение $\pi^{\delta|\xi}$, называют рандомизированным правилом решения. $\Pi^x(\cdot)$ для каждого $x \in X$ является вероятностью на $\mathcal{P}(\{1, \ldots, q\})$ и для каждого $A \subset \{1, \ldots, q\}$ $\Pi^{\cdot}(A)$ — измеримая функция на $(X, \sigma(X))$. При этом распределение $\sum\limits_{k=1}^{q} r_k \mathrm{pr}_k^{\xi}(x)\pi^{\delta|\xi}(j|x) = \pi^{\delta|\xi}(j|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x)$, $j = 1, \ldots, q$, $x \in X$, определяет вероятность на $(\{1, \ldots, q\} \times X,\ \mathcal{P}(\{1, \ldots, q\}) \times \sigma(X))$. Если эту вероятность считать заданной априори, то $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x)\colon \{1, \ldots, q\} \to [0,1]$ — распределение условной вероятности $\Pi^x(\cdot)$ при условии $\xi = x$.

В общем случае [4]: пусть $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ — измеримые пространства. Переходной вероятностью для этих пространств называется отображение $\mathrm{Pr}_2^1(\cdot,\cdot)\colon X_1 \times \mathcal{A}_2 \to [0,1]$, удовлетворяющее условиям: 1. $\forall\, x_1 \in X_1$ $\mathrm{Pr}_2^1(x_1, \cdot)$ — вероятность на $(X_2, \mathcal{A}_2)$, 2. $\forall\, A_2 \in \mathcal{A}_2$ $\mathrm{Pr}_2^1(\cdot, A_2)$ — измеримая функция на $(X_1, \mathcal{A}_1)$.

Если Pr_1 — любая вероятность на $(X_1, \mathcal{A}_1)$, то существует единственная вероятность Pr на $(X_1 \times X_2,\ \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, такая, что $\mathrm{Pr}(A_1 \times A_2) = = \int\limits_{A_1} \mathrm{Pr}_1(dx_1)\mathrm{Pr}_2^1(x_1, A_2)$, $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

и определим $\pi_1^*(x), \ldots, \pi_q^*(x)$ *согласно условиям* [1])

$$\begin{aligned}&\pi_{i_1}^*(x) \geqslant 0, \ldots, \pi_{i_t}^*(x) \geqslant 0 = \pi_{i_{t+1}}^*(x) = \\ &= \ldots = \pi_{i_q}^*(x),\ \pi_{i_1}^*(x) + \ldots + \pi_{i_t}^*(x) = 1.\end{aligned} \tag{6.1.19}$$

Тогда для любого распределения $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_q(\cdot))$

$$L^* = L(\pi^*(\cdot)) = \int_X \sum_{j=1}^q \pi_j^*(x) S_j(x)\mu(dx) = \int_X S(x)\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \int_X \sum_{j=1}^q \pi_j(x) S_j(x)\mu(dx) = L(\pi(\cdot)) \tag{6.1.20}$$

и для каждого $x \in X$

$$\sum_{j=1}^q \pi_j^*(x) S_j(x) = S(x). \tag{6.1.21}$$

Доказательство. Для любых $x \in X$ и $\pi(x) = (\pi_1(x), \ldots, \pi_q(x))$ в силу условий (6.1.18), (6.1.19) $\sum\limits_{s=1}^q \pi_{i_s}(x) S_{i_s}(x) \geqslant \sum\limits_{s=1}^q \pi_{i_s}(x) S(x) = S(x)$, $\sum\limits_{s=1}^q \pi_{i_s}^*(x) S_{i_s}(x) = \sum\limits_{s=1}^q \pi_{i_s}^*(x) S(x) = S(x)$, откуда следует (6.1.20) и (6.1.21). ■

Любое распределение $\pi_i^*(x) \equiv \pi^{*\delta|\xi}(i\,|\,x)$, $i = 1, \ldots, q$ является байесовским рандомизированным правилом решения, $x \in X$.

Замечание 6.1.3. Согласно условиям (6.1.18), (6.1.19) для любого правила $\pi^{*\delta|\xi}$, удовлетворяющего условию $\sum\limits_{d \in D^*(x)} \pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 1$, в котором $D^*(x) = \{d \in \{1, \ldots, q\},\ S_d(x) = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant q} S_k(x)\}$, выполнено условие оптимальности (6.1.20), согласно которому и равенству (6.1.10) *рандомизация принятия решения для байесовской модели не позволяет повысить его качество*. Поскольку согласно (6.1.19) можно выбрать $\pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 1$, если $d = d^*(x) \in D^*(x)$, и $\pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 0$, если $d \neq d^*(x)$, $d = 1, \ldots, q$, то в качестве решения для $\xi = x$ можно выбрать значение $d^*(x)$ *решающей функции* $d^*(\cdot)\colon X \to \{1, \ldots, q\}$, удовлетворяющей условию $d^*(x) \in D^*(x)$, $x \in X$, см. следствие 6.1.1.

Вернемся к примеру, рассмотренному в § 6.1.1 с тем, чтобы геометрически охарактеризовать байесовское правило и связать его с минимаксным. На рис. 6.1.3, как и на рис. 6.1.1, *а*, изображено множество Q, каждая точка которого отвечает некоторому разбиению X и соответствующему правилу решения, ее координаты L_1, L_2 суть значения

[1]) Перестановка $i_\cdot\colon \{1, \ldots, q\} \to \{1, \ldots, q\}$ и t зависят от $x \in X$, $\pi_{i_s}^*(x) \equiv \equiv \pi^{\delta|\xi}(i_s|x)$, $s = 1, \ldots, q$, $x \in X$.

ожидаемых потерь, сопутствующих использованию этого правила, когда система находится в первом или во втором состоянии.

При распределении r_1, r_2 байесовское правило определяется наименьшим значением c, при котором прямая $r_1L_1 + r_2L_2 = c$ пересекается с Q, это наименьшее значение c есть байесовский риск $L^* = L^*(r_1, r_2)$.

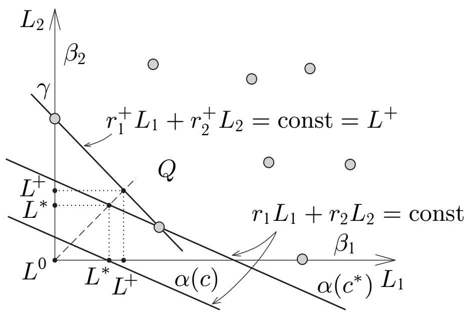


Рис. 6.1.3. $\alpha = \alpha(c)$ — одна из прямых семейства $r_1L_1 + r_2L_2 = c$, $\alpha^* = \alpha(c^*)$ — прямая этого семейства, пересекающаяся с Q при наименьшем значении $c = c^*$, равном байесовскому риску L^* (6.1.10), сопутствующему байесовскому правилу, отвечающему любому разбиению $X^*_\cdot$ в (6.1.9). Прямая γ отвечает «наименее благоприятному» распределению r_1^+, r_2^+, при котором риск L^* (6.1.10) максимален и совпадает с минимаксным риском L^+ на рис. 6.1.1, a. В точке $L_1 = L_2 = L^*$ $\quad r_1L_1 + r_2L_2 = L^* < L^+$. Прямые β_i (оси L_i), $i = 1, 2$, отвечают «наиболее благоприятным» распределениям, при которых риск $L^0 = 0$.

На рис. 6.1.3 прямой γ отвечает байесовский риск $L^* = L^+$, максимальный в следующем смысле: $L^+ = \max\{L^*(r_1, r_2) | r_1, r_2 \geqslant 0, r_1 + r_2 = 1\}$. Распределение r_1^+, r_2^+, на котором достигается этот максимум, естественно назвать *наименее благоприятным*, ему соответствует байесовский риск, совпадающий с минимаксным L^+, см. рис. 6.1.1, a.

Этот результат верен и в общем случае: *минимаксное правило является байесовским при наименее благоприятном априорном распределении состояний системы.*

Действительно, представим риск (6.1.16) в следующем виде:

$$L(r, \pi(\cdot)) = \sum_{k=1}^{q} r_k L_k(\pi(\cdot)), \tag{6.1.22}$$

где $r = (r_1, \ldots, r_q)$, $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_q(\cdot))$ и

$$L_k(\pi(\cdot)) = \sum_{j=1}^{q} \int\limits_X l_{kj}\pi_j(x)\mathrm{pr}_k(x)\mu(dx),\ k = 1, \ldots, q. \tag{6.1.23}$$

Определим минимаксное рандомизированное правило ${}^{+}\pi(\cdot)$ как решение задачи на минимум

$$\min_{\pi(\cdot)} \max_{r} L(r, \pi(\cdot)) = \max_{r} L(r, {}^{+}\pi(\cdot)). \tag{6.1.24}$$

Следующая лемма позволяет получить минимаксное правило ${}^{+}\pi(\cdot)$ как частный случай байесовского $\pi^*(\cdot)$, см. Теорему 6.1.2.

Лемма 6.1.1. [7] *Пусть существуют априорное распределение* $r^+ = (r_1^+, \ldots, r_q^+)$, $r_k^+ \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, q$, $r_1^+ + \ldots + r_q^+ = 1$, *и соответствующее* r^+ *байесовское правило* $\pi_+^*(\cdot)$, *при котором* $L_1(\pi_+^*(\cdot)) = \ldots = L_q(\pi_+^*(\cdot)) \overset{\triangle}{=} L(\pi_+^*(\cdot))$. *Тогда* $\pi_+^*(\cdot)$ — *минимаксное правило, т. е.* $\pi_+^*(\cdot) = {}^{+}\pi(\cdot)$ — *решение задачи* (6.1.24).

Доказательство. Для любого рандомизированного правила решения $\pi(\cdot)$ $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} L_k(\pi(\cdot)) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{q} r_k^+ L_k(\pi(\cdot)) \geqslant \min\limits_{\pi(\cdot)} \sum\limits_{k=1}^{q} r_k^+ L_k(\pi(\cdot)) = \sum\limits_{k=1}^{q} r_k^+ L_k(\pi_+^*(\cdot)) = L(\pi_+^*(\cdot)) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} L_k(\pi_+^*(\cdot))$, *откуда следует, в частности, что*

$$\min_{\pi(\cdot)} \max_{1\leqslant k\leqslant q} L_k(\pi(\cdot)) = \max_{1\leqslant k\leqslant q} L_k({}^{+}\pi(\cdot)). \tag{6.1.24*}$$

■

Распределение $r_k^+ \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, q$, $r_1^+ + \ldots + r_q^+ = 1$, называется *наименее благоприятным*, так как $L({}^{+}\pi(\cdot)) = \max\limits_{r} \min\limits_{\pi(\cdot)} L(\pi(\cdot))$, [7].

Замечание 6.1.4. Пусть в (6.1.22) вероятности $r_1, \ldots, r_q$ неизвестны. Рассмотрим задачу рандомизированной идентификации как задачу на минимакс (6.1.24*) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} L_k\big(\pi(\cdot)\big) \sim \min\limits_{\pi(\cdot)}$, которая в случае конечного $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, как и задача (6.1.4*), является задачей линейного программирования, см. замечание 6.1.1. В этом случае в (6.1.23)

$$L_k\big(\pi(\cdot)\big) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{m} l_{kj} \pi_j(x_i) \mathrm{pr}_k(x_i),\ k = 1, \ldots, q,$$

где $\pi(\cdot) = \big\{\pi(x_1), \ldots, \pi(x_m)\big\} \equiv \Big\{\big(\pi_1(x_1), \ldots, \pi_q(x_1)\big), \ldots, \big(\pi_1(x_m), \ldots \ldots, \pi_q(x_m)\big)\Big\}$, и оптимальное минимаксное правило ${}^{+}\pi(\cdot) = \big\{{}^{+}\pi(x_1), \ldots \ldots, {}^{+}\pi(x_m)\big\}$ определится как решение задачи линейного программирования

$$\max_{1\leqslant k\leqslant q} L_k\big(\pi(\cdot)\big) = \max_{1\leqslant k\leqslant q} \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{m} Q_{kji} \pi_j(x_i) \sim \min_{\pi(\cdot)\in D},$$

где $Q_{kji} = l_{kj}\mathrm{pr}_k(x_i)$, $k, j = 1, \ldots, q$, $i = 1, \ldots, m$, $D = \Big\{\pi(\cdot) = \big\{\big(\pi_1(x_1), \ldots, \pi_q(x_1)\big), \ldots, \big(\pi_1(x_m), \ldots, \pi_q(x_m)\big)\big\}, \pi_j(x_i) \geqslant 0,\ \sum\limits_{j=1}^{q} \pi_j(x_i) = 1,\ j = 1, \ldots, q,\ i = 1, \ldots, m\Big\}$.

Согласно правилу ${}^{+}\pi(\cdot)$ при наблюдении $\xi = x$ разыгрывается случайная величина δ, распределенная согласно условию $\Pr(\delta = d\,|\,x) = {}^{+}\pi_d(x)$, $d = 1, \ldots, q$, и состояние системы идентифицируется с выпавшим ее значением $\delta = d'$. В отличие от рандомизированного правила $\pi^{+} = (\pi^{+(1)}, \ldots, \pi^{+(N)})$ в (6.1.4*), определившего случайный выбор разбиения $X_{\cdot}^{(t)}$, $t = 1, \ldots, N = q^m$, и соответствующего ему правила принятия решения, правило ${}^{+}\pi(\cdot)$ определяет случайное решение для каждого результата наблюдения $\xi = x \in X$.

Отношение между правилами $\pi^{+}(\cdot)$ и ${}^{+}\pi(\cdot)$ определяется случайной (решающей) функцией ${}^{+}d^{(\tau)}(x) = \sum\limits_{d=1}^{q} d \cdot \chi_{X_d^{(\tau)}}(x)$, $x \in X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, где τ — случайная величина, $\Pr(\tau = t) = \pi^{+(t)}$, $t = 1, \ldots, N$, $\chi_{X_d^{(\tau)}}(\cdot)$ — индикаторная функция случайного множества $X_d^{(\tau)}$, $d = 1, \ldots, q$, и для $\xi = x$ $\Pr({}^{+}d^{(\tau)}(x) = d) = \Pr(x \in X_d^{(\tau)}) = \sum\limits_{t:\ x \in X_d^{(t)}} \pi^{+(t)} = \Pr(\delta = d|x) = {}^{+}\pi_d(x)$, $x \in X$, см. рис. 6.1.4.

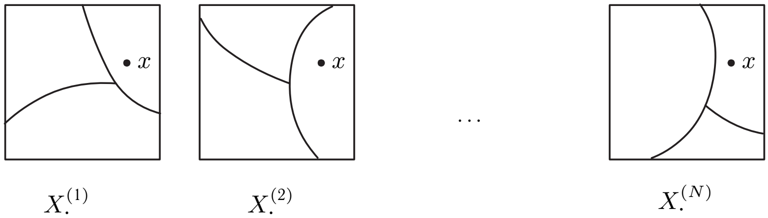


Рис. 6.1.4. Разбиения $X_{\cdot}^{(1)}, X_{\cdot}^{(2)}, \ldots, X_{\cdot}^{(N)}$ в (6.1.4*) и наблюдение $\xi = x \in X$

Замечание 6.1.5. Представим себе, что стохастическая система в задаче идентификации (6.1.6), (6.1.8) *активна*, то есть может случайно изменять свое состояние от наблюдения к наблюдению, причем конфликтуя с субъектом, наблюдающим за ней и принимающим решения о ее (текущем) состоянии. В такой ситуации стохастическая система выступает как «игрок», цель которого — выбрать распределение своих состояний $r_1, \ldots, r_q$, максимизирующее ожидаемые потери субъекта, принимающего решения, то есть — наименее благоприятное $r_1^{+}, \ldots, r_q^{+}$ для него. Подобные игровые ситуации будут рассмотрены в § 6.2.

6.1.4. Общая байесовская модель. Пусть ξ, η — случайные элементы, принимающие значения в X и соответственно в Y, распределение которых задано плотностью $\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$, относительно некоторой меры $\mu \times \nu$, определенной на $\sigma(X \times Y)$. Рассмотрим задачу идентификации, в которой задано ν-измеримое разбиение $Y = \bigcup\limits_{j=1}^{q} Y_j$, $Y_i \bigcap Y_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,q$, значения ξ наблюдаемы, значения η — нет, и на основе наблюдения $\xi = x \in X$ требуется выбрать одну из альтернатив $\eta \in Y_j$, $j = 1,\ldots,q$.

Пусть l_{ij} — потери, обусловленные решением в пользу альтернативы $\eta \in Y_j$, в то время как на самом деле $\eta \in Y_i$, и решение $\eta \in Y_j$ принимается, когда $\xi = x \in X_j$, $i,j = 1,\ldots,q$, где $X = \bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j$ — μ-измеримое разбиение, определяющее правило решения.

Пусть $\mathrm{pr}^{\xi|\eta}(x|\eta \in Y_i)$, $x \in X$, — условное распределение ξ при условии $\eta \in Y_i$, тогда $L_i = \sum\limits_{j=1}^{q} l_{ij} \int\limits_{X_j} \mathrm{pr}^{\xi|\eta}(x|\eta \in Y_i)\mu(dx) = \int\limits_{X} \sum\limits_{j=1}^{q} l_{ij}\chi_j(x)\mathrm{pr}^{\xi|\eta}(x|\eta \in Y_i)\mu(dx) = \sum\limits_{j=1}^{q} l_{ij}\mathrm{Pr}(\xi \in X_j|\eta \in Y_i)$ — условное при условии $\eta \in Y_i$ математическое ожидание потерь, и риск потерь [1] $L = \sum\limits_{i=1}^{q} L_i \mathrm{Pr}(\eta \in Y_i) = \sum\limits_{i,j=1}^{q} l_{ij} \int\limits_{X_j}\int\limits_{Y_i} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$.

Оптимальное разбиение $\{X_j^*\}$ определим как решение задачи

$$\sum_{j=1}^{q} \int\limits_{X_j} \mu(dx) S_j(x) \sim \min_{X.}, \tag{6.1.25}$$

где

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^{q} l_{ij} \int\limits_{Y_i} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy),\ x \in X,\ j = 1,\ldots,q. \tag{6.1.26}$$

Решение задачи (6.1.25) не отличается от определенного в теореме 6.1.1, а именно имеет место следующий результат.

Теорема 6.1.1*. *Минимум в* (6.1.25) *равен* $\int\limits_{X} \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} S_j(x)\mu(dx)$, *где* $S_j(\cdot)$, $j = 1,\ldots,q$, *определены в* (6.1.26), *и достигается на любом упорядоченном разбиении* $X = \bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j^*$, *в котором* $X_j^* \subset \big\{x \in X,\ S_j(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} S_i(x)\big\}$, $j = 1,\ldots,q$.

---

[1] Если функция $l(\cdot,\cdot)\colon Y \times X \to \mathcal{R}_+$ определена условием $l(y,x) = l_{ij}$, $y \in Y_i$, $x \in X_j$, $i,j = 1,\ldots,q$, то $L = \mathsf{E}l(\eta,\xi)$.

6.1.5. Правила идентификации для нескольких байесовских систем. В этом и двух следующих параграфах речь пойдет о задачах идентификации для стохастических систем нескольких *типов*, каждая из которых может находиться в одном из нескольких *состояний*.

Рассмотрим вначале задачи идентификации, в которых *байесовские* модели стохастических систем характеризуются двумя случайными параметрами. Один из них τ определяет *тип* системы и принимает значения в $T = \{1, \ldots, s\}$, другой $\varkappa$ определяет ее *состояние* и принимает значения в $K = \{1, \ldots, q\}$. *Байесовскую модель таких систем* определим распределением

$$\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa,\tau}(x,k,t) = \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x|k,t) \cdot \mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t) \cdot \mathrm{pr}^{\tau}(t),\ x \in X,\ k \in K,\ t \in T, \tag{6.1.27}$$

в котором ξ — наблюдаемый случайный элемент со значениями в X, а $\varkappa$ и τ ненаблюдаемы. В (6.1.27) распределения переходных вероятностей $pr^{\xi|\varkappa,\tau}$, $pr^{\varkappa|\tau}$ и распределение pr^{τ} известны [1]).

Рассмотрим три задачи идентификации, в которых по наблюдениям значений случайных элементов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ требуется определить

▶ состояние k и тип t наблюдаемой системы;

▶ состояние k наблюдаемых систем, тип которых может случайно изменяться от наблюдения к наблюдению;

▶ тип t наблюдаемой системы, состояние которой может случайно изменяться от наблюдения к наблюдению.

В первой задаче последовательности взаимно независимых наблюдений $\xi_1, \ldots, \xi_n$ соответствует последовательность

$$(\xi_1, \varkappa, \tau),\ \ldots,\ (\xi_n, \varkappa, \tau) \tag{$*$}$$

случайных троек («наблюдение», «состояние», «тип»), определяющая *схему наблюдений за системой*, значения $\varkappa = k$ и $\tau = t$, общие для последовательности $(*)$, надлежит определить, используя значения наблюдений $\xi_1, \ldots, \xi_n$, независимых при фиксированных k и t.

Во второй задаче последовательности $\xi_1, \ldots, \xi_n$ соответствует последовательность

$$(\xi_1, \varkappa, \tau_1),\ \ldots,\ (\xi_n, \varkappa, \tau_n), \tag{$**$}$$

определяющая схему наблюдений в этой ситуации, и требуется определить значение $\varkappa = k$ при условии, что пары $(\xi_1, \tau_1), \ldots, (\xi_n, \tau_n)$ взаимно независимы. Наконец, в третьей задаче в последовательности

$$(\xi_1, \varkappa_1, \tau),\ \ldots,\ (\xi_n, \varkappa_n, \tau), \tag{${}^{\ *}_{**}$}$$

определяющей схему наблюдений, требуется определить значение $\tau = t$ при условии, что $(\xi_1, \varkappa_1), \ldots, (\xi_n, \varkappa_n)$ взаимно независимы.

[1]) В (6.1.27) K можно считать зависящим от $t \in T$: если $K(t) = \{1, \ldots$ $\ldots, q(t)\}$, $t \in T$, то в (6.1.27) $q = \max\limits_{t \in T} q(t)$, и некоторые вероятности $pr^{\varkappa|\tau}(k|t)$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, обращаются в ноль в зависимости от $t \in T$.

В первой задаче решения сопровождаются потерями, заданными значениями матричных элементов $l_{k,t;k',t'}$, $k,k' \in K$, $t,t' \in T$, $(qs \times qs)$ — матрицы потерь, а ожидаемые потери $L(\pi^{\varkappa',\tau'|\overline{\xi}})$ в (6.1.30) определяются матрицей потерь, распределением

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}^{\overline{\xi},\varkappa,\tau}(\overline{x},k,t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_j,\varkappa,\tau}(x_j,k,t) = \mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\varkappa,\tau}(\overline{x}|k,t) \cdot \mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t) \cdot \mathrm{pr}^{\tau}(t),\\ \overline{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n),\ \overline{x} = (x_1,\ldots,x_n),\ k \in K,\ t \in T,\end{gathered} \tag{6.1.28}$$

последовательности $(*)$, определяющим *модель схемы наблюдений*, где

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\varkappa,\tau}(\overline{x}|k,t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_j|\varkappa,\tau}(x_j|k,t),\ \overline{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n),\\ \overline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in X^n,\ k \in K,\ t \in T,\end{gathered} \tag{6.1.29}$$

и — искомым рандомизированным правилом идентификации $\pi^{\varkappa',\tau'|\overline{\xi}}(k',t'|\overline{x})$, $k' \in K$, $t' \in T$, $x \in X^n$, то есть ожидаемые потери определяются согласно равенству

$$\begin{aligned}&L(\pi^{\varkappa',\tau'|\overline{\xi}}) =\\ &\quad= \sum_{t,t' \in T} \sum_{k,k' \in K} \int\limits_{\overline{x} \in X^n} l_{k,t;k',t'}\ \pi^{\varkappa',\tau'|\overline{\xi}}(k',t'|\overline{x})\ \mathrm{pr}^{\overline{\xi},\varkappa,\tau}(\overline{x},k,t)\mu(d\overline{x}).\end{aligned} \tag{6.1.30}$$

Оптимальное рандомизированное правило идентификации *состояния* и *типа* системы определится как решение задачи на минимум для ожидаемых потерь (6.1.30),

$$L(\pi^{\varkappa',\tau'|\overline{\xi}}) \sim \min_{\pi^{\varkappa',\tau'|\overline{\xi}}}, \tag{6.1.31}$$

см. теорему 6.1.2.

Во второй задаче модель схемы наблюдений за системами определяется распределением последовательности $(**)$

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}^{\overline{\xi},\varkappa,\overline{\tau}}(\overline{x},k,\overline{t}) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_j,\varkappa,\tau_j}(x_j,k,t_j) = \mathrm{pr}^{\overline{\xi},\overline{\tau}|\varkappa}(\overline{x},\overline{t}|k)\ \mathrm{pr}^{\varkappa}(k),\\ \overline{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n),\ \overline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in X^n,\\ \overline{\tau} = (\tau_1,\ldots,\tau_n),\ \overline{t} = (t_1,\ldots,t_n) \in T^n.\end{gathered} \tag{6.1.32}$$

В этой задаче матричные элементы $l_{k,k'}$, $k,k' \in K$, $q \times q$ — матрицы потерь и распределение (6.1.32) определяют ожидаемые потери, сопутствующие искомому рандомизированному правилу идентификации $\pi^{\varkappa'|\overline{\xi}}(k'|\overline{x})$, $k' \in K$, $\overline{x} \in X^n$, которые даются выражением

$$L(\pi^{\varkappa'|\overline{\xi}}) = \sum_{k,k' \in K} \int\limits_{\overline{x} \in X^n} l_{k,k'}\pi^{\varkappa'|\overline{\xi}}(k'|\overline{x})\ \mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\varkappa}(\overline{x}|k)\ \mathrm{pr}^{\varkappa}(k)\mu(d(\overline{x})), \tag{6.1.33}$$

в котором

$$\mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\varkappa}(\overline{x}|k) = \sum_{\overline{t}\in T^n} \mathrm{pr}^{\overline{\xi},\overline{\tau}|\varkappa}(\overline{x},\overline{t}|k),\ \overline{x}\in X^n,\ k\in K. \tag{6.1.34}$$

В этой ситуации задача идентификации *состояния* систем

$$L(\pi^{\varkappa'|\overline{\xi}}) \sim \min_{\pi^{\varkappa'|\overline{\xi}}} \tag{6.1.35}$$

принципиально не отличается от задачи (6.1.31), см. теорему 6.1.2.

Наконец, в третьей задаче модель схемы наблюдений

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}^{\overline{\xi},\overline{\varkappa},\tau}(\overline{x},\overline{k},t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_j,\varkappa_j|\tau}(x_j,k_j|t)\ \mathrm{pr}^{\tau}(t) = \mathrm{pr}^{\overline{\xi},\overline{\varkappa}|\tau}(\overline{x},\overline{k}|t)\ \mathrm{pr}^{\tau}(t),\\ \overline{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n),\ \overline{x} = (x_1,\dots,x_n)\in X^n,\\ \overline{\varkappa} = (\varkappa_1,\dots,\varkappa_n),\ \overline{k} = (k_1,\dots,k_n)\in K^n,\end{gathered} \tag{6.1.36}$$

заданная распределением последовательности $\binom{*}{**}$, матричные элементы $l_{t,t'}$, $t,t'\in T$, $s\times s$ — матрицы потерь и рандомизированное правило идентификации $\pi^{\tau'|\overline{\xi}}(t'|\overline{x})$, $t'\in T$, $\overline{x}\in X^n$, определяют ожидаемые потери

$$L(\pi^{\tau'|\overline{\xi}}) = \sum_{t,t'\in T}\ \int\limits_{\overline{x}\in X^n} l_{t,t'}\ \pi^{\tau'|\overline{\xi}}(t'|\overline{x})\mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\tau}(\overline{x}|t)pr^{\tau}(t)\mu(d\overline{x}), \tag{6.1.37}$$

где

$$\mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\tau}(\overline{x}|t) = \sum_{\overline{k}\in K^n} \mathrm{pr}^{\overline{\xi},\overline{\varkappa}|\tau}(\overline{x},\overline{k}|t),\ \overline{x}\in X^n,\ t\in T. \tag{6.1.38}$$

Задача идентификации *типа* наблюдаемой системы

$$L(\pi^{\tau'|\overline{\xi}}) \sim \min_{\pi^{\tau'|\overline{\xi}}} \tag{6.1.39}$$

идентична задачам (6.1.31) и (6.1.35).

6.1.6. Идентификация для неполной байесовской модели. В неполных байесовских моделях *стохастическая природа* элементов $\xi,\varkappa$ и τ сохраняется, но не заданы некоторые распределения. Пусть, например, в третьей задаче идентификации *типа* системы распределение $pr^{\tau}(\cdot)$ неизвестно. Тогда модель системы определится распределением $pr^{\xi,\varkappa|\tau}(x,k|t)$, $x\in X$, $k\in K$, $t\in T$, переходной вероятности, схема наблюдений определится последовательностью $(\xi_1,\varkappa_1|\tau),\dots,(\xi_n,\varkappa_n|\tau)$, моделью которой является переходное распределение

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}^{\overline{\xi},\overline{\varkappa}|\tau}(\overline{x},\overline{k}|t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_j,\varkappa_j|\tau}(x_j,k_j|t),\ \overline{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n),\\ \overline{x} = (x_1,\dots,x_n)\in X^n,\ \overline{\varkappa} = (\varkappa_1,\dots,\varkappa_n),\ \overline{k} = (k_1,\dots,k_n)\in K^n,\ t\in T.\end{gathered}$$

В этом случае, воспользовавшись равенством (6.1.38), можно определить ожидаемые маргинальные потери, ср. с (6.1.37),

$$L_t(\pi^{\tau'|\overline{\xi}}) = \sum_{t'\in T} \int\limits_{\overline{x}\in X^n} l_{t,t'}\ \pi^{\tau'|\overline{\xi}}(t'|\overline{x})\ \mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\tau}(\overline{x}|t)\mu(d\overline{x}),\ t\in T, \tag{6.1.40}$$

и, воспользовавшись результатами, приведенными в § 6.1.3 и в замечании 6.1.4, — найти правило $\pi^{\tau'|\overline{\xi}}(\cdot|\cdot)$ как решение задачи на минимакс

$$\max_{t\in T} L_t(\pi^{\tau'|\overline{\xi}}) \ \sim\ \min_{\pi^{\tau'|\overline{\xi}}}. \tag{6.1.41}$$

При таком решении стохастическая природа параметра τ, значения которого определяют *тип* системы, не используется.

Метод идентификации *типа* системы при неизвестном $pr^\tau(\cdot)$, в котором учитывается стохастическая природа τ, может быть основан на результате, приведенном в замечании 6.1.2, но для этого должны быть организованы наблюдения за системами, при которых последовательности $\xi_1,\ldots,\xi_n$ соответствовала бы последовательность

$$(\xi_1,\varkappa_1,\tau_1),\ \ldots\ ,(\xi_n,\varkappa_n,\tau_n), \tag{${}^{**}_{**}$}$$

определяющая схему наблюдений за системами, модель которой, согласно (6.1.27), определяется распределением

$$\mathrm{pr}^{\overline{\xi},\overline{\varkappa},\overline{\tau}}(\overline{x},\overline{k},\overline{t}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_i,\varkappa_i,\tau_i}(x_i,k_i,t_i),\ \overline{x}\in X^n,\ \overline{k}\in K^n,\ \overline{t}\in T^n.$$

Пусть $n(x,k,t)$ — число реализаций в $({}^{**}_{**})$, удовлетворяющих условию

$$(\xi_j,\varkappa_j,\tau_j) = (x,k,t),\ j=1,\ldots,n, \tag{6.1.42}$$

$\nu^{(n)}(x,k,t) = n(x,k,t)/n$ — частота равенств (6.1.42) в последовательности $({}^{**}_{**})$, $\nu^{(n)}(x) = \sum\limits_{k\in K,\, t\in T} \nu^{(n)}(x,k,t)$, $\nu^{(n)}(k,t) = \sum\limits_{x\in X} \nu^{(n)}(x,k,t)$, $\nu^{(n)}(t) = \sum\limits_{k\in K} \nu^{(n)}(k,t)$, $x\in X$, $k\in K$, $t\in T$, причем для простоты здесь $X=\{x_1,\ldots,x_m\}$, где $m\geqslant s$. Хотя в равенстве

$$\nu^{(n)}(x) = \sum_{k\in K,\, t\in T} \nu^{(n)}(x|k,t)\ \nu^{(n)}(k|t)\ \nu^{(n)}(t) \tag{6.1.43}$$

значения

$$\begin{gathered} \nu^{(n)}(x|k,t) = \nu^{(n)}(x,k,t)/\nu^{(n)}(k,t),\ \nu^{(n)}(k|t) = \nu^{(n)}(k,t)/\nu^{(n)}(t), \\ x\in X,\ k\in K,\ t\in T, \end{gathered} \tag{6.1.44}$$

неизвестны, но при $n\to\infty$

$$\begin{gathered} \nu^{(n)}(x|k,t) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x|k,t),\ \nu^{(n)}(k|t) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t), \\ \nu^{(n)}(t) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^{\tau}(t), \end{gathered} \tag{6.1.45}$$

$x \in X$, $k \in K$, $t \in T$, где $\nu^{(n)}(x)$, $x \in X$, и распределения $\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x|k,t)$, $\mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t)$, $x \in X$, $k \in K$, $t \in T$, известны. Поэтому при $n \to \infty$ согласно (6.1.43), (6.1.44), (6.1.45)

$$\max_{x\in X}\left|\nu^{(n)}(x) - \sum_{k\in K,\, t\in T} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x|k,t)\, \mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t)\, \mathrm{pr}^{\tau}(t)\right| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0 \quad (6.1.46)$$

и, следовательно, оценка $\widehat{\mathrm{pr}}^{(n)\tau}(\cdot)$ распределения $\mathrm{pr}^{\tau}(\cdot)$ при достаточно большом n может быть найдена как решение задачи линейного программирования

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\nu^{(n)}(x_i) - \sum_{t\in T}\mathrm{pr}^{\xi|\tau}(x_i|t)\,\mathrm{pr}^{\tau}(t)\right| \sim \min_{\mathrm{pr}^{\tau}(\cdot)}, \quad (6.1.47)$$

в которой $\mathrm{pr}^{\xi|\tau}(x_i|t) = \sum\limits_{k\in K}\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x_i|k,t)\mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t)$, $i = 1,\ldots,m$, $t \in T$, и минимум вычисляется на множестве $\mathrm{pr}^{\tau}(t) \geqslant 0$, $t \in T$, $\sum\limits_{t\in T}\mathrm{pr}^{\tau}(t) = 1$. Если $\widehat{\mathrm{pr}}^{(n)\tau}(t)$, $t \in T$, — единственное решение задачи (6.1.47), то при $n \to \infty$ $\max\limits_{t\in T}\left|\widehat{\mathrm{pr}}^{(n)\tau}(t) - \mathrm{pr}^{\tau}(t)\right| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$, и при достаточно большом n рассматриваемая задача идентификации типа наблюдаемой системы может быть решена как байесовская задача (6.1.37), (6.1.38), (6.1.39), в которой распределение $\mathrm{pr}^{\tau}(\cdot)$, заменено на его оценку $\widehat{\mathrm{pr}}^{(n)\tau}(\cdot)$, см. замечание 6.1.2.

Если же речь идет о наблюдениях за системой, *состояние* которой случайно, а *тип* фиксирован, то так организованным наблюдениям, как уже было сказано, отвечает модель, определенная переходным распределением в (6.1.36) последовательности $\binom{*}{**}$ при $\tau = t$.

Обозначим $n(x,k|t)$ число реализаций в $\binom{*}{**}$, в которых $(\xi_j, \varkappa_j, \tau = t) = (x,k,t)$, $j = 1,\ldots,n$, $\nu^{(n)}(x,k|t) = n(x,k|t)/n$ — частота таких реализаций, $\nu^{(n)}(x|t) = \sum\limits_{k\in K}\nu^{(n)}(x,k|t)$, $\nu^{(n)}(k|t) = \sum\limits_{x\in X}\nu^{(n)}(x,k|t)$, $\nu^{(n)}(x|k,t) = \nu^{(n)}(x,k|t)/\nu^{(n)}(k|t)$, $x \in X = \{x_1,\ldots,x_m\}$, $k \in K$, $t \in T$. В этом случае

$$\nu^{(n)}(x|t) = \sum_{k\in K}\nu^{(n)}(x|k,t)\nu^{(n)}(k|t),\ x \in X,\ k \in K, \quad (6.1.48)$$

где при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\nu^{(n)}(x|k,t) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x|k,t), \\ &\nu^{(n)}(k|t) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t),\ x \in X,\ k \in K,\ t \in T, \end{aligned} \quad (6.1.49)$$

и распределения $\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}$ и $\mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}$ известны. Следовательно, при достаточно большом n согласно (6.1.49)

$$\nu^{(n)}(x_i|t) \approx \sum_{k\in K}\mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x_i|k,t)\,\mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t),\ i = 1,\ldots,m, \quad (6.1.50)$$

где $t \in T$ неизвестно. Если t^0 — истинное значение *типа* системы, то при достаточно большом n согласно (6.1.50) оценка $\widehat{t}_n^0 = \widehat{t}_n^0(\overline{x})$ может быть получена как решение задачи на минимум

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \nu^{(n)}(x_i|t^0) - \sum_{k \in K} \mathrm{pr}^{\xi|\varkappa,\tau}(x_i|k,t)\, \mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t) \right| \sim \min_{t \in T}. \quad (6.1.51)$$

Оценка максимального правдоподобия *типа* системы может быть найдена и из условия, см. (6.1.38),

$$\mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\tau}(\overline{x}|t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_{i_j}|\tau}(x_{i_j}|t) \sim \max_{t \in T}, \quad (6.1.52)$$

где $\overline{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in X^n = \{x_1, \ldots, x_m\}^n$.

Сходимость $\widehat{t}_n^0(\overline{x}) \xrightarrow{\text{п. н.}} t^0$ при $n \to \infty$ может быть исследована методами, предложенными в [7] и в замечании 6.1.2.

6.1.7. Идентификация для частично байесовской модели. Дело существенно усложняется, если модель оказывается стохастической лишь отчасти, а именно, если, например, при фиксированном *типе* $\tau = t$ системы ее состояния не контролируются переходным распределением $\mathrm{pr}^{\varkappa|\tau}(k|t)$, $k \in K$. Точнее, последнее просто не существует, поскольку номер k состояния может изменяться *произвольно* от наблюдения к наблюдению, принимая любые значения из K. В этом случае последовательности наблюдений $\xi_1, \ldots, \xi_n$ при фиксированном *типе* системы отвечает последовательность

$$(\xi_1, k_1, \tau_1 = t), \ \ldots \ , (\xi_n, k_n, \tau_n = t), \quad \left({}^{**}_{***}\right)$$

определяющая схему наблюдений за системой, модель которой

$$\begin{gathered} \mathrm{pr}^{\overline{\xi}|\cdot,\tau}(\overline{x}|\overline{k},t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{pr}^{\xi_j|\cdot,\tau}(x_{i_j}|k_j,t),\ \overline{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in \\ \in X^n \equiv \{x_1, \ldots, x_m\}^n,\ \overline{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n,\ t \in T, \end{gathered} \quad (6.1.53)$$

и по результатам взаимно независимых наблюдений $\xi_1 = x_{i_1}, \ldots, \xi_n = x_{i_n}$ требуется определить *тип* $t \in T$ системы; значения $k_1, \ldots, k_n$ и t в (6.1.53), разумеется, неизвестны.

Обозначим $n(x,k|t)$ число равенств $(\xi_j, k_j, \tau) = (x,k,t)$, $j = 1, \ldots, n$, в последовательности $\left({}^{**}_{***}\right)$, их частоту обозначим $\nu^{(n)}(x,k|t) = n(x,k|t)/n$, и определим частоты $\nu^{(n)}(k|t) = \sum_{x \in X} \nu^{(n)}(x,k|t)$, $\nu^{(n)}(x|k,t) = \nu^{(n)}(x,k|t)/\nu^{(n)}(k|t)$, так что

$$\nu^{(n)}(x|t) = \sum_{k \in K} \nu^{(n)}(x|k,t)\nu^{(n)}(k|t),\ x \in X = \{x_1, \ldots, x_m\},\ t \in T. \quad (6.1.54)$$

В этих равенствах (при истинном типе t) значения $\nu^{(n)}(x_1|t), \ldots, \nu^{(n)}(x_m|t)$ известны, а значения $\nu^{(n)}(x_1|k,t), \ldots, \nu^{(n)}(x_m|k,t)$

и $\nu^{(n)}(k|t)$, $k = 1, \ldots, q$, — нет. При $n \to \infty$ в (6.1.54) при любых $x \in X$, $k \in K$ и $t \in T$ $\nu^{(n)}(x|k,t) \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x|k,t)$, и, как следствие, для любых $x \in X$ и $t \in T$ при $n \to \infty$

$$\nu^{(n)}(x|t) - \sum_{k\in K} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x|k,t)\nu^{(n)}(k|t) \xrightarrow{\text{п. н.}} 0, \tag{6.1.55}$$

где с увеличением n частóты $\nu^{(n)}(k|t)$ при каждом $k \in K$, вообще говоря, произвольно эволюционируют в пределах интервала $[0,1]$, подчиняясь лишь условию $\sum\limits_{k\in K} \nu^{(n)}(k|t) = 1$, $t \in T$.

В этом случае *модель системы утратила то, что называют статистической устойчивостью*, и, следовательно, рандомизация решения потеряла смысл, так как решение должно быть принято по конкретной выборке $\xi_j = x_{i_j}$, $j = 1, \ldots, n$, и не может быть рекомендовано для другой выборки.

Пусть n в (6.1.55) достаточно велико и $\widehat{\nu}^{(n)}(k|\overline{x}, t', t)$, $k \in K$, — решение задачи линейного программирования для каждого $t' \in T$:

$$h(\nu(\cdot), \overline{x}, t', t) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left| \nu^{(n)}(x_i|t) - \sum_{k\in K} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t')\nu(k) \right| \sim \min_{\nu(\cdot)}, \tag{6.1.56}$$

в которой t — истинный (неизвестный) *тип* системы и минимум вычисляется на множестве $\{\nu(k) \geqslant 0,\ k \in K,\ \sum\limits_{k\in K} \nu(k) = 1\}$.

Обозначим $\widehat{t}_n(\overline{x})$ — решение задачи на минимум

$$h(\widehat{\nu}^{(n)}(\cdot|\overline{x}, t', t), \overline{x}, t', t) \sim \min_{t'\in T} \tag{6.1.57}$$

и рассмотрим свойства решений $\widehat{t}_n(\overline{x})$ задач (6.1.56), (6.1.57).

Для каждого $t \in T$ определим векторы

$$e_k^{(t)} = \begin{pmatrix} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_1|k,t) \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_m|k,t) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^m,\ k = 1, \ldots, q,\ m \geqslant q, \tag{6.1.58}$$

координаты которых неотрицательны и их сумма равна единице. Векторы (6.1.58) определяют вершины замкнутого выпуклого многогранника

$$\mathcal{M}^{(t)} = \left\{ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j e_j^{(t)},\ \lambda_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, q,\ \sum_{j=1}^{q} \lambda_j = 1 \right\} \subset \mathcal{R}^m, \tag{6.1.59}$$

— образа выпуклого замкнутого многогранника

$$Q = \left\{ \sum_{j=1}^{q} \alpha_j g_j,\ \alpha_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, q,\ \sum_{j=1}^{q} \alpha_j = 1 \right\} \subset \mathcal{R}^q, \tag{6.1.60}$$

с вершинами

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ g_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1.61}$$

при отображении $PR^{(t)} \colon \mathcal{R}^q \to \mathcal{R}^m$, заданном стохастической матрицей

$$PR^{(t)} = \begin{pmatrix} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_1|1,t) \ \ldots \ \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_1|q,t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_m|1,t) \ \ldots \ \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_m|q,t) \end{pmatrix}, \ t \in T. \tag{6.1.62}$$

Согласно $(6.1.58, \ldots, 6.1.62)$ $e_k^{(t)} = PR^{(t)} g_k$, $k = 1, \ldots, q$, см. рис. 6.1.5.

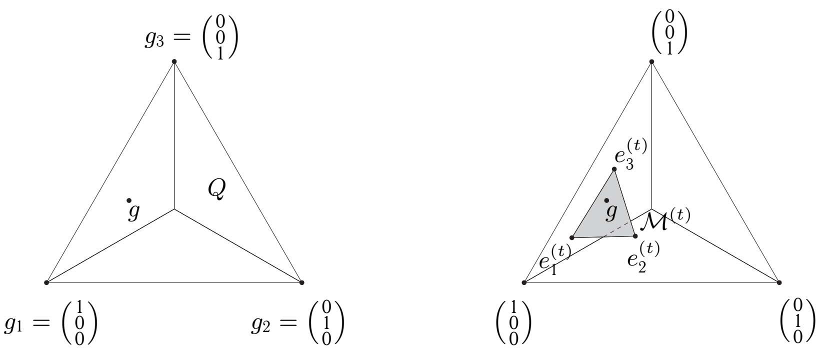


Рис. 6.1.5. Иллюстрация отображения $PR^{(t)} \colon R^3 \to R^3$. Заштрихован треугольник $\mathcal{M}^{(t)} = PR^{(t)} Q$ с вершинами $e_j^{(t)} = PR^{(t)} g_j$, $j = 1, 2, 3$. Точка $g \in Q$ неподвижна при отображении $PR^{(t)}$, $PR^{(t)} g = g$ (теорема Перрона–Фробениуса)

Определим расстояние $\rho(\mathcal{M}^{(t)}, \mathcal{M}^{(t')})$ между $\mathcal{M}^{(t)}$ и $\mathcal{M}^{(t')}$:

$$\rho(\mathcal{M}^{(t)}, \mathcal{M}^{(t')}) = \min_{\lambda, \lambda'} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|j,t) - \sum_{j'=1}^{q} \lambda'_{j'} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|j',t') \right|, \tag{6.1.63}$$

где min вычисляется на $\{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q), \ \lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_q), \ \lambda_k \geqslant 0, \ k = 1, \ldots, q, \ \sum\limits_{j=1}^{q} \lambda_j = 1, \ \lambda'_{k'} \geqslant 0, \ k' = 1, \ldots, q, \ \sum\limits_{k'=1}^{q} \lambda'_{k'} = 1\}$.

Теорема 6.1.3. *Если многогранники $\mathcal{M}^{(t')}$, $t' \in T$, попарно не пересекаются, то найдется номер $n = n_0$ такой, что $\forall\, n \geqslant n_0$ $\widehat{t}_n(\overline{x}) \overset{\text{п.н.}}{=} t$, где t — истинный тип системы.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon)\ \forall n \geqslant n(\varepsilon)$ почти наверное

$$\max_{\substack{k\in\mathcal{K}\\ t\in T}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\nu^{(n)}(x_i|k,t) - \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\min_{\nu(\cdot)} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\nu^{(n)}(x_i|t) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\nu(k)\right| \leqslant \\
&\leqslant \min_{\nu(\cdot)} \left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\nu^{(n)}(x_i|t) - \sum_{k=1}^{q} \nu^{(n)}(x_i|k,t)\nu(k)\right| + \right.\\
&\left. + \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\sum_{k=1}^{q} \left(\nu^{(n)}(x_i|k,t) - \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\right)\nu(k)\right| \right\} \leqslant \\
&\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\sum_{k=1}^{q} \left(\nu^{(n)}(x_i|k,t) - \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\right)\widetilde{\nu}(k)\right| \leqslant \\
&\leqslant \max_{\substack{k\in\mathcal{K}\\ t\in T}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\nu^{(n)}(x_i|k,t) - \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\right| \leqslant \varepsilon, \qquad (6.1.64)
\end{aligned}$$

где $\widetilde{\nu}(k) = \nu'^{(n)}(k|t)$ — частота, при которой $\nu^{(n)}(x_i|t) - \sum_{k=1}^{q} \nu^{(n)}(x_i|k,t)\widetilde{\nu}(k) = 0$, $i = 1,\ldots,m$, см. равенство в (6.1.54).

Эти соотношения справедливы при любом $t \in T$. Предположим теперь, что t — истинный *тип* наблюдаемой системы. Тогда

$$\begin{aligned}
&\min_{\nu'(\cdot)} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\nu^{(n)}(x_i|t) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t')\nu'(k)\right| \geqslant \\
&\geqslant \min_{\substack{\nu(\cdot)\\ \nu'(\cdot)}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\sum_{k=1}^{q} \nu^{(n)}(x_i|k,t)\nu(k) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t')\nu'(k)\right| = \\
&= \min_{\substack{\nu(\cdot)\\ \nu'(\cdot)}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\sum_{k=1}^{q} \left(\nu^{(n)}(x_i|k,t) - \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\right)\nu(k) + \right.\\
&\left. + \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\nu(k) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\nu'(k)\right| \geqslant \\
&\geqslant \min_{\substack{\nu(\cdot)\\ \nu'(\cdot)}} \left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\nu(k) - \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t')\nu'(k)\right| - \right.\\
&\left. - \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left|\sum_{k=1}^{q} \left(\nu^{(n)}(x_i|k,t) - \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\right)\nu(k)\right| \right\} \geqslant
\end{aligned}$$

$$\geqslant \min_{\substack{\nu(\cdot)\\ \nu'(\cdot)}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left| \sum_{k=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\nu(k) - \sum_{k'=1}^{q} \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k',t')\nu'(k') \right| -$$
$$- \max_{\nu(\cdot)} \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left| \sum_{k=1}^{q} \left(\nu^{(n)}(x_i|k,t) - \mathrm{pr}^{\xi|\cdot,\tau}(x_i|k,t)\right)\nu(k) \right| \geqslant$$
$$\geqslant \rho(\mathcal{M}^{(t)}, \mathcal{M}^{(t')}) - \varepsilon, \tag{6.1.65}$$

где использовано определение (6.1.63) и оценка (6.1.64).

Поскольку по предположению (замкнутые) многогранники $\mathcal{M}^{(t)}$, $t \in T$, не пересекаются, то $\min\limits_{\substack{t,t'\in T\\ t\neq t'}} \rho(\mathcal{M}^{(t)}, \mathcal{M}^{(t')}) > 0$, и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ его можно выбрать так, чтобы для любого $t' \neq t$ в (6.1.65) $\rho(\mathcal{M}^{(t)}, \mathcal{M}^{(t')}) - \varepsilon \geqslant \rho - \varepsilon > 2\varepsilon$. Это означает, что, например, для $\varepsilon < \rho/3$ $\forall n > n(\varepsilon)$ в задаче (6.1.56), (6.3.3) почти наверное $h\left(\widehat{\nu}^{(n)}(\cdot|\overline{x},t',t),\overline{x},t',t\right)\big|_{t'=t} \leqslant \varepsilon$ и $h\left(\widehat{\nu}^{(n)}(\cdot|\overline{x},t',t),\overline{x},t',t\right)\big|_{t'\neq t} > 2\varepsilon$, т. е. $\widehat{t}^{(n)}(\overline{x}) \overset{\text{п.н.}}{=} t$ для всех $n > n(\varepsilon)$. ■

6.2. Вероятностная модель. Матричная игра двух субъектов

6.2.1. Модель матричной игры двух субъектов с нулевой суммой. В рассматриваемой игре участвуют два субъекта, назовем их «игрок A» и «игрок B». В каждом акте игры игрок A может принять одно из m решений, игрок B — одно из n. Если в некотором акте игры игрок A принимает i-е решение, а игрок B — j-е, то *в результате* этого акта игрок B «платит» игроку A величину s_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$; матрица $\{s_{ij}\}$ называется *платежной матрицей игры*, соответственно игра называется *матричной с нулевой суммой* [34].

В игре, рассматриваемой как *последовательность ее рандомизированных актов*, игроки принимают решения *случайно и взаимно независимо* с вероятностями $\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}},\ldots,\mathrm{pr}_m^{\mathrm{A}}$ и $\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}},\ldots,\mathrm{pr}_n^{\mathrm{B}}$ соответственно, поэтому случайными и взаимно независимыми будут и *результаты* последовательности рандомизированных актов игры, т. е. — «выигрыши» игрока A и «проигрыши» игрока B. При этом *ожидаемый* в каждом рандомизированном акте «выигрыш» игрока A и, соответственно, — «проигрыш» игрока B определится значением *платежной функции*

$$S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}},\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}}. \tag{6.2.1}$$

В формуле (6.2.1) распределения вероятностей $\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} = \{\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}},\ldots,\mathrm{pr}_m^{\mathrm{A}}\}$ и $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} = \{\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}},\ldots,\mathrm{pr}_n^{\mathrm{B}}\}$ *определяют так называемые рандомизированные стратегии принятия решений* игроками A и B соответственно,

$S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$ — *математическое ожидание* «выигрыша» A и «проигрыша» B в каждом рандомизированном акте, определенное выбранными ими стратегиями $\mathrm{pr^A}$ и $\mathrm{pr^B}$. При многократно и взаимно независимо повторяемых рандомизированных актах значение $S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$ прогнозирует средний «выигрыш» A и, соответственно, средний «проигрыш» B. Поэтому $S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$ для краткости называют *ожидаемым* «выигрышем» A и, соответственно, — «проигрышем» B.

Если $\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}}$ — частота i-го решения A и j-го решения B в k рандомизированных актах игры, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, то $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} s_{ij}\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п. н.}} S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$, ибо $\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п. н.}} \mathrm{pr}_i^\mathrm{A}\mathrm{pr}_j^\mathrm{B}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. В этой связи естественно следующее определение вероятностной модели рассматриваемой игры.

Определение 6.2.1. *Вероятностной моделью рандомизированного акта игры* назовем класс вероятностных пространств $(\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n), \mathrm{Pr})$, $\mathrm{Pr} \in \mathcal{P}r_m \times \mathcal{P}r_n$, и отображение $s_{\cdot\cdot}\colon (\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n)) \to (s_{\Omega_m\Omega_n}, \mathcal{P}(s_{\Omega_m\Omega_n}))$, определяющее *ожидаемый результат и цель рандомизированного акта игры*, где $\Omega_q = \{1, \ldots, q\}$, $q = m, n$, $\mathcal{P}r_m, \mathcal{P}r_n$ суть классы всех вероятностей $\mathrm{Pr^A}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega_m) \to [0,1]$, $\mathrm{Pr^B}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega_n) \to [0,1]$, $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pr^A} \times \mathrm{Pr^B}$.

Ожидаемым результатом рандомизированного акта игры назовем функцию $S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$, $\mathrm{pr^A} \in \mathcal{P}r^\mathrm{A} = \{\{\mathrm{pr}_1^\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{pr}_m^\mathrm{A}\}, \mathrm{pr}_i^\mathrm{A} = \mathrm{Pr^A}(\{i\}), i = 1, \ldots, m, \mathrm{Pr^A} \in \mathcal{P}r_m\}$, $\mathrm{pr^B} \in \mathcal{P}r^\mathrm{B} = \{\{\mathrm{pr}_1^\mathrm{B}, \ldots, \mathrm{pr}_n^\mathrm{B}\}, \mathrm{pr}_j^\mathrm{B} = \mathrm{Pr^B}(\{j\}), j = 1, \ldots, n, \mathrm{Pr^B} \in \mathcal{P}r_n\}$, определенную в (6.2.1).

В рандомизированном акте игры цели: игрока A — выбрать рандомизированную стратегию $\mathrm{pr^A} \in \mathcal{P}r^\mathrm{A}$, максимизирующую $S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$ в (6.2.1), игрока B — выбрать рандомизированную стратегию $\mathrm{pr^B} \in \mathcal{P}r^\mathrm{B}$, минимизирующую $S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$, определяют *цель рандомизированного акта игры.*

В модели рандомизированного акта игры *игроки* A *и* B *представлены независимыми случайными элементами*, обозначим их α и β, со значениями в Ω_m и Ω_n, пара (α, β) которых является канонической для вероятностного пространства $(\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n), \mathrm{Pr})$, то есть определяющей вероятность $\mathrm{Pr}(\alpha = i, \beta = j) = (\mathrm{Pr^A} \times \mathrm{Pr^B})(\{i, j\}) = \mathrm{Pr^A}(\{i\})\mathrm{Pr^B}(\{j\}) = \mathrm{pr}_i^\mathrm{A}\mathrm{pr}_j^\mathrm{B}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Вероятностной моделью последовательности k взаимно независимых рандомизированных актов игры назовем класс вероятностных пространств $(\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n), \mathrm{Pr})^K$, $\mathrm{Pr} \in \mathcal{P}r_m \times \mathcal{P}r_n$.

Заметим, что игрок A при стратегии $\mathrm{pr^A}$ *гарантирует* себе ожидаемый «выигрыш», равный $\min\limits_{\mathrm{pr^B} \in \mathcal{P}r^\mathrm{B}} S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B})$, и, следовательно, может рассчитывать на «выигрыш»

$$\max_{\mathrm{pr^A} \in \mathcal{P}r^\mathrm{A}} \min_{\mathrm{pr^B} \in \mathcal{P}r^\mathrm{B}} S(\mathrm{pr^A}, \mathrm{pr^B}) = v^*,$$

аналогично игрок В при стратегии pr^{B} *гарантирует* себе ожидаемый «проигрыш», равный $\max\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}\in\mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}},\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$, и, следовательно, может рассчитывать на «проигрыш»

$$\min_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}\in\mathcal{P}r^{\mathrm{B}}}\ \max_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}\in\mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}},\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = v_*;$$

очевидно, что $v_* \geqslant v^*$. Эти рассуждения составляют содержание «*принципа гарантированного результата*» — важнейшего принципа анализа матричной игры.

Если $v^* = v_* = S(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}},\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}) = v_0$, то v_0 называется *ценой игры*, а $\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$ и $\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}$ — *максиминной и минимаксной стратегиями* игроков А и В, для которых в согласии с принципом гарантированного результата [34]

$$\begin{gathered}
S(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}},\mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}}) \geqslant v_0,\ \mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}} = (0,\ldots,0,\overset{j}{1},0,\ldots,0),\ j=1,\ldots,n,\\
\text{(ожидаемый «выигрыш» А не меньше } v_0\text{)},\\
S(\mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}},\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}) \leqslant v_0,\ \mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}} = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0),\ i=1,\ldots,m,\\
\text{(ожидаемый «проигрыш» В не больше } v_0\text{)}.
\end{gathered} \tag{6.2.2}$$

Тройка $\{\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}},\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}},v_0\}$ называется *решением игры*, выполнение условий (6.2.2) — *целью игры*. В этом случае игрок А может заранее сообщить игроку В о выборе стратегии $\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$, но это не позволит В уменьшить ожидаемый «проигрыш» v_0, соответственно игрок А не сможет увеличить ожидаемый «выигрыш» v_0, если заранее узнает, что игрок В выберет стратегию $\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}$. Если при этом игроки согласны играть неопределенно долго, то им разумно «расплатиться», не начиная игры, т. е. игроку В «отдать» $S(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}},\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}})$ игроку А. Если они решат сыграть k актов, то согласно неравенству Хёфдинга (3.1.4) гл. 3 $\forall\varepsilon > 0$ $(\mathrm{Pr}^{\mathrm{A}}\times\mathrm{Pr}^{\mathrm{B}})^k(|\sum\limits_{i,j} s_{ij}\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}} - \sum\limits_{i,j} s_{ij}\mathrm{pr}_i^{*\mathrm{A}}\mathrm{pr}_{*j}^{\mathrm{B}}| > \varepsilon) \leqslant 2\exp(-2k\varepsilon^2/(\overline{s}-\underline{s})^2)$, где $\overline{s} = \max\limits_{i,j} s_{ij}$, $\underline{s} = \min\limits_{i,j} s_{ij}$. Если же игроки в качестве *правила остановки игры* примут условие $(\mathrm{Pr}^A \times \mathrm{Pr}^B)^k(|\sum\limits_{i,j} s_{ij}\nu^{(k)\mathrm{AB}} - \sum\limits_{i,j} s_{ij}\mathrm{pr}_i^{*\mathrm{A}}\mathrm{pr}_{*j}^{\mathrm{B}}| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1-\alpha$, то им придется разыграть $k \geqslant \dfrac{(\overline{s}-\underline{s})^2\ln(2/\alpha)}{2\varepsilon^2}$ актов.

6.2.2. Геометрическая интерпретация игры. Минимаксные и максиминные стратегии игроков В и А. Пусть игрок В выбрал стратегию pr^{B}. Тогда i-е решение игрока А влечет ожидаемый им «выигрыш»

$$q_i(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}}, i = 1,\ldots,m. \tag{6.2.3}$$

Обозначим $\mathcal{E}^m$ m-мерное евклидово пространство, точками которого будем считать

$$q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = (q_1(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}), \ldots, q_m(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})).$$

Каждая точка $q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$ *множества* $Q = \{q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \in \mathcal{E}^m,\ \mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}\}$ всех таких точек, где $\mathcal{P}r^{\mathrm{B}} = \{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} = \{\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}}, \ldots, \mathrm{pr}_n^{\mathrm{B}}\},\ \mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} \geqslant 0,\ \ldots,\ \mathrm{pr}_n^{\mathrm{B}} \geqslant 0,\ \mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + \ldots + \mathrm{pr}_n^{\mathrm{B}} = 1\}$, *представляет ожидаемый платежный результат рандомизированной стратегии* pr^{B} *игрока* B и тем самым *определяет ее качество*, в том числе (согласно (6.2.1)) и *при любой рандомизированной стратегии* pr^{A} *игрока* A.

В данном случае Q — выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник в $\mathcal{E}^m$, вершины которого суть $s_j = (s_{1j}, \ldots, s_{mj})$, $j = 1, \ldots, n$. Иначе говоря, Q — выпуклая оболочка $\mathrm{co}\{s_1, \ldots, s_n\} = \{s \in \mathcal{E}^m,\ s = \sum\limits_{j=1}^{n} s_j \mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}},\ \mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}} \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n,\ \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}} = 1\}$ множества $\{s_1, \ldots, s_n\}$, каждая точка $q \in Q$ *представляет некоторую стратегию* pr^{B}, $q = q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$, и позволяет полностью охарактеризовать ее качество.

Итак, пусть *игрок* B *выбрал стратегию* pr^{B} и тем самым выбрал точку $q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \in Q$. *Максимальный* «выигрыш» $v(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$, который в этом случае может получить игрок A, равен *значению максимальной координаты* $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = v(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$.

Цель игрока B — выбрать точку $q(\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}) \in Q$ *так, чтобы ее максимальная координата* $v_* = v(\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}})$ *оказалась не больше максимальной координаты любой другой точки* Q.

Рассмотрим множество $M_v = \{q \in \mathcal{E}^m,\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i \leqslant v\} = \{q \in \mathcal{E}^m,\ \|q\| \leqslant v\}$, $v \geqslant 0$, точек в $\mathcal{E}^m$, максимальная координата которых не больше v, и множество $Q \cap M_v$ точек, выбирая которые игрок B будет проигрывать не более v, см. рис. 6.2.1. Если v_* — минимальное значение v, при котором $Q \cap M_v \neq \varnothing$, то точки $q(\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}) \in Q \cap M_{v_*}$ представляют *минимаксные рандомизированные стратегии* $\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}$ *игрока* B, *каждая из которых является решением задачи* [1])

$$\min_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} \max_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = v_*, \tag{6.2.4}$$

где $\mathcal{P}r^{\mathrm{A}} = \{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} = \{\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}, \ldots, \mathrm{pr}_m^{\mathrm{A}}\}, \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}} \geqslant 0, \ldots, \mathrm{pr}_m^{\mathrm{A}} \geqslant 0, \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}} + \ldots + \mathrm{pr}_m^{\mathrm{A}} = 1\}$.

---

[1]) Если $\max\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = S(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}), \mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$, $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}$, то $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}$ $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}$ $S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \leqslant S(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}), \mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$ и, следовательно, $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}$ $S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}) \leqslant S(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}), \mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}) \overset{\triangle}{=} \min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}} S(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}), \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = v_*$. Поэтому в согласии с принципом гарантированного результата минимаксная стратегия $\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}$ *гарантирует* игроку B ожидаемый проигрыш, не превосходящий v_*, при любой стратегии pr^{A} игрока A.

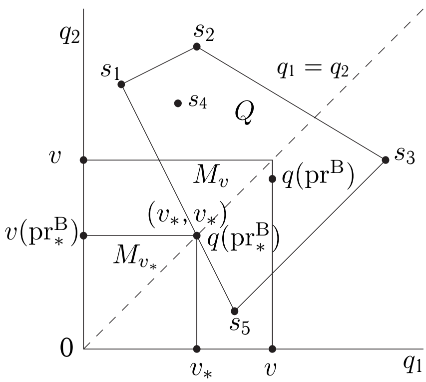


Рис. 6.2.1. Многогранник $Q = \mathrm{co}\{s_1, \ldots, s_5\}$; множество M_v точек $q \in \mathcal{E}^m$, максимальная координата которых не больше v, $m = 2$, $n = 5$; точка $q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_*)$ представляет единственную минимаксную рандомизированную стратегию $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_* = (\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_{*1}, 0, 0, 0, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_{*5})$ игрока B

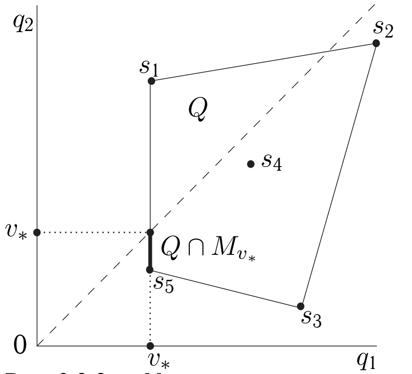


Рис. 6.2.2. Минимаксные стратегии игрока B представлены отрезком, соединяющим точки (v_*, v_*) и s_5. Каждая минимаксная стратегия игрока B $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_* = (\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_1, 0, 0, 0, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_5)$, где $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_1 \geqslant 0$, $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_5 \geqslant 0$, $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_1 + \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_5 = 1$, и $s_{25} \leqslant s_{21}\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_1 + s_{25}\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_5 = v \leqslant v_*$, откуда следует, что $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_{*1} = (v - s_{25})/(s_{21} - s_{25})$, $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_{*5} = (s_{21} - v)/(s_{21} - s_{25})$, $s_{25} \leqslant v \leqslant v_*$

На рис. 6.2.1 представлен случай, когда минимаксная стратегия игрока B одна, ср. с рис. 6.1.1, на рис. 6.2.2 показано, что их может быть бесконечно много. В любом случае ожидаемый «выигрыш» игрока A равен v_*.

Пусть теперь *игрок* A *выбирает стратегию* pr^{A}. В $\mathcal{E}^m$ *стратегию* pr^{A} *представляет линейная функция* $(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, q) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{pr}^{\mathrm{A}}_j q_j$, $q \in \mathcal{E}^m$, ее значение при $q = q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$, см. рис. 6.2.3

$$S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})) = S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = q_1(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}_1 + \ldots + q_m(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}_m = v(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \tag{6.2.5}$$

при любой стратегии $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}$ игрока B определяет ожидаемый выигрыш $v(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$ игрока A. Соответственно $\{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}, (\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})) = v\}$ — *множество стратегий игрока* B, *при которых стратегия* pr^{A} *обеспечивает игроку* A *ожидаемый «выигрыш», равный* v. Игрок B минимизирует ожидаемый «выигрыш» игрока A до значения $S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}})) = \min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$, выбрав (зависящую от $\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}$) стратегию $\underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}} = \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}})$. Согласно такому выбору $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}$

$\forall\,\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}\;\; S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \geqslant S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}))$ и, следовательно, $\forall\,\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}\;\; S(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \geqslant S(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}})) = \max\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}})) = \max\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} \min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = v^*$. Согласно последнему неравенству *максиминная стратегия* $\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$ игрока A гарантирует ему ожидаемый «выигрыш», не меньший v^*, при любой стратегии $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}$ игрока B.

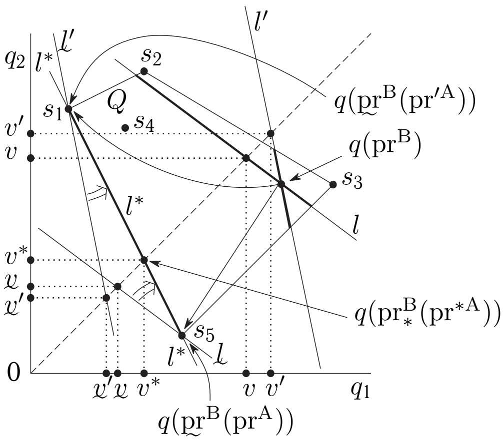


Рис. 6.2.3. Точка $q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$ представляет ожидаемый платежный результат игрока B, отвечающий выбранной им стратегии pr^{B}. Единственная максиминная стратегия игрока A показана прямой l^*, точка $q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_*(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}))$ представляет минимаксную рандомизированную стратегию игрока B

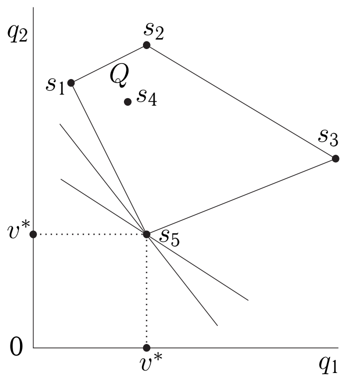


Рис. 6.2.4. Максиминных стратегий игрока A бесконечно много, вершина s_5 представляет минимаксную стратегию $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}}_5$ игрока B

На рис. 6.2.3 выделены отрезки $Q \cap l$ и $Q \cap l'$ прямых l и l' ($l = \{q \in \mathcal{R}^2,\ q_1\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}_1 + q_2\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}_2 = v\}$, $l' = \{q \in \mathcal{R}^2,\ q_1\mathrm{pr}'^{\mathrm{A}}_1 + q_2\mathrm{pr}'^{\mathrm{A}}_2 = v'\}$) представляющие множества стратегий игрока B, при которых ожидаемые «выигрыши» игрока A, отвечающие его стратегиям pr^{A} и $\mathrm{pr}'^{\mathrm{A}}$, равны соответственно v и v'. Игрок B минимизирует v, переместив точку $q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$ в вершину $q(\underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}))$ (s_5 на рис. 6.2.3), в которой значение $v = \underset{\sim}{v}$ минимально при стратегии pr^{A} игрока A. Если игрок A выбирает стратегию $\mathrm{pr}'^{\mathrm{A}}$, то игрок B минимизирует v', переместив точку $q(\mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$ в вершину $q(\underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}'^{\mathrm{A}}))$ (s_1 на рис. 6.2.3), в которой значение $v = v'$ минимально при стратегии $\mathrm{pr}'^{\mathrm{A}}$ игрока A. $\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$ — единственная максиминная стратегия A, максимизирующая его ожидаемый «выигрыш» $\underset{\sim}{v} \nearrow v^*$, $\underset{\sim}{v}' \nearrow v^*$ поворотами прямых $\underset{\sim}{l}$, $\underset{\sim}{l}'$, соответствующими переходам

$\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \to \mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$ $\mathrm{pr}'^{\mathrm{A}} \to \mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$, до совпадения $\underset{\sim}{l}$ и $\underset{\sim}{l}'$ с прямой l^*, представляющей $\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$. Игрок A определяет свою максиминную стратегию $\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}$ как решение задачи [1])

$$\max_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} \min_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = v^*. \qquad (6.2.6)$$

Если $\min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}))$, то $v^* = \max\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}})) = S(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}))$. На рис. 6.2.3 прямая l^*: $\mathrm{pr}_1^{*\mathrm{A}} q_1 + \ldots + \mathrm{pr}_m^{*\mathrm{A}} q_m = v^*$, $q \in \mathcal{E}^m$ разделяет множества Q и M_{v^*}, очевидно $v_* = v^* = v_0$ — цена игры.

6.2.3. Интерпретация игры в терминах формализма линейного программирования. Задачи (6.2.4), (6.2.6) эквивалентны [14] соответственно следующим (двойственным) задачам линейного программирования [2]):

$$\max\{v | S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \geqslant v, \ \forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}\}, \qquad (6.2.7)$$

$$\min\{v | S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \leqslant v, \ \forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}\}. \qquad (6.2.8)$$

Задачи (6.2.7), (6.2.8), очевидно, разрешимы, и если $(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}, v^*)$, $(\mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}, v_*)$ — их решения, то, как известно [3]), $v^* = v_* = v_0$ и при этом $(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}, v_0)$ — решение игры, см. (6.2.2).

Проверим, например, эквивалентность задач (6.2.4) и (6.2.7). Пусть $(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}, \widetilde{v})$ — решение задачи (6.2.7), т. е. $S(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \geqslant \widetilde{v}$ $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}$. Тогда $\widetilde{v} \leqslant \min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} S(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \leqslant \max\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} \min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = v^*$, т. е. $\widetilde{v} \leqslant v^*$. С другой стороны, так как $\{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}, \ \forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}\ S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) > \widetilde{v}\} = \varnothing$, то $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}$ $\min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \leqslant \widetilde{v}$ и поэтому $v^* = \max\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}} \min\limits_{\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \leqslant \widetilde{v}$. Следовательно, $\widetilde{v} = v^*$. Если $\underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}$ — любое значение, на котором $S(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}}) = \widetilde{v}$, то $(\widetilde{\mathrm{pr}}^{\mathrm{A}}, \underset{\sim}{\mathrm{pr}}^{\mathrm{B}})$ — решение задачи (6.2.4), а если $(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{pr}_*^{\mathrm{B}}, v_0)$ — решение задачи (6.2.4), то $(\mathrm{pr}^{*\mathrm{A}}, v_0)$ — решение задачи (6.2.7).

Замечание 6.2.1. Для вероятностных моделей некоторых игр более естественна интерпретация значения s_{ij} как *вероятности* «выигрыша» игрока A, принявшего i-е решение, и «проигрыша» игрока B, принявшего j-е решение, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Для таких игр игроки определяют класс вероятностных пространств $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}^{(i,j)})$,

---

[1]) В замечании 6.1.5 «активная, конфликтующая с субъектом система» — игрок A, «субъект» — игрок B, см. рис. 6.1.1, 6.1.3.

[2]) Условия $S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \geqslant v$ $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}$, $S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \leqslant v$ $\forall\, \mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}$ эквивалентны соответственно условиям $S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}}) \geqslant v$ $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$, $S(\mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) \leqslant v\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$, см. (6.2.2).

[3]) Теорема двойственности для задач линейного программирования [14].

$(i,j) \in \Omega_m \times \Omega_n$, в которых Ω — пространство «элементарных выигрышей» игрока A («элементарных проигрышей» игрока B), $\mathcal{A}$ — σ-алгебра «выигрышей» A («проигрышей» B), $\mathrm{Pr}^{(\cdot,\cdot)}(\cdot)$ — переходная вероятность для пространств $(\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n))$ и $(\Omega, \mathcal{A})$. Соответственно $s_{ij} = \mathrm{Pr}^{(i,j)}(W)$ — вероятность «выигрыша» $W \in \mathcal{A}$ игрока A, сопутствующего его i-му решению, и «проигрыша» $W \in \mathcal{A}$ игрока B, сопутствующего его j-му решению, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, а в (6.2.1)

$$S(\mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Pr}^{(i,j)}(W) \mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}} \mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}} = \mathrm{Pr}(W | \mathrm{pr}^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}^{\mathrm{B}})$$

— вероятность «выигрыша» игрока A, использующего рандомизированную стратегию $\mathrm{pr}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{A}}$, и «проигрыша» игрока B, использующего рандомизированную стратегию $\mathrm{pr}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}r^{\mathrm{B}}$.

Подобная интерпретация «платежной матрицы» характерна для рассматриваемых в § 6.5 возможностных моделей матричных игр.

6.3. Вероятностная модель. Оценивание

Пусть задано совместное относительно меры $\mu \times \nu$ распределение $\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$ пары случайных элементов ξ и η, принимающих значения в X и Y соответственно, причем значения ξ наблюдаемы, а значения η — нет. В задаче оценивания η на основе наблюдения ξ требуется определить случайный элемент $\widehat{\eta} = \widehat{y}(\xi)$ как оценку η, причем так, чтобы математическое ожидание потерь, обусловленных погрешностью оценивания, было минимальным на множестве правил $\widehat{y}(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$ оценивания:

$$L(\widehat{y}(\cdot)) = \mathsf{E} l(\eta, \widehat{y}(\xi)) = \int\limits_{X \times Y} l(y, \widehat{y}(x)) \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y) \mu(dx) \nu(dy) \sim \min_{\widehat{y}(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}}. \tag{6.3.1}$$

Здесь $l(y, \widehat{y})$ — потери, обусловленные использованием значения $\widehat{y} \in \widehat{Y}$ вместо $y \in Y$, $\widehat{Y}$ — множество элементов, используемых для приближения элементов [1] $y \in Y$.

Правило оценивания $\widehat{y}^*(\cdot)$, удовлетворяющее условию (6.3.1), назовем байесовским, как и соответствующее значение $L(\widehat{y}^*(\cdot))$ риска (6.3.1).

[1] Математические требования к качеству функций $\widehat{y}(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$ и $l(\cdot,\cdot)\colon Y \times \widehat{Y} \to [0, \infty)$, обеспечивающие корректность постановки задачи оценивания (6.3.1), см., например, в [11, 65, 147].

Оптимальное правило $\widehat{y}^*(\cdot)$ может быть определено значениями $\widehat{y}^*(x)$ в каждой точке $x \in X$ из условия

$$\int\limits_Y l(y, \widehat{y}^*(x))\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy) = \min_{\widehat{y}\in\widehat{Y}} \int\limits_Y l(y,\widehat{y})\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy). \tag{6.3.2}$$

Например, если в (6.3.2) $Y = \widehat{Y} = \mathcal{R}^n$, $\nu(dy) = dy$ и $l(y,\widehat{y}) = 1 - \delta(y - \widehat{y})$, где $\delta(\cdot)$ — δ-функция [1)], то

$$\int\limits_Y l(y,\widehat{y})\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)dy = \mathrm{pr}^{\xi}(x) - \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,\widehat{y})$$

и $\widehat{y}^*(x) = \operatorname*{argmax}\limits_{\widehat{y}\in\widehat{Y}} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,\widehat{y})$, $x \in X$, ср. с (6.1.7*). В этом случае

$$\mathrm{Pr}\mathsf{E}(\widehat{y}^*(\cdot)) = \int\limits_X \left(\mathrm{pr}^{\xi}(x) - \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,\widehat{y}^*(x))\right)\mu(dx) = 1 - \int\limits_X \max_{y\in\widehat{Y}} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\mu(dx) \tag{6.3.3}$$

— байесовский риск, определяющий *вероятность ошибки оценивания*.

Если $X = Y = \widehat{Y} = \mathcal{R}^n$, $l(y,\widehat{y}) = ||y - \widehat{y}||^2$ — квадрат евклидовой нормы в $\mathcal{R}^n$, то согласно (6.3.2) для наилучшей в среднем квадратичном оценки $\widehat{y}^*(\cdot)$

$$\int\limits_Y ||y - \widehat{y}^*(x)||^2\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy) \triangleq \min_{\widehat{y}\in\widehat{Y}} \int\limits_Y ||y-\widehat{y}||^2\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy) =$$
$$= \min_{\widehat{y}\in\widehat{Y}} \int\limits_Y (||y||^2 - 2(y,\widehat{y}) + ||\widehat{y}||^2)\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy),$$

где минимум достигается на единственном $\widehat{y} \in \mathcal{R}^n$, удовлетворяющем условию $\int\limits_Y (y-\widehat{y})\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy) = 0$, согласно которому

$$\widehat{y}^* = \widehat{y}^*(x) = \int\limits_Y y\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy) \Bigg/ \int\limits_Y \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy) = \widehat{\mathrm{E}}(\eta|\xi = x)$$

— значение условного математического ожидания η при $\xi = x \in X$.

В общем случае оптимальное правило $\widehat{y}^*(\cdot)$ оценивания, определенное условием (6.3.1), не единственное. Пусть для каждого $x \in X$ $\widehat{Y}^*(x) \subset \widehat{Y}$ — множество всех решений задачи (6.3.2). Тогда любое

[1)] Обобщенная функция, удовлетворяющая условию: для любой непрерывной функции $f(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^1$ $\int\limits_Y f(y)\delta(y-\widehat{y})dy = f(\widehat{y})$.

оптимальное правило оценивания можно определить как функцию $\widehat{y}^*(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$, удовлетворяющую условию $\widehat{y}^*(x) \in \widehat{Y}^*(x)$, $x \in X$.

В этой ситуации можно воспользоваться рандомизированным правилом оценивания, которое определим по схеме, аналогичной принятой в § 6.1.3. А именно, *рандомизированным правилом оценивания назовем переходную вероятность для пары измеримых пространств* $(X, \sigma(X))$ *и* $(\widehat{Y}, \sigma(\widehat{Y}))$, *т. е. функцию* $\Pi(\cdot|\cdot)$ *на* $\sigma(\widehat{Y}) \times X$, *которая при* $\widehat{B} \in \sigma(\widehat{Y})$ *есть* $\sigma(X)$-*измеримая функция* $\Pi(\widehat{B}|\cdot)\colon X \to [0,1]$, *и — вероятность* $\Pi(\cdot|x)\colon \sigma(\widehat{Y}) \to [0,1]$ *при* $x \in X$, *см.* [4]. Если наблюдается $\xi = x$, то оценка $\widehat{\eta} = \widehat{\eta}(x)$ случайного элемента η контролируется вероятностью $\Pi(\cdot|x)$ на $(\widehat{Y}, \sigma(\widehat{Y}))$, которая должна удовлетворять условию $\Pi(\widehat{Y}^*(x)|x) = 1$, $\Pi(\widehat{Y} \setminus \widehat{Y}^*(x)|x) = 0$, $x \in X$.

Если для каждого $x \in X$ вероятность $\Pi(\cdot|x)$ задана плотностью $\pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x)$, $\widehat{y} \in \widehat{Y}$, относительно некоторой меры $\widehat{\nu}$ на $(\widehat{Y}, \sigma(\widehat{Y}))$, то распределение $\pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\cdot|x)$, $x \in X$, может быть найдено непосредственно, если вместо выражения $L(\widehat{y}(\cdot))$ (6.3.1) использовать

$$L(\pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\cdot|\cdot)) = \int\limits_{X \times Y \times \widehat{Y}} l(y, \widehat{y}) \pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x) \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y) \mu(dx) \nu(dy) \widehat{\nu}(d\widehat{y}), \quad (6.3.4)$$

определить

$$S_{\widehat{y}}(x) = \int l(y, \widehat{y}) \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y) \nu(dy) \quad (6.3.5)$$

и для каждого $x \in X$ решить задачу

$$\int\limits_{\widehat{Y}} S_{\widehat{y}}(x) \pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x) \widehat{\nu}(d\widehat{y}) \sim \min_{\pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\cdot|x)}. \quad (6.3.6)$$

Пусть $\widehat{Y}_x$ — множество тех $\widehat{y} \in \widehat{Y}$, для которых $S_{\widehat{y}}(x) = \min\limits_{\widehat{y}' \in \widehat{Y}} S_{\widehat{y}'}(x)$, $x \in X$. Определим плотность $\pi^{*\,\widehat{\eta}|\xi}(\cdot|x)$ переходной вероятности так, чтобы

$$\begin{gathered} \pi^{*\,\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x) \geqslant 0, \ \widehat{y} \in \widehat{Y}_x, \quad \pi^{*\,\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x) = 0, \ \widehat{y} \in \widehat{Y} \setminus \widehat{Y}_x, \\ \int\limits_{\widehat{Y}} \pi^{*\,\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x) \widehat{\nu}(d\widehat{y}) = 1, \ \ x \in X. \end{gathered} \quad (6.3.7)$$

Переходную вероятность $\Pi^*(\cdot|\cdot)$, так же как и ее плотность $\pi^{*\,\widehat{\eta}|\xi}$, будем называть *рандомизированным байесовским правилом оценивания*.

Суммируем результаты.

Теорема 6.3.1. *Любое решение задачи* (6.3.6), *определяющее рандомизированное байесовское правило оценивания* $\pi^{*\,\widehat{\eta}|\xi}(\cdot|\cdot)\colon \widehat{Y} \times X \to$ $\to [0, \infty)$, *определяется условиями* (6.3.7). *Любое нерандомизированное байесовское правило оценивания* $\widehat{y}^*(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$ *определяется* *условием* $\widehat{y}^*(x) \in S(x) = \{\widehat{y} \in \widehat{Y},\ S_{\widehat{y}}(x) = \min_{\widehat{y}' \in \widehat{Y}} S_{\widehat{y}'}(x)\}$, $x \in X$. *В любом случае байесовский риск* $L(\pi^{*\,\widehat{\eta}|\xi}(\cdot|\cdot)) = L(\widehat{y}^*(\cdot)) = \int\limits_X S(x)\mu(dx)$.

6.3.1. Связь между байесовским оцениванием и байесовской идентификацией. Байесовскую задачу идентификации можно рассматривать как частный случай задачи байесовского оценивания.

Зададим в задаче оценивания случайного элемента η разбиение пространства его значений $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{q} Y_i$ так, чтобы в пределах каждого Y_i значения $y \in Y_i$ можно было «считать неразличимыми». Более того, пусть $\widehat{Y} = \bigcup\limits_{j=1}^{q} \widehat{Y}_j$ — такое разбиение, что ошибка, обусловленная использованием $\widehat{y} \in \widehat{Y}_j$ вместо $y \in Y_i$, зависит лишь от i и j, а не от конкретных $y \in Y_i$ и $\widehat{y} \in \widehat{Y}_j$, $i, j = 1, \ldots, q$. Согласно этому соглашению определим величину потерь при оценивании равенствами

$$l_{ij} = l(y, \widehat{y}),\ y \in Y_i,\ \widehat{y} \in \widehat{Y}_j,\ i, j = 1, \ldots, q. \tag{6.3.8}$$

Зададим произвольное отображение $\widehat{y}(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$.

Лемма 6.3.1. *Для любого отображения* $\widehat{y}(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$ *такого, что* $\widehat{y}(X) = \widehat{Y}$, *разбиение* $\widehat{Y} = \bigcup\limits_{j=1}^{q} \widehat{Y}_j$ *индуцирует разбиение* $X = \bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j$, *в котором*

$$X_j = \{x \in X,\ \widehat{y}(x) \in \widehat{Y}_j\},\ j = 1, \ldots, q. \tag{6.3.9}$$

Доказательство. Покажем, что множества (6.3.9) образуют разбиение X, т. е. что $X_i \bigcap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, q$, и $\bigcup\limits_{j=1}^{q} X_j = X$. Действительно, если бы $x \in X_i \bigcap X_j \neq \varnothing$, то $\widehat{y}(x) \in \widehat{Y}_i \bigcap \widehat{Y}_j \neq \varnothing$, что невозможно. Пусть $x \in X$, но $\forall\, j\ \ x \notin X_j$, тогда $\forall\, j\ \ \widehat{y}(x) \notin \widehat{Y}_j$, что опять-таки невозможно. ■

При оптимальном оценивании в случае функции $l(y, \widehat{y})$, $y \in Y$, $\widehat{y} \in \widehat{Y}$, определенной в (6.3.8), задача (6.3.2) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{q} l_{ij} \int\limits_{Y_i} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x, y)\nu(dy)\overline{\chi}_j(\overline{\widehat{y}}) \sim \min_{\overline{\widehat{y}} \in \widehat{Y}}, \tag{6.3.10}$$

где $\overline{\chi}_j(\cdot)$ — индикаторная функция множества $\widehat{Y}_j$, $j = 1, \ldots, q$, или, что эквивалентно задаче (6.3.10), следует определить индекс j из условия

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^{q} l_{ij} \int\limits_{Y_i} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x, y)\nu(dy) \sim \min_j, \tag{6.3.11}$$

рассмотренного ранее в задаче идентификации, см. (6.1.13).

Пусть $J(x)$ — множество тех $j \in \{1, \ldots, q\}$, при которых $S_j(x)$ достигает минимума в задаче (6.3.11) при некотором $x \in X$. Тогда значение $\widehat{y}^*(x)$ искомого в задаче (6.3.10) правила $\widehat{y}^*(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$ должно удовлетворять условию

$$\widehat{y}^*(x) \in \widehat{Y}_{J(x)} = \bigcup_{j \in J(x)} \widehat{Y}_j, \quad x \in X, \tag{6.3.12}$$

а в пределах множества $\widehat{Y}_{J(x)}$ может быть любым. С другой стороны, если $\{X_j^*\}$ — любое разбиение X, удовлетворяющее условию $X_j^* \subset \{x \in X,\ S_j(x) = S(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} S_i(x)\}$ и определяющее правило идентификации, см. (6.1.9), то этому условию удовлетворяет разбиение

$$X_j^* \triangleq \left\{x \in X,\ \widehat{y}^*(x) \in \widehat{Y}_j\right\}, \quad j = 1, \ldots, q, \tag{6.3.13}$$

в котором $\widehat{y}^*(x)$ — какое-либо правило оценивания, удовлетворяющее условию (6.3.12). Согласно (6.3.13) включения $x \in X_j^*$ и $\widehat{y}^*(x) \in \widehat{Y}_j$, $j = 1, \ldots, q$, эквивалентны и определяют связь между нерандомизированными правилами идентификации и оценивания.

Для построения рандомизированного правила определим множество $J(x) = \{i_1, \ldots, i_t\}$ решений задачи (6.3.11) и соответствующее распределение вероятностей (см. Теорему 6.1.2)

$$\begin{aligned} &\pi_{i_1}(x) \geqslant 0, \ldots, \pi_{i_t}(x) \geqslant 0 = \pi_{i_{t+1}}(x) = \ldots = \pi_{i_q}(x), \\ &\pi_{i_1}(x) + \ldots + \pi_{i_t}(x) = 1. \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

Тогда рандомизированное правило оценивания ставит в соответствие наблюдению $\xi = x$ с вероятностью $\pi_{i_s}(x)$ любую точку $\widehat{y}^*(x) \in \widehat{Y}_{i_s}$ и согласно условию (6.3.13) — множество $X_{i_s}^*$, $s = 1, \ldots, t$.

Рассматриваемую задачу оценивания можно интерпретировать и как задачу выбора одной из альтернатив $\eta \in Y_i$, $i = 1, \ldots, q$, по наблюдению $\xi = x \in X$. В таком случае вместо задачи (6.3.10) следует решить задачу определения оптимального разбиения $X_\cdot^*$ согласно требованию

$$\sum_{i,j} l_{ij} \int\limits_{X_j \times Y_i} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x, y) \overline{\chi}_j(\widehat{y}^*(x)) \mu(dx) \nu(dy) \sim \min_{X_\cdot}. \tag{6.3.15}$$

Решением задачи (6.3.15) является любое разбиение $X_\cdot^*$, удовлетворяющее условию (6.3.13), в качестве $\widehat{y}^*(\cdot)\colon X \to \widehat{Y}$ можно выбрать любую функцию, удовлетворяющую условию (6.3.12). Рандомизированное правило идентификации и в этом случае определяется условием (6.3.14).

Замечание 6.3.1. Согласно условиям (6.3.8), определившим матрицу потерь l_{ij}, выполним интегрирование по $\nu(dy)\widehat{\nu}(d\widehat{y})$ в правой части равенства (6.3.4). Это даст следующие выражения для ожидаемых потерь, идентичные выражениям (6.1.6), (6.1.6*):

$$L(\pi(\cdot)) = \int\limits_X \sum_{k,j=1}^{q} l_{kj}\pi_j(x)\mathrm{pr}_k(x)r_k\mu(dx) = \\ = \int\limits_X \sum_{j=1}^{q} \pi_j(x)S_j(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^{q} L_k(\pi(\cdot))r_k, \tag{6.3.4*}$$

где $S_j = \sum\limits_{k=1}^{q} l_{kj}\mathrm{pr}_k(x)r_k;\;\; L_k(\pi(\cdot)) = \int\limits_X \sum\limits_{j=1}^{q} l_{kj}\pi_j(x)\mathrm{pr}_k(x)\mu(dx);$

$$\mathrm{pr}_k(x) = \mathrm{pr}^{\xi|\eta}(x|\eta\in Y_k) = \int\limits_{Y_k} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\nu(dy)\Big/\mathrm{Pr}^{\eta}(\eta\in Y_k);$$

$$r_k = \mathrm{Pr}^{\eta}(\eta\in Y_k) = \\ = \int\limits_{X\times Y_k} \mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)\mu(dx)\nu(dy);\;\; \pi(x) = \big(\pi_1(x),\ldots,\pi_q(x)\big),$$

$$\pi_j(x) = \Pi(\widehat{Y}_j|x) = \int\limits_{\widehat{Y}_j} \pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x)\widehat{\nu}(d\widehat{y}),\; j,k=1,\ldots,q,\; x\in X.$$

6.3.2. Байесовский принцип. Байесовский принцип рассмотрим на примере задачи оценивания. Если наблюдение за системой невозможно [1]), то риск потерь, сопутствующих правилу оценивания $\pi^{\widehat{\eta}}$, основанному лишь на априорном распределении $\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)$ оцениваемого случайного элемента η,

$$L(\pi^{\widehat{\eta}}) = \int\limits_{Y\times\widehat{Y}} l(y,\widehat{y})\pi^{\widehat{\eta}}(\widehat{y})\mathrm{pr}^{\eta}(y)\nu(dy)\widehat{\nu}(d\widehat{y}) = L(\pi^{\widehat{\eta}}(\cdot);\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)). \tag{6.3.16}$$

[1]) Если в (6.3.4) $\mathrm{pr}^{\xi,\eta}(x,y)$ представить в виде $\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(y|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x)$, $x\in X$, $y\in Y$, где $\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)$ — плотность условного, при условии $\xi=x$, распределения η, то в случае независимости ξ и η $\mathrm{mod}\,(\mu\times\nu)$ $\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(y|x)=\mathrm{pr}^{\eta}(y)$, $x\in X$, $y\in Y$, и в (6.3.4) $L(\pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\cdot|\cdot)) = \int\limits_{X\times Y\times\widehat{Y}} l(y,\widehat{y})\pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x)\mathrm{pr}^{\eta}(y)\mu(dx)\nu(dy)\widehat{\nu}(d\widehat{y}) = \int\limits_{Y\times\widehat{Y}} l(y,\widehat{y})\pi^{\widehat{\eta}}(\widehat{y})\mathrm{pr}^{\eta}(y)\nu(dy)\widehat{\nu}(d\widehat{y})$, где $\pi^{\widehat{\eta}}(\widehat{y}) = \int\limits_X \pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x)\mu(dx)$. Следовательно, если ξ и η независимы, то наблюдение за системой бесполезно, а оценка будет такой же, как если бы оно было невозможно.

Соответственно вместо выражения (6.3.5), изменив обозначения, чтобы выделить зависимость от $\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)$, найдем

$$C_{\widehat{y}}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) = \int\limits_{Y} l(y,\widehat{y})\mathrm{pr}^{\eta}(y)\nu(dy),\ \widehat{y}\in\widehat{Y}, \tag{6.3.17}$$

а вместо задачи (6.3.6) получим

$$L(\pi^{\widehat{\eta}}(\cdot);\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) = \int\limits_{\widehat{Y}} C_{\widehat{y}}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot))\pi^{\widehat{\eta}}(\widehat{y})\widehat{\nu}(d\widehat{y}) \sim \min_{\pi^{\widehat{\eta}}(\cdot)}. \tag{6.3.18}$$

Для решения этой задачи определим

$$C(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) = \min_{\widehat{y}\in\widehat{Y}} C_{\widehat{y}}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) \tag{6.3.19}$$

и

$$\widehat{Y}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) = \big\{\widehat{y}\in\widehat{Y}, C_{\widehat{y}}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) = C(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot))\big\}. \tag{6.3.20}$$

Тогда любое правило оценивания $\pi^{*\,\widehat{\eta}}(\cdot)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}\pi^{*\,\widehat{\eta}}(\widehat{y}) \geqslant 0,\ \widehat{y}\in\widehat{Y}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot));\quad \pi^{*\,\widehat{\eta}}(\widehat{y}) = 0,\ \widehat{y}\in\widehat{Y}\setminus\widehat{Y}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)),\\ \int\limits_{\widehat{Y}}\pi^{*\,\widehat{\eta}}(\widehat{y})\widehat{\nu}(d\widehat{y}) = 1,\end{gathered} \tag{6.3.21}$$

согласно которым [1])

$$\pi^{*\,\widehat{\eta}}(\widehat{y}) = \pi(\widehat{y};\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)),\ \widehat{y}\in\widehat{Y}, \tag{6.3.22}$$

является решением задачи (6.3.18) и соответствующий риск (6.3.16)

$$L(\pi^{*\,\widehat{\eta}}(\cdot);\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) = C(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) = \min_{\widehat{y}\in\widehat{Y}} C_{\widehat{y}}(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)) \tag{6.3.23}$$

при прочих равных условиях является функцией распределения $\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)$.

В общем случае, когда возможно наблюдение за системой, перепишем выражение (6.3.4) для риска следующим образом:

$$\begin{aligned}L(\pi^{\widehat{\eta}|\xi}) &= \int\limits_{X\times Y\times\widehat{Y}} l(y,\widehat{y})\pi^{\widehat{\eta}|\xi}(\widehat{y}|x)\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(y|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x)\mu(dx)\nu(dy)\widehat{\nu}(d\widehat{y}) =\\ &= \int\limits_{X\times Y\times\widehat{Y}} l(y,\widehat{y})\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\widehat{y},x)\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(y|x)\mu(dx)\nu(dy)\widehat{\nu}(d\widehat{y}) =\\ &= L\big(\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot);\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|\cdot)\big)\end{aligned} \tag{6.3.16*}$$

и определим рандомизированное правило оценивания как распределение $\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot)$. Оптимальное рандомизированное правило теперь опре-

---

[1]) С точностью до произвола в определении $\pi^{*\,\widehat{\eta}}(\cdot)$, допускаемого условиями (6.3.21).

делится решением $\pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot)$ задачи

$$L\big(\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot);\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|\cdot)\big)=\int\limits_{X\times\widehat{Y}} C_{\widehat{y}}(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x))\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\widehat{y},x)\mu(dx)\widehat{\nu}(d\widehat{y})\sim\min_{\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot)}, \tag{6.3.18*}$$

где

$$C_{\widehat{y}}(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x))=\int\limits_{Y} l(y,\widehat{y})\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(y|x)\nu(dy),\ \widehat{y}\in\widehat{Y},\ x\in X. \tag{6.3.17*}$$

Для решения задачи (6.3.18*) достаточно для каждого $x\in X$ решить задачу на минимум

$$L\big(\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\cdot,x);\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)=\int\limits_{\widehat{Y}} C_{\widehat{y}}\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\widehat{y},x)\widehat{\nu}(d\widehat{y})\sim\min_{\pi^{\widehat{\eta},\xi}(\cdot,x)}. \tag{6.3.18**}$$

Чтобы охарактеризовать решения задачи (6.3.18**), введем множество

$$\widehat{Y}\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)=\Big\{\widehat{y}\in\widehat{Y},\ C_{\widehat{y}}\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)=\min_{\widehat{y}'\in\widehat{Y}} C_{\widehat{y}'}\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)= \\ =C\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)\Big\}. \tag{6.3.20*}$$

Любое распределение $\pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющее условиям

$$\forall x\in X\ \ \pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\widehat{y},x)\geqslant 0,\ \widehat{y}\in\widehat{Y}\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big);\ \pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\widehat{y},x)=0, \\ \widehat{y}\in\widehat{Y}\setminus\widehat{Y}\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big),\ \int\limits_{\widehat{Y}}\pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\widehat{y},x)\widehat{\nu}(d\widehat{y})=\mathrm{pr}^{\xi}(x), \tag{6.3.21*}$$

является решением задачи (6.3.18**).

С точностью до произвола, допускаемого условиями (6.3.21*),

$$\pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\widehat{y},x)=\pi\big(\widehat{y};\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big),\ \widehat{y}\in\widehat{Y},\ x\in X. \tag{6.3.22*}$$

При этом для каждого наблюдения $\xi=x\in X$ риск ошибки

$$L\big(\pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\cdot,x);\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)=C\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)\mathrm{pr}^{\xi}(x) \tag{6.3.23*}$$

и, соответственно, байесовский риск (6.3.16*)

$$L\big(\pi^{*\,\widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot);\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|\cdot)\big)=\int\limits_{X} C\big(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)\big)\mathrm{pr}^{\xi}(x)\mu(dx)=\mathsf{E}C(\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|\xi)). \tag{6.3.24}$$

Сравнив соотношения (6.3.16–6.3.23) соответственно с (6.3.16*–6.3.23*), получим

Байесовский принцип. *Пусть* $\pi^{*\,\widehat{\eta}}(\widehat{y})=\pi(\widehat{y},\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot))$, $\widehat{y}\in\widehat{Y}$, *— решение* (6.3.22) *задачи* (6.3.18). *Тогда эта же функция* $\pi(\widehat{y},\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot))$,

$\widehat{y} \in \widehat{Y}$, *определит и решение* $\pi^{*\ \widehat{\eta},\xi}(\cdot, x)$ (6.3.22*) *задачи* (6.3.18**), *если в* (6.3.22) $\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)$ *заменить на* $\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)$, *а именно, как и записано в* (6.3.22*), $\pi^{*\ \widehat{\eta},\xi}(\widehat{y}, x) = \pi(\widehat{y}; \mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x))$, $\widehat{y} \in \widehat{Y}$, $x \in X$. *Заменив в* (6.3.23) $\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot)$ *на* $\mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|x)$, *получим риск* (6.3.23*) *при наблюдении* $\xi = x$, *а байесовский риск* (6.3.24) *получится усреднением риска* (6.3.23*) *по распределению* ξ.

Нетрудно убедиться, что байесовские риски: (6.3.24) и приведенный в теореме 6.3.1 — совпадают, т. е.

$$L\big(\pi^{*\ \widehat{\eta},\xi}(\cdot,\cdot); \mathrm{pr}^{\eta|\xi}(\cdot|\cdot)\big) = L\big(\pi^{*\ \widehat{\eta}|\xi}(\cdot|\cdot)\big) = \int\limits_X \min_{\widehat{y} \in \widehat{Y}} S_{\widehat{y}}(x)\mu(dx).$$

6.3.3. О критерии качества решения, основанном на условии минимума вероятности потерь. Прежде чем приступить к изучению нечетких решений, рассмотрим еще одну точку зрения на критерий качества статистического решения. Согласно этой точке зрения, например, в задаче идентификации состояния системы значение $l_{k,d}$ следует понимать как определенную субъектом, принимающим решения, *вероятность* $\mathrm{pr} l_{k,d}$ потерь, неудач и т. п. неприятностей, обусловленных режимом эксплуатации системы, свойственным ее состоянию «d», в то время как на самом деле система находится в состоянии «k», $k, d = 1, \ldots, q$. Формально эту точку зрения удобно представить следующим образом: $\mathrm{pr} l_{k,d}$ — *вероятность покрытия точки* (k, d) *случайным множеством* Λ, *определенном на некотором вероятностном пространстве и принимающим значения в* $\mathcal{P}\big(\{1, \ldots, q\} \times \{1, \ldots, q\}\big)$, т. е. [1] $\mathrm{pr} l_{k,d} = \mathrm{Pr}\big((k, d) \in \Lambda\big)$, $(k, d) \in \{1, \ldots, q\} \times \{1, \ldots, q\}$.

Если $\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x, k)$, $x \in X$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, — совместное распределение вероятностей наблюдений за системой и ее состояний, $\pi^{\delta|\xi}(d|x)$, $d \in \{1, \ldots, q\}$, $x \in X$, — переходная вероятность, определяющая рандомизированное правило идентификации, согласно которому $\pi^{\delta|\xi}(d|x)$ — вероятность решения $\delta = d$ о состоянии системы, принятого на основании наблюдения $\xi = x$, то

$$\mathrm{pr}^{\delta,\varkappa}(d, k) = \int\limits_X \pi^{\delta|\xi}(d|x)\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x, k)\mu(dx),\ d \in \{1, \ldots, q\},\ k \in \{1, \ldots, q\},$$

— совместное распределение вероятностей решений о состоянии системы, принимаемых согласно правилу $\pi^{\delta|\xi}$ на основании наблюдения за системой, и ее действительных состояний. А поскольку случайное множество Λ и пару случайных величин $(\delta, \varkappa)$ естественно считать

[1] Pr и Λ определяются условиями эксплуатации системы.

независимыми, то

$$\Pr \mathrm{L}(\pi^{\delta|\xi}) = \sum_{k,d=1}^{q} \mathrm{pr} l_{k,d} \mathrm{pr}^{\delta,\varkappa}(d,k) = \sum_{k,d=1}^{q} \mathrm{pr} l_{k,d} \int_X \pi^{\delta|\xi}(d|x) \mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x,k)\mu(dx) \tag{6.3.25}$$

— *вероятность потерь*, сопутствующих правилу идентификации $\pi^{\delta|\xi}$, которое естественно определить из условия

$$\Pr \mathrm{L}(\pi^{\delta|\xi}) \sim \min_{\pi^{\delta|\xi}}. \tag{6.3.26}$$

Подобный критерий будет использован при построении оптимальных нечетких решений.

В некоторых задачах идентификации более естественна другая формальная интерпретация значений $l_{k,d}$, $(k,d) \in \{1,\ldots,q\}^2$ как вероятностей потерь, согласно которой субъект, принимающий решения (с. п. р.) *о состоянии системы, определяет семейство дискретных вероятностных пространств (потерь)* $(\Lambda, \mathcal{P}(\Lambda), \mathrm{Pr}^{(k,d)})$, $(k,d) \in \{1,\ldots,q\}^2$, *в которых* Λ — *пространство «элементарных потерь»* [1]), *отображение* $\mathrm{Pr}^{(\cdot,\cdot)}(\cdot)\colon \{1,\ldots,q\}^2 \times \mathcal{P}(\Lambda) \to [0,1]$ — *переходная вероятность для пространств* $(\{1,\ldots,q\}^2, \mathcal{P}(\{1,\ldots,q\}^2))$ *и* $(\Lambda, \mathcal{P}(\Lambda))$, *определяющая для каждого множества потерь* $L \in \mathcal{P}(\Lambda)$ *и для каждой пары* («состояние», «решение») $= (k,d)$, $(k,d) \in \{1,\ldots,q\}^2$ *вероятность* $\mathrm{Pr}^{(k,d)}(L)$ *потерь, отвечающих паре* (k,d). Поскольку в конкретной задаче идентификации с. п. р. фиксирует $\mathrm{Pr}^{(\cdot,\cdot)}$ и L, для вероятности $\mathrm{Pr}^{(k,d)}(L)$ можно использовать обозначение $\mathrm{pr} l_{k,d}$, $(k,d) \in \{1,\ldots,q\}^2$, и определить вероятность потерь $\Pr \mathrm{L}(\pi^{\delta|\xi})$, сопутствующих правилу идентификации $\pi^{\delta|\xi}$, равенством (6.3.25).

Заметим, что вероятность $\mathrm{Pr}^{(k,d)}(\Lambda \setminus L) = 1 - \mathrm{pr} l_{k,d} = \overline{\mathrm{pr} l}_{k,d}$ есть вероятность «непотерь» при решении d о состоянии k системы. Правило $\pi^{\delta|\xi}$, определенное из условия максимума вероятности непотерь, $\sum\limits_{k,d} \int\limits_X \overline{\mathrm{pr} l}_{k,d} \pi^{\delta|\xi}(d|x) \mathrm{pr}^{\xi,\kappa}(x,k)\mu(dx) \sim \max\limits_{\pi^{\delta|\xi}}$, очевидно, эквивалентно правилу, определенному условием (6.3.26). В следующем параграфе будет показано, что нечеткие аналоги этих правил не эквивалентны.

6.4. Нечеткие модели. Идентификация

В этом параграфе речь идет о нечеткой системе, которая может находиться в одном из q состояний, полностью или частично определяющих распределение возможностей значений нечеткого элемента ξ, регистрируемых при наблюдении за системой и составляющих эмпирическую основу для принятия решения о ее состоянии.

[1]) материальных, политических, юридических и т. п.

6.4.1. Модели наблюдения и правила идентификации. Обозначим K множество состояний нечеткой системы, D — множество решений о ее состоянии, Λ — нечеткое множество, определенное на пространстве $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}, \mathrm{N}^{\eta})$, принимающее значения в классе $\mathcal{P}(K \times D)$ всех подмножеств $K \times D$, $\mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda} = \mathrm{P}^{\eta}((k,d) \in \Lambda^{\eta})$, $\mathrm{nl}_{k,d}^{\Lambda} = \mathrm{N}^{\eta}((k,d) \in \Lambda^{\eta})$, $(k,d) \in K \times D$, обозначим его индикаторные функции одноточечного покрытия, см. замечание 1.9.4 и § 1.10 гл. 1, значения которых суть возможность и необходимость покрытия точки $(k,d) \in K \times D$ нечетким множеством Λ, которые будем интерпретировать как возможность и как необходимость потерь, обусловленных использованием системы согласно решению «d» о ее состоянии, в то время как она находится в состоянии «k», $(k,d) \in K \times D$.

В рассматриваемой модели состояние $\varkappa$ нечеткой системы и наблюдение ξ за ней определены как нечеткие элементы и заданы их распределения [1] $g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to [0,\,1]$ и $h^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to [0,1]$, значения $g^{\xi,\varkappa}(x,k)$ и $h^{\xi,\varkappa}(x,k)$ которых суть возможность и необходимость того, что $(\xi,\varkappa) = (x,k)$ и $(\xi,\varkappa) \neq (x,k)$, $(x,k) \in X \times K$.

Схему наблюдения за системой определим парой нечетких элементов $(\xi,\varkappa)$ («наблюдение», «состояние»), первый из которых наблюдаем, а второй — нет. Распределения $g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)$ и $h^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)$, определяющие нечеткую связь между состояниями системы и результатами наблюдений за ней, назовем *нечеткой моделью системы*.

Тройку $(g^{\xi,\varkappa}, h^{\xi,\varkappa}, \Lambda)$ назовем *моделью идентификации*, в которой $g^{\xi,\varkappa}$, $h^{\xi,\varkappa}$ характеризуют свойства системы, а пространство $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}, \mathrm{N}^{\eta})$ и отображение $\Lambda^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(K \times D)$ определены субъектом, принимающим решения (с. п. р.) и осознающим возможные последствия тех или иных ошибочных решений.

Решение о состоянии системы определим как нечеткий элемент δ, принимающий значения в D, $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)\colon D \times X \to [0,\,1]$ и $\nu^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)\colon D \times X \to [0,1]$ обозначим распределения переходной возможности $\Pi(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(D) \times X \to [0,\,1]$ и переходной необходимости $\mathrm{N}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(D) \times X \to [0,1]$,

$$\Pi(A|x) = \sup_{d \in A} \pi^{\delta|\xi}(d|x),\ \mathrm{N}(A|x) = \inf_{d \in D \setminus A} \nu^{\delta|\xi}(d|x),\ A \in \mathcal{P}(D),\ x \in X.$$

Распределения $\pi^{\delta|\xi}$ и $\nu^{\delta|\xi}$ назовем нечеткими правилами решения δ о состоянии системы, основанными на наблюдении ξ, или нечеткими правилами идентификации; $\pi^{\delta|\xi}(d|x) = \Pi(\delta = d|x)$, $\nu^{\delta|\xi}(d|x) = \mathrm{N}(\delta \neq d|x)$, $\xi = x$ — результат наблюдения за системой.

[1] В этой главе для простоты формулировок упрощены обозначения: $\mathrm{P}(\cdot)$, $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Y) \to [0,1]$ вместо $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{L}$, $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Y) \to \widetilde{\mathcal{L}}$, $g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to [0,1]$, $h^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to [0,1]$ вместо $g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to \mathcal{L}$, $\widetilde{h}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to \widetilde{\mathcal{L}}$ и т. п., $K = D = 1,\ldots,q$, хотя, как правило, можно считать, что $k \in K$, $d \in D$.

Пара нечетких элементов $\delta, \varkappa$ и нечеткое множество Λ далее считаются *независимыми в смысле одноточечного покрытия*, см. § 1.12.2 гл. 1.

В заключение этого параграфа рассмотрена еще одна модель идентификации, в которой с. п. р. определяет семейство $\mathcal{L}^\lambda = (L, \mathcal{P}(L), \mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}, \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)})$, $(k,d) \in K \times D$, *нечетких пространств потерь*, в которых λ — нечеткий элемент со значениями в множестве L элементарных потерь, канонический для каждого пространства семейства, $g^{\lambda,(k,d)}(l) = \mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}(\lambda = l)$, $h^{\lambda,(k,d)}(l) = \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)}(\lambda \neq l)$, $l \in L$, суть его распределения. Отображения $\mathrm{P}^{\lambda,(\cdot,\cdot)}(\cdot)\colon (K \times D) \times \mathcal{P}(L) \to [0,1]$ и $\mathrm{N}^{\lambda,(\cdot,\cdot)}(\cdot)\colon (K \times D) \times \mathcal{P}(L) \to [0,1]$ суть переходные возможность и необходимость для пространств $(K \times D, \mathcal{P}(K \times D))$, $(L, \mathcal{P}(L))$, соответственно $g^{\lambda,(\cdot,\cdot)}(\cdot)\colon K \times D \times L \to [0,1]$ и $h^{\lambda,(\cdot,\cdot)}(\cdot)\colon K \times D \times L \to$ $\to [0,1]$ — их распределения и

$$\begin{aligned} \mathrm{pl}^\lambda_{k,d}(V) &= \mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}(V) = \sup_{l \in V} g^{\lambda,(k,d)}(l), \\ \mathrm{nl}^\lambda_{k,d}(V) &= \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)}(V) = \inf_{l \in L \setminus V} h^{\lambda,(k,d)}(l) \end{aligned} \tag{6.4.1}$$

суть возможность и соответственно необходимость множества $V \in \mathcal{P}(L)$ потерь, существенных для с. п. р., отвечающих паре $(k,d) \in K \times D$.

В этом случае *моделью идентификации* является тройка $(g^{\xi,\varkappa}, h^{\xi,\varkappa}, \mathcal{L}^\lambda)$, в которой распределения $g^{\xi,\varkappa}(\cdot)$ и $h^{\xi,\varkappa}(\cdot)$ характеризуют свойства системы, а семейство $\mathcal{L}^\lambda$ нечетких пространств и множество V определены с. п. р. в соответствии с условиями ее функционирования, при (возможно) неверной интерпретации ее состояний.

Напомним, что переходной возможностью (необходимостью) для $(X, \mathcal{P}(X))$ и $(D, \mathcal{P}(D))$ называется любое отображение $\mathrm{P}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(D) \times$ $\times X \to [0,1]$ $(\mathrm{N}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(D) \times X \to [0,1])$ такое, что при каждом $x \in X$ $\mathrm{P}(\cdot|x)\colon \mathcal{P}(D) \to [0,1]$ $(\mathrm{N}(\cdot|x)\colon \mathcal{P}(D) \to [0,1])$ есть возможность (необходимость) на $(D, \mathcal{P}(D))$.

Далее используются следующие свойства переходных возможности и необходимости, вытекающие из их определений, см. § 1.10.4 гл. 1.

Лемма 6.4.1. *Пусть* $P_X(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ $(\mathrm{N}_X(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1])$ — *любая возможность* (*необходимость*) *на* $(X, \mathcal{P}(X))$, $g^\xi(\cdot)\colon X \to$ $\to [0,1]$ $(h^\xi(\cdot)\colon X \to [0,1])$ — *ее распределение и* $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x)\colon D \to [0,1]$ $(\nu^{\delta|\xi}(\cdot|x)\colon D \to [0,1])$ — *распределение переходной возможности* $\mathrm{P}(\cdot|x)\colon \mathcal{P}(D) \to [0,1]$ (*переходной необходимости* $\mathrm{N}(\cdot|x)\colon \mathcal{P}(D) \to$ $\to [0,1]$), $x \in X$. *Тогда* $g^{\xi,\delta}(x,d) = \min\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^\xi(x)\}$ $(h^{\xi,\delta}(x,d) =$ $= \max\{\nu^{\delta|\xi}(d|x), h^\xi(x)\})$, $x \in X$, $d \in D$, — *распределение возможности* $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X \times D) \to [0,1]$, $\mathrm{P}(C) = \sup_{(x,d) \in C} g^{\xi,\delta}(x,d)$ (*необходимости* $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X \times D) \to [0,1]$, $\mathrm{N}(C) = \inf_{(x,d) \in (X \times D) \setminus C} h^{\xi,\delta}(x,d)$), $C \in \mathcal{P}(X \times D)$.

Замечание 6.4.1. Модель нечеткой системы и наблюдения за ней естественно определить априорными распределениями возможностей $g^{\varkappa}(\cdot)\colon K \to [0,\, 1]$ и необходимостей $h^{\varkappa}(\cdot)\colon K \to [0,\, 1]$ ее состояний и распределениями переходной возможности $g^{\xi|\varkappa}(\cdot|k)\colon X \to [0,\, 1]$ и переходной необходимости $h^{\xi|\varkappa}(\cdot|k)\colon X \to [0,\, 1]$ для каждого состояния $k \in K$. В таком случае

$$g^{\xi,\varkappa}(x,k) = \min\{g^{\xi|\varkappa}(x|k), g^{\varkappa}(k)\},\ h^{\xi,\varkappa}(x,k) = \max\{h^{\xi|\varkappa}(x|k), h^{\xi}(k)\},$$
$$x \in X,\ k \in K, \quad (6.4.2)$$

— распределения возможностей и необходимостей значений $\xi, \varkappa$. Далее, как правило, будем использовать такую конструкцию модели, см. лемму 1.10.6 гл. 1, в которой распределения $g^{\xi|\varkappa}(\cdot|\cdot)$ и $h^{\xi|\varkappa}(\cdot|\cdot)$ можно интерпретировать и как распределения условных возможности и необходимости.

6.4.2. Критерий минимума возможности (риска) потерь. Для рассмотренной в предыдущем параграфе модели согласно Лемме 6.4.1

$$g^{\delta,\xi,\varkappa}(d,x,k) = \min\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} \quad (6.4.3)$$

— возможность того, что система находится в состоянии $\varkappa = k \in K$, $\xi = x \in X$ — результат наблюдения за системой и принято решение $\delta = d \in D$ о ее состоянии; $g^{\delta,\xi,\varkappa}(d,x,k)$ — возможность трех равенств $\delta = d$, $\xi = x$ и $\varkappa = k$. Соответственно

$$g^{\varkappa,\delta}(k,d) = \sup_{x \in X} g^{\delta,\xi,\varkappa}(d,x,k) \quad (6.4.4)$$

— возможность того, что система находится в состоянии $\varkappa = k$ и при нечетком правиле решения $\pi^{\delta|\xi}$ в результате наблюдения за системой принято решение $\delta = d$ о ее состоянии, а так как нечеткое множество Λ и нечеткий элемент $(\delta, \varkappa)$ независимы, то

$$\min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d}, g^{\varkappa,\delta}(k,d)\} \quad (6.4.5)$$

— возможность такой ситуации и свойственных ей потерь. Поэтому *возможность потерь* (*риск потерь*), *определяющая качество правила решения* $\pi^{\delta|\xi}$,

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \sup_{x \in X,\, k \in K,\, d \in D} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d}, \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\}. \quad (6.4.6)$$

Оптимальным естественно считать такое правило $\pi^{*\delta|\xi}$, которое минимизирует возможность потерь (6.4.6):

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi}) = \min_{\pi^{\delta|\xi}} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}). \quad (6.4.7)$$

Значение $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi})$ определяет минимальный риск потерь, а соответствующее нечеткое правило $\pi^{*\delta|\xi}$ при наблюдении $\xi = x$ определяет возможность $\pi^{*\delta|\xi}(k|x)$ принятия решения в пользу k-го состояния системы для каждого $k \in D = \{1, \ldots, q\}$.

Заметим, что для принятия решения по правилу $\pi^{*\delta|\xi}$ можно использовать рандомизацию. Если

$$1 \underset{0.}{=} \pi^{*\delta|\xi}(k_1|x) \underset{e_1}{\geqslant} \pi^{*\delta|\xi}(k_2|x) \underset{e_2}{\geqslant} \ldots \underset{e_{q-1}}{\geqslant} \pi^{*\delta|\xi}(k_q|x) \underset{e_q}{\geqslant} 0, \qquad (*)$$

где двоичное число $e = e(x) = 0.e_1 \ldots e_q$ определяет упорядоченность в $(*)$ так, что $e_i = 1$ означает «$>$», а $e_i = 0$ означает «$=$», $i = 1, \ldots, q$, и

$$1 \geqslant \mathrm{pr}^{\delta'}(k_1|x) \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{pr}^{\delta'}(k_q|x) \geqslant 0 \qquad (**)$$

— распределение вероятностей значений случайной величины δ', $\mathrm{pr}^{\delta'}(k|x) = \mathrm{Pr}^{\delta'}(\delta' = k|x)$, $k = 1, \ldots, q$, где $\mathrm{Pr}^{\delta'}(\cdot|x) \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e(x))}$, см. § 2.3 гл. 2, то $\exists\, \gamma_{e(x)}(\cdot) \in \Gamma(\mathrm{Pr}^{\delta'}(\cdot|x))$ $\forall i = 1, \ldots, q$ $\pi^{*\delta|\xi}(k_i|x) = \gamma_{e(x)}(\mathrm{pr}^{\delta'}(k_i|x))$. Поэтому для принятия решения по правилу $\pi^{*\delta|\xi}$ при $\xi = x$ можно «разыграть» случайную величину δ', распределенную согласно $(**)$, и принять решение $\delta = k_i$, если «выпадет» $\delta' = k_i$.

Характерно, что в то время как согласно правилу $\pi^{*\delta|\xi}$ *оптимальное решение «принимается однократно», рандомизация обеспечивает оптимальность случайных решений лишь в среднем, когда они принимаются многократно и взаимно независимо.* Если $\nu_k^{(n,x)}$ — частота выпадения $\delta' = k$, где n — число принятий решений, и $\gamma_{e(x)}(\nu_k^{(n,x)}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \gamma_{e(x)}(\mathrm{pr}^{\delta'}(k|x)) = \pi^{*\delta|\xi}(k|x)$ равномерно по $x \in X$, $k = 1, \ldots, q$, то $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\gamma_{e(\cdot)}(\nu_{\cdot}^{(n,\cdot)})) = \sup\limits_{x\in X,\, k\in K,\, d\in D} \min\{\mathrm{p}l_{k,d}^{\Lambda}, \gamma_{e(x)}(\nu_k^{(n,x)}), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi})$.

На самом деле, как выяснится в дальнейшем, *в любом случае, в том числе и тогда, когда неизвестно априорное распределение* $g^{\varkappa}(k)$, $k = 1, \ldots, q$, *состояний системы, см. замечание* 6.4.1, *правило* $\pi^{*\delta|\xi}$ *можно выбрать «четким», согласно которому* $\pi^{*\delta|\xi}(k|x) = \begin{cases} 1, & k = k(x), \\ 0, & k \neq k(x), \end{cases}$ $k = 1, \ldots, q$, $x \in X$, *ср. с результатами, полученными в* § 6.1.1.

Вместе с тем если *нечеткая система активна*, причем «конфликтует» с субъектом, принимающим решения, т. е. выступает как «игрок», интересы которого противоположны интересам субъекта, см. замечание 6.1.5, то в такой (игровой) ситуации среди оптимальных решений, заданных распределениями возможностей принятия решений «игроками»[1]), может и не быть четких. В таком случае, т. е. когда решения заданы распределениями их возможностей, среди которых есть отличные от нуля и единицы, рандомизация *принятия* решений «игроками» неизбежна, см. § 6.5.5, подобно тому как неизбежна рандомизация *принятия* решений, заданных распределениями вероятностей,

[1]) То есть с. п. р. и нечеткой системой.

среди которых есть отличные от нуля и единицы, см. § 6.2. Заметим, что в известных вариантах теории возможностей [87, 91] подобная *реализация нечетких решений* невозможна.

6.4.3. Правило решения, минимизирующее возможность потерь. Пусть $K = \{1, \ldots, q\} = D$ и

$$P_d^{\Lambda}(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \min\{\mathrm{p}l_{k,d}^{\Lambda}, g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} \tag{6.4.8}$$

— возможность потерь, сопутствующих решению $\delta = d$ и наблюдению $\xi = x$, $x \in X$, $d \in \{1, \ldots, q\}$.

Тогда согласно (6.4.6), (6.4.7), (6.4.8) задача определения оптимального нечеткого правила $\pi^{*\delta|\xi}$ формулируется как задача на минимум

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \sup_{x \in X} \max_{1 \leqslant d \leqslant q} \min\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{P}_d^{\Lambda}(x)\} \sim \min_{\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)}. \tag{6.4.9}$$

Ее решение можно получить, решив для каждого $x \in X$ более простую задачу

$$\max_{1 \leqslant d \leqslant q} \min\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{P}_d^{\Lambda}(x)\} \sim \min_{\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x)}. \tag{6.4.10}$$

Это показано ниже в теореме 6.4.1, которая является следствием более общего утверждения, доказанного в следующей лемме.

Лемма 6.4.2. *Пусть* $g_j(\cdot)\colon X \to [0,\,1]$, $f_j(\cdot)\colon X \to [0,\,1]$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, q$, *— некоторые функции. Для каждого* $x \in X$:

- *упорядочим значения* $g_j(x)$, $j = 1, \ldots, q$, *так, чтобы* [1]

$$g(x) = \min_{1 \leqslant j \leqslant q} g_j(x) = g_{i_1}(x) = \ldots = g_{i_t}(x) < g_{i_{t+1}}(x) \leqslant \ldots \leqslant g_{i_q}(x); \tag{6.4.11}$$

- *выберем* $f_j^*(\cdot)\colon X \to [0,\,1]$, $j = 1, \ldots, q$, *так, чтобы*

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant t} f_{i_s}^*(x) = 1, \quad \max_{t < s \leqslant q} f_{i_s}^*(x) = 0,\ x \in X. \tag{6.4.12}$$

Тогда для любых функций $f_j(\cdot)\colon X \to [0,\,1]$, $j = 1, \ldots, q$, *удовлетворяющих условию* $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} f_j(x) = 1$, $x \in X$,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \min\{g_j(x), f_j^*(x)\} = \max_{1 \leqslant s \leqslant t} \min\{g_{i_s}(x), f_{i_s}^*(x)\} = g(x) \leqslant \\ \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \min\{g_j(x), f_j(x)\},\ x \in X, \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

---

[1]) «Упорядочивающая» функция $i.\colon \{1, \ldots, q\} \to \{1, \ldots, q\}$, и, в частности, ее значения $i_1, \ldots, i_q$, ра́вно как и t, зависят от $x \in X$.

и, соответственно,

$$\sup_{x\in X}\max_{1\leqslant j\leqslant q}\min\{g_j(x),f_j^*(x)\}=\sup_{x\in X}g(x)\leqslant\sup_{x\in X}\max_{1\leqslant j\leqslant q}\min\{g_j(x),f_j(x)\}. \tag{6.4.14}$$

Доказательство. Равенства в (6.4.13) выполнены в силу условия (6.4.11) и того, что согласно (6.4.12) $\max\limits_{t<s\leqslant q}\min\{g_{i_s}(x),f_{i_s}^*(x)\}=0$, $x\in X$. Так как

$$\max_{1\leqslant j\leqslant q}\min\{g_j(x),f_j(x)\}=$$
$$=\max\Big\{\max_{1\leqslant s\leqslant t}\min\{g_{i_s}(x),f_{i_s}(x)\},\max_{t<s\leqslant q}\min\{g_{i_s}(x),f_{i_s}(x)\}\Big\},\text{ то}$$

— если $\max\limits_{t<s\leqslant q}f_{i_s}(x)=1$, то в силу условий (6.4.11), (6.4.12) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant q}\min\{g_j(x),f_j(x)\}=\max\limits_{t<s\leqslant q}\min\{g_{i_s}(x),f_{i_s}(x)\}\geqslant g_{i_{t+1}}(x)>$ $>\max\limits_{1\leqslant s\leqslant t}\min\{g_{i_s}(x),f_{i_s}^*(x)\}=g(x)$;

— если же $\max\limits_{t<s\leqslant q}f_{i_s}(x)<1$, то $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant q}\min\{g_j(x),f_j(x)\}\geqslant$ $\geqslant\max\limits_{1\leqslant s\leqslant t}\min\{g_{i_s}(x),f_{i_s}(x)\}=\max\limits_{1\leqslant s\leqslant t}\min\{g_{i_s}(x),f_{i_s}^*(x)\}=g(x)$. Неравенство в (6.4.14) следует из соотношений (6.4.13). ■

Применительно к задачам (6.4.9) и (6.4.10) как следствие леммы 6.4.2 получаем следующий результат.

Теорема 6.4.1. *Пусть $K=D=\{1,\ldots,q\}$. Для каждого $x\in X$ упорядочим значения $P_d^\Lambda(x)$, $d=1,\ldots,q$, в* (6.4.8) *согласно условию*

$$\mathrm{P}^\Lambda(x)=\min_{1\leqslant d\leqslant q}\mathrm{P}_d^\Lambda(x)=\mathrm{P}_{d_1}^\Lambda(x)=\ldots=\mathrm{P}_{d_t}^\Lambda(x)<\mathrm{P}_{d_{t+1}}^\Lambda(x)\leqslant\ldots\leqslant\mathrm{P}_{d_q}^\Lambda(x), \tag{6.4.15}$$

где функция $d.\colon\{1,\ldots,q\}\to\{1,\ldots,q\}$ и t зависят от x. Тогда всякое нечеткое правило $\pi^{*\delta|\xi}$, удовлетворяющее условиям

$$\max_{1\leqslant s\leqslant t}\pi^{*\delta|\xi}(d_s|x)=1,\quad\max_{t<s\leqslant q}\pi^{*\delta|\xi}(d_s|x)=0,\ x\in X, \tag{6.4.16}$$

есть решение задач (6.4.9) *и* (6.4.10), *т. е. оптимально. При любом правиле $\pi^{*\delta|\xi}$, удовлетворяющем условиям* (6.4.15), (6.4.16),

$$\mathrm{P\,L}^\Lambda(\pi^{*\delta|\xi})=\sup_{x\in X}\mathrm{P}^\Lambda(x)\equiv\sup_{x\in X}\min_{1\leqslant d\leqslant q}\mathrm{P}_d^\Lambda(x)\leqslant\mathrm{P\,L}^\Lambda(\pi^{\delta|\xi}), \tag{6.4.17}$$

где $\pi^{\delta|\xi}$ — произвольное нечеткое правило решения. ■

Заметим, что так как в (6.4.8) $\mathrm{P}_d^\Lambda(x)$ — возможность потерь, сопутствующих решению $\delta=d$ и наблюдению $\xi=x$, то согласно условиям (6.4.15), (6.4.16) оптимальное правило $\pi^{*\delta|\xi}$ предписывает при наблюдении $\xi=x$ принимать решение $\delta=d$, возможность которого тем больше, чем меньше возможность потерь, обусловленных таким решением.

Замечание 6.4.2. Достаточные условия оптимальности правила $\pi^{*\delta|\xi}$, эквивалентные условиям (6.4.15), (6.4.16), можно сформулировать в следующей, в ряде случаев более удобной, форме. Пусть

$$D^*(x) = \Big\{d \in \{1, \ldots, q\},\ \mathrm{P}_d^\Lambda(x) = \mathrm{P}^\Lambda(x) = \min_{d'} \mathrm{P}_{d'}^\Lambda(x)\Big\},\ x \in X. \tag{6.4.18}$$

Тогда условия (6.4.15), (6.4.16) эквивалентны

$$\max_{d \in D^*(x)} \pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 1,\ \pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 0,\ d \in \{1, \ldots, q\} \setminus D^*(x),\ x \in X. \tag{6.4.19}$$

Поскольку согласно (6.4.19) можно выбрать $\pi^{*\delta|\xi}(d|x) = \begin{cases} 1, \text{ если } d = d^* \in D^*(x), \\ 0, \text{ если } d \in \{1, \ldots, q\} \setminus \{d^*\}, \end{cases}$ $x \in X$, то при наблюдении $\xi = x$ *в качестве решения можно использовать значение* $d^*(x)$ *любой «четкой» функции* $d^*(\cdot)\colon X \to D$, *удовлетворяющей условию* $d^*(x) \in D^*(x)$, $x \in X$, т. е. правило $\pi^{*\delta|\xi}$ всегда можно выбрать чётким.

Замечание 6.4.3. Пусть [1] $K = D = \{1, \ldots, q\}$ и

$$\mathrm{p}l_{k,d}^\Lambda = \begin{cases} 0, \text{ если } d = k, \\ 1, \text{ если } d \neq k, \end{cases} \quad k, d = 1, \ldots, q, \tag{6.4.20}$$

т. е. пусть потери невозможны при правильной идентификации и возможность потерь максимальна при ошибочной идентификации. В таком случае правая часть равенства (6.4.6) определяет *возможность ошибочной идентификации* $\mathrm{P\,E}^\Lambda(\pi^{\delta|\xi})$, а в (6.4.8)

$$\mathrm{P}_d^\Lambda(x) = \max_{k \neq d} g^{\xi,\varkappa}(x, k), \quad d = 1, \ldots, q,\ x \in X, \tag{6.4.21}$$

и, следовательно, в (6.4.18) *минимум* $\mathrm{P}_d^\Lambda(x)$ *при каждом* $x \in X$ *достигается на тех* $d \in \{1, \ldots, q\}$, *на которых* $g^{\xi,\varkappa}(x, d)$ *достигает максимума*, ибо если $g^{\xi,\kappa}(x, d_*(x)) \geqslant g^{\xi,\kappa}(x, k)$, $k = 1, \ldots, q$, то $\mathrm{P}_{d_*(x)}^\Lambda(x) \leqslant \mathrm{P}_k^\Lambda(x)$, $k = 1, \ldots, q$, $x \in X$.

В данном случае в (6.4.18) для каждого $x \in X$

$$D^*(x) \supset D_*(x) = \big\{k \in \{1, \ldots, q\},\ g^{\xi,\varkappa}(x, k) = g^\xi(x) = \max_{1 \leqslant k' \leqslant q} g^{\xi,\varkappa}(x, k')\big\}, \tag{6.4.22}$$

где $g^\xi(x)$ — возможность наблюдения $\xi = x$, $x \in X$. Условимся считать, что в случае (6.4.20) при каждом $x \in X$ максимум $\pi^{*\,\delta|\xi}(\cdot|x)\colon \{1, \ldots, q\} \to [0,\,1]$, равный единице, достигается на множестве $D_*(x)$ тех $d \in D = \{1, \ldots, q\}$, на которых достигается

[1] В данном случае равенство $K = D$ по существу.

максимум $g^{\xi,\varkappa}(x,\cdot)\colon \{1,\ldots,q\} \to [0, g^{\xi}(x)]$, равный $g^{\xi}(x)$; вне этого множества определим $\pi^{*\,\delta|\xi}(d|x) = 0$, $d \in \{1,\ldots,q\} \setminus D_*(x)$. Каждое такое правило $\pi^{*\,\delta|\xi}$, минимизирующее *возможность ошибки идентификации* $\mathrm{P\,E}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$, называется правилом *максимальной возможности* [43], см. равенство (6.4.57). При этом согласно (6.4.17) $\mathrm{P\,E}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi}) = \sup\limits_{x\in X} \max\limits_{k\neq d_*(x)} g^{\xi,\varkappa}(x,k)$, где $d_*(x) \in D_*(x)$, $x \in X$.

Иначе определение (6.4.22) можно записать как

$$D_*(x) = \bigl\{k \in \{1,\ldots,q\},\ g^{\varkappa|\xi}(k|x) = 1\bigr\},\ x \in X, \tag{6.4.23}$$

если условное распределение $\varkappa$ при условии $\xi = x$ определить равенствами

$$g^{\varkappa|\xi}(k|x) = \begin{cases} g^{\xi,\varkappa}(x,k), & \text{если } g^{\xi,\varkappa}(x,k) < g^{\xi}(x),\\ \quad 1, & \text{если } g^{\xi,\varkappa}(x,k) = g^{\xi}(x),\end{cases} \tag{6.4.24}$$
$$k = 1,\ldots,q,\ x \in X,\ [43].$$

Поэтому всякое правило $\pi^{*\delta|\xi}$ такое, что

$$\max_{d\colon g^{\varkappa|\xi}(d|x)=1} \pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 1, \qquad \max_{d\colon g^{\varkappa|\xi}(d|x)<1} \pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 0, \quad x \in X, \tag{6.4.25}$$

минимизирует *возможность* (*риск*) *ошибочного решения*.

Замечание 6.4.4. Если наблюдения за системой невозможны, то в *модели системы* (6.4.2) задано лишь априорное распределение возможностей ее состояний $g^{\varkappa}(k) = \sup\limits_{x\in X} g^{\xi,\varkappa}(x,k)$, $k \in K$. Теорема 6.4.1 характеризует оптимальное решение и в этом случае, если в ее условиях $g^{\xi,\varkappa}(x,k)$ заменить на $g^{\varkappa}(k)$, $\pi^{\delta|\xi}(d|x)$ — на $\pi^{\delta}(d)$, $\mathrm{P}^{\Lambda}_d(x)$ — на $\mathrm{P}^{\Lambda}_d = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \min\bigl\{\mathrm{pl}^{\Lambda}_{kd}, g^{\varkappa}(k)\bigr\}$, $\mathrm{P}^{\Lambda}(x)$ — на $\mathrm{P}^{\Lambda} = \min\limits_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}_d$, $x \in X$, $k \in K$, $d \in D$. В этом случае речь идет о нечетком правиле идентификации $\pi^{*\delta}$, определенном условиями $\max\limits_{1\leqslant s\leqslant t} \pi^{*\delta}(d_s) = 1$, $\max\limits_{t<s\leqslant q} \pi^{*\delta}(d_s) = 0$, $0 \leqslant \mathrm{P}^{\Lambda} = \mathrm{P}^{\Lambda}_{d_1} = \ldots = \mathrm{P}^{\Lambda}_{d_t} < \mathrm{P}^{\Lambda}_{d_{t+1}} \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{P}^{\Lambda}_{d_q}$, для которого $\mathrm{P}^{\Lambda}_d = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \min\bigl\{\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d}, g^{\varkappa}(k)\bigr\} \geqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \min\bigl\{\mathrm{pl}^{\Lambda}_{k,d}, g^{\xi,\varkappa}(x,k)\bigr\} = \mathrm{P}^{\Lambda}_d(x)$, $d \in D$, $x \in X$, и, следовательно, $\mathrm{P}^{\Lambda} = \min\limits_{1\leqslant d\leqslant q} \mathrm{P}^{\Lambda}_d \geqslant \sup\limits_{x\in X} \min\limits_{1\leqslant d\leqslant q} \mathrm{P}^{\Lambda}_d(x) = \sup\limits_{x\in X} \mathrm{P}^{\Lambda}(x)$. *Возможность потерь, сопутствующих решению* $\pi^{*\delta}(\cdot)$, *не учитывающему результат наблюдения за системой, не меньше, чем при решении* $\pi^{*\delta|\xi}(\cdot|\cdot)$.

Если, наконец, недоступны не только наблюдения за системой, но и априорное распределение возможностей ее состояний, то, как будет показано в § 6.4.5, все ее состояния априори следует считать равновозможными, $g^{\varkappa}(k) = 1$, $k = 1,\ldots,q$, и, следовательно,

$\mathrm{P}_d^\Lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \min\left\{\mathrm{p}l_{k,d}^\Lambda, g^{\varkappa}(k)\right\} \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \mathrm{p}l_{k,d}^\Lambda$, $d = 1,\ldots,q$. *В этом случае качество любого решения* $\pi^{*\delta}(\cdot)$, *удовлетворяющего условиям* $\max\limits_{1\leqslant s\leqslant t} \pi^{*\delta}(d_s) = 1$, $\max\limits_{t<s\leqslant q} \pi^{*\delta}(d_s) = 0$, $0 \leqslant \mathrm{P}^\Lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \mathrm{p}l_{k,d_1}^\Lambda = \ldots = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \mathrm{p}l_{k,d_t}^\Lambda < \max\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \mathrm{p}l_{k,d_{t+1}}^\Lambda \leqslant \ldots \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathrm{p}l_{k,d_q}^\Lambda$, *еще ниже.*

6.4.4. Четкие правила идентификации. Среди нечетких правил $\pi^{*\delta|\xi}$, определенных условиями (6.4.15), как было отмечено в замечании 6.4.2, (6.4.16), всегда есть четкие, согласно которым для каждого $x \in X$ $\pi^{*\delta|\xi}(d_s|x) = 1$ для некоторого $s \in [1, t(x)]$ и $\pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 0$ для остальных $d \neq d_s$, $d \in \{1,\ldots,q\}$. Поскольку при этом неравенство в (6.4.17) выполнено, в рассматриваемой модели «фазификация» правила решения не позволяет улучшить качество идентификации и имеет смысл рассмотреть построение непосредственно четких правил идентификации.

Любое четкое правило определяется упорядоченным разбиением $X = \bigcup\limits_{d=1}^{q} X_d$, а именно, решение $\delta = d$ о состоянии системы принимается тогда, когда результат наблюдения $\xi = x \in X_d$, $d = 1,\ldots,q$.

Пусть $\chi^{\delta|\xi}(d|x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X_d,\\ 0, & \text{если } x \in X \setminus X_d,\end{cases}$ $x \in X$, — индикаторная функция множества X_d, $d = 1,\ldots,q$. Тогда возможность потерь, свойственных правилу, определенному разбиением $X_\cdot$,

$$\mathrm{P\,L}^\Lambda(X_\cdot) = \sup_{x\in X} \max_{1\leqslant d\leqslant q} \min\{\chi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{P}_d^\Lambda(x)\} = \max_{1\leqslant d\leqslant q} \sup_{x\in X_d} \mathrm{P}_d^\Lambda(x). \tag{6.4.26}$$

Следующая теорема, определяющая «четкие» правила идентификации, является частным случаем теоремы 6.4.1.

Теорема 6.4.1***.** *Решением задачи на минимум*

$$\mathrm{P\,L}^\Lambda(X_\cdot) \sim \min_{X_\cdot} \tag{6.4.27}$$

для возможности потерь (6.4.26) *является любое разбиение* $X_\cdot^*$, *удовлетворяющее условиям*

$$X_d^* \subset \left\{x \in X,\ \mathrm{P}_d^\Lambda(x) = \mathrm{P}^\Lambda(x) = \min_{1\leqslant d'\leqslant q} \mathrm{P}_{d'}^\Lambda(x)\right\},\ d = 1,\ldots,q, \tag{6.4.28}$$

(ср. с (6.4.18)). *При этом для любого разбиения* $X_\cdot$

$$\mathrm{P\,L}^\Lambda(X_\cdot^*) = \sup_{x\in X} \mathrm{P}^\Lambda(x) \leqslant \mathrm{P\,L}^\Lambda(X_\cdot) \tag{6.4.29}$$

■

Замечание 6.4.2***.** Согласно теореме 6.4.1* любая функция $d^*(\cdot)$: $X \to D$, удовлетворяющая условию $d^*(x) = d$, если $x \in X_d^*$, $d \in D$, определит оптимальное четкое правило идентификации. Разумеется, его можно найти и непосредственно, решив для каждого $x \in X$ задачу на минимум $\mathrm{P}_d^\Lambda(x) = \max\limits_{k\in K} \min\left\{\mathrm{p}l_{k,d}^\Lambda, g^{\xi,\varkappa}(x,k)\right\} \sim \min\limits_{d\in D}$. Всякое ее решение $d = d^*(x) \in D^*(x)$, $x \in X$, см. (6.4.18), в частности, $d^*(x) = \max\limits_{1 \leqslant d \leqslant q} \bigl(d \cdot \chi^{*\delta|\xi}(d|x)\bigr)$, где $\chi^{*\delta|\xi}(d|\cdot)$ — индикаторная функция X_d^*, $d = 1, \ldots, q$.

6.4.5. Минимаксное правило. Графическая иллюстрация оптимальной идентификации. В том случае, когда распределение $g^{\varkappa}(\cdot)$ неизвестно и модель нечеткой системы определена как аналог неполной байесовской в § 6.1.6, вместо выражения (6.4.6) для возможности потерь можно, воспользовавшись выражениями для возможностей маргинальных потерь

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k) = \sup_{x \in X} \max_{1 \leqslant d \leqslant q} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d}, \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi|\varkappa}(x|k)\}, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{6.4.30}$$

определить *оптимальное минимаксное правило* $\pi^{+\delta|\xi}$ из условия минимума максимальной из возможностей маргинальных потерь $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k)$, $k = 1, \ldots, q$, (6.4.30):

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant q} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{+\delta|\xi}|k) = \min_{\pi^{\delta|\xi}} \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k). \tag{6.4.31}$$

Формально в правой части (6.4.31) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant q} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k)$ совпадает с $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$ (6.4.6), если в выражении (6.4.2) для совместного распределения ξ и $\varkappa$ $g^{\varkappa}(k) = 1$, $k = 1, \ldots, q$, и, следовательно, в (6.4.6) $g^{\xi,\varkappa}(x, k) = \min\{g^{\xi|\varkappa}(x|k), g^{\varkappa}(k)\} = g^{\xi|\varkappa}(x|k)$, $x \in X$, $k = 1, \ldots, q$.

Это означает, что *минимаксное правило* $\pi^{+\delta|\xi}$ (6.4.31) *можно получить как правило* $\pi^{*\delta|\xi}$ (6.4.17), *если в теореме* 6.4.1 *априорное распределение* $g^{\varkappa}(\cdot)$ *задать как равновозможное*: $g^{\varkappa}(k) = 1$, $k = 1, \ldots, q$, и, следовательно, — как «наименее благоприятное», ибо $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{+\delta|\xi}) \geqslant \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi})$, см. § 6.4.3.

Поскольку «априорная равновозможность» инвариантна относительно выбора шкалы значений возможности, [43, 52], ее можно считать моделью «незнания» априорного распределения $g^{\varkappa}(\cdot)$ состояний системы, а минимаксное правило — частным случаем нечеткого правила идентификации, охарактеризованного в теореме 6.4.1, или — четкого, охарактеризованного в теореме 6.4.1* и в замечании 6.4.2*.

Обратимся теперь к графической иллюстрации решений в (6.4.27), (6.4.31), подобной иллюстрации их стохастических аналогов на рис. 6.1.1, *а*, 6.1.3.

Рассмотрим правило идентификации, определенное разбиением $X_{\cdot}^*$ в (6.4.28), записав условие (6.4.27) в виде

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X_{\cdot}^*) = \min_{X_{\cdot}} \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \min\{L_k^{\Lambda}(X_{\cdot}), g^{\varkappa}(k)\}, \tag{6.4.32}$$

где $L_k^{\Lambda}(X_{\cdot}) = \max\limits_{1 \leqslant d \leqslant q} \sup\limits_{x \in X_d} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{kd}, g^{\xi|\varkappa}(x|k)\}$, $k = 1, \ldots, q$, $X_{\cdot} \sim \{X_1, \ldots$ $\ldots, X_q\}$. В минимаксной постановке в (6.4.32) $g^{\kappa}(k) = 1$, $k = 1, \ldots, q$, и соответствующее (6.4.31) оптимальное разбиение $X_{\cdot}^+$ определится

условием
$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X_{\cdot}^{+}) = \min_{X_{\cdot}} \max_{1\leqslant k\leqslant q} L_k^{\Lambda}(X_{\cdot}). \tag{6.4.33}$$

Далее в (6.4.32), (6.4.33), как и в примерах на рис. 6.1.3, 6.1.1, $q=2$, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, и в (6.4.32) выберем $g^{\varkappa}(1)=1>g^{\varkappa}(2)=\mathrm{p}\geqslant 0$.

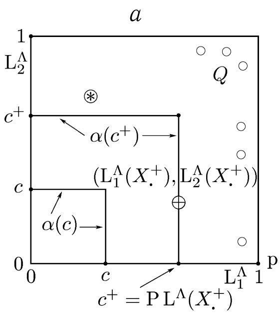


Рис. 6.4.1. Q — множество точек $(L_1,L_2)=(L_1^{\Lambda}(X_{\cdot}^{(i)}), L_2^{\Lambda}(X_{\cdot}^{(i)}))$, $i=1,\ldots,8$. *а*) Множество $\alpha(c)=\{(L_1,L_2),\ \max\{L_1,L_2\}=c\}$ в (6.4.34) при $c\in[0,\mathrm{p})$ — аналог прямой $\alpha(c)$ на рис. 6.1.3, множество $\alpha(c^+)=\{(L_1,L_2),\ \max\{L_1,L_2\}=c^+\}$ в (6.4.34) при $\mathrm{p}=1$, $c^+\in[0,1]$, содержащее точку $\oplus=(L_1^{\Lambda}(X_{\cdot}^{+}),L_2^{\Lambda}(X_{\cdot}^{+}))\in Q(c^+)$ при наименьшем значении $c=c^+\in[0,1]$, при котором $Q(c)\neq\varnothing$, $c\in[0,1]$; $c^+=\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X_{\cdot}^{+})$, $X_{\cdot}^{+}$ — решение задачи (6.4.33); $\alpha(c^+)$ — аналог множества $a(c^+)$ на рис. 6.1.1.
б) Множество $\alpha(c^*)=\{L_1=c^*, 0\leqslant L_2\leqslant c^*\}\cup\{0\leqslant L_1\leqslant c^*\leqslant L_2\leqslant 1\}$ в (6.4.34) при $c^*=\mathrm{p}$, содержащее точку $\circledast=(L_1^{\Lambda}(X_{\cdot}^{*}),L_2^{\Lambda}(X_{\cdot}^{*}))$, отвечающее наименьшему $c=c^*=\mathrm{p}$, при котором в (6.4.34) $\alpha(c)\cap Q\neq\varnothing$, $c\in[0,1]$; $c^*=\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X_{\cdot}^{*})$, $X_{\cdot}^{*}$ — решение задачи (6.4.32), $\alpha(c^*)$ — аналог прямой $\alpha^*=\alpha(c^*)$ на рис. 6.1.3.
в) Множество $\alpha(c)=\{L_1=c, 0\leqslant L_2\leqslant 1\}$ в (6.4.34) при $c\in(\mathrm{p},1]$

На рис. 6.4.1: Q — множество точек $(L_1^{\Lambda}(X_{\cdot}^{(i)}), L_2^{\Lambda}(X_{\cdot}^{(i)}))$, $i=1,\ldots$ $\ldots,8$, координаты которых суть возможности маргинальных потерь в первом и втором состояниях, отвечающих различным разбиениям $X_{\cdot}^{(1)},\ldots,X_{\cdot}^{(8)}$, и множества
$$\alpha(c)=\{(L_1^{\Lambda},L_2^{\Lambda})\in[0,1]\times[0,1],\ \max\big\{\min\{L_1^{\Lambda},g^{\varkappa}(1)\},$$
$$\min\{L_2^{\Lambda},g^{\varkappa}(2)\}\big\}=c\}=\{(L_1^{\Lambda},L_2^{\Lambda}),\ \max\{L_1^{\Lambda},\min\{L_2^{\Lambda},\mathrm{p}\}\}=c\} \tag{6.4.34}$$
для $0\leqslant c<p$ на рис. *а*, для $c=p$ на рис. *б* и для $p<c\leqslant 1$ на рис. *в*.

В задаче (6.4.32) $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X_{\cdot}^{*})$ равно минимальному значению $c=c^*\in$ $\in[0,1]$, при котором $Q(c)=\alpha(c)\cap Q\neq\varnothing$, и $X_{\cdot}^{*}$ — любое разбиение X, удовлетворяющее условию $(L_1^{\Lambda}(X_{\cdot}^{*}),L_2^{\Lambda}(X_{\cdot}^{*}))\in Q(c^*)$, см. рис. 6.4.1, *б*.

В задаче (6.4.33) $\mathrm{p}=1$ и $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X_{\cdot}^{+})$ равно минимальному значению $c=c^+\in[0,1]$, при котором $Q(c)=\{(L_1^{\Lambda},L_2^{\Lambda}),\in[0,1]\times[0,1],$

$\max(L_1^\Lambda, L_2^\Lambda) = c\} \cap Q \neq \varnothing$, а $X_\cdot^+$ — любое разбиение, при котором $(L_1^\Lambda(X_\cdot^+), L_2^\Lambda(X_\cdot^+)) \in Q(c^+)$, см. рис. 6.4.1, *а*.

В любом случае $\mathrm{P\,L}^\Lambda(X_\cdot^*) \leqslant \mathrm{P\,L}^\Lambda(X_\cdot^+)$, см. замечание 6.4.4.

6.4.6. Критерий минимума необходимости потерь. Согласно лемме 6.4.1 $h^{\delta,\xi,\varkappa}(d,x,k) = \max\{\nu^{\delta|\xi}(d|x), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\}$ — необходимость неравенства $(\delta,\xi,\varkappa) \neq (d,x,k)$, $(d,x,k) \in D \times X \times K$, и в силу независимости нечеткого элемента $(\delta,\xi,\varkappa)$ и нечеткого множества Λ необходимость потерь, сопутствующих нечеткому правилу решения $\nu^{\delta|\xi}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{NL}^\Lambda(\nu^{\delta|\xi}) &= \inf_{x\in X} \min_{\substack{k\in K\\ d\in D}} \max\{\mathrm{nl}_{k,d}^\Lambda, \nu^{\delta|\xi}(d|x), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\} = \\ &= \inf_{x\in X} \min_{1\leqslant d\leqslant q} \max\{\nu^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}_d^\Lambda(x)\},\end{aligned} \tag{6.4.35}$$

где $\mathrm{nl}_{k,d}^\Lambda = \mathrm{N}((k,d)\in\Lambda)$, $\nu^{\delta|\xi}(d|x) = \mathrm{N}(\delta \neq d|x)$, $h^{\xi,\varkappa}(x,k) = \mathrm{N}((\xi,\varkappa) \neq$ $\neq (x,k))$,

$$\mathrm{N}_d^\Lambda(x) = \min_{1\leqslant k\leqslant q} \max\{\mathrm{nl}_{k,d}^\Lambda, h^{\xi,\varkappa}(x,k)\},\ x\in X,\ d\in\{1,\ldots,q\}. \tag{6.4.36}$$

Задача определения оптимального нечеткого правила идентификации $\nu_*^{\delta|\xi}$, минимизирующего необходимость потерь,

$$\mathrm{NL}^\Lambda(\nu_*^{\delta|\xi}) = \min_{\nu^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)} \mathrm{N\,L}^\Lambda(\nu^{\delta|\xi}), \tag{6.4.37}$$

будет решена, если для каждого $x \in X$ известно решение задачи на минимум

$$\min_{1\leqslant d\leqslant q} \max(\nu^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}_d^\Lambda(x)) \sim \min_{\nu^{\delta|\xi}(\cdot|x)}. \tag{6.4.38}$$

6.4.7. Правило решения, минимизирующее необходимость потерь. В приведенной далее теореме 6.4.2 дано решение задачи (6.4.38) и показано, что каждое семейство ее решений $\nu_*^{\delta|\xi}(\cdot|x)$, $x\in X$, определяет решение $\nu_*^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)\colon \{1,\ldots,q\}\times X \to [0,\,1]$ задачи (6.4.37). Теорема 6.4.2 является следствием общего результата, сформулированного в следующей лемме.

Лемма 6.4.3. *Пусть* $g_j(\cdot)\colon X \to [0,\,1]$, $j=1,\ldots,q$, *и* $h_j(\cdot)\colon X \to$ $\to [0,\,1]$, $j=1,\ldots,q$, — *некоторые функции. Для каждого* $x\in X$:

► *упорядочим значения* $g_1(x),\ldots,g_q(x)$ *так, чтобы*

$$g(x) = \min_{1\leqslant j\leqslant q} g_j(x) = g_{i_1}(x) = \ldots = g_{i_t}(x) < g_{i_{t+1}} \leqslant \ldots \leqslant g_{i_q}(x),\ \textit{и} \tag{6.4.39}$$

► *определим* $h_j^*(x)$, $j=1,\ldots,q$, *согласно условиям*

$$h_j^*(x) \geqslant 0,\ j=1,\ldots,q,\ \min_{1\leqslant s\leqslant t} h_{i_s}^*(x) = 0. \tag{6.4.40}$$

Тогда для любых функций $h_1(\cdot),\ldots,h_q(\cdot)$ *таких, что* $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant q} h_j(x)=0$, $x\in X$,

$$\begin{aligned}\min_{1\leqslant j\leqslant q}\max\left\{g_j(x),h_j^*(x)\right\}&=\min_{1\leqslant s\leqslant t}\max\left\{g_{i_s}(x),h_{i_s}^*(x)\right\}=\\&=g(x)\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant q}\max\left\{g_j(x),h_j(x)\right\},\ x\in X,\end{aligned}\tag{6.4.41}$$

и, как следствие,

$$\inf_{x\in X}\min_{1\leqslant j\leqslant q}\max\left\{g_j(x),h_j^*(x)\right\}=\inf_{x\in X}g(x)\leqslant\inf_{x\in X}\min_{1\leqslant j\leqslant q}\max\left\{g_j(x),h_j(x)\right\}.\tag{6.4.42}$$

Доказательство. Соотношение (6.4.41) непосредственно следует из условий (6.4.39), (6.4.40), неравенство (6.4.42) следует из (6.4.41). ■

Теорема 6.4.2. *Для каждого* $x\in X$ *упорядочим значения* $\mathrm{N}_1^{\Lambda}(x),\ldots$ $\ldots,\mathrm{N}_q^{\Lambda}(x)$ (6.4.36) *так, чтобы*

$$\mathrm{N}^{\Lambda}(x)=\min_{1\leqslant d\leqslant q}\mathrm{N}_d^{\Lambda}(x)=\mathrm{N}_{d_1}^{\Lambda}(x)=\ldots=\mathrm{N}_{d_t}^{\Lambda}(x)<\mathrm{N}_{d_{t+1}}^{\Lambda}\leqslant\ldots\leqslant\mathrm{N}_{d_q}^{\Lambda}(x),\tag{6.4.43}$$

где функция $d_\cdot\colon\{1,\ldots,q\}\to\{1,\ldots,q\}$ *и* t *зависят от* x, *и выберем любое нечеткое правило идентификации* $\nu_*^{\delta|\xi}$, *удовлетворяющее условию*

$$\min_{1\leqslant s\leqslant t}\nu_*^{\delta|\xi}(d_s|x)=0.\tag{6.4.44}$$

Тогда для любого нечеткого правила идентификации $\nu^{\delta|\xi}$

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\nu_*^{\delta|\xi})=\inf_{x\in X}\mathrm{N}^{\Lambda}(x)\leqslant\mathrm{NL}^{\Lambda}(\nu^{\delta|\xi}),\tag{6.4.45}$$

т. е. любое нечеткое правило $\nu_*^{\delta|\xi}$ *есть решение задачи* (6.4.37), *причем среди правил идентификации, удовлетворяющих условию* (6.4.44), *непременно есть четкие*: $\nu_*^{\delta|\xi}(d_s|x)=0$, $\nu_*^{\delta|\xi}(d|x)=1$, $d\neq d_s$, $s=1,\ldots,t(x)$, $x\in X$.

Доказательство. Действительно, для $g_j(x)=\mathrm{N}_j^{\Lambda}(x)$, $j=1,\ldots,q$, и $h_j^*(x)=\nu_*^{\delta|\xi}(j|x)$, $j=1,\ldots,q$, будут выполнены условия леммы 6.4.3 для задач (6.4.38), (6.4.37). ■

Замечание 6.4.5. Следующая формулировка достаточных условий (6.4.43), (6.4.44) оптимальности правила $\nu_*^{\delta|\xi}$ позволяет охарактеризовать оптимальные четкие правила идентификации. Пусть

$$\mathrm{D}_*(x)=\left\{d\in\{1,\ldots,q\},\mathrm{N}_d^{\Lambda}(x)=\mathrm{N}^{\Lambda}(x)=\min_{d'}\mathrm{N}_{d'}^{\Lambda}(x)\right\},\ x\in X,\tag{6.4.46}$$

тогда любое нечеткое правило $\nu_*^{\delta|\xi}$, удовлетворяющее условиям

$$\min_{d\in D_*(x)} \nu_*^{\delta|\xi}(d|x) = 0,\ x\in X, \tag{6.4.47}$$

является решением задач (6.4.37), (6.4.38), а четкое правило идентификации определяется любой решающей функцией $d_*(\cdot)\colon X\to\{1,\ldots\ldots,q\} = D$, удовлетворяющей условию

$$d_*(x)\in D_*(x),\ x\in X, \tag{$*$}$$

эквивалентному условиям

$$\nu_*^{\delta|\xi}(d_*(x)|x) = 0,\ \nu_*^{\delta|\xi}(d|x)\geqslant 0,\ d\in D\setminus\{d_*(x)\},\ x\in X, \tag{$**$}$$

согласно которым *при наблюдении* $\xi = x$ *в качестве правила решения можно использовать значение* $d_*(x)$ *функции в* $(*)$, $(**)$.

Оптимальное четкое правило идентификации можно определить как решение задачи на минимум необходимости потерь, обусловленных решающей функцией $d(\cdot)\colon X\to D$,

$$\widetilde{\mathrm{N}}\,\mathrm{L}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \inf_{x\in X}\min_{1\leqslant k\leqslant q}\max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}_{k,d(x)}, h^{\xi,\varkappa}(x,k)\} = \inf_{x\in X}\mathrm{N}^{\Lambda}_{d(x)}(x)\sim\min_{d(\cdot)\colon X\to D}, \tag{$***$}$$

а решение $d_*(\cdot)$ задачи $(***)$ можно получить, решив для каждого $x\in X$ задачу $\mathrm{N}^{\Lambda}_{d_*(x)}(x) = \min\limits_{d\in D}\mathrm{N}^{\Lambda}_d(x)$. Действительно, согласно (6.4.36), (6.4.43) и (6.4.46) для каждого $x\in X$ и любой функции $d(\cdot)\colon X\to D$

$$\min_{1\leqslant k\leqslant q}\max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}_{k,d(x)}, h^{\xi,\varkappa}(x,k)\}\equiv\mathrm{N}^{\Lambda}_{d(x)}(x)\geqslant\mathrm{N}^{\Lambda}(x) = \mathrm{N}^{\Lambda}_{d_*(x)}(x),$$

поэтому

$$\widetilde{\mathrm{N}}\mathrm{L}^{\Lambda}(d_*(\cdot)) = \inf_{x\in X}\mathrm{N}^{\Lambda}_{d_*(x)}(x)\equiv\inf_{x\in X}\mathrm{N}^{\Lambda}(x) = \mathrm{N}\,\mathrm{L}^{\Lambda}(\nu_*^{\delta|\xi})\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{x\in X}\mathrm{N}^{\Lambda}_{d(x)}(x) = \widetilde{\mathrm{N}}\,\mathrm{L}^{\Lambda}(d(\cdot)).$$

Заметим, наконец, что если в модели идентификации возможность и необходимость дуально согласованы, см. § 1.5.1 гл. 1, то есть если для некоторой функции $\theta(\cdot)\in\Theta$ $\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} = \mathrm{P}^{\eta}((k,d)\in\Lambda^{\eta}) = \theta^{-1}(\mathrm{N}^{\eta}((k,d)\in\in(K\times D)\setminus\Lambda^{\eta})) = \theta^{-1}(\mathrm{n}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d})$, $\pi^{\delta|\xi}(d|x) = \theta^{-1}(\nu^{\delta|\xi}(d|x))$ и $g^{\xi,\varkappa}(x,k) = \theta^{-1}(h^{\xi,\varkappa}(x,k))$, $x\in X$, $(k,d)\in K\times D$, то согласно (6.4.6) и (6.4.35)

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \sup_{x\in X}\max_{(k,d)\in K\times D}\min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d},\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} =$$
$$=\theta^{-1}(\inf_{x\in X}\min_{(k,d)\in K\times D}\max\{\mathrm{n}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d},\nu^{\delta|\xi}(d|x), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\}) =$$
$$=\theta^{-1}(\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\nu^{\delta|\xi})). \tag{6.4.48}$$

6.4.8. Критерий минимума необходимости потерь, дуальной возможности потерь. *Дуальная* (полярная) возможности потерь $\mathrm{P\,L}(\pi^{\delta|\xi})$ (6.4.6) необходимость, см. § 1.5.4 гл. 1, потерь

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \theta\Big(\sup_{x\in X}\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant q\\ 1\leqslant d\leqslant q}}\min\big\{\theta^{-1}\circ \mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d}, \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\}\Big) =$$
$$= \inf_{x\in X}\min_{1\leqslant d\leqslant q}\max\big\{\theta\circ\pi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{\Lambda}_{d}(x)\big\}, \quad (6.4.49)$$

где $\theta(\cdot)\in\Theta$ и, в отличие от (6.4.36),

$$\mathrm{N}^{\Lambda}_{d}(x) = \min_{1\leqslant k\leqslant q}\max\big\{\mathrm{nl}^{\Lambda}_{k,d}, \theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\},\ x\in X,\ d\in\{1,\ldots,q\}. \quad (6.4.50)$$

Задача отыскания оптимального нечеткого правила идентификации $\pi^{\delta|\xi}_{*}$, минимизирующего необходимость потерь (6.4.49),

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) \sim \min_{\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)}, \quad (6.4.51)$$

может быть решена, если для каждого $x\in X$ известно решение более простой задачи на минимум

$$\min_{1\leqslant d\leqslant q}\max\big\{\theta\circ\pi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{\Lambda}_{d}(x)\big\} \sim \min_{\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x)}. \quad (6.4.52)$$

6.4.9. Правило решения, минимизирующее необходимость потерь, дуальную возможности. В приведенной далее теореме 6.4.3 дано решение задачи (6.4.52) и показано, что каждое семейство ее решений $\pi^{\delta|\xi}_{*}(\cdot|x)$, $x\in X$, определяет решение $\pi^{\delta|\xi}_{*}(\cdot|\cdot)\colon \{1,\ldots,q\}\times X\to$ $\to [0,\ 1]$ задачи (6.4.51).

Теорема 6.4.3. *Для каждого $x\in X$ упорядочим значения $N^{\Lambda}_{1}(x),\ldots,N^{\Lambda}_{q}(x)$* (6.4.50) *так, чтобы*

$$\mathrm{N}^{\Lambda}(x) = \min_{1\leqslant d\leqslant q}\mathrm{N}^{\Lambda}_{d}(x) = \mathrm{N}^{\Lambda}_{d_1}(x) = \ldots = \mathrm{N}^{\Lambda}_{d_t}(x) < \mathrm{N}^{\Lambda}_{d_{t+1}}(x) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{N}^{\Lambda}_{d_q}(x) \quad (6.4.53)$$

и выберем любое нечеткое правило идентификации $\pi^{\delta|\xi}_{*}$, удовлетворяющее условию

$$\max_{1\leqslant s\leqslant t}\pi^{\delta|\xi}_{*}(d_s \mid x) = 1. \quad (6.4.54)$$

Тогда для любого нечеткого правила идентификации $\pi^{\delta|\xi}$

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}_{*}) = \inf_{x\in X}\mathrm{N}^{\Lambda}(x) \leqslant \mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}), \quad (6.4.55)$$

т. е. нечеткое правило $\pi^{\delta|\xi}_{*}$ оптимально, причем среди правил, удовлетворяющих условию (6.4.54), *непременно есть четкие*: $\pi^{\delta|\xi}_{*}(d_s|x) = 1$, $\pi^{\delta|\xi}_{*}(d|x) = 0$, $d\neq d_s$, $s = 1,\ldots,t(x)$, $x\in X$.

Доказательство. Действительно, для $g_j(x) = \mathrm{N}_j^\Lambda(x)$, $j = 1,\ldots,q$, и $h_j^*(x) = \theta \circ \pi_*^{\delta|\xi}(j|x)$, $j = 1,\ldots,q$, будут выполнены условия леммы 6.4.3 для задач (6.4.52), (6.4.51). ■

Замечание 6.4.6. Пусть $K = D = \{1,\ldots,q\}$, но, в отличие от (6.4.20), $\mathrm{nl}_{k,d}^\Lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } d = k, \\ >0, & \text{если } d \neq k, \end{cases}$ $k,d = 1,\ldots,q$. Тогда согласно (6.4.50)

$$\mathrm{N}^\Lambda(x) = \min_{1\leqslant d\leqslant q} \mathrm{N}_d^\Lambda(x) = \min_{1\leqslant d\leqslant q} \theta \circ g^{\xi,\varkappa}(x,d) = \theta \circ g^\xi(x),\ x \in X,\ d = 1,\ldots,q. \tag{6.4.56}$$

В этом случае в (6.4.46)

$$D_*(x) = \{d \in \{1,\ldots,q\},\ g^{\xi,\varkappa}(x,d) = \max_{1\leqslant k\leqslant q} g^{\xi,\varkappa}(x,k) = g^\xi(x)\},\ x \in X, \tag{6.4.57}$$

и правило $\pi_*^{\delta|\xi}$ (максимальной возможности) в (6.4.54) минимизирует необходимость *ошибки идентификации*, ибо в (6.4.55) $\mathrm{N\,L}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi}) = \mathrm{N\,E}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi}) = \inf_{x\in X} \mathrm{N}^\Lambda(x) = \inf_{x\in X} \theta \circ g^\xi(x) = 0$.

Замечание 6.4.7. Теоремы 6.4.2, 6.4.3 характеризуют оптимальные правила идентификации и в том случае, когда наблюдения за системой невозможны. Для этого, например, в условиях теоремы 6.4.3 $g^{\xi,\varkappa}(x,k)$ следует заменить на $g^\varkappa(k) = \sup_{x\in X} g^{\xi,\varkappa}(x,k)$, $\mathrm{N}_d^\Lambda(x)$ — на $\mathrm{N}_d^\Lambda = \min_{1\leqslant k\leqslant q} \max\left\{\mathrm{nl}_{k,d}^\Lambda,\ \theta \circ g^\varkappa(k)\right\}$, $\pi^{\delta|\xi}(d|x)$ — на $\pi^\delta(d)$, $x \in X$, $k \in 1,\ldots,q$, $d \in 1,\ldots,q$, см. замечание 6.4.4. В этом случае оптимальное нечеткое правило $\pi_*^\delta(d)$ определится условиями: $\max_{1\leqslant s\leqslant t} \pi_*^\delta(d_s) = 1$, $\mathrm{N}^\Lambda \stackrel{\triangle}{=} \min_{1\leqslant d\leqslant n} \mathrm{N}_d^\Lambda = \mathrm{N}_{d_1}^\Lambda = \ldots = \mathrm{N}_{d_t}^\Lambda < \mathrm{N}_{d_{t+1}}^\Lambda \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{N}_{d_q}^\Lambda$, и для него $\mathrm{N}_d^\Lambda \leqslant \mathrm{N}_d^\Lambda(x)$, $d = 1,\ldots,q$, $x \in X$. Поэтому в случае невозможности наблюдения за системой $\mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^\delta) = \mathrm{N}^\Lambda \leqslant \inf_{x\in X} \mathrm{N}^\Lambda(x) = \mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi})$, т. е. *в то время как при невозможности наблюдения за системой возможность потерь, сопутствующих решению $\pi^{*\delta}$, возрастает, необходимость потерь, сопутствующих решению π_*^δ, убывает.* Дело, грубо говоря, в том, что чем меньше информации о системе используется при принятии решения о ее состоянии, тем более верно, что любое решение $\delta = d$ о ее состоянии нельзя считать непременно ошибочным.

Этот вывод в еще большей степени относится к ситуации, в которой неизвестно априорное распределение состояний системы, поскольку при этом $\mathrm{N}_d = \min_{1\leqslant k\leqslant q} \max\left\{\mathrm{nl}_{k,d}^\Lambda,\ \theta \circ g^\varkappa(k)\right\} \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant q} \mathrm{nl}_{k,d}^\Lambda$, $d = 1,\ldots,q$, и, следовательно, необходимость потерь еще меньше, ибо когда все состояния системы равновозможны, $g^\varkappa(k) = 1$, $k = 1,\ldots,q$, любое решение о ее состоянии тем более нельзя считать непременно ошибочным.

Замечание 6.4.8. Поскольку в теореме 6.4.3 правило $\pi_*^{\delta|\xi}$ всегда можно выбрать четким, то есть так, чтобы для любого $x \in X$ $\pi_*^{\delta|\xi}(d(x)|x) = 1$ для некоторого $d = d_*(x) \in D_*(x)$ и $\pi_*^{\delta|\xi}(d|x) = 0$ для всех остальных $d \neq d_*(x)$, то *фазификация правила идентификации не позволяет улучшить качество решения*, и имеет смысл рассмотреть задачу построения непосредственно четкого правила.

Чтобы охарактеризовать четкие правила, минимизирующие необходимость потерь, рассмотрим выражение для необходимости потерь

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(X.) = \inf_{x\in X} \min_{1\leqslant d\leqslant q} \max\left\{\theta \circ \chi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}_d^{\Lambda}(x)\right\}, \tag{6.4.58}$$

свойственных правилу решения, определенному разбиением $X.$; в (6.4.58) $\chi^{\delta|\xi}(d|x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X_d, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus X_d, \end{cases}$ $d = 1,\ldots,q$, $x \in X$, — индикаторная функция множества X_d, $d = 1,\ldots,q$, и $\mathrm{N}_d^{\Lambda}(x)$ определено в (6.4.50). Следующая теорема является частным случаем теоремы 6.4.3.

Теорема 6.4.3*. *Решением задачи на минимум*

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(X.) \sim \min_{X.} \tag{6.4.59}$$

для необходимости потерь (6.4.58) *является любое разбиение* $X_*.$, *удовлетворяющее условиям*

$$X_{*d} \subset \left\{x \in X,\ \mathrm{N}_d^{\Lambda}(x) = \mathrm{N}^{\Lambda}(x) \triangleq \min_{1\leqslant d'\leqslant q} \mathrm{N}_{d'}^{\Lambda}(x)\right\},\ d = 1,\ldots,q. \tag{6.4.60}$$

При этом для любого разбиения $X.$

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(X_*.) = \inf_{x\in X} \mathrm{N}(x) \leqslant \mathrm{NL}^{\Lambda}(X.).$$

■

Замечание 6.4.8*. Как и при минимизации возможности потерь, всякое четкое правило идентификации, минимизирующее необходимость потерь, можно определить как функцию $d(\cdot)\colon X \to D$ так, чтобы при наблюдениях $\xi = x$ значение $d(x)$ определяло решение о состоянии системы. Согласно теореме 6.4.3* любая функция $d_*(\cdot)\colon X \to D$, удовлетворяющая условию $d_*(x) = d$, если $x \in X_{*d}$, $d \in D$, или, что то же самое, $d_*(x) = \max\limits_{1\leqslant d\leqslant q}(d \cdot \chi_{X_{*d}}(x))$, $x \in X$, определит оптимальное четкое правило идентификации. Разумеется, его можно найти и непосредственно, решив для каждого $x \in X$ задачу на минимум $N_d^{\Lambda}(x) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant q} \max\left\{\mathrm{n}l_{k,d}^{\Lambda},\ \theta \circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\right\} \sim \min\limits_{d\in D}$. Всякое ее решение $d = d_*(x)$ определяется условием $d_*(x) \in \mathrm{D}_*(x)$, $x \in X$, см. замечание 6.4.5, и определяет оптимальное четкое правило идентификации, которое в случае, рассмотренном в замечании 6.4.6, называется правилом максимальной возможности, поскольку согласно (6.4.56) $d_*(x) = d$, если $g^{\xi,\varkappa}(x,d) = g^{\xi}(x)$, $x \in X$, $d \in D$.

Замечание 6.4.9. В тех нередких случаях, когда априорное распределение $g^{\varkappa}(\cdot)$ возможностей состояний системы неизвестно, необходимость маргинальных потерь для каждого состояния $k = 1, \ldots, q$

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k) = \inf_{x \in X} \min_{1 \leqslant d \leqslant n} \max\left\{\mathrm{n}l^{\Lambda}_{k,d}, \theta \circ \pi^{\delta|\xi}(d|x), \theta \circ g^{\xi|\varkappa}(x|k)\right\} \tag{6.4.61}$$

и оптимальное правило $\pi^{\delta|\xi}_{+}$ следует определять согласно условию

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}_{+}|k) = \min_{\pi^{\delta|\xi}} \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k), \tag{6.4.62}$$

формально совпадающему с условием (6.4.51), если в последнем $g^{\xi,\varkappa}(x,k) = \min\{g^{\xi|\varkappa}(x|k), g^{\varkappa}(k)\}$ и априорное распределение $g^{\varkappa}(k) = 1$, $k = 1, \ldots, q$.

В заключение рассмотрим графическую иллюстрацию решения (6.4.59), подобную иллюстрации решения (6.4.27) на рис. 6.4.1. Для этого запишем задачу (6.4.59) в виде

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(X_{*}.) = \min_{X.} \min_{1 \leqslant k \leqslant q} \max\{\theta \circ g^{\varkappa}(k), \mathrm{N}^{\Lambda}_{k}(X.)\}, \tag{6.4.63}$$

где $\mathrm{N}^{\Lambda}_{k}(X.) = \min\limits_{1 \leqslant d \leqslant q} \inf\limits_{x \in X_d} \max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}_{kd}, \theta \circ g^{\xi|\varkappa}(x|k)\}$, $k = 1, \ldots, q$, см. (6.4.61), $X. \sim \{X_1, \ldots, X_q\}$. Если возможности состояний $g^{\varkappa}(k)$, $k = 1, \ldots, q$, неизвестны, то согласно замечанию 6.4.9 в (6.4.63) следует положить $g^{\varkappa}(k) = 1$, $k = 1, \ldots, q$, и рассмотреть задачу

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(X_{+}.) = \min_{X.} \min_{1 \leqslant k \leqslant q} \mathrm{N}^{\Lambda}_{k}(X.). \tag{6.4.64}$$

Далее в (6.4.63) и в (6.4.64), как в (6.4.32), (6.4.33), $q = 2$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и в (6.4.63), как в (6.4.32), $g^{\varkappa}(1) = 1 > g^{\varkappa}(2) = \mathrm{p} \geqslant 0$.

На рис. 6.4.2 S — множество точек $(\mathrm{N}^{\Lambda(i)}_{1}(X.), (\mathrm{N}^{\Lambda(i)}_{2}(X.))$, $i = 1, \ldots, 8$ $(= 2^3)$, координаты которых суть необходимости $\mathrm{N}^{\Lambda}_{k}(X^{(i)}_{.}) = \theta\Big(\max\limits_{1 \leqslant d \leqslant q} \sup\limits_{x \in X_d} \min\left\{\theta^{-1} \circ \mathrm{n}l^{\Lambda}_{kd}, g^{\xi|\varkappa}(x|k)\right\}\Big)$, $k = 1, 2$, маргинальных потерь, см. (6.4.61), и множества

$$\begin{gathered}\beta(c) = \{(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) \in [0,1] \times [0,1],\ \min\big\{\max\{\theta \circ g^{\varkappa}(1), \mathrm{N}_1\},\\ \max\{\theta \circ g^{\varkappa}(2), \mathrm{N}_2\}\big\} = c\} = \{(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2),\ \min\big\{\mathrm{N}_1, \max\{\theta(\mathrm{p}), \mathrm{N}_2\}\big\} = c\}\end{gathered} \tag{6.4.65}$$

для $c \in (\theta(\mathrm{p}), 1]$ на рис. 6.4.2, *а*, для $c = \theta(\mathrm{p})$ на рис. 6.4.2, *б* и для $c \in [0, \theta(\mathrm{p}))$ на рис. 6.4.2, *в*.

В задаче (6.4.63) $\mathrm{NL}^{\Lambda}(X_{*}.)$ равно минимальному значению $c = c_{*} \in [0,1]$, при котором $S(c) \triangleq \beta(c) \cap S \neq \varnothing$, и $X_{*}.$ — любое разбиение X, удовлетворяющее условию $(\mathrm{N}^{\Lambda}_{1}(X_{*}.), \mathrm{N}^{\Lambda}_{2}(X_{*}.)) \in S(c_{*})$, см. рис. 6.4.2, *в*.

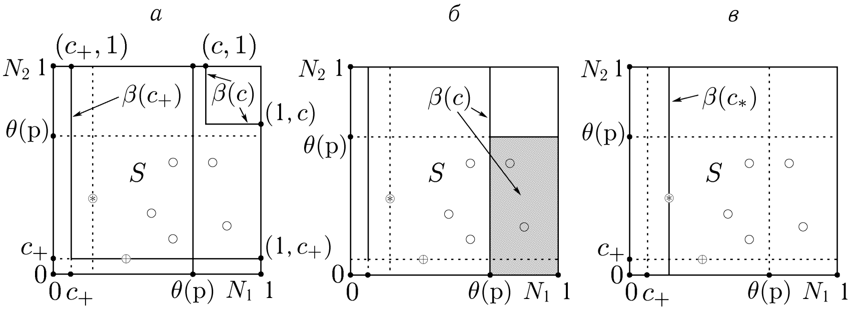


Рис. 6.4.2. S — множество точек $(N_1,N_2) = (N_1^\Lambda(X_\cdot^{(i)}), N_2^\Lambda(X_\cdot^{(i)}))$, $i=1,\ldots,8$. *а*) Множество $\beta(c) = \{(N_1,N_2), \min\{N_1,N_2\} = c\}$ в (6.4.65) для $c \in (\theta(\mathrm{p}),1]$; множество $\beta(c_+) = \{(N_1,N_2), \min\{N_1,N_2\} = c_+\}$ в (6.4.65) при $p=1$, $c_+ \in [0,1]$, содержащее точку $\oplus = (N_1^\Lambda(X_{+\cdot}), N_2^\Lambda(X_{+\cdot})) \in S(c_+)$ при наименьшем $c = c_+ \in [0,1]$, при котором $S(c) \neq \varnothing$, $c \in [0,1]$; $c_+ = \mathrm{N\,L}^\Lambda(X_{+\cdot})$, $X_{+\cdot}$ — решение задачи (6.4.64).
б) Множество $\beta(c) = \{N_1 = c, 0 \leqslant N_2 \leqslant 1\} \cup \{N_1 \geqslant c, N_2 \leqslant c\}$ в (6.4.65) при $c = \theta(\mathrm{p})$.
в) Множество $\beta(c_*) = \{N_1 = c_*, 0 \leqslant N_2 \leqslant 1\}$ в (6.4.65), содержащее точку $\circledast = (N_1(X_{*\cdot}), N_2(X_{*\cdot}))$ при наименьшем значении $c = c_* \in [0,\theta(\mathrm{p}))$, при котором $\{N_1 = c, 0 \leqslant N_2 \leqslant 1\} \cap S \neq \varnothing$; $c_* = \mathrm{N\,L}(X_{*\cdot})$, $X_{*\cdot}$ — решение задачи (6.4.63)

В задаче (6.4.64) $\mathrm{p}=1$ и $\mathrm{NL}^\Lambda(X_{+\cdot})$ равно минимальному значению $c = c_+ \in [0,1]$, при котором $S(c) = \{(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2), \min\{\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2\} = c\} \cap S \neq \varnothing$, а $X_{+\cdot}$ — любое разбиение, при котором $(\mathrm{N}_1^\Lambda(X_{+\cdot}), \mathrm{N}_2^\Lambda(X_{+\cdot})) \in S(c_+)$, см. рис. 6.4.2, *а*. В любом случае $\mathrm{NL}^\Lambda(X_{*\cdot}) \geqslant \mathrm{NL}^\Lambda(X_{+\cdot})$, см. замечание 6.4.7.

6.4.10. Минимизация необходимости потерь, дополнительной к возможности потерь. *Дополнительная* к возможности потерь $\mathrm{P\,L}^\Lambda(\pi^{\delta|\xi})$ (6.4.6) необходимость потерь

$$\mathrm{N\,L}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \theta\bigl(\sup_{x\in X}\sup_{\substack{k\in K\\ d\in D}} \min\{\mathrm{p}l_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}, \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\}\bigr) = \\ = \theta\Bigl(\sup_{(k,d)\in K\times D} \min\bigl\{\mathrm{p}l_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}, g^{\varkappa,\delta}(k,d)\bigr\}\Bigr), \qquad (6.4.66)$$

сопутствующих нечеткому правилу решения $\pi^{\delta|\xi}$, отличается от необходимости (6.4.49) тем, что функция $\theta^{-1}\circ \mathrm{n}l_{k,d}^\Lambda$, $k\in K$, $d\in D$, в (6.4.66) заменена на индикаторную функцию $\mathrm{p}l_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}$, $k\in K$, $d\in D$, нечеткого множества $(K\times D)\setminus\Lambda$, дополнительного к Λ, которую в этом параграфе будем считать известной. Значение $\mathrm{p}l_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}$ возможности покрытия точки $(k,d)\in K\times D$ нечетким множеством $(K\times D)\setminus\Lambda$ будем интерпретировать как *возможность непотерь* в ситуации, в которой система, находящаяся в состоянии k, используется так, как если бы она находилась в состоянии d. Соответственно *значение* $\theta \circ \mathrm{pl}_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}$ *будем интерпретировать как необходимость потерь* в этой ситуации (потери необходимы, если непотери невозможны).

Согласно определению

$$\max\{\mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda}, \mathrm{pl}_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}\} = 1,\ (k,d) \in K \times D, \tag{6.4.67}$$

— возможность того, что точка (k,d) покрыта одним из нечетких множеств Λ или $(K \times D) \setminus \Lambda$, а это определяет связь между возможностью $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$ (6.4.6) и необходимостью $\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$ (6.4.66) потерь:

$$\max\Big\{\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}), \theta\big(\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})\big)\Big\} = \max\Big\{ \sup_{(k,d)\in K\times D} \min\big\{\mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda}, g^{\varkappa,\delta}(k,d)\big\}, \sup_{(k,d)\in K\times D} \min\Big\{\mathrm{pl}_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}, g^{\varkappa,\delta}(k,d)\Big\}\Big\} = \tag{6.4.68}$$
$$= \sup_{(k,d)\in K\times D} \min\big\{ \max\{\mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda}, \mathrm{pl}_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}\}, g^{\varkappa,\delta}(k,d)\big\} = \sup_{(k,d)\in K\times D} g^{\varkappa,\delta}(k,d) = 1,$$

где распределение $g^{\varkappa,\delta}(\cdot,\cdot)$ определено в (6.4.4). Из соотношения (6.4.68) следует, что для любого нечеткого правила идентификации $\pi^{\delta|\xi}$

$$\begin{aligned} &\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) < 1 \Rightarrow \mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = 0;\\ &\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) > 0 \Rightarrow \mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = 1. \end{aligned} \tag{6.4.69}$$

Согласно соотношению (6.4.67), связывающему в общем случае индикаторную функцию $\mathrm{pl}_{\cdot,\cdot}^{(K\times D)\setminus\Lambda}$ с индикаторной функцией $\mathrm{pl}_{\cdot,\cdot}^{\Lambda}$,

$$\mathrm{pl}_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda} = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } \mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda} < 1, \\ \leqslant 1, & \text{если } \mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda} = 1, \end{cases} \qquad (k,d) \in K \times D. \tag{6.4.70}$$

Можно уточнить условия (6.4.70), условившись в качестве Λ использовать Р-полные нечеткие множества [43], которые охарактеризуем следующим образом, см. § 1.13 гл. 1.

Пусть $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta})$ — пространство с возможностью, η — канонический нечеткий элемент, $g^{\eta}(\cdot)$ — его распределение и для любого $A \in \mathcal{P}(Y)$ $\mathrm{P}^{\eta}(A) = \sup_{y\in A} g^{\eta}(y)$. Нечеткое множество Λ зададим многозначным отображением $\Lambda^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(K \times D)$ как образ Λ^{η} нечеткого элемента η. Индикаторная функция Λ

$$\mathrm{pl}_{k,d}^{\Lambda} = \sup\{g^{\eta}(y)\,|\,y \in Y,\ (k,d) \in \Lambda^{y}\} = \sup\{g^{\eta}(y)|y \in Y,\ y \in \Lambda_{k,d}\},\quad (k,d) \in K \times D. \tag{6.4.71}$$

В (6.4.71) $\Lambda_{\cdot,\cdot}\colon K \times D \to \mathcal{P}(Y)$ — отображение, обратное к $\Lambda^{\cdot}$,

$$\Lambda_{k,d} = \{y \in Y,\ (k,d) \in \Lambda^{y}\},\ (k,d) \in K \times D, \tag{6.4.72}$$

поэтому включения $(k,d) \in \Lambda^{y}$ и $y \in \Lambda_{k,d}$ для всех $y \in Y$ и $(k,d) \in K \times D$ эквивалентны.

Определим нечеткое множество $\overline{\Lambda}$ так, чтобы

$$\overline{\Lambda}_{k,d} = \{y \in Y, g^{\eta}(y) \leqslant \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d}\},\ (k,d) \in K \times D, \tag{6.4.73}$$

и соответственно $\overline{\Lambda}^{y} = \{(k,d) \in K \times D,\ y \in \overline{\Lambda}_{k,d}\},\ y \in Y$; $\Gamma_{\overline{\Lambda}} = \bigcup\limits_{(k,d)\in K\times D} \big(\overline{\Lambda}_{k,d} \times \{(k,d)\}\big) \subset Y \times (K \times D)$ — график $\overline{\Lambda}$.

Нечеткое множество $\overline{\Lambda}$ *называется* P^{η}*-пополнением нечеткого множества* Λ, *последнее называется* P^{η}*-полным, если* $\Lambda = \overline{\Lambda}$.

P^{η}-пополнение нечеткого множества обладает следующими свойствами: для любых нечетких множеств Λ, Λ_1 и Λ_2

- $\mathrm{p}l^{\overline{\Lambda}}_{k,d} = \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d},\ (k,d) \in K \times D$;
- $\mathrm{p}l^{\overline{\Lambda}_1 \cap \overline{\Lambda}_2}_{k,d} = \min\{\mathrm{p}l^{\overline{\Lambda}_1}_{k,d}, \mathrm{p}l^{\overline{\Lambda}_2}_{k,d}\} = \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda_1}_{k,d}, \mathrm{p}l^{\Lambda_2}_{k,d}\} \geqslant \mathrm{p}l^{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}_{k,d},\ (k,d) \in$ $\in K \times D$;
- $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \Rightarrow \overline{\Lambda}_1 \subset \overline{\Lambda}_2 \Leftrightarrow \mathrm{p}l^{\overline{\Lambda}_1}_{k,d} \leqslant \mathrm{p}l^{\overline{\Lambda}_2}_{k,d},\ (k,d) \in K \times D$;
- $\overline{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} = \overline{\Lambda}_1 \cup \overline{\Lambda}_2,\ \overline{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} = \overline{\Lambda}_1 \cap \overline{\Lambda}_2;\ \ \Lambda \subset \overline{\Lambda} = \overline{\overline{\Lambda}}$.

Для P^{η}-полных нечетких множеств характерен следующий факт, уточняющий (6.4.70).

Лемма 6.4.4. *Пусть* Λ — P^{η}*-полное нечеткое множество. Тогда*

$$\mathrm{p}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} < 1, \\ 0, & \text{если } \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} = 1, \end{cases} \qquad (k,d) \in K \times D.$$

Доказательство. Согласно определениям (6.4.71), (6.4.73) индикаторная функция $(K \times D) \setminus \Lambda$

$$\mathrm{p}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d} = \sup\Big\{g^{\eta}(y) \,\Big|\, y \in Y \setminus \Lambda_{k,d}\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{g^{\eta}(y) \,\Big|\, y \in Y,\ g^{\eta}(y) > \sup_{y' \in \Lambda_{k,d}} g^{\eta}(y')\Big\} = \sup\Big\{g^{\eta}(y) \,\Big|\, y \in Y,$$
$$g^{\eta}(y) > \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d}\Big\} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} < 1, \\ 0, & \text{если } \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} = 1, \end{cases} \ (k,d) \in K \times D. \qquad \blacksquare$$

Заметим также, что для P^{η}-полного Λ

$$\mathrm{p}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d} \geqslant \theta \circ \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} = \begin{cases} \leqslant 1, & \text{если } \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} < 1, \\ 0, & \text{если } \mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} = 1, \end{cases} \ (k,d) \in K \times D. \tag{6.4.74}$$

Рассмотрим задачу на минимум

$$\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \inf_{x\in X} \min_{1\leqslant d\leqslant q} \max\Big\{\theta \circ \pi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{d}(x)\Big\} \sim \min_{\pi^{\delta|\xi}}, \tag{6.4.75}$$

для необходимости потерь (6.4.66), считая, что $K = D = \{1, \ldots, q\}$

и Λ — P^η-полно, где

$$\mathrm{N}_d^{(K\times D)\setminus\Lambda}(x) = \min_{1\leqslant k\leqslant q} \max\left\{\theta\circ \mathrm{p}l_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}, \theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\right\} = \\ = \min_{1\leqslant k\leqslant q}\begin{cases}\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k), & \text{если } \mathrm{p}l_{k,d}^{\Lambda}<1,\\ 1, & \text{если } \mathrm{p}l_{k,d}^{\Lambda}=1,\end{cases} = \tag{6.4.76}$$

$$= \min\bigl\{\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\,|\,k\in\{1,\ldots,q\},\ \mathrm{p}l_{k,d}^{\Lambda}<1\bigr\},\ d\in\{1,\ldots,q\},\ x\in X.$$

Всякое ее решение $\overline{\pi}_*^{\delta|\xi}$ описывается теоремой 6.4.3, если в последней $\mathrm{N}_d^{\Lambda}(x)$ заменено на $\mathrm{N}_d^{(K\times D)\setminus\Lambda}(x)$ (6.4.76), при этом в силу неравенства (6.4.74) $\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\overline{\pi}_*^{\delta|\xi}) \leqslant \mathrm{NL}(\pi_*^{\delta|\xi})$.

Замечание 6.4.10. Поскольку значение $\mathrm{p}l_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda}$ интерпретируется как возможность непотерь в ситуации, когда система, находящаяся в состоянии $\varkappa = k$, используется так, как если бы она находилась в состоянии d, то задача (6.4.75) минимизации необходимости потерь эквивалентна задаче *максимизации возможности непотерь*

$$\sup_{x\in X}\max_{\substack{1\leqslant k\leqslant q\\ 1\leqslant d\leqslant q}}\min\bigl\{\mathrm{p}l_{k,d}^{(K\times D)\setminus\Lambda},\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\bigr\} = \theta\bigl(\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})\bigr) \sim \max_{\pi^{\delta|\xi}}, \tag{6.4.77}$$

дополнительной к задаче (6.4.9) *минимизации возможности потерь*.

В заключение заметим, что соотношения (6.4.69) позволяют установить следующие связи между разрешимостью задач (6.4.9) и (6.4.75) и между их решениями.

Лемма 6.4.5. 1. *Если разрешима задача* (6.4.9), $\pi^{*\ \delta|\xi}$ — *некоторое ее решение*, *причем* $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\ \delta|\xi})<1$, *то разрешима и задача* (6.4.75), $\pi^{*\ \delta|\xi}$ — *ее решение*, *причем* $\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{*\ \delta|\xi}) = 0$.

2. *Если разрешима задача* (6.4.75), $\pi_*^{\delta|\xi}$ — *некоторое ее решение*, *причем* $\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi_*^{\delta|\xi})>0$, *то разрешима и задача* (6.4.9), $\pi_*^{\delta|\xi}$ — *ее решение*, *причем* $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi_*^{\delta|\xi}) = 1$.

Доказательство. Первое утверждение следует из первой импликации в (6.4.69), поскольку для любого $\pi^{\delta|\xi}$ $\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})\geqslant 0$. Для доказательства второго утверждения заметим, что если задача (6.4.9) разрешима и $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\ \delta|\xi}) = \min\limits_{\pi^{\delta|\xi}}\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})<1$, то $\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{*\ \delta|\xi}) = 0$ и, следовательно, $\pi_*^{\delta|\xi}$ не минимизировало бы $\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$. ■

6.4.11. Сравнительный анализ вероятностной и возможностной моделей идентификации. В этом параграфе сравниваются вероятностная и возможностная модели идентификации состояния системы, охарактеризованной и как вероятностная, и как возможностная распределениями вероятностей

$$\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x,k),\ x\in X,\ k\in K, \tag{6.4.78}$$

и, соответственно, — возможностей

$$\mathrm{p}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varkappa}}(x,k),\ x\in X,\ k\in K, \tag{6.4.79}$$

значений случайной $\xi,\varkappa$ и нечеткой $\widetilde{\xi},\widetilde{\varkappa}$ пар «наблюдение, состояние». В вероятностной и в возможностной *моделях идентификации* кроме распределений (6.4.78) и (6.4.79) заданы случайный η и нечеткий $\widetilde{\eta}$ элементы [1], канонические для пространств [2] $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{Pr}_Y)$ и $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}_Y)$, определяющие вероятность Pr_Y и возможность P_Y формулами

$$\mathrm{Pr}_Y(A)=\mathrm{Pr}^{\eta}(\eta\in A)=\sum_{y\in A}\mathrm{pr}^{\eta}(y),$$

$$\mathrm{P}_Y(A)=\mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta}\in A)=\sup_{y\in A}\mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(y),\ A\in\mathcal{P}(Y),$$

и многозначные отображения

$$\Lambda^{\cdot}\colon Y\to\mathcal{P}(K\times D),\ \widetilde{\Lambda}^{\cdot}\colon Y\to\mathcal{P}(K\times D), \tag{6.4.80}$$

определяющие случайное и соответственно нечеткое множества на $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{Pr}_Y)$ и на $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}_Y)$ как образы Λ^{η} и $\widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}$ случайного η и нечеткого $\widetilde{\eta}$ элементов.

Напомним, что значения [3]

$$\begin{aligned} l_{k,d}&=\mathrm{Pr}^{\eta}((k,d)\in\Lambda^{\eta})=\mathrm{Pr}_Y(\{y\in Y,\ (k,d)\in\Lambda^{y}\})=\mathrm{Pr}^{\eta}(\eta\in\Lambda_{(k,d)})=\\ &=\mathrm{Pr}_Y(\{y\in Y,\ y\in\Lambda_{(k,d)}\})=\sum_{y\in\Lambda_{(k,d)}}\mathrm{pr}^{\eta}(y),\ (k,d)\in K\times D, \end{aligned} \tag{6.4.81}$$

и

$$\begin{aligned} \widetilde{l}_{k,d}&=\mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}((k,d)\in\widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}})=\mathrm{P}_Y(\{y\in Y,\ (k,d)\in\widetilde{\Lambda}^{y}\})=\mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}(\widetilde{\eta}\in\widetilde{\Lambda}_{(k,d)})=\\ &=\mathrm{P}_Y(\{y\in Y,\ y\in\widetilde{\Lambda}_{(k,d)}\})=\sup_{y\in\widetilde{\Lambda}_{(k,d)}}\mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(y),\ (k,d)\in K\times D, \end{aligned} \tag{6.4.82}$$

интерпретируются как вероятность и соответственно — как возможность потерь, неудач и т. п. неприятностей, сопутствующих решению

---

[1] Пара $(\xi,\varkappa)$ и η независимы как случайные элементы, $(\widetilde{\xi},\widetilde{\varkappa})$ и $\widetilde{\eta}$ — как нечеткие.

[2] В этом параграфе X,Y,K и D для простоты суть конечные или счетные множества, причем $K=D=\{1,\dots,q\}$.

[3] $\Lambda_{\cdot}\colon K\times D\to\mathcal{P}(Y)$ в (6.4.81) и $\widetilde{\Lambda}_{\cdot}\colon K\times D\to\mathcal{P}(Y)$ в (6.4.82) суть многозначные отображения, обратные соответственно к $\Lambda^{\cdot}$ и к $\widetilde{\Lambda}^{\cdot}$ в (6.4.80). Пары $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{Pr}_Y)$, $\Lambda^{\cdot}$ и $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}_Y)$, $\widetilde{\Lambda}^{\cdot}$ призваны охарактеризовать последствия неверной идентификации состояния системы при вероятностной (6.4.78) и при возможностной (6.4.79) его моделях. В этом параграфе отображения $\Lambda^{\cdot}$ и $\widetilde{\Lambda}^{\cdot}$ фиксированы и для их и. ф. о. п. использованы упрощенные обозначения $l_{k,d}$ и $\widetilde{l}_{k,d}$ вместо $\mathrm{pr}l_{k,d}$ и $\mathrm{p}l_{k,d}$, $(k,d)\in K\times D$ соответственно.

$d \in D$ о состоянии системы, находящейся в состоянии $k \in K$, см. § 6.3.3, 6.4.1. Вероятности (6.4.81) и возможности (6.4.82) потерь вместе с распределениями (6.4.78) и (6.4.79) определяют модели идентификации состояния системы, как вероятностной и, соответственно, как возможностной.

В этом параграфе условимся считать тройки $(\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot), \mathrm{pr}^{\eta}(\cdot), \Lambda^{\cdot})$ и $(\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(\cdot|\cdot), \mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(\cdot), \widetilde{\Lambda}^{\cdot})$ *вероятностной и соответственно возможностной моделями идентификации*, в которых распределения переходной вероятности $\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}$ и переходной возможности $\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}$ характеризуют свойства вероятностной и соответственно возможностной систем, а пары $(\mathrm{pr}^{\eta}(\cdot), \Lambda^{\cdot})$ и $(\mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(\cdot), \widetilde{\Lambda}^{\cdot})$, определяющие вероятности и соответственно возможности потерь, сопутствующих ошибочной идентификации, должны быть заданы субъектом, *принимающим* решения и осознающим последствия неверной идентификации.

6.4.11.1. Вероятностная модель идентификации. Напомним, что в вероятностной модели правило идентификации состояния системы, минимизирующее *вероятность потерь*, см. следствие 6.1.1, можно определить как любую функцию $d^*(\cdot)\colon X \to D$, названную в § 6.1.2 решающей, удовлетворяющую условию

$$d^*(x) \in D^*(x) = \{d \in D,\ S_d(\ |x) = \min_{d' \in D} S_{d'}(\ |x)\},\ x \in X, \tag{6.4.83}$$

в котором [1]

$$S_d(|x) = S_d(x)/\mathrm{pr}^{\xi}(x) = \sum_{k \in K} l_{k,d}\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x),\ k, d \in K = D = \{1, \ldots, q\}, \tag{6.4.84}$$

где $S_d(\cdot)$, $d = 1, \ldots, q$, определены в (6.1.7) и $\mathrm{pr}^{\xi}(x) = \sum\limits_{k \in K} \mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x, k)$, $x \in X$.

Для правила d^*

$$S_{d^*(x)}(|x) = \sum_{k \in K} l_{k,d^*(x)}\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x)$$

— условная при условии $\xi = x$ вероятность потерь, а

$$\mathrm{Pr}\,\mathrm{L}(d^*) = \sum_{x \in X} S_{d^*(x)}(|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x) \tag{6.4.84*}$$

— вероятность потерь, сопутствующих правилу d^* (6.4.84).

[1] Распределение $\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}$ в (6.4.78) будем считать заданным распределением pr^{ξ} и переходной вероятностью $\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}$: $\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}(x, k) = \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x)$, $x \in X$, $k \in K$. При этом $\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x)$ можно считать вариантом условной при условии $\xi = x$ вероятности равенства $\varkappa = k$.

Правило идентификации d_*, максимизирующее вероятность непотерь, определим условием

$$d_*(x) \in D_*(x) = \{d \in D,\ \overline{S}_d(|x) = \max_{d' \in D} \overline{S}_{d'}(|x)\},\ x \in X, \tag{6.4.85}$$

в котором

$$\overline{S}_d(|x) = \sum_{k \in K} \bar{l}_{k,d} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x) = 1 - S_d(|x), \tag{6.4.86}$$

$$\bar{l}_{k,d} = 1 - l_{k,d},\ k, d \in K = D.$$

Для правила d_*

$$\overline{S}_{d_*(x)}(|x) = \sum_{k \in K} \bar{l}_{k,d} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x) = 1 - S_{d^*(x)}(|x) \tag{6.4.87}$$

— условная при условии $\xi = x$ вероятность непотерь, а

$$\mathrm{Pr}\,\overline{\mathrm{L}}(d_*) = \sum_{x \in X} \overline{S}_{d_*(x)}(|x) \mathrm{pr}^{\xi}(x) = 1 - \mathrm{Pr}\,\mathrm{L}(d^*) \tag{6.4.88}$$

— вероятность непотерь, сопутствующих идентификации по любому правилу d_*, удовлетворяющему условиям (6.4.85).

Для вероятностной модели идентификации $D^*(x) = D_*(x)$, $x \in X$, и правила d_* и d^* эквивалентны, но для возможностной модели их аналоги, как будет показано далее, вообще говоря, не эквивалентны.

Замечание 6.4.11. Согласно равенствам (6.4.81) и (6.4.84)

$$\begin{aligned} S_d(|x) &= \sum_{k \in K} \mathrm{Pr}^{\eta}((k,d) \in \Lambda^{\eta}) \mathrm{Pr}^{\varkappa|x}(\varkappa = k) = \\ &= (\mathrm{Pr}^{\eta} \times \mathrm{Pr}^{\varkappa|x})((\varkappa, d) \in \Lambda^{\eta}) = (\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x})(\{(y,k) \in Y \times K, (k,d) \in \Lambda^y\}) = \\ &= \sum_{\substack{(y,k) \in Y \times K, \\ (k,d) \in \Lambda^y}} \mathrm{pr}^{\eta}(y) \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x), \end{aligned} \tag{6.4.89}$$

где $\varkappa$ — случайная величина, каноническая для вероятностных пространств семейства $(K, \mathcal{P}(K), \mathrm{Pr}_{K|x})$, $x \in X$, определяющая вероятность $\mathrm{Pr}^{\varkappa|x}$ по формуле

$$\mathrm{Pr}^{\varkappa|x}(\varkappa \in A) = \mathrm{Pr}_{K|x}(A) = \sum_{k \in A} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x),\ A \in \mathcal{P}(K),\ x \in X, \tag{6.4.90}$$

как переходную для пространств $(X, \mathcal{P}(X))$, $(K, \mathcal{P}(K))$, а $S_d(|x)$ (6.4.89) при каждом $x \in X$ есть $\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x}$-вероятность события

$$\{(y,k) \in Y \times K,\ (k,d) \in \Lambda^y\},\ d \in D, \tag{6.4.91}$$

определенная в соответствующем вероятностном пространстве семейства

$$(Y \times K,\, \mathcal{P}(Y \times K),\, \mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x}),\ x \in X. \tag{6.4.92}$$

Случайные элементы η и $\varkappa$, как это отражено в (6.4.89), независимы при каждом $x \in X$.

Аналогично в (6.4.86)

$$\begin{aligned}\overline{S}_d(|x) = \sum_{k\in K} \mathrm{Pr}^{\eta} \times \mathrm{Pr}^{\varkappa|x}((\varkappa, d) \in (K \times D)\backslash\Lambda^{\eta}) = \\ = \mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x}(\{(y,k) \in Y \times K,\ (k,d) \in (K\times D)\backslash\Lambda^{y}\}) = \\ = \sum_{\substack{(y,k)\in Y\times K,\\ (k,d)\in(K\times D)\backslash\Lambda^y}} \mathrm{pr}^{\eta}(y)\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x) \quad (6.4.93)\end{aligned}$$

есть $\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x}$-вероятность события

$$\{(y,k) \in (Y\times K),\ (k,d) \in (K\times D)\backslash\Lambda^{y}\},\ \ d \in D, \quad (6.4.94)$$

противоположного событию (6.4.91), определенная в соответствующем вероятностном пространстве семейства (6.4.92). Как следствие равенств (6.4.89) и (6.4.93)

$$S_d(|x) + \overline{S}_d(|x) = 1,\ d\in D,\ x\in X. \quad (6.4.95)$$

Замечание 6.4.12. Если в (6.4.84), (6.4.86) $l_{k,d} = \begin{cases} 0, & k = d,\\ 1, & k \neq d,\end{cases}$ $\overline{l}_{k,d} = 1 - l_{k,d}$, $k\in K$, $d \in D = K$, то речь идет о задачах минимизации вероятности ошибочной идентификации и, соответственно, — о максимизации вероятности безошибочной идентификации. В этом случае получим следующие условия, определяющие решающие функции $d^*(\cdot)\colon X \to D$ и $d_*(\cdot)\colon X\to D$,

$$\begin{aligned} d^*(x) \in D^*(x) = \{d\in D, \sum_{\substack{k\in K,\\ k\neq d}} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x) = \min_{k\in K} \sum_{\substack{k'\in K,\\ k'\neq k}} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k'|x)\} = \\ = \{d\in D,\ 1 - \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d|x) = \min_{k\in K}(1 - \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x))\}, \quad (6.4.96)\\ d_*(x) \in D_*(x) = \{d\in D, \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d|x) = \max_{k\in K} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x)\},\ x\in X.\end{aligned}$$

Соответственно

$$S_{d^*(x)}(\,|x) = 1 - \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d^*(x)|x),\ x\in X \quad (6.4.97)$$

и

$$S_{d_*(x)}(\,|x) = \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d_*(x)|x),\ x\in X \quad (6.4.98)$$

— условные при условии $\xi = x$ вероятности ошибочной и безошибочной идентификации, причем в (6.4.97), (6.4.98) функции $d^*(\cdot)$ и $d_*(\cdot)$ всегда можно выбрать совпадающими, поскольку $D_*(x) = D^*(x)$, $x\in X$.

Наконец, в рассматриваемом случае

$$\overline{\Pr}\,\mathrm{E}(d_*) = \sum_{x\in X} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d_*(x)|x)\mathrm{pr}^{\xi}(x) = 1 - \Pr\mathrm{E}(d^*) \tag{6.4.99}$$

— вероятность безошибочной идентификации.

Что касается замечания 6.4.11, то в данном случае при каждом $x \in X$

$$\begin{aligned} S_d(|x) =& \Pr^{\varkappa|x}(\varkappa \neq d) = \Pr_{K|x}(\{k \in K,\ k \neq d\}),\\ \overline{S}_d(|x) =& \Pr^{\varkappa|x}(\varkappa = d) = \Pr_{K|x}(\{k \in K,\ k = d\}) \end{aligned} \tag{6.4.100}$$

суть $\Pr^{\varkappa|x}$-вероятности событий $\varkappa \neq d$ и $\varkappa = d$, определенные в соответствующем вероятностном пространстве семейства $(K, \mathcal{P}(K), \Pr_{K|x})$, $x \in X$.

6.4.11.2. Возможностная модель идентификации. Напомним, что в нечеткой модели идентификации $(\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(\cdot|\cdot), \mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(\cdot), \widetilde{\Lambda}^{\cdot})$ правило идентификации $\widetilde{d}^*$, минимизирующее возможность потерь, можно определить как любую функцию $\widetilde{d}^*(\cdot)\colon X \to D$, удовлетворяющую условию, см. § 6.4.3, 6.4.4,

$$\widetilde{d}^*(x) \in \widetilde{D}^*(x) = \{d \in D,\ \widetilde{S}_d(|x) = \min_{d'\in D} \widetilde{S}_{d'}(|x)\},\ x \in X, \tag{6.4.101}$$

в котором [1]

$$\widetilde{S}_d(|x) = \max_{k\in K} \min\{\widetilde{l}_{k,d}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)\},\ d \in D, \tag{6.4.102}$$

$\widetilde{l}_{k,d}$, $(k,d) \in K \times D$, определены в (6.4.82) и использован тот факт, что нечеткие элементы $\widetilde{\eta}$ и $\widetilde{\varkappa}$ независимы при каждом $x \in X$.

Для правила $\widetilde{d}^*$

$$\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x) = \max_{k\in K} \min\{\widetilde{l}_{k,\widetilde{d}^*(x)}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)\} \tag{6.4.103}$$

— условная при условии $\widetilde{\xi} = x$ возможность потерь, а

$$\mathrm{P\,L}(\widetilde{d}^*) = \sup_{x\in X} \min\{\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x), \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x)\} \tag{6.4.104}$$

— возможность потерь при идентификации по правилу $\widetilde{d}^*$.

Правило $\widetilde{d}_*$, максимизирующее возможность непотерь и минимизирующее необходимость потерь, см. §§ 6.4.8, 6.4.9, 6.4.10, определим

[1] Как и в случае вероятностной модели, распределение $\mathrm{p}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varkappa}}$ в (6.4.79) будем считать заданным распределением $\mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}$ и переходной возможностью $\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}$: $\mathrm{p}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varkappa}}(x,k) = \min\{\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x), \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x)\}$, $x \in X$, $k \in K$; $\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)$ можно считать вариантом условной при условии $\widetilde{\xi} = x$ возможности равенства $\widetilde{\varkappa} = k$.

условием

$$\widetilde{d}_*(x) \in \widetilde{D}_*(x) = \{d \in D,\ \overline{\overline{S}}_d(|x) = \max_{d' \in D} \overline{\overline{S}}_{d'}(|x)\}, \tag{6.4.105}$$

в котором

$$\overline{\overline{S}}_d(|x) = \max_{k \in K} \min\{\bar{\bar{l}}_{k,d}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)\}, \tag{6.4.106}$$

а

$$\bar{\bar{l}}_{k,d} = \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}((k,d) \in (K \times D)\backslash\widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}) \tag{6.4.107}$$

— возможность того, что пара $(k,d) \in K \times D$ не покрыта нечетким множеством $\widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}$. Для правила $\widetilde{d}_*$

$$\overline{\overline{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(|x) = \max_{k \in K} \min\{\bar{\bar{l}}_{k,\widetilde{d}_*(x)}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)\} \tag{6.4.108}$$

— условная при условии $\widetilde{\xi} = x$ возможность непотерь,

$$\overline{\overline{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(x) = \min\{\overline{\overline{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(|x), \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x)\} = \max_{k \in K} \min\{\bar{\bar{l}}_{k,\widetilde{d}_*(x)}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa},\widetilde{\xi}}(k,x)\}$$

— возможность непотерь и равенства $\widetilde{\xi} = x$,

$$\mathrm{P}\,\overline{\mathrm{L}}(\widetilde{d}_*) = \sup_{x \in X} \overline{\overline{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(x) \tag{6.4.109}$$

— возможность непотерь при идентификации по правилу $\widetilde{d}_*$; соответственно $\mathrm{N}\,\mathrm{L}(\widetilde{d}_*) = \theta(\sup_{x \in X} \overline{\overline{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(x))$ — необходимость потерь в этих условиях.

Что касается возможностных аналогов соотношений (6.4.86), (6.4.87) и (6.4.88), то прежде всего заметим, что согласно (6.4.82) и (6.4.107)

$$\max\{\widetilde{l}_{k,d}, \bar{\bar{l}}_{k,d}\} = 1,\ k \in K,\ d \in D, \tag{6.4.110}$$

— аналог второго равенства в (6.4.86). Вследствие (6.4.110)

$$\max\{\min_{d \in D} \widetilde{l}_{k,d}, \max_{d' \in D} \bar{\bar{l}}_{k,d'}\} = 1,\ k \in K, \tag{6.4.111}$$

ибо согласно (6.4.110) $\max\{\widetilde{l}_{k,d}, \max_{d' \in D} \bar{\bar{l}}_{k,d'}\} \geqslant 1$, $k \in K$, $d \in D$.

Аналогом условия (6.4.95) является условие

$$S_{d,x} = \max\{\widetilde{S}_d(|x), \overline{\overline{S}}_d(|x)\} = 1,\ d \in D,\ x \in X, \tag{6.4.112}$$

следующее из соотношений, см. (6.4.102), (6.4.106),

$$S_{d,x} = \max_{\substack{k \in K, \\ k' \in K}} \max\left\{\min(\widetilde{l}_{k,d}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)), \min\{\bar{\bar{l}}_{k',d}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)\}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{k \in K} \min\left\{\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x), \max\{\widetilde{l}_{k,d}, \bar{\bar{l}}_{k,d}\}\right\} = \max_{k \in K} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x) = 1,\ d \in D,\ x \in X.$$

Аналогом (6.4.87) является условие [1]

$$S_x = \max\{\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x), \overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(|x)\} = 1, \ x \in X, \tag{6.4.113}$$

верное, поскольку согласно (6.4.111), (6.4.112)

$$S_x = \max\Big\{ \min_{d\in D} \max_{k\in K} \min\{\widetilde{l}_{k,d}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)\}, \max_{d'\in D} \max_{k'\in K} \min\{\overline{\widetilde{l}}_{k',d'}, \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k'|x)\}\Big\} \geqslant$$
$$\geqslant \max_{k\in K} \min\Big\{\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x), \ \max\Big\{ \min_{d\in D} \widetilde{l}_{k,d}, \max_{d'\in D} \overline{\widetilde{l}}_{k,d'}\Big\}\Big\} = \max_{k\in K} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x) = 1.$$

Наконец, аналогом (6.4.88) является равенство

$$S = \max\Big\{\mathrm{P}\,\mathrm{L}(\widetilde{d}^*(x)), \mathrm{P}\,\overline{\mathrm{L}}(\widetilde{d}_*(x))\Big\} = 1, \tag{6.4.114}$$

ибо согласно (6.4.104),(6.4.109) и (6.4.113)

$$S = \max\Big\{ \sup_{x\in X} \min\big\{\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x), \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x)\big\}, \sup_{x'\in X} \min\big\{\overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}_*(x')}(|x), \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x')\big\}\Big\} \geqslant$$
$$\geqslant \sup_{x\in X} \min\Big\{\mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x), \ \max\big\{\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x), \overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(|x)\big\}\Big\} = \sup_{x\in X} \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x) = 1.$$

Заметим, что, согласно (6.4.114), если возможность потерь $\mathrm{P}\,\mathrm{L}(\widetilde{d}^*) < 1$, то возможность непотерь $\mathrm{P}\,\overline{\mathrm{L}}(\widetilde{d}_*) = 1$, а, согласно (6.4.112), если $\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x) < 1$, то $\overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x) = 1$, т. е. в таком случае $\widetilde{d}^*(x) \in \widetilde{D}_*(x)$ и, следовательно, если $\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x) < 1$, то $\widetilde{D}^*(x) \subset \widetilde{D}_*(x)$, $x \in X$.

Замечание 6.4.13. Согласно (6.4.102) и (6.4.81)

$$\widetilde{S}_d(|x) = \max_{k\in K} \min\{\mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}((k,d) \in \widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}), \mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}(\widetilde{\varkappa} = k)\} =$$
$$= \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}} \times \mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}((\widetilde{\varkappa}, d) \in \widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}) \equiv \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}(\{(y,k) \in Y \times K, \ (k,d) \in \widetilde{\Lambda}^y\}) =$$
$$= \sup\Big\{ \min\big\{\mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(y), \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)\big\} \,\Big|\, (y,k) \in Y \times K, \ (k,d) \in \widetilde{\Lambda}^y\Big\},$$
$$x \in X, \ d \in D, \tag{6.4.115}$$

где $\widetilde{\varkappa}$ — нечеткая величина, каноническая для пространств с возможностью семейства $(K, \mathcal{P}(K), \mathrm{P}_{K|x})$, $x \in X$, определяющая возможность $\mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}$ по формуле

$$\mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}(\widetilde{\varkappa} \in A) = \mathrm{P}_{K|x}(A) = \max_{k\in A} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x), \ A \in \mathcal{P}(K), \ x \in X, \tag{6.4.116}$$

---

[1] Согласно (6.4.112) $\max\Big\{\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x), \overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x)\Big\} = \max\Big\{\widetilde{S}_{\widetilde{d}_*(x)}(|x), \overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(|x)\Big\} = 1$, $x \in X$.

как переходную для пространств $(X, \mathcal{P}(X))$, $(K, \mathcal{P}(K))$, а $\widetilde{S}_d(|x)$ при каждом $x \in X$ есть $\mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}$-возможность события

$$\{(y,k) \in Y \times K,\ (k,d) \in \widetilde{\Lambda}^y\},\ \ d \in D, \tag{6.4.117}$$

определенная в соответствующем пространстве с возможностью семейства

$$(Y \times K,\, \mathcal{P}(Y \times K),\, \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}),\ \ x \in X; \tag{6.4.118}$$

в (6.4.115) нечеткие элементы $\widetilde{\eta}$ и $\widetilde{\varkappa}$ независимы при каждом $x \in X$.

Аналогично в (6.4.106)

$$\begin{aligned}\overline{\widetilde{S}}_d(|x) = \max_{k\in K}\min\Big\{\mathrm{P}^{\widetilde{\eta}}\big((k,d) \in (K \times D)\backslash\widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}\big), \mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}(\widetilde{\varkappa} = k)\Big\} = \\ = \mathrm{P}^{\widetilde{\eta}} \times \mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}\Big((k,d) \in (K \times D)\backslash\widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}\Big) \equiv \\ \equiv \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}\Big(\big\{(y,k) \in Y \times K,\, (k,d) \in (K \times D)\backslash\widetilde{\Lambda}^y\big\}\Big)\end{aligned} \tag{6.4.119}$$

есть $\mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}$-возможность события $\{(y,k) \in (Y \times K),\ (k,d) \in (K \times \times D)\backslash\widetilde{\Lambda}^y\}$, $d \in D$, противоположного событию (6.4.117), определенная в соответствующем пространстве с возможностью семейства (6.4.118).

Замечание 6.4.14. Пусть $\widetilde{\Lambda}^{\widetilde{\eta}}$ — P_Y-полное нечеткое множество, $\widetilde{l}_{k,d} = \begin{cases}0, & k = d,\\ 1, & k \neq d,\end{cases}$ и, следовательно, $\overline{\widetilde{l}}_{k,d} = \begin{cases}1, & k = d,\\ 0, & k \neq d,\end{cases}$ $k \in K,\ d \in K$, см. лемму 6.4.4. Тогда согласно (6.4.102), (6.4.106)

$$\widetilde{S}_d(|x) = \max_{\substack{k\in K,\\ k\neq d}} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x) = \mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}(\widetilde{\varkappa} \neq d),\ \overline{\widetilde{S}}_d(|x) = \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(d|x) = \mathrm{P}^{\widetilde{\varkappa}|x}(\widetilde{\varkappa} = d),$$
$$d \in D,\ x \in X,$$

и соответственно

$$\widetilde{D}^*(x) = \big\{d \in D,\ \max_{\substack{k\in K,\\ k\neq d}} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x) = \min_{k\in K}\max_{\substack{k'\in K,\\ k'\neq k}} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k'|x)\big\},\ x \in X,$$
$$\widetilde{D}_*(x) = \big\{d \in D,\ \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(d|x) = \max_{k\in K} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x) = 1\big\}. \tag{6.4.120}$$

Заметим, что в данном случае следующая из (6.4.112) импликация $\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)} < 1 \Rightarrow \overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}^*(x)} = 1 \Rightarrow \widetilde{D}^*(x) \subset \widetilde{D}_*(x)$ означает, что $\widetilde{D}^*(x) = \widetilde{D}_*(x)$, ибо если $\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)} < 1$, то $\widetilde{d}^*(x)$ — единственный $\arg\max_{k\in K} \mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(k|x)$, $x \in X$.

В рассматриваемом случае

$$\mathrm{P}\,\mathrm{E}(\widetilde{d}^*) = \sup_{x\in X}\min\{\widetilde{S}_{\widetilde{d}^*(x)}(|x), \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x)\}, \tag{6.4.121}$$
$$\mathrm{P}\,\overline{\mathrm{E}}(\widetilde{d}_*) = \sup_{x\in X}\min\{\overline{\widetilde{S}}_{\widetilde{d}_*(x)}(|x), \mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}(x)\} = 1$$

— возможности ошибочной, и, соответственно, безошибочной идентификаций, а $\mathrm{N\,E}(\widetilde{d}_*) = \theta(\mathrm{P}\,\overline{\mathrm{E}}(\widetilde{d}_*)) = 0$ — необходимость ошибочной идентификации.

6.4.11.3. Сравнение качеств вероятностной и возможностной моделей. Сравним теперь качества вероятностной и максимально согласованной с ней возможностной моделей идентификации.

Определение 6.4.1. Возможностную модель идентификации $(\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(\cdot|\cdot), \mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(\cdot), \widetilde{\Lambda}^{\cdot})$ назовем максимально согласованной с вероятностной моделью идентификации $(\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot), \mathrm{pr}^{\eta}, \Lambda^{\cdot})$, $(\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot), \mathrm{pr}^{\eta}, \Lambda^{\cdot}) \approx> (\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}(\cdot|\cdot), \mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}(\cdot), \widetilde{\Lambda}^{\cdot})$, если $\widetilde{\Lambda}^{\cdot} = \Lambda^{\cdot}$ и при каждом $x \in X$ возможность $\mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}$ максимально согласована с вероятностью $\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x}$, $\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x} \approx> \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}$, т. е. если для каждого $x \in X$ существует функция $\widetilde{\gamma}_x(\cdot)\colon [0,\,1] \to [0,\,1]$ из класса $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x})$ такая, что для любого $Q \in \mathcal{P}(Y \times K)$

$$\mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}(Q) = \widetilde{\gamma}_x(\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x}(Q)), \tag{6.4.122}$$

причем для каждого $x \in X$ и для любой возможности $\mathrm{P}'_Y \times \mathrm{P}'_{K|x}$, согласованной с вероятностью $\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x}$, существует функция $\widetilde{\widetilde{\gamma}}_x(\cdot)\colon [0,\,1] \to [0,\,1]$ из класса $\widetilde{\Gamma}$ такая, что для любого $Q \in \mathcal{P}(Y \times K)$ $\mathrm{P}'_Y \times \mathrm{P}'_{K|x}(Q) = \widetilde{\widetilde{\gamma}}_x(\mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{K|x}(Q))$.

Согласно определению 6.4.1 и замечаниям 6.4.11 и 6.4.13, если возможностная модель идентификации максимально согласована с вероятностной, то для любого $d \in D$ и каждого $x \in X$ согласно (6.4.122)

$$\widetilde{S}_d(|x) = \widetilde{\gamma}_x(S_d(|x)),\ \overline{\widetilde{S}}_d(|x) = \widetilde{\gamma}_x(\overline{S}_d(|x)), \tag{6.4.123}$$

где $S_d(|x)$, $\overline{S}_d(|x)$, $\widetilde{S}_d(|x)$ и $\overline{\widetilde{S}}_d(|x)$ определены в (6.4.89), (6.4.93), (6.4.115) и (6.4.119), причем согласно определению 6.4.1 в (6.4.115) и в (6.4.119) $\widetilde{\Lambda}^{\cdot} = \Lambda^{\cdot}$. Следовательно, согласно (6.4.101), (6.4.105), (6.4.123)

$$\widetilde{D}^*(x) = \{d \in D,\ \widetilde{\gamma}_x(S_d(|x)) = \min_{k\in K} \widetilde{\gamma}_x(S_k(|x))\} \supset D^*(x), \tag{6.4.124}$$
$$\widetilde{D}_*(x) = \{d \in D,\ \widetilde{\gamma}_x(\overline{S}_d(|x)) = \max_{k\in K} \widetilde{\gamma}_x(\overline{S}_k(|x))\} \supset D_*(x),\ x \in X.$$

Если качества возможностной и вероятностной моделей идентификации сравнивать по статистическому критерию, то возможностным правилам идентификации $\widetilde{d}^*$ и $\widetilde{d}_*$, по определению, будут свойственны, вообще говоря, бóльшая вероятность потерь и меньшая вероятность непотерь, чем статистическим правилам d^* и d_* соответственно. Это следует и из (6.4.124), ибо хотя согласно включениям в (6.4.124) среди нечетких есть правила $\widetilde{d}^*(\cdot) \in D^*(x)$ и $\widetilde{d}_*(\cdot) \in D_*(x)$, но в возможностной модели идентификации нет ничего такого, что позволило бы выбрать именно такие правила. Но если множество

$$\widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(S_{d^*(x)}(|x)) = \{S_{d^*(x)}(|x)\}, \qquad (*)$$

или, что эквивалентно условию $(*)$, $\widetilde{\gamma}_x(S_{d^*(x)}(|x)) < \widetilde{\gamma}_x(S_d(|x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow S_d(|x) \neq S_{d^*(x)}(|x)$, $d \in D$, то $\widetilde{D}^*(x) = D^*(x)$, $x \in X$, а если множество

$$\widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(\overline{S}_{d_*(x)}(|x)) = \{\overline{S}_{d_*(x)}(|x)\}, \qquad (**)$$

или, что эквивалентно условию $(**)$, $\widetilde{\gamma}_x(S_{d_*(x)}(|x)) > \widetilde{\gamma}_x(S_d(|x)) \Leftrightarrow \Leftrightarrow S_d(|x) \neq S_{d_*(x)}(|x)$, $d \in D$, то $\widetilde{D}_*(|x) = D_*(x)$, $x \in X$ [1], где $\widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(\cdot)\colon [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$, $\widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(t) \triangleq \{s \in [0,1],\ \widetilde{\gamma}_x(s) = = \widetilde{\gamma}_x(t)\}$, $t \in [0,1]$, $x \in X$, см. рис. 6.4.3.

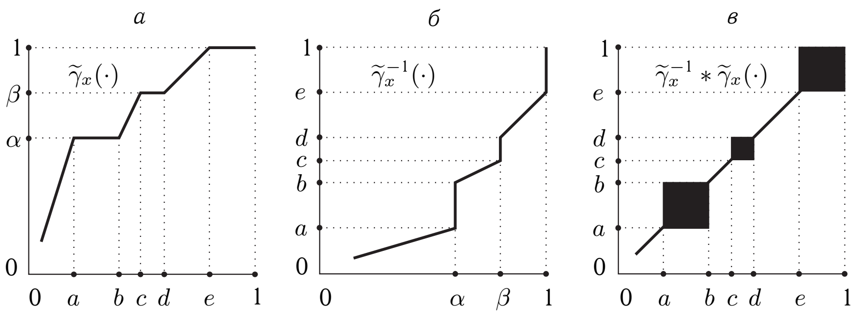


Рис. 6.4.3. *а*) Фрагмент графика функции $\widetilde{\gamma}_x(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$.
б) Фрагмент графика многозначного отображения $\widetilde{\gamma}_x^{-1}(\cdot)\colon [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$.
в) Фрагмент графика многозначного отображения $\widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(\cdot)\colon [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$

В моделях, выделенных в замечаниях 6.4.12 и 6.4.14, максимальная согласованность возможностной модели идентификации с вероятностной эквивалентна максимальной согласованности переходной возможности $\mathrm{P}_{K|x}$ с переходной вероятностью $\mathrm{Pr}_{K|x}$, $x \in X$, означающей, что для каждого $x \in X$ и некоторой функции $\widetilde{\gamma}_x(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}_{K|x})$ для любого $Q \in \mathcal{P}(K)$ $\mathrm{P}_{K|x}(Q) = \widetilde{\gamma}_x(\mathrm{Pr}_{K|x}(Q))$.

Это, в свою очередь, согласно (6.4.14) означает, что

$$\widetilde{D}^*(x) = \{d \in D, \widetilde{\gamma}_x(1 - \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d|x)) = \widetilde{\gamma}_x(1 - \max_{k\in K} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x))\} \equiv$$
$$\equiv \{d \in D, \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d|x) \in 1 - \widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(1 - \max_{k\in K} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x))\} \supset D^*(x),$$

[1] Класс $\widetilde{\Gamma}(\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{K|x})$ при каждом $x \in X$ определяется распределением $\mathrm{pr}^{\eta}(y) \cdot \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x)$, $y \in Y$, $k \in K$, см. § 2.3 гл. 2, а значения $S_{d^*(x)}(|x)$, $\overline{S}_{d_*(x)}(|x)$ и, следовательно, справедливость равенств $(*)$, $(**)$ зависят и от отображения $\Lambda^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(K \times D)$.

$$\widetilde{D}_*(x) = \{d \in D, \widetilde{\gamma}_x(\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d|x)) = \widetilde{\gamma}_x(\max_{k\in K} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x))\} \equiv$$
$$\equiv \{d \in D, \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d|x) \in \widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(\max_{k\in K} \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(k|x))\} \supset D_*(x).$$

Но если $\widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(1 - \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d^*(x)|x)) = \{1 - \mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d^*(x)|x)\}$, то $\widetilde{D}^*(x) = D^*(x)$, а если $\widetilde{\gamma}_x^{-1} * \widetilde{\gamma}_x(\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d_*(x)|x)) = \{\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}(d_*(x)|x)\}$, то $\widetilde{D}_*(x) = D_*(x)$, $x \in X$.

Замечание 6.4.15. Предположим, что возможностная модель идентификации (6.4.79), (6.4.82) известна, а вероятностная (6.4.78), (6.4.81) — нет. Что можно сказать о *вероятности* потерь в этом случае?

Ослабим условия максимальной согласованности возможностной модели идентификации с вероятностной, оставив в определении 6.4.1 лишь требование $\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x} \approx> \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{k|x}$, $x \in X$. Пусть $\mathcal{PR}(\mathrm{P}_Y \times \times \mathrm{P}_{k|x})$ — класс всех вероятностей $\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x}$, с каждой из которых максимально согласована возможность $\mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{k|x}$, $x \in X$, т.е. пусть $\mathcal{PR}(\mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{k|x}) \triangleq \{\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x}(\cdot)\colon \mathcal{P}(Y \times K) \to [0,1],\ \mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x} \approx> \approx> \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{k|x}\}$, $x \in X$. Тогда

$$\sup\{\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x}((y,k) \in Y \times K, (k, \widetilde{d}^*(x)) \in \Lambda^y) | \mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x} \approx> \approx> \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{k|x}\}$$

— максимальная, а

$$\inf\{\mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x}((y,k) \in Y \times K, (k, \widetilde{d}^*(x)) \in \Lambda^y) | \mathrm{Pr}_Y \times \mathrm{Pr}_{k|x} \approx> \approx> \mathrm{P}_Y \times \mathrm{P}_{k|x}\}$$

— минимальная, при условии $\xi = x$, условные вероятности потерь, сопутствующих возможностному правилу решения $\widetilde{d}^*$, $x \in X$.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример подобного оценивания математического ожидания $\mathsf{E}\, l. = \sum_{j=1}^{n} l_j \mathrm{pr}_j$, где вероятности $\mathrm{pr}_1 \geqslant \ldots \geqslant \geqslant \mathrm{pr}_n$, $\mathrm{pr}_j \triangleq \mathrm{Pr}(\{\omega_j\})$, $j = 1, \ldots, n$, неизвестны, известно лишь, что $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$, и известно $e = 0.e_1 \ldots e_n$. В таком случае

$$\inf\Big\{\sum_{j=1}^{n} l_j \mathrm{pr}_j \,\Big|\, \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\Big\} \leqslant \mathsf{E}\, l. \leqslant \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} l_j \mathrm{pr}_j \,\Big|\, \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\Big\}.$$

Замечание 6.4.16. Модель идентификации состояний вероятностной (возможностной) системы позволяет построить оптимальные правила идентификации d^* (6.4.83) и d_* (6.4.85) ($\widetilde{d}^*$ (6.4.101) и $\widetilde{d}_*$ (6.4.105)), но для вычисления вероятностей потерь $\mathrm{Pr}\,\mathrm{L}$ (6.4.84*) и непотерь $\mathrm{Pr}\,\overline{\mathrm{L}}$ (6.4.88) (возможностей потерь $\mathrm{P}\,\mathrm{L}$ (6.4.104) и непотерь $\mathrm{P}\,\overline{\mathrm{L}}$ (6.4.109)) необходимо распределение pr^{ξ} ($\mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}$). Поэтому если модель

$\mathrm{pr}^{\xi,\varkappa}$ (6.4.78) ($\mathrm{p}^{\widetilde{\xi},\widetilde{\varkappa}}$ (6.4.79)) неизвестна, а в задаче идентификации можно ограничиться эмпирическим построением лишь правил d^*, d_* ($\widetilde{d}^*$, $\widetilde{d}_*$), то для этого достаточно эмпирически восстановить только модель идентификации, а распределение pr^{ξ} ($\mathrm{p}^{\widetilde{\xi}}$) и, следовательно, — модель системы (6.4.78) ((6.4.79)) восстанавливать, лишь если требуются значения $\mathrm{Pr}\,\mathrm{L}$, $\mathrm{Pr}\,\overline{\mathrm{L}}$ ($\mathrm{P}\,\mathrm{L}$, $\mathrm{P}\,\overline{\mathrm{L}}$). А поскольку в модели идентификации pr^{η} и $\Lambda^{\cdot}$ ($\mathrm{p}^{\widetilde{\eta}}$ и $\widetilde{\Lambda}^{\cdot}$) можно считать заданными априори, то для ее восстановления достаточно восстановить только переходную вероятность $\mathrm{pr}^{\varkappa|\xi}$ (возможность $\mathrm{p}^{\widetilde{\varkappa}|\widetilde{\xi}}$), что, разумеется, требует существенно меньше наблюдений, чем восстановление модели (6.4.78) ((6.4.79)).

6.4.12. Нечеткие правила решения $\pi^{*\delta|\xi}$ и $\nu_*^{\delta|\xi}$, минимизирующие возможность и необходимость потерь в модели идентификации $(g^{\xi,\varkappa}, h^{\xi,\varkappa}, \mathcal{L}^{\Lambda})$. Подобно равенству (6.4.6) для возможности потерь $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$ в рассматриваемом случае возможность потерь, сопутствующих правилу $\pi^{\delta|\xi}$

$$\mathrm{PL}^{\lambda}(\pi^{\delta|\xi}, \mathrm{V}) = \sup_{x\in X} \max_{(k,d)\in K\times D} \min\{\mathrm{p}l^{\lambda}_{k,d}(\mathrm{V}), \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\}, \tag{6.4.125}$$

оптимальным считается любое правило $\pi^{*\delta|\xi}$, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{PL}^{\lambda}(\pi^{*\delta|\xi}, \mathrm{V}) = \min_{\pi^{\delta|\xi}} \mathrm{PL}^{\lambda}(\pi^{\delta|\xi}, \mathrm{V}), \tag{6.4.126}$$

которое может быть найдено как решение семейства задач

$$\max_{d\in D} \min\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{P}^{\lambda}_{d}(x,\mathrm{V})\} \sim \min_{\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x)},\ x\in X,$$

где

$$\mathrm{P}^{\lambda}_{d}(x,\mathrm{V}) = \max_{k\in K} \min\{\mathrm{p}l^{\lambda}_{k,d}(\mathrm{V}), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\},\ x\in X,\ d\in D.$$

Решение задачи (6.4.126) охарактеризовано в следующей теореме, подобной теореме 6.4.1.

Теорема 6.4.1.** *Пусть $K = D = \{1,\ldots,q\}$ и для каждого $x\in X$*

$$\underline{\mathrm{P}}^{\lambda}(x,\mathrm{V}) = \min_{1\leqslant d\leqslant q} \mathrm{P}^{\lambda}_{d}(x,\mathrm{V}) = \mathrm{P}^{\lambda}_{d_1}(x,\mathrm{V}) = \ldots = \mathrm{P}^{\lambda}_{d_t}(x,\mathrm{V}) <$$
$$< \mathrm{P}^{\lambda}_{d_{t+1}}(x,\mathrm{V}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{P}^{\lambda}_{d_q}(x,\mathrm{V}),$$

где перестановка $d.\colon \{1,\ldots,q\}\to\{1,\ldots,q\}$ и *t зависят от $x\in X$. Тогда всякое оптимальное нечеткое правило $\pi^{*\delta|\xi}$ удовлетворяет условиям*

$$\max_{1\leqslant s\leqslant t(x)} \pi^{*\delta|\xi}(d_s|x) = 1,\ \max_{t(x)<s\leqslant q} \pi^{*\delta|\xi}(d_s|x) = 0,\ x\in X,$$

и для любого нечеткого правила $\pi^{\delta|\xi}$

$$\mathrm{PL}^\lambda(\pi^{*\delta|\xi}, \mathrm{V}) = \sup_{x\in X} \underline{\mathrm{P}}^\lambda(x, \mathrm{V}) \leqslant \mathrm{PL}^\lambda(\pi^{\delta|\xi}, \mathrm{V}).$$

Заметим, что поскольку $\pi^{\delta|\xi}(d|x) = \mathrm{P}^{\delta|\xi}(\delta = d|x)$, то для любого четкого правила $d = d^*(x)$, удовлетворяющего условию $\pi^{*\delta|\xi}(d^*(x)|x) = 1$, $x \in X$, равенство $\delta = d^*(x)$ абсолютно возможно, в то время как для любого другого правила решения $d = d(x)$, для которого $\pi^{*\delta|\xi}(d(x)|x) < 1$ равенство $\delta = d(x)$ либо возможно, если $\pi^{*\delta|\xi}(d(x)|x) \in (0,1)$, либо невозможно, если $\pi^{*\delta|\xi}(d(x)|x) = 0$.

Нетрудно убедиться, что любое так определенное четкое правило решения $d^*(\cdot)\colon X \to D$ оптимально в том смысле, что если

$$\mathrm{PL}^\lambda(d(\cdot), \mathrm{V}) = \sup_{x\in X} \max_{k\in K} \min\{\mathrm{P}^{\lambda,(k,d(x))}(\mathrm{V}), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\},\ d(\cdot)\colon X \to D,$$

то

$$\min_{d(\cdot)} \mathrm{PL}^\lambda(d(\cdot), \mathrm{V}) = \mathrm{PL}^\lambda(d^*(\cdot), \mathrm{V}) = \mathrm{PL}^\lambda(\pi^{*\delta|\xi}, \mathrm{V}).$$

Необходимость потерь, сопутствующих нечеткому правилу решения $\nu^{\delta|\xi}$,

$$\mathrm{NL}^\lambda(\nu^{\delta|\xi}, \mathrm{V}) = \inf_{x\in X} \min_{(k,d)\in K\times D} \max\{\mathrm{nl}^\lambda_{k,d}(\mathrm{V}), \nu^{\delta|\xi}(d|x), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\}, \tag{6.4.127}$$

оптимальным считается любое правило $\nu_*^{\delta|\xi}$, минимизирующее необходимость потерь (6.4.127),

$$\mathrm{NL}^\lambda(\nu_*^{\delta|\xi}, \mathrm{V}) = \min_{\nu^{\delta|\xi}} \mathrm{N}^\lambda(\nu^{\delta|\xi}, \mathrm{V}), \tag{6.4.128}$$

которое может быть получено как решение семейства задач

$$\min_{d\in D} \max\{\nu^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^\lambda_d(x, \mathrm{V})\} \sim \min_{\nu^{\delta|\xi}(\cdot|x)},\ x \in X,$$

где

$$\mathrm{N}^\lambda_d(x, \mathrm{V}) = \min_{k\in K} \max\{\mathrm{nl}^\lambda_{k,d}(\mathrm{V}), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\},\ x \in X,\ d \in D.$$

Решение задачи (6.4.128) охарактеризовано в следующей теореме, подобной теореме 6.4.2.

Теорема 6.4.2.** *Пусть* $K = D = \{1, \ldots, q\}$ *и для каждого* $x \in X$

$$\underline{\mathrm{N}}^\lambda(x, \mathrm{V}) = \min_{1\leqslant d\leqslant q} \mathrm{N}^\lambda_d(x, \mathrm{V}) = \mathrm{N}^\lambda_{d_1}(x, \mathrm{V}) = \ldots = \mathrm{N}^\lambda_{d_t}(x, \mathrm{V}) <$$
$$< \mathrm{N}^\lambda_{d_{t+1}}(x, \mathrm{V}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{N}^\lambda_{d_q}(x, \mathrm{V}),$$

где перестановка $d.\colon \{1, \ldots, q\} \to \{1, \ldots, q\}$ *и* t *зависят от* $x \in X$. *Тогда всякое нечеткое правило* $\nu_*^{\delta|\xi}$, *минимизирующее* $\mathrm{NL}^\lambda(\nu^{\delta|\xi}, \mathrm{V})$ *в* (6.4.128), *удовлетворяет условиям* $\min\limits_{1\leqslant s\leqslant t(x)} \nu_*^{\delta|\xi}(d_s|x) = 0$, *и для*

любого нечеткого правила $\nu^{\delta|\xi}$
$$\mathrm{N}^{\lambda}(\nu_*^{\delta|\xi}, \mathrm{V}) = \inf_{x\in X} \underline{\mathrm{N}}^{\lambda}(x, \mathrm{V}) \leqslant \mathrm{N}^{\lambda}(\nu^{\delta|\xi}, \mathrm{V}). \qquad \blacksquare$$

Заметим, что поскольку $\nu^{\delta|\xi}(d|x) = \mathrm{N}^{\delta|\xi}(\delta \neq d|x)$, то *для любого четкого правила* $d = d_*(x)$, *удовлетворяющего условию* $\nu_*^{\delta|\xi}(d_*(x)|x) = 0$, $x \in X$, *неравенство* $\delta \neq d_*(x)$ *не необходимо, в то время как для любого правила* $d = d(x)$, *для которого* $\nu_*^{\delta|\xi}(d(x)|x) > 0$, *неравенство* $\delta \neq d(x)$ *необходимо.*

Нетрудно проверить, что любое так определенное правило $d_*(\cdot)\colon X \to D$ оптимально в том смысле, что если
$$\mathrm{NL}^{\lambda}(d(\cdot), \mathrm{V}) = \inf_{x\in X} \min_{k\in K} \max\{\mathrm{n}l^{\lambda}_{k,d(x)}(\mathrm{V}), h^{\xi,\kappa}(x,k)\},\ d(\cdot)\colon X \to D,$$
то $\min\limits_{d(\cdot)} \mathrm{NL}^{\lambda}(d(\cdot), \mathrm{V}) = \mathrm{NL}^{\lambda}(d_*(\cdot), \mathrm{V}) = \mathrm{NL}^{\lambda}(\nu_*^{\delta|\xi}, \mathrm{V})$.

Разумеется, четкие правила $d^*(\cdot)$ и $d_*(\cdot)$ могут быть определены непосредственно, безотносительно к задачам (6.4.126) и (6.4.128), как решения задач $\mathrm{P\,L}^{\lambda}(d(\cdot), V) \sim \min\limits_{d(\cdot)}$ и соответственно, $\mathrm{N\,L}^{\lambda}(d(\cdot), V) \sim \min\limits_{d(\cdot)}$, а именно, любые функции $d^*(\cdot)\colon X \to D$ и $d_*(\cdot)\colon X \to D$, удовлетворяющие условиям
$$d^*(x) \in D^*(x) = \{d \in D,\ \mathrm{P}^{\lambda}_d(x, V) = \min_{d'\in D} \mathrm{P}^{\lambda}_{d'}(x, V)\},\ x \in X,$$
и
$$d_*(x) \in D_*(x) = \{d \in D,\ \mathrm{N}^{\lambda}_d(x, V) = \min_{d'\in D} \mathrm{N}^{\lambda}_{d'}(x, V)\},\ x \in X,$$
являются решениями задач $\mathrm{P\,L}^{\lambda}(d(\cdot), V) \sim \min\limits_{d(\cdot)}$ и $\mathrm{N\,L}^{\lambda}(d(\cdot), V) \sim \min\limits_{d(\cdot)}$ соответственно.

Замечание 6.4.17. Если в модели идентификации возможность и необходимость дуально согласованы, см. § 1.5 гл. 1 и § 6.4.1, т. е. если для некоторой функции $\theta(\cdot) \in \Theta$ $\mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}(\mathrm{V}) = \theta^{-1} \circ \mathrm{N}^{\lambda,(k,d)}(L \setminus \mathrm{V})$, $g^{\xi,\varkappa}(x,k) = \theta^{-1} \circ h^{\xi,\varkappa}(x,k)$ и $\pi^{\delta|\xi}(d|x) = \theta^{-1} \circ \nu^{\delta|\xi}(d|x)$, $x \in X$, $k \in K$, $d \in D$, то согласно (6.4.125) и (6.4.127) $\mathrm{PL}^{\lambda}(\pi^{\delta|\xi}, \mathrm{V}) = \sup\limits_{x\in X} \max\limits_{(k,d)\in K\times D} \min\{\mathrm{P}^{\lambda,(k,d)}(\mathrm{V}), \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} = \theta^{-1}\Big(\inf\limits_{x\in X} \min\limits_{(k,d)\in K\times D} \max\big\{\mathrm{N}^{\lambda,(k,d)}(L \setminus \mathrm{V}),\ \nu^{\delta|\xi}(d|x),\ h^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\}\Big) = \theta^{-1} \circ \mathrm{NL}^{\lambda}(\nu^{\delta|\xi}, L \setminus \mathrm{V})$.

6.4.13. Об оптимальной идентификации во втором варианте теории возможностей. Рассмотрим некоторые аспекты оптимальной идентификации, характерные для второго варианта теории возможностей, см. § 1.16 гл. 1.

В рассматриваемом случае, как и в вероятностной модели идентификации, $l_{k,d}$ — *величина потерь*, обусловленных решением $d \in D$

о состоянии системы, которая функционирует в состоянии $k \in K$, где $D = K = \{1, \ldots, q\}$. Условимся считать, что потери при (почти) верных решениях могут быть отрицательными.

Пусть

$$l^+_{k,d} = \max\{l_{kd}, 0\},\ l^-_{k,d} = \max\{-l_{k,d}, 0\},\ k \in K,\ d \in D. \qquad (6.4.129)$$

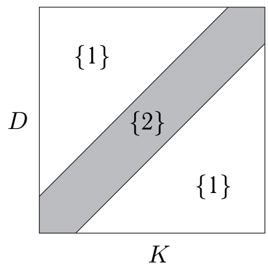


Рис. 6.4.4. В области $\{1\} \subset K \times D$ $l_{k,d} > 0$, т. е. $l^+_{k,d} > 0$, $l^-_{k,d} = 0$, в области $\{2\}$ (почти) верных решений $l_{k,d} \leqslant 0$, т. е. $l^-_{k,d} \geqslant 0$, $l^+_{k,d} = 0$, $k, d \in \{1, \ldots, q\}$

Если $\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{k,d}$, $k, d \in \{1, \ldots, q\}$, — распределение пары $(\varkappa, \delta)$ нечетких элементов (состояние, решение), то математическое ожидание потерь, см. § 1.16.2 гл. 1,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}^+_{\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}} l_{\varkappa,\delta} &= \mathsf{E}^+_{\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}} l^+_{\varkappa,\delta} = \underset{k,d}{\textstyle +} (l^+_{k,d} \times \mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{k,d}) = \max_{k,d} l^+_{k,d} \cdot \mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{k,d}, \\ \mathsf{E}^-_{\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}} l_{\varkappa,\delta} &= \mathsf{E}^-_{\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}} l^-_{\varkappa,\delta} = \underset{k,d}{\textstyle +} (l^-_{k,d} \times \mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{k,d}) = -\max_{k,d} l^-_{k,d} \cdot \mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{k,d}. \end{aligned} \qquad (6.4.130)$$

Распределение $\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{\cdot,\cdot}$ определяет нечеткое правило принятия решений. Оптимальное правило принятия решений, минимизирующее математическое ожидание потерь (6.4.130), дается распределением $\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{k,d} = \begin{cases} 1, & (k,d) \in \{2\}, \\ 0, & (k,d) \in \{1\}, \end{cases}$ при этом $L = -\max\limits_{k,d} l^-_{k,d}$.

Однако такое решение, как правило, невозможно, ибо

$$\mathrm{p}^{\varkappa,\delta}_{k,d} = \mathrm{p}^{\varkappa}_k \times \pi^\delta_d = \mathrm{p}^{\varkappa}_k \cdot \pi^\delta_d,\ k, d \in \{1, \ldots, q\},\ k \in K,\ d \in D, \qquad (6.4.131)$$

где $\mathrm{p}^{\varkappa}_k$, $k = 1, \ldots, q$, — априорное распределение состояний системы, а π^δ_d, $d \in D$, — искомое нечеткое правило принятия решений [1]. Поэтому в задаче идентификации состояния системы при определении

[1] Если доступны результаты наблюдения за системой, то в (6.4.131) $\mathrm{p}^{\varkappa}_k$ следует заменить на $\mathrm{p}^{\varkappa|\xi}_{k|x}$, а π^δ_d — на $\pi^{\delta|\xi}_{d|x}$, — на переходные распределения возможностей, в которых $x \in X$ — результат наблюдения за системой, см. § 6.6.9.

оптимального правила $\pi^\delta_\cdot$ следовало бы исходить из условий

$$\max_{k,d}(l^+_{k,d}\cdot \mathrm{p}^\varkappa_k\cdot\pi^\delta_d)=\max_{d\in D}(l^+_d\cdot\pi^\delta_d)\sim\min_{\pi^\delta_\cdot},\ \max_{k,d}(l^-_{k,d}\cdot \mathrm{p}^\varkappa_k\cdot\pi^\delta_d)=\max_{d\in D}(l^-_d\cdot\pi^\delta_d)\sim\max_{\pi^\delta_\cdot}, \tag{6.4.132}$$

где $l^+_d=\max\limits_{k\in K}(l^+_{k,d}\cdot \mathrm{p}^\varkappa_k)$, $l^-_d=\max\limits_{k\in K}(l^-_{k,d}\cdot \mathrm{p}^\varkappa_k)$.

Сперва вместо двукритериальной задачи (6.4.132) рассмотрим следующую, более простую задачу

$$\max_{d\in D}(l^-_d\cdot\pi^\delta_d)/\max_{d\in D}(l^+_d\cdot\pi^\delta_d)\sim\max_{\pi^\delta_\cdot}, \tag{6.4.133}$$

в которой предполагается, что $0<l^-_d/l^+_d<\infty$, $d=1,\ldots,q$.

Теорема 6.4.4. *Решением задачи* (6.4.133) *является любое правило принятия решения* $\widehat{\pi}^\delta_\cdot$, *удовлетворяющее условию* $\max\limits_{d\in D^*}\widehat{\pi}^\delta_d=1$, $\widehat{\pi}^\delta_d=0$, $d\in D\setminus D^*$, *где* $D^*=\{d\in D,\ l^-_d/l^+_d=\max\limits_{d'\in D}(l^-_{d'}/l^+_{d'})=\Delta\}$.

Доказательство. Для любого правила $\pi^\delta_\cdot$ $\max\limits_{d\in D}(l^-_d\cdot\pi^\delta_d)/\max\limits_{d\in D}(l^+_d\cdot\pi^\delta_d)=$ $=\max\limits_{d\in D}((l^-_d/l^+_d)\cdot l^+_d\cdot\pi^\delta_d)/\max\limits_{d\in D}(l^+_d\cdot\pi^\delta_d)\leqslant\Delta$. С другой стороны, $\max\limits_{d\in D}(l^-_d\cdot\widehat{\pi}^\delta_d)/$ $/\max\limits_{d\in D}(l^+_d\cdot\widehat{\pi}^\delta_d)=\max\limits_{d\in D^*}(l^-_d\cdot\widehat{\pi}^\delta_d)/\max\limits_{d\in D^*}(l^+_d\cdot\widehat{\pi}^\delta_d)=\max\limits_{d\in D^*}(\Delta\cdot l^+_d\cdot\widehat{\pi}^\delta_d)/\max\limits_{d\in D^*}(l^+_d\cdot\widehat{\pi}^\delta_d)=$ $=\Delta$. ∎

Замечание 6.4.18. Правило $\widehat{\pi}^\delta_\cdot$ *инвариантно относительно преобразований* $\gamma'_\alpha(\cdot)\in\mathbf{\Gamma}'$, $\alpha>0$, *шкалы* $\mathcal{L}'$, *в которой решается задача* (6.4.133). Действительно, при преобразовании $\gamma'_\alpha(\cdot)$ шкалы $\mathcal{L}$ $l^\pm_d\to(l^\pm_d)^\alpha$, $d\in D$, $\alpha>0$, но $\{d\in D,\ (l^-_d/l^+_d)^\alpha=\max\limits_{d'\in D}(l^-_{d'}/l^+_{d'})^\alpha\}=D^*$.

Замечание 6.4.19. Среди оптимальных правил решения $\widehat{\pi}^\delta_\cdot$ правило $\widehat{\pi}^\delta_d=\begin{cases}1, & d=d^*,\\ 0, & d\neq d^*,\end{cases}$ $d\in D$, является *оптимальным четким*, если $d^*\in D^*$.

Рассмотрим теперь Парето-оптимальные решения задачи (6.4.132). На рис. 6.4.5 представлено множество $\mathbb{L}=\{l_1,\ldots,l_q\}\subset\mathcal{R}^2$ точек $l_d=$ $=(l^-_d,l^+_d)$, $d=1,\ldots,q$, и его юго-восточная граница $\mathbb{L}'=\{l_{d_1},l_{d_2},l_{d_3}\}$, выделенная условием $\forall\, i=1,2,3$ $\{l=(l^-,l^+)\in\mathbb{L},\ l^-\geqslant l^-_{d_i},\ l^+\leqslant l^+_{d_i},$ $l\neq l_{d_i}\}=\varnothing$, означающим, что заштрихованные на рис. 6.4.5 множества точек $\mathcal{R}^2$, расположенных правее и ниже точек l_{d_1}, l_{d_2}, l_{d_3}, не содержат точек $\mathbb{L}$.

Нетрудно увидеть, что класс $\pi^{(i)}=\{\pi^{(i)}_1,\ldots,\pi^{(i)}_q\}$, $i=1,2,3$, *четких* Парето-оптимальных решений задачи $\max\limits_d l^+_d\cdot\pi^\delta_d\sim\min\limits_{\pi^\delta_\cdot}$, $\max\limits_d l^-_d\cdot\pi^\delta_d\sim\max\limits_{\pi^\delta_\cdot}$ (6.4.132) определяется условиями $\pi^{(i)}_d=$ $=\begin{cases}1, \text{если } d=d_i,\\ 0, \text{если } d\neq d_i,\end{cases}$ $d=1,\ldots,q$, $i=1,2,3$. При этом $\max\limits_d l^+_d\cdot\pi^{(i)}_d=l^+_{d_i}$, $\max\limits_d l^-_d\cdot\pi^{(i)}_d=l^-_{d_i}$, $i=1,2,3$.

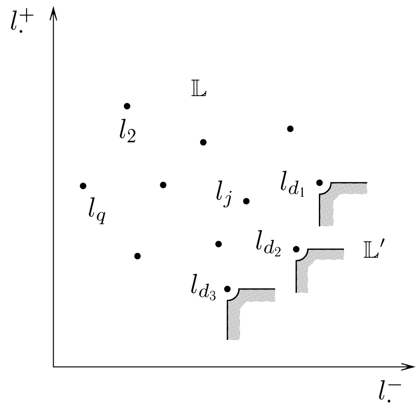


Рис. 6.4.5. Множество $\mathbb{L}$ и его юго-восточная граница $\mathbb{L}'$

Класс *всех* Парето-оптимальных решений определяется условиями

$$\pi_{d_i}^{(i)} = 1, \ \max_d l_d^+ \cdot \pi_d^{(i)} \leqslant l_{d_i}^+, \ \max_d l_d^- \cdot \pi_d^{(i)} \geqslant l_{d_i}^-, \ i = 1, 2, 3. \quad (6.4.134)$$

Парето-оптимальность решений, удовлетворяющих условиям (6.4.134), означает следующее: для любого $\pi_\cdot^\delta$, не удовлетворяющего одному из условий $\pi_{d_i}^\delta = 1$, $i = 1, 2, 3$, не будет выполнено по меньшей мере одно из остальных условий в (6.4.134). Например, если $\pi_{d_i}^\delta < 1$, $i = 1, 2, 3$, и $\pi_j^\delta = 1$, см. рис. 6.4.5, то $\max_d l_d^+ \pi_d^\delta \geqslant l_j^+ > \max(l_2^+, l_3^+)$, $\max_d l_d^- \pi_d^\delta \leqslant l_j^- < \min(l_1^-, l_2^-)$, и, следовательно, не выполнены остальные условия в (6.4.134).

6.5. Нечеткие модели. Матричная игра двух субъектов

6.5.1. Возможностная модель матричной игры двух субъектов. Возможностная модель матричной игры во многом аналогична вероятностной [1]). В частности, в рассматриваемой игре участвуют два субъекта, назовем их «игрок A» и «игрок B», в каждом акте игры игрок A принимает одно из m решений, игрок B — одно из n. Однако матричные элементы платежной матрицы теперь естественно интерпретировать не как величины «выигрышей», а как зависящие от принимаемых ими решений, см. замечание 6.2.1, значения переходных возможностей события, обозначим его W, которое игрок A интерпретирует как «выигрыш», а игрок B — как «проигрыш».

Заметим, что игроки A и B используют *дуальную интерпретацию* события $W \in \mathcal{P}(\Omega)$, согласно которой «выигрыш» для A эквивалентен

[1]) Нечеткая игра, основанная на теории возможностей Л. А. Заде [159], рассмотрена в [33], результаты этого параграфа представлены в [35].

«проигрышу» для B. «Дополнительная» интерпретация, при которой W — «выигрыш» для A и «невыигрыш» для B и соответственно $\Omega \setminus W$ — «выигрыш» для B и «невыигрыш» для A, будет реализована в биматричной игре.

Нечеткими (*фазифицированными*) *стратегиями* игроков назовем распределения возможностей принятия доступных игрокам решений. *Результатом нечеткого* (*фазифицированного*) *акта игры* назовем возможность события W как функцию фазифицированных стратегий игроков.

Игроки A и B принимают соответственно нечеткие решения

$$\alpha \in \{1, \ldots, m\},$$
$$\beta \in \{1, \ldots, n\}$$

независимо друг от друга, где α и β суть *независимые* нечеткие элементы со значениями в $\{1, \ldots, m\}$ и в $\{1, \ldots, n\}$, моделирующие нечеткие решения игроков A и B, соответственно

$$\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}} = \mathrm{P}^{\mathrm{A}}(\alpha = i) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}} = 1, \tag{6.5.1}$$

$$\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}} = \mathrm{P}^{\mathrm{B}}(\beta = j) \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}} = 1, \tag{6.5.2}$$

суть распределения возможностей значений α и β, в данном случае — возможностей решений игроков A и B. Распределения возможностей

$$\mathrm{p}^{\mathrm{A}} = \{\mathrm{p}_1^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_2^{\mathrm{A}}, \ldots, \mathrm{p}_m^{\mathrm{A}}\}, \quad \mathrm{p}^{\mathrm{B}} = \{\mathrm{p}_1^{\mathrm{B}}, \mathrm{p}_2^{\mathrm{B}}, \ldots, \mathrm{p}_n^{\mathrm{B}}\} \tag{6.5.3}$$

определяют *нечеткие стратегии* принятия решений игроками A и B соответственно, любые решения «i» игрока A и «j» игрока B, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, определяют их *четкие* (*нефазифицированные*) стратегии принятия решений.

Игроки определяют матрицу переходных возможностей события W, матричные элементы которой

$$s_{ij} = \mathrm{P}(W | \alpha = i, \beta = j), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{6.5.4}$$

задают зависимость переходной возможности W от их решений.

Так как решения принимаются независимо, то

$$\mathrm{P}(\alpha = i,\, \beta = j) = \min\left\{\mathrm{P}^{\mathrm{A}}(\alpha = i), \mathrm{P}^{\mathrm{B}}(\beta = j)\right\} = \min\left\{\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\right\},$$
$$i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Соответственно

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(W,\, \alpha = i,\, \beta = j) = \min\left\{\mathrm{P}(W \,|\, \alpha = i, \beta = j), \mathrm{P}(\alpha = i, \beta = j)\right\} = \\ = \min\left\{s_{ij}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\right\}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,\end{aligned}$$

и *возможность события W как функция нечетких стратегий игроков*

$$\mathrm{P}(W\,|\,\mathrm{p}^{\mathrm{A}},\mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \mathrm{P}(W,\,\alpha=i,\,\beta=j) =$$

$$= \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \min\bigl\{s_{ij},\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}},\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\bigr\} \overset{\triangle}{=} S\bigl(\mathrm{p}^{\mathrm{A}},\mathrm{p}^{\mathrm{B}}\bigr),\quad \mathrm{p}^{\mathrm{A}}\in\mathcal{P}^{\mathrm{A}},\quad \mathrm{p}^{\mathrm{B}}\in\mathcal{P}^{\mathrm{B}}, \tag{6.5.5}$$

определяет результат нечеткого акта игры — возможность «выигрыша» игрока A *и «проигрыша» игрока* B, *сопутствующую используемым ими стратегиям* p^{A} *и* p^{B} *принятия решений.* В (6.5.5) $\mathcal{P}^{\mathrm{A}} = \{\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}} \geqslant 0,\, i=1,\ldots,m,\, \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}} = 1\}$, $\mathcal{P}^{\mathrm{B}} = \{\mathrm{p}^{\mathrm{B}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}} \geqslant 0,\, j = 1,\ldots,n,\, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}} = 1\}$.

В рассматриваемой игре игрок A стремится максимизировать возможность (6.5.5), а игрок B — минимизировать, поскольку для игрока A событие W — «выигрыш», а для B — «проигрыш».

Определение 6.5.1. *Возможностной моделью нечеткого акта игры* назовем классы пространств с возможностями: класс пространств

$$(\Omega_m\times\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m\times\Omega_n), \mathrm{P}),\quad \mathrm{P}\in\mathcal{P}_m\times\mathcal{P}_n,$$

для каждого из которых нечеткий элемент (α,β) является каноническим, и класс пространств

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}^{(i,j)}),\quad (i,j)\in\Omega_m\times\Omega_n,$$

где $\Omega_m = \{1,\ldots,m\}$, $\Omega_n = \{1,\ldots,n\}$, $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}_n$ суть классы возможностей $\mathrm{P}^{\mathrm{A}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega_m)\to[0,1]$, $\mathrm{P}^{\mathrm{B}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega_n)\to[0,1]$ в (6.5.1), (6.5.2), Ω — пространство «элементарных выигрышей» игрока A и «элементарных проигрышей» игрока B, $\mathrm{P}((\alpha,\beta)=(i,j)) = \min\{\mathrm{P}^{\mathrm{A}}(\{i\}), \mathrm{P}^{\mathrm{B}}(\{j\})\} = \min(\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}), i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n$; $\mathrm{P}^{(\cdot,\cdot)}(\cdot)$ — переходная возможность для пространств $(\Omega_m\times\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m\times\Omega_n))$ и $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$, определяющая возможность $s_{ij} = \mathrm{P}^{(i,j)}(W)$ «выигрыша» $W\in\mathcal{P}(\Omega)$ игрока A, принявшего i-е решение, и «проигрыша» $W\in\mathcal{P}(\Omega)$ игрока B, принявшего j-е решение, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$.

Результатом фазифицированного акта игры назовем возможность (6.5.5)

$$\mathrm{P}(W\,|\,\mathrm{p}^{\mathrm{A}},\mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \min\{\mathrm{P}^{(i,j)}(W), \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\}$$

«выигрыша» игрока A, использующего стратегию $\mathrm{p}^{\mathrm{A}}\in\mathcal{P}^{\mathrm{A}}$, и «проигрыша» игрока B, использующего стратегию $\mathrm{p}^{\mathrm{B}}\in\mathcal{P}^{\mathrm{B}}$.

6.5.2. Максиминная стратегия игрока A. Пусть игрок A выбирает стратегию p^{A}, а игрок B минимизирует возможность «проигрыша», выбрав в (6.5.5) стратегию $\mathrm{p}^{\mathrm{B}} = \mathrm{p}^{\mathrm{B}}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}})$; обозначим минимальную возможность «проигрыша» игрока B

$$S_{\mathrm{A}}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}) = \min_{\mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}})).$$

Максиминную стратегию $\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}$ *игрока* A определим как любое решение задачи

$$S_{\mathrm{A}}(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}) = \max_{\mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}}} S_{\mathrm{A}}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}) \equiv \max_{\mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}}} \min_{\mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \stackrel{\triangle}{=} s_{maxmin}, \quad (6.5.6)$$

где s_{maxmin} — *минимальная возможность* «выигрыша» игрока A, которую назовем *максиминной возможностью*; согласно (6.5.6)

$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}} \quad S(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \geqslant s_{maxmin}.$$

Рассмотрим функцию $S_{\mathrm{A}}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}})$. Так как $S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ — неубывающая функция каждых возможностей $\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, в (6.5.3), то для получения ее минимума по p^{B} следует уменьшить до нуля все возможности $\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}, 1 \leqslant j \leqslant n$, кроме одной, которая для выполнения условия (6.5.1) должна остаться равной единице. Если $\mathrm{p}^{\mathrm{B}} = \{0, \ldots, 0, \overset{j_0}{1}, 0, \ldots, 0\}$, то

$$S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min\{s_{ij_0}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}\}. \quad (6.5.7)$$

Выбрав $j_0 = j_0(\mathrm{p}^{\mathrm{A}})$ так, чтобы значение правой части в (6.5.7) стало минимальным при заданном p^{A}, получим искомую функцию

$$S_{\mathrm{A}}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min\{s_{ij_0(\mathrm{p}^{\mathrm{A}})}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}\} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min\{s_{ij}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}\}. \quad (6.5.8)$$

Если $\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}} \leqslant \mathrm{p}_i'^{\mathrm{A}}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то для любой стратегии $\mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}$ $S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \leqslant S(\mathrm{p}'^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \Rightarrow \min_{\mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \leqslant \min_{\mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{p}'^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$, то есть $S_{\mathrm{A}}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}})$ является неубывающей функцией каждой возможности $\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, 1 \leqslant i \leqslant m$. Поэтому максиминной стратегией игрока A будет, в частности, стратегия со всеми $\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, 1 \leqslant i \leqslant m$, равными единице, и согласно (6.5.8) *максиминная возможность*

$$s_{maxmin} = \max_{\mathrm{p}^{\mathrm{A}}} \min_{\mathrm{p}^{\mathrm{B}}} S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij}. \quad (6.5.9)$$

Множество $\mathcal{P}^{*\mathrm{A}}$ всех максиминных стратегий согласно (6.5.7) определяется условием

$$\mathcal{P}^{*\mathrm{A}} = \{\mathrm{p}^{*\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}},\ \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min\{s_{ij}, \mathrm{p}_i^{*\mathrm{A}}\} = s_{maxmin}\}. \quad (6.5.10)$$

Что касается вопроса *о существовании четких максиминных стратегий* $\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}$, в которых $\mathrm{p}_i^{*\mathrm{A}} = \begin{cases} 1, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0, \end{cases}$ $i = 1, \ldots, m$, то ответ зависит от матрицы переходных возможностей (6.5.4). Для четкой максиминной стратегии $\{0, \ldots, 0, \overset{i_0}{1}, 0, \ldots, 0\}$ согласно условию (6.5.10) должно быть выполнено равенство

$$s_{i_0 j(i_0)} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} s_{i_0 j} = s_{maxmin}. \tag{6.5.11}$$

Например, для матрицы

$$\{s_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

($m = 2$, $n = 2$, i — номер строки, j — номер столбца) по формуле (6.5.9) $s_{maxmin} = 3/4$. Согласно условию (6.5.11) четкая стратегия с $i_0 = 2$ является максиминной, а с $i_0 = 1$ — не является.

А для матрицы

$$\{s_{ij}\} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

также $s_{maxmin} = 3/4$, но четких максиминных стратегий нет (ни в одной строке минимальный матричный элемент не равен [1] s_{maxmin}).

6.5.3. Минимаксная стратегия игрока В. Пусть игрок В выбирает стратегию $\mathrm{p^B}$, а игрок А максимизирует возможность «выигрыша», выбрав в (6.5.5) стратегию $\mathrm{p^A} = \mathrm{p^A}(\mathrm{p^B})$; обозначим эту максимальную возможность

$$S_\mathrm{B}(\mathrm{p^B}) = \max_{\mathrm{p^A} \in \mathcal{P}^\mathrm{A}} S(\mathrm{p^A}, \mathrm{p^B}) = S(\mathrm{p^A}(\mathrm{p^B}), \mathrm{p^B}). \tag{6.5.12}$$

Минимаксную стратегию $\mathrm{p^B_*}$ *игрока* В определим как любое решение задачи

$$S_\mathrm{B}(\mathrm{p^B_*}) = \min_{\mathrm{p^B} \in \mathcal{P}^\mathrm{B}} S_\mathrm{B}(\mathrm{p^B}) \equiv \min_{\mathrm{p^B} \in \mathcal{P}^\mathrm{B}} \max_{\mathrm{p^A} \in \mathcal{P}^\mathrm{A}} S(\mathrm{p^A}, \mathrm{p^B}) \triangleq s_{minmax}, \tag{6.5.13}$$

в которой s_{minmax} — *максимальная возможность* «проигрыша» игрока В, которую назовем *минимаксной возможностью*; согласно (6.5.13) $\forall\, \mathrm{p^A} \in \mathcal{P}^\mathrm{A}$ $S(\mathrm{p^A}, \mathrm{p^B_*}) \leqslant s_{minmax}$.

Рассмотрим функцию $S_\mathrm{B}(\mathrm{p^B})$, $\mathrm{p^B} \in \mathcal{P}^\mathrm{B}$. Так как $S(\mathrm{p^A}, \mathrm{p^B})$ — неубывающая функция каждой возможности p_i^A или p_j^B в (6.5.3), то для получения значения ее максимума по $\mathrm{p^A}$ достаточно выбрать все возможности p_i^A, $1 \leqslant i \leqslant m$, равными единице. При таком выборе в (6.5.12)

$$S_\mathrm{B}(\mathrm{p^B}) = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min\{s_{ij}, \mathrm{p}_j^\mathrm{B}\} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \min\{\max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij}, \mathrm{p}_j^\mathrm{B}\}. \tag{6.5.14}$$

Найдем для начала хотя бы одну минимаксную стратегию. Так как $S_\mathrm{B}(\mathrm{p^B})$ в (6.5.14) является неубывающей функцией каждой возможно-

---

[1] Каждая четкая стратегия $\mathrm{p^A} = \{0, \ldots, 0, \overset{i_0}{1}, 0, \ldots, 0\}$ игрока А «выделяет» в матрице $\{s_{ij}\}$ строку $s_{i_0 1}, \ldots, s_{i_0 n}$, см. (6.5.11), ответное решение $j = j(i_0)$ игрока В «выделяет» в этой строке минимальный матричный элемент $s_{i_0 j(i_0)}$, $i_0 = 1, \ldots, m$.

сти $p_j^B, 1 \leqslant j \leqslant n$, то, чтобы ее минимизировать, следует прежде всего положить равными нулю все возможности $p_j^B, 1 \leqslant j \leqslant n$, кроме одной, скажем, $p_{j_0}^B$, равной единице, и затем минимизировать по $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$:

$$S_B(p^B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij_0}, \text{ где } p^B = \{0, \ldots, 0, \overset{j_0}{1}, 0, \ldots, 0\}, 1 \leqslant j_0 \leqslant n.$$

Выбрав $j_0 = j_*$, при котором правая часть достигает минимума, получим минимаксную стратегию $p_*^B = \{0, \ldots, 0, \overset{j_*}{1}, 0, \ldots, 0\}$ и минимаксную возможность «проигрыша» игрока B, см. (6.5.9):

$$s_{minmax} = \min_{p^B} \max_{p^A} S(p^A, p^B) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij} = S_B(p_*^B) = s_{maxmin} = s. \tag{6.5.15}$$

Множество $\mathcal{P}_*^B$ всех минимаксных стратегий p_*^B в (6.5.13) определяется условием

$$\mathcal{P}_*^B = \left\{p_*^B \in \mathcal{P}^B, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \min\{\max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij}, p_{*j}^B\} = s_{minmax}\right\}. \tag{6.5.16}$$

Условие (6.5.16) можно записать в виде

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \min\{s_j, p_{*j}^B\} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} s_j = s, \tag{6.5.17}$$

где $s_j = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. Если $J = \{j \in \{1, \ldots, n\}, s_j > s\} \neq \varnothing$, то p_*^B определяется условиями

$$\max_{j \in J} p_{*j}^B \leqslant s, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} p_{*j}^B = 1, \tag{6.5.18}$$

если $J = \varnothing$, то в (6.5.18) остается лишь второе равенство.

Заметим, что среди минимаксных стратегий игрока B *всегда найдется четкая*. Точнее, *если в* (6.5.17) $s_{j_1} = \ldots = s_{j_k} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} s_j = s$, *то любая из* k *четких стратегий игрока* B $\begin{cases} p_{*j_t}^B = 1, \\ p_{*j}^B = 0, \quad j \neq j_t, \end{cases}$ $j = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, k$, *является минимаксной.*

Суммируем полученные результаты.

Теорема 6.5.1. *В любой матричной игре, возможностная модель которой охарактеризована в определении* 6.5.1, *существуют максиминные* p^{*A} *и минимаксные* p_*^B *стратегии, причем максиминная и минимаксная возможности равны*

$$s_{maxmin} = s_{minmax} = s = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij}. \tag{6.5.19}$$

Для любых максиминной p^{*A} *и минимаксной* p_*^B *стратегий*

$$S(p^{*A}, p_*^B) = s; \tag{6.5.20}$$

тройку (p^{*A}, p_*^B, s) *назовем решением матричной игры.*

Четкая стратегия игрока A, *в которой* $p_i^A = \begin{cases} 1, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0, \end{cases}$ $i = 1, \ldots, m$, *является максиминной, если* $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} s_{i_0 j} = s$.

Четкие максиминные стратегии существуют не для любой матрицы переходных возможностей (6.5.4).

Четкая стратегия игрока B, *в которой* $p_j^B = \begin{cases} 1, & j = j_0, \\ 0, & j \neq j_0, \end{cases}$ $j = 1, \ldots, n$, *является минимаксной, если* $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{i j_0} = s$.

Четкие минимаксные стратегии существуют для любой матрицы переходных возможностей (6.5.4).

Доказательство. Существование максиминных и минимаксных стратегий и равенство максиминной и минимаксной возможностей показано выше. Так как по определению максиминной и минимаксной стратегий

$$\forall p^B \; S(p^{*A}, p^B) \geqslant s_{maxmin},$$
$$\forall p^A \; S(p^A, p^B_*) \leqslant s_{minmax},$$

то

$$s_{maxmin} \leqslant S(p^{*A}, p^B_*) \leqslant s_{minmax}$$

и из равенства $s_{maxmin} = s_{minmax} = s$ следует, что $S(p^{*A}, p^B_*) = s$. ■

6.5.4. Геометрическая интерпретация игры. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи определения максиминных и минимаксных стратегий и решения игры, подобную геометрической интерпретации игры в § 6.2.2. Для этого преобразуем выражение (6.5.5) для возможности события W:

$$S(p^A, p^B) = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min \left\{ s_{ij}, p_i^A, p_j^B \right\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \min \left\{ p_i^A, \min\{s_{ij}, p_j^B\} \right\} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \min \left\{ p_i^A, \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \min\{s_{ij}, p_j^B\} \right\}.$$

Пусть

$$q_i(p^B) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \min\{s_{ij}, p_j^B\}, i = 1, \ldots, m, \tag{6.5.21}$$

и $q(p^B) = (q_1(p^B), q_2(p^B), \ldots, q_m(p^B))$ — точка в $[0, 1]^m$. Обозначим

$$Q = \{q(p^B) \in [0, 1]^m \mid p^B \in \mathcal{P}^B\}$$

множество точек $q(p^B)$, $p^B \in \mathcal{P}^B$. Оно является аналогом выпуклой оболочки $\mathrm{co}\{s_1, \ldots, s_n\}$ точек $s_j = (s_{1j}, \ldots, s_{mj})$, $j = 1, \ldots, n$, определенной в § 6.2.2, и в дальнейшем будем называть его «выпуклой оболочкой» этих точек.

Тогда $S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \min\{\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, q_i(\mathrm{p}^{\mathrm{B}})\}$ и очевидно, что

$$S_{\mathrm{B}}(\mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{\mathrm{p}^{\mathrm{A}}} S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} q_i(\mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \tag{6.5.22}$$

— максимальная координата точки $q(\mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \in Q$, и минимаксная стратегия игрока B ее минимизирует.

Обозначим

$$C(t) = \{c \in [0,1]^m,\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i \leqslant t\}$$

гиперкуб с вершинами $V = \{v \in [0,1]^m,\ v_i = 0, t,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (в § 6.2.2 он такой же). Тогда $s = s_{minmax} = \min\{t \in [0,1], C(t) \cap Q \neq \neq \varnothing\}$, а все точки множества $C(s) \cap Q$ соответствуют минимаксным стратегиям игрока B.

Рассмотрим теперь стратегию игрока A. Каждая стратегия $\mathrm{p}^{\mathrm{A}} = \{\mathrm{p}_1^{\mathrm{A}}, \ldots, \mathrm{p}_m^{\mathrm{A}}\} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}}$ задает семейство множеств в $[0,1]^m$

$$\mathcal{R}(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}) = \{r(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, l)\} = \{x \in [0,1]^m,\ \max_{1\leqslant i\leqslant m} \min\{\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, x_i\} = l\}, l \in [0,1].$$

Множества этого семейства аналогичны гиперплоскостям (прямым) на рис. 6.2.3, 6.2.4, и в дальнейшем так и будем их называть. Через каждую точку $[0,1]^m$ проходит одна и только одна «гиперплоскость» из этого семейства, и каждая «гиперплоскость» семейства однозначно задается значением $l \in [0,1]$, или условием прохождения через некоторую точку $[0,1]^m$. Если d — прямая, заданная условиями $d = \{x \in [0,1]^m,\ x_1 = x_2 = \ldots = x_m\}$, то l — координата точки пересечения этой «гиперплоскости» с d.

Максиминной будет любая такая стратегия игрока A, что для соответствующего ей семейства «гиперплоскостей» всем точкам из Q соответствует число $l \geqslant s_{maxmin} = s$ и в Q есть точки, которым соответствует $l = s$. Также очевидно, что всем точкам из $C(s)$ соответствует $l \leqslant s$. Поэтому максиминной стратегии p^{A} соответствует «гиперплоскость» $r(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, s)$, которую можно назвать разделяющей для множеств Q и $C(s)$.

Пример 6.5.1. Аналитическое и геометрическое решения.

Пусть $\{s_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/2 & 3/4 & 1 \\ 3/4 & 1/4 & 1 & 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ — матрица переходных возможностей, $i = 1, 2 = m$, $j = 1, \ldots, 5 = n$.

По формуле (6.5.19) $s = 1/2$.

Из условий (6.5.10) получим множество всех максиминных стратегий: $\mathrm{p}_1^{*\mathrm{A}} \geqslant 1/2$, $\mathrm{p}_2^{*\mathrm{A}} \geqslant 1/2$, $\max(\mathrm{p}_1^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}_2^{*\mathrm{A}}) = 1$, то есть либо $\mathrm{p}_1^{*\mathrm{A}} = 1$, $\mathrm{p}_2^{*\mathrm{A}} = 1$, либо $\mathrm{p}_1^{*\mathrm{A}} = 1$, $\mathrm{p}_2^{*\mathrm{A}} \in [1/2, 1)$, либо $\mathrm{p}_1^{*\mathrm{A}} \in [1/2, 1)$, $\mathrm{p}_2^{*\mathrm{A}} = 1$. В данном случае четких максиминных стратегий нет.

Из условий (6.5.18) получим множество всех минимаксных стратегий:

$p^B_{*1} \leqslant 1/2, p^B_{*3} \leqslant 1/2, p^B_{*4} \leqslant 1/2, p^B_{*5} \leqslant 1/2, \max\{p^B_{*1}, p^B_{*2}, p^B_{*3}, p^B_{*4}, p^B_{*5}\} = 1,$

поэтому $p^B_{*j} \in [0, 1/2]$, $j = 1, \ldots, 5$, $j \neq 2$, $p^B_{*2} = 1$. Среди этих минимаксных стратегий $p^B_{*1} = p^B_{*3} = p^B_{*4} = p^B_{*5} = 0$, $p^B_{*2} = 1$ — четкая.

Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию игры. Построим «выпуклую оболочку», гиперкуб $C(s)$ и их пересечение, см. рис. 6.5.1. Следует заметить, что восстановить по этим точкам минимаксные стратегии сложнее, чем найти их аналитически.

Разделяющих «прямых» три. Первая из них соответствует стратегии, у которой $p^{*A}_1 = 1$, $p^{*A}_2 = 1/2$, вторая — стратегии, у которой $p^{*A}_1 = 1/2$, $p^{*A}_2 = 1$. Последняя соответствует стратегиям, у которых $p^{*A}_1 = 1$, $p^{*A}_2 > 1/2$ или $p^{*A}_1 > 1/2$, $p^{*A}_2 = 1$. Как видим, максиминные стратегии геометрическим способом находятся легко, однако это связано с тем, что они задаются в данном случае лишь двумя параметрами. См. рис. 6.5.1–6.5.4.

6.5.5. Рандомизация нечеткой стратегии игры. Рассмотрим *задачу статистического моделирования принятия нечетких решений игроками* A и B, нечеткие стратегии решений которых суть $p^A = \{p^A_1, \ldots, p^A_m\}$ и $p^B = \{p^B_1, \ldots, p^B_n\}$, где $p^A_i = P^A(\alpha = i)$, $p^B_j = P^B(\beta = j)$, и возможность принятия ими пары решений (i, j) определена равенством

$$p^{AB}_{ij} = P((\alpha, \beta) = (i, j)) = \min\{p^A_i, p^B_j\},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \tag{6.5.23}$$

где α и β суть *независимые нечеткие элементы* со значениями в $\{1, \ldots, m\}$ и $\{1, \ldots, n\}$, моделирующие нечеткие стратегии решений игроков A и B, $p^{AB} = \{p^{AB}_{11}, p^{AB}_{12}, \ldots, p^{AB}_{mn}\}$ назовем *нечеткой стратегией игры*.

Для статистического моделирования принятия нечетких решений игроками A и B определим *рандомизированную стратегию игры* $pr^{AB} = \{pr^{AB}_{11}, pr^{AB}_{12}, \ldots, pr^{AB}_{mn}\}$ как вероятностную модель *нечеткой стратегии игры* $p^{AB} = \{p^{AB}_{11}, p^{AB}_{12}, \ldots, p^{AB}_{mn}\}$, согласно условию $\Pr \approx> P$, в котором $pr^{AB}_{ij} = \Pr((\alpha, \beta) = (i, j))$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, и *пара* α, β *случайных элементов* со значениями в $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ моделирует пару α, β *независимых* нечетких элементов в (6.5.23), см. определение 2.8.1 в § 2.8 гл. 2.

Для определения вероятности Pr, с которой максимально согласована возможность P, упорядочим множество $\{p^A_1, \ldots, p^A_m\} \times \{p^B_1, \ldots, p^B_n\}$, представив результат в виде упорядоченных возможностей пар решений $p^{AB}_{ij} = \min\{p^A_i, p^B_j\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, в (6.5.23)

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & = & p^{AB}_{i_1,j_1} & \geqslant & \ldots & \geqslant & p^{AB}_{i_m,j_n} & \geqslant & 0, \\ e^{AB} & = & 0 & . & e_1 & \ldots & e_{mn-1} & & e_{mn} & \end{array} \tag{6.5.24}$$

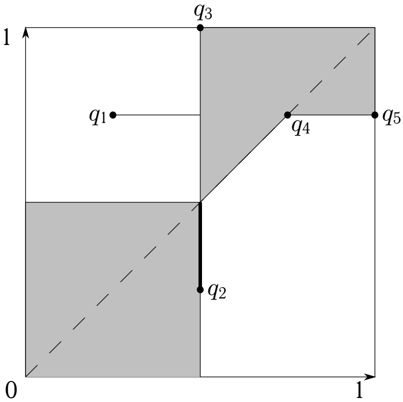


Рис. 6.5.1. «Выпуклая оболочка» Q (контур и заливка) с вершинами $q_1, \ldots, q_5$, гиперкуб $C(s)$ (контур и заливка), их пересечение (жирный отрезок)

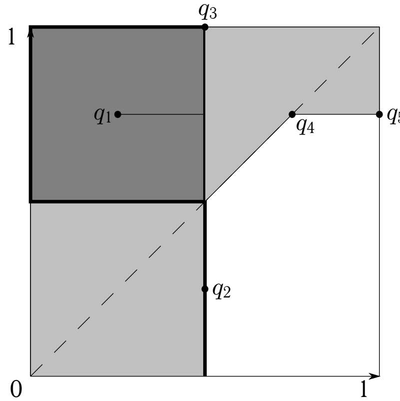


Рис. 6.5.2. «Разделяющая прямая» (жирный контур и темная заливка), соответствующая стратегии $p_1^{*A} = 1$, $p_2^{*A} = 1/2$

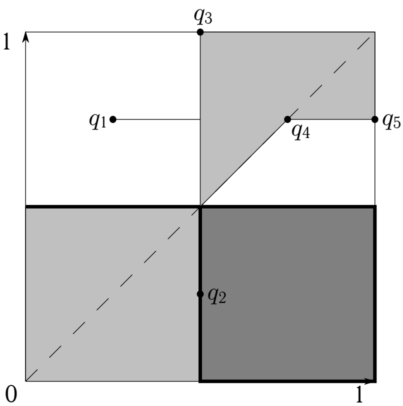


Рис. 6.5.3. «Разделяющая прямая» (жирный контур и темная заливка), соответствующая стратегии $p_1^{*A} = 1/2$, $p_2^{*A} = 1$

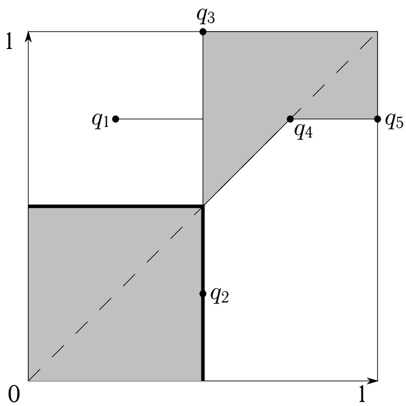


Рис. 6.5.4. «Разделяющая прямая» (жирная линия), соответствующая стратегиям $p_1^{*A} = 1$, $p_2^{*A} > 1/2$ и $p_1^{*A} > 1/2$, $p_2^{*A} = 1$

где двоичное число $e^{AB} = 0.e_1 \ldots e_{mn}$ характеризует упорядоченность в (6.5.24), согласно которой в (6.5.23) $P \in \mathbb{P}_{(e^{AB})}$, $P((\alpha, \beta) = (i_s, j_t)) = p_{i_s j_t}^{AB} = \min\{p_{i_s}^A, p_{j_t}^B\}$, $s = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, n$.

Выберем любую вероятность $\Pr \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e^{AB})}$, $\Pr((\alpha, \beta) = (i_s, j_t)) = \mathrm{pr}_{i_s j_t}^{AB}$, $s = 1, \ldots, m, t = 1, \ldots, n$. Так как $\Pr \approx> P$, то $\exists \widetilde{\gamma}^{AB}(\cdot) \in \Gamma(\Pr)$ $\forall Q \subset \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ $P(Q) = \sup\limits_{(i,j) \in Q} p_{ij}^{AB} = \widetilde{\gamma}^{AB}(\sum\limits_{(i,j) \in Q} \mathrm{pr}_{ij}^{AB}) = \widetilde{\gamma}^{AB}(\Pr(Q))$, в частности, см. § 2.3.1 гл. 2,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{p}_{ij}^{\mathrm{AB}} = \min\{\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, p_j^{\mathrm{B}}\} = \mathrm{P}((\alpha,\beta) = (i,j)) = \\
&= \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\mathrm{Pr}((\alpha,\beta) = (i,j))) = \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\mathrm{pr}_{ij}^{\mathrm{AB}},),\ i = i,\ldots,m,\ j = i,\ldots,n, \\
&\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{p}_{ij}^{\mathrm{AB}} = \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}\Big(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{pr}_{ij}^{\mathrm{AB}}\Big) = \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}}),\ i = 1,\ldots,m, \\
&\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \mathrm{p}_{ij}^{\mathrm{AB}} = \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}\Big(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{pr}_{ij}^{\mathrm{AB}}\Big) = \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}}),\ j = 1,\ldots,n,
\end{aligned}\qquad (6.5.25)$$

где $\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}} = \mathrm{P}((\alpha,\beta) \in \{i\}\times\{1,\ldots,n\})$, $\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}} = \mathrm{P}((\alpha,\beta) \in \{1,\ldots,m\}\times\{j\})$, $\mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}} = \mathrm{Pr}((\alpha,\beta) \in \{i\}\times\{1,\ldots,n\})$, $\mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}} = \mathrm{Pr}((\alpha,\beta) \in \{1,\ldots,m\}\times\{j\})$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.

Согласно равенствам (6.5.25)

$$\min\{\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\} = \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\min\{\mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}}\}) = \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\mathrm{pr}_{ij}^{\mathrm{AB}}),\quad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n. \qquad (6.5.25^*)$$

Заметим, что *для определения класса* $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e^{\mathrm{AB}})}$ *необходимо использовать обе нечеткие стратегии* p^{A} *и* p^{B}. Поэтому чтобы реализовать рандомизацию актов игры, требуется «крупье», которому игроки сообщат свои нечеткие стратегии, который определит класс $\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e^{\mathrm{AB}})}$, выберет определенную вероятность $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e^{\mathrm{AB}})}$ и «разыграет» случайный элемент (α,β). Если «выпадет» $(\alpha,\beta) = (i,j)$, то «крупье» будет рекомендовать игроку A принять i-е решение, а игроку B — j-е.

Такая рекомендация основана на том, что при многократно и взаимно независимо повторяемых рандомизированных актах игры $\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п. н.}} \mathrm{pr}_{ij}^{\mathrm{AB}}$, где k — число актов, $\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}}$ — частота выпадений $(\alpha,\beta) = (i,j)$, при этом $\widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}}) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п. н.}} \mathrm{p}_{ij}^{\mathrm{AB}} = \min\{\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, и, следовательно, $\max\limits_{i,j}\min\{s_{ij}, \widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\nu_{ij}^{(k)\mathrm{AB}})\} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п. н.}} \max\limits_{i,j}\min\{s_{ij}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\} = S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$.

Пример 6.5.1. Пусть

$$\begin{aligned}
&\mathrm{p}^{\mathrm{A}} = \{\mathrm{p}_1^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_2^{\mathrm{A}}\},\ \mathrm{p}^{\mathrm{B}} = \{\mathrm{p}_1^{\mathrm{B}}, \mathrm{p}_2^{\mathrm{B}}\}, \\
&1 = \mathrm{p}_1^{\mathrm{A}} > \mathrm{p}_2^{\mathrm{A}} > 0,\ 1 = \mathrm{p}_1^{\mathrm{B}} > \mathrm{p}_2^{\mathrm{B}} > 0, \\
&\mathrm{p}_2^{\mathrm{A}} > \mathrm{p}_2^{\mathrm{B}},
\end{aligned}\qquad (6.5.26)$$

и, следовательно,

$$1 = \min\{\mathrm{p}_1^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_1^{\mathrm{B}}\} > \min\{\mathrm{p}_2^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_1^{\mathrm{B}}\} > \min\{\mathrm{p}_1^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_2^{\mathrm{B}}\} = \min\{\mathrm{p}_2^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_2^{\mathrm{B}}\} > 0,\quad e^{\mathrm{AB}} = 0.1101. \qquad (6.5.27)$$

Посмотрим вначале, можно ли определить рандомизированную стратегию игры, выбрав α и β стохастически независимыми, то есть так, чтобы $\mathrm{Pr}(\alpha = i, \beta = j) = \mathrm{pr}_i^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_j^{\mathrm{B}}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$. Согласно (6.5.26) $\mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}} > \mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} \Leftrightarrow \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}} < \mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}}$ и, следовательно, $1 \geqslant \mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} > \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}} > \mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}} > \mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} > 0$, и соответственно $1 > \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} > \mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} > \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} >$

$> \mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} > 0$. Так как $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$, то согласно (6.5.27)

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} > 1,\ \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + 2\mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} > 1,\\
&\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + \mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + 2\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} \leqslant 1,\\
&\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + \mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} + \mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} = 1 \text{ и «автоматически»}\\
&\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + \mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} + \mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} + 2\mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}}\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} > 1.
\end{aligned} \tag{6.5.28}$$

Обозначим $\mathrm{pr}_1^{\mathrm{A}} = x$, $\mathrm{pr}_1^{\mathrm{B}} = y$, $\mathrm{pr}_2^{\mathrm{A}} = 1 - x$, $\mathrm{pr}_2^{\mathrm{B}} = 1 - y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда для системы неравенств (6.5.28) получим:

$$\begin{aligned}
&2xy > 1,\\
&xy + 2(1 - x)y > 1 \Leftrightarrow (x - 2)y < -1,\\
&xy + (1 - x)y + 2x(1 - y) \leqslant 1 \Leftrightarrow (x - 1/2)(y - 1) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Эта система неравенств несовместна, ибо согласно последнему неравенству $x \leqslant 1/2$, $y \leqslant 1$, в то время как согласно первому $y > 1/(2x) \geqslant 1$.

Пример 6.5.2. В общем случае согласно (6.5.27) $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(0.1101)}$, то есть

$$\begin{aligned}
&1 > \mathrm{pr}_{11}^{\mathrm{AB}} > \mathrm{pr}_{21}^{\mathrm{AB}} > \mathrm{pr}_{12}^{\mathrm{AB}} \geqslant \mathrm{pr}_{22}^{\mathrm{AB}} > 0,\\
&2\mathrm{pr}_{11}^{\mathrm{AB}} > 1,\ \mathrm{pr}_{11}^{\mathrm{AB}} + 2\mathrm{pr}_{21}^{\mathrm{AB}} > 1,\\
&\mathrm{pr}_{11}^{\mathrm{AB}} + \mathrm{pr}_{21}^{\mathrm{AB}} + 2\mathrm{pr}_{12}^{\mathrm{AB}} \leqslant 1,\\
&\mathrm{pr}_{11}^{\mathrm{AB}} + \mathrm{pr}_{21}^{\mathrm{AB}} + \mathrm{pr}_{12}^{\mathrm{AB}} + \mathrm{pr}_{22}^{\mathrm{AB}} = 1 \text{ и «автоматически»}\\
&\mathrm{pr}_{11}^{\mathrm{AB}} + \mathrm{pr}_{21}^{\mathrm{AB}} + \mathrm{pr}_{12}^{\mathrm{AB}} + 2\mathrm{pr}_{22}^{\mathrm{AB}} > 1.
\end{aligned}$$

Система линейных неравенств $1 > x > y > z > 0$, $2x > 1$, $x + 2y > 1$, $x + y + 2z \leqslant 1$, $0 < x + y + z < 1$, в которой $x = \mathrm{pr}_{11}^{AB}$, $y = \mathrm{pr}_{21}^{AB}$, $z = \mathrm{pr}_{12}^{AB}$, как нетрудно убедиться, совместна. Выбрав, например, $\mathrm{pr}_{11}^{\mathrm{AB}} = 2/3$, $\mathrm{pr}_{21}^{\mathrm{AB}} = 1/5$, $\mathrm{pr}_{12}^{\mathrm{AB}} = \mathrm{pr}_{22}^{\mathrm{AB}} = 1/15$, нетрудно проверить, что существует монотонная функция $\widetilde{\gamma}^{\mathrm{AB}}(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, для которой выполнены равенства (6.5.25*).

6.5.6. Возможностная модель биматричной игры двух субъектов. Как было отмечено, модель одноматричной игры характеризует ситуацию, в которой один игрок считает событие W «выигрышем», а другой — «проигрышем». Но поскольку в теории возможностей значения $P(W)$ и $P(\Omega \setminus W)$ не зависят друг от друга однозначно, а связаны лишь условием $\max(\mathrm{P}(W), \mathrm{P}(\Omega \setminus W)) = 1$, модель одноматричной игры не может охарактеризовать ситуацию, в которой игрок A считает «выигрышем» событие W, а игрок B считает «выигрышем» событие $\Omega \setminus W$, или, наоборот, они оба считают соответствующие события «проигрышем». Для описания таких ситуаций следует ввести матрицы переходных возможностей событий W и $\Omega \setminus W$.

Определение 6.5.2. Возможностной моделью фазифицированного акта игры назовем классы пространств с возможностями

$$(\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n), \mathrm{P}), \quad \mathrm{P} \in \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_n,$$

и

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P}_1^{(i,j)}, \mathrm{P}_2^{(i,j)}), \quad (i,j) \in \Omega_m \times \Omega_n,$$

в которых $\Omega_m = \{1, \ldots, m\}$, $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}_n$ суть классы всех возможностей $\mathrm{P}^{\mathrm{A}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega_m) \to [0,1]$, $\mathrm{P}^{\mathrm{B}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega_n) \to [0,1]$, Ω — пространство «элементарных выигрышей» (или «элементарных проигрышей») игроков, $\mathrm{P}_1^{(\cdot,\cdot)}(\cdot)$, $\mathrm{P}_2^{(\cdot,\cdot)}(\cdot)$ — переходные возможности для пространств $(\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n))$ и $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, определяющие $s_{ij} = \mathrm{P}_1^{(i,j)}(W)$ — возможность «выигрыша» («проигрыша») $W \in \mathcal{P}(\Omega)$ игрока A, и $t_{ij} = \mathrm{P}_2^{(i,j)}(\Omega \setminus W)$ — возможность «выигрыша» («проигрыша») $(\Omega \setminus W) \in \mathcal{P}(\Omega)$ игрока B, если игрок A принял i-е решение, а игрок B — j-е, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

В модели фазифицированного акта игры игроки A и B представлены независимыми нечеткими элементами, обозначим их α и β, принимающими значения в Ω_m и Ω_n, пара (α, β) которых является каноническим нечетким элементом для пространства с возможностью $(\Omega_m \times \Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_m \times \Omega_n), \mathrm{P})$, определяющим возможность $\mathrm{P}(\alpha = i, \beta = j) = (\mathrm{P}^{\mathrm{A}} \times \mathrm{P}^{\mathrm{B}})(\{i,j\}) = \min\{\mathrm{P}^{\mathrm{A}}(\{i\}), \mathrm{P}^{\mathrm{B}}(\{j\})\} = \min\{\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Результатом фазифицированного акта игры назовем возможности

$$\mathrm{P}(W \,|\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min\{\mathrm{P}_1^{(i,j)}(W), \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\}$$

«выигрыша» («проигрыша») игрока A и

$$\mathrm{P}(\Omega \setminus W \,|\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min\{\mathrm{P}_2^{(i,j)}(\Omega \setminus W), \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\}$$

«выигрыша» («проигрыша») игрока B, если игрок A использует стратегию $\mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}}$, а игрок B — стратегию $\mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}$.

Пусть заданы две матрицы переходных возможностей, матричные элементы которых

$$s_{ij} = \mathrm{P}_1^{(i,j)}(W) = \mathrm{P}(W|\alpha = i, \beta = j),\ t_{ij} = \mathrm{P}_2^{(i,j)}(W) = \mathrm{P}(\Omega \setminus W|\alpha = i, \beta = j),$$
$$\max\{s_{ij}, t_{ij}\} = 1,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Соответственно

$$\mathrm{P}(W \,|\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min\{s_{ij}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\} = S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}), \tag{6.5.29}$$

$$\mathrm{P}(\Omega \setminus W \,|\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \min\{t_{ij}, \mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}\} = T(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}),\ \mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}},\ \mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}. \tag{6.5.30}$$

В рассматриваемой игре можно поставить две задачи: максимизации и минимизации.

Рассмотрим сначала задачу максимизации, в которой цель игрока A — максимизировать $\mathrm{P}(W \mid \mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ в (6.5.29), а цель игрока B — максимизировать $\mathrm{P}(\Omega \setminus W \mid \mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ в (6.5.30).

Назовем *точкой равновесия* в такой задаче пару стратегий $(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}})$, для которых выполняется условие

$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}} \quad S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}}) \leqslant S(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}})$$
$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}} \quad T(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \leqslant T(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}}).$$

Так как $S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ и $T(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ — функции, неубывающие по каждому $\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}$, $i = 1, \ldots, m$, и $\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}$, $j = 1, \ldots, n$, то *пара тривиальных стратегий* $(\mathrm{p}_{triv}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_{triv}^{\mathrm{B}})$ (*из всех единиц*) *является точкой равновесия, причем*

$$S(\mathrm{p}_{triv}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_{triv}^{\mathrm{B}}) = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} s_{ij}.$$

Рассмотрим вопрос о существовании точки равновесия из четких стратегий. Далее для наглядности будем обозначать четкую стратегию первого игрока $(0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ как i, а четкую стратегию второго игрока $(0, \ldots, 0, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$ как j. Условие на точку равновесия можно преобразовать, учитывая неубывание функций $S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ и $T(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$:

$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}} \;\; S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, j_*) \leqslant S(i^*, j_*) \Leftrightarrow S(\mathrm{p}_{triv}^{\mathrm{A}}, j_*) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij_*} \leqslant S(i^*, j_*) = s_{i^* j_*};$$
$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}} \;\; T(i^*, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \leqslant T(i^*, j_*) \Leftrightarrow T(i^*, \mathrm{p}_{triv}^{\mathrm{B}}) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} t_{i^* j} \leqslant T(i^*, j_*) = t_{i^* j_*}.$$

Заметим, что $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij_*} \leqslant s_{i^* j_*} \Leftrightarrow \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij_*} = s_{i^* j_*}$ и $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} t_{i^* j} \leqslant t_{i^* j_*} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} t_{i^* j} = t_{i^* j_*}$

Таким образом, *пара* (i^*, j_*) *является точкой равновесия из четких стратегий в задаче максимизации тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} s_{ij_*} = s_{i^* j_*}, \;\; \max_{1 \leqslant j \leqslant n} t_{i^* j} = t_{i^* j_*}.$$

Например, для матриц $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ это условие не выполняется ни для одной из возможных пар четких стратегий. Для матриц $s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ точек равновесия из четких стратегий две, это пары $(i^* = 1, j_* = 1)$ и $(i^* = 2, j_* = 1)$.

Рассмотрим теперь задачу минимизации, в которой цель игрока A — минимизировать $\mathrm{P}(\Omega \setminus W)$, а цель игрока B — минимизировать $\mathrm{P}(W)$. Назовем *точкой равновесия* в такой задаче пару стратегий $(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}})$, для которых выполняется условие

$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}} \quad S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}}) \geqslant S(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}}),$$
$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}} \quad T(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \geqslant T(\mathrm{p}^{*\mathrm{A}}, \mathrm{p}_*^{\mathrm{B}}).$$

Так как $S(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ и $T(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, \mathrm{p}^{\mathrm{B}})$ — функции, неубывающие по каждому $\mathrm{p}_i^{\mathrm{A}}$ и $\mathrm{p}_j^{\mathrm{B}}$, то точку равновесия следует искать среди четких стратегий. Условие на точку равновесия при этом выглядит так:

$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{B}}\ S(i^*, \mathrm{p}^{\mathrm{B}}) \geqslant S(i^*, j_*) \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$
$$S(i^*, j) = s_{i^*j} \geqslant S(i^*, j_*) = s_{i^*j_*} \Leftrightarrow \min_{1\leqslant j\leqslant n} s_{i^*j} = s_{i^*j_*};$$
$$\forall\, \mathrm{p}^{\mathrm{A}} \in \mathcal{P}^{\mathrm{A}}\ T(\mathrm{p}^{\mathrm{A}}, j_*) \geqslant T(i^*, j_*) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$
$$T(i, j_*) = t_{ij_*} \geqslant T(i^*, j_*) = t_{i^*j_*} \Leftrightarrow \min_{1\leqslant i\leqslant m} t_{ij_*} = t_{i^*j_*}.$$

Таким образом, *пара* (i^*, j_*) *является точкой равновесия* (*из четких стратегий*) *в задаче минимизации тогда и только тогда*, *когда выполняются условия*

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} s_{i^*j} = s_{i^*j_*}, \quad \min_{1\leqslant i\leqslant m} t_{ij_*} = t_{i^*j_*}.$$

Если таких пар нет, то точек равновесия в задаче минимизации нет. Например, так получается для уже приведенной пары матриц

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А для матриц $s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ точек равновесия из четких стратегий две, это пары $(i^* = 1, j_* = 1)$ и $(i^* = 1, j_* = 2)$.

Суммируем полученные результаты.

Теорема 6.5.2. *В любой биматричной игре в задаче максимизации*, *возможностная модель которой охарактеризована в определении* 6.5.2, *существуют точки равновесия. Пара четких стратегий* (i^*, j_*) *есть точка равновесия тогда и только тогда*, *когда*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} s_{ij_*} = s_{i^*j_*}; \ \max_{1\leqslant j\leqslant n} t_{i^*j} = t_{i^*j_*}.$$

Точки равновесия из четких стратегий могут как существовать, *так и не существовать в зависимости от матриц* $\{s_{ij}\}$ *и* $\{t_{ij}\}$ *переходных возможностей.*

В такой же биматричной игре в задаче минимизации точки равновесия могут как существовать, *так и не существовать в зависимости от матриц переходных возможностей. Если точки равновесия существуют*, *то среди них есть и точки равновесия из четких стратегий. Пара четких стратегий* (i^*, j_*) *есть точка равновесия тогда и только тогда*, *когда*

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} s_{i^*j} = s_{i^*j_*}; \ \min_{1\leqslant i\leqslant m} t_{ij_*} = t_{i^*j_*}.$$

Если таких пар нет, то в соответствии с вышесказанным точек равновесия, в том числе из фазифицированных стратегий, в задаче минимизации нет.

6.6. Нечеткие модели. Оценивание

6.6.1. Возможностная модель наблюдения и правило оценивания. В рассматриваемых далее моделях оценивания, как и в моделях идентификации, заданы:

► распределения $g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to [0,1]$ и $h^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X \times K \to [0,1]$ пары нечетких элементов ξ и $\varkappa$. Значения $g^{\xi,\varkappa}(x,k)$ и $h^{\xi,\varkappa}(x,k)$ суть возможность и соответственно необходимость того, что $(\xi,\varkappa) = (x,k)$ и что $(\xi,\varkappa) \neq (x,k)$; $\varkappa$ моделирует какую-либо характеристику нечеткой системы, ξ — наблюдение за системой. Распределения $g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)$, $h^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)$ *назовем нечеткой моделью системы и наблюдения за системой*;

► распределения $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)\colon D \times X \to [0,1]$ переходной возможности $\Pi(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(D) \times X \to [0,1]$ и $\nu^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)\colon D \times X \to [0,1]$ переходной необходимости $\mathrm{N}(\cdot|\cdot)\colon \mathcal{P}(D) \times X \to [0,1]$ для пространств $(X,\mathcal{P}(X))$ и $(D,\mathcal{P}(D))$. *Распределения $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)$ и $\nu^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)$ назовем нечеткими правилами оценивания значения нечеткого элемента $\varkappa$ значением нечеткого элемента δ*;

► индикаторные функции $\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d) = \mathrm{P}^{\eta}((k,d) \in \Lambda^{\eta})$, $\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d) = \mathrm{N}^{\eta}((k,d) \in \Lambda^{\eta})$, $(k,d) \in K \times D$, нечеткого множества Λ, определенного на нечетком пространстве $(Y,\mathcal{P}(Y),\mathrm{P}^{\eta},\mathrm{N}^{\eta})$ и принимающего значения в $\mathcal{P}(K \times D)$, см. (1.10.11), (1.10.12) гл. 1. Их значения $\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d)$ и $\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d)$ суть возможность и соответственно необходимость потерь, сопутствующих использованию $d \in D$ как характеристики $k \in K$ системы, см. рис 6.6.1; нечеткое множество Λ и нечеткий элемент $(\xi,\varkappa,\delta)$ независимы в смысле одноточечного покрытия, см. § 1.12.2 гл. 1. Как правило, K и D суть *компактные* множества в евклидовом пространстве, причем $K = D$.

6.6.2. Правило оценивания, минимизирующее возможность потерь. Возможность потерь при оценивании $\varkappa$ согласно нечеткому правилу $\pi^{\delta|\xi}$

$$\begin{aligned}\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) &= \sup_{\substack{x\in X,d\in D\\k\in K}} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d), \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} = \\ &= \sup_{x\in X,d\in D} \min\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{P}^{\Lambda}(d,x)\},\end{aligned} \tag{6.6.1}$$

где

$$\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x) = \sup_{k\in K} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} \tag{6.6.2}$$

— возможность потерь при $\delta = d$ и $\xi = x$, $x \in X$, $d \in D$.

Рассмотрим задачу оценивания как задачу на минимум для возможности потерь (6.6.1)

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi}) = \min_{\pi^{\delta|\xi}} \mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}), \tag{6.6.3}$$

решение $\pi^{*\delta|\xi}$ которой определит *оптимальное нечеткое правило оценивания*. В следующей теореме дано решение задачи (6.6.3).

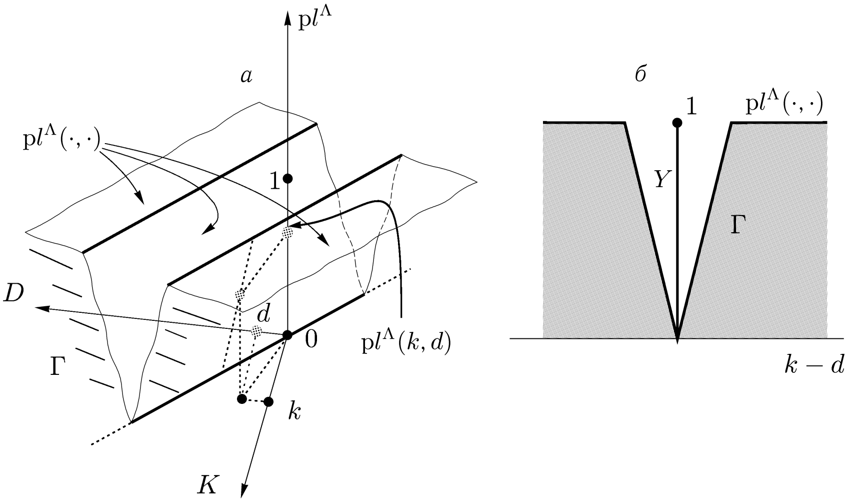


Рис. 6.6.1. *а*) График Г нечеткого множества Λ и график функции $\mathrm{p}l^{\Lambda}(\cdot,\cdot)\colon K\times D\to[0,1]$. *б*) Сечение графика Г нечеткого множества $\Lambda\colon Y\to\mathcal{P}(K\times D)$ плоскостью $\{(k,d,\mathrm{p}l)\in K\times D\times[0,1],\ k+d=0\}$. В обоих случаях $Y=[0,1]$, $g^{\eta}(y)=y$, $y\in[0,1]$, — распределение P^{η}, $K=D\subset\mathcal{R}^1$, $\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d)=q|k-d|$, если $q|k-d|\leqslant 1$, и $\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d)=1$, если $q|k-d|>1$, $k\in K$, $d\in D$, $q>0$

Теорема 6.6.1. *Пусть функция* $\mathrm{P}^{\Lambda}(\cdot,x)\colon D\to[0,1]$, *см.* (6.6.2), *полунепрерывна снизу при каждом* $x\in X$, $\mathrm{P}^{\Lambda}(x)=\min\limits_{d\in D}\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x)$ *и*

$$D^*(x)=\{d\in D,\ \mathrm{P}^{\Lambda}(d,x)=\mathrm{P}^{\Lambda}(x)\},\ x\in X. \tag{6.6.4}$$

Определим нечеткое правило $\pi^{*\delta|\xi}$ *оценивания* $\varkappa$, *удовлетворяющее следующим условиям*: *для каждого* $x\in X$

$$\max_{d\in D^*(x)}\pi^{*\delta|\xi}(d|x)=1,\quad \max_{d\in D\setminus D^*(x)}\pi^{*\delta|\xi}(d|x)=0. \tag{6.6.5}$$

Тогда для любого нечеткого правила $\pi^{\delta|\xi}$ *и любого нечеткого правила* $\pi^{*\delta|\xi}$, *удовлетворяющего условиям* (6.6.5),

$$\sup_{d\in D}\min\{\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x),\pi^{*\delta|\xi}(d|x)\} = \sup_{d\in D^*(x)}\min\{\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x),\pi^{*\delta|\xi}(d|x)\} =$$
$$= \mathrm{P}^{\Lambda}(x)\leqslant\sup_{d\in D}\min\{\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x),\pi^{\delta|\xi}(d|x)\},\ x\in X, \tag{6.6.6}$$

и соответственно

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\delta|\xi}) = \sup_{x \in X} \mathrm{P}^{\Lambda}(x) \leqslant \mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}), \tag{6.6.7}$$

т. е. любое нечеткое правило $\pi^{*\delta|\xi}$ является оптимальным.

Доказательство. Так как функция $\mathrm{P}^{\Lambda}(\cdot;x)\colon D \to [0,1]$ при каждом $x \in X$ полунепрерывна снизу на (компактном) D, то [1] $D^*(x) \neq \varnothing$, $x \in X$. Согласно условиям (6.6.4) и (6.6.5) выполнены оба равенства в (6.6.6). Правая часть в (6.6.6) равна

$$\max\Big\{ \sup_{d \in D^*(x)} \min\{\mathrm{P}^{\Lambda}(x), \pi^{\delta|\xi}(d|x)\}, \sup_{d \in D \setminus D^*(x)} \min\{\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x), \pi^{\delta|\xi}(d|x)\}\Big\} \tag{6.6.8}$$

и, поскольку $\max\limits_{d \in D^*(x)} \pi^{\delta|\xi}(d|x) = 1$, то выражение (6.6.8) равно

$$\max\Big\{\mathrm{P}^{\Lambda}(x), \sup_{d \in D \setminus D^*(x)} \min\{\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x), \pi^{\delta|\xi}(d|x)\}\Big\} \geqslant \mathrm{P}^{\Lambda}(x),\ x \in X,$$

т. е. выполнено неравенство в (6.6.6). Соотношения (6.6.7) следуют из (6.6.6). ■

Замечание 6.6.1. Поскольку согласно теореме 6.6.1 оптимальное правило $\pi^{*\delta|\xi}$ всегда можно выбрать четким, то есть так, чтобы при любом $x \in X$ для некоторого $d^* \in D^*(x)$ $\pi^{*\delta|\xi}(d^*|x) = 1$, а для остальных $d \in D$, $d \neq d^*$ $\pi^{*\delta|\xi}(d|x) = 0$, то *фазификация правила оценивания не позволяет улучшить его качество.*

6.6.3. Четкое правило оценивания. Согласно замечанию 6.6.1 определим четкое правило оценивания $\varkappa$ как функцию $d(\cdot)\colon X \to D$, ставящую в соответствие каждому результату наблюдения $\xi = x$ значение $d(x)$ в качестве оценки $\varkappa$, а сопутствующую возможность потерь определим выражением [43]

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \sup_{x \in X,\, k \in K} \min\{\mathrm{pl}^{\Lambda}(k, d(x)), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\}. \tag{6.6.9}$$

---

[1] Если $\exists x \in X$ $D^*(x) = \varnothing$, но $\exists \varepsilon(\cdot)\colon X \to (0,1)$ $\forall x \in X$ $\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x) \leqslant \mathrm{P}^{\Lambda}(x) + \varepsilon(x) < 1$, где $\mathrm{P}^{\Lambda}(x) = \inf\limits_{d \in D} \mathrm{P}^{\Lambda}(d,x)$, то $D^*_{\varepsilon(x)}(x) \triangleq \{d \in D,\ \mathrm{P}^{\Lambda}(d,x) \leqslant \mathrm{P}^{\Lambda}(x) + \varepsilon(x)\} \neq \varnothing$ и можно определить $\varepsilon(\cdot)$-*оптимальное правило* $\pi^{*\delta|\xi}_{\varepsilon(x)}(d|x)$, $d \in D$, $x \in X$, $\max\limits_{d \in D^*_{\varepsilon(x)}(x)} \pi^{*\delta|\xi}_{\varepsilon(x)}(d|x) = 1$, $\max\limits_{d \in D \setminus D^*_{\varepsilon(x)}(x)} \pi^{*\delta|\xi}_{\varepsilon(x)}(d|x) = 0$, $x \in X$, для любой функции $\varepsilon(\cdot)\colon X \to (0,1)$, удовлетворяющей указанным условиям.

Оптимальное правило оценивания определим как решение $d^*(\cdot)$ задачи на минимум для возможности потерь (6.6.9)

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(d^*(\cdot)) = \min_{d(\cdot)\colon X\to D} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(d(\cdot)). \tag{6.6.10}$$

Решение задачи (6.6.9) можно получить, решив для каждого $x \in X$ задачу

$$\mathrm{P}^{\Lambda}(d, x) = \sup_{k\in K} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k, d), g^{\xi,\varkappa}(x, k)\} \sim \min_{d\in D}. \tag{6.6.11}$$

Всякое семейство решений $d^* = d^*(x)$, $x \in X$, задачи (6.6.11) является решением задачи (6.6.10); этот факт следует из теоремы 6.6.1.

Теорема 6.6.1*. 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.6.1, $d^*(x)$, $x \in X$, *— некоторое семейство решений задачи* (6.6.11), *т. е. пусть* $d^*(x) \in D^*(x)$, $x \in X$, *см.* (6.6.4). *Тогда* $d^*(\cdot)\colon X \to D$ *— четкое правило оценивания, для которого*

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(d^*(\cdot)) = \min_{d(\cdot)\colon X\to D} \mathrm{PL}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \sup_{x\in X} \mathrm{P}^{\Lambda}(x).$$

2. *Пусть* $\widehat{d}(x)$, $x \in X$, *— любое семейство решений задачи* $\mathrm{P}^{\Lambda}(d|x) = \sup_{k\in K} \min\left\{\mathrm{pl}^{\Lambda}(k, d),\ g^{\varkappa|\xi}(k|x)\right\} \sim \min_{d\in D}$, $x \in X$, *где* $g^{\varkappa|\xi}(k|x)$, $k \in K$, *— произвольный вариант условного при условии* $\xi = x$ *распределения* $\varkappa$. *Тогда* $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\widehat{d}(x), x) = \mathrm{PL}^{\Lambda}(d^*(x), x) \triangleq \mathrm{P}^{\Lambda}(x)$, $x \in X$, *и, следовательно,*

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\widehat{d}(\cdot)) = \sup_{x\in X} \mathrm{P}^{\Lambda}(x) = \mathrm{PL}^{\Lambda}\big(d^*(\cdot)\big).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 6.6.1. Для доказательства второго утверждения заметим, что согласно определению функций $d^*(\cdot)$ и $\widehat{d}(\cdot)$

$$\mathrm{P}^{\Lambda}(d^*(x), x) = \min_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}(d, x) \leqslant \mathrm{P}^{\Lambda}(\widehat{d}(x), x),\ x \in X, \tag{6.6.12}$$

и

$$\mathrm{P}^{\Lambda}(\widehat{d}(x)|x) = \min_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}(d|x) \leqslant \mathrm{P}^{\Lambda}(d^*(x)|x),\ x \in X. \tag{6.6.13}$$

Так как $g^{\xi,\varkappa}(x, k) = \min\left\{g^{\varkappa|\xi}(k|x),\ g^{\xi}(x)\right\}$, $k \in K$, $x \in X$, где $g^{\xi}(x) = \sup_{k\in K} g^{\xi,\varkappa}(x, k)$, $x \in X$, то соответственно неравенству (6.6.13) $\mathrm{P}^{\Lambda}(\widehat{d}(x), x) = \min\left\{\mathrm{P}^{\Lambda}(\widehat{d}(x)|x), g^{\xi}(x)\right\} \leqslant \min\left\{\mathrm{P}^{\Lambda}(d^*(x)|x), g^{\xi}(x)\right\} = \mathrm{P}^{\Lambda}(d^*(x), x)$, $x \in X$. Отсюда и из неравенства (6.6.12) следуют утверждения в 2. ■

На рис. 6.6.2 и 6.6.3 приведены графики функций $\mathrm{p}l^{\Lambda}(k, d)$, $k \in K$, при некоторых фиксированных $d, d^* \in D$, и функций $g^{\xi,\varkappa}(x, k)$, $k \in K$, при фиксированном $x \in X$, поясняющие теорему 6.6.1*.

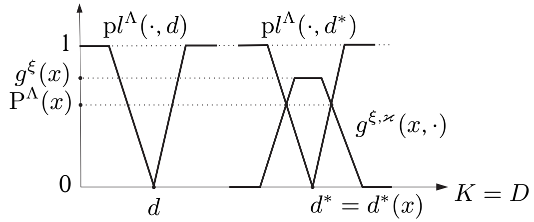


Рис. 6.6.2. Графики функций $\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d)$, $\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d^*)$ и $g^{\xi,\varkappa}(x,k)$, $k \in K$, значения $g^{\xi}(x) = \sup\limits_{k\in K} g^{\xi,\varkappa}(x,k)$, $\mathrm{P}^{\Lambda}(x) = \min\limits_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}(d,x)$. В этом случае $D^*(x) = \{d^*(x)\}$, $d^*(x)$ — единственное решение задачи (6.6.11), значение $x \in X$ фиксировано

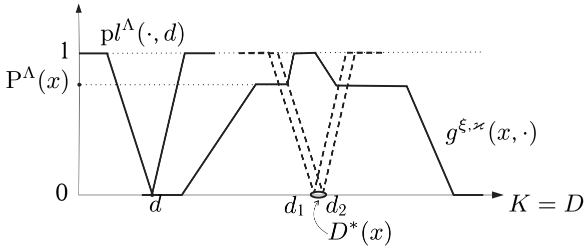


Рис. 6.6.3. Графики функций $g^{\xi,\varkappa}(x,\cdot)$, $\mathrm{p}l^{\Lambda}(\cdot,d)$, $\mathrm{p}l^{\Lambda}(\cdot,d_i)$, $i = 1, 2$, и множество $D^*(x)$, d_1, d_2 — граничные точки $D^*(x)$. Каждая точка $d^* \in D^*(x)$ определяет четкое правило оценивания $d^*(x)$, $x \in X$

Замечание 6.6.2. Если $K = D$ и

$$\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d) = \mathrm{p}l^{\Lambda}_{\circ}(k,d) = \begin{cases} 0, \; d = k, \\ 1, \; d \neq k, \end{cases} \quad k \in K, \; d \in D, \tag{6.6.14}$$

то в (6.6.2)

$$\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x) = \sup_{\substack{k\in K,\\ k\neq d}} g^{\xi,\varkappa}(x,k), \; d \in D, \; x \in X, \tag{6.6.15}$$

а в качестве $d^* = d^*(x)$ можно выбрать любое значение

$$d^* \in \left\{d \in D, g^{\xi,\varkappa}(x,d) = g^{\xi}(x) = \max_{k'\in K} g^{\xi,\varkappa}(x,k')\right\} \subset D^*(x), \; x \in X. \tag{6.6.16}$$

В этом случае правило $d^*(\cdot)$, минимизирующее *возможность ошибки оценивания* $\mathrm{PE}^{\Lambda}(d(\cdot))$, назовем *правилом максимальной возможности*.

6.6.4. Правило оценивания, минимизирующее необходимость потерь. Подобно (6.4.35), необходимость потерь, сопутствующая нечеткому правилу оценивания $\nu^{\delta|\xi}$, ср. с (6.4.127),

$$\mathrm{N\,L}^{\Lambda}(\nu^{\delta|\xi}) \inf_{\substack{x\in X,\,k\in K,\\ d\in D}} \max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d), \nu^{\delta|\xi}(d|x), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\} =$$
$$= \inf_{x\in X,\,d\in D} \max\{\nu^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)\}, \quad (6.6.17)$$

где

$$\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x) = \inf_{k\in K} \max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\},\ x\in X,\ d\in D. \quad (6.6.18)$$

Задача определения *оптимального нечеткого* правила $\nu_*^{\delta|\xi}$ оценивания, минимизирующего необходимость потерь, $\mathrm{N\,L}^{\Lambda}(\nu_*^{\delta|\xi}) = \min_{\nu^{\delta|\xi}} \mathrm{N\,L}^{\Lambda}(\nu^{\delta|\xi})$, будет решена, если для каждого $x\in X$ известно решение задачи $\inf_{d\in D} \max\{\nu^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)\} \sim \min_{\nu^{\delta|\xi}}$.

Теорема 6.6.2 (ср. с теоремой 6.4.2**). *Пусть при каждом* $x\in X$ *функция* $\mathrm{N}^{\Lambda}(\cdot,x)\colon D\to[0,1]$ *полунепрерывна снизу на* D, $\mathrm{N}^{\Lambda}(x) = \min_{d\in D} \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)$ *и* $D_*(x) = \{d\in D,\ \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x) = \mathrm{N}^{\Lambda}(x)\}$, $x\in X$.

Определим нечеткое правило $\nu_*^{\delta|\xi}$ *оценивания* $\varkappa$, *удовлетворяющее условию* $\min_{d\in D_*(x)} \nu_*^{\delta|\xi}(d|x) = 0$ *для каждого* $x\in X$. *Тогда для любого нечеткого правила* $\nu^{\delta|\xi}$

$$\mathrm{N\,L}^{\Lambda}(\nu_*^{\delta|\xi}) = \inf_{x\in X} \mathrm{N}^{\Lambda}(x) \leqslant \mathrm{N\,L}^{\Lambda}(\nu^{\delta|\xi}),$$

т. е. $\nu_*^{\delta|\xi}$ — *оптимальное нечеткое правило оценивания* $\varkappa$.

Любая функция $d_*(\cdot)\colon X\to D$, *удовлетворяющая условию* $d_*(x)\in D_*(x)$, $x\in X$, *определяет оптимальное четкое правило* $\delta = d_*(\xi)$ *оценивания* $\varkappa$:

$$\overline{\mathrm{N}}\,\mathrm{L}^{\Lambda}(d_*(\cdot)) = \inf_{x\in X} \mathrm{N}^{\Lambda}(x) \leqslant \overline{\mathrm{N\,L}}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \inf_{\substack{x\in X,\\ k\in K}} \max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d(x)), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\},$$

где $d(\cdot)\colon X\to D$ — *любое четкое правило* $\delta = d(\xi)$ *оценивания* $\varkappa$.

Доказательство. Согласно (6.6.17), (6.6.18) для любого нечеткого правила оценивания $\nu^{\delta|\xi}$ $\mathrm{N\,L}^{\Lambda}(\nu_*^{\delta|\xi}) = \inf_{x\in X} \min\big\{ \inf_{d\in D_*(x)} \max\{\nu_*^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)\}, \inf_{d\in D\setminus D_*(x)} \max\{\nu_*^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)\}\big\} = \inf_{x\in X} \inf_{d\in D_*(x)} \max\{\nu_*^{\delta|\xi}(d|x), \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)\} = \inf_{x\in X} \mathrm{N}^{\Lambda}(x) \leqslant \mathrm{N\,L}^{\Lambda}(\nu^{\delta|\xi})$; для любого четкого правила оценивания $d(\cdot)\colon X\to D$ $\overline{\mathrm{N}}\,\mathrm{L}^{\Lambda}(d_*(\cdot)) = \inf_{x\in X,\,k\in K} \max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d_*(x)), h^{\xi,\varkappa}(x,k)\} \equiv \equiv \inf_{x\in X} \mathrm{N}^{\Lambda}(d_*(x),x) = \inf_{x\in X} \mathrm{N}^{\Lambda}(x) \leqslant \overline{\mathrm{N\,L}}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \inf_{x\in X} \mathrm{N}^{\Lambda}(d(x),x)$. ■

6.6.5. Правило оценивания, минимизирующее необходимость потерь, дуальную возможности. Для определенной в § 6.6.1 модели наблюдения необходимость потерь, *дуальная возможности* $\mathrm{PL}(\pi^{\delta|\xi})$

(6.6.1), свойственная нечеткому правилу $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)\colon D\times X\to[0,1]$,

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})=\theta(\sup_{\substack{x\in X,\,d\in D\\ k\in K}}\min\{\theta^{-1}\circ\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d),\pi^{\delta|\xi}(d|x),g^{\xi,\varkappa}(x,k)\})=$$
$$=\inf_{x\in X,\,d\in D}\max\{\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x),\theta\circ\pi^{\delta|\xi}(d|x)\},\quad(6.6.19)$$

где

$$\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)=\inf_{k\in K}\max\{\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d),\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\},\ d\in D,\ x\in X,\quad(6.6.20)$$

и функция $\theta(\cdot)\in\Theta$.

Решение задачи определения оптимального нечеткого правила оценивания $\pi_*^{\delta|\xi}$, минимизирующего необходимость потерь,

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi_*^{\delta|\xi})=\min_{\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)}\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}),\quad(6.6.21)$$

может быть получено на основе решения семейства задач на минимум

$$\inf_{d\in D}\max\left\{\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x),\theta\circ\pi^{\delta|\xi}(d|x)\right\}\sim\min_{\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x)}\quad(6.6.22)$$

для каждого $x\in X$. Это показано в следующей теореме.

Теорема 6.6.3. *Пусть функция $\mathrm{N}^{\Lambda}(\cdot;x)\colon D\to[0,1]$ полунепрерывна снизу при каждом $x\in X$, $\mathrm{N}^{\Lambda}(x)=\min_{d\in D}\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)$, $x\in X$, и*

$$D_*(x)=\{d\in D,\ \mathrm{N}^{\Lambda}(d,x)=\mathrm{N}^{\Lambda}(x)\},\ x\in X.\quad(6.6.23)$$

Тогда минимум в (6.6.22) *достигается на любом нечетком правиле $\pi_*^{\delta|\xi}$, удовлетворяющем условию: для любого $x\in X$*

$$\max_{d\in D_*(x)}\pi_*^{\delta|\xi}(d|x)=1.\quad(6.6.24)$$

Для любого такого правила оценивания $\pi_*^{\delta|\xi}$ и любого[1] *правила $\pi^{\delta|\xi}$*

$$\inf_{d\in D}\max\{\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x),\theta\circ\pi_*^{\delta|\xi}(d|x)\}=\inf_{d\in D_*(x)}\max\{\mathrm{N}^{\Lambda}(x),\theta\circ\pi_*^{\delta|\xi}(d|x)\}=$$
$$=\mathrm{N}^{\Lambda}(x)\leqslant\inf_{d\in D}\max\{\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x),\theta\circ\pi^{\delta|\xi}(d|x)\},\quad x\in X,\quad(6.6.25)$$

и соответственно

$$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi_*^{\delta|\xi})=\inf_{x\in X}\mathrm{N}^{\Lambda}(x)\leqslant\mathrm{NL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}).\quad(6.6.26)$$

[1] При любом $x\in X$ $\max_{d\in D}\pi^{\delta|\xi}(d|x)=1$, ибо $\pi^{\delta|\xi}(\cdot|x)\colon D\to[0,1]$ — распределение переходной возможности.

Доказательство. Действительно, согласно (6.6.19), (6.6.20), (6.6.23) и условию (6.6.24) $\inf\limits_{d\in D}\max\{\mathrm{N}^\Lambda(d,x),\theta\circ\pi_*^{\delta|\xi}(d|x)\} = \min\limits_{d\in D_*(x)}\mathrm{N}^\Lambda(d,x) = \mathrm{N}^\Lambda(x) \leqslant \inf\limits_{d\in D}\max\{\mathrm{N}^\Lambda(d,x),\theta\circ\pi^{\delta|\xi}(d|x)\}$, $x\in X$, откуда и следует неравенство (6.6.26). ■

Замечание 6.6.3. Выберем любую функцию $d_*(x)\in D_*(x)$, $x\in X$, и определим $\pi_*^{\delta|\xi}$ так, чтобы в согласии с (6.6.24) для каждого $x\in X$ $\pi_*^{\delta|\xi}(d_*(x)|x)=1$, а для $d\neq d_*(x)$, например, $\pi_*^{\delta|\xi}(d|x)=0$. При таком выборе функция $d_*(\cdot)\colon X\to D$ определяет четкое правило оценивания, ставящее в соответствие наблюдению $\xi=x$ значение $d_*(x)$ в качестве оценки $\varkappa$, для которого необходимость потерь равна $\mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi})=\inf\limits_{x\in X}\mathrm{N}^\Lambda(x)$, т. е. *фазификация правила оценивания и в этом случае не позволяет улучшить качество оценивания.*

В связи с замечанием 6.6.3 рассмотрим задачу определения четкого правила оптимального оценивания $d_*(\cdot)\colon X\to D$, минимизирующего необходимость потерь

$$\mathrm{NL}^\Lambda(d(\cdot)) = \inf_{\substack{x\in X,\\ k\in K}}\max\{\mathrm{n}l^\Lambda(k,d(x)),\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\}\sim\min_{d(\cdot)\colon X\to D}, \tag{6.6.27}$$

дуальную возможности потерь (6.6.9), [43]. Решение $d_*(\cdot)\colon X\to D$ задачи (6.6.27) можно получить в виде семейства $d_*(x)$, $x\in X$, решений задачи

$$\mathrm{N}^\Lambda(d,x) = \inf_{k\in K}\max\{\mathrm{n}l^\Lambda(k,d),\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\}\sim\min_{d\in D},\ x\in X. \tag{6.6.28}$$

Теорема 6.6.3*. *Пусть $d_*(x)$, $x\in X$, — некоторое семейство решений задач* (6.6.28), *т. е. пусть $d_*(x)\in D_*(x)$, $x\in X$, см.* (6.6.20), (6.6.23). *Тогда $d_*(\cdot)\colon X\to D$ — четкое правило оценивания, минимизирующее необходимость потерь* (6.6.27).

Доказательство. Следует из теоремы 6.6.3 и замечания 6.6.3. ■

На рис. 6.6.4 приведены «графические решения» задач (6.6.11) и (6.6.28), иллюстрирующие несовпадение правил оценивания $d^*(\cdot)$ и $d_*(\cdot)$.

Замечание 6.6.4. Если $K=D$ и $\mathrm{n}l^\Lambda(k,d)|_{k=d}=0$, $k\in K$, то $\mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi})=0$. Действительно, в таком случае $\mathrm{N}^\Lambda(x)=\min\limits_{d\in D}\mathrm{N}^\Lambda(d,x) = \inf\limits_{k\in K}\max\{\min\limits_{d\in D}\mathrm{n}l^\Lambda(k,d),\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} = \theta\circ\sup\limits_{k\in K}g^{\xi,\varkappa}(x,k)=\theta\circ g^\xi(x)$, $x\in X$, и, следовательно, $\mathrm{NL}^\Lambda(\pi_*^{\delta|\xi})=\inf\limits_{x\in X}\mathrm{N}^\Lambda(x)=\theta\circ\big(\sup\limits_{x\in X}g^\xi(x)\big)=0$.

В связи с замечаниями 6.6.3 и 6.6.4 рассмотрим подробнее четкое правило оптимального оценивания в случае $K=D$ для функции

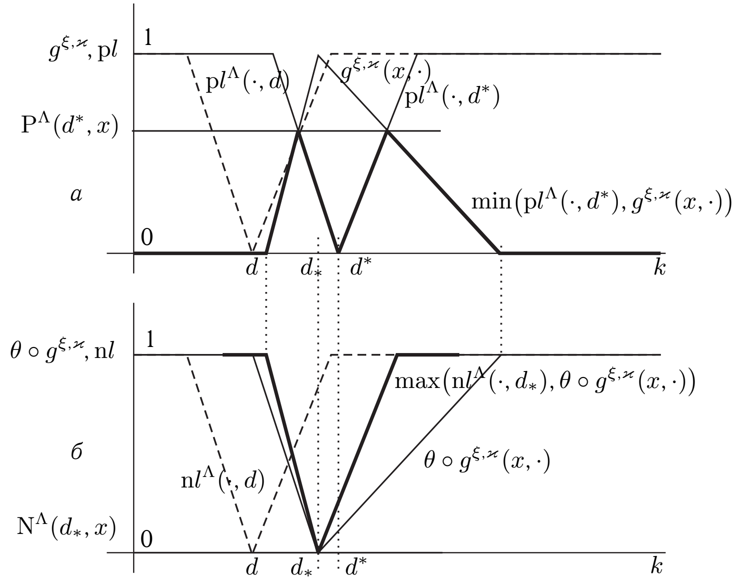


Рис. 6.6.4. Решения $d^* = d^*(x)$ задачи (6.6.11) (*а*), и $d_* = d_*(x)$ задачи (6.6.28) (*б*); $\mathrm{n}l^{\Lambda}(k,d) = \min(3|k-d|,1)$, $k,d \in K = D \subset \mathcal{R}^1$, $\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,d) = 1 - g^{\xi,\varkappa}(x,d)$, $d \in D$, значение $x \in X$ фиксировано

$\mathrm{n}l^{\Lambda}_{\circ}(\cdot,\cdot)$, равной $\mathrm{p}l^{\Lambda}_{\circ}(\cdot,\cdot)$, определенной в (6.6.14), и для класса функций $\widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$, определенных условиями

$$\widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(k,d) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = d,\\ > 0, & \text{если } k \neq d, \end{cases} \quad k,d \in K = D. \tag{6.6.29}$$

Согласно замечанию 6.6.4 для любой функции $\widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ (6.6.29) (и, в частности, для $\mathrm{n}l^{\Lambda}_{\circ}(\cdot,\cdot)$)

$$\mathrm{N}^{\Lambda}(x) = \theta\circ g^{\xi}(x) = \theta\circ \sup_{k\in K} g^{\xi,\varkappa}(x,k),\ x \in X. \tag{6.6.30}$$

Поэтому множества $D_*(x)$, $x \in X$, (6.6.23) для $\mathrm{n}l^{\Lambda}_{\circ}(\cdot,\cdot)$ согласно (6.6.30) определятся равенствами

$$\begin{aligned} &D^{\circ}_*(x) = \{d \in D, g^{\xi,\varkappa}(x,d) = \\ &= \sup_{k\in K} \min\{\theta^{-1}\circ \mathrm{n}l^{\Lambda}_{\circ}(k,d), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} = g^{\xi}(x)\},\ x \in X, \end{aligned} \tag{6.6.31}$$

а для $\widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ (6.6.29) — равенствами

$$\widetilde{D}_*(x) = \{d \in D, \sup_{k\in K} \min\{\theta^{-1}\circ \widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(k,d), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} = g^{\xi}(x)\},\ x \in X. \tag{6.6.32}$$

Так как $\widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(k,d) \leqslant \mathrm{n}l_{\circ}^{\Lambda}(k,d)$, $k,d \in K = D$, то для любых $d \in D$ и $x \in X$

$$\begin{aligned} g^{\xi,\varkappa}(x,d) = \sup_{k\in K} \min\{\theta^{-1} \circ \mathrm{n}l_{\circ}^{\Lambda}(k,d), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} \leqslant \\ \leqslant \sup_{k\in K} \min\{\theta^{-1} \circ \widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(k,d), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\} \leqslant g^{\xi}(x). \end{aligned} \qquad (6.6.33)$$

Следовательно, согласно (6.6.31), (6.6.32) и (6.6.33) $D_*^{\circ}(x) \subset \widetilde{D}_*(x)$, $x \in X$, поэтому любое четкое правило оптимального оценивания $d_*^{\circ}(x) \in D_*^{\circ}(x)$, $x \in X$, для $\mathrm{n}l_{\circ}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ является таковым и для каждой функции $\widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ (6.6.29).

Подведем итоги.

Лемма 6.6.1. *Пусть возможность* $\widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(k,d)$ *ошибки, обусловленной использованием* $d \in D = K$ *вместо* $k \in K$, *равна нулю при* $k = d$, *как это определено, например, в* (6.6.29). *Тогда для любого четкого правила оценивания* $d_*^{\circ}(\cdot)\colon X \to D$, *удовлетворяющего условию* $d_*^{\circ}(x) \in D_*^{\circ}(x) = \{d \in D,\ g^{\xi,\varkappa}(x,d) = g^{\xi}(x)\}$, $x \in X$, *необходимость ошибки оценивания* (6.6.27) $\mathrm{NE}^{\Lambda}(d_*^{\circ}(\cdot)) = 0$ *при любой функции* $\mathrm{n}l^{\Lambda}(\cdot,\cdot) = \widetilde{\mathrm{n}l}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$, *а возможность ошибки* $\mathrm{PE}^{\Lambda}(d(\cdot))$ (6.6.9) *при* $d(\cdot) = d_*^{\circ}(\cdot)$ *минимальна, если* $\mathrm{n}l^{\Lambda}(\cdot,\cdot) = \mathrm{n}l_{\circ}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ (6.6.14). *Наконец, правилу оценивания* $d_*^{*}(\cdot)\colon \mathcal{X} \to D$, $\mathrm{P}^{\Lambda}(d_*^{*}(x),x) = \min\limits_{d\in\widetilde{D}_*(x)} \mathrm{P}^{\Lambda}(d,x)$, $x \in X$, *сопутствует ошибка, возможность которой минимальна на множестве правил, необходимость ошибки которых равна нулю.*

Доказательство следует из (6.6.30) – (6.6.33) и замечания 6.6.2. ■

6.6.6. Правило оценивания, минимизирующее необходимость потерь, дополнительную к возможности. *Дополнительную* к возможности $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$ (6.6.1) потерь оценивания необходимость потерь при оценивании согласно нечеткому правилу $\pi^{\delta|\xi}$ определим равенством

$$\overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \inf_{\substack{x\in X\\ d\in D}} \max\Big\{\overline{\mathrm{N}}^{\Lambda}(d,x),\ \theta \circ \pi^{\delta|\xi}(d|x)\Big\},$$

где

$$\overline{\mathrm{N}}^{\Lambda}(d,x) = \inf_{k\in K} \max\Big\{\theta \circ \mathrm{p}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}(k,d),\ \theta \circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\Big\},\ d \in D,\ x \in X,$$

и $\mathrm{p}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\cdot,\cdot)\colon K \times D \to [0,\,1]$ — индикаторная функция нечеткого множества $(K \times D) \setminus \Lambda$, дополнительного к Λ, см. (1.10.16), (1.10.17) гл. 1, и рассмотрим задачу на минимум

$$\overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi_*^{\delta|\xi}) = \min_{\pi^{\delta|\xi}} \overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}). \qquad (6.6.34)$$

При таком определении $\overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$ для любого нечеткого правила $\pi^{\delta|\xi}$ оценивания $\varkappa\ \max\Big\{\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}), \theta^{-1}\big(\overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})\big)\Big\} = 1$, откуда следует, что для любого $\pi^{\delta|\xi}$ выполнены импликации: $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = 0$; $\overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) > 0 \Rightarrow \mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = 1$, ср. с (6.4.69).

Считая, что Λ — P^{η}-полное нечеткое множество, найдем (см. лемму 6.4.4), что

$$\mathrm{p}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}(k,d) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d) < 1, \\ 0, \text{ если } \mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d) = 1, \end{cases} \quad (k,d) \in K \times D.$$

В таком случае, см. лемму 6.4.5,

► если разрешима задача (6.6.3), $\pi^{*\,\delta|\xi}$ — ее решение, причем $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\,\delta|\xi}) < 1$, то разрешима и задача (6.6.34), $\pi^{*\,\delta|\xi}$ — ее решение, причем $\overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi^{*\,\delta|\xi}) = 0$;

► если разрешима задача (6.6.34), $\pi_*^{\delta|\xi}$ — ее решение, причем $\overline{\mathrm{NL}}^{\Lambda}(\pi_*^{\delta|\xi}) > 0$, то разрешима и задача (6.6.3), $\pi_*^{\delta|\xi}$ — ее решение, причем $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi_*^{\delta|\xi}) = 1$.

6.6.7. Критерий качества оценивания, основанный на минимизации возможности больших ошибок и максимизации возможности малых ошибок. Пусть $K = \mathcal{R}^n$, $D \subset \mathcal{R}^n$ (например, D — дискретное подмножество $\mathcal{R}^n$), $||\cdot||$ — норма в $\mathcal{R}^n$ и $\rho = ||\varkappa - d||$ — нечеткая ошибка оценивания нечеткого элемента $\varkappa$ значением $d \in D$. Ее совместное с ξ распределение $g_d^{\rho,\xi}(r,x) = \sup\Big\{g^{\xi,\varkappa}(x,k)\Big|k \in \mathcal{R}^n,$ $||k-d|| = r\Big\}$, $r \in [0,\infty)$. При этом

$$g_d^{*\rho,\xi}(r,x) = \sup\Big\{g^{\xi,\kappa}(x,k)\,\Big|\,k \in \mathcal{R}^n,\ ||k-d|| \geqslant r\Big\} \qquad (6.6.35)$$

— возможность того, что $\xi = x \in X$ и ошибка ρ не меньше $r \in [0,\infty)$,

$$g_{*\,d}^{\rho,\xi}(r,x) = \sup\Big\{g^{\xi,\kappa}(x,k)\,\Big|\,k \in \mathcal{R}^n,\ ||k-d|| < r\Big\} \qquad (6.6.36)$$

— возможность того, что $\xi = x$ и ошибка ρ меньше $r \in [0,\infty)$.

Согласно определениям (6.6.35) и (6.6.36) при любых $x \in X$ и $d \in D$ функция $g_d^{*\rho,\xi}(\cdot,x)\colon [0,\infty) \to [0,\,1]$ монотонно не возрастает, функция $g_{*\,d}^{\rho,\xi}(\cdot,x)\colon [0,\infty) \to [0,\,1]$ монотонно не убывает и при любых $x \in X$, $d \in D$ и $r \in [0,\infty)$, очевидно,

$$\max\Big\{g_d^{*\rho,\xi}(r,x), g_{*\,d}^{\rho,\xi}(r,x)\Big\} = \sup_{k\in\mathcal{R}^n} g^{\xi,\varkappa}(x,k) = g^{\xi}(x). \qquad (6.6.37)$$

Задачу оптимального оценивания $\varkappa$ поставим как двукритериальную задачу минимизации возможности больших значений ошибки и максимизации возможности малых значений ошибки оценивания, а именно для каждых $x \in X$ и $r \in [0,\infty)$

$$g_d^{*\rho,\xi}(r,x) \sim \min_{d\in D},\quad g_{*\,d}^{\rho,\xi}(r,x) \sim \max_{d\in D}. \qquad (6.6.38)$$

Ее решение, определяющее четкое правило оценивания, $d = d(x)$, $x \in X$, очевидно, является решением задачи

$$\sup_{x\in X} g^{*\rho,\xi}_{d(x)}(r,x) \sim \min_{d(\cdot):\, X\to D}, \quad \sup_{x\in X} g^{\rho,\xi}_{*\,d(x)}(r,x) \sim \max_{d(\cdot):\, X\to D}.$$

Лемма 6.6.2. *Пусть в* (6.6.38) *задачи на минимум и на максимум разрешимы при любых* $x \in X$ *и* $r \in [0,\infty)$;
$m^*(r,x) = \min_{d\in D} g^{*\rho,\xi}_d(r,x) = g^{*\rho,\xi}_{d^*(r,x)}(r,x)$, *где* $d^*(r,x) \in D^*(r,x) \triangleq \{d \in \in D,\ g^{*\rho,\xi}_d(r,x) = m^*(r,x)\}$, $r \in [0,\infty)$, $x \in X$;
$m_*(r,x) = \max_{d\in D} g^{\rho,\xi}_{*\,d}(r,x) = g^{\rho,\xi}_{*\,d_*(r,x)}(r,x)$, *где* $d_*(r,x) \in D_*(r,x) \triangleq \{d \in \in D,\ g^{\rho,\xi}_{*\,d}(r,x) = m_*(r,x)\}$, $r \in [0,\infty)$, $x \in X$. *Тогда для каждого* $x \in X$:

1. *функция* $m^*(\cdot,x)\colon [0,\infty) \to [0,\,1]$ *монотонно не возрастает, причем* $m^*(0,x) = g^\xi(x)$; *функция* $m_*(\cdot,x)\colon [0,\infty) \to [0,\,1]$ *монотонно не убывает*;

2. *для любого* $r \in [0,\infty)$

$$\max\{m^*(r,x), m_*(r,x)\} = g^\xi(x); \tag{6.6.39}$$

3.
$$\begin{aligned}\overline{r}(x) &= \inf\{r \in [0,\infty),\ m^*(r,x) < g^\xi(x)\} = \\ &= \sup\{r \in [0,\infty),\ m^*(r,x) = g^\xi(x)\} \geqslant \\ &\geqslant \sup\{r \in [0,\infty),\ m_*(r,x) < g^\xi(x)\} = \\ &= \inf\{r \in [0,\infty),\ m_*(r,x) = g^\xi(x)\} = \underline{r}(x).\end{aligned} \tag{6.6.40}$$

Доказательство. 1. Для любых $x \in X$ и $r_1 \in [0,\infty)$, $r_2 \in [0,\infty)$, $r_1 \leqslant r_2$, $d_i^* \in D^*(r_i,x)$, $d_{*\,i} \in D_*(r_i,x)$, $i = 1,2$, $m^*(r_1,x) = \sup_{a\geqslant r_1} g^{\rho,\xi}_{d_1^*} \geqslant \geqslant \sup_{a\geqslant r_2} g^{\rho,\xi}_{d_1^*} \geqslant \sup_{a\geqslant r_2} g^{\rho,\xi}_{d_2^*} = m^*(r_2,x)$; $m_*(r_1,x) = \sup_{a<r_1} g^{\rho,\xi}_{d_{*\,1}} \leqslant \sup_{a<r_2} g^{\rho,\xi}_{d_{*\,1}} \leqslant \leqslant \sup_{a<r_2} g^{\rho,\xi}_{d_{*\,2}} = m_*(r_2,x)$; при этом $m^*(0,x) = \min_{d\in D}\sup_{a\geqslant 0} g^{\rho,\xi}_d(a,x) = g^\xi(x)$, $x \in X$.

2. Так как для любых $d \in D$, $r \in [0,\infty)$ и $x \in X$ $\max\{g^{*\,\rho,\xi}_d(r,x), g^{\rho,\xi}_{*\,d}(r,x)\} = g^\xi(x)$, то, выбрав произвольно $d = d^* \in D^*(r,x)$ и $d = d_* \in D_*(r,x)$, найдем $g^\xi(x) = \max\{g^{*\,\rho,\xi}_{d^*}(r,x), g^{\rho,\xi}_{*\,d^*}(r,x)\} = = \max\{m^*(r,x),\ g^{\rho,\xi}_{*\,d^*}(r,x)\} \leqslant \max\{m^*(r,x),\ g^{\rho,\xi}_{*\,d_*}(r,x)\} = = \max\{m^*(r,x),\ m_*(r,x)\} \leqslant \leqslant g^\xi(x)$. Отсюда следует равенство в 2.

3. Равенства в (6.6.40) следуют из монотонностей 1, а если бы для некоторого $x \in X$ $\overline{r}(x) < \underline{r}(x)$, то для $r \in (\overline{r}(x), \underline{r}(x))$ выполнялось бы неравенство $\max\{m^*(r,x), m_*(r,x)\} < g^\xi(x)$, ибо для $r > \overline{r}$ $m^*(r,x) < < g^\xi(x)$ и для $r < \underline{r}$ $m_*(r,x) < g^\xi(x)$. ■

Предположим, что в (6.6.38) при любых $r \in [0,\infty)$ и $x \in X$ разрешима задача на минимум. Для любого $r > \overline{r}(x)$ и любого $d^* \in D^*(r,x)$ $m^*(r,x) = g^{*\,\rho,\xi}_{d^*}(r,x) < g^\xi(x)$. Поэтому согласно (6.6.37)

$g^{\rho,\xi}_{*\,d^*}(r,x) = g^{\xi}(x)$, следовательно, для $r > \overline{r}(x)$ в (6.6.38) разрешима и задача на максимум, $m_*(r,x) = g^{\xi}(x)$, и всякое решение $d^*(r,x)$ задачи на минимум является решением и задачи на максимум, т. е. для $r > \overline{r}(x)$ $D^*(r,x) \subset D_*(r,x)$.

Если $\overline{r}(x) > 0$, то для $r < \overline{r}(x)$ $m^*(r,x) = g^{\xi}(x)$ задача (6.6.38) сводится к задаче на максимум и всякое ее решение $d_*(r,x)$ является решением и задачи на минимум, ибо $g^{\xi}(x) = m^*(r,x) \leqslant g^{*\,\rho,\xi}_{d_*(r,x)}(r,x)$. Поэтому для $r < \overline{r}(x) > 0$ $D_*(r,x) \subset D^*(r,x)$.

Если $\overline{r}(x) = 0$, то $D^*(r,x) \subset D_*(r,x)$ для всякого $r > 0$, а для $r = 0$ $m^*(0,x) = g^{\xi}(x)$, причем в задаче (6.6.38) $m_*(0,x) = \max\limits_{d\in D} \sup\limits_{a<0} g^{\rho,\xi}_{d}(0,x) = 0$.

Предположим теперь, что в (6.6.38) при всех $r \in [0,\infty)$ и $x \in X$ разрешима задача на максимум. Если $\underline{r}(x) > 0$, то для $r < \underline{r}(x)$ $m_*(r,x) < g^{\xi}(x)$, любое решение $d_* = d_*(r,x) \in D_*(r,x)$ задачи на максимум в силу равенств (6.6.37) дает $g^{*\,\rho,\xi}_{d_*}(r,x) = g^{\xi}(x)$, причем d_* — решение и задачи на минимум. Действительно, если бы для некоторого $r < \underline{r}(x)$ $m^*(r,x) < g^{\xi}(x)$, то в силу (6.6.39) было бы $m_*(r,x) = g^{\xi}(x)$.

Итак, при $r < \underline{r}(x)$ задача на минимум в (6.6.38) разрешима и $D_*(r,x) \subset D^*(r,x)$. Для $r > \underline{r}(x) \geqslant 0$ $m_*(r,x) = g^{\xi}(x)$ и задача (6.6.38) сводится к задаче на минимум, см. рис. 6.6.5.

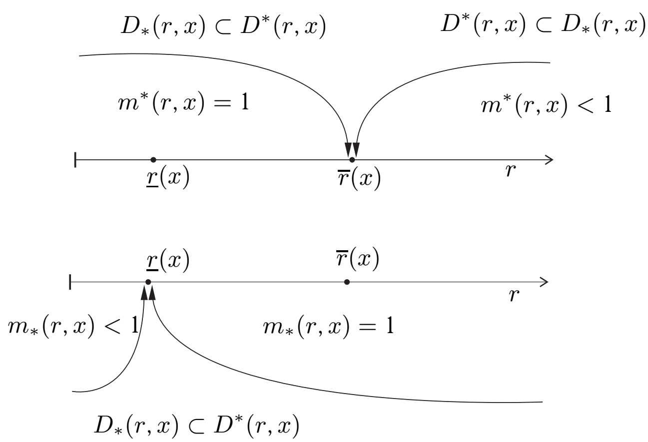


Рис. 6.6.5. Свойства функции m^*, m_* и областей D^* и D_*

Сказанное позволяет охарактеризовать решение задачи (6.6.38).

Теорема 6.6.4. *Пусть выполнены условия леммы* 6.6.2. *Тогда*

- ► *для всех* $x \in X$ *и* $r \in [0,\overline{r}(x))$ $m^*(r,x) = g^{\xi}(x)$ *и* $D_*(r,x) \subset D^*(r,x)$;
- ► *для всех* $x \in X$ *и* $r > \overline{r}(x)$ *функция* $m^*(\cdot,x)\colon [0,\infty) \to [0,\,1]$ *монотонно не возрастает и* $D^*(r,x) \subset D_*(r,x)$.

► *Решения* $d^*(r,x)$ *и* $d_*(r,x)$, $r \in [0,\infty)$, $x \in X$, *инвариантны относительно выбора шкалы значений возможности*: *для любой функции* $d(\cdot,\cdot)\colon [0,\infty)\times X \to D$ *в любой шкале*

$$m^*(r,x) \leqslant g^{*\,\rho,\xi}_{d(r,x)}(r,x),\ m^*(r,x) \geqslant g^{\rho,\xi}_{*\,d(r,x)}(r,x),\ r \in [0,\infty),\ x \in X. \ \blacksquare$$

Заметим, что если $K = D = \mathcal{R}^n$, то $m_*(r,x) = \max\limits_{d\in D}\sup\left\{g^{\xi,\varkappa}(x,k)\,\middle|\,k \in K,\ ||k-d|| < r\right\} = \sup\limits_{k\in K} g^{\xi,\varkappa}(x,k) = g^{\xi}(x)$. В этом случае задача (6.6.38) сводится к задаче на минимум.

Замечание 6.6.5. В связи с задачей (6.6.38) рассмотрим задачи (6.6.11) и (6.6.28), считая, что $K = \mathcal{R}^n, D \subset K$. Определим семейство функций $\mathrm{p}l_r^{\Lambda}(\cdot,\cdot)\colon K\times D \to [0,\,1]$, $r \geqslant 0$, равенствами

$$\mathrm{p}l_r^{\Lambda}(k,d) = \begin{cases} 1, \text{ если } ||k-d|| \geqslant r, \\ 0, \text{ если } ||k-d|| < r, \end{cases} \quad r \in [0,\infty),$$

и выберем в задачах (6.6.11) и (6.6.28) в качестве $\mathrm{p}l^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ одну из функций этого семейства. В таком случае в (6.6.11) $\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x) = \sup\limits_{k\in K}\min\left\{\mathrm{p}l_r^{\Lambda}(k,d), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\right\} = \sup\left\{g^{\xi,\varkappa}(x,k)\,\middle|\,k\in\mathcal{R}^n,\ ||k-d||\geqslant r\right\} = g_d^{*\,\rho,\xi}(r,x)$, $r \in [0,\infty)$, $d \in D$, $x \in X$, и, следовательно, задача (6.6.11) эквивалентна задаче на минимум в (6.6.38) при каждом $r \in [0,\infty)$, т.е. задаче минимизации возможности больших значений ошибки.

В задаче (6.6.28) $\mathrm{N}^{\Lambda}(d,x) = \inf\limits_{k\in R_n}\max\left\{\mathrm{p}l_r^{\Lambda}(k,d), \theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\right\} = \inf\left\{\theta\circ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\,\middle|\,k\in\mathcal{R}^n,\ \mathrm{p}l_r^{\Lambda}(k,d) = 0\right\} = \theta\circ\Big(\sup\left\{g^{\xi,\varkappa}(x,k)\,\middle|\,k\in\mathcal{R}^n,\ ||k-d|| < r\right\}\Big) \sim \min\limits_{d\in D}$, что эквивалентно задаче $\sup\left\{g^{\xi,\varkappa}(x,k)\,\middle|\,k\in\mathcal{R}^n,\ ||k-d|| < r\right\} \sim \max\limits_{d\in D}$, т.е. задаче на максимум в (6.6.38).

Теоремы 6.6.1* и 6.6.3* характеризуют в рассмотренном случае решение задач на максимум и соответственно — на минимум в (6.6.38).

6.6.8. О минимаксном оценивании. Рассмотрим модель наблюдения, в которой задано не совместное распределение $g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)\colon X\times K \to [0,1]$, а лишь распределение $g^{\xi|\varkappa}(\cdot|k)\colon X \to [0,1]$ переходной возможности для каждого значения $k \in K$. В такой модели минимаксным правилом оценивания является решение $\pi^{+\delta|\xi}$ задачи на минимум

$$\sup_{k\in K}\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{+\delta|\xi}|k) = \min_{\pi^{\delta|\xi}}\sup_{k\in K}\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k), \tag{6.6.41}$$

максимальной (по $k \in K$) из маргинальных возможностей потерь $\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k) = \sup\limits_{\substack{x\in X,\\ d\in D}}\min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d), \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi|\varkappa}(x|k)\}$, $k\in K$, ср. с §6.4.5.

Формально выражение $\sup\limits_{k\in K} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}|k)$ в (6.6.41) совпадает с $\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi})$ в (6.6.1), если в (6.6.2) $g^{\xi,\varkappa}(x,k) = \min\{g^{\xi|\varkappa}(x|k),\, g^{\varkappa}(k)\}$, $x \in X$, $k \in K$, где $g^{\varkappa}(k) = 1$, $k \in K$. Иначе говоря, *минимаксное правило* $\pi^{+\delta|\xi}$ *можно рассматривать как частный случай оптимального нечеткого правила* $\pi^{*\delta|\xi}$ *в* (6.6.3) *при априори равновозможных значениях* $\varkappa$.

6.6.9. Байесовский принцип. Если наблюдение за системой не проводится, то возможность потерь, сопутствующих нечеткому правилу оценивания $\pi^{\delta}(\cdot)$, основанному на априорном распределении $g^{\varkappa}(\cdot)$ оцениваемого нечеткого элемента $\varkappa$, определится выражением [1])

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta}) = \sup_{d\in D,\, k\in K} \min\left\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d), \pi^{\delta}(d), g^{\varkappa}(k)\right\} \triangleq \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta}(\cdot); g^{\varkappa}(\cdot)). \tag{6.6.42}$$

Соответственно вместо выражения (6.6.2) введем

$$\mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa}(\cdot)) = \sup_{k\in K} \min\left\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d), g^{\varkappa}(k)\right\} \tag{6.6.43}$$

— возможность потерь при $\delta = d \in D$ и вместо задачи на минимум (6.6.3) получим задачу

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(\pi^{\delta}(\cdot); g^{\varkappa}(\cdot)) = \sup_{d\in D} \min\left\{\pi^{\delta}(d), \mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa}(\cdot))\right\} \sim \min_{\pi^{\delta}(\cdot)}. \tag{6.6.44}$$

Пусть $\mathrm{P}^{\Lambda}(g^{\varkappa}(\cdot)) = \min\limits_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa}(\cdot))$ и $D(g^{\varkappa}(\cdot)) = \big\{d \in D,\ \mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa}(\cdot)) = \mathrm{P}^{\Lambda}(g^{\varkappa}(\cdot))\big\}$. Тогда любое правило $\pi^{*\delta}(\cdot)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} \pi^{*\,\delta}(d) \geqslant 0,\ d \in D(g^{\varkappa}(\cdot)),\ \ \pi^{*\delta}(d) = 0,\ d \in D \setminus D(g^{\varkappa}(\cdot)), \\ \sup_{d\in D} \pi^{*\,\delta}(d) = 1, \end{gathered} \tag{6.6.45}$$

минимизирует возможность потерь (6.6.44), причем

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\delta}(\cdot);\ g^{\varkappa}(\cdot)) = \mathrm{P}^{\Lambda}(g^{\varkappa}(\cdot)) = \min_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa}(\cdot)), \tag{6.6.46}$$

и нечеткое правило $\pi^{*\delta}(\cdot)$ с точностью до произвола, допускаемого условиями (6.6.45), зависит только от $g^{\varkappa}(\cdot)$,

$$\pi^{*\,\delta}(d) = \pi\big(d;\ g^{\varkappa}(\cdot)\big),\ d \in D. \tag{6.6.47}$$

Любое значение $\widehat{d} \in D(g^{\varkappa}(\cdot))$ определяет «четкую» оценку $\varkappa$ и может быть найдено непосредственно как решение задачи на минимум

$$\mathrm{P}^{\Lambda}_{\widehat{d}}(g^{\varkappa}(\cdot)) = \min_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa}(\cdot)) \tag{6.6.48}$$

для возможности потерь (6.6.43), сопутствующих использованию $\widehat{d} = \widehat{d}(g^{\varkappa}(\cdot))$ вместо $\varkappa$.

---

[1]) Функция $\mathrm{p}l^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ в (6.6.42) далее считается неизменной.

В общем случае, когда возможно наблюдение за системой, перепишем выражение (6.6.1) для возможности потерь, воспользовавшись любым вариантом $g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)$ условной возможности, в следующем виде:

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \sup_{\substack{x\in X,\, d\in D,\\ k\in K}} \min\left\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d),\, \pi^{\delta|\xi}(d|x),\, g^{\varkappa|\xi}(k|x),\, g^{\xi}(x)\right\} =$$
$$= \sup_{\substack{x\in X,\, d\in D,\\ k\in K}} \min\left\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d),\, \pi^{\delta,\xi}(d,x),\, g^{\varkappa|\xi}(k|x)\right\} \triangleq \mathrm{P\,L}^{\Lambda}\big(\pi^{\delta,\xi}(\cdot,\cdot);\, g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)\big)$$

и определим нечеткое правило оценивания как совместное распределение $\pi^{\delta,\xi}(\cdot,\cdot)$. Оптимальным правилом будем считать любое решение $\pi^{*\,\delta,\xi}(\cdot,\cdot)$ задачи на минимум

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}\big(\pi^{\delta,\xi}(\cdot,\cdot);\, g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)\big) = \sup_{\substack{x\in X,\\ d\in D}} \min\left\{\mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)), \pi^{\delta,\xi}(d,x)\right\} \sim \min_{\pi^{\delta,\xi}(\cdot,\cdot)}, \tag{6.6.49}$$

где

$$\mathrm{P}^{\Lambda}_{d}\big(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big) \triangleq \sup_{k\in K} \min\left\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d),\, g^{\varkappa|\xi}(k|x)\right\},\ d\in D,\ x\in X. \tag{6.6.50}$$

Для решения задачи (6.6.49) достаточно для каждого $x\in X$ решить более простую задачу

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}\big(\pi^{\delta,\xi}(\cdot,x);\, g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big) = \sup_{d\in D} \min\left\{P^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)), \pi^{\delta,\xi}(d,x)\right\} \sim \min_{\pi^{\delta,\xi}(\cdot,x)}. \tag{6.6.51}$$

В свою очередь, для решения задачи (6.6.51) определим

$$\mathrm{P}^{\Lambda}\big(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big) = \min_{d\in D} \mathrm{P}^{\Lambda}_{d}\big(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big),\ x\in X, \tag{6.6.52}$$

и

$$D\big(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big) = \Big\{d\in D,\ \mathrm{P}^{\Lambda}_{d}(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)) = \mathrm{P}^{\Lambda}\big(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big)\Big\}. \tag{6.6.53}$$

Тогда любое распределение $\pi^{*\,\delta,\xi}(\cdot,\cdot)\colon D\times X\to[0,\,1]$, удовлетворяющее условиям

$$\pi^{*\,\delta,\xi}(d,x)\geqslant 0,\ d\in D(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)),\ \pi^{*\,\delta,\xi}(d,x)=0,\ d\in D\setminus D(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)),$$
$$\sup_{d\in D}\pi^{*\,\delta,\xi}(d,x) = g^{\xi}(x),\ x\in X, \tag{6.6.54}$$

минимизирует возможность $\mathrm{PL}^{\Lambda}\big(\pi^{\delta,\xi}(\cdot,x);\, g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big)$ (6.6.51), причем

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}\big(\pi^{*\,\delta,\xi}(\cdot,x); g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big) = \min\left\{\mathrm{P}^{\Lambda}(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)), g^{\xi}(x)\right\},\ x\in X, \tag{6.6.55}$$

и соответственно

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}\big(\pi^{*\,\delta,\xi}(\cdot,\cdot);\, g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)\big) = \sup_{x\in X} \mathrm{PL}^{\Lambda}\big(\pi^{*\,\delta,\xi}(\cdot,x);\, g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big). \tag{6.6.56}$$

Решение $\pi^{*\,\delta,\xi}(\cdot,\cdot)$ с точностью до произвола, допускаемого условиями (6.6.54), является функцией варианта $g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)$ условного распределения, т. е.

$$\pi^{*\ \delta,\xi}(d,x) = \pi\big(d;\ g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big),\ d\in D,\ x\in X, \tag{6.6.57}$$

но значения возможности потерь (6.6.55) и (6.6.56) определяются только [1]) условным распределением $\varkappa$ при условии ξ, причем $\mathrm{PL}^{\Lambda}\big(\pi^{*\ \delta,\xi}(\cdot,\cdot);\ g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)\big) = \mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{*\ \delta|\xi})$, см. (6.6.56) и (6.6.7).

Заметим, наконец, что согласно (6.6.56), (6.6.55), (6.6.50), (6.6.43) и (6.6.46)

$$\begin{aligned}\mathrm{P\,L}^{\Lambda}\big(\pi^{*\ \delta,\xi}(\cdot,\cdot);\ g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)\big) = \sup_{x\in X}\min\Big\{\min_{d\in D}\big(\mathrm{P}_d^{\Lambda}(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)), g^{\xi}(x)\big)\Big\} \leqslant \\ \leqslant \min_{d\in D}\sup_{x\in X}\min\big\{P_d^{\Lambda}(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)), g^{\xi}(x)\big\} = \mathrm{P\,L}^{\Lambda}\big(\pi^{*\delta}(\cdot);\ g^{\xi}(\cdot)\big),\end{aligned}$$

то есть учет любого наблюдения не увеличивает возможность потерь.

Подводя итог полученным результатам, сформулируем

Байесовский принцип. *Пусть* $\pi^{*\ \delta}(d) = \pi\big(d;\ g^{\varkappa}(\cdot)\big)$, $d\in D$, *— решение* (6.6.47) *задачи* (6.6.44). *Тогда эта же функция* $\pi\big(d;\ g^{\varkappa}(\cdot)\big)$, $d\in D$, *определит и решение* $\pi^{*\ \delta,\xi}(d,x) = \pi\big(d;\ g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big)$, $d\in D$, $x\in X$, (6.6.57) *задачи* (6.6.51), *если в* (6.6.47) $g^{\varkappa}(\cdot)$ *заменить на* $g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)$. *Заменив в правой части* (6.6.46) $g^{\varkappa}(\cdot)$ *на* $g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)$, *получим возможность ошибки* (6.6.55) *при наблюдении* $\xi = x$, *и согласно* (6.6.56)

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}\Big(\pi^{*\ \varepsilon,\xi}(\cdot,\cdot);\ g^{\varkappa|\xi}(\cdot|\cdot)\Big) = \sup_{x\in X}\mathrm{PL}^{\Lambda}\Big(\pi^{*\ \varepsilon,\xi}(\cdot,x);\ g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\Big).$$

Байесовский принцип для «четкого» правила оценивания формулируется так: *если* $\widehat{d}\in D(g^{\varkappa}(\cdot))$ *— «четкая» оценка* $\varkappa$, *полученная как результат решения задачи* (6.6.48), *то* (*согласно теореме* 6.6.1*) $\widehat{d}\in D(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x))$ *— решение задачи* (6.6.11), $x\in X$.

6.7. Связь между нечетким оцениванием и нечеткой идентификацией

6.7.1. Задача нечеткой идентификации как частный случай задачи нечеткого оценивания. Пусть $g^{\xi,\eta}(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y$, — распределение пары нечетких элементов ξ и η, причем значения ξ наблюдаемы, а значения η — нет, и требуется по наблюдению значения $\xi = x\in X$ оценить значение η элементом $d = d(x)\in D$. Речь идет о задаче определения четкого правила $d^*(\cdot)\colon X\to D$ оценивания значе-

[1]) Не зависят от выбора варианта условного распределения, поскольку $\min\big\{\mathrm{P}^{\Lambda}\big(g^{\varkappa|\xi}(\cdot|x)\big), g^{\xi}(x)\big\} = \min_{d\in D}\sup_{k\in K}\min\big\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(k,d),\ g^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\}$, $x\in X$.

ния $\eta \in Y$ значением $d^*(x)$, где $\xi = x \in X$. Оптимальное правило $d^*(\cdot)$ определим как решение задачи на минимум для возможности потерь

$$\mathrm{PL}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \sup_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(y, d(x)), g^{\xi,\eta}(x,y)\} \sim \min_{d(\cdot)}, \tag{6.7.1}$$

где функция $\mathrm{p}l^{\Lambda}(\cdot,\cdot)$ имеет смысл тот же, что и в (6.6.9).

Согласно теореме 6.6.1* любое семейство $d^*(x)$, $x \in X$, решений задачи на минимум

$$\mathrm{P}^{\Lambda}(d,x) = \sup_{y\in Y} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}(y,d), g^{\xi,\eta}(x,y)\} \sim \min_{d},\ x \in X, \tag{6.7.2}$$

определяет правило $d^*(\cdot)$, минимизирующее возможность потерь (6.7.1).

Пусть в задачах (6.7.1), (6.7.2) заданы разбиения $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{q} Y_i$, $D = \bigcup\limits_{j=1}^{q} D_j$ так, что в пределах каждого множества Y_i значения $y \in Y_i$ можно считать неразличимыми в том смысле, что возможность $\mathrm{p}l^{\Lambda}(y,d)$ потерь, связанных с использованием любого значения $d \in D_j$ вместо любого значения $y \in Y_i$ зависит лишь от i и j, а не от значений $d \in D_j$ и $y \in Y_i$, $i,j = 1,\ldots,q$.

Это означает, что на самом деле в задачах (6.7.1), (6.7.2), как в задачах оценивания, $\mathrm{p}l^{\Lambda}(y,d) = \mathrm{p}l^{\Lambda}_{ij}$, если $y \in Y_i$, $d \in D_j$, $i,j = 1,\ldots,q$, т. е.

$$\mathrm{p}l^{\Lambda}(y,d) = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{ij}, \chi_i(y), \overline{\chi}_j(d)\},\ y \in Y,\ d \in D, \tag{6.7.3}$$

где $\chi_i(\cdot)$ и $\overline{\chi}_j(\cdot)$ — индикаторные функции Y_i и D_j, $i,j = 1,\ldots,q$.

Покажем, что в таком случае задача оценивания (6.7.1) сводится к задаче идентификации. Действительно, с учетом (6.7.3) в задаче (6.7.1)

$$\begin{gathered}\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \sup_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{ij}, \chi_i(y), \overline{\chi}_j(d(x)), g^{\xi,\eta}(x,y)\} = \\ = \max_{1\leqslant j\leqslant q} \sup_{x\in X_j} \mathrm{P}^{\Lambda}_j(x) = \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X.),\end{gathered} \tag{6.7.4}$$

где

$$\mathrm{P}^{\Lambda}_j(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant q} \min\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{ij}, \sup_{y\in Y_i} g^{\xi,\eta}(x,y)\},\ x \in X,\ j = 1,\ldots,q, \tag{6.7.5}$$

и

$$X_j = X_j^{d(\cdot)} = \{x \in X,\ d(x) \in D_j\},\ j = 1,\ldots,q, \tag{6.7.6}$$

причем согласно лемме 6.3.1 $X_\cdot = X_\cdot^{d(\cdot)}$ — *разбиение* X, индуцированное разбиением $D = \bigcup\limits_{j=1}^{q} D_j$ и правилом $d(\cdot)\colon X \to D$. Поэтому задача (6.7.1) свелась к задаче определения разбиения $X_\cdot^*$ как решения задачи

$$\mathrm{P\,L}^{\Lambda}(X_\cdot) = \max_{1 \leqslant j \leqslant q} \sup_{x \in X_j} \mathrm{P}_j^{\Lambda}(x) \sim \min_{X_\cdot}. \tag{6.7.7}$$

Ее решение дано в теореме 6.6.1*, согласно которой $X_\cdot^*$ — любое разбиение X, удовлетворяющее условию

$$X_j^* \subset \widehat{X}_j = \{x \in X,\ \mathrm{P}_j^{\Lambda}(x) = \mathrm{P}^{\Lambda}(x) = \min_{1 \leqslant i \leqslant q} \mathrm{P}_i^{\Lambda}(x)\},\ j = 1, \ldots, q. \tag{6.7.8}$$

При этом $X_j^* = X_j^{d^*(\cdot)}$, $j = 1, \ldots, q$, где $d^*(\cdot)\colon X \to D$ — любое правило, удовлетворяющее условию

$$X_j^* = \{x \in X,\ d^*(x) \in D_j\},\ j = 1, \ldots, q,$$

и согласно равенствам (6.7.5), (6.7.8)

$$\min_{d(\cdot)} \mathrm{P\,L}^{\Lambda}(d(\cdot)) = \mathrm{PL}^{\Lambda}(d^*(\cdot)) = \min_{X_\cdot} \mathrm{PL}^{\Lambda}(X_\cdot) = \mathrm{PL}^{\Lambda}(X_\cdot^*) = \sup_{x \in X} \mathrm{P}^{\Lambda}(x). \tag{6.7.9}$$

Рассмотрим теперь задачу (6.7.2) как задачу отыскания правила оценивания с учетом представления (6.7.3):

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{\Lambda}(d, x) &= \sup_{y \in Y} \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \min\{\mathrm{pl}_{ij}^{\Lambda}, \chi_i(y), \overline{\chi}_j(d), g^{\xi,\eta}(x, y)\} = \\ &= \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \min\{\mathrm{pl}_{ij}^{\Lambda}, \sup_{y \in Y_i} g^{\xi,\eta}(x, y), \overline{\chi}_j(d)\} \sim \min_{d \in D}. \end{aligned} \tag{6.7.10}$$

Если учесть, что в (6.7.10) $\mathrm{P}^{\Lambda}(d, x)$ зависит от $d \in D$ только посредством $\overline{\chi}_j(d)$, $j = 1, \ldots, q$, т. е. — фактически от множеств D_j, $j = 1, \ldots, q$, то задача (6.7.10) может рассматриваться как следующая задача на минимум:

$$\mathrm{P}_j^{\Lambda}(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant q} \min\{\mathrm{pl}_{ij}^{\Lambda}, \sup_{y \in Y_i} g^{\xi,\eta}(x, y)\} \sim \min_{j \in \{1, \ldots, q\}}. \tag{6.7.11}$$

Пусть

$$J(x) = \{j \in \{1, \ldots, q\},\ \mathrm{P}_j^{\Lambda}(x) = \mathrm{P}^{\Lambda}(x)\},\ x \in X, \tag{6.7.12}$$

— множество тех индексов $j \in \{1, \ldots, q\}$, на которых достигается минимум в (6.7.12) (ср. с (6.7.8)). Тогда минимум по $d \in D$ в (6.7.10) достигается на любом значении

$$d^* = d^*(x) \in \bigcup_{j \in J(x)} D_j,\ x \in X, \tag{6.7.13}$$

и, следовательно, любая функция $d^*(x)$, $x \in X$, удовлетворяющая условию (6.7.13), определяет правило оценивания, минимизирующее возможность потерь (6.7.1).

Соответственно любое конкретное правило $d^*(\cdot)$, удовлетворяющее условию (6.7.13), определяет разбиение $X^*_\cdot$, являющееся решением задачи (6.7.7), а именно

$$\begin{aligned} X_j^* = \{x \in X,\ d^*(x) \in D_j\} \subset \widehat{X_j} = \{x \in X,\ \mathrm{P}_j^\Lambda(x) = \mathrm{P}^\Lambda(x)\} \\ \equiv \{x \in X,\ j \in J(x)\},\ j = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{6.7.14}$$

6.8. Оценивание нечеткого множества и его параметра

Рассматриваемые в этом параграфе задачи являются базовыми при интерпретации результатов измерительного эксперимента, в котором регистрируется не точка $x \in X$, а множество $A \in \mathcal{P}(X)$ (пятно), причем регистрирующий элемент также является множеством $D \in \mathcal{P}(X)$. Такие задачи послужат примером применения упрощенного варианта модели наблюдений и их регистрации, рассмотренной в § 7.4 гл. 7, при оценивании нечеткого множества.

Специфика оценивания нечеткого множества $A^\cdot : Y \to \mathcal{P}(X)$, определенного на (недоступном для наблюдения) пространстве с возможностью $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$ и принимающего значения в $\mathcal{P}(X)$, определяется схемой регистрации данных измерений.

Определим схему регистрации измерений как систему $D_1, \ldots, D_q$ подмножеств X, каждое из которых является «датчиком» регистрируемых сигналов. Будем считать, что датчики «не шумят», и определим сигнал $d_i = 1$ датчика D_i, если хотя бы одна точка D_i покрыта нечетким множеством A^η, в противном случае $d_i = 0$, $i = 1, \ldots, q$.

В $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^\eta)$ событие, состоящее в том, что хотя бы одна точка D_i покрыта A^η, определяется множеством $Y_A^{D_i} = \{y \in Y, A^y \cap D_i \neq \varnothing\}$, и множество $Y \setminus Y_A^{D_i} = \{y \in Y, A^y \cap D_i = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\}$ определяет противоположное[1] событие. Поэтому распределение нечеткого вектора $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_q)$ сигналов датчиков, регистрирующих данные измерения A^η,

$$\begin{aligned} & g_A^\delta(d)\Big|_{\substack{d_{i_1} = \ldots = d_{i_k} = 1, \\ d_{i_{k+1}} = \ldots = d_{i_q} = 0,}} = \\ & = \mathrm{P}\big(\{y \in Y, A^y \cap D_{i_1} \neq \varnothing, \ldots, A^y \cap D_{i_k} \neq \varnothing\} \cap \{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing, \\ & \quad A^y \cap D_{i_{k+1}} = \varnothing, \ldots, A^y \cap D_{i_q} = \varnothing\}\big) = \mathrm{P}\big(Y_{D_{i_1}} \cap \ldots \cap Y_{D_{i_k}} \cap \\ & \quad (Y \setminus Y_A^{D_{i_{k+1}}}) \cap \ldots \cap (Y \setminus Y_A^{D_{i_q}})\big),\ d = (d_1, \ldots, d_q) \in \mathcal{E}_q. \end{aligned} \tag{6.8.1}$$

Здесь $\mathcal{E}_q$ — множество вершин q-мерного единичного куба, равенство (6.8.1) записано для всех перестановок $(i_1, \ldots, i_q)$ индексов $(1, \ldots, q)$ и $k = 0, 1, \ldots, q$.

[1] В $\{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing\} = A_X = \bigcup\limits_{x \in X} A_x$, где $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\}$.

Нечеткий вектор δ назовем *следом нечеткого множества A^η на датчиках $D_1, \ldots, D_q$. Следом множества $Q \subset X$ на $D_1, \ldots, D_q$* назовем вектор $d = d(Q)$, координаты которого

$$d_i(Q) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q \cap D_i \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } Q \cap D_i = \varnothing, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, q. \tag{6.8.2}$$

Будем говорить, что датчик D_i возбужден множеством Q, если $Q \cap \cap D_i \neq \varnothing$, и не возбужден в противном случае, $i = 1, \ldots, q$.

Пусть $\mathrm{P\,L}(S, Q) = \mathrm{p}l(d(S), d(Q))$ — возможность потерь при замене $S \in \mathcal{P}(X)$ на $Q \in \mathcal{P}(X)$, где $\mathrm{p}l(d, d')$ — возможность потерь при оценивании следа d значением d'. Тогда задача оптимального оценивания следа A^η, основанного на знании лишь распределения (6.8.1), формулируется как следующая задача на минимум для возможности потерь

$$\sup_{d \in \mathcal{E}_q} \min\{g_A^\delta(d), \mathrm{p}l(d, d')\} \sim \min_{d' \in \mathcal{E}_q}. \tag{6.8.3}$$

Пусть d'_* — решение задачи (6.8.3). Если считать, что в задаче оценивания A^η распределение g^η не известно, а известно лишь индуцированное им распределение $g_A^\delta(\cdot)$ (6.8.1), то при условиях (6.8.2) всякое множество $\widehat{A}$, удовлетворяющее условию $d'_* = d(\widehat{A})$ (d'_* — след $\widehat{A}$), является оптимальной оценкой A^η, для получения которой не использовано наблюдение. Если же известен результат регистрации $d = (d_1, \ldots, d_q)$, где $d_{i_1} = \ldots = d_{i_k} = 1, d_{i_{k+1}} = \ldots = d_{i_q} = 0$, то оценкой A^η, основанной на измерении d, следует считать любое множество A^{y_*}, где $y_* \in \{y \in Y, A^y \cap D_{i_1} \neq \varnothing, \ldots, A^y \cap D_{i_k} \neq \varnothing\} \cap \{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing, A^y \cap D_{i_{k+1}} = \varnothing, \ldots, A^y \cap D_{i_q} = \varnothing\}$.

6.8.1. Оценивание нечеткого множества с учетом данных регистрации. Несколько сложнее схема регистрации A^η с нечеткими (шумящими) датчиками. Рассмотрим отдельный датчик D_i и определим его нечеткую модель. Зададим переходную возможность

$$g^{\delta_i|\alpha_i}(d_i|D_i \cap A^\eta \neq \varnothing) = g^{\delta_i|\alpha_i}(d_i|a_i = 1), \quad d_i = 0, 1, \tag{6.8.4}$$

сигнала датчика D_i, равного d_i, когда D_i возбужден нечетким множеством A^η, и переходную возможность

$$g^{\delta_i|\alpha_i}(d_i|D_i \cap A^\eta = \varnothing,\ A^\eta \neq \varnothing) = s g^{\delta_i|\alpha_i}(d_i|a_i = 0), \quad d_i = 0, 1, \tag{6.8.5}$$

равенства $\delta_i = d_i$, когда датчик D_i не возбужден. Здесь $\alpha_i = \alpha_i(\eta, D_i)$ — нечеткий элемент, описывающий условия возбуждения D_i: $\alpha_i = 0$, если $\eta \in Y \setminus Y_A^{D_i}$, $\alpha_i = 1$, если $\eta \in Y_A^{D_i}$. Его распределение $g^{\alpha_i}(a_i)\Big|_{a_i=0} = \mathrm{P}(Y \setminus Y_A^{D_i})$, $g^{\alpha_i}(a_i)\Big|_{a_i=1} = \mathrm{P}(Y_A^{D_i})$. Равенства (6.8.4), (6.8.5) описывают модель нечеткого датчика D_i, который может «выдавать» единицу, не будучи возбужденным ($\delta_i = 1$, $\eta \in Y \setminus Y_A^{D_i}$), а также может не реагировать на возбуждение ($\delta_i = 0$, $\eta \in Y_A^{D_i}$). Распределение $g^{\delta_i,\alpha_i}(d_i, a_i) = \min\{g^{\delta_i|\alpha_i}(d_i|a_i), g^{\alpha_i}(a_i)\}$, $a_i = 0, 1$; $d_i = 0, 1$ связывает реакцию датчика и условие возбуждения.

Возвращаясь к системе датчиков $D_1, \ldots, D_q$, обозначим $d = (d_1, \ldots, d_q)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_q)$, $a = (a_1, \ldots, a_q)$, зададим переходное распределение $g^{\delta|\alpha}(d|a)$, $d \in E_q$, $a \in E_q$ и совместное распределение $g^{\delta,\alpha}(d,a) = \min\{g^{\delta|\alpha}(d|a), g^{\alpha}(a)\}$, $d \in E_q$, $a \in E_q$, где $g^{\alpha}(a)\Big|_{\substack{a_{i_1}=\ldots=a_{i_k}=1,\\ a_{i_{k+1}}=\ldots=a_{i_q}=0,}} = \mathrm{P}(\{y \in Y, A^y \cap D_{i_1} \neq \varnothing, \ldots, A^y \cap D_{i_k} \neq \varnothing\} \cap$ $\cap \{y \in Y,\ A^y \neq \varnothing,\ A^y \cap D_{i_{k+1}} = \varnothing, \ldots A^y \cap D_{i_q} = \varnothing\}) = \mathrm{P}(Y_A^{D_{i_1}} \cap \ldots$ $\ldots \cap Y_A^{D_{i_k}} \cap (Y \setminus Y_A^{D_{i_{k+1}}}) \cap \ldots \cap (Y \setminus Y_A^{D_{i_q}}))$ совпадает с $g_A^{\delta}(\cdot)$ (6.8.1). На сей раз в задаче оптимального оценивания A^{η} будем считать, что известен результат $\delta = d = (d_1, \ldots, d_q)$ измерения. Пусть как в (6.8.2) $l(a,b)$ — возможность потерь при замене $a \in \mathcal{E}_q$ на $b \in \mathcal{E}_q$, тогда оптимальное правило $a(\cdot)\colon \mathcal{E}_q \to \mathcal{E}_q$ оценивания нечеткого вектора α на основе зарегистрированного значения нечеткого вектора δ определится из решения задачи на минимум для возможности потерь $\sup\limits_{\substack{a' \in \mathcal{E}_q\\ d \in \mathcal{E}_q}} \min\{g^{\delta,\alpha}(d,a'), \mathrm{p}l(a', a(d))\} \sim \min\limits_{a(\cdot)\colon \mathcal{E}_q \to \mathcal{E}_q}$, или из решения более простой задачи

$$\sup_{a' \in \mathcal{E}_q} \min\{g^{\delta,\alpha}(d,a'), \mathrm{p}l(a',a)\} \sim \min_{a \in \mathcal{E}_q},\ d \in \mathcal{E}_q. \tag{6.8.6}$$

Пусть $a^* = a^*(d)$ — решение задачи (6.8.6), $a^* = (a_1^*, \ldots, a_q^*)$, $a_{i_1}^* = \ldots =$ $= a_{i_k}^* = 1$, $a_{i_{k+1}}^* = \ldots = a_{i_q}^* = 0$. Тогда как и в случае (6.8.2) наилучшей оценкой $\widehat{A} = \widehat{A}(d)$ можно считать любое множество A^{y^*}, у которого $y^* \in Y_A^{D_{i_1}} \cap \ldots \cap Y_A^{D_{i_k}} \cap (Y \setminus Y_A^{D_{i_{k+1}}}) \cap \ldots \cap (Y \setminus Y_A^{D_{i_q}})$.

Сигнал датчика D_i при $\eta = y$ может зависеть от «степени его возбуждения», в данном случае — от множества $D_i \cap A^y \subset D_i$ «возбужденных элементов D_i». В таком случае реакция датчика зависит от конкретного множества A^y, $y \in Y$, и для определения его модели должно быть задано распределение переходной возможности

$$g^{\delta_i|\eta}(d_i|y),\quad d_i \in [0,1],\quad y \in Y.$$

При этом естественно считать, что сигнал d_i может изменяться в пределах некоторого интервала, например, $[0,1]$ (для каждого датчика), причем при любом $d_i \in [0,1]$ $g^{\delta_i|\eta}(d_i|y)$ не зависит от y в пределах множества $Y \setminus Y_A^{D_i} = \{y \in Y, A^y \cap D_i = \varnothing,\ A^y \neq \varnothing\}$ (все точки $x \in D_i$ «не возбуждены») и является распределением шума датчика D_i.

Для всех датчиков зададим совместное распределение $g^{\delta|\eta}(d|y)$, $d \in [0,1]^q$, $y \in Y$. Тогда $g^{\delta,\eta}(d,y) = \min\{g^{\delta|\eta}(d|y), g^{\eta}(y)\}$ и наилучшее приближение $\widehat{A}(d)$ (правило оценивания $\widehat{A}(\cdot)\colon [0,1]^q \to \mathcal{P}(X)$) определится из условия $\sup\limits_{y \in Y} \min\{g^{\delta,\eta}(d,y), \mathrm{P\,L}(A^y, \widehat{A}(d))\} =$ $= \min\limits_{A \in \mathcal{P}(X)} \sup\limits_{y \in Y} \min\{g^{\delta,\eta}(d,y), \mathrm{P\,L}(A^y, A)\}$.

6.8.2. Оценивание параметра нечеткого множества. Рассмотрим задачу оценивания параметра нечеткого множества по данным регистрации его следа. Параметр будем считать нечетким элементом. Пусть $A^{\cdot,\cdot}\colon Y\times Z\to\mathcal{P}(X)$ — нечеткое множество, определенное на пространстве с возможностью $\Big(Y\times Z,\mathcal{P}(Y\times Z),\mathrm{P}^{\eta,\xi}\Big)$ и принимающее значения в $\mathcal{P}(X)$, $g^{\eta,\zeta}(\cdot,\cdot)\colon Y\times Z\to[0,1]$ — распределение нечеткого вектора (η,ζ), координата ζ которого объявлена параметром нечеткого множества $A^{\cdot,\zeta}\colon Y\to\mathcal{P}(X)$. При $\zeta=z$ регистрируется след $d=d(z)$ нечеткого множества $A^{\cdot,z}\colon Y\to\mathcal{P}(X)$ и требуется оценить $z\in Z$.

В этой задаче, как и в рассмотренной в § 6.8.1, считаются заданными распределение $g^{\delta|\eta,\zeta}(d|y,z)$, $d\in[0,1]^q$, $y\in Y$, $z\in Z$ переходной возможности, определяющее возможность реакции $d=(d_1,\ldots$ $\ldots,d_q)$ датчиков на $A^{y,z}$, и совместное распределение $g^{\delta,\eta,\zeta}(d,y,z)=$ $=\min(g^{\delta|\eta,\zeta}(d|y,z),g^{\eta,\zeta}(y,z))$, $d\in[0,1]^q$, $y\in Y$, $z\in Z$. Если $\mathrm{p}l(z,z')$ — возможность потерь, возникающих при замене z на z', то в рассматриваемой задаче возможность потерь, свойственных правилу оценивания $z(\cdot)\colon[0,1]^q\to Z$, $\mathrm{PL}(z(\cdot))=\sup\limits_{\substack{d\in[0,1]^q\\ y\in Y\\ z'\in Z}}\min\{g^{\delta,\eta,\zeta}(d,y,z'),\mathrm{p}l(z',z(d))\}$, и оптимальное правило оценивания $z_*(\cdot)\colon[0,1]^q\to Z$ следует определить из условия минимума этой возможности: $\mathrm{PL}(z_*(\cdot))=\min\limits_{z(\cdot)\colon[0,1]^q\to Z}\mathrm{PL}(z(\cdot))$.

Решение последней задачи сводится к решению более простой задачи $\sup\limits_{z\in Z}\min\{g^{\delta,\zeta}(d,z),\mathrm{p}l(z,z')\}\sim\min\limits_{z'\in Z}$, где $g^{\delta,\zeta}(d,z)=\sup\limits_{y\in Y}g^{\delta,\eta,\zeta}(d,y,z)$, $d\in[0,1]^q$, $z\in Z$.

Пример 6.8.1. Рассмотрим характерный для приложений случай, когда X и Z — линейные пространства и параметр $z\in Z$ определяет «сдвиг нечеткого множества» $A^{\cdot}\colon Y\to\mathcal{P}(X)$ на вектор Cz, $z\in Z$, где $C\colon Z\to X$ — линейный оператор. Если $A_x=\{y\in Y,x\in A^y\}$, то $A^{y,z}=$ $=A^y+Cz\stackrel{\triangle}{=}\{x+Cz,x\in A^y\}$ — сдвиг множества $A^y\subset X$ на $Cz\in X$, соответственно $A_{x-Cz}=\{y\in Y,x\in A^{y,z}\}\equiv\{y\in Y,x\in A^y+Cz\}$, $x\in X$, $z\in Z$. Пусть для простоты $D_i=\{x_i\}$, $i=1,\ldots,q$, — одноточечные подмножества X, тогда $Y_A^{D_i}=\{y\in Y,x_i\in A^y\}=A_{x_i}$, $i=1,\ldots,q$. Зададим распределение $g^{\delta|\alpha}(d|a,z)$, $d\in[0,1]^q$, $a\in E_q$, где $a=(a_1,\ldots,a_q)$, $a_i=1$, если $x_i\in A^y+Cz$, $a_i=0$, если $x_i\overline{\in}A^y+Cz$, $i=1,\ldots,q$, $y\in Y,z\in Z$. Соответственно распределение $g^{\alpha|\zeta}(a|z)$ определим согласно условию $\mathrm{P}(\alpha=a|\zeta=z)\Big|_{\substack{a_{i_1}=\ldots=a_{i_k}=1\\ a_{i_{k+1}}=\ldots=a_{i_q}=0}}=\mathrm{P}(A_{x_{i_1}-Cz}\cap\ldots$ $\ldots\cap A_{x_{i_k}-Cz}\cap(Y\setminus A_{x_{i_{k+1}}-Cz})\cap\ldots\cap(Y\setminus A_{x_{i_q}-Cz}))$, и пусть $g^{\zeta}(z)$ — априорное распределение параметра сдвига. Тогда $g^{\delta,\alpha,\zeta}(d,a,z)=$ $=\min\{g^{\delta|\alpha,\zeta}(d|a,z),g^{\alpha|\zeta}(a|z),g^{\zeta}(z)\}$, $g^{\delta,\zeta}(d,z)=\sup\limits_{a\in E_q}g^{\delta,\alpha,\zeta}(d,a,z)$

и задача оптимального оценивания параметра сдвига свелась к стандартной задаче минимизации $\sup\limits_{z\in Z}\min\{g^{\delta,\zeta}(d,z),\mathrm{pl}(z,z')\}\sim\min\limits_{z'\in Z}$, решение которой определяет оптимальное правило оценивания $z_*(d)$, $d\in[0,1]^q$.

Пример оценивания нечеткого множества рассмотрен в работе [85].

6.9. Минимаксное оценивание

Рассмотрим вначале формализм минимаксного оценивания, характерный для теории ошибок. Пусть, например, вектор $x\in\mathcal{R}^q$ неизвестен, известно лишь множество $Q\subset\mathcal{R}^q$, содержащее x. Минимаксная оценка $y_*\in\mathcal{R}^q$ вектора $x\in Q$ определяется условием

$$\sup_{x\in Q}\|x-y_*\|=\min_{y\in\mathcal{R}^q}\sup_{x\in Q}\|x-y\|, \tag{6.9.1}$$

согласно которому максимальное расстояние $\sup\limits_{x\in Q}\|x-y\|$ от y до $x\in Q$ минимально при $y=y_*$.

Лемма 6.9.1. *Пусть Q — ограниченное и замкнутое множество в $\mathcal{R}^q$. Тогда существует единственная оценка y_*, удовлетворяющая условию* (6.9.1).

Доказательство. Заметим, что функция $h(y)=\sup\limits_{x\in Q}\|x-y\|=$ $=\max\limits_{x\in Q}\|x-y\|$, $y\in\mathcal{R}^q$, непрерывна, ибо для любых $y_1,y_2\in\mathcal{R}^q$ $\left|\max\limits_{x\in Q}\|x-y_1\|-\max\limits_{x\in Q}\|x-y_2\|\right|\leqslant\|y_1-y_2\|$, и ее квадрат $h^2(y)$, $y\in\mathcal{R}^q$, — сильно выпуклая функция, поскольку для любых $\alpha\in[0,1]$ и $x,y_1,y_2\in\mathcal{R}^q$ $\|x-(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)\|^2=\alpha\|x-y_1\|^2+$ $+(1-\alpha)\|x-y_2\|^2-\alpha(1-\alpha)\|y_1-y_2\|^2$ и, следовательно, $h^2(\alpha y_1+$ $+(1-\alpha)y_2)\leqslant\alpha h^2(y_1)+(1-\alpha)h^2(y_2)-\alpha(1-\alpha)\|y_1-y_2\|^2$. Так как для достаточно большого $t>0$ множество $\mathcal{H}_t=\{y\in\mathcal{R}^q,h(y)\leqslant t\}$ не пусто, выпукло и замкнуто, то $h(y)$ достигает минимума при $y_*\in\mathcal{H}_t$, $h_*=\min\limits_{y\in\mathcal{H}_t}h(y)=\min\limits_{y\in\mathcal{R}^q}h(y)$, причем в силу сильной выпуклости $h^2(\cdot)$ y_* — единственная точка минимума. ■

Замечание 6.9.1. Решение задачи (6.9.1) имеет прозрачный геометрический смысл: y_* — центр шара O_Q минимального радиуса $h(y_*)$, содержащего множество Q, причем y_* — центр O_Q, если и только если существуют векторы $x_0,\ldots,x_q\in Q\cap O_Q$ и постоянные $\mu_0\geqslant 0,\ldots$ $\ldots,\mu_q\geqslant 0$ такие, что [40] $\sum\limits_{i=0}^{q}\mu_i\,(y_*-x_i)\,/\|y_*-x_i\|=0$, $\sum\limits_{i=0}^{q}\mu_i=1$, $\|y_*-x_i\|=h(y_*)$, $i=0,1,\ldots,q$, откуда следует, что $y_*=\sum\limits_{i=0}^{q}\mu_i x_i$.

Пусть ξ — нечеткий вектор $\mathcal{R}^q$, его распределение $g^\xi(\cdot)\colon \mathcal{R}^q \to [0,1]$ полунепрерывно сверху, что эквивалентно замкнутости множества

$$Q_t = \{x \in \mathcal{R}^q, g^\xi(x) \geqslant t\} \tag{6.9.2}$$

при любом $t \in (0,1]$. Более того, будем считать, что при любом $t \in (0,1]$ Q_t (6.9.2) компактно. Пусть $y \in \mathcal{R}^q$ — оценка ξ, $\zeta = \|\xi - y\|$ — нечеткая ошибка оценивания и $g_y^\zeta(z) = \max\{g^\xi(x)\,|\,x \in \mathcal{R}^q,\ \|x-y\| = z\}$, $z \in \mathcal{R}_+$, — ее распределение [1]), зависящее от $y \in \mathcal{R}^q$ как от параметра.

При таких предположениях о качестве распределения $g^\xi(\cdot)$ может быть построен инвариантный относительно выбора шкалы значений возможности класс *условных минимаксных оценок*, позволяющих при оценивании учесть градации возможностей значений ξ.

Рассмотрим семейство событий $\xi \in Q_t$, $t \in [0,1]$, которые будут играть роль условий оценивания, позволяющих принимать во внимание не все возможные значения ξ, а лишь те, возможности которых не меньше $t \in [0,1]$. Для них $\mathrm{P}(\xi \in Q_t) = 1$, $N(\xi \in Q_t) = \inf\limits_{x \in X \setminus Q_t} \theta \circ g^\xi(x) = \inf\{\theta \circ g^\xi(x)\,|\,x \in \mathcal{R}^q, \theta \circ g^\xi(x) > \theta(t)\} \geqslant \theta(t)$, [128].

Для каждого $y \in \mathcal{R}^q$ максимальная (условная) ошибка $z_y(t)$, $t \in (0,1]$, определяется выражением $z_y(t) = \max\limits_{x \in Q_t} \|x-y\| = \max\{\|x - y\|\,|\,x \in \mathcal{R}^q, g^\xi(x) \geqslant t\}$ и согласно Лемме 6.9.1 достигает наименьшего значения $z_t = z_{y_t}(t)$ при единственном $y = y_t$

$$z_t = \max\{\|x - y_t\|\,|\,x \in \mathcal{R}^q, g^\xi(x) \geqslant t\} = \min_{y \in \mathcal{R}^q} \max\{\|x-y\|\,|\,x \in \mathcal{R}^q, g^\xi(x) \geqslant t\}. \tag{6.9.3}$$

Таким образом, *условная минимаксная оценка y_t нечеткого вектора ξ при условии $\xi \in Q_t$ есть центр шара минимального радиуса z_t, содержащего Q_t*, соответствующая условная минимаксная ошибка есть z_t, $t \in (0,1]$. Ее качество определяется функцией $z_.\colon [0,1] \to \mathcal{R}_+$ (6.9.3) в следующем смысле: для любой оценки $\widetilde{y}_t$, $t \in [0,1]$, в любой шкале значений возможности $z_t \leqslant \widetilde{z}_t$, $t \in [0,1]$, где $\widetilde{z}_t$ — ошибка оценивания ξ значением $\widetilde{y}_t$, $t \in [0,1]$.

Так как для любого $t \in [0,1]$ $\mathrm{P}(\xi \in Q_t) = 1$, то условное распределение ошибки оценивания $\mathrm{P}_y(\zeta = z\,|\,\xi \in Q_t) = \mathrm{P}_y(\zeta = z, \xi \in Q_t) = \max\{g^\xi(x)\,|\,x \in \mathcal{R}^q, \|x-y\| = z, g^\xi(x) \geqslant t\}$. Соответственно условная возможность максимальной ошибки оценивания ξ значением y_t при условии $\xi \in Q_t$ есть $\mathrm{P}_{y_t}(\zeta = z_t|\xi \in Q_t) \geqslant t$, причем если $g^\xi(\cdot)\colon \mathcal{R}^q \to [0,1]$ — *непрерывная* функция, то для каждого $t \in (0,1]$

$$\mathrm{P}_{y_t}(\zeta = z_t\,|\,\xi \in Q_t) = t \leqslant \mathrm{P}_y(\zeta = z_t\,|\,\xi \in Q_t),\ y \in \mathcal{R}^q, \quad N(\xi \in Q_t) = \theta(t). \tag{6.9.4}$$

[1]) В силу полунепрерывности сверху максимум $g^\xi(x)$ достигается на компактном множестве $\{x \in \mathcal{R}^q, \|x-y\| = z\}$.

Иначе говоря, если *функция* $g^{\xi}(\cdot)$ *непрерывна, то оценка* y_t *минимизирует не только максимальную условную ошибку* $z_y(t)$, *но и условную возможность максимальной ошибки* $\zeta = z_t$ *при условии* $\xi \in Q_t$, $t \in (0, 1]$.

На рис. 6.9.1 приведен пример полунепрерывной сверху функции $g^{\xi}(\cdot)$, для которой свойства (6.9.4) оценки y_t неверны.

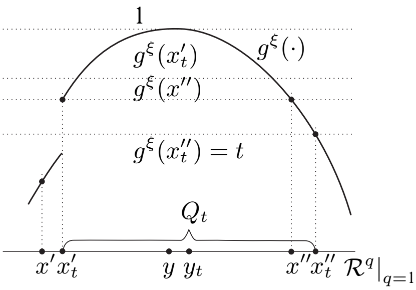


Рис. 6.9.1. Множества $\{x \in \mathcal{R}^1, |x - y_t| = z_t\} = \{x'_t, x''_t\}$, $\{x \in \mathcal{R}_1, |x - y| = z_t\} = \{x', x''\}$, $z_t = x''_t - y_t = y_t - x'_t = x'' - y = y - x'$; $\max\{g^{\xi}(x) \mid x \in Q_t, |x - y_t| = z_t\} = g^{\xi}(x'_t) > t$; $\max\{g^{\xi}(x) \mid x \in Q_t, |x - y| = z_t\} = g^{\xi}(x'') < g^{\xi}(x'_t)$

Если множество $\bigcup_{t>0} Q_t$ ограничено, то при $t = +0$ получаем оценку $y_t = y_{+0}$, минимизирующую максимальную ошибку $z_y(+0) = \lim_{t \to 0} z_y(t)$.

Сравним с рассмотренным классом минимаксных оценок класс оценок, рассмотренных в § 6.6.7, определенных условием [1]

$$\min_{y \in \mathcal{R}^q} \mathrm{P}_y(\zeta = \|\xi - y\| \geqslant z) = \mathrm{P}_{y_z}(\zeta = \|\xi - y_z\| \geqslant z), \ z \in \mathcal{R}_+, \tag{6.9.5}$$

согласно которому оценка y_z минимизирует возможность ошибки $\zeta \geqslant z$ для каждого $z \in \mathcal{R}_+$. Речь идет о решении следующей задачи на минимакс

$$\max\{g^{\xi}(x) \mid x \in \mathcal{R}^q, \|x - y\| \geqslant z\} \sim \min_{y \in \mathcal{R}^q}. \tag{6.9.6}$$

Этот класс может быть охарактеризован и в терминах оценок, рассмотренных в § 6.6.3, если ввести семейство функций $l_z(\cdot, \cdot) \colon X \times Y \to [0, 1]$, определенных равенством $\mathrm{p}l_z^{\Lambda}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \|x - y\| \geqslant z, \\ 0, & \text{если } \|x - y\| < z, \end{cases}$ $z \in \mathcal{R}_+$. В таком случае в (6.9.5) $\mathrm{P}_y(\zeta \geqslant z) = \sup_{x \in \mathcal{R}^q} \min(g^{\xi}(x), l_z(x, y))$, $y \in \mathcal{R}^q$.

[1] Поскольку в данном случае оценка выбирается из $\mathcal{R}^q$, задача на максимум в (6.6.38) может не рассматриваться.

Пример 6.9.1. Пусть $g^{\xi}(x) = \rho(\|Sx\|)$, $x \in \mathcal{R}^q$, где функция $\rho(\cdot)$: $\mathcal{R}_+ \to [0,1]$ непрерывна и строго монотонно убывает на $\mathcal{R}_+ = [0,\infty)$, $\rho(0) = 1$, $S\colon \mathcal{R}^q \to \mathcal{R}^q$ — невырожденный, положительно определенный оператор, т. е. $S = S^*$, $(Sx, x) > 0$, если $\|x\| > 0$. При таких условиях задача (6.9.6) формулируется следующим образом:

$$\min\{\|Sx\| \mid x \in \mathcal{R}^q, \|x - y\| \geqslant z\} \sim \max_{y \in \mathcal{R}^q}.$$

Нетрудно заметить, что ее решение $y_z = 0$ при любом $z \in \mathcal{R}_+$, минимум $\|Sx\|$ на множестве $\|x\| \geqslant z$ достигается на собственном векторе x_1 оператора S, отвечающем наименьшему собственному значению $\alpha_1 > 0$, $Sx_1 = \alpha_1 x_1$, $\|x_1\| = z$, и равен $\|Sx_1\| = \alpha_1 z$. Соответственно левая часть (6.9.5) равна $\rho(\alpha_1 z)$, $z \in \mathcal{R}_+$, см. рис. 6.9.2.

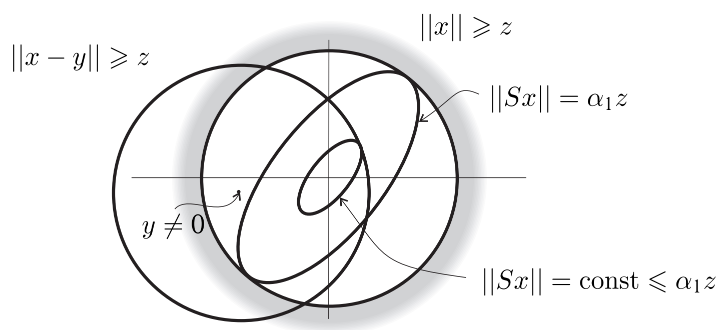


Рис. 6.9.2. $\|Sx\| = \mathrm{const} \leqslant \alpha_1 z$ — минимальный (по включению) эллипсоид, пересекающийся с множеством $\|x - y\| \geqslant z$, его наибольшая ось максимальна при $y = y_z = 0$

Что касается максимальной условной ошибки z_t в (6.9.4), то при оговоренных ранее условиях она определяется выражением $z_t = \min\limits_{y \in \mathcal{R}^q} \max\{\|x - y\| \,|\, x \in \mathcal{R}^q, \|Sx\| \leqslant \rho^{-1}(t)\} = \max\{\|x\| \,|\, x \in \mathcal{R}^q, \|Sx\| \leqslant \rho^{-1}(t)\} = \rho^{-1}(t)/\alpha_1$. Соответствующая условная минимаксная оценка существует, ибо множество $Q_t = \{x \in \mathcal{R}^q, \|Sx\| \leqslant \rho^{-1}(t)\}$ при любом $t \in (0,1]$ компактно, причем $y_t = 0$ не зависит от $t \in (0,1]$ и удовлетворяет соотношению (6.9.4), см. рис. 6.9.3.

Разумеется, факт совпадения решений задач (6.9.3) и (6.9.6), отмеченный в примере 6.9.1, в общем случае не справедлив. Связь между решениями этих задач в случае непрерывной функции $g^{\xi}(\cdot)$ такова.

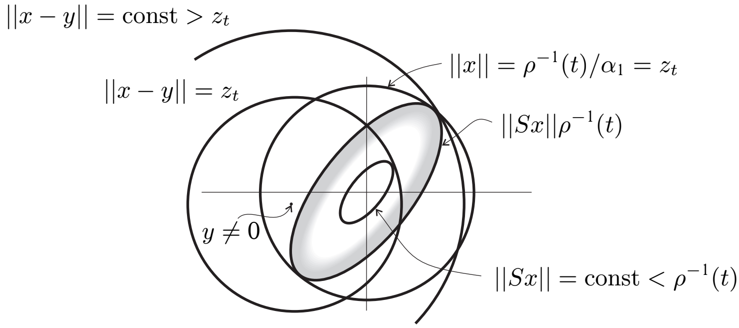


Рис. 6.9.3. Оптимальная условная оценка $y_t = 0$ — центр шара $\|x\| = \rho^{-1}(t)/\alpha_1$

Лемма 6.9.2. *Пусть* $g^\xi(\cdot)\colon \mathcal{R}^q \to [0,1]$ — *непрерывная функция, множество* $Q_t = \left\{x \in \mathcal{R}^q,\ g^\xi(x) \geqslant t\right\}$ *компактно*, y_t — *решение задачи* (6.9.3), z_t — *соответствующая условная минимаксная погрешность. Тогда* $y = y_t$ — *решение и задачи* (6.9.6) *при* $z = z_t$, $t \in (0,1]$.

Доказательство. Так как y_t — центр шара $Q_t = \{x \in \mathcal{R}^q,\ \|x - y_t\| \leqslant \leqslant z_t\}$ минимального радиуса z_t, содержащего множество $Q_t = \left\{x \in \mathcal{R}^q,\ g^\xi(x) \geqslant t\right\}$, то в силу непрерывности $g^\xi(\cdot)$ (на границе Q_t) $\max\left\{g^\xi(x)\,|\,x \in \mathcal{R}^q,\ \|x - y_t\| = z_t\right\} = t$. А поскольку Q_t — единственный шар с названными свойствами, то для любого $y \neq y_t$ $\max\{g^\xi(x)\,|\,x \in \mathcal{R}^q,\ \|x-y\| \geqslant z_t\} \geqslant \max\{g^\xi(x)\,|\,x \in \mathcal{R}^q,\ \|x-y\| = = z_t\} \geqslant t$, $t \in (0,1]$. ■

В заключение заметим, что рассмотренные методы оценивания на основе байесовского принципа, приведенного в § 6.6.9, позволяют учесть результаты наблюдения, если известно совместное распределение оцениваемого и наблюдаемого нечетких элементов.

6.10. Оценивание методами интервального анализа

В этом параграфе рассмотрены методы минимизации ошибки оценивания, в основе которых лежат конструкции интервальной алгебры [19], полученные как следствие одноименных операций над нечеткими величинами.

6.10.1. Интервальные нечеткие элементы. Интервальная алгебра. Пусть ξ, η — независимые нечеткие величины, принимающие значения в $\mathcal{R}^1$, $f^\xi(\cdot)$, $f^\eta(\cdot)$ — их распределения возможностей и $g(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1 \to \mathcal{R}^1$ — заданная функция. Нечеткая величина $\zeta = g(\xi,\eta)$ имеет распределение возможностей

$$f^\zeta(z) = \sup\{\min\{f^\xi(x), f^\eta(y)\}\,|\,(x,y) \in \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1,\ g(x,y) = z\},\ z \in \mathcal{R}^1. \tag{6.10.1}$$

Рассмотрим класс распределений нечетких величин, принимающих значения в интервалах $\mathcal{R}^1$, а именно пусть

$$f^{\xi}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in [x_1, x_2], \\ 0, \text{ если } x \in \mathcal{R}^1 \backslash [x_1, x_2], \end{cases} \quad f^{\eta}(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y \in [y_1, y_2], \\ 0, \text{ если } y \in \mathcal{R}^1 \backslash [y_1, y_2]. \end{cases} \tag{6.10.2}$$

Поскольку ξ и η принимают значения только в пределах интервалов $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$, причем *в пределах этих интервалов их значения равновозможны*, то задание ξ и η эквивалентно заданию интервалов $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$. *Такие нечеткие величины назовем интервальными.*

Это замечание позволяет формально определить правила композиции интервалов исходя из одноименных операций над *взаимно независимыми интервальными нечеткими величинами ξ и η.*

Сложение интервалов. Распределение $\zeta = g(\xi, \eta) = \xi + \eta$, согласно формулам (6.10.1) и (6.10.2), дается равенством

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z \in [z_1, z_2], \\ 0, \text{ если } z \in \mathcal{R}^1 \setminus [z_1, z_2], \end{cases} \tag{6.10.3}$$

в соответствии с которым ζ — интервальная нечеткая величина. В равенстве (6.10.3) $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$, см. рис. 6.10.1.

Интервал $[x_1 + y_1, x_2 + y_2]$, в котором принимает значения нечеткая величина $\zeta = \xi + \eta$, назовем суммой $[x_1, x_2] + [y_1, y_2]$ интервалов $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$:

$$[x_1, x_2] + [y_1, y_2] \triangleq [x_1 + y_1, x_2 + y_2]. \tag{6.10.4}$$

Согласно правилу (6.10.4) сложение интервалов коммутативно, ассоциативно, а интервал $[0, 0]$ при сложении играет роль «нуля».

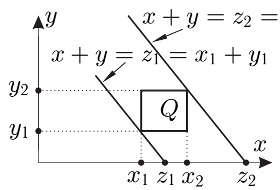


Рис. 6.10.1. Прямоугольник $Q = \{(x, y) \in \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1, f^{\xi,\eta}(x, y) = \min\{f^{\xi}(x), f^{\eta}(y)\} = 1\} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $f^{\xi,\eta}(x, y) = 1$, $(x, y) \in Q$, $f^{\xi,\eta}(x, y) = 0$, $(x, y) \in (\mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1) \setminus Q$. Наименьшее $z_1 = x_1 + y_1$ и наибольшее $z_2 = x_2 + y_2$ значения функции $z = x + y$, $(x, y) \in Q$, определяющие концы интервала $[z_1, z_2]$ в (6.10.3), достигаются в вершинах Q (x_1, y_1) и (x_2, y_2), через которые проходят прямые $g(x, y) = x + y = z_1$, $g(x, y) = x + y = z_2$, $(x, y) \in \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1$ соответственно

Вычитание интервалов. Если $\zeta = \eta - \xi$, то распределение ζ

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z \in [z_1, z_2], \\ 0, \text{ если } z \in \mathcal{R}^1 \setminus [z_1, z_2], \end{cases} \tag{6.10.5}$$

где $z_1 = y_1 - x_2$, $z_2 = y_2 - x_1$, см. рис. 6.10.2. Согласно равенству (6.10.5) ζ — интервальная нечеткая величина.

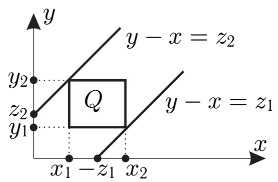


Рис. 6.10.2. Минимальное $z_1 = y_1 - x_2$ и максимальное $z_2 = y_2 - x_1$ значения функции $z = y - x$, $(x, y) \in Q$, определяющие концы интервала $[z_1, z_2]$ в (6.10.5), достигаются в вершинах Q (x_2, y_1) и (x_1, y_2), через которые проходят прямые $y - x = z_1$ и $y - x = z_2$, $(x, y) \in \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1$ соответственно

Интервал $[y_1 - x_2, y_2 - x_1]$, в котором принимает значения $\zeta = \eta - \xi$, назовем *разностью* $[y_1, y_2] - [x_1, x_2]$ *интервалов* $[y_1, y_2]$ и $[x_1, x_2]$:

$$[y_1, y_2] - [x_1, x_2] \triangleq [y_1 - x_2, y_2 - x_1]. \qquad (6.10.6)$$

Заметим, что *«вычитание» интервалов* (6.10.6) *не есть операция, обратная «сложению»* (6.10.4), ибо

$$([y_1, y_2] - [x_1, x_2]) + [x_1, x_2] = [(y_1 - x_2) + x_1, (y_2 - x_1) + x_2] \neq [y_1, y_2];$$

в частности, если $x_1 \neq x_2$, то

$$[x_1, x_2] - [x_1, x_2] = [x_1 - x_2, x_2 - x_1] \neq [0, 0]. \qquad (6.10.7)$$

Дело в том, что последний интервал является областью значений разности двух *независимых копий* нечеткой величины ξ (6.10.2).

Умножение интервалов. Пусть $\zeta = \xi \cdot \eta$, тогда, как нетрудно проверить, обратившись к рис. 6.10.3,

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z \in [z_1, z_2], \\ 0, \text{ если } z \in \mathcal{R}^1 \setminus [z_1, z_2], \end{cases} \qquad (6.10.8)$$

где $z_1 = \min\limits_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j)$, $z_2 = \max\limits_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j)$. Согласно равенству (6.10.8) ζ — интервальная нечеткая величина.

Интервал $[\min\limits_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j), \max\limits_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j)]$, определяющий множество значений нечеткой величины $\zeta = \xi \cdot \eta$, назовем *произведением* $[x_1, x_2] \times$ $\times [y_1, y_2]$ *интервалов* $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$,

$$[x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] \triangleq [\min_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j), \max_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j)]. \qquad (6.10.9)$$

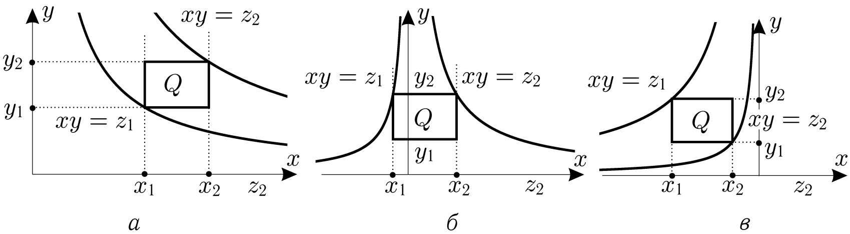


Рис. 6.10.3. Наименьшее $z_1 = \min\limits_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j)$ и наибольшее $z_2 = \max\limits_{i,j=1,2}(x_i \cdot y_j)$ значения функции $z = xy$, $(x, y) \in Q$, определяющие концы интервала $[z_1, z_2]$ в (6.10.8), достигаются в вершинах Q: *а*) $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$; *б*) $(x_1, y_2), (x_2, y_2)$; *в*) $(x_1, y_2), (x_2, y_1)$, через которые проходят гиперболы $xy = z_1$ и $xy = z_2$ соответственно

Если ξ принимает лишь значение x_1, т. е. в (6.10.2) $f^{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [x_1, x_1], \\ 0, & \text{если } x \in \mathcal{R}^1 \setminus [x_1, x_1], \end{cases}$ то

$$[\min_{j=1,2}(x_1 \cdot y_j), \max_{j=1,2}(x_1 \cdot y_j)] = \begin{cases} [x_1 y_1, x_1 y_2], & \text{если } x_1 \geqslant 0, \\ [x_1 y_2, x_1 y_1], & \text{если } x_1 < 0. \end{cases}$$

Эту формулу будем считать *определением операции умножения интервала* $[y_1, y_2]$ *на число* x_1,

$$x_1 \cdot [y_1, y_2] \triangleq [x_1, x_1] \cdot [y_1, y_2] = \begin{cases} [x_1 y_1, x_1 y_2], & \text{если } x_1 \geqslant 0, \\ [x_1 y_2, x_1 y_1], & \text{если } x_1 < 0, \end{cases} = [z_1, z_2];$$
$$z_1 = \min_{j=1,2}(x_1 \cdot y_j), z_2 = \max_{j=1,2}(x_1 \cdot y_j). \quad (6.10.10)$$

В частности, $[x_1, x_2] + (-1)[y_1, y_2] = [x_1, x_2] + [-y_2, -y_1] = [x_1 - y_2, x_2 - y_1] = [x_1, x_2] - [y_1, y_2]$.

Нетрудно убедиться, что операция умножения интервалов не дистрибутивна относительно сложения, например, $[0, 0] = 0 \cdot [x_1, x_2] = (1 + (-1))[x_1, x_2] \neq [x_1, x_2] - [x_1, x_2] = [x_1 - x_2, x_2 - x_1]$.

Дело в том, что, хотя для любых нечетких величин ξ_1, ξ_2 и ξ $(\xi_1 + \xi_2)\xi = \xi_1\xi + \xi_2\xi$, интервальные нечеткие величины $\xi_1\xi$ и $\xi_2\xi$, вообще говоря, *зависимы*, в том числе и тогда, когда интервальные нечеткие элементы ξ_1, ξ_2 и ξ взаимно независимы. Следствием этого является легко проверяемое включение: интервал, отвечающий $(\xi_1 + \xi_2)\xi$, содержится в сумме [1] интервалов, отвечающих $\xi_1\xi$ и $\xi_2\xi$.

[1] Для проверки можно воспользоваться следующим фактом: для любых $\zeta_1 = \xi_1\xi$, $\zeta_2 = \xi_2\xi$ совместное распределение ζ_1 и ζ_2 $f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2) \leqslant \min\{f^{\zeta_1}(z_1), f^{\zeta_2}(z_2)\}$, где $f^{\zeta_1}(z_1) = \sup\limits_{z_2 \in Z_2} f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2)$, $f^{\zeta_2}(z_2) = \sup\limits_{z_1 \in Z_1} f^{\zeta_1,\zeta_2}(z_1, z_2)$, $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, — маргинальные распределения ζ_1 и ζ_2.

Деление интервалов. Пусть $\zeta = \eta/\xi$, причем $\mathrm{P}(\xi = 0) = 0$, т. е. $0 \in \mathcal{R}^1 \setminus [x_1, x_2]$. Тогда

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z \in [z_1, z_2], \\ 0, \text{ если } z \in \mathcal{R}^1 \setminus [z_1, z_2], \end{cases} \tag{6.10.11}$$

где $z_1 = \min\limits_{i,j=1,2}(y_i/x_j)$, $z_2 = \max\limits_{i,j=1,2}(y_i/x_j)$, см. рис. 6.10.4, *а*. В этом случае ζ — интервальная нечеткая величина.

Если же $0 \in [x_1, x_2]$, то либо, как показано на рис. 6.10.4, $б_1$,

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, & z \in (-\infty, z_2] \cup [z_1, \infty), \\ 0, & z \in \mathcal{R}^1 \setminus ((-\infty, z_2] \cup [z_1, \infty)), \end{cases}$$

где $z_1 = y_1/x_2$, $z_2 = y_1/x_1$, либо согласно 6.10.4, $б_2$

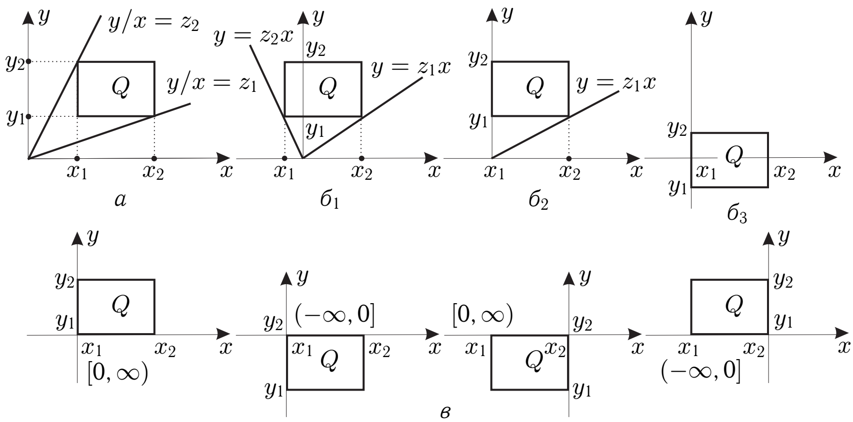


Рис. 6.10.4. *а*) $0 \notin [x_1, x_2]$, z_1, z_2 суть минимальное и максимальное значения функции $z = y/x$, $(x, y) \in Q$, определяющие границы интервала $[z_1, z_2]$ в (6.10.11), которые достигаются в вершинах Q, через которые проходят прямые $y = z_1x$ и $y = z_2x$. $б_1$), $б_2$), $б_3$), *в*) $0 \in [x_1, x_2]$

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, & z \in [z_1, \infty), \\ 0, & z \in \mathcal{R}^1 \setminus [z_1, \infty), \end{cases}$$

где $z_1 = y_1/x_2$, либо, наконец, согласно 6.10.4, $б_3$

$$f^{\zeta}(z) = 1, \ z \in (-\infty, \infty).$$

На остальных четырех рис. 6.10.4, *в* каждому положению прямоугольника Q сопоставлен интервал значений ζ.

Операция деления интервалов, определенная на основе правила деления интервальных нечетких величин, в общем случае приводит к неограниченным интервалам и их объединениям. Можно, разумеется, расширить множество рассматриваемых интервалов, включив в него неограниченные интервалы и объединения интервалов, и доопределить рассмотренные ранее операции на таком классе исходя из правил композиции «соответствующих» нечетких величин [1], что, однако, не является целью настоящего параграфа.

Операции min и max над интервалами. Если $\zeta = \min\{\xi, \eta\}$, то согласно (6.10.1)

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z \in [z_1, z_2], \\ 0, \text{ если } z \in \mathcal{R}^1 \setminus [z_1, z_2], \end{cases} \tag{6.10.12}$$

где $z_1 = \min(x_1, y_1)$, $z_2 = \min(x_2, y_2)$. Согласно равенству (6.10.12) ζ — интервальная нечеткая величина, см. рис. 6.10.5. Интервал $[\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2)]$ ее значений назовем *минимумом интервалов* $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ и обозначим $[x_1, x_2] \wedge [y_1, y_2]$,

$$[x_1, x_2] \wedge [y_1, y_2] \triangleq [\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}].$$

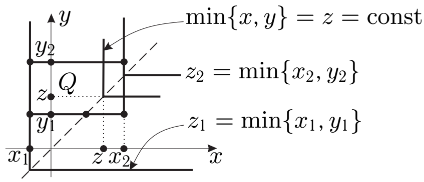


Рис. 6.10.5. Наименьшее $z_1 = \min\{x_1, y_1\}$ и наибольшее $z_2 = \min\{x_2, y_2\}$ значения функции $z = \min\{x, y\}$, $(x, y) \in Q = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$

Если $\zeta = \max\{\xi, \eta\}$, то

$$f^{\zeta}(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } z \in [z_1, z_2], \\ 0, \text{ если } z \in \mathcal{R}^1 \setminus [z_1, z_2], \end{cases} \quad z \in \mathcal{R}^1, \tag{6.10.13}$$

где $z_1 = \max\{x_1, y_1\}$, $z_2 = \min\{x_2, y_2\}$, см. рис. 6.10.6. Согласно равенству (6.10.13) ζ — интервальная нечеткая величина.

Соответствующее правило композиции интервалов $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ обозначим символом $\vee$: $[x_1, x_2] \vee [y_1, y_2] \triangleq [\max\{x_1, y_1\}, \max\{x_2, y_2\}]$.

[1] С этой же целью можно использовать распределения необходимостей $h^{\xi}(\cdot) = \theta \circ f^{\xi}(\cdot)$, дуальное распределению возможностей $f^{\xi}(\cdot)$ интервального нечеткого элемента ξ: $h^{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{R}^1 \setminus [x_1, x_2], \\ 0, & x \in [x_1, x_2], \end{cases}$ если $f^{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & x \in \mathcal{R}^1 \setminus [x_1, x_2]. \end{cases}$

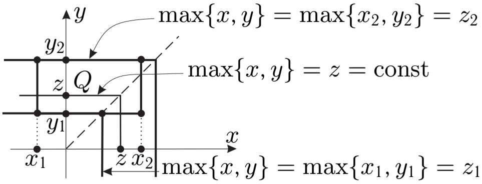


Рис. 6.10.6. $z_1 = \min\{\max\{x, y\} \mid (x, y \in Q)\}$, $z_2 = \max\{\max\{x, y\} \mid (x, y \in Q)\}$, $Q = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$

Операции $\vee, \wedge$ над интервалами, как и операции max и min над числами, коммутативны, ассоциативны и взаимно дистрибутивны:

$$[z_1, z_2] \wedge ([x_1, x_2] \vee [y_1, y_2]) = ([z_1, z_2] \wedge [x_1, x_2]) \vee ([z_1, z_2] \wedge [y_1, y_2]),$$

$$[z_1, z_2] \vee ([x_1, x_2] \wedge [y_1, y_2]) = ([z_1, z_2] \vee [x_1, x_2]) \wedge ([z_1, z_2] \vee [y_1, y_2]).$$

Классы эквивалентности. Бинарные операции над классами. Интервалы $[x_1, x_2]$ и $[y_1, y_2]$ назовем *эквивалентными*, $[x_1, x_2] \sim [y_1, y_2]$, если $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.

На множестве Int всех интервалов отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, поскольку оно симметрично: $[x_1, x_2] \sim [y_1, y_2] \Leftrightarrow [y_1, y_2] \sim [x_1, x_2]$, рефлексивно: $[x_1, x_2] \sim [x_1, x_2]$ и транзитивно: $[x_1, x_2] \sim [y_1, y_2]$, $[y_1, y_2] \sim [z_1, z_2] \Leftrightarrow [x_1, x_2] \sim [z_1, z_2]$.

Следовательно, отношение $\sim$ порождает разбиение множества Int на классы эквивалентных интервалов. Класс $\{[x_1, x_2]\}$ интервалов, эквивалентных $[x_1, x_2]$, состоит из всех интервалов, симметричных относительно центра интервала $[x_1, x_2]$: $\{[x_1, x_2]\} = \{[z_1, z_2], z_1 = c - l, z_2 = c + l, 2c = x_1 + x_2, 0 \leqslant l < \infty\}$, где c — общий центр всех интервалов из $\{[x_1, x_2]\}$, $l \in [0, +\infty)$ — их полудлины.

Так как $[x_1, x_2] = [c - l, c + l]$, где $c = (x_1 + x_2)/2$, $l = (x_2 - x_1)/2$, то любой интервал $[x_1, x_2]$ можно задать парой чисел $\{c, l\}$. При таком задании будем писать $[x_1, x_2] \doteq \{c, l\}$ и $\{[x_1, x_2]\} \doteq \{\{c, l\}, c = (x_1 + x_2)/2, 0 \leqslant l < \infty\}$.

Нетрудно проверить [1], что если $[\underline{x}_i, \overline{x}_i] \doteq \{c_i, l_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$[\underline{x}_i, \overline{x}_i] + [\underline{x}_j, \overline{x}_j] \doteq \{c_i + c_j, l_i + l_j\}, \; i, j = 1, \ldots, n, \tag{6.10.14}$$

и

$$a_i[\underline{x}_i, \overline{x}_i] \doteq \{a_i c_i, |a_i| l_i\}, \; i = 1, \ldots, n. \tag{6.10.15}$$

[1] Заметим, что для любых $a, b \in \mathcal{R}^1$ $(a + b)[\underline{x}, \overline{x}] = [(a + b)c - |a + b|l, (a + b)c + |a + b|l] \subset [(a + b)c - (|a| + |b|)l, (a + b)c + (|a| + |b|)l] = a[\underline{x}, \overline{x}] + b[\underline{x}, \overline{x}]$, где $c = (\underline{x} + \overline{x})/2$, $l = (\overline{x} - \underline{x})/2$, т. е. *умножение, как уже было отмечено, не дистрибутивно относительно сложения.*

Замечание 6.10.1. Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ и $[\underline{x}, \overline{x}] \triangleq \begin{pmatrix} [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \\ \vdots \\ [\underline{x}_m, \overline{x}_m] \end{pmatrix}$, то согласно (6.10.14), (6.10.15)

$$A[\underline{x}, \overline{x}] \triangleq \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}[\underline{x}_j, \overline{x}_j] \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}[\underline{x}_j, \overline{x}_j] \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}c_j, \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{1j}|l_j\} \\ \vdots \\ \{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}c_j, \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{nj}|l_j\} \end{pmatrix}, \qquad (6.10.16)$$

в то время как

$$A([\underline{x}_1, \overline{x}_1] \times \ldots \times [\underline{x}_m, \overline{x}_m]) =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \ x_j \in [\underline{x}_j, \overline{x}_j], \ j = 1, \ldots, m \right\}, \quad (6.10.16^*)$$

где $A([\underline{x}_1, \overline{x}_1] \times \ldots \times [\underline{x}_m, \overline{x}_m]) \subset A[\underline{x}, \overline{x}]$, причем $A[\underline{x}, \overline{x}]$ — наименьший (по включению) *прямоугольный параллелепипед* (*брус*) (6.10.16), содержащий *параллелепипед* $A([\underline{x}_1, \overline{x}_1] \times \ldots \times [\underline{x}_m, \overline{x}_m])$ (6.10.16*).

В самом деле, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, $\forall\, j = 1, \ldots, m$, $\forall\, y_j \in [\underline{x}_j, \overline{x}_j]$, $\underline{a}_i = \min\{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_j | x_k \in [\underline{x}_k, \overline{x}_k],\ k = 1, \ldots, m\} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}y_j \leqslant \max\{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_j | x_k \in [\underline{x}_k, \overline{x}_k],\ k = 1, \ldots, m\} = \overline{a}_i$, где $\overline{a}_i = \max\{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}x_j | x_k \in [c_k - l_k, c_k + l_k],\ k = 1, \ldots, m\} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}c_j + \max\{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}z_j | z_k \in [-l_k, l_k],\ k = 1, \ldots, m\} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}c_j + \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|l_j$, $\underline{a}_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}c_j - \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|l_j$, $c_k = (\underline{x}_k + \overline{x}_k)/2$, $l_k = (\overline{x}_k - \underline{x}_k)/2$, $k = 1, \ldots, m$.

Определим правила композиции классов эквивалентности, исходя из одноименных операций на Int. Сложение:

$$\{[\underline{x}_1, \overline{x}_1]\} + \{[\underline{x}_2, \overline{x}_2]\} =$$
$$= \{[\underline{x}_1, \overline{x}_1] + [\underline{x}_2, \overline{x}_2]\} \doteq \{\{c, l\}, c = c_1 + c_2, 0 \leqslant l < \infty\}. \quad (6.10.17)$$

Умножение на число $a \in \mathcal{R}^1$:

$$a \cdot \{[\underline{x}_1, \overline{x}_1]\} = \{a \cdot [\underline{x}_1, \overline{x}_1]\} \doteq \{\{c, l\},\ c = ac_1,\ 0 \leqslant l < \infty\}. \quad (6.10.18)$$

Нетрудно убедиться, что $a(\{[x_1, x_2] + [y_1, y_2]\}) = a\{[x_1, x_2]\} +$

$+ a\{[y_1, y_2]\}$ и $(a+b)\{[\underline{x}, \overline{x}]\} = a\{[\underline{x}, \overline{x}]\} + b\{[\underline{x}, \overline{x}]\}$.

Так как $\{[x_1, x_2]\} + \{[0,0]\} = \{[x_1, x_2]\}$ и $0 \cdot \{[x_1, x_2]\} = \{[0,0]\}$, то множество классов эквивалентности относительно операций (6.10.17), (6.10.18) является линейным пространством, класс $\{[0,0]\}$ — его нулевой элемент. Это линейное пространство изоморфно $\mathcal{R}^1$, класс $\{[x_1, x_2]\}$ определяется числом $c = (x_1 + x_2)/2$, сумме классов $\{[x_1, x_2]\}$ и $\{[y_1, y_2]\}$ отвечает число $(x_1 + x_2)/2 + (y_1 + y_2)/2$, классу $a \cdot \{[x_1, x_2]\}$ — число $a(x_1 + x_2)/2$.

Заметим, что $[x_1, x_2] \sim [y_1, y_2]$, если и только если $[y_1, y_2] - [x_1, x_2] \in$ $\in \{[0,0]\}$.

6.10.2. Интервальное оценивание. Рассмотрим измерительный эксперимент, выполняемый по схеме

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\gamma_j + \nu_i, \; i = 1, \ldots, n, \tag{6.10.19}$$

в которой $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$ и $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$ — независимые *интервальные нечеткие векторы со значениями в $\mathcal{R}^n$ и соответственно в $\mathcal{R}^m$, распределенные согласно равенствам*

$$f^{\nu}(x) = \min\{f^{\nu_1}(x_1), \ldots, f^{\nu_n}(x_n)\} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in [\underline{\nu}_i, \overline{\nu}_i], \; i = 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{если иначе}, \end{cases} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n,$$

$$f^{\gamma}(g) = \min\{f^{\gamma_1}(g_1), \ldots, f^{\gamma_n}(g_m)\} = \tag{6.10.20}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } g_j \in [\underline{\gamma}_j, \overline{\gamma}_j], \; j = 1, \ldots, m, \\ 0, & \text{если иначе}, \end{cases} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^m.$$

В схеме (6.10.19) нечеткий вектор $\gamma \in \mathcal{R}^m$ моделирует измеряемый в эксперименте сигнал, поступивший на вход измерительного преобразователя $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^n$, нечеткий вектор $\nu \in \mathcal{R}^n$ моделирует измерительную погрешность, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n$ — результат измерения; согласно (6.10.19)

$$\xi = A\gamma + \nu, \tag{6.10.19*}$$

подробнее см. гл. 7.

Обозначим $[A, I_\nu, I_\gamma]$ интервальную модель схемы измерения (6.10.19), в которой $I_\nu = [\underline{\nu}, \overline{\nu}] = \begin{pmatrix} I_{\nu_1} \\ \vdots \\ I_{\nu_n} \end{pmatrix}$, где $I_{\nu_i} = [\underline{\nu}_i, \overline{\nu}_i]$, $i = 1, \ldots, n$, $I_\gamma = [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}] = \begin{pmatrix} I_{\gamma_1} \\ \vdots \\ I_{\gamma_m} \end{pmatrix}$, где $I_{\gamma_j} = [\underline{\gamma}_j, \overline{\gamma}_j]$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть

$$\mathcal{M}(A, I_\nu, I_\gamma|x) = \{g \in \mathcal{R}^m,\ \underline{\gamma}_j \leqslant g_j \leqslant \overline{\gamma}_j,\ j = 1, \ldots, m,\ x_i - \overline{\nu}_i \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij} g_j \leqslant x_i - \underline{\nu}_i,\ i = 1, \ldots, n\},\ x \in \mathcal{R}^n, \quad (6.10.21)$$

тогда согласно равенствам в (6.10.19), (6.10.2), (6.10.21)

$$f^{\gamma|\xi}(g|x) = \begin{cases} 1, & \text{если } g \in \mathcal{M}(A, I_\nu, I_\gamma|x), \\ 0, & \text{если } g \notin \mathcal{M}(A, I_\nu, I_\gamma|x), \end{cases} \quad g \in \mathcal{R}^m, \quad (6.10.22)$$

— распределение переходной возможности значений измеряемого в (6.10.19) сигнала γ, где $\xi = x \in \mathcal{R}^n$ — результат измерения. *Любой вектор g из множества $\mathcal{M}(A, I_\nu, I_\gamma|x)$ можно выбрать в качестве оценки значения измеренного по схеме* (6.10.19) *сигнала γ.*

Ниже рассмотрены две задачи в определенном смысле *оптимального выбора* $\gamma \in \mathcal{M}(A, I_\nu, I_\gamma|\xi)$ и *определения* сопутствующих такому выбору *неизбежной* или *возможной* ошибок оценивания.

Пусть X_i — интервал $[x_i - \overline{\nu}_i, x_i - \underline{\nu}_i]$, $i = 1, \ldots, n$, и I_j — любой интервал, содержащий γ_j, $j = 1, \ldots, m$.

Если $I_j \doteq \{c_j, l_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, то согласно (6.10.16) и (6.10.21) система линейных неравенств

$$x_i - \overline{\nu}_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j - \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| l_j \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j + \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| l_j \leqslant x_i - \underline{\nu}_i,\ i = 1, \ldots, n; \quad (6.10.23)$$

$$\underline{\gamma}_j \leqslant c_j - l_j \leqslant c_j + l_j \leqslant \overline{\gamma}_j,\ 0 \leqslant l_j < \infty,\ j = 1, \ldots, m,$$

задает область $\mathcal{D}(A, I_\gamma, I_\nu|x)$ значений $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ и *$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$, определенную результатом измерения $\xi = x \in \mathcal{R}^n$* в (6.10.19*), *при которых прямоугольный параллелепипед $I_1 \times \ldots \times I_m$ содержится* в *$\mathcal{M}(A, I_\gamma, I_\nu \mid x)$.*

Рассмотрим задачу интервального оценивания координат вектора $\gamma \in \mathcal{R}^m$, в которой требуется определить интервалы $I_1, \ldots, I_m$, удовлетворяющие условиям (6.10.23) и имеющие *максимальные длины*. Такие интервалы определят названную *неизбежной* погрешность оценивания координат, основанного на данных измерений $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n$, выполненных по схеме (6.10.19). Если максимальные длины интервалов $I_1, \ldots, I_m$ определить, решив m задач линейного программирования

$$\max_{(c,l) \in \mathcal{D}(A, I_\gamma, I_\nu | x)} l_j = l_j^*(x), \; j = 1, \ldots, m, \tag{6.10.24}$$

то их решения $c_j^*(x)$, $l_j^*(x)$, $j = 1, \ldots, m$, определят интервалы $I_j^*(x) \doteq \{c_j^*(x), l_j^*(x)\}$, $j = 1, \ldots, m$, как *интервальные оценки координат* $\gamma_j \in I_j^*(x)$, $j = 1, \ldots, m$, *вектора* γ, отвечающие результату измерения $\xi = x$ в (6.10.19*), при этом *оптимальной оценкой координаты* γ_j *будет центр* $c_j^*(x)$ *интервала* $I_j^*(x)$, *а его полудлина* $l_j^*(x)$ *оценит неизбежную погрешность интерпретации* $c_j^*(x)$ *как значения* γ_j, $j = 1, \ldots, m$,

$$|\gamma_j - c_j^*(x)| \leqslant l_j^*(x), \tag{6.10.25}$$

см. рис. 6.10.9.

Задачу оптимального выбора γ как задачу его интервального оценивания *с гарантированной точностью* и определения *возможной* погрешности, поставим как m задач на минимум $l_j \sim \min, j = 1, \ldots, m$, при условии $\mathcal{M}(A, I_\gamma, I_\nu | x) \subset [c_1 - l_1, c_1 + l_1] \times \ldots \times [c_m - l_m, c_m + l_m]$, определяющем минимальный по включению прямоугольный параллелепипед, содержащий $\mathcal{M}(A, I_\gamma, I_\nu | x)$. Каждое решение $\widehat{c}_j(x), \widehat{l}_j(x)$ определит интервальную оценку $\widehat{I}_j(x) \doteq \{\widehat{c}_j(x), \widehat{l}_j(x)\}$ координаты γ_j, отвечающую результату измерения $\xi = x$ в (6.10.19*), центр $\widehat{c}_j(x)$ интервала $\widehat{I}_j(x)$ оценит γ_j с *возможной* погрешностью $\widehat{l}_j(x)$,

$$|\gamma_j - \widehat{c}_j(x)| \leqslant \widehat{l}_j(x), \; j = 1, \ldots, m. \tag{6.10.25*}$$

В качестве примера рассмотрим модель $[A, I_\gamma, I_\nu] = [A, I_\nu]$, не содержащую априорных ограничений на $\gamma \in \mathcal{R}^m$, в которой A — невырожденная матрица $m \times m$. В этом случае все значения γ априори равновозможны, согласно (6.10.19) при $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_m = x_m$ $\gamma_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji}^-(x_i - \nu_i)$, $j = 1, \ldots, m$, где a_{ji}^-, $j, i = 1, \ldots, m$, — матричные элементы матрицы A^{-1}, согласно (6.10.16*), (6.10.22)

$$\mathcal{M}(I_\gamma, I_\nu | x) = \mathcal{M}(I_\nu | x) = \{g = A^{-1}(x - y), y \in [\underline{\nu}_1, \overline{\nu}_1] \times \ldots \times [\underline{\nu}_m, \overline{\nu}_m]\} \tag{6.10.26}$$

— параллелепипед в $\mathcal{R}^m$, образ прямоугольного параллелепипеда $[\underline{\nu}_1, \overline{\nu}_1] \times \ldots \times [\underline{\nu}_m, \overline{\nu}_m] \subset \mathcal{R}^m$ при отображении $A^{-1}\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^m$, и согласно (6.10.16) минимальный по включению прямоугольный параллелепипед

$$[\widehat{c}_1(x) - \widehat{l}_1(x), \widehat{c}_1(x) + \widehat{l}_1(x)] \times \ldots \times [\widehat{c}_m(x) - \widehat{l}_m(x), \widehat{c}_m(x) + \widehat{l}_m(x)] = \\ = A^{-1}(x - I_\nu) = A^{-1} \begin{pmatrix} [x_1, x_1] - I_{\nu_1} \\ \vdots \\ [x_m, x_m] - I_{\nu_m} \end{pmatrix}, \quad (6.10.27)$$

содержащий $\mathcal{M}(I_\nu|x)$, определится равенствами

$$\widehat{c}_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ji}^{-}(x_i - (\underline{\nu}_i + \overline{\nu}_i)/2), \quad (6.10.28)$$

$$\widehat{l}_j(x) = \widehat{l}_j = \sum_{i=1}^{m} |a_{ji}^{-}|(\overline{\nu}_i - \underline{\nu}_i)/2, j = 1, \ldots, m.$$

При этом «точечной» оценкой γ_j будет центр $\widehat{c}_j(x)$ интервала $\widehat{I}_j(x)$, а его полудлина $\widehat{l}_j$ определит ее *возможную* погрешность, $\widehat{I}_j(x) \doteq \{\widehat{c}_j(x), \widehat{l}_j\}$ — интервальная оценка γ_j, $j = 1, \ldots, m$, при $\xi = x$ в (6.10.19*).

Сравним этот результат с тем, что в этом случае дает решение задачи (6.10.24), которое в рассматриваемом примере также может быть получено аналитически. Рассмотрим условия (6.10.23), исключив неравенства $\underline{\gamma}_j \leqslant c_j - l_j \leqslant c_j + l_j \leqslant \overline{\gamma}_j$, $j = 1, \ldots, m$, и записав оставшиеся условия, определяющие область $\mathcal{D}(A, I_\nu|x)$, как ограничения на $l_1, \ldots, l_m$:

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|l_j \leqslant x_i - \underline{\nu}_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j,$$
$$\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|l_j \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j - x_i + \overline{\nu}_i, \ i = 1, \ldots, m,, \ 0 \leqslant l_j, \ j = 1, \ldots, m,$$

или короче, как

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|l_j \leqslant \min(x_i - \underline{\nu}_i - q_i, \ q_i - x_i + \overline{\nu}_i), \ i = 1, \ldots, m, \quad (6.10.29)$$

где

$$q_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j, \ i = 1, \ldots, m. \quad (6.10.30)$$

Поскольку речь идет о задаче (6.10.24), в которой максимум вычисляется на множестве $\mathcal{D}(A, I_\nu|x)$, $q_1, \ldots, q_m$ в (6.10.29) следует определить из условий

$$\min(x_i - \underline{\nu}_i - q_i, \ q_i - x_i + \overline{\nu}_i) \sim \max_{q_i}, \ i = 1, \ldots, m. \quad (6.10.31)$$

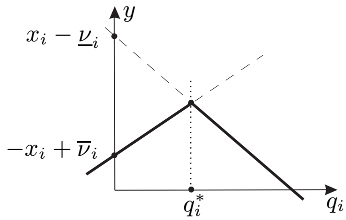


Рис. 6.10.7. График левой части в (6.10.31)

Нетрудно заметить (см. рис. 6.10.7), что при каждом $i = 1, \ldots, m$, максимум в (6.10.31) достигается при q_i, удовлетворяющем условию $x_i - \underline{\nu}_i - q_i = q_i - x_i + \overline{\nu}_i$, $i = 1, \ldots, m$, т. е. при

$$q_i = q_i^*(x) = x_i - (\overline{\nu}_i + \underline{\nu}_i)/2, \ i = 1, \ldots, m. \qquad (6.10.32)$$

Так как матрица $\{a_{ij}\}$ в (6.10.31) невырожденная, то существуют единственные $c_1^*(x), \ldots, c_m^*(x)$, при которых в (6.10.30)

$$c_j = c_j^*(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}^- q_k^*(x), \ j = 1, \ldots, m, \qquad (6.10.33)$$

где $\{a_{ij}^-\}$ — матрица, обратная $\{a_{ij}\}$, а условия (6.10.29) при $q_k = q_k^*(x)$, $k = 1, \ldots, m$, (6.10.32), обретают вид

$$\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| l_j \leqslant \delta_j = (\overline{\nu}_i - \underline{\nu}_i)/2, \ j = 1, \ldots, m. \qquad (6.10.34)$$

Согласно (6.10.34) $l_j^{(i)} = \delta_i / |a_{ij}|$ — максимальное значение $l_j \geqslant 0$, удовлетворяющее i-му ограничению (6.10.34) (при $l_i = 0$, $i \neq j$, $i = 1, \ldots, m$). Следовательно, максимальное значение l_j, удовлетворяющее всем ограничениям (6.10.34), есть

$$l_j^* = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} (\overline{\nu}_i - \underline{\nu}_i)/(2|a_{ij}|), \ j = 1, \ldots, m, \qquad (6.10.35)$$

см. рис. 6.10.8.

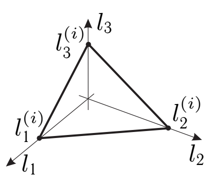


Рис. 6.10.8. Треугольник $\sum\limits_{j=1}^{3} |a_{ij}| l_j = \delta_i$, $l_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3$; $l_j^{(i)} = \delta_i / |a_{ij}|$, $j = 1, 2, 3$

Подведем итоги.

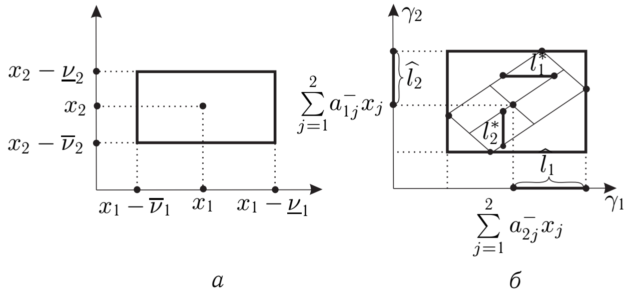


Рис. 6.10.9. *а*) Прямоугольник $[x_1-\overline{\nu}_1,\, x_1-\underline{\nu}_1]\times[x_2-\overline{\nu}_2,\, x_2-\underline{\nu}_2]$, определенный левой и правой границами ограничений в (6.10.23), $\underline{\nu}_1=-\overline{\nu}_1$, $\underline{\nu}_2=-\overline{\nu}_2$; *б*) его «векторный» образ $A^{-1}[x_1-\overline{\nu}_1,\, x_1-\underline{\nu}_1]\times[x_2-\overline{\nu}_2,\, x_2-\underline{\nu}_2]$ (параллелограмм (6.10.26)), его «интервальный» образ, см. (6.10.16) $A^{-1}\begin{pmatrix}[x_1-\overline{\nu}_1, x_1-\underline{\nu}_1]\\ [x_2-\overline{\nu}_2, x_2-\underline{\nu}_2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[c_1(x)-\widehat{l}_1, c_1(x)+\widehat{l}_1]\\ [c_2(x)-\widehat{l}_2, c_2(x)+\widehat{l}_2]\end{pmatrix}$ (прямоугольник $[c_1(x)-\widehat{l}_1, c_1(x)+\widehat{l}_1]\times[c_2(x)-\widehat{l}_2, c_2(x)+\widehat{l}_2]$) (6.10.27), (6.10.28), $c_i(x)=(A^{-1}x)_i$, $i=1,2$, и полудлины $\widehat{l}_i$, l_i^*, $i=1,2$, интервалов $[c_1-\widehat{l}_1, c_1+\widehat{l}_1]$ и $[c_1-l_1^*, c_1+l_1^*]$ соответственно, оценивающих γ_1, и $[c_2-\widehat{l}_2, c_2+\widehat{l}_2]$ и $[c_2-l_2^*, c_2+l_2^*]$, оценивающих γ_2. l_i^* — неизбежная, $\widehat{l}_i$ — возможная ошибки оценивания координаты γ_i, $i=1,2$, см. (6.10.25) и (6.10.25*)

Теорема 6.10.1. *Пусть в модели* $[A, I_\gamma]$ A — *невырожденная матрица* $m\times m$, *область* $\mathcal{D}(A, I_\gamma, I_\nu \mid x)\neq\varnothing$ *и определена условиями* (6.10.23), *из которых исключены неравенства* $\underline{\gamma}_j\leqslant c_j-l_j\leqslant c_j+l_j\leqslant\overline{\gamma}_j$, $j=1,\ldots,m$. *Тогда задачи* (6.10.24), *определяющие оценки* $c_j^*(x)$ *и их «неизбежные» погрешности* l_j^*, $j=1,\ldots,m$, *см.* (6.10.25), *разрешимы и равенства* (6.10.33), (6.10.35) *определяют их решения, а решение задачи построения минимального по включению прямоугольного параллелепипеда, содержащего параллелепипед* $\mathcal{M}(I_\nu|x)$ *и определяющего оценки* $\widehat{c}_j(x)$ *и их возможные погрешности* $\widehat{l}_j(x)$, $j=1,\ldots,m$, *см.* (6.10.25*), *дано формулами* (6.10.28), *см. рис.* 6.10.9.

Глава 7

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Введение

Рассмотрим характерную для экспериментальных исследований схему измерительного эксперимента «измеряемый объект–среда–измерительный преобразователь–вычислительный преобразователь», представленную на рис. 7.0.1.

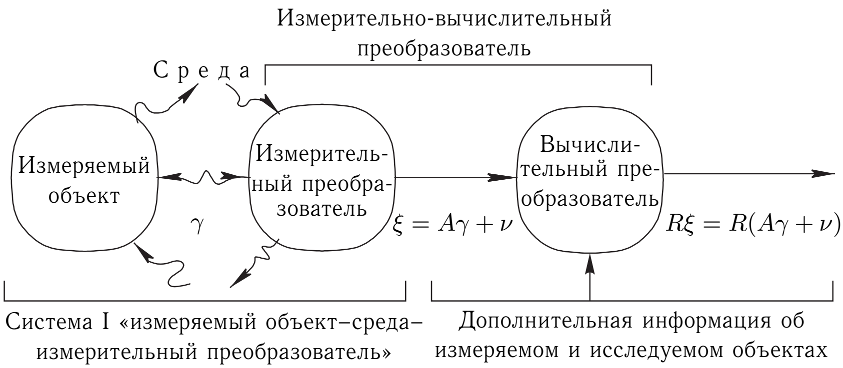


Рис. 7.0.1. γ — входной сигнал измерительного преобразователя (И. П.), сформированный в системе «измеряемый объект–среда–И. П.», ξ — его выходной сигнал, поступающий в вычислительный преобразователь (В. П.), ν — шум преобразования, $R\xi$ — выходной сигнал измерительно-вычислительного преобразователя (И.-В. П.) [50]

Выделим в ней систему «измеряемый объект–среда–измерительный преобразователь», которую назовем системой I, и выполняющий *функции средства измерений* измерительно-вычислительный преобразователь (И.-В. П.), включающий И. П. и В. П.; И. П. является преобразователем специфического для измерений воздействия — радиационного, теплового, механического или какого-либо другого — в электрический сигнал. В В. П. электрический сигнал подвергается преобразованию, которое должно извлечь из него все то, что интересует исследователя, и облечь это в форму, удобную как для предметной интерпретации, так и для диалога исследователя с И.-В. П.

В результате взаимодействия измеряемого объекта, среды и И. П. в системе I на входе И. П. формируется (измеряемый) сигнал γ, несущий информацию об измеряемом объекте и среде. И. П. преобразует γ в электрический сигнал ξ (*результат измерения*) по схеме

$$\xi = A\gamma + \nu, \tag{7.0.1}$$

где A — оператор, моделирующий физические процессы в И. П., *взаимодействующем с измеряемым объектом и со средой*, определяющие преобразование воздействия γ в электрический сигнал $A\gamma$, ν — погрешность преобразования, шум.

На уровне системы I *все процессы контролируются физическими законами* со свойственными им хорошо известными ограничениями и запретами: термодинамическими, дифракционными, квантовыми и т. п.[1]), на уровне В. П. решающую роль играют *математические свойства используемой физической модели и алгоритма решения задачи предметной интерпретации измерений*. Последний, как правило, призван извлечь из ξ и из другой доступной информации о системе I как можно более точные значения представляющих интерес характеристик объекта, причем — не *измеряемого*, характеристики которого искажены, а *исследуемого*, не искаженного измерением в виртуальной системе II «исследуемый объект–среда» (см. рис. 7.0.2), обозначим их η.

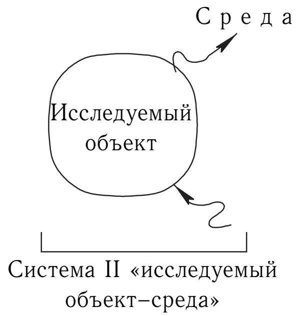


Рис. 7.0.2. Виртуальная система «исследуемый объект–среда», не искаженная измерением, характеризующая исследуемый объект в его естественном состоянии

Для решения задачи интерпретации измерений необходима *математическая модель*, связывающая физические процессы в системах I и II и позволяющая (при определенных условиях) выразить важные

[1]) Как известно, например, явление дифракции света ограничивает предельную разрешающую способность оптических приборов; термодинамические шумы, квантовые флуктуации ограничивают предельную чувствительность приемников оптического излучения, используемых в этих приборах.

для модельера-исследователя (м.-и.) характеристики η исследуемого объекта в системе II через измеряемый в (7.0.1) сигнал γ с учетом дополнительной (априорной) информации о системе I.

Назовем *моделью* (*схемы*) *измерения математическую модель* И. П., взаимодействующего с измеряемым объектом и со средой, связывающую его входной γ и выходной ξ сигналы и учитывающую дополнительную, как правило, априорную информацию о системе I.

Моделью интерпретации входного сигнала И. П. назовем *математическую модель*, связывающую сигнал γ, сформированный в системе I, и характеристики η исследуемого объекта в системе II. Модель измерения, связывающая ξ и γ, и модель интерпретации входного сигнала И. П., связывающая γ и η, позволяют получить *модель интерпретации измерения*, связывающую ξ и η. Наконец, *математическую модель*, связывающую значения ξ, γ и η, назовем *моделью измерительного эксперимента* (М. И. Э.), *средством измерения* в котором является И.-В. П.

Пусть, например, модель интерпретации γ задана равенством $\eta = U\gamma$, в котором оператор U определяет *математическую модель идеального* И. П., взаимодействующего с *измеряемым* объектом и со средой точно так же, как И. П. в системе I. Поэтому на входе U, как и на входе И. П. — сигнал γ, но на его выходе — характеристики η *исследуемого* объекта в системе II, см. рис. 7.0.3.

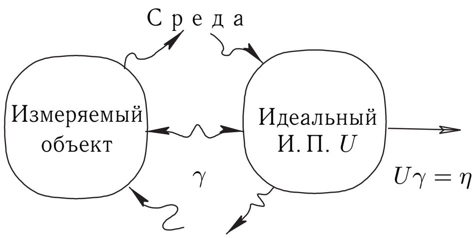


Рис. 7.0.3. Система «измеряемый объект–среда–идеальный И. П.»; на рис. 7.0.1 $R\xi$ — наиболее точная версия $U\gamma$

Как правило, *такой* И. П. не может быть реализован «в железе», поскольку его действие, вообще говоря, противоречит физическим законам, но при известных условиях он может быть *синтезирован* И.-В. П., его выходной сигнал может быть «вычислен» В. П., назначение которого — *моделировать процессы*, *свойственные виртуальной системе* II, *на основе измерений*, *выполняемых в реальной системе* I, *и дополнительной информации*.

Подчеркнем, что в общем случае идеальный И. П. U и И. П. в И.-В. П. суть средства измерения разного назначения.

Рассмотрим некоторые важные аспекты *понятия качества* М. И. Э., характеризующие, в частности, критерий ее *адекватности цели исследований*, *обусловившей* проведение измерительного эксперимента (И. Э.). Для этого определим понятия *тестового* *измерительного эксперимента* (Т. И. Э.) и *тестового вычислительного эксперимента* (Т. В. Э.), *тестирующих* М. И. Э. Условимся считать, что система I на рис. 7.0.1 характеризует измеряемый объект и условия его измерения, система II на рис. 7.0.2 характеризует объект в его естественном состоянии как объект исследуемый, а *обе системы определяют условия*, обозначим их Φ, и *указанную модельером-исследователем* (м.-и.) *их часть* $\eta \subset \Phi$ в качестве *условий выполнения как* Т. И. Э., *так и* Т. В. Э. Последний *на основе тестируемой* М. И. Э. *численно моделирует* как прогнозируемое значение результата ξ Т. И. Э., так и оценку характеристик исследуемого объекта $\eta \subset \Phi$, получаемую на выходе В. П., см. рис. 7.0.1.

В *режиме тестирования* М. И. Э. фиксируются условия Φ и выделяется их часть $\eta \subset \Phi$, представляющая интересы м.-и., «запускаются» Т. И. Э. и Т. В. Э. и сравниваются их «наблюдаемые результаты». В Т. И. Э. наблюдаемыми считаются: результат измерения ξ и часть η условий Φ выполнения Т. И. Э., а в Т. В. Э. наблюдаемыми считаются: вычисленный на основе М. И. Э. результат измерения $\widetilde{\xi}$, прогнозирующий ξ, и результат вычисления $\widetilde{\eta} = R\xi$, см. рис. 7.0.1, оценивающий $\eta \subset \Phi$; в данном случае $\widetilde{\xi}$ — результат *прямого математического моделирования* ξ, $\widetilde{\eta} = R\xi$ — результат *обратного математического моделирования* $\eta \subset \Phi$.

Разумеется, для реализации режима тестирования М. И. Э. последняя должна:

► не противоречить результату измерения ξ, значение которого должно удовлетворять априорным условиям, определенным М. И. Э.;

► допускать компьютерное моделирование прогнозирования ξ и оценивания η, причем и то и другое — с *максимальной гарантированной точностью* [1]), и

► допускать эмпирическую проверку *качества прогнозирования и оценивания*.

Если эти условия выполнены, то м.-и. может сформулировать критерии «приемлемого качества» прогнозирования и оценивания, в простейшем случае, например, в терминах «хорошо» и «плохо», и классифицировать результаты тестирования М. И. Э. по следующей схеме: согласно результатам Т. И. Э. и Т. В. Э. тестируемая М. И. Э.

► прогнозирует измеренное значение ξ вычисленным значением $\widetilde{\xi}$ хорошо (Х), плохо (П);

► оценивает известное $\eta \in \Phi$ вычисленным $\widetilde{\eta} = R\xi$ хорошо (Х), плохо (П).

[1]) Это условие определяет жесткие требования к качеству вычислений и к оптимальности математических методов и алгоритмов прогнозирования и оценивания, реализуемых Т. В. Э. и В. П. на рис. 7.0.1.

Тогда результаты тестирования М. И. Э.:

► (Х,Х) означают, что М. И. Э. адекватна цели исследований, согласно которой планировалось прогнозировать результат ξ измерения в системе I и оценивать указанные м.-и. характеристики η исследуемого объекта в системе II, см. рис. 7.0.1, 7.0.2;

► (Х,П) означают, что М. И. Э. адекватна цели исследований, согласно которой планировалось только прогнозировать результат измерения ξ в системе I. В этом случае адекватна модель ИП, взаимодействующего с измеряемым объектом и со средой, т. е. модель измерения, связывающая ξ и γ;

► (П,Х) означают, что М. И. Э. адекватна цели исследований, согласно которой по результату измерения в системе I планировалось только оценивать указанные м.-и. характеристики исследуемого объекта в системе II. В этом случае адекватна модель интерпретации измерения, связывающая ξ и η;

► (П,П) означают, что М. И. Э. не адекватна ни одной из названных целей.

Согласно точке зрения на математическое моделирование как на *информационную технологию получения новых знаний*, прямое моделирование, как источник новых знаний, позволяет уточнить математические модели Т. И. Э. и И. П., взаимодействующего с измеряемым объектом и со средой, прогнозировать результаты измерительных экспериментов, в том числе «виртуальных», когда их «техническая» постановка невозможна, и т.д. Обратное моделирование — источник новых знаний о недоступных для измерения характеристиках исследуемого объекта, извлекаемых из результата измерительного же эксперимента; как правило, именно с этой целью ставится измерительный эксперимент, средством измерения в котором является И.-В. П., см. § 7.8.

Математические методы решения задач интерпретации измерений для стохастических, интервальных и других моделей рассмотрены в монографиях [47, 49, 50], а в этой главе, в [117] и в монографиях [42, 43] — для возможностных моделей, причем в § 7.2, 7.3, 7.4 качество решения охарактеризовано значением необходимости и (или) возможности потерь, а в § 7.5 — величиной ошибки. В § 7.6, 7.7 рассмотрены методы восстановления функциональных зависимостей и прогнозирования.

7.1. Возможностные модели измерения и его интерпретации

Рассмотрим возможностную *модель измерительного эксперимента* $(\mathcal{X} \times \mathcal{G} \times \mathcal{U}, \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{G} \times \mathcal{U}), \mathrm{P}^{(\xi,\gamma,\eta)})$, заданную *совместным распределением возможностей значений следующих нечетких элементов*: выходного сигнала ξ И. П., его входного сигнала γ, сформированного в системе I, и характеристик η исследуемого объекта [1])

$$f^{\xi,\gamma,\eta}(x,g,u),\ (x,g,u)\in\mathcal{X}\times\mathcal{G}\times\mathcal{U}. \tag{7.1.1}$$

Значение $f^{\xi,\gamma,\eta}(x,g,u)$ равно возможности равенств $\xi=x$, $\gamma=g$, $\eta=u$, нечеткий элемент (ξ,γ,η) является каноническим для $(\mathcal{X}\times\mathcal{G}\times\mathcal{U}$, $\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{G}\times\mathcal{U}),\mathrm{P}^{(\xi,\gamma,\eta)})$. Маргинальные распределения

$$\begin{aligned} f^{\xi,\gamma}(x,g)&=\sup_{u\in\mathcal{U}} f^{\xi,\gamma,\eta}(x,g,u),\ (x,g)\in\mathcal{X}\times\mathcal{G},\\ f^{\xi,\eta}(x,u)&=\sup_{g\in\mathcal{G}} f^{\xi,\gamma,\eta}(x,g,u),\ (x,u)\in\mathcal{X}\times\mathcal{U}, \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

определяют *возможностную модель* $(\mathcal{X}\times\mathcal{G},\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{G}),\mathrm{P}^{(\xi,\gamma)})$ И. П. *в системе* I (в прямом моделировании) *и, соответственно, возможностную модель интерпретации измерения* $(\mathcal{X}\times\mathcal{U},\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{U}),\mathrm{P}^{(\xi,\eta)})$, позволяющую, в частности, получить оценку значения характеристик $\eta=u$ объекта в системе II (в обратном моделировании), основанную на результате измерения $\xi=x$ в системе I. При этом, исходя из априорного распределения сигнала ξ

$$f^{\xi}(x)=\sup_{g\in\mathcal{G}} f^{\xi,\gamma}(x,g),\quad x\in\mathcal{X}, \tag{7.1.3}$$

можно оценить и *непротиворечивость модели измерительного эксперимента. Если, например,* $\xi=x$ *— результат измерения и* $f^{\xi}(x)=0$, *то модели измерительного эксперимента в* (7.1.1), ИП и интерпретации измерения в (7.1.2) *следует признать противоречивыми.*

Задачу интерпретации измерения будем понимать как задачу *оптимального оценивания* характеристик исследуемого объекта, минимизирующего, например, *возможность потерь*, $\mathrm{PL}(d(\cdot)) = \sup_{x\in\mathcal{X},\, u\in\mathcal{U}}\min\{f^{\xi,\eta}(x,u),\mathrm{pl}(u,d(x))\}\sim\min_{d(\cdot)\colon\mathcal{X}\to\mathcal{U}}$, обусловленных ошибкой оценивания, или минимизирующего *дуальную* $\mathrm{PL}(\cdot)$ *их необходимость* $\mathrm{NL}(d(\cdot))=\inf_{x\in\mathcal{X},\, u\in\mathcal{U}}\max\{\theta\circ f^{\xi,\eta}(x,u),\mathrm{nl}(u,d(x))\}\sim\min_{d(\cdot)\colon\mathcal{X}\to\mathcal{U}}$ и т. д., см. § 6.3, 6.6 гл. 6. Здесь (решающая) функция $d(\cdot)\colon\mathcal{X}\to\mathcal{U}$ определяет модель интерпретации измерения, как правило, — оценивания, согласно которому результату измерения $\xi=x$ ставится в соответствие значение $\eta=u=d(x)$ характеристик исследуемого объекта. Оптимальные правила $d^*(\cdot)$ и $d_*(\cdot)$ определяются из условия $\mathrm{PL}(d^*(\cdot)) = \min_{d(\cdot)}\mathrm{PL}(d(\cdot))$, минимизирующего возможность потерь, и — из условия $\mathrm{NL}(d_*(\cdot))=\min_{d(\cdot)}\mathrm{NL}(d(\cdot))$, минимизирующего необходимость потерь. Если множество $\mathcal{D}_*$ решений последней задачи содержит более одного решения $d_*(\cdot)$ и $d^*(\cdot)\in\mathcal{D}_*$, то оптимальное правило оценивания $d_*^*(\cdot)$

[1]) На рис. 7.0.1, 7.0.3 операторы $A\colon\mathcal{G}\to\mathcal{X}$, $R\colon\mathcal{X}\to\mathcal{U}$, $U\colon\mathcal{G}\to\mathcal{U}$.

может быть найдено из условия $\mathrm{PL}(d_*^*((\cdot)) = \min\limits_{d_*(\cdot)\in\mathcal{D}_*} \mathrm{PL}(d_*(\cdot)) = \mathrm{PL}(d^*(\cdot))$, см. рис. 7.2.1. Значения $d^*(x)$, $d_*(x)$ и $d_*^*(x)$ вычисляются В. П. и определяют выходные сигналы И.-В. П. как оптимальные оценки выходного сигнала *идеального* И. П., отвечающие каждому результату измерения $\xi = x$, $x \in X$.

Для получения распределения (7.1.1), определяющего модель измерительного эксперимента, заметим, что система I на рис. 7.0.1 может быть охарактеризована парой нечетких элементов ξ, γ, и ее модель (модель И. П. и измерения в прямом моделировании) естественно задать распределением переходной возможности, см. § 1.10.4 гл. 1,

$$f^{\xi|\gamma}(x\,|\,g),\ x \in \mathcal{X},\ g \in \mathcal{G}, \tag{7.1.4}$$

определяющей зависимость распределения нечеткого элемента ξ от значения $g \in \mathcal{G}$ нечеткого элемента γ, и распределением

$$f^{\gamma}(g), \quad g \in \mathcal{G}, \tag{7.1.5}$$

представляющим априорную информацию о возможных значениях сигнала γ, сформированного в системе I. Равенство

$$f^{\xi,\gamma}(x,g) = \min\{f^{\xi|\gamma}(x\,|\,g), f^{\gamma}(g)\},\ (x,g) \in \mathcal{X}\times\mathcal{G}, \tag{7.1.6}$$

определит распределение пары ξ, γ, т. е. *возможностную модель* И. П. *и измерения в системе* I.

Модель *интерпретации входного сигнала* И. П. удобно охарактеризовать распределением переходной возможности

$$f^{\eta|\gamma}(u\,|\,g),\ u \in \mathcal{U},\ g \in \mathcal{G}, \tag{7.1.7}$$

и априорным распределением (7.1.5). При этом *возможностная модель интерпретации входного сигнала* И. П. будет задана совместным распределением

$$f^{\gamma,\eta}(g,u) = \min\{f^{\eta|\gamma}(u\,|\,g), f^{\gamma}(g)\}, \quad (g,u) \in \mathcal{G}\times\mathcal{U}. \tag{7.1.8}$$

А поскольку, как нетрудно увидеть, распределение переходной возможности

$$f^{\xi|\gamma,\eta}(x\,|\,g,u) = f^{\xi|\gamma}(x\,|\,g),\ x \in \mathcal{X},\ g \in \mathcal{G},\ u \in \mathcal{U}, \tag{7.1.9}$$

не зависит от u, то для распределения (7.1.1), *определяющего модель измерительного эксперимента*, найдем

$$\begin{gathered} f^{\xi,\gamma,\eta}(x,g,u) = \min\{f^{\xi|\gamma}(x\,|\,g), f^{\gamma,\eta}(g,u)\} = \\ = \min\{f^{\xi|\gamma}(x\,|\,g), f^{\eta|\gamma}(u\,|\,g), f^{\gamma}(g)\},\ x \in \mathcal{X},\ g \in \mathcal{G},\ u \in \mathcal{U}. \end{gathered} \tag{7.1.10}$$

Адекватность модели измерительного эксперимента цели исследования исследуется в режиме ее тестирования, описанном во введении.

Пример 7.1.1. Пусть *модель схемы измерения* $\xi = A\gamma + \nu$ (7.0.1) задана оператором $A\colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$, определяющим математическую модель И. П., и распределением $f^{\nu,\gamma}(y,g)$, $y \in \mathcal{X}$, $g \in \mathcal{G}$, характеризующим дополнительную информацию о возможных значениях шума ν на выходе И. П. и сигнала γ на его входе. Тогда *возможностная модель измерения* (7.1.6) будет определена распределением $f^{\xi,\gamma}(x,g) = \sup\{f^{\nu,\gamma}(y,g)\,|\,y\in\mathcal{X}, x = Ag+y\} = f^{\nu,\gamma}(x-Ag,g)$, $x\in\mathcal{X}$, $g\in\mathcal{G}$, причем если как в случае, который будет рассмотрен в § 7.3, ν и γ независимы, то есть если $f^{\nu,\gamma}(y,g) = \min\{f^{\nu}(y), f^{\gamma}(g)\}$, $y\in\mathcal{X}$, $g\in\mathcal{G}$, то

$$f^{\xi,\gamma}(x,g) = \min\{f^{\nu}(x-Ag), f^{\gamma}(g)\}, \quad x\in\mathcal{X},\ g\in\mathcal{G}, \tag{7.1.11}$$

и в (7.1.6) $f^{\xi|\gamma}(x|g) = f^{\nu}(x-Ag)$, $x\in\mathcal{X}$, $g\in\mathcal{G}$. Если в (7.1.7) связь между γ и η «четкая» и задана равенством

$$f^{\eta|\gamma}(u\,|\,g) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = Ug, \\ 0, & \text{если } u \neq Ug,\ g\in\mathcal{G},\ u\in\mathcal{U}, \end{cases} \tag{7.1.12}$$

то распределение $f^{\gamma,\eta}(g,u) = \min\{f^{\eta|\gamma}(u|g), f^{\gamma}(g)\} = \begin{cases} f^{\gamma}(g), & \text{если } u = Ug, \\ 0, & \text{если } u\neq Ug, \end{cases}$ $g\in\mathcal{G}$, $u\in\mathcal{U}$, определит *возможностную модель интерпретации входного сигнала* И. П. (7.1.8). Согласно (7.1.11), (7.1.12) для *возможностной модели измерительного эксперимента* (7.1.10) найдем $f^{\xi,\gamma,\eta}(x,g,u) = \min\{f^{\nu}(x-Ag), f^{\eta|\gamma}(u|g), f^{\gamma}(g)\} = \begin{cases} \min\{f^{\nu}(x-Ag), f^{\gamma}(g)\}, & \text{если } u = Ug, \\ 0, & \text{если } u\neq Ug, \end{cases}$ $x\in\mathcal{X}$, $g\in\mathcal{G}$, $u\in\mathcal{U}$. Поэтому в (7.1.2) $f^{\xi,\eta}(x,u) = \sup\limits_{g\in\mathcal{G}\ \ u=Ug} \min\{f^{\nu}(x-Ag), f^{\gamma}(g)\}$, $x\in\mathcal{X}$, $u\in\mathcal{U}$, и в (7.1.3) $f^{\xi}(x) = \sup\limits_{g\in\mathcal{G}} \min\{f^{\nu}(x-Ag), f^{\gamma}(g)\}$, $x\in\mathcal{X}$.

Далее для краткости возможностной моделью будем называть как пространство с возможностью, так и определяющее его распределение возможностей.

7.2. Редукция измерения при априори произвольном измеряемом сигнале

Пусть в измерительном эксперименте регистрируется

$$\xi = Ag + \nu \tag{7.2.1}$$

— искаженный шумом $\nu\in\mathcal{X}$ выходной сигнал Ag И. П., на вход которого поступил *априори произвольный* сигнал $g\in\mathcal{G}$ от *измеряемого* объекта и среды, $u = Ug\in\mathcal{U}$ — характеристики *исследуемого* объекта, $A\colon\mathcal{G}\to\mathcal{X}$, $U\colon\mathcal{G}\to\mathcal{U}$ — заданные операторы, первый моделирует И. П. в системе I, второй моделирует связь между измеряемым в (7.2.1) сигналом g и характеристиками u *исследуемого* объекта, не возмущенного измерением, $\mathcal{X}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{U}$ — конечномерные евклидовы пространства [49, 50]. В рассматриваемой далее задаче интерпретации измерения (7.2.1) требуется определить правило оценивания $d(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ так, чтобы элемент $d(\xi)$ можно было считать в известном смысле оптимальной версией значения Ug характеристик исследуемого объекта.

Оператор U моделирует то, что в экспериментальных исследованиях называется идеальным И. П., на его выходе исследователь получает значения характеристик исследуемого объекта в системе II, см. рис. 7.0.2, 7.0.3. В такой постановке задача интерпретации измерения называется *задачей редукции измерения* (7.2.1) *к виду, свойственному измерению на идеальном* И. П., *или — задачей редукии* И. П. *в системе* I *к идеальному* И. П. *в системе* II [44, 47, 50, 64]. Задача редукции измерения ξ (7.2.1) решается В. П., выходной сигнал $R\xi = d(\xi)$ которого является оптимальной оценкой выходного сигнала Ug идеального И. П.

Пусть в (7.2.1) $A\colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$ — линейный оператор, ν — нечеткий элемент $\mathcal{X}$, $f^{\nu}(\cdot)\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ — распределение ν, *характеризующее дополнительную информацию о системе* I. Тогда ξ также нечеткий элемент $\mathcal{X}$, $f^{\xi}(x,g) = f^{\nu}(x - Ag)$, $x \in \mathcal{X}$, — распределение ξ, зависящее от $g \in \mathcal{G}$. Обозначим $[A, f^{\nu}(\cdot)]$ модель И. П. в системе I и соответствующей схемы измерения (7.2.1), $[A, f^{\nu}, U]$ обозначим модель интерпретации измерения и соответствующего И.-В. П.

Замечание 7.2.1. Априори произвольный сигнал $g \in \mathcal{G}$ в (7.2.1) можно моделировать как нечеткий элемент в равенстве (7.0.1), принимающий любые значения в $\mathcal{G}$ с возможностью единица, $f^{\gamma}(g) = 1$, $g \in \mathcal{G}$, причем независимо от ν. В таком случае согласно (7.1.11) $f^{\xi,\gamma}(x,g) = f^{\nu}(x - Ag)$, $x \in X$, $g \in \mathcal{G}$, т. е. получаем определенную выше модель $[A, f^{\nu}(\cdot)]$ И. П.

Зададим индикаторную функцию $\mathrm{nl}(\cdot,\cdot) = \mathrm{nl}^{\Lambda}(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to [0,1]$ нечеткого множества Λ со значениями в $\mathcal{P}(\mathcal{U} \times \mathcal{U})$, значение $\mathrm{nl}(Ug, u)$ которой есть необходимость потерь, сопутствующих выбору $u \in \mathcal{U}$ в качестве значения характеристик Ug исследуемого объекта.

Охарактеризуем качество правила $d(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ оценивания значения функции Ug параметра $g \in \mathcal{G}$ распределения $f^{\xi}(x,g) = f^{\nu}(x - Ag)$, $x \in \mathcal{X}$, величиной *необходимости потерь*

$$\mathrm{NL}(d(\cdot)) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \inf_{g \in \mathcal{G}} \max\{\theta \circ f^{\nu}(x - Ag), \mathrm{nl}(Ug, d(x))\}, \qquad (7.2.2)$$

возникающих при использовании $d(\xi)$ *вместо* Ug, где $\theta(\cdot) \in \Theta$, см. § 6.6 гл. 6.

Оптимальное правило $d_*(\cdot)$ определим из условия $\mathrm{NL}(d_*(\cdot)) = \min_{d(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}} \mathrm{NL}(d(\cdot))$. Эта задача рассмотрена в § 6.6.4 гл. 6, согласно полученным там результатам $d_*(x)$, $x \in \mathcal{X}$, можно найти, решив для каждого $x \in \mathcal{X}$ задачу

$$\theta^{-1}\left(\mathrm{N}(d, x)\right) = \sup_{g \in \mathcal{G}} \min\{f^{\nu}(x - Ag), \theta^{-1} \circ \mathrm{nl}(Ug, d)\} \sim \max_{d \in \mathcal{U}}. \quad (7.2.3)$$

Рассмотрим класс задач (7.2.3), в которых

$$\mathrm{nl}(v, u) = \begin{cases} >0, & \text{если } u \neq v, \\ \ \ 0, & \text{если } u = v, \end{cases} \quad (7.2.4)$$

определяет *необходимость потерь* при оценивании $v \in \mathcal{U}$ значением $u \in \mathcal{U}$, $u, v \in \mathcal{U}$. Так как $\max\limits_{d \in \mathcal{U}} \theta^{-1} \circ \mathrm{nl}(Ug, d) = 1$ достигается при единственном $d = Ug$, то $\max\limits_{d \in \mathcal{U}} \sup\limits_{g \in \mathcal{G}} \min\{f^{\nu}(x - Ag), \theta^{-1} \circ \mathrm{nl}(Ug, d)\} = \sup\limits_{g \in \mathcal{G}} \min\{f^{\nu}(x - Ag), \max\limits_{d \in \mathcal{U}} \theta^{-1} \circ \mathrm{nl}(Ug, d)\} = \sup\limits_{g \in \mathcal{G}} f^{\nu}(x - Ag)$. Следовательно, $d_*(x) = Ug(x)$ — оптимальная в смысле (7.2.2), (7.2.3) оценка выходного сигнала идеального И. П., где $g(x)$ — *оценка* g *максимальной возможности*: $f^{\nu}(x - Ag(x)) = \max\limits_{g \in \mathcal{G}} f^{\nu}(x - Ag)$, $x \in \mathcal{X}$.

Пусть $f^{\nu}(\cdot) = r(||\Sigma^{-1/2} \cdot ||)$, где $\Sigma\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — положительно определенный оператор (аналог коррелляционного оператора [1]) ошибки измерения в вероятностной модели $[A, \Sigma]$ схемы измерения (7.2.1), [50]), $\| \cdot \|$ — евклидова норма, $r(\cdot)\colon [0, \infty) \to [0, 1]$ непрерывная строго монотонно убывающая функция, задающая вариант распределения нечеткого вектора $\nu \in \mathcal{X}$, $r(0) = 1$. При таких предположениях задача (7.2.3) эквивалентна задаче отыскания оценки $g \in \mathcal{G}$ максимальной возможности при $\xi = x$ как решения задачи на минимум

$$\|\Sigma^{-1/2}(x - Ag)\| \sim \min_{g \in \mathcal{G}} \quad (7.2.5)$$

и последующего определения $d_*(x) = Ug(x)$, где $g(x)$ — значение g, на котором минимум в (7.2.5) достигается; *решение* $d_*(\cdot)$ *не зависит от выбора функций* $r(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$.

Обозначим $\Sigma^{-1/2}x = y$, $\Sigma^{-1/2}A = B$. При любом $g \in \mathcal{G}$

$$\|y - Bg\|^2 = \|B(B^{-}y - g)\|^2 + \|(I - BB^{-})y\|^2 \geqslant \|(I - BB^{-})y\|^2, \quad (7.2.6)$$

[1] При таком определении распределения $f^{\nu}(\cdot)$ ошибки измерения можно сравнивать результаты редукции для вероятностной $[A, \Sigma]$ и возможностной $[A, f^{\nu}(\cdot)]$ моделей, поскольку в обеих моделях распределения как вероятностей, так и возможностей, ошибки измерения убывают с увеличением $\|\Sigma^{-1/2}x\|$, $x \in \mathcal{X}$, и сохраняют постоянные значения на эллипсоидах $\{x \in \mathcal{X}, \|\Sigma^{-1/2}x\| = \mathrm{const}\}$, причем *распределение* $f^{\nu}(\cdot) = r(\|\Sigma^{-1/2} \cdot \|)$ *является вариантом распределения возможности, продолженной на* $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, *максимально согласованной с «гранулированной» гауссовской вероятностью* $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, см. § 2.6.3 гл. 2, § 3.6, 3.7, 3.8 гл. 3.

причем равенство в (7.2.6) достигается при[1] $g = B^- y + b$, где b — любой вектор из ядра $\mathcal{N}(B)$ оператора B (т. е. такой, что $Bb = 0$). Поэтому минимум в задаче (7.2.5) достигается при $g = g(x) = (\Sigma^{-1/2}A)^- \Sigma^{-1/2} x + b(x)$ и, следовательно, для линейного U

$$d_* = d_*(x) = Ug(x) = U(\Sigma^{-1/2}A)^- \Sigma^{-1/2} x + Ub(x), x \in X. \qquad (7.2.7)$$

Если $\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(U)$, то $Ub = 0$ для любого $b \in \mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A)$, и равенство (7.2.7) определяет единственное оптимальное правило, согласно которому оптимальной оценкой $d_*(\xi)$ значения Ug выходного сигнала идеального И. П. является нечеткий элемент

$$d_*(\xi) = U(\Sigma^{-1/2}A)^- \Sigma^{-1/2} \xi. \qquad (7.2.8)$$

Заметим, что такая же формула определяет наилучшую в среднем квадратичном линейную минимаксную оценку Ug, если в равенстве $\xi = Ag + \nu$ шум ν является случайным элементом с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором Σ [47, 50]. Если равенство $Bb = 0$ не влечет $Ub = 0$, то $d_*(\cdot)$ — не единственное оптимальное правило:

$$d_*(\xi) = U(\Sigma^{-1/2}A)^- \Sigma^{-1/2} \xi + Ua(\xi), \qquad (7.2.9)$$

где $a(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{N}(A)$ — произвольная функция, принимающая значения в $\mathcal{N}(A)$: $Aa(x) = 0$, $x \in \mathcal{X}$. Вероятностный аналог оценки (7.2.9) при таких условиях не существует [44, 47].

При правилах (7.2.8), (7.2.9) *необходимость потерь* $\mathrm{NL}(d_*(\cdot)) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \theta \circ r(\|(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-)\Sigma^{-1/2}x\|) = 0$. Точная нижняя грань здесь равна нулю и достигается на любом $x \in \mathcal{R}(A)$.

Подведем итоги.

Теорема 7.2.1. *Пусть в схеме измерения* (7.2.1) $A\colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$ — *заданный линейный оператор*, g — *априори произвольный элемент* $\mathcal{G}$, ν — *нечеткий элемент* $\mathcal{X}$, $f^\nu(\cdot)\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ — *распределение* ν. *Если* $f^\nu(\cdot) = r(\|\Sigma^{-1/2} \cdot \|)$, *где* $\Sigma\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — *положительно определенный оператор*, $r(\cdot)\colon [0,\infty) \to [0,1]$ — *непрерывная строго монотонно убывающая функция*, $r(0) = 1$, *то оптимальной оценкой* Ug, *где* $U\colon \mathcal{G} \to \mathcal{U}$ — *заданный линейный оператор*, *является любой нечеткий элемент* (7.2.9), *минимизирующий необходимость потерь* (7.2.2), *где функция* $\mathrm{nl}(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to [0,1]$ *удовлетворяет условию* (7.2.4). *В* (7.2.9) $a(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{N}(A)$ — *произвольная функция*; *оптимальной оценкой* Ug, *удовлетворяющей условию* (7.2.3), *является единственный нечеткий элемент* (7.2.8), *если* (*и только если*) $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(U)$.

[1] B^- и B^* — псевдообратный к B и сопряженный с B операторы соответственно, $B^- = \lim_{\alpha \to 0} B^*(BB^* + \alpha I)^{-1} = \lim_{\alpha \to 0} (B^*B + \alpha I)^{-1} B^*$ [47, 61].

Для любой оценки (7.2.9) *необходимость потерь оценивания равна нулю.* ∎

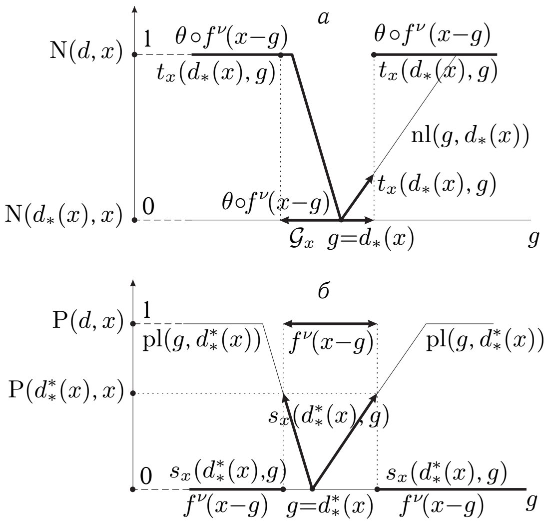


Рис. 7.2.1. Решения $d_*(\cdot)$ и $d_*^*(\cdot)$ задач минимизации *а*) необходимости $\mathrm{NL}(d_*(\cdot)) = \min\limits_{d(\cdot)} \mathrm{NL}(d(\cdot))$ и *б*) возможности $\mathrm{PL}(d_*^*(\cdot)) = \min\limits_{d_*(\cdot)} \mathrm{PL}(d_*(\cdot)) = \min\limits_{d(\cdot)} \mathrm{PL}(d(\cdot))$ потерь

Замечание 7.2.2. Если $\mathrm{pl}(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{при } u = v, \\ 1 & \text{при } u \neq v, \end{cases}$ — *возможность* потерь при оценивании u значением v, $u, v \in \mathcal{U}$, качество правила $d(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ оценивания охарактеризовать значением *возможности* $\mathrm{PE}(d(\cdot)) = \sup\limits_{x\in\mathcal{X},\, g\in\mathcal{G}} \min\{f^\nu(x-Ag), \mathrm{pl}(Ug, d(x))\}$ *ошибки*, а оптимальное правило $d^*(\cdot)$ определить из условия $\mathrm{PE}(d(\cdot)) \sim \min\limits_{d(\cdot)}$, см. § 6.6.2, 6.6.3 гл. 6, ср. с задачей (7.2.3), то любое правило $d_*(\cdot)$ (7.2.9) будет оптимальным, и в этом случае можно выбрать $d^*(\cdot) = d_*(\cdot)$, хотя при непрерывной $f^\nu(\cdot)$ возможность ошибки $\mathrm{PE}(d^*(\cdot)) = \sup\limits_{x\in\mathcal{X}} \sup\limits_{g\in\mathcal{G}} \min\{f^\nu(x-Ag),\ \mathrm{pl}(Ug, d^*(\cdot))\} = 1$.

На рис. 7.2.1 представлена ситуация, в которой вариант задачи (7.2.3) $\mathrm{N}(d,x) = \inf\limits_{g\in\mathcal{R}^1} t_x(d,g) \sim \min\limits_{d\in\mathcal{R}^1}$, где $t_x(d,g) = \max\{\theta \circ f^\nu(x-g), \mathrm{nl}(g-d)\}$, см. рис. 7.2.1, *а*, при каждом $x \in \mathcal{R}^1$ имеет множество $\mathcal{G}_x = \{g \in \mathcal{R}^1, f^\nu(x-g) = 1\}$ решений $d_*(x)$, причем при любом $d_*(x) \in \mathcal{G}_x$ $\min\limits_{d\in\mathcal{R}^1} \mathrm{N}(d,x) = \inf\limits_{g\in\mathcal{R}^1} t_x(d_*(x),g) = 0$.

В этой ситуации решение задачи на минимум возможности потерь $\mathrm{PL}(d(\cdot)) = \sup\limits_{x,g} \min\{f^\nu(x-g), \mathrm{pl}(g-d(x))\} \sim \min\limits_{d(\cdot)}$ определяется как семейство решений задач $\mathrm{P}(d,x) = \sup\limits_{g\in\mathcal{R}^1} s_x(d,g) \sim \min\limits_{d\in\mathcal{R}^1}$, $x \in \mathcal{R}^1$, где $s_x(d,g) = \min\{f^\nu(x-g), \mathrm{pl}(g-d)\}$ и $\min\limits_{d\in\mathcal{R}^1} \mathrm{P}(d,x) = \min\limits_{d\in\mathcal{G}_x} \mathrm{P}(d,x) = \mathrm{P}(d_*^*(x),x)$, $x \in \mathcal{R}^1$, см. рис. 7.2.1, *б*. Правило $d_*^*(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ минимизирует как возможность, так и необходимость потерь.

Замечание 7.2.3. Если $r(\cdot)\colon [0,\infty] \to [0,1]$ строго монотонно убывает на $[0,1]$, причем $r(z)=0$, $z \in [\Delta,\infty]$, т. е. если ошибка ν в (7.2.1) не может быть сколь угодно велика, то, кроме фактов, приведенных в теореме 7.2.1, может быть оценена *непротиворечивость* М. И. Э. как непротиворечивость *модели* $[A, f^\nu(\cdot)]$ И. П. В частности, если для результата измерения $\xi = x$ в (7.2.6) $\|(I-BB^-)y\| = \|\Sigma^{-1/2}\left(I - A(\Sigma^{-1/2}A)^-\Sigma^{-1/2}\right)x\| \geqslant \Delta$, то модель $[A, f^\nu(\cdot)]$ противоречит этому результату измерения.

7.3. Редукция измерения при нечеткой априорной информации об измеряемом сигнале

Рассмотрим задачу редукции, в которой не только шум ν, но и измеряемый в (7.2.1) сигнал g моделируется как нечеткий элемент. Обозначим его γ и запишем схему измерения (7.2.1) в виде

$$\xi = A\gamma + \nu. \tag{7.3.1}$$

Пусть в (7.3.1) $A\colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$ — линейный оператор, γ и ν суть *независимые* нечеткие элементы, принимающие значения в евклидовых пространствах $\mathcal{G}$ и $\mathcal{X}$ соответственно, $f^\gamma(\cdot)\colon \mathcal{G} \to [0,1]$ и $f^\nu(\cdot)\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ — их распределения. Обозначим $[A, f^\gamma(\cdot), f^\nu(\cdot)]$ модель схемы измерения (7.3.1) и И. П. в системе I, $U\gamma$ обозначим нечеткий элемент, моделирующий характеристики *исследуемого объекта*, где $U\colon \mathcal{G} \to \mathcal{U}$ — линейный оператор, определяющий модель идеального И. П. в системе II, наконец, $[A, f^\gamma(\cdot), f^\gamma(\cdot), U]$ обозначим модель интерпретации измерения (7.3.1) и соответствующего И.-В. П.

В задаче редукции измерения (7.3.1) к виду, свойственному измерению на идеальном И. П., следует определить правило $d(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ оценивания $U\gamma$ так, чтобы нечеткий элемент $d(\xi)$ можно было считать оптимальной оценкой нечеткого элемента $U\gamma$.

Качество правила $d(\cdot)$ охарактеризуем величиной *необходимости потерь*, *сопутствующих ошибочному оцениванию*, см. § 6.6.4 гл. 6,

$$\mathrm{NL}(d(\cdot)) = \inf_{x\in\mathcal{X},\, g\in\mathcal{G}} \max\{\theta \circ f^\nu(x-Ag), \theta \circ f^\gamma(g), \mathrm{nl}(Ug, d(x))\}. \tag{7.3.2}$$

Здесь, в отличие от § 7.2, $f^{\nu}(x - Ag) = f^{\xi|\gamma}(x|g)$, $x \in \mathcal{X}$, $g \in \mathcal{G}$, — распределение переходной возможности, и

$$f^{\xi,\gamma}(x, g) = \min\{f^{\xi|\gamma}(x|g), f^{\gamma}(g)\}, \quad x \in \mathcal{X},\ g \in \mathcal{G}, \tag{7.3.3}$$

— совместное распределение входного сигнала γ и измерения ξ, см. пример 7.1.1, а в (7.3.2) $\mathrm{NL}(d(\cdot)) = \inf\limits_{x\in\mathcal{X}, g\in\mathcal{G}} \max\{\theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g), \mathrm{nl}(Ug, d(x))\}$, ибо согласно (7.3.3) $\theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g) = \max\{\theta \circ f^{\xi|\gamma}(x|g), \theta \circ f^{\gamma}(g)\}$.

Заметим, что если $f^{\gamma}(g) = 1$, $g \in \mathcal{G}$, т. е. если все значения сигнала γ в (7.3.1) априори равновозможны, то в (7.3.2) $\mathrm{NL}(d(\cdot)) = \inf\limits_{x\in\mathcal{X},\, g\in\mathcal{G}} \max\{\theta \circ f^{\nu}(x - Ag), \mathrm{nl}(Ug, d(x))\}$ и совпадает с $\mathrm{NL}(d(\cdot))$ (7.2.2) для априори произвольного сигнала $g \in \mathcal{G}$ в (7.2.1).

Оптимальное правило $d_*(\cdot)$ определим условием

$$\mathrm{NL}(d_*(\cdot)) = \min_{d(\cdot)\colon \mathcal{X}\to\mathcal{U}} \mathrm{NL}(d(\cdot)), \tag{7.3.4}$$

согласно которому необходимость потерь, сопутствующих ошибочному оцениванию $U\gamma$ посредством $d_*(\xi)$, минимальна.

Как известно, см. § 6.6.4 гл. 6, для решения задачи (7.3.4) достаточно при каждом $x \in \mathcal{X}$ решить более простую задачу

$$\mathrm{N}(d, x) = \inf_{g\in\mathcal{G}} \max\{\theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g), \mathrm{nl}(Ug, d)\} \sim \min_{d\in\mathcal{U}}, \tag{7.3.4*}$$

так как семейство решений $d_* = d_*(x)$, $x \in \mathcal{X}$, задачи (7.3.4*) является решением задачи (7.3.4). Речь идет о семействе задач на минимум

$$\max\{\theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g), \mathrm{nl}(Ug, d)\} \sim \min_{g\in\mathcal{G}, d\in\mathcal{U}}, \quad x \in \mathcal{X}. \tag{7.3.5}$$

Далее будем считать, что $\mathrm{nl}(\cdot,\cdot)$ в (7.3.5) удовлетворяет условию (7.2.4). Это означает, что только при $d = Ug$ потери невозможны. А так как $\min\limits_{d\in\mathcal{U}} \max\{\theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g), \mathrm{nl}(Ug, d)\} = \max\{\theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g), \min\limits_{d\in\mathcal{U}} \mathrm{nl}(Ug, d)\} = \theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g)$, $x \in \mathcal{X}$, $g \in \mathcal{G}$, где минимум по d достигается при (единственном) $d = Ug$, то задача (7.3.5) эквивалентна задаче

$$\theta \circ f^{\xi,\gamma}(x, g) \sim \min_{g\in\mathcal{G}},\ x \in \mathcal{X}, \tag{7.3.6}$$

ибо $d_* = d_*(x) = Ug(x)$ в точке $g = g(x)$ минимума в (7.3.6).

Пусть $\theta \circ f^{\nu}(x - Ag) = \delta_1(\|\Sigma^{-1/2}(x - Ag)\|^2)$, $\theta \circ f^{\gamma}(g) = \delta_2(\|G^{-1/2}(g - g_0)\|^2)$, $g \in \mathcal{G}$, $x \in \mathcal{X}$, где $\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot)$ — строго монотонно возрастающие, непрерывно дифференцируемые на $[0, \infty)$ функции, принимающие значения в $[0,1]$, $\delta_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, $\Sigma\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ и $G\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ — положительно определенные операторы, играющие роль, аналогичную роли ковариационных операторов шума и входного сигнала в модели вероятностного аналога схемы измерений (7.3.1), [50].

Рассмотрим задачу (7.3.6) в этом случае:

$$\max\{\delta_1(\|\Sigma^{-1/2}(x-Ag)\|^2), \delta_2(\|G^{-1/2}(g-g_0)\|^2)\} \sim \min_{g\in\mathcal{G}},\ x\in\mathcal{X}. \tag{7.3.7}$$

Введем обозначения: $z = G^{-1/2}(g-g_0)$, $B = \Sigma^{-1/2}AG^{1/2}\colon \mathcal{G}\to\mathcal{X}$, $y = \Sigma^{-1/2}x - \Sigma^{-1/2}Ag_0$, в которых задача (7.3.7) имеет вид

$$\max\{\delta_1(\|y-Bz\|^2), \delta_2(\|z\|^2)\} \sim \min_{z\in\mathcal{G}}. \tag{7.3.8}$$

Для ее решения вычислим градиенты $\delta_1(\|y-Bz\|^2)$ и $\delta_2(\|z\|^2)$ по $z\in\mathcal{G}$: $\bigtriangledown\delta_1(\|y-Bz\|^2) = 2\delta_1'(\|y-Bz\|^2)B^*(Bz-y)$, $\bigtriangledown\delta_2(\|z\|^2) = 2\delta_2'(\|z\|^2)z$. Здесь $\delta_1'(\|y-Bz\|^2) = d\delta_1(r)/dr|_{r=\|y-Bz\|^2}$, $\delta_2'(\|z\|^2) = d\delta_2(r)/dr|_{r=\|z\|^2}$. В точке $z=z^*$ минимума (7.3.8) должны быть выполнены следующие условия [13]:

► либо для некоторого $\alpha\in[0,1]$

$$\begin{gathered}\alpha\bigtriangledown\delta_1(\|y-Bz^*\|^2) + (1-\alpha)\bigtriangledown\delta_2(\|z^*\|^2) = 0,\\ \delta_1(\|y-Bz^*\|^2) = \delta_2(\|z^*\|^2);\end{gathered} \tag{7.3.9}$$

► либо

$$\bigtriangledown\delta_1(\|y-Bz^*\|^2) = 0,\ \delta_1(\|y-Bz^*\|^2) > \delta_2(\|z^*\|^2); \tag{7.3.10}$$

► либо, наконец,

$$\bigtriangledown\delta_2(\|z^*\|^2) = 0,\ \delta_1(\|y-Bz^*\|^2) < \delta_2(\|z^*\|^2). \tag{7.3.11}$$

Рассмотрим первый случай. Согласно первому условию (7.3.9) $\alpha\delta_1'B^*(Bz^*-y) + (1-\alpha)\delta_2'z^* = 0$, откуда следует, что при $\alpha\in[0,1]$ $z^* = z(\beta) = (B^*B+\beta I)^{-1}B^*y$, где $\beta = (1-\alpha)\delta_2'/(\alpha\delta_1')$ (и соответственно $\alpha\in(0,1)$) определяется из второго условия (7.3.9). Пусть для простоты далее $\delta_1(\cdot) = \delta_2(\cdot) = \delta(\cdot)$, где $\delta(\cdot)\colon [0,\infty)\to[0,1]$ — строго монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция [1]). В таком случае второе условие (7.3.9) эквивалентно равенству

$$\|y-Bz^*\|^2 = \|z^*\|^2. \tag{7.3.12}$$

Так как $\|y-Bz^*\|^2 = \beta^2\|(BB^*+\beta I)^{-1}y\|^2 = r(\beta)$ — монотонно возрастает по $\beta\in(0,\infty)$, причем $\lim\limits_{\beta\to+0} r(\beta) = \|(I-BB^-)y\|^2$, $\lim\limits_{\beta\to\infty} r(\beta) = \|y\|^2$, а $\|z^*\|^2 = \|B^*(BB^*+\beta I)^{-1}y\|^2 = s(\beta)$ — монотонно убывает по $\beta\in(0,\infty)$, причем $\lim\limits_{\beta\to+0} s(\beta) = \|B^-y\|^2$ и $\lim\limits_{\beta\to\infty} s(\beta) = 0$, то условие (7.3.12) выполняется для некоторого $\beta\in(0,\infty)$, лишь если $\|(I-BB^-)y\| < \|B^-y\|$. В этом случае существует единственный

[1]) В общем случае $\delta_1(\cdot)\neq\delta_2(\cdot)$ анализ условий (7.3.9)–(7.3.11) принципиально не изменится.

корень $\beta = \beta(y) \in (0, \infty)$ уравнения (7.3.12) и

$$z^* = z(\beta(y)) = (B^*B + \beta(y)I)^{-1}B^*y \tag{7.3.13}$$

определяет стационарную точку (7.3.8). А так как $\max(\delta(\|y - Bz\|^2), \delta(\|z\|^2))$ — выпуклая функция $z \in \mathcal{X}$, то z^* (7.3.13) — искомая точка ее минимума.

Если $\|(I - BB^-)y\| = \|B^-y\|$, то $\beta = \beta(y) = 0 \quad (\alpha = 1)$ и $z^* = B^-y = \lim\limits_{\beta \to +0}(B^*B + \beta I)^{-1}B^*y$.

Рассмотрим второй случай. Всякое решение z^* уравнения $\nabla\delta(\|(y - Bz)\|^2) = 0$ имеет вид [47, 61]

$$z^* = B^-y + b, \ b \in \mathcal{N}(B). \tag{7.3.14}$$

Так как $\|(y - Bz^*)\|^2 = \|(I - BB^-)y\|^2$ и $\|z^*\|^2 = \|B^-y\|^2 + \|b\|^2$, то z^* (7.3.14) удовлетворяет условиям (7.3.10), если и только если

$$0 \leqslant \|b\|^2 < \|(I - BB^-)y\|^2 - \|B^-y\|^2, \ b \in \mathcal{N}(B).$$

Третий случай, очевидно, невозможен.

Подведем итоги.

Теорема 7.3.1. *Пусть в схеме измерения* (7.3.1) $A\colon \mathcal{G} \to \mathcal{X}$ — *заданный линейный оператор*, $\gamma \in \mathcal{G}$ *и* $\nu \in \mathcal{X}$ — *независимые нечеткие элементы*, $f^\gamma(\cdot)\colon \mathcal{G} \to [0,1]$ *и* $f^\nu(\cdot)\colon \mathcal{X} \to [0,1]$ *их распределения, причем* $\theta \circ f^\gamma(g) = \delta(\|G^{-1/2}(g - g_0)\|^2)$, $g \in \mathcal{G}$, $\theta \circ f^\nu(x - Ag) = \delta(\|\Sigma^{-1/2}(x - Ag)\|^2)$, $x \in \mathcal{X}$, *где* $\delta(\cdot)\colon [0, \infty) \to [0,1]$ — *строго монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая на* $[0, \infty)$ *функция*, $\delta(0) = 0$; $\Sigma\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *и* $G\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ — *положительно определенные операторы, и выполнено условие* (7.2.4). *Обозначим* $\Delta(x) = \|(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-)\Sigma^{-1/2}(x - Ag_0)\|^2 - \|(\Sigma^{-1/2}AG^{1/2})^- -\Sigma^{-1/2}(x - Ag_0)\|^2$, $x \in \mathcal{X}$, *тогда если при* $\xi = x$

► $\Delta(x) < 0$, *то* $d_*(x) = U\widehat{\gamma}$ — *выходной сигнал* И.-В. П. $[A, f^\gamma(\cdot), f^\nu(\cdot), U]$ *для каждого* $x \in X$, *где* $\widehat{\gamma} = g_0 + GA^*(AGA^* + \omega(x)\Sigma)^{-1}(x - Ag_0)$, $\omega = \omega(x)$ — *корень уравнения*

$$\omega\|(BB^* + \omega I)^{-1}y\| = \|B^*(BB^* + \omega I)^{-1}y\|,$$

в котором $B = \Sigma^{-1/2}AG^{1/2}$, $y = \Sigma^{-1/2}(x - Ag_0)$. *В этом случае в задаче* (7.3.4*)

$$\mathrm{N}(d_*(x), x) =$$

$$= \delta(\|G^{-1/2}(A^*\Sigma^{-1}A + \omega(x)G^{-1})^{-1}A^*\Sigma^{-1}(x - Ag_0)\|^2);$$

► $\Delta(x) = 0$, *то* $d_*(x) = U\widehat{\gamma}$, *где* $\widehat{\gamma} = g_0 + G^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AG^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(\xi - Ag_0)$. *В этом случае в задаче* (7.3.4*) $\mathrm{N}(d_*(x), x) = = \delta(\|(\Sigma^{-1/2}AG^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(\xi - Ag_0)\|^2)$;

► $\Delta(x) > 0$, *то* $d_*(x) = U\widehat{\gamma}$, *где*

$$\widehat{\gamma} = g_0 + G^{1/2}(\Sigma^{-1/2}AG^{1/2})^-\Sigma^{-1/2}(x - Ag_0) + a(x),$$

$a(x)$ — *любой элемент* $\mathcal{N}(A)$, *удовлетворяющий условию* $0 \leqslant \|G^{1/2}a(x)\|^2 < \Delta(x)$. *В этом случае в задаче* (7.3.4*)

$$\mathrm{N}(d_*(x), x) = \delta(\|(I - \Sigma^{-1/2}A(\Sigma^{-1/2}A)^-)\Sigma^{-1/2}(x - Ag_0)\|^2).$$

Во всех случаях необходимость потерь (7.3.2), (7.3.4)

$$\mathrm{NL}(d_*(\cdot)) = \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{N}(d_*(x), x) = 0. \qquad \blacksquare$$

На рис. 7.3.1 приведены результаты численного моделирования редукции измерения, полученные для описанной в теореме 7.3.1 возможностной модели $[A,\, f^{\gamma}(\cdot),\, f^{\nu}(\cdot)]$ схемы измерения (7.3.1) и для вероятностной модели $[A,\, G,\, g_0,\, \Sigma]$ схемы измерения (7.2.1) [50].

Чтобы пояснить результаты вычислительного эксперимента, напомним, что наилучшей в среднем квадратичном (с. к.) оценкой случайного элемента g в классе всех функций случайного элемента ξ (7.2.1), имеющих первые два момента, является условное математическое ожидание $\widetilde{g} = \mathsf{E}(g|\xi)$, а в классе всех аффинных функций $R\xi + r$ — статистика

$$\widehat{g} = g_0 + GA^*(AGA^* + \Sigma)^{-1}(\xi - Ag_0), \tag{7.3.15}$$

если в (7.2.1) g и ν независимы, $g_0 = \mathsf{E}g$, $\mathsf{E}\nu = 0$, G и Σ — ковариационные операторы g и ν соответственно [50]. При этом, вообще говоря,

$$\mathsf{E}\|\widetilde{g} - g\|^2 \leqslant \mathsf{E}\|\widehat{g} - g\|^2 = \mathrm{tr}(G - GA^*(AGA^* + \Sigma)^{-1}AG). \tag{7.3.16}$$

Если случайные элементы g и ξ (совместно) нормально распределены, оценки $\widetilde{g}$ и $\widehat{g}$ совпадают и, следовательно, максимум с. к. погрешности $\mathsf{E}\|\widetilde{g} - g\|^2$ по всем распределениям независимых случайных элементов g и ν, имеющих фиксированные ковариационные операторы G и Σ, достигается при нормальном совместном распределении g и ξ и равен правой части (7.3.16). Иначе говоря, при фиксированных G и Σ случай нормального распределения выделяется тем, что при нем с. к. ошибка оценивания максимальна, равна правой части (7.3.16), а наилучшая оценка $\mathsf{E}(f\,|\,\xi)$ — аффинная функция ξ (7.3.15).

Отсюда следует, что при нормально распределенном шуме ν оценка, график которой приведен на рис. 7.3.1, *г*, неулучшаема, соответствующая возможностная оценка 7.3.1, *д* имеет несколько большую в с. к. погрешность. С другой стороны, если шум ν имеет равномерное распределение с такими же моментами, то теоретико-возможностная оценка 7.3.1, *д′* имеет существенно меньшую погрешность, чем линейная оценка 7.3.1, *г′* (7.3.15).

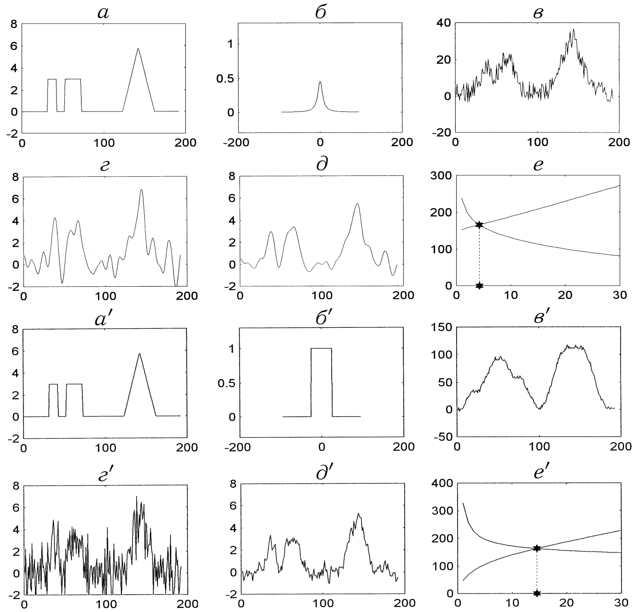


Рис. 7.3.1. a, a') Измеренные в (7.2.1) и (7.3.1) сигналы g и γ соответственно; $б$, $б'$) матричные элементы $a(i,j)$, $i,j = 1,\ldots,192$, матрицы оператора A как функции разности $i-j$ при $j=96$; $(Ag)(i) = \sum\limits_{j=1}^{192} a(i,j)g(j)$, $i = 1,\ldots,192$; $в$, $в'$) результаты измерения в (7.2.1) и (7.3.1) $\xi(i) = (Ag)(i) + \nu(i) \equiv (A\gamma)(i) + \nu(i), i = 1,\ldots,192$, при матрицах A, соответствующих $б$) или $б'$); $г$) вероятностная редукция измерения (7.2.1) $\widehat{g} = g_0 + GA^*(AGA^* + \Sigma)^{-1}(\xi - Ag_0)$, $\Sigma = \sigma^2 I$, $G = \varphi^2 I$, минимизирующая среднеквадратичную ошибку оценивания $\mathsf{E}\|\widehat{g} - g\|^2 = \min\limits_{R\colon \mathcal{X}\to\mathcal{G}, r\in\mathcal{G}} \mathsf{E}\|R\xi + r - g\|^2$, $\sigma^2 = 2$, $\varphi^2 = 2.62$; g и ν независимы и гауссовы; $д$) возможностная редукция измерения (7.3.1) $\widehat{\gamma} = g_0 + GA^*(AGA^* + \omega(\xi)\Sigma)^{-1}(\xi - Ag_0)$, минимизирующая необходимость ошибки оценивания, $\Sigma = \sigma^2 I$, $G = \varphi^2 I$, $\sigma^2 = 2$, $\varphi^2 = 2.62$; $г'$), $д'$) полученные при аппаратной функции $б'$) аналоги результатов редукции $г$), $д$), полученных при аппаратной функции $б$), для независимых γ и ν, равномерно распределенных на $[-\sqrt{3}\,\sigma, \sqrt{3}\,\sigma]^{192}$ и соответственно на $[-\sqrt{3}\,\varphi, \sqrt{3}\,\varphi]^{192}$ при $\sigma^2 = 2$, $\varphi^2 = 2.62$; $е$, $е'$) левые и правые части равенства (7.3.12) для аппаратных функций $б$, $б'$) как функции $\sigma^2\beta$; на горизонтальной оси отмечены соответствующие значения $\sigma^2\omega(\xi)$

Характерно, что *редукция при возможностной модели измерения не зависит от явного вида функции* $\delta(\cdot)$, *определяющей распределения*, т. е. инвариантна относительно выбора шкалы значений возможности, общей для распределений нечетких элементов γ и ν, а оценка $\widehat{\gamma} = g_0 + GA^*(AGA^* + \omega(x)\Sigma)^{-1}(x - Ag_0)$ в теореме 7.3.1 нелинейная и аналогична оценке Джеймса–Стейна, см., например, [50].

7.4. Нечеткие множества в модели наблюдений и их регистрации

Стандартная нечеткая модель объекта и наблюдения за ним в общем случае определяется парой пространств $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta})$ и $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{N}^{\eta})$, обозначаемой далее как пространство $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}, \mathrm{N}^{\eta})$, моделирующее собственно объект, и отображением $q(\cdot)\colon Y \to X$, определяющим как схему наблюдения за объектом, так и пространство $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^{\xi}, \mathrm{N}^{\xi})$ в качестве ее модели; η и $\xi = q(\eta)$ суть нечеткие элементы, канонические для $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}, \mathrm{N}^{\eta})$ и соответственно для $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P}^{\xi}, \mathrm{N}^{\xi})$. Значения ξ, в отличие от значений η, считаются наблюдаемыми, пара $(X, \mathcal{P}(X))$ считается *выборочным пространством наблюдений*.

В стандартной модели значения ξ не только наблюдаемы, но и могут быть зарегистрированы «точечными датчиками», т. е. события $\xi = x$, $x \in X$, и, разумеется, события $\xi \in B$, $B \in \mathcal{P}(X)$, могут быть зарегистрированы и охарактеризованы значениями их возможностей и необходимостей, см (1.10.8), (1.10.9), гл. 1,

$$\mathrm{P}^{\xi}(\xi \in B) = \sup_{x \in B} g^{\xi}(x), \quad \mathrm{N}^{\xi}(\xi \in B) = \inf_{x \in X \setminus B} h^{\xi}(x), \quad B \in \mathcal{P}(X), \tag{7.4.1}$$

где

$$\begin{aligned} &g^{\xi}(x) = \mathrm{P}^{\xi}(\xi = x) = \mathrm{P}^{\eta}(q(\eta) = x), \\ &h^{\xi}(x) = \mathrm{N}^{\xi}(\xi \in X \setminus \{x\}) = \mathrm{N}^{\eta}(q(\eta) \in X \setminus \{x\}), \quad x \in X. \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

В этой *модели регистрации наблюдений* множества $B \in \mathcal{P}(X)$ естественно интерпретировать как совокупность содержащихся в них «точечных датчиков», $B = \bigcup\limits_{x \in B} \{x\} = X \setminus \bigcup\limits_{x \in X \setminus B} \{x\} = \bigcap\limits_{x \in X \setminus B} (X \setminus \{x\})$, а X — как «регистрирующую среду».

Прежде чем обратиться к модели наблюдений и их регистрации, основанной на нечетких множествах, заметим, что любая такая модель важна лишь в связи с проблемой интерпретации зарегистрированных наблюдений в терминах свойств исследуемого объекта. Охарактеризуем в общих чертах этот аспект рассматриваемых моделей.

В любой, в том числе в стандартной модели результат регистрации события $\xi = x$ всегда содержит ошибку [1)], которая, например, проявляется в том, что результат регистрации выглядит так, как будто зарегистрировано значение $\widetilde{x}$ нечеткого элемента $\widetilde{\xi} = \xi + \nu$, где ν — моделирующий ошибку регистрации нечеткий элемент со значениями в X, $g^{\nu}(\cdot)\colon X \to [0,\, 1]$ — его распределение; ξ и ν будем считать независимыми. Пусть представляющее интерес свойство наблюдаемого объекта определено как нечеткий элемент $\zeta = \mathrm{z}(\xi)$, где отображение $\mathrm{z}(\cdot)\colon X \to Z$ известно, и требуется оценить значение ζ, используя результат регистрации наблюдений $\widetilde{\xi} = \widetilde{x} \in X$.

[1)] Обусловленную свойствами «регистрирующей среды».

Чтобы построить *модель регистрации наблюдений*, заметим, что так как $g^{\widetilde{\xi}|\xi}(\widetilde{x}|x) = g^{\nu}(\widetilde{x}-x)$, то $g^{\widetilde{\xi},\xi}(\widetilde{x},x) = \min\{g^{\nu}(\widetilde{x}-x), g^{\xi}(x)\}$, $x,\widetilde{x} \in X$, а так как $g^{\zeta|\xi}(z|x) = \begin{cases} 1, & z = \mathrm{z}(x), \\ 0, & z \neq \mathrm{z}(x), \end{cases}$ то $g^{\xi,\zeta}(x,z) = $ $= \min\{g^{\zeta|\xi}(z|x), g^{\xi}(x)\} = \begin{cases} g^{\xi}(x), & z = \mathrm{z}(x), \\ 0, & z \neq \mathrm{z}(x), \end{cases}$ $x \in X$, $z \in Z$. Наконец, поскольку $g^{\widetilde{\xi}|\xi,\zeta}(\widetilde{x}|x,z) = g^{\widetilde{\xi}|\xi}(\widetilde{x}|x) = g^{\nu}(\widetilde{x}-x)$, то $g^{\widetilde{\xi},\xi,\zeta}(\widetilde{x},x,z) = $ $= \min\{g^{\widetilde{\xi}|\xi,\zeta}(\widetilde{x}|x,z), g^{\xi,\zeta}(x,z)\} = \begin{cases} \min\{g^{\xi}(x), g^{\nu}(\widetilde{x}-x)\}, & z = \mathrm{z}(x), \\ 0, & z \neq \mathrm{z}(x), \end{cases}$ $x,\widetilde{x} \in X$, $z \in Z$, и, следовательно, *модель интерпретации зарегистрированного наблюдения*, как распределение $g^{\widetilde{\xi},\zeta}(\cdot,\cdot)\colon X \times Z \to [0,\,1]$, определится равенством $g^{\widetilde{\xi},\zeta}(\widetilde{x},z) = \sup\limits_{x\in X} g^{\widetilde{\xi},\xi,\zeta}(\widetilde{x},x,z) = $ $= \sup\limits_{x \in X,\, \mathrm{z}(x)=z} \min\{g^{\nu}(\widetilde{x}-x), g^{\xi}(x)\}$, $\widetilde{x} \in X$, $z \in Z$.

Пусть $\mathrm{pl}(\cdot,\cdot)\colon Z \times Z \to [0,\,1]$ — отображение, определяющее возможность потерь, сопутствующих ошибочной интерпретации, значение $\mathrm{pl}(z,d)$ — возможность потерь при использовании $d \in Z$ вместо истинного значения свойства $z \in Z$ исследуемого объекта, см. §6.6 гл. 6.

Тогда если $d(\widetilde{x})$ — интерпретация значения $\widetilde{\xi} = \widetilde{x}$, то возможность потерь, сопутствующих такому решению,

$$\mathrm{PL}(d(\cdot)) = \sup_{\substack{c\widetilde{x}\in X \\ z \in Z}} \min\{\mathrm{pl}(z, d(\widetilde{x})), g^{\widetilde{\xi},\zeta}(\widetilde{x},z)\},$$

и задача интерпретации зарегистрированного наблюдения сводится к задаче на минимум:

$$\mathrm{PL}(d(\cdot)) \sim \min_{d(\cdot)\colon X \to Z}.$$

В рассматриваемой далее модели, как и в стандартной, пространство $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\eta}, \mathrm{N}^{\eta})$ является моделью объекта, отображение $q(\cdot)\colon Y \to X$ определяет нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$ и пространство $(X, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}^{\xi}, \mathrm{N}^{\xi})$, в котором интерес по-прежнему представляют события $\xi \in B$, регистрируемые «точечными датчиками», «составляющими» $B \in \mathcal{P}(X)$, но наблюдаемы теперь не значения $\xi = q(\eta)$, а значения нечеткого множества A^{η} — образа нечеткого элемента η при многозначном отображении $A^{\cdot}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}^{\eta}(A^{\eta} = \varnothing) = \mathrm{P}^{\eta}(\eta \in Y \setminus A_X) = 0, \\ &\mathrm{N}^{\eta}(A^{\eta} \neq \varnothing) = \mathrm{N}^{\eta}(\eta \in A_X) = 1, \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

где $A_X \overset{\triangle}{=} \bigcup\limits_{x\in X} A_x$, см. равенства (1.3.3) гл. 1. В рассматриваемой модели между значениями $q(y)$ и A^y, $y \in Y$, имеется нечеткая зависимость, определяемая следующими условиями:

$$\forall\, y^0 \in Y \quad A^{y^0} = \bigcup_{y \in Y^0} \{q(y)\}, \tag{7.4.4}$$

где $Y^0 = \{y \in Y, A^y = A^{y^0}\}$, и при этом $\forall\, x \in X \;\; \forall\, y \in Y$

$$\mathrm{P}^\eta(q(\eta) = x \,|\, A^\eta = A^y) = \mathrm{N}^\eta(q(\eta) \neq x \,|\, A^\eta = A^y) = \begin{cases} 1, & x \in A^y, \\ 0, & x \in X \setminus A^y. \end{cases} \tag{7.4.5}$$

Иными словами, при каждом $y^0 \in Y$ все точки $x = q(y)$, $y \in Y^0$, содержатся и равномерно распределены [1] в $A^y = A^{y^0}$.

Множества $B \in \mathcal{P}(X)$ теперь моделируют «протяженные датчики» (как кластеры составляющих их «точечных датчиков», реагирующих на события $\xi \in B$, как в стандартной модели), *регистрирующие лишь факт включения значения $\xi = x$ в B, при котором значение x утрачено*. Поэтому в рассматриваемой модели фиксируется система $\mathcal{D}$ множеств $B \in \mathcal{P}(X)$, как система протяженных датчиков, регистрирующих события

$$A^\eta \cap B \neq \varnothing, \quad B \in \mathcal{D}, \tag{7.4.6}$$

и

$$A^\eta \subset B,\; A^\eta \neq \varnothing \equiv A^\eta \cap (X \setminus B) = \varnothing,\; A^\eta \neq \varnothing,\; B \in \mathcal{D}, \tag{7.4.7}$$

охарактеризованные значениями их возможностей

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}^\eta(A^\eta \cap B \neq \varnothing) = \mathrm{P}^\eta(\eta \in A_B), \quad B \in \mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X), \tag{7.4.8}$$

поскольку каждое событие $\eta \in \{y \in Y, A^y \cap B \neq \varnothing\}$ *может повлечь событие* $\xi = q(\eta) \in B$, ибо *возможно*, что $\xi = q(\eta) \in B \cap A^\eta$ и один из «точечных датчиков», содержащихся в B, его зафиксирует, и, соответственно, — необходимостей

$$\mathrm{N}(B) = \mathrm{N}^\eta(A^\eta \subset B, A^\eta \neq \varnothing) = \mathrm{N}^\eta(\eta \in A_x \setminus A_{X\setminus B}, \quad B \in \mathcal{D}, \tag{7.4.9}$$

поскольку каждое событие $\{\eta \in \{y \in Y, A^y \subset B, A^y \neq \varnothing\}\}$ *непременно влечет событие* $\xi = q(\eta) \in B$, которое будет зафиксировано

[1] Эта нечеткая зависимость моделирует, например, связь между дифракционным пятном и «формирующими его» фотонами при их регистрации в оптических наблюдениях. Для определенности можно считать, например, что в (7.4.4), (7.4.5) $Y = Y_1 \times Y_2$, $y = (y_1, y_2)$, $A^y = \widetilde{A}^{y_2}$, $y \in Y$, $Y^0 = Y_1 \times \{y_2^0\} = \{y \in Y, A^y = \widetilde{A}^{y_2^0}\} = \{y \in Y, A^y = A^{y^0}\}$, $y^0 = (y_1^0, y_2^0)$, $A^{y^0} = A^{(y_1^0, y_2^0)} = A^{(y_1, y_2^0)} = \bigcup\limits_{y \in Y^0} \{q(y)\}$, $y^0 \in Y$. Дифракционное пятно A^{y^0} априори определяет «возможное поведение» фотонов $\xi = q(y_1, y_2^0)$, $y_1 \in Y_1$.

одним из «точечных датчиков», содержащихся в B; в [1] (7.4.8), (7.4.9) $A_X = \bigcup\limits_{x \in X} A_x$, $A_B = \bigcup\limits_{x \in B} A_x$, $A_X \setminus B = \bigcup\limits_{x \in X \setminus B} A_x$, $A_x = \{y \in Y,\ x \in A^y\}$, см. равенство (1.3.2) гл. 1 и рис. 7.4.1.

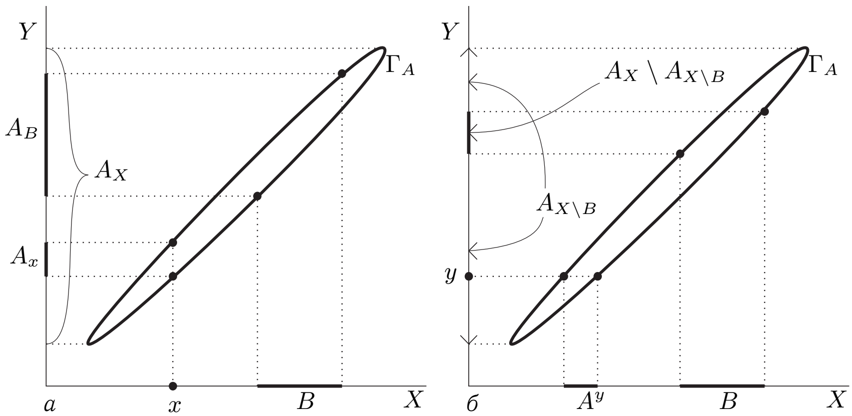


Рис. 7.4.1. *а*) График Γ_A отображения $A^{\cdot}: Y \to \mathcal{P}(X)$, множества B, A_x, $A_B = \bigcup\limits_{x \in B} A_x$, $A_X = \bigcup\limits_{x \in X} A_x$; *б*) график Γ_A, множества A^y, B, $A_{X\setminus B} = \bigcup\limits_{x \in X\setminus B} A_x$, $A_X \setminus A_{X\setminus B}$

Следующая теорема характеризует связь рассматриваемой и стандартной моделей.

Теорема 7.4.1. *Пусть выполнены условия* (7.4.3), (7.4.4) *и* (7.4.5). *Тогда*

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}^{\xi}(\xi \in B) = \mathrm{P}^{\eta}(q(\eta) \in B) = \mathrm{P}(B), \\ &\mathrm{N}^{\xi}(\xi \in B) = \mathrm{N}^{\eta}(q(\eta) \in B) = \mathrm{N}(B),\ B \in \mathcal{P}(X), \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

т. е. возможность и необходимость события $\xi \in B$ в стандартной модели совпадают соответственно с возможностью (7.4.8) *и необходимостью* (7.4.9) *событий* (7.4.6) *и* (7.4.7).

[1] $A_X = \{y \in Y, A^y \neq \varnothing\}$, $\{y \in Y, A^y \cap B \neq \varnothing\} = \{y \in Y, A^y \cap (\bigcup\limits_{x \in B}\{x\}) \neq \varnothing\} = \{y \in Y, \bigcup\limits_{x \in B}(A^y \cap \{x\}) \neq \varnothing\} = \bigcup\limits_{x \in B}\{y \in Y, x \in A^y\} = A_B$, $\{y \in Y, A^y \cap (X \setminus B) = \varnothing, A^y \neq \varnothing\} = Y \setminus (\{y \in Y, A^y \cap (X \setminus B) \neq \varnothing\} \cup \{y \in Y, A^y = \varnothing\}) = (Y \setminus A_{X\setminus B}) \cap (Y \setminus \{y \in Y, A^y \neq \varnothing\}) = (Y \setminus A_{X\setminus B}) \cap (Y \setminus A_X) = A_X \setminus A_{X\setminus B}$, см. рис. 7.4.2.

Доказательство. Заметим, что согласно (7.4.3), (7.4.5) $\mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in A^\eta) = \mathrm{P}^\eta(\bigcup_{x\in X}\{q(\eta) = x,\ x \in A^\eta\}) = \sup_{x\in X} \mathrm{P}^\eta(q(\eta) = x, x \in A^\eta) = \sup_{x\in X} \min(\mathrm{P}^\eta(q(\eta) = x|x \in A^\eta), \mathrm{P}^\eta(x \in A^\eta)) = \sup_{x\in X} \mathrm{P}^\eta(x \in A^\eta) = \mathrm{P}^\eta(A^\eta \neq \varnothing) = 1$, $\mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in X \setminus A^\eta) = \sup_{x\in X} \min\{\mathrm{P}^\eta(q(\eta) = x|x \in X \setminus A^\eta), \mathrm{P}^\eta(x \in X \setminus A^\eta)\} = 0$. Поэтому $\mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B) = \max\{\mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B \cap A^\eta), \mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B \cap (X \setminus A^\eta))\} = \mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B \cap A^\eta)$, ибо $\mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B \cap (X \setminus A^\eta)) \leqslant \min\{\mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B), \mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in X \setminus A^\eta)\} = 0$, и, следовательно, $\mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B) = \mathrm{P}^\eta(q(\eta) \in B \cap A^\eta) = \sup_{x\in X} \min\{\mathrm{P}^\eta(q(\eta) = x \mid x \in B \cap A^\eta), \mathrm{P}^\eta(x \in B \cap A^\eta)\} = \sup_{x\in X} \mathrm{P}^\eta(x \in B \cap A^\eta) = \mathrm{P}^\eta(B \cap A^\eta \neq \varnothing) = \mathrm{P}(B)$, причем $\mathrm{P}(B) = \sup_{x\in B} \mathrm{P}^\eta(x \in A^\eta) = \sup_{x\in B} \mathrm{P}^\eta(A_x) = \mathrm{P}^\eta(\bigcup_{x\in B} A_x) = \mathrm{P}^\eta(A_B)$.

Что касается равенства необходимостей в (7.4.10), то согласно условию в (7.4.5)

$$\mathrm{N}^\eta(q(\eta) \in A^\eta) = \inf_{x\in X} \max\{\mathrm{N}^\eta(q(\eta) \neq x|x \in A^\eta), \mathrm{N}^\eta(x \in A^\eta)\} = 1, \tag{7.4.11}$$

поэтому согласно (7.4.11) и условию в (7.4.5) $\mathrm{N}^\eta(q(\eta) \in B) = \min\{\mathrm{N}^\eta(q(\eta) \in B), \mathrm{N}^\eta(q(\eta) \in A^\eta)\} = \mathrm{N}^\eta(q(\eta) \in B \cap A^\eta) = \inf_{x\in X} \max\{\mathrm{N}^\eta(q(\eta) \neq x|x \notin (X \setminus B) \cap A^\eta), \mathrm{N}^\eta(x \notin (X \setminus B) \cap A^\eta)\} = \inf_{x\in X} \mathrm{N}^\eta(x \notin (X \setminus B) \cap A^\eta) = \mathrm{N}^\eta((X \setminus B) \cap A^\eta = \varnothing) = \min\{\mathrm{N}^\eta((X \setminus B) \cap A^\eta = \varnothing), \mathrm{N}^\eta(A^\eta \neq \varnothing)\} = \mathrm{N}^\eta((X \setminus B) \cap A^\eta = \varnothing, A^\eta \neq \varnothing) = \mathrm{N}(B)$, $B \in \mathcal{P}(X)$. ■

Таким образом, рассмотрена следующая схема и модель наблюдений и их регистрации. Пусть $\mathcal{D} = \{B_1, B_2, \ldots\}$, где множества B_i, $i = 1, 2, \ldots$, символизируют «протяженные датчики» и образуют покрытие X,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i. \tag{7.4.12}$$

Тогда каждое наблюдение A^η будет представлено двумя классами событий

$$A^\eta \cap B_{i_s} \neq \varnothing, s = 1, 2, \ldots, \text{ и } A^\eta \subset B_{j_t}, A^\eta \neq \varnothing, t = 1, 2, \ldots, \tag{7.4.13}$$

но зарегистрированы будут лишь те из них, для которых $q(\eta) \in B_{k_l}$, $l = 1, 2, \ldots$ Пусть для простоты в (7.4.12) $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Тогда нечеткий элемент $\xi = q(\eta)$ может попасть лишь в одно из множеств среди $B_1, B_2, \ldots$ и быть зарегистрированным соответствующим «протяженным датчиком», для которого выполнены условия (7.4.13), пусть это будет $B_k, \xi \in B_k$. Возможность и необходимость этого события суть $\mathrm{P}(B_k) = \mathrm{P}^\eta(A^\eta \cap B_k \neq \varnothing)$, $\mathrm{N}(B_k) = \mathrm{N}^\eta(A^\eta \subset B_k, A^\eta \neq \varnothing)$, см. рис. 7.4.2.

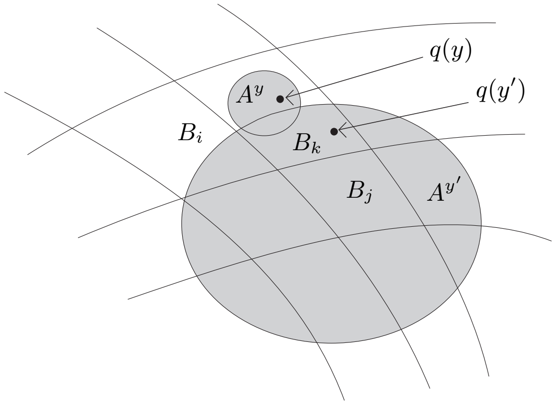


Рис. 7.4.2. При $\eta = y$ $A^y \subset B_k$, $A^y \neq \varnothing$; при $\eta = y'$ $A^{y'} \cap B_i \neq \varnothing$, $A^{y'} \cap B_j \neq \varnothing$, $A^{y'} \cap B_k \neq \varnothing$, ...

Поскольку в этой модели, как и в стандартной, регистрируются события $\xi = x$, $x \in X$, ей свойственны ошибки регистрации, вариант которых рассмотрен ранее в *модели регистрации наблюдений*.

7.5. Редукция измерения методом линейного программирования

Рассмотрим важный для практики класс задач редукции измерения (7.3.1), в котором модель $[A, f^\gamma(\cdot), f^\nu(\cdot)]$ определена распределениями $f^\gamma(\cdot)$ и $f^\nu(\cdot)$, заданными для координат нечетких векторов $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ и $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \in \mathcal{X}$ соответственно. Например,

$$\begin{aligned} f^\gamma(g) &= \min_{1 \leqslant i \leqslant m} f^{\gamma_i}(g_i), \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} \in \mathcal{G} = \mathcal{R}^m, \\ f^\nu(x) &= \min_{1 \leqslant j \leqslant n} f^{\nu_j}(x_j), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{X} = \mathcal{R}^n, \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

где $f^{\gamma_i}(\cdot)$ и $f^{\nu_j}(\cdot)$ — распределения i-й координаты γ, $i = 1, \ldots, m$, и соответственно j-й координаты ν, $j = 1, \ldots, n$, причем все координаты как γ, так и ν взаимно независимы.

Чтобы получить совместное распределение $f^{\xi,\gamma}(\cdot,\cdot)$ нечетких элементов ξ и γ в (7.3.1), перепишем равенство (7.3.1) в координатном представлении

$$\xi_i = (a_i,\, \gamma)_m + \nu_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{7.5.2}$$

где векторы $a_i \in \mathcal{R}^m$, $i = 1, \ldots, n$, являются строками матрицы оператора $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $(\cdot,\cdot)_m$ — символ скалярного произведения в $\mathcal{R}^m$. В предположении независимости нечетких векторов γ и ν, согласно равенствам (7.5.1) и (7.5.2), ср. с (7.1.11)

$$f^{\xi,\gamma}(x,g) = \min\Big\{ \min_{1\leqslant i\leqslant n} f^{\nu_i}(x_i - (a_i,\, g)_m),\ \min_{1\leqslant j\leqslant m} f^{\gamma_j}(g_j)\Big\},$$
$$x \in \mathcal{R}^n,\ g \in \mathcal{R}^m. \tag{7.5.3}$$

Здесь $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} f^{\nu_i}\big(x_i - (a_i, g)_m\big) = f^{\xi|\gamma}(x|g)$, $x \in \mathcal{R}^n$, — распределение переходной возможности, $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m} f^{\gamma_j}(g_j) = f^{\gamma}(g)$ — возможность равенства $\gamma = g$, $g \in \mathcal{R}^m$.

Один из вариантов распределений (7.5.1) можно задать равенствами

$$\begin{aligned} f^{\nu_i}(x_i) &= r\left(|x_i|/\,\sigma_i\right), & i &= 1, \ldots, n, \\ f^{\gamma_j}(g_j) &= r\left(|g_j - g_{0j}|/\,\delta_j\right), & j &= 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{7.5.4}$$

в которых $r(\cdot)\colon [0,\infty) \to [0,1]$ — произвольная непрерывная монотонно убывающая на $[0,1]$ функция, $r(0) = 1$, $r(z) = 0$, если $1 \leqslant z < \infty$. Числа σ_i и δ_j — «масштабные» коэффициенты для i-й координаты ν и j-й координаты γ, определяющие области их возможных значений соответственно. Возможности того, что $\nu_i = x_i$ и $\gamma_j = g_j$, равны нулю для $|x_i| \geqslant \sigma_i$ и соответственно для $|g_j - g_{0j}| \geqslant \delta_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. В случае распределений (7.5.4) равенство (7.5.3) принимает вид

$$f^{\xi,\gamma}(x,g) = r\Big(\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} \max\Big\{\frac{|x_i - (a_i,\, g)_m|}{\sigma_i},\ \frac{|g_j - g_{0j}|}{\delta_j}\Big\}\Big),\ x \in \mathcal{R}^n,\ g \in \mathcal{R}^m. \tag{7.5.5}$$

Довольно часто априори известно, что координаты нечеткого вектора γ с положительной возможностью принимают значения лишь в пределах определенного «коридора», например, в пределах интервалов $[\underline{g}_j, \overline{g}_j]$, $j = 1, \ldots, m$. Это можно учесть, задав априорное распределение γ в виде $f_0^{\gamma}(g) = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \chi_j(g_j)$, $g \in \mathcal{R}^m$, где $\chi_j(z) = \begin{cases} 1, & z \in [\underline{g}_j, \overline{g}_j], \\ 0, & z \notin [\underline{g}_j, \overline{g}_j], \end{cases}$ $-\infty < z < \infty$, — индикаторная функция j-го интервала $[\underline{g}_j, \overline{g}_j]$, $j = 1, \ldots, m$, и использовать совместно с первой группой равенств

(7.5.4) в модели $[A, f^{\gamma}(\cdot), f^{\nu}(\cdot)]$. Тогда

$$f^{\xi,\gamma}(x,g) = \min\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant n} r\left(\frac{|x_i-(a_i,\,g)_m|}{\sigma_i}\right),\ \min_{1\leqslant j\leqslant m}\chi_j(g_j)\right\} =$$
$$\begin{cases} r\left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\dfrac{|x_i-(a_i,\,g)_m|}{\sigma_i}\right), & \text{если } \underline{g}_j \leqslant g_j \leqslant \overline{g}_j,\ j=1,\ldots,m,\\ 0, \qquad — & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{7.5.6}$$

В этом, как и в предыдущем параграфе, рассматривается решение задачи редукции измерения (7.3.1) для класса индикаторных функций $\mathrm{nl}(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющих условиям (7.2.4), при которых редукция $d_*(\xi)$ измерения (7.5.2), минимизирующая необходимость ошибки редукции, дается равенством $d_*(\xi) = Ug(\xi)$, в котором $g(\cdot)$ — решение задачи на минимум (7.3.6)

$$\theta\circ f^{\xi,\gamma}(x,g)\sim\min_{g\in\mathcal{R}^m},\ x\in\mathcal{R}^n. \tag{7.5.7}$$

Если распределение $f^{\xi,\gamma}(\cdot,\cdot)$ определено равенствами (7.5.5) или (7.5.6), то в каждом случае задача (7.5.7) сводится к задаче линейного программирования [1]. Рассмотрим, например, распределение (7.5.6), для которого задача (7.5.7) эквивалентна следующей задаче на минимум

$$\begin{aligned} &q = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i-(a_i,\,g)_m|/\,\sigma_i)\sim\min_{g\in\mathcal{G}_0},\\ &\mathcal{G}_0 = \left\{g\in\mathcal{R}^m,\ \underline{g}_j\leqslant g_j\leqslant\overline{g}_j,\ j=1,\ldots,m\right\}.\end{aligned} \tag{7.5.8}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &z=(q;g)=(q,g_1,\ldots g_m)\in\mathcal{R}^{m+1},\ g\in\mathcal{R}^m,\\ &l=(1,0,\ldots,0)\in\mathcal{R}^{m+1},\\ &b_i=(\sigma_i;a_i)\in\mathcal{R}^{m+1},\\ &c_i=(\sigma_i;-a_i)\in\mathcal{R}^{m+1},\ a_i\in\mathcal{R}^m, i=1,\ldots,n;\\ &d_j=(\underbrace{0,0,\ldots,0,1}_{j+1},0,\ldots,0)\in\mathcal{R}^{m+1},\\ &l_j=(\underbrace{0,0,\ldots,0,-1}_{j+1},0,\ldots,0)\in\mathcal{R}^{m+1}, j=1,\ldots,m,\end{aligned}$$

согласно которым в задаче (7.5.8) требуется найти минимум линейной функции [2] $q=(l,z)_{m+1}$ на подмножестве $\mathcal{R}^{m+1}$, выделенном линейными неравенствами

$$\begin{aligned} &(b_i,z)_{m+1}\geqslant x_i,\quad (c_i,z)_{m+1}\geqslant -x_i,\quad i=1,\ldots,n;\\ &(d_j,z)_{m+1}\geqslant \underline{g}_j,\quad (l_j,z)_{m+1}\geqslant -\overline{g}_j,\quad j=1,\ldots,m.\end{aligned}$$

[1] Для модели (7.5.5) это показано в работе [21], см. также [16, 43].

[2] $(\cdot,\cdot)_{m+1}$ — символ скалярного произведения в $\mathcal{R}^{m+1}$.

На рис. 7.5.1 приведен результат решения задачи редукции (7.5.8) измерения (7.5.2) для модели измерения $f^{\xi,\gamma}(\cdot,\cdot)$ (7.5.6).

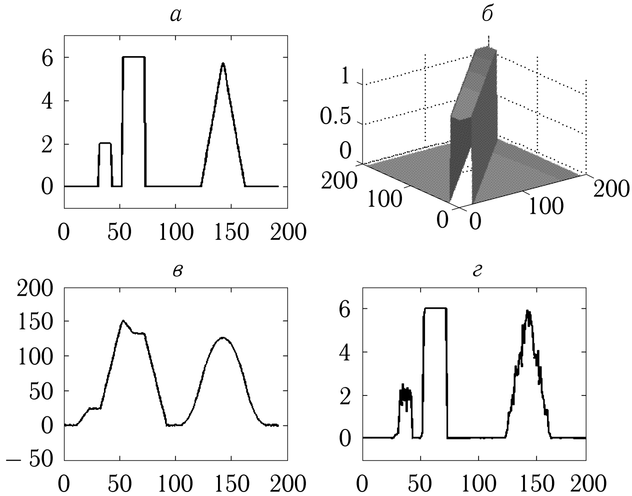


Рис. 7.5.1. Иллюстрация решения задачи редукции (7.5.8) измерения (7.5.2). *а*) Входной сигнал $\gamma = g$ в (7.5.2); *б*) график матричных элементов матрицы оператора A в (7.5.2); *в*) результат измерения ξ в (7.5.2); *г*) решения задачи (7.5.8) при $\underline{g}_j = 0$, $\overline{g}_j = 6$, $j = 1, \ldots, 192$, $-\sigma \leqslant \nu_i \leqslant \sigma, \sigma = 0.9$, $i = 1, \ldots, 192$

Замечание 7.5.1. Пусть $\widehat{g} = \widehat{g}(x)$ — решение задачи (7.5.7): $f^{\xi,\gamma}(x, \widehat{g}(x)) = \max\limits_{g \in \mathcal{G}_0} f^{\xi,\gamma}(x, g) = f^{\xi}(x)$, $x \in \mathcal{R}^n$. Если для $\xi = x$ $f^{\xi}(x) = 0$, то модель $[A, f^{\gamma}(\cdot), f^{\nu}(\cdot)]$ измерения (7.5.2) следует признать противоречащей результатам измерения.

7.6. Редукция измерения методом минимизации ошибки

В § 7.2, 7.3, 7.5 рассмотрены методы редукции измерений, качество которой определялось *значением необходимости или* (*и*) *возможности потерь*, сопутствующих редукции; величина ошибки при этом оставалась неопределенной. В этом параграфе рассматриваются методы редукции, качество которой характеризуется величиной ее ошибки.

7.6.1. Минимаксная редукция. Рассмотрим важный для практики случай, когда в (7.5.1) γ и ν — нечеткие векторы $\mathcal{R}^m$ и соответственно $\mathcal{R}^n$, и пусть

$$f^{\gamma}(g) = \begin{cases} 1, \text{ если } g \in \mathcal{G}, \\ 0, \text{ если } g \in \mathcal{R}^m \backslash \mathcal{G}, \end{cases} \quad f^{\nu}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \mathcal{N}, \\ 0, \text{ если } x \in \mathcal{R}^n \backslash \mathcal{N}, \end{cases} \tag{7.6.1}$$

— их распределения, $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}^m$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}^n$. Такие нечеткие векторы полностью определены, если заданы множества $\mathcal{G}$ и $\mathcal{N}$ их значений, поэтому в этом и в следующих параграфах в обозначениях не будем различать нечеткие векторы и их значения. Рассматриваемую далее модель схемы измерений (7.3.1) обозначим $[A, \mathcal{G}, \mathcal{N}]$, где будем считать заданными оператор $A\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^n$ и множества $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}^m$ и $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}^n$, априори содержащие возможные значения сигнала $\gamma \in \mathcal{R}^m$ и измерительной погрешности $\nu \in \mathcal{R}^n$.

В модели *интерпретации измерения* (7.3.1), обозначаемой $[A, \mathcal{G}, \mathcal{N}, U]$, дополнительно задан оператор $U\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^k$.

В таком случае задачу редукции измерения (7.3.1) можно поставить, как следующую задачу на минимакс:

$$h_\xi(r, U) = \sup\{\|r - U\gamma\|_k \,|\, \gamma \in \mathcal{G},\ \nu \in \mathcal{N},\ \xi = A\gamma + \nu\} \sim \min_{r \in \mathcal{R}^k}, \quad (7.6.2)$$

в которой $\|\cdot\|_k$ — некоторая норма в $\mathcal{R}^k$, и требуется минимизировать (условную) оценку $h_\xi(r, U)$ погрешности редукции (при условии, что ξ — результат измерения (7.3.1)). Ее решение $r_* = R_*(\xi)$ является наиболее точной версией $U\gamma$, основанной на априорных данных и результате измерения, и определяет оптимальное правило оценивания $U\gamma$.

Дело в том, что при оговоренных условиях задачу редукции измерения (7.3.1) естественно поставить как задачу минимизации на множестве всех правил оценивания $R(\cdot)\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^k$ *максимальной на множестве всех возможных γ и ξ погрешности $||R(\xi) - U\gamma||_k$ интерпретации $R(\xi)$ как $U\gamma$:*

$$h(R(\cdot), U) = \sup\{\|R(\xi) - U\gamma\|_k \mid (\gamma, \xi) \in \bigcup_{\gamma' \in \mathcal{G}} (\gamma', C_{\gamma'})\} \sim \min_{R(\cdot)}, \quad (7.6.3)$$

где

$$C_\gamma = \{\xi = A\gamma + \nu,\ \nu \in \mathcal{N}\}.$$

А решение $R_*(\cdot)$ задачи (7.6.3) дается функцией $R_*(\xi)$, $\xi \in C = \{\xi = A\gamma + \nu,\ \gamma \in \mathcal{G},\ \nu \in \mathcal{N}\}$, определенной выше в связи с решением задачи (7.6.2) для каждого $\xi \in C$. Действительно, для любого правила оценивания $R(\cdot)$:

$$h(R(\cdot), U) = \sup_{\xi \in C} \sup\{\|R(\xi) - U\gamma)\|_k \mid \gamma \in \mathcal{G},\ \nu \in \mathcal{N},$$
$$\xi = A\gamma + \nu\} = \sup_{\xi \in C} h_\xi(R(\xi), U) \geqslant \sup_{\xi \in C} h_\xi(R_*(\xi), U) = h(R_*(\cdot), U).$$

Следовательно, функция $R_*(\xi)$, $\xi \in C$, минимизирует погрешность интерпретации $h(R(\cdot), U)$ (7.6.3), [45].

Что же касается задачи (7.6.2), то ее решение имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть $\mathcal{U}_\xi = \{U\gamma,\ \gamma \in \mathcal{G},\ \xi = A\gamma + \nu,\ \nu \in \mathcal{N}\}$ и S_ξ — шар минимального радиуса, содержащий $\mathcal{U}_\xi$. Тогда, как известно [40], решение $R_*(\xi)$ задачи (7.6.2) есть центр S_ξ

и $h(R_*(\xi), U) = (\mathrm{diam}\ \mathrm{S}_\xi)/2$. В свою очередь, оценка погрешности интерпретации (7.6.3) равна:

$$h(R_*(\cdot), U) = \sup\{(\mathrm{diam}\ \mathrm{S}_\xi)/2 \mid \xi \in \mathrm{C}\}.$$

7.6.2. Минимаксная редукция измерения для интервальной модели $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\mathcal{G}}, \boldsymbol{\mathcal{N}}]$. Рассмотрим задачу редукции (7.6.2), в которой множества $\mathcal{G}$ и $\mathcal{N}$ значений нечетких векторов γ и ν в (7.6.1) определены условиями

$$\begin{aligned}\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \dots\\ \gamma_m\end{pmatrix} \in \mathcal{G} = \{\gamma \in \mathcal{R}^m,\ \underline{\gamma}_j \leqslant \gamma_j \leqslant \overline{\gamma}_j,\ j = 1, \dots, m\} = \\ = \{\gamma \in \mathcal{R}^m,\ \underline{\gamma} \leqslant \gamma \leqslant \overline{\gamma}\}; \\ \nu = \begin{pmatrix}\nu_1\\ \dots\\ \nu_n\end{pmatrix} \in \mathcal{N} = \{\nu \in \mathcal{R}^n,\ \underline{\nu}_i \leqslant \nu_i \leqslant \overline{\nu}_i,\ i = 1, \dots, n\} = \\ = \{\nu \in \mathcal{R}^n,\ \underline{\nu} \leqslant \nu \leqslant \overline{\nu}\},\end{aligned} \tag{7.6.4}$$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} \dots a_{1m}\\ \dots\\ a_{n1} \dots a_{nm}\end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix}u_{11} \dots u_{1m}\\ \dots\\ u_{k1} \dots u_{km}\end{pmatrix},$$

где границы $\underline{\gamma}_j, \overline{\gamma}_j$, $j = 1, \dots, m$, $\underline{\nu}_i, \overline{\nu}_i$, $i = 1, \dots, n$, известны, неравенства для векторов определены как неравенства для их соответствующих координат, и в (7.6.2) норма $\|\cdot\|_k$ в $\mathcal{R}^k$ определена равенством

$$\|u - U\gamma\|_k = \max_{1 \leqslant s \leqslant k} |u_s - \sum_{j=1}^m u_{sj}\gamma_j|. \tag{7.6.5}$$

Нечеткие векторы γ и ν (7.6.4) и соответствующую модель $[A, \mathcal{G}, \mathcal{N}]$ *назовем интервальными*, см. § 6.10 гл. 6.

Так как согласно схеме измерений (7.3.1)

$$\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\gamma_j + \nu_i,\ i = 1, \dots, n, \tag{7.6.6}$$

и согласно условиям в (7.6.4)

$$\xi_i - \overline{\nu}_i \leqslant \sum_{j=1}^m a_{ij}\gamma_j \leqslant \xi_i - \underline{\nu}_i,\ i = 1, \dots, n;\ \underline{\gamma}_j \leqslant \gamma_j \leqslant \overline{\gamma}_j,\ j = 1, \dots, m, \tag{7.6.7}$$

то, с учетом определения (7.6.5), в задаче (7.6.2) требуется минимизировать по всем $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^k$ погрешность редукции:

$$h(u, U) = \sup \left\{ \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \left| u_s - \sum_{j=1}^{m} u_{sj} \gamma_j \right| \,\middle|\, \gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} \,|\, \xi) \subset \mathcal{R}^m \right\} \sim \min_{u \in \mathcal{R}^k}, \tag{7.6.8}$$

где согласно (7.6.7)

$$\begin{gathered} \mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} \,|\, \xi) = \{\gamma \in \mathcal{R}^m,\ \underline{\gamma}_j \leqslant \gamma_j \leqslant \overline{\gamma}_j,\ j = 1, \dots, m, \\ \underline{\nu}_i \leqslant \xi_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \gamma_j \leqslant \overline{\nu}_i,\ i = 1, \dots, n\}. \end{gathered} \tag{7.6.9}$$

Иначе говоря, речь идет о задаче редукции $h(u, U) \sim \min\limits_{u \in \mathcal{R}^k}$ измерения, выполненного по схеме (7.6.6), интервальная модель которой $[A, \mathcal{G}, \mathcal{N}]$ для каждого $\xi \in \mathcal{R}^n$ определена множеством $\mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} \,|\, \xi)$ (7.6.9), причем, если наблюдается ξ, при котором $\mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} \,|\, \xi) = \varnothing$, *то модель* $[A, \mathcal{G}, \mathcal{N}]$ *неадекватна*.

Замечание 7.6.1. Задача редукции (7.6.8), (7.6.9) сводится к задаче линейного программирования, см. §7.5. Действительно, если $h = \sup\limits_{\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} | \xi)} ||u - U\gamma|| \in \mathcal{R}^1$, $z = (h, \gamma, u) \in \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^k = \mathcal{Z}^{1+m+k}$, $l = (1,\, 0,\, 0) \in \mathcal{Z}^{1+m+k}$, то задача (7.6.8), (7.6.9) эквивалентна задаче линейного программирования $(l,\, z)_{1+m+k} \sim \min\limits_{z \in \mathcal{Z}(\xi)}$, где $(\cdot, \cdot)_{1+m+k}$ — символ скалярного произведения в $\mathcal{Z}^{1+m+k}$, $\mathcal{Z}(\xi) = \big\{ (h, \gamma_1, \dots, \gamma_m,$ $u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{Z}^{1+m+k}$, $\underline{\nu}_i \leqslant \xi_i - \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} \gamma_j \leqslant \overline{\nu}_i$, $i = 1, \dots, n$, $\underline{\gamma}_j \leqslant \gamma_j \leqslant \overline{\gamma}_j$, $j = 1, \dots, m$, $-h \leqslant u_s - \sum\limits_{j=1}^{m} u_{sj} \gamma_j \leqslant h$, $s = 1, \dots, k\big\}$

Замечание 7.6.2. Так как множество $\mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} \,|\, \xi)$ выпуклое, то $\left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} u_{sj} \gamma_j,\ \gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} \mid \xi) \right\} = [u_{*s}(\xi),\, u_s^*(\xi)]$ — интервал, границы которого

$$u_{*s}(\xi) = \min_{\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} | \xi)} \sum_{j=1}^{m} u_{sj} \gamma_j,\ u_s^*(\xi) = \max_{\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} | \xi)} \sum_{j=1}^{m} u_{sj} \gamma_j,\ s = 1, \dots, k, \tag{7.6.10}$$

суть решения $2k$ задач линейного программирования (7.6.10), (7.6.9), поэтому значение $u_{0s}(\xi) = (u_{*s}(\xi) + u_s^*(\xi))/2$ оценивает координату $(U\gamma)_s$ с погрешностью $|(U\gamma)_s - u_{0s}(\xi)| \leqslant (u_s^*(\xi) - u_{*s}(\xi))/2$ равномерно по $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{G}, \mathcal{N} \mid \xi)$, $s = 1, \dots, k$.

Такую оценку $(U\gamma)_s$ можно получить, решив задачу линейного программирования (7.6.8), (7.6.9), заменив в ней $\max\limits_{1\leqslant s\leqslant k}|u_s - \sum\limits_{j=1}^{m} u_{sj}\gamma_j|$ на $|u_s - \sum\limits_{j=1}^{m} u_{sj}\gamma_j|$, $s = 1, \ldots, k$, см. § 6.10 гл. 6.

7.7. Методы восстановления линейной [1] зависимости и линейного прогнозирования

В этом параграфе речь пойдет о задаче оценивания функции $y(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, принадлежащей известному классу линейных функций, по данным измерений значений ее аргумента $(x_1, \ldots, x_N)$ и соответствующих значений функции $y_1, \ldots, y_N$, а также о задачах восстановления линейной модели измерений и линейного прогнозирования; во всех задачах данные измерений, естественно, известны неточно.

В более общей постановке подобные задачи рассмотрены в § 7.8.

7.7.1. Восстановление линейной зависимости. Начнем с наиболее простой задачи оценивания (уравнения) прямой $y = y(x) = a_1 x + a_0$, $x, y \in \mathcal{R}^1$, по данным наблюдений пар соответствующих значений $(x_i,\, y_i) \in \mathcal{R}^1 \times \mathcal{R}^1$, $i = 1, \ldots, N$, причем вначале рассмотрим задачу, в которой значения аргумента $x = (x_1, \ldots, x_N)$ известны точно, а соответствующие значения $y = (y_1, \ldots, y_N)$ функции $y(\cdot)$ известны с ошибками и моделируются как значения координат нечеткого вектора $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$, измеряемого по схеме

$$\eta_j = a_1 x_j + a_0 + \nu_j,\ j = 1, \ldots, N. \tag{7.7.1}$$

В равенствах (7.7.1) $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ — нечеткий вектор ошибок, его распределение

$$f^{\nu}(z) = r\left(\max_{1\leqslant j\leqslant N}\left(\frac{|z_j|}{\delta_j}\right)\right),\ z = (z_1, \ldots, z_N),$$
$$-\infty < z_j < \infty,\ j = 1, \ldots, N, \tag{7.7.2}$$

известно с точностью до монотонного обратимого отображения $[0, 1] \to [0, 1]$, а именно функция $r(\cdot)\colon \mathcal{R}_+ \to [0, 1]$ (здесь и далее в этом параграфе) непрерывна, равна единице в нуле, строго монотонно убывает на $[0, 1]$, равна нулю на $[1, \infty)$, а в остальном — произвольная. Согласно равенствам (7.7.1), (7.7.2) увеличение δ_j приводит к увеличению возможности бо́льших значений ошибки ν_j наблюдения η_j, причем возможность ошибки $\nu_j = z_j$ для $|z_j| \geqslant \delta_j$ равна нулю, $j = 1, \ldots, N$.

В задаче оценивания прямой по данным x_j, $\eta_j = y_j$, $j = 1, \ldots, N$, полученным по схеме (7.7.1), требуется оценить значения $a_1, a_0 \in \mathcal{R}^1$.

[1] Точнее, восстанавливаемые в пунктах 7.7.1 и 7.7.2 зависимости следует называть аффинными.

Согласно равенствам (7.7.1), (7.7.2) распределение $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$

$$f^\eta(y, a_1, a_2) = f^\eta(y - a_1 x - a_0), \; y \in \mathcal{R}^N, \tag{7.7.3}$$

зависит от двух неизвестных параметров a_1 и a_0. Их оценки максимальной возможности, согласно равенствам (7.7.2), (7.7.3), определяются как решения $\widehat{a}_1 = \widehat{a}_1(x, y)$, $\widehat{a}_0 = \widehat{a}_0(x, y)$ задачи на минимум

$$q = q(x, y, a_1, a_0) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \left| \frac{y_j - a_1 x_j - a_0}{\varepsilon_j} \right| \sim \min_{a_1,\, a_0}. \tag{7.7.4}$$

Они доставляют максимум распределению (7.7.3), $f^\eta(x, \widehat{a}_1, \widehat{a}_0) = \max\limits_{a_1,\, a_0} f^\eta(y, a_1, a_0)$, и соответственно «оценка максимальной возможности искомой прямой», минимизирующая необходимость ошибки, дается равенством $y = \widehat{a}_1 x + \widehat{a}_0$, $x \in \mathcal{R}^1$.

Замечание 7.7.1. Если $f^\eta(y, \widehat{a}_1(x, y), \widehat{a}_0(x, y)) = 0$ (т. е. если $\widehat{q} = q(x, y, \widehat{a}_1(x, y), \widehat{a}_0(x, y)) \geqslant 1$), то модель ошибок (7.7.2) противоречит данным наблюдений x, y.

Задача (7.7.4) является задачей линейного программирования, в которой требуется найти минимум линейной функции $l(a_1, a_2, q) = q$ по a_1, a_0, $q \in \mathcal{R}^1$ при ограничениях

$$q \geqslant \frac{y_j - a_1 x_j - a_0}{\varepsilon_j}, \; q \geqslant -\frac{y_j - a_1 x_j - a_0}{\varepsilon_j}, \; j = 1, \ldots, N.$$

Если имеется дополнительная информация о возможных значениях a_1 и a_0, согласно которой их можно считать значениями координат нечеткого вектора (α_1, α_0) с известным распределением $f^{\alpha_1, \alpha_0}(a_1, a_0)$, $a_1, a_0 \in \mathcal{R}^1$, то правую часть (7.7.3) следует понимать как распределение $f^{\eta|\alpha_1, \alpha_0}(y \,|\, a_1, a_0)$, $y \in \mathcal{R}^N$, переходной возможности, и при решении задачи оценивания прямой исходить из совместного распределения $f^{\eta, \alpha_1, \alpha_0}(y, a_1, a_0) = \min(f^{\eta|\alpha_1, \alpha_0}(y \,|\, a_1, a_0), f^{\alpha_1, \alpha_0}(a_1, a_0))$, $y \in \mathcal{R}^N$, $a_1, a_0 \in \mathcal{R}^1$. В частности, оценка $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_0$ максимальной возможности определится из условия

$$f^{\eta, \alpha_1, \alpha_0}(y, \widehat{a}_1, \widehat{a}_0) = \max_{a_1, a_0} f^{\eta, \alpha_1, \alpha_0}(y, a_1, a_0). \tag{7.7.5}$$

Заметим, что если $f^{\alpha_1, \alpha_0}(a_1, a_0) = r\left(\max\left(|a_1 - a_1^0|/\varepsilon_1, \, |a_0 - a_0^0|/\varepsilon_2\right)\right)$, то задача (7.7.5), как и (7.7.4), оказывается задачей линейного программирования.

Замечание 7.7.2. Точно так же может быть решена задача оценивания полиномиальной зависимости, при которой схема измерения (7.7.1) заменяется на

$$\eta_j = a_k x_j^k + \ldots + a_1 x_j + a_0 + \nu_j, \; j = 1, \ldots, N, \tag{7.7.1*}$$

или на еще более общую $\eta_j = a_k g_k(x_j) + \ldots + a_1 g_1(x_j) + a_0 + \nu_j$, $j = 1, \ldots, N$, где $g_1(\cdot), \ldots, g_k(\cdot)$ — заданные линейно независимые функции, и по данным измерений (7.7.1*) надлежит получить оценки $\widehat{a}_k, \ldots, \widehat{a}_0$ коэффициентов полинома в (7.7.1*).

Рассмотрим теперь более сложную задачу оценивания линейной зависимости $y = a_1 x + a_0$, $x, y \in \mathcal{R}^1$, на основе измерений, выполненных по схеме

$$\xi_i = x_i^0 + \mu_i,\ \eta_i = y_i^0 + \nu_i,\ y_i^0 = a_1 x_i^0 + a_0,\ i = 1, \ldots, N, \tag{7.7.6}$$

в которой x_i^0, y_i^0 суть координаты i-й точки, принадлежащей искомой прямой $\{(x, y) \in \mathcal{R}^2, y = a_1 x + a_0\}$, ξ_i, η_i — их измеренные с ошибками μ_i, ν_i значения, $i = 1, \ldots, N$. Или, что то же самое, в векторном виде

$$\xi = x^0 + \mu,\ \eta = y^0 + \nu,\ y^0 = a_1 x^0 + a_0 e, \tag{7.7.7}$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0)$, $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_N^0)$, $e = (1, \ldots, 1)$ суть векторы R^N.

Пусть в (7.7.7) μ и ν — независимые нечеткие векторы, $f^{\mu}(b) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} r\left(|b_i| / \sigma_i\right)$, $f^{\nu}(c) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} r\left(|c_i| / \delta_i\right)$, $b = (b_1, \ldots, b_N)$, $c = (c_1, \ldots, c_N) \in \mathcal{R}^N$ — их распределения. Тогда

$$\begin{gathered} f^{\mu,\nu}(b,\, c) = r\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant N} \max\left\{\frac{|b_i|}{\sigma_i}, \frac{|c_i|}{\delta_i}\right\}\right),\ b, c \in \mathcal{R}^N, \\ b = (b_1, \ldots, b_N), \quad c = (c_1, \ldots, c_N), \end{gathered} \tag{7.7.8}$$

— распределение ошибок наблюдений. Поэтому согласно равенствам (7.7.7), (7.7.8) распределение измерений ξ, η

$$\begin{aligned} f^{\xi,\eta}(x, y, a_1, a_0) &= \sup_{x^0 \in \mathcal{R}^N} f^{\mu,\nu}(x - x^0, y - y^0) = \\ &= \sup_{x^0 \in \mathcal{R}^N} f^{\mu,\nu}(x - x^0, y = a_1 x^0 - a_0 e) = \sup_{b \in \mathcal{R}^N} f^{\mu,\nu}(b, y - a_1(x - b) - a_0 e), \\ &\qquad x, y \in \mathcal{R}^N, \end{aligned}$$

зависит от параметров a_1, a_0, и их оценки максимальной возможности $a_1(x, y)$, $a_0(x, y)$, где $\xi = x$, $\eta = y$ — результаты измерений по схеме (7.7.7), в силу равенств (7.7.6), (7.7.8) определяются на основе решения следующей задачи на минимум:

$$q = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \max\left\{\frac{|b_j|}{\sigma_j}, \frac{|y_j - a_1(x_j - b_j) - a_0|}{\delta_j}\right\} \sim \min_{b_1, \ldots, b_N,\, a_1,\, a_0}. \tag{7.7.9}$$

Характерно, что в задаче (7.7.9) при каждом фиксированном a_1 задача на минимум по оставшимся переменным $b_1, \ldots, b_N$, a_0 является задачей линейного программирования. Если [1] $b_i(a_1)$, $i = 1, \ldots, N$, $a_0(a_1)$, $q(a_1)$ — ее решение, то решение задачи (7.7.9) получается из условия

[1] Для простоты записи зависимости $b_i(a_1)$, $a_0(a_1)$, $q(a_1)$ от x, y не выписываются.

минимизации $q(a_1)$ по $a_1 \in \mathcal{R}^1$: $q(\widehat{a}_1) = \min\limits_{a_1} q(a_1)$. Оценка максимальной возможности искомой прямой дается равенством $y = \widehat{a}_1 x + \widehat{a}_0$, $x \in \mathcal{R}^1$, где $\widehat{a}_0 = a_0(\widehat{a}_1) = a_0(a_1)\big|_{a_1=\widehat{a}_1}$. Однако если $r(\widehat{q}) = 0$, где $\widehat{q}$ — минимальное значение q в (7.7.9), то модель ошибок (7.7.8) и данные измерений x, y противоречат друг другу. На рис. 7.7.1 приведен пример решения задачи (7.7.9) [16].

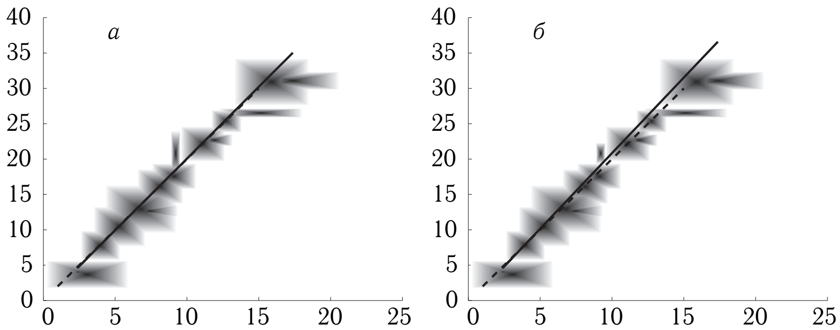


Рис. 7.7.1. Штриховые линии — истинные прямые, сплошные — восстановленные. Центр каждого прямоугольника — экспериментальная точка, градации серого передают градации возможности получить его центральную точку вместо любой его точки вследствие ошибки измерения. *а*) Пример восстановления прямой для адекватной модели: сплошная линия практически совпала со штриховой; *б*) пример восстановления для неадекватной модели измерений

7.7.2. Восстановление линейной модели измерений. Непосредственным обобщением задачи оценивания прямой является задача оценивания $n \times m$ матрицы $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \ldots & \widetilde{a}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{a}_{n1} & \ldots & \widetilde{a}_{nm} \end{pmatrix}$ и вектора $\widetilde{a} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{a}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n$ по данным измерений, выполненных по схеме

$$\eta_j = \widetilde{A}\widetilde{x}_j + \widetilde{a} + \nu_j, \ j = 1, \ldots, N, \tag{7.7.10}$$

где «тестирующие» сигналы $\widetilde{x}_j = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_{j1} \\ \vdots \\ \widetilde{x}_{jm} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^m$, $j = 1, \ldots, N$, известны точно, $\nu_j = \begin{pmatrix} \nu_{j1} \\ \vdots \\ \nu_{jn} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n$, $j = 1, \ldots, N$, — нечеткие ошибки измерений, $\eta_j = \begin{pmatrix} \eta_{j1} \\ \vdots \\ \nu_{jn} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n,\ j = 1,\ldots,N,$ — нечеткие результаты «тестирования». Эта задача известна также как задача оценивания модели линейной схемы измерения (7.2.1), в данном случае — линейного оператора $\widetilde{A}$ и вектора «смещения» $\widetilde{a}$, на основе откликов $\eta_1,\ldots,\eta_N$ И. П. на входные сигналы[1] $\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_N$ [50].

Перепишем равенства (7.7.10) в виде, отвечающем линейной схеме измерений (7.2.1) $\eta_j = Ax_j + \nu_j,\ j = 1,\ldots,N,$ где $A = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \ldots & \widetilde{a}_{1m} & \widetilde{a}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n1} & \ldots & \widetilde{a}_{nm} & \widetilde{a}_n \end{pmatrix}$ — матрица $n \times (m+1)$, $x_j = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_{j1} \\ \vdots \\ \widetilde{x}_{jm} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{m+1},\ j = 1,\ldots,N,$ и далее — в виде матричного равенства

$$\eta = AX + \nu, \tag{7.7.11}$$

в котором $\eta = (\eta_1 \ldots \eta_N) = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \ldots & \eta_{N1} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_{1n} & \ldots & \eta_{Nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 & \ldots & \widetilde{x}_N \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} \widetilde{x}_{11} & \ldots & \widetilde{x}_{N1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1m} & \ldots & \widetilde{x}_{Nm} \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, $\nu = (\nu_1 \ldots \nu_N) = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \ldots & \nu_{N1} \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_{1n} & \ldots & \nu_{Nn} \end{pmatrix}$. Равенству (7.7.11) эквивалентно равенство

$$\eta^* = X^* A^* + \nu^*, \tag{7.7.12}$$

где звездочка означает транспонирование. Перепишем равенство (7.7.12) для каждого из n столбцов матриц $\eta^*,\ A^*$ и ν^*:

$$\begin{pmatrix} \eta_{1k} \\ \vdots \\ \eta_{Nk} \end{pmatrix} = X^* \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{k1} \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{km} \\ \widetilde{a}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_{1k} \\ \vdots \\ \nu_{Nk} \end{pmatrix},\ k = 1,\ldots,n. \tag{7.7.13}$$

[1] Если речь идет об оценивании оператора A, моделирующего И. П. в системе I на рис. 7.0.1, то «тестирующие» сигналы должны поступить на вход И. П. при условиях, идентичных условиям, сформированным в системе I при взаимодействии И. П. с измеряемым объектом и со средой и определившим A как модель И. П. в системе I.

Каждое равенство (7.7.13) точно повторяет схему измерений (7.2.1), причем поскольку векторы ошибок $\nu_1, \ldots, \nu_N$ естественно считать взаимно независимыми, каждый вектор ошибок $\nu_{(k)} = \begin{pmatrix} \nu_{1k} \\ \vdots \\ \nu_{Nk} \end{pmatrix}$ в (7.7.13) имеет взаимно независимые координаты $\nu_{1k}, \ldots, \nu_{Nk}$, $k = 1, \ldots, n$. Если $f^{\nu_{(k)}}(z) = r\left(\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \left|\dfrac{z_j}{\sigma_{jk}}\right|\right)$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}$, — распределение $\nu_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, то, как показано в § 7.5, оптимальное оценивание каждого столбца $\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{k1} \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{km} \\ \widetilde{a}_k \end{pmatrix}$, $k = 1, \ldots, n$, (каждой строки матрицы A), сводится к решению задачи линейного программирования, см. рис. 7.7.2.

7.7.3. Линейное прогнозирование. С рассмотренной задачей непосредственно связана задача прогноза измерения, в которой требуется на основании тестовых измерений

$$\xi_i = A g_i + \nu_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{7.7.14}$$

известных сигналов $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{R}^m$ с ошибками $\nu_1, \ldots, \nu_s \in \mathcal{R}^N$, выполненных на неточно известном линейном И. П., уточнить его модель — линейный оператор $A\colon \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^N$, точнее — оценить его отклик Ag_0 на входной сигнал g_0, который реально не может быть подан на его вход. Качество *уточнения* A охарактеризуем значением необходимости ошибки *прогнозирования* отклика Ag_0. Оператор A определим как элемент параметрического класса операторов в виде

$$A = \sum_{t=1}^{k} a_t A_t. \tag{7.7.15}$$

В равенстве (7.7.15) $A_1, \ldots, A_k$ — заданные линейные операторы, а вектор $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^k$ параметров подлежит уточнению [1]).

В схеме измерения (7.7.14) результаты ξ_i, $i = 1, \ldots, s$, суть нечеткие векторы пространства $\mathcal{R}^N$, ошибки ν_i, $i = 1, \ldots, s$, — взаимно

[1]) В вероятностной постановке задача рассмотрена в [50]. Подчеркнем, что *качество уточнения* вектора определяется точностью прогнозирования отклика Ag_0, а не точностью оценивания A.

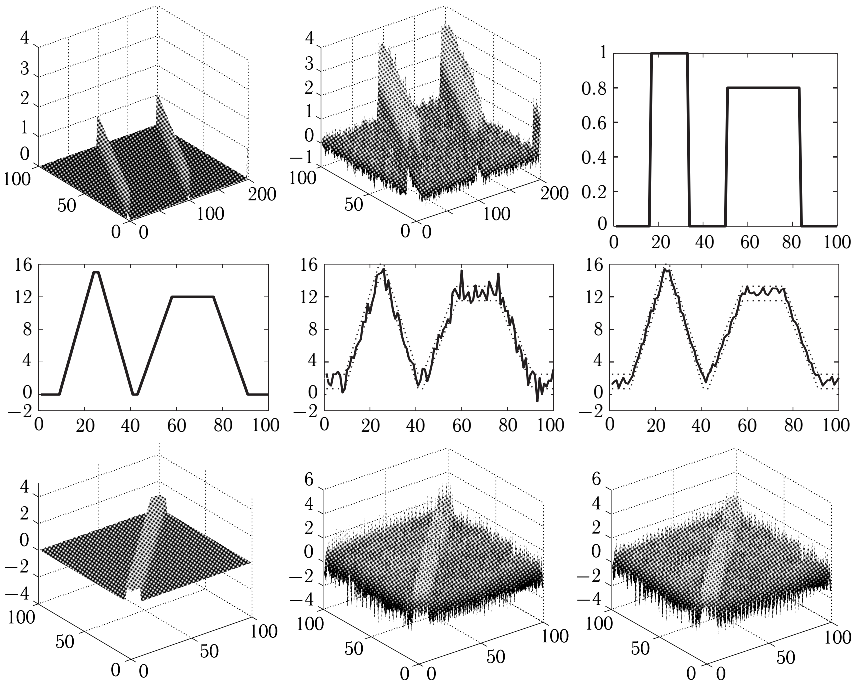


Рис. 7.7.2. Результат численного моделирования восстановления модели и прогнозирования. На верхнем рисунке (слева направо): график матричных элементов матрицы, строки которой суть тестовые сигналы, график матричных элементов матрицы, строки которой — результаты тестовых измерений, сигнал g_0, отклик на который нужно получить; на втором сверху рисунке (слева направо): истинный отклик, отклик, полученный с помощью *аппаратной функции* И. П., полученной *как решение задачи восстановления модели*; отклик, полученный *как решение задачи прогнозирования с учетом априорной информации*, изображенной пунктирным коридором, априори содержащим истинный прогноз; на нижнем рисунке (слева направо): истинная матрица A; результат решения задачи восстановления A; матрица A, полученная при прогнозировании с учетом априорной информации о $U_{g_0}\alpha$

независимые нечеткие векторы с распределениями

$$f^{\nu_i}(n_i) = r\left(\frac{\|n_i\|_N}{\sigma_i}\right), \; n_i \in \mathcal{R}^N, \; i = 1, \ldots, s, \tag{7.7.16}$$

в которых $r(\cdot)\colon \mathcal{R}_+ \to [0,1]$ — произвольная непрерывная строго монотонно убывающая на $[0,1]$ функция, $r(0) = 1$, $r(x) = 0$, $x \geqslant 1$, $\sigma_i > 0$ — «масштабный» коэффициент для ν_i, определяющий область его возможных значений, и в этом параграфе $\|n_i\|_N = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} |n_{ij}|$, где n_{ij} — j-я координата $n_i \in \mathcal{R}^N$, $j = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, s$. Искомый вектор параметров $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^k$ будем считать значением нечеткого вектора $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^k$ с априорным распределением $f^\alpha(a) = 1$, $a \in \mathcal{R}^k$, согласно которому все значения α до измерений считаются равновозможными.

С учетом представления (7.7.15) схема измерений (7.7.14) может быть переписана в виде схемы измерения нечеткого вектора $\alpha \in \mathcal{R}^k$:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 g_1 & \ldots & A_k g_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1 g_s & \ldots & A_k g_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_s \end{pmatrix} \tag{7.7.17}$$

или — в векторных обозначениях

$$\xi = T\alpha + \nu, \tag{7.7.17*}$$

где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_s \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} A_1 g_1 & \ldots & A_k g_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1 g_s & \ldots & A_k g_s \end{pmatrix}$, $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_s \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$. Соответственно

$$Ag_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i g_0 = (A_1 g_0, \ldots, A_k g_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \triangleq U_{g_0}\alpha, \tag{7.7.18}$$

где $U_{g_0} = (A_1 g_0, \ldots, A_k g_0)$, $g_0 \in \mathcal{R}^m$.

Возможностная задача прогноза измерения идентична задаче оценивания, в которой по наблюдению ξ (7.7.17*) требуется определить оптимальное правило $d(\cdot)\colon (\mathcal{R}^n)^s \to \mathcal{R}^n$ оценивания нечеткого вектора $U_{g_0}\alpha$. Качество правила $d(\cdot)$ охарактеризуем величиной необходимости ошибки прогноза

$$\mathrm{NL}(d(\cdot)) = \inf_{x \in (\mathcal{R}^n)^s,\, a \in \mathcal{R}^k} \max\{\vartheta \circ f^{\xi,\alpha}(x,a), \mathrm{nl}(U_{g_0}a, d(x))\},$$

где функция $\mathrm{nl}(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию (7.2.4), и оптимальное правило $d_*(\cdot)$ определим из условия

$$\mathrm{NL}(d_*(\cdot)) = \min_{d(\cdot)\colon (\mathcal{R}^n)^s \to \mathcal{R}^n} \mathrm{NL}(d(\cdot)). \tag{7.7.19}$$

При каждом $x \in (\mathcal{R}^n)^s$ задача (7.7.19) сводится к задаче

$$f^{\xi,\alpha}(x,a) \sim \max_{a \in \mathcal{R}^k}, \tag{7.7.20}$$

решение которой $a_x^* = \arg\max_{a \in \mathcal{R}^k} f^{\xi,\alpha}(x,a)$ определяет оптимальное правило $d_*(\cdot)\colon (\mathcal{R}^n)^s \to \mathcal{R}^n$ оценивания, при котором необходимость ошибки оценивания вектора $U_{g_0}\alpha \in \mathcal{R}^n$ посредством $d_*(x) = U_{g_0}a_x^*$, где $x \in (\mathcal{R}^n)^s$ — результат измерения (7.7.17), минимальна.

В силу взаимной независимости векторов ошибок $\nu_i \in \mathcal{R}^k$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, s$, их совместное распределение

$$f^{\nu_1,\ldots,\nu_s}(n_1, \ldots, n_s) = f^\nu(n) = r\left(\max_{1\leqslant i\leqslant s}\left(\frac{\|n_i\|_N}{\sigma_i}\right)\right); \qquad (7.7.21)$$

согласно равенству (7.7.18) $f^{\xi|\alpha}(x|a) = f^\nu(x - Ta)$, $x \in (\mathcal{R}^n)^s$, $a \in \mathcal{R}^k$, — распределение переходной возможности и, следовательно, в силу условия $f^\alpha(a) = 1$, $a \in \mathcal{R}^k$,

$$f^{\xi,\alpha}(x, a) = \min\{f^{\xi|\alpha}(x|a), f^\alpha(a)\} = f^\nu(x - Ta),\ x \in (\mathcal{R}^n)^s,\ a \in \mathcal{R}^k,$$

— совместное распределение ξ, α. Поэтому задача (7.7.20) сводится к задаче линейного программирования [1])

$$q = \max_{1\leqslant i\leqslant s}\left(\frac{||x_i - (Ta)_i||_N}{\sigma_i}\right) \sim \min_{a\in\mathcal{R}^k}.$$

Если a_x^* — ее решение, то $U_{g_0}a_x^*$ — искомый прогноз при $\xi = x$, см. рис. 7.7.2, на котором приведены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению линейной модели измерений и прогнозирования, причем в задаче прогнозирования *учтены априорные ограничения на возможные значения* $U_{g_0}\alpha$ (7.7.18) [70] (т. е. $f^\alpha(a) \leqslant 1$, $a \in \mathcal{R}^k$).

Что касается адекватности модели тестирования (7.7.14) (7.7.15) (7.7.16), то, если при $\xi = x$, $f^{\xi,\alpha^*}(x, a_x^*) = \max\limits_{a\in\mathcal{R}^k} f^{\xi,\alpha}(x, a) = f^\xi(x) = 0$, то модель (7.7.17*), (7.7.21) следует признать противоречащей результатам измерения.

7.8. Методы уточнения данных эксперимента, прогнозирования новых данных, оценивания зависимостей между данными

Обратимся теперь к проблеме анализа данных эксперимента, включающей задачи уточнения данных, прогнозирования новых данных, оценивания зависимостей между данными и т. д., как частные случаи.

7.8.1. Схема измерений и ее модель. Для многих задач анализа и интерпретации данных измерительного эксперимента, таких, например, как оценивание функциональных зависимостей между данными, их уточнение, прогнозирование новых данных, соответствующих измененным условиям эксперимента, проверка адекватности его модели и т. д., типична следующая схема измерений:

$$\widetilde{\xi}_i = \xi_i + \mu_i,\ \ \widetilde{\eta}_i = \eta_i + \nu_i,\ \ \eta_i = F(\xi_i),\ \ i = 1, \ldots, N. \qquad (7.8.1)$$

[1]) $||x_i - (Ta)_i||_N = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}|x_{ij} - (Ta)_{ij}| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}|x_{ij} - \sum\limits_{t=1}^{k} a_t(A_t g_i)_j|$, $i = 1, \ldots, s$.

Здесь $\widetilde{\xi}_i$ и $\widetilde{\eta}_i$ — нечеткие элементы, значения $\widetilde{x}_i \in \mathcal{X}$ и $\widetilde{y}_i \in \mathcal{Y}$ которых определяют результат i-го измерения, ξ_i и η_i — нечеткие элементы, значения x_i и $y_i = F(x_i)$ которых суть значение аргумента и соответствующее значение (неизвестной) функции $F(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, μ_i и ν_i — нечеткие ошибки измерения нечетких элементов ξ_i и $\eta_i = F(\xi_i)$, непосредственно ненаблюдаемых в эксперименте, $i = 1, \ldots, N$. Далее схему измерений (7.8.1) будем записывать короче в виде

$$\widetilde{\xi} = \xi + \mu, \qquad \widetilde{\eta} = \eta + \nu, \qquad \eta = F(\xi), \tag{7.8.2}$$

где $\widetilde{\xi} = (\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_N)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $\widetilde{\eta} = (\widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_N)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ и $F(\xi) = (F(\xi_1), \ldots, F(\xi_N))$.

Определим модель схемы измерений (7.8.1), (7.8.2), задав

1. распределение $f^{\mu,\nu}(\cdot,\cdot) : \mathcal{X}^N \times \mathcal{Y}^N \to [0,1]$ пары нечетких элементов μ и ν, определяющее модель ошибок измерений в (7.8.1), (7.8.2);
2. параметрический класс $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, содержащий функцию $F(\cdot) = F_b(\cdot)\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $b \in \mathcal{B}$, определяющую модель эксперимента и рассматриваемую как значение нечеткой функции $F_\beta(\cdot)$. Параметр $b \in \mathcal{B}$ отмечает, например, (неизвестные) свойства исследуемого в эксперименте объекта, материала и т. п.;
3. распределение $f^{\beta}(\cdot)\colon \mathcal{B} \to [0,1]$ нечеткого элемента β, принимающего значения в $\mathcal{B}$; его значения характеризуют свойства исследуемого объекта, которые формально представлены функцией $F_\beta(\cdot)$, связывающей входные $\xi_1, \ldots, \xi_N$ и выходные $\eta_1, \ldots, \eta_N$ данные эксперимента;
4. распределение $f^{\xi|\beta}(\cdot|b)\colon \mathcal{X}^N \to [0,1]$, $b \in \mathcal{B}$, переходной возможности, определяющее зависимость распределения нечеткого элемента $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ от значения $b \in \mathcal{B}$ нечеткого элемента [1] β. Значения нечетких элементов $\xi_1, \ldots, \xi_N$ определяют входные данные эксперимента, значения $\eta_1 = F_b(\xi_1), \ldots, \eta_N = F_b(\xi_N)$ — его выходные данные ($F_b(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ при некотором фиксированном неизвестном $b \in \mathcal{B}$).

   Кроме этого, условимся считать, что
5. различным значениям $b \in \mathcal{B}$ соответствуют различные функции $F_b(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, каждое $b \in \mathcal{B}$ определяет единственную функцию $F_B(\cdot)$ и
6. в схеме измерений (7.8.1) при всех значениях $i = 1, \ldots, N$ неизвестная функция $F(\cdot) = F_b(\cdot)$ фиксирована условиями выполнения эксперимента.

В следующих разделах на основе измерений, выполненных по схеме (7.8.1), (7.8.2), модель которой определена условиями 1–6, рассмотрены методы решения задач оценивания функции $F_b(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ в (7.8.1), оцени-

[1] Измеряемые значения $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ аргумента $F_b(\cdot)$ выбираются в зависимости от исследуемых свойств объекта.

вания входных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и выходных $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ данных эксперимента и, наконец, — прогнозирования результатов эксперимента, которые могут быть получены при тех или иных входных данных, физическая реализация которых невозможна или сопряжена с большими затратами. Заметим, что согласно схеме (7.8.2), входные ξ и выходные η данные доступны исследователю лишь в виде их приближенных версий $\widetilde{\xi}$ и соответственно $\widetilde{\eta}$, получаемых в результате измерений. Поэтому задачу оценивания ξ и η следует рассматривать как задачу уточнения получаемых в эксперименте значений $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\eta}$.

7.8.2. Оценивание функции $F_b(\cdot)$, $b \in \mathcal{B}$. Заметим вначале, что согласно схеме измерений (7.8.2) распределение переходной возможности

$$f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\xi,\eta,\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x,y,b) = \begin{cases} f^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-y), & \text{если } y = F_b(x), \\ 0, & \text{если } y \neq F_b(x), \end{cases} \tag{7.8.3}$$

$$\widetilde{x}, x \in \mathcal{X}^N,\ \widetilde{y}, y \in \mathcal{Y}^N,\ b \in \mathcal{B},\ F_b(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}.$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N)$, $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_N)$, $\widetilde{y} = (\widetilde{y}_1, \ldots$ $\ldots, \widetilde{y}_N)$ и $F_b(x) = (F_b(x_1), \ldots, F_b(x_N))$ суть значения нечетких элементов ξ, η, $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$ и $F_\beta(\xi) = (F_\beta(\xi_1), \ldots, F_\beta(\xi_N))$. А поскольку

$$f^{\xi,\eta,\beta}(x,y,b) = \begin{cases} \min\{f^{\xi|\beta}(x|b), f^\beta(b)\}, & \text{если } y = F_b(x), \\ 0, & \text{если } y \neq F_b(x), \end{cases}$$

$$x \in \mathcal{X}^N,\ y \in \mathcal{Y}^N,\ b \in \mathcal{B},$$

то

$$f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\xi,\eta,\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},x,y,b) =$$

$$= \begin{cases} \min\{f^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-y), f^{\xi|\beta}(x|b), f^\beta(b)\}, & \text{если } y = F_b(x), \\ 0, & \text{если } y \neq F_b(x), \end{cases} \tag{7.8.4}$$

$$\widetilde{x}, x \in \mathcal{X}^N,\ \widetilde{y}, y \in \mathcal{Y}^N,\ b \in \mathcal{B},$$

— совместное распределение наблюдений $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$, ненаблюдаемых данных эксперимента ξ, η и параметра β искомой функции.

Для решения задачи оценивания функции $F_\beta(\cdot)$ найдем совместное распределение

$$f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b) = \sup_{\substack{x\in\mathcal{X}^N\\ y\in\mathcal{Y}^N}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\xi,\eta,\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},x,y,b) = \sup_{x\in\mathcal{X}^N} \min\{f^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-F_b(x)),$$

$$f^{\xi|\beta}(x|b), f^\beta(b)\},\ \widetilde{x} \in \mathcal{X}^N,\ \widetilde{y} \in \mathcal{Y}^N,\ b \in \mathcal{B}, \tag{7.8.5}$$

наблюдений $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$ и параметра β искомой функции $F_\beta(\cdot)$, позволяющее решить задачу оптимального оценивания искомой функции $F_b(\cdot) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ по данным $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ наблюдений нечетких векторов $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$. В частности, оценка максимальной возможности $\widehat{b} = \widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y})$, при условии (7.2.4) минимизирующая неизбежность ошибки оценивания, и соответственно оценка $\widehat{F}(\cdot)$ искомой функции $F_b(\cdot)$, $b \in \mathcal{B}$ определяются равенствами [1])

$$\widehat{b} = \widehat{b}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \arg\max_{b \in \mathcal{B}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, b), \;\; \widehat{F}(\cdot) = \widehat{F}_{\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y})}(\cdot), \;\; \widetilde{x} \in \mathcal{X}^N, \;\; \widetilde{y} \in \mathcal{Y}^N. \tag{7.8.6}$$

Заметим, что распределение наблюдений $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$, получаемое из распределения (7.8.5) по формуле

$$f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \max_{b \in \mathcal{B}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, b) = f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widehat{b}(\widetilde{x}, \widetilde{y})), \;\; \widetilde{x} \in \mathcal{X}^N, \;\; \widetilde{y} \in \mathcal{Y}^N,$$

позволяет проверять адекватность модели 1.–6. схемы измерений (7.8.2), а именно если $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ — результат эксперимента и $f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$, то модель не адекватна. На рис. 7.7.1, 7.7.2, 7.8.1, 7.8.2 приведены примеры решений задач оценивания функциональных зависимостей [16].

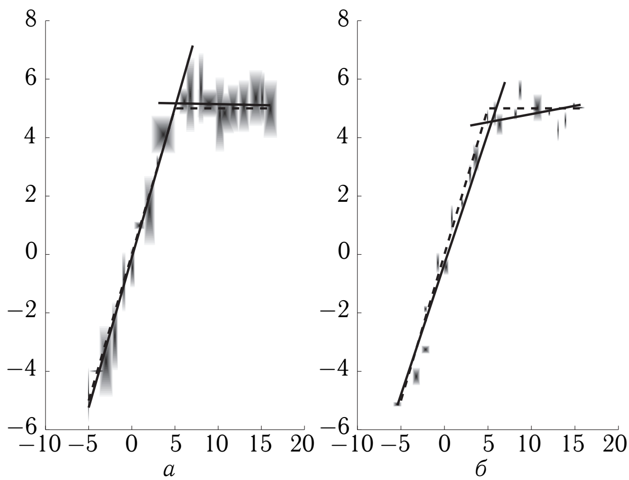


Рис. 7.8.1. Прямоугольники иллюстрируют распределения возможностей ошибок (μ_i, ν_i), $i = 1, \ldots, 15$, в (7.8.1), их центры — измеренные значения левых частей в (7.8.1), уровень темного в каждой точке прямоугольника характеризует возможность того, что эта точка — истинное измеряемое значение. Истинные прямые — штриховые, восстановленные — сплошные. *а*) Восстановление кусочно-линейной функции $F_b(x) = \begin{cases} a_1 x + a_0, \; x \in (-\infty, c], \\ b_1 x + b_0, \; x \in [c, \infty), \end{cases}$ $b = (a_0, a_1, b_0, b_1, c)$, $a_1 c + a_0 = b_1 c + b_0$, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{F_b, \; b \in \mathcal{R}^5\}$; *б*) данные, свидетельствующие о неадекватности модели схемы измерения (7.8.1)

[1]) Если определена *погрешность* оценивания функции $F_b(\cdot)$, $b \in \mathcal{B}$, и $\widehat{F}$ — наиболее точная ее оценка, то, вообще говоря, $\widehat{F} \neq F_{\widehat{b}}$, $\widehat{b} = \widehat{b}(\widetilde{x}, \widetilde{x})$ — оцениваемая характеристика исследуемого объекта.

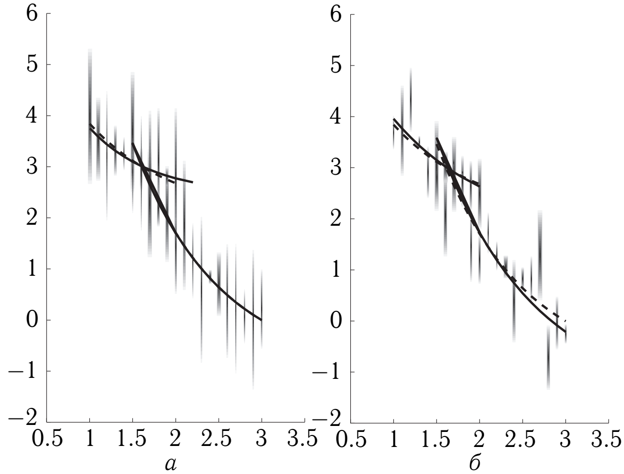


Рис. 7.8.2. *а*) Восстановление кусочно-экспоненциальной зависимости $F_b(x) = \begin{cases} a_1 e^{a_2 x} + a_3, \ x \in (-\infty, c], \\ b_1 e^{b_2 x} + b_3, \ x \in [c, \infty), \end{cases}$ $b = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, c)$, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{F_b, \ b \in \mathcal{R}^7\}$; *б*) данные, свидетельствующие о неадекватности модели схемы измерений (7.8.1). Истинные экспоненты — штриховые, восстановленные — сплошные

7.8.3. Оценивание ненаблюдаемых данных эксперимента. Согласно выражению (7.8.4) совместное распределение данных ξ, η и их наблюдаемых значений $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta}$ выражается равенством:

$$f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\xi,\eta}(\widetilde{x},\widetilde{y},x,y) = \max_{b\in\mathcal{B}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\xi,\eta,\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},x,y,b) = \tag{7.8.7}$$
$$= \max_{b\in\mathcal{B}} \min\{f^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-F_b(x)), f^{\xi|\beta}(x|b), f^{\beta}(b)\} =$$
$$= \min\{f^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-F_{\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y},x)}(x)), f^{\xi|\beta}(x|\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y},x)), f^{\beta}(\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y},x))\},$$
$$\widetilde{x}, x \in \mathcal{X}^N, \ \widetilde{y} \in \mathcal{Y}^N, \ y = F_{\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y},x)}(x),$$

где

$$\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y},x) = \arg\max_{b\in\mathcal{B}} \min\{f^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-F_b(x)), f^{\xi|\beta}(x|b), f^{\beta}(b)\}$$

— оценка максимальной возможности параметра β при $\widetilde{\xi} = \widetilde{x}$, $\widetilde{\eta} = \widetilde{y}$ и $\xi = x$. При полученных в эксперименте значениях $\widetilde{\xi} = \widetilde{x}$, $\widetilde{\eta} = \widetilde{y}$ оценкой максимальной возможности «истинных» данных эксперимента, уточняющих полученные значения $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, является оценка $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ максимальной возможности

$$(\widehat{x},\widehat{y}) = (\widehat{x}(\widetilde{x},\widetilde{y}), \widehat{y}(\widetilde{x},\widetilde{y})) =$$
$$= \arg\max_{\substack{x\in\mathcal{X}^N \\ y\in\mathcal{Y}^N}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\xi,\eta}(\widetilde{x},\widetilde{y},x,y), \ \widetilde{x} \in \mathcal{X}^N, \ \widetilde{y} \in \mathcal{Y}^N, \tag{7.8.8}$$

получаемая на основе распределения (7.8.7), согласно которому

$$(\widehat{x}(\widetilde{x},\widetilde{y}),\widehat{y}(\widetilde{x},\widetilde{y}),\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y})) = \\ = \arg \max_{\substack{x\in\mathcal{X}^N\\ y\in\mathcal{Y}^N\\ b\in\mathcal{B}(x,y)}} \min\{f^{\mu,\nu}(\widetilde{x}-x,\widetilde{y}-y), f^{\xi|\beta}(x|b), f^{\beta}(b)\}, \quad (7.8.9)$$

где $\widetilde{x}\in\mathcal{X}^N$, $\widetilde{y}\in\mathcal{Y}^N$, $\mathcal{B}(x,y)=\{b\in\mathcal{B},\ y=F_b(x)\}$, причем

$$\widehat{y}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = F_{\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y})}(\widehat{x}(\widetilde{x},\widetilde{y})).$$

Иначе говоря, в (7.8.9) уточненные данные эксперимента $\widehat{x}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ и $\widehat{y}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ получены совместно с оценкой $F_{\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y})}(\cdot)$ функции, связывающей выходные данные $\widehat{y}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ эксперимента с его входными данными, найденной в (7.8.6).

7.8.4. Прогнозирование. Пусть $\xi_0 = x_0$ — входные, $\eta_0 = F_\beta(x_0)$ — соответствующие выходные данные эксперимента. Без учета измерений (7.8.2), уточняющих значения нечеткого элемента β, определяющего нечеткий элемент $F_\beta(x_0)=\eta_0$, распределение переходной возможности

$$f^{\eta_0|\xi_0}(y_0|x_0) = \sup\{f^{\beta}(b)\,|\,b\in\mathcal{B}, y_0 = F_b(x_0)\},\ x_0\in\mathcal{X},\ y_0\in\mathcal{Y}.$$

Эта формула определяет априорное распределение возможностей прогнозируемых значений выхода эксперимента, отвечающих его входному значению $\xi_0 = x_0$. Для того, чтобы учесть измерения (7.8.2), воспользуемся формулой (7.8.5), согласно которой

$$f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\eta_0|\xi_0}(\widetilde{x},\widetilde{y},y_0|x_0) = \sup\{f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b)\,|\,b\in\mathcal{B},\ y_0=F_b(x_0)\}, \quad (7.8.10)$$
$$\widetilde{x}\in\mathcal{X}^N,\ \widetilde{y}\in\mathcal{Y}^N,\ y_0\in\mathcal{Y}.$$

В этом случае распределение возможностей прогнозируемых значений выхода эксперимента, отвечающих его входу $\xi_0 = x_0$ и значениям измерений $\widetilde{\xi}=\widetilde{x}$ и $\widetilde{\eta}=\widetilde{y}$, дается распределением переходной возможности

$$f^{\eta_0|\xi_0,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}}(y_0|x_0,\widetilde{x},\widetilde{y}),\ x_0,\widetilde{x}\in\mathcal{X}^N,\ y_0,\widetilde{y}\in\mathcal{Y}^N.$$

Оценкой максимальной возможности прогноза является

$$\widehat{y}_0(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0) = \arg\max_{y_0\in\mathcal{Y}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\eta_0|\xi_0}(\widetilde{x},\widetilde{y},y_0|x_0) = F_{\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0)}(x_0),\ x_0\in\mathcal{X}^N, \quad (7.8.11)$$

где

$$\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0) = \arg \max_{\substack{b\in\mathcal{B}\\ \widehat{y}_0(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0)=F_b(x_0)}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b)$$

— оценка максимальной возможности параметра β, определяющего функцию $F_\beta(\cdot)$, обеспечивающую наиболее возможный прогноз

(7.8.11), поскольку

$$(\widehat{y}_0(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0),\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0)) = \arg \max_{\substack{y_0\in\mathcal{Y}\\ b\in\mathcal{B}\\ y_0=F_b(x_0)}} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b).$$

Заметим, что оценка максимальной возможности $F_{\widehat{b}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0)}(\cdot)$ функции, определяющей прогноз $\widehat{y}_0(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0)$, отличается от ее оценки (7.8.6), основанной на измерениях (7.8.2).

Согласно принятой схеме измерения (7.8.1) данные эксперимента ξ_0, η_0 ненаблюдаемы, им соответствуют доступные наблюдению данные эксперимента $\widetilde{\xi}_0$, $\widetilde{\eta}_0$, получаемые по схеме

$$\widetilde{\xi}_0 = \xi_0 + \mu_0, \quad \widetilde{\eta}_0 = \eta_0 + \nu_0, \quad \eta_0 = F_b(\xi_0), \quad b \in \mathcal{B}. \tag{7.8.12}$$

Поэтому распределение переходной возможности есть

$$\begin{gathered} f^{\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\eta}_0|\xi_0,\eta_0,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0|x_0,y_0,\widetilde{x},\widetilde{y},b) = f^{\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\eta}_0|\xi_0,\eta_0,\beta}(\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0|x_0,y_0,b) = \\ = \begin{cases} f^{\mu_0,\nu_0}(\widetilde{x}_0-x_0,\widetilde{y}_0-y_0), & \text{если } y_0 = F_b(x_0), \\ 0, & \text{если } y_0 \neq F_b(x_0), \end{cases} \\ \widetilde{x}_0, x_0 \in \mathcal{X},\ \widetilde{y}_0, y_0 \in \mathcal{Y},\ b \in \mathcal{B}, \end{gathered} \tag{7.8.13}$$

где $f^{\mu_0,\nu_0}(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to[0,1]$ — распределение ошибок в (7.8.12), причем нечеткие элементы (μ_0,ν_0) в (7.8.12) и (μ,ν) в (7.8.2), естественно, независимы. Кроме того, при $\xi_0 = x_0$ и $\beta = b$ нечеткие элементы η_0 и $\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}$ также естественно считать независимыми, поэтому

$$\begin{gathered} f^{\eta_0,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta|\xi_0}(y_0,\widetilde{x},\widetilde{y},b|x_0) = \\ = \min\{f^{\eta_0|\xi_0,\beta}(y_0|x_0,b), f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\xi_0,\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0,b), f^{\beta|\xi_0}(b|x_0)\} = \\ = \min\{f^{\eta_0|\xi_0,\beta}(y_0|x_0,b), f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y}|b), f^{\beta}(b)\} = \\ = \min\{f^{\eta_0|\xi_0,\beta}(y_0|x_0,b), f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b)\} = \\ = \begin{cases} f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b), & \text{если } y_0 = F_b(x_0), \\ 0, & \text{если } y_0 \neq F_b(x_0). \end{cases} \end{gathered} \tag{7.8.14}$$

Согласно (7.8.13) и (7.8.14)

$$\begin{gathered} f^{\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\eta}_0,\eta_0,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta|\xi_0}(\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0,y_0,\widetilde{x},\widetilde{y},b|x_0) = \\ = \begin{cases} \min\{f^{\mu_0,\nu_0}(\widetilde{x}_0-x,\widetilde{y}_0-y_0), f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b)\}, & \text{если } y_0 = F_b(x_0), \\ 0, & \text{если } y_0 \neq F_b(x_0), \end{cases} \end{gathered}$$

и, соответственно, распределение переходной возможности

$$\begin{gathered} f^{\widetilde{\xi}_0,\widetilde{\eta}_0,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}|\xi_0}(\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0,\widetilde{x},\widetilde{y}|x_0) = \\ = \sup\{\min\{f^{\mu_0,\nu_0}(\widetilde{x}_0-x_0,\widetilde{y}_0-y_0), f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b)\} \mid b \in \mathcal{B}, \\ y_0 \in \mathcal{Y},\ y_0 = F_b(x_0)\} = \sup\{\min\{f^{\mu_0,\nu_0}(\widetilde{x}_0-x_0,\widetilde{y}_0-F_b(x_0)), \\ f^{\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y},b)\} \mid b \in \mathcal{B}\} \end{gathered}$$

при $\xi_0 = x_0$.

Список литературы

1. *Авдошин С. М., Белов В. В., Маслов В. П.* Математические аспекты синтеза вычислительных сред. М.: МИЭМ, 1984.
2. *Альсведе Р., Вегенер Н.* Задача поиска. М.: Мир, 1982.
3. *Ацель (Дебрецен) Я.* Некоторые общие методы в теории функциональнальных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений // Успехи математических наук. Т. XI, вып. 3(69), 1956, С. 3–68.
4. *Барра Ж.-Р.* Основные понятия математической статистики. М.: Мир, 1974.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
6. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
7. *Боровков А. А.* Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
8. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.
9. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра матриц // ДАН СССР, 1963. Т. 152, № 1. С. 24–27.
10. *Гихман Н. Н., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971.
11. *де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974.
12. *Девис М. Х. А.* Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.
13. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
14. *Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Скарин В. Д., Хачай М. Ю.* Математические методы в экономике. Екатеринбург.: У-Фактория, 2000.
15. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.
16. *Жучко О. В., Пытьев Ю. П.* Восстановление функциональной зависимости теоретико-возможностными методами // ЖВМ и МФ, 2003. Т. 43, № 5. С. 765–781.
17. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976, 165 с.
18. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.
19. *Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
20. *Кашьяп Р. Л., Рао А. Р.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983.
21. *Кириллов К. В., Чуличков А. И.* Редукция измерений в нечеткой модели эксперимента как решение задачи линейного программирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1999, № 2. С. 65–67.

22. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
23. *Леман Э.* Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991.
24. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
25. *Литвинов Г. Л.*, *Маслов В. П.*, *Шпиц Г. В.* Идемпотентный функциональный анализ: алгебраический подход // Математические заметки, 2001. Т. 69, № 5. С. 758–797.
26. *Майер П. А.* Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
27. *Маслов В. П.* О новом принципе суперпозиции для задачи оптимизации // УМН, 1987, т. 42, вып. 3 (255), с. 39–48.
28. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978.
29. *Миронов А. М.* Нечеткие модальные логики // Интеллектуальные системы, 2007. Т. 11. С. 201–230.
30. *Нгуен Ф. Т.* О возможностном подходе к анализу сведений. В сб. «Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения». Под ред. Р. Ягера. М.: Радио и связь, 1986. С. 285–292.
31. Нечеткие множества в моделях управления и искуственного интелекта // Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986.
32. *Норвич А. М.*, *Турксен И. Б.* Построение функции принадлежности. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Ред. Р. Ягер. М.: Радио и связь, 1986. С. 64–71.
33. *Орловский С. А.* Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
34. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.
35. *Папилин С. С.*, *Пытьев Ю. П.* Вероятностная и возможностная модели матричных игр двух субъектов // Математическое моделирование, 2010. Т. 22, № 12. С. 144–160. (*S. S. Papilin*, *Yu. P. Pyt'ev* Probability and possibility models of matrix games of two subjects // SP MAIK Nauka/Interperiodica Mathematical Models and Computer Simulations August 2011. V. 3, Issue 4. P. 528–540. DOI 10.1134/S2070048211040077. Print ISSN 2070-0482, Online ISSN 2070-0490.)
36. *Петров В. В.* Предельные теормы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
37. *Поппер К.* Логика и рост научного знания. М., 1983.
38. *Прохоров Ю. В.*, *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.
39. *Пугачев В. С.*, *Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000.
40. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
41. *Пытьев Ю. П.* Вероятность и возможность. Эмпирическая интерпретация и оценивание // Математические методы распознавания образов

(ММРО-12). Доклады 12-й Всероссийской конференции. МАКС Пресс, 2005. С. 192–195.
42. *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. 1-е изд. М.: Физматлит, 2007.
43. *Пытьев Ю. П.* Возможность. Элементы теории и применения. М.: Эдиториал УРСС, 2000, 192 с.
44. *Пытьев Ю. П.* Измерительно-вычислительный преобразователь как средство измерения // Автоматика и телемеханика, № 2, 2010. С. 141–158.
45. *Пытьев Ю. П.* К теории нелинейных измерительно-вычислительных систем // Математическое моделирование, 1992. Том 4, № 2. С. 76–94.
46. *Пытьев Ю. П.* Математические методы и алгоритмы эмпирического восстановления стохастических и нечетких моделей // Интеллектуальные системы, 2007. Т. 11, вып. 1–4. С. 277–327.
47. *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высшая школа, 1989, 351 с.
48. *Пытьев Ю. П.* Математическое моделирование субъективных суждений в научных исследованиях // Межд. конф. «Интеллектуализация обработки информации» (ИОИ-9), Черногория, г. Будва, 2012.
49. *Пытьев Ю. П.* Методы анализа и интерпретации эксперимента. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
50. *Пытьев Ю. П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М.: Наука, 2011; изд. 3-е, перераб. и доп.; М.: Физматлит, 2011.
51. *Пытьев Ю. П.* Моделирование субъективных суждений модельера-исследователя о модели объекта исследования // Математическое моделирование, 2013, т. 25, № 4, с. 102–125.
52. *Пытьев Ю. П.* Неопределенные нечеткие модели и их применения // Интеллектуальные системы, 2004. Т. 8, вып. 1–4. С. 147–310.
53. *Пытьев Ю. П.* О содержательном толковании возможности и необходимости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1999. № 5. С. 3–6.
54. *Пытьев Ю. П.* О стохастических моделях возможности // Интеллектуальные системы, 2001. Т. 6, № 1–4. С. 25–62.
55. *Пытьев Ю. П.* Оптимальные решения в теории возможностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1999. № 6. С. 3–7.
56. *Пытьев Ю. П.* Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 1. Мера возможности: определение, свойства // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1997. № 3. С. 3–7.
57. *Пытьев Ю. П.* Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 2. Мера необходимости: определение,

свойства. Интегрирование по возможности и по необходимости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1997. № 4. С. 3–7.

58. *Пытьев Ю. П.* Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 3. Независимость, условные возможность и необходимость. Условный относительно сигма-алгебры интеграл // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1997. № 6. С. 3–5.
59. *Пытьев Ю. П.* Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 4. Максимальное продолжение возможности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1998. № 1. С. 3–6.
60. *Пытьев Ю. П.* Основы теории возможностей. Методы оптимального оценивания и принятия решений. 5. Нечеткие элементы. Независимость. Условные распределения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия, 1998. № 2. С. 3–8.
61. *Пытьев Ю. П.* Псевдообратный оператор. Свойства и применения // Матем. сб. 1983. Т. 118 (160), № 1 (5). С. 19–49.
62. *Пытьев Ю. П.* Эмпирическое восстановление мер возможности и правдоподобия возможности в моделях экспертных решений // Автоматика и телемеханика, 2010, № 3. С. 131–146.
63. *Пытьев Ю. П., Животников Г. С.* Теоретико-вероятностные и теоретико-возможностные модели распознавания. Сравнительный анализ // Интеллектуальные системы, 2002. Т. 6, вып. 1–4. С. 63–90.
64. *Пытьев Ю. П., Шишмарев И. А.* Теория вероятностей, математическая статистика и элементы теории возможностей для физиков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010, 407 с.
65. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
66. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, Физматлит, 1985.
67. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. СПб. : Наука, 2006.
68. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей. М.: Изд. Моск. ун-та, 1972.
69. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
70. *Фаломкина О. В.* Исследование нечетких и неопределенных нечетких методов анализа и интерпретации данных. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. 2006.
71. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Наука, 1984, 582 с.
72. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
73. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967.

74. *Bellman K., Kalaba R. and Zadeh L.* Abstraction and Pattern Classification // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1966, 13. P. 1–7.
75. *Bhavsar V. C., Mironov A. M.* Fuzzy modal logics // Proceedings of Workshop on Multi-Valued Logic Programming and Applications, MVLPA 2006, Seattle, WA. 2006. August. P. 73–88.
76. *Bilgic T., Turksen I. B.* Measurement of membership functions: theoretical and empirical work. In H. Prade D. Dubois and H. J. Zimmermann, editors, International Handbook of Fuzzy Sets and Possibility Theory. Kluwer Academic, Norwell, MA, 1998.
77. *Choquet G.* Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier, 1953/1954, 5, 131–295.
78. *Cooman G. de.* Possibility theory I: the measure- and integral-theoretic groundwork // International Journal of General Systems, 25. 1997. P. 291–323.
79. *Cooman G. de.* Possibility Theory II: Conditional Possibility // International Journal of General Systems, 25. 1997. P. 325–351.
80. *Cooman G. de.* Possibility Theory III: Possibilistic Independence // International Journal of General Systems, 25. 1997. P. 353–371.
81. *Cowell R. G., Dawid A. P., Lauritzen S. L., Spiegelhalter D. J.* Probabilistic Networks and Expert Systems. Springer-Verlag, 1999.
82. *Dan A. Ralescu, Michio Sugeno.* Fuzzy integral representation // Fuzzy Sets and Systems 92, 1997. P. 191–196.
83. *Dempster A. P.* A generalization of Bayesian inference. J. Roy Statist. Soc., 1968, B 30. P. 205–247.
84. *Dempster A. P.* Upper and Lower probabilities induced by a multivalued mapping // Ann. Math. Statist., 1967, 38. P. 325–339.
85. *D'akonova I. V., Matveeva T. V., Pyt'ev Yu. P.* Reduction of Measurements of Fuzzy Sets, Pattern Recognit. Image Anal., 2001. V. 11, № 4. P. 711–717.
86. *Dubois D.* Possibility theory and statistical reasoning // Computational Statistics and Data Analysis. 2006. V. 51. P. 47–69.
87. *Dubois D., Nguyen H. T., Prade H.* Possibility Theory, Probability and Fuzzy Sets: Misunderstandings, Bridges and Gaps, in Fundamentals of Fuzzy Sets, ed. by D. Dubois and H. Prade. Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 343–438.
88. *Dubois D., Prade H.* Formal representations of uncertainty // Decision-Making Process / Ed. by D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade. London: Wiley-ISTE, 2009.
89. *Dubois D., Prade H.* On the Combination of Evidence in Various Mathematical Frameworks // Reliability Data Collection and Analysis / Ed. by J. Flamm, T. Luisi. 1992. P. 213–241.
90. *Dubois D., Prade H.* Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 32:35–66, 2001.

91. *Dubois D., Prade H.* Possibility theory: qualitative and quantitative aspects // Quantified Representation of Uncertainty and Imprecision / Ed. by D. M. Gabbay, P. Smets. Kluwer Academic Publishers, 1998. — V. 1 of Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. P. 169–226.

92. *Dubois D., Prade H.* Theorie des Possibilites. 1988, MASSON, Paris-Milano-Barcelona-Mexico. (*Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. М.: Радио и связь, 1990.)

93. *Dubois D., Prade H.* Unfair coins and necessity measures: towards a possibilistic interpretation of histograms // Fuzzy Sets and Systems. 1983. V. 10. P. 15–20.

94. *Dubois D., Prade H., Sandri S.* On Possibility/Probability Transformations // Proceedings of Fourth IFSA Conference. Kluwer Academic Publ, 1993. P. 103–112.

95. *Eric Raufaste and Rui Da Silva Neves.* Empirical evaluation of possibility theory in human radiological diagnosis, in Proc. of the 13 th Europ. Conf. on Artificial Intelligence (ECAI'98), Brighton, UK, aug. 23–28, 1998, John Wiley and Sons. P. 124–128.

96. *Farinas del Cerro L., Herzig A.* A modal analysis of possibility theory, in: Symbolic and Qualitative Approaches to Uncertainty, Lecture Notes in Comput. Sci. 548 (R. Kruse and P. Siegel, Eds.), Springer–Verlag, 1991. P. 58–62.

97. *Goodman I. R.* Fuzzy sets as equivalent classes of random sets, in R. R. Yager (ed.) Fuzzy Sets and Possibility Theory, Pergamon Press, Oxford, 1982. P. 327–343.

98. *Hoeffding W.* Probability of sums of bounded random variables // J. Amer. Statist. Assoc. 1963. V. 58, № 301. P. 213–226.

99. *Inagaki T.* Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via Dempster-Shafer theory // Reliability, IEEE Transactions on. 1991. V. 40, № 2. P. 182–188.

100. *Jaynes E. T.* Prior Probabilities // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. 1968. V. 4, № 3. P. 227–241.

101. *Jeffreys H.* An Invariant Form for the Prior Probability in Estimation Problems // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1946. V. 186, № 1007. P. 453–461.

102. *Josang A.* A Logic for Uncertain Probabilities // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 2001. June. V. 9, № 3. P. 279–311.

103. *Josang A.* Multi-Agent Preference Combination using Subjective Logic // 11th Workshop on Preferences and Soft Constraints (SofT'11). Perugia, 2011. September.

104. *Josang A.*, *Hankin R.* Interpretation and Fusion of Hyper Opinions in Subjective Logic // 15th International Conference on Information Fusion (FUSION 2012). Singapore, 2012. July.
105. *Joslyn*, *Cliff.* Towards an Independent Possibility Theory with an Objective Semantics. in: Proc. 1995 Int. Workshop on Foundations and Applications of Possibility Theory.
106. *Klement E. P.* Characterization of finite fuzzy measures using Markov-kernels // J. Math. Anal. Appl., 1980, 75. P. 330–339.
107. *Klement E. P.* Characterization of fuzzy measures constructed by means of triangular norms // J. Math. Anal. Appl., 1980, 75. P. 330–339.
108. *Klement E. P.* Fuzzy σ-algebra and fuzzy measurable functions // Fuzzy Sets and Systems, 1980, 4. P. 83–93.
109. *Klement E. P.*, *Weber S.* Generalized measures // Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40. P. 375–394.
110. *Klir G. J.* On fuzzy-set interpretation of possibility theory // Fuzzy Sets and Systems, 1998, 104.
111. *Klopotek M. A.*, *Wierzchoń S. T.* Empirical Models for the Dempster–Shafer Theory // Belief Functions in Business Decisions / Ed. by R. P. Srivastava, T. J. Mock. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 2002. V. 88 of Studies in Fuzziness and Soft Computing. P. 62–112.
112. *Kolesarova A.* On Sudgeno integral representation of possibility measures of fuzzy events // Int. J. Fuzzy Mathematics.
113. *Koopman B. O.* The axioms and algebra of intuitive probability // Ann. of Math., 1940, 41. P. 269–292.
114. *Kyburg Jr.*, *Smokler H. E.* (ed). Studies in Subjective probability, John Wiley and Sons, Inc. N. Y., 1964.
115. *Li J.*, *Mesiar R.* Lusin's theorem on monotone measure spaces // Fuzz. 2011. V. 175. P. 75–86.
116. *Masson M.*, *Denoeux T.* Inferring a possibility distribution from empirical data // Fuzzy Sets and Systems. 2006. V. 157. P. 319–340.
117. *Matveeva T. V.*, *Pyt'ev Yu. P.* On Possibility–Theoretic Methods for Measurement Interpretation // Pattern Recognition and Image Analysis, 2002. V. 12, № 3. P. 316–325.
118. *Mesiar R.* Possibility measures, integration and fuzzy possibility measures // Fuzzy Sets and Systems 92, 1997. P. 191–196.
119. *Murofushi T.*, *Uchino K.*, *Asahina S.* Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory // Fuzzy Sets and Systems. 2004. V. 146. P. 135–146.
120. *Neven J.* Bases Mathématiques du calcul des probabilités. Masson et al., Paris, 1964. (*Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.)

121. *Orlovski S. A.* Calculus of Decomposable Properties. Fuzzy Sets, and Decisions. Allerton Press, Inc. N. Y., 1994.
122. *Pap E.* On non-additive set functions // Atti. Sem. Math. Fis. Univ., Modena, 39, 1991. P. 345–360.
123. *Pyt'ev Yu. P.* Fuzzy Computer-Aided Measuring Systems // Pattern Recognition and Image Analysis Systems, 1993. V. 3, № 2. P. 150–157.
124. *Pyt'ev Yu. P.* Methods of the Theory of Possibilities in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: I. Measures of Possibility and Necessity, and Integration with respect to Possibility and Necessity // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications, 1997. V. 7, № 3. P. 338–346.
125. *Pyt'ev Yu. P.* Methods of the Theory of Possibilities in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: II. Independence and Conditional Possibility and Necessity // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications, 1998. V. 8, № 1. P. 1–7.
126. *Pyt'ev Yu. P.* Methods of the Theory of Possibilities in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: III. Fussy Elements, Independence, Conditional Distributions, and Optimal Estimation // Pattern Recognition and Image Analysis, 1999. V. 9, № 3. P. 416–426.
127. *Pyt'ev Yu. P.* Stochastic models of possibility // Pattern Recognition and Image Analysis, 2002. V. 12, № 4. P. 376–396.
128. *Pyt'ev Yu. P.* The Methods of the Possibility Theory in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: IV. The Methods of Measurement Reduction. The Principle of Relativity in the Possibility Theory // Pattern Recognition and Image Analysis, 2000. V. 10, № 1. P. 43–52.
129. *Pyt'ev Yu. P.* The Methods of the Possibility Theory in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: V. The Possibility-Theory Methods of Measurement. Reduction of Measurement of Fuzzy Sets // Pattern Recognition and Image Analysis, 2000. V. 10, № 4. P. 447–459.
130. *Pyt'ev Yu. P.* The Methods of the Possibility Theory in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: VI. Fussy Sets. Independence. P-Complection. Methods for Estimation of Fuzzy Sets and Their Parameters // Pattern Recognition and Image Analysis, 2002. V. 12, № 2. P. 107–115.
131. *Pyt'ev Yu. P.* Uncertain Fuzzy Sets: Theory and Applications. // Pattern Recognition and Image Analysis, 1995. V. 5, № 1. P. 13–34.
132. *Pyt'ev Yu. P.*, *Zhivotnikov G. S.* On the Methods of Possibility Theory and Morphological Image Analysis // Pattern Recognition and Image Analysis, 2004. V. 14, № 1. P. 60–71.
133. *Pyt'ev Yu. P.* Uncertain Fuzzy Models and Their Applications: 1. Uncertain, Fuzzy and Uncertain Fuzzy Elements and Sets // Pattern Recognition and Image Analysis, 2004. V. 14, № 4. P. 541–570.

134. *Pyt'ev Yu. P.*, *Zhuchko O. V.* The Methods of the Possibility Theory in the Problems of Optimal Estimation and Decision Making: VII. Recognition of Functional Dependences from Experimental Data // Pattern Recognition and Image Analysis, 2002. V. 12, № 2. P. 116–129.
135. *Pyt'ev Yu.* Mathematical Modeling and Computer Simulations. Simulation of Subjective Judgements Made by a Researcher/Modeler about the Model of the Research Object // 2013. — V. 5, № 6, p. 538–557. doi:10.1134/S2070048213060094
136. *Savage L. J.* The Foundations of Statistics, Dover. N. Y., 1972.
137. *Shackle G. L. S.* Decision, order and time in human affairs. 2nd edition. Cambridge University Press, 1961.
138. *Shafer G.* A mathematical theory of evidence. Princeton N. J.: Princeton University Press, 1976.
139. *Shilkret N.* Maxitive measure and integration // Indag. Math. 1971. V. 33. P. 109–116.
140. *Slowinski R.* Handbook of Fuzzy Sets and Possibility Theory, Operations Research and Statistics, Kluwer Academic Publishers, 1998.
141. *Smarandache F.* Unification of Fusion Theories (UFT) // International Journal of Applied Mathematics & Statistics. 2004. V. 2. P. 1–14.
142. *Stevens S. S.* Psychophysics. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1975.
143. *Sugeno M.* Fuzzy decision-making problems // Trans. SICE, 1975. V. 11, № 6. P. 85–92.
144. *Sugeno M.* Fuzzy Measure and Fuzzy Integral // Trans. SICE, 1972. V. 8, № 2. P. 95–102.
145. *Sugeno M.* Inverse Operations on Fuzzy Integral and Conditional Fuzzy Measures // Trans. SICE, 1975. V. 11, № 1. P. 32–37.
146. *Vejnarova J.* Conditional Independence Relations in Possibility Theory // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 8(3):253–269, 2000.
147. *Wald A.* Statistical Decision Functions. N. Y., Wiley, 1950. (*Вальд А.* Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960.)
148. *Wang P.* A Defect in Dempster–Shafer Theory // In Proceedings of the Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. 1994. P. 560–566.
149. *Watanabe T.*, *Tanaka T.* On Lusin's theorem for non-additive measures that take values in an ordered topological vector space // Fuzzy sets and Systems. 2014. V. 244. P. 41–50.
150. *Weber S.* $\perp$-decomposable measure and integrals for Archimedian t-conorm // J. Math. Anal. Appl. 101, 1984. P. 114–138.
151. *Weber S.* Two integrals and some modified version — critical remarks // Fuzzy Sets and Systems. 1986. V. 20. P. 97–105.
152. *Wolkenhauer O.* Possibility Theory with Applications to Data Analysis. Research Studies Press, 1998.

153. *Yager R. R.* Conditional Approach to Possibility-Probability Fusion // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2012. February. V. 20, № 1. P. 46–56.
154. *Yager R. R.* Entailment Principle for Measure-Based Uncertainty // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2012. June. V. 20, № 3. P. 526–535.
155. *Yager R. R.* (ed.) Fuzzy Sets and Possibility Theory. Recent Developments. New York, Oxford, Toronto: Pergamon Press, 1982. 633 p.
156. *Yager R. R.* On the Dempster-Shafer framework and new combination rules // Inf. Sci. 1987. March. V. 41, № 2. P. 93–137.
157. *Zadeh L.* A simple view of the Dempster-Shafer Theory of Evidence and its implication for the rule of combination // The AI Magazine. 1986. V. 7, № 2. P. 85–90.
158. *Zadeh L. A.* Fuzzy Sets // Information and Control, 1965. V. 8. P. 235–350.
159. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978, № 1. P. 3–28.

Список обозначений

$\blacksquare$ — конец доказательства;
$\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению;
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — σ-алгебры; $\mathcal{P}(\Omega)$ — класс всех подмножеств в Ω;
Pr, $\mathrm{Pr}(\cdot)$ — вероятность;
$\mathrm{Pr}(\cdot|C)$ — условная при условии C вероятность;
$\mathrm{pr}_i \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{Pr}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$;
$\mathbb{P}\mathrm{r}$ — класс вероятностей $\mathrm{Pr}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$,
удовлетворяющих условию $\mathrm{pr}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots, \mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2 + \ldots = 1$;
Если $\omega^{(i)} \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $i = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots)$ — элемент $\Omega \times \Omega \times \ldots = \Omega^\infty$, $\omega \in \Omega^\infty$, последовательность $\{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots\}$ — одноточечное подмножество Ω^∞, $\{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots\} = \{\omega\} \subset \Omega^\infty$;
P, $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$ — возможность (мера возможности);
$\mathrm{P}(\cdot|C)$ — условная при условии C возможность;
$\mathrm{p}_i \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{P}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \ldots$;
$\mathbb{P}$ — класс возможностей $\mathrm{P}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathcal{L}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$,
удовлетворяющих условию $1 = \mathrm{p}_1 \geqslant \mathrm{pr}_2 \geqslant \ldots$;
$\mathbf{Pr}, \mathcal{P}r = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}\}$;
$\mathbf{P}, \mathcal{P} = \{(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr}),\ \mathrm{P} \in \mathbb{P}\}$;
$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$, $(X, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, $(X, \mathcal{P}(X), \mathrm{P})$ — пространства с возможностью;
$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{Pr})$, $(X, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ — вероятностные пространства;
$\mathcal{L} = \big([0,1], \leqslant, +, \bullet\big)$ — шкала значений возможности,
$+ \sim \max$, $\bullet \sim \min$;
$\mathcal{L}' = ([0,1], \leqslant, +, \times)$ — шкала значений возможности P' (второй вариант), $a + b = \max\{a, b\}$, $a \times b = a \cdot b$, $a, b \in [0,1]$;
N, $\mathrm{N}(\cdot)\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ — необходимость (мера необходимости);
$\mathrm{N}(\cdot|C)$ — условная при условии C необходимость;
$\widetilde{\mathcal{L}} = \big([0,1], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\bullet}\big) = \big(\widetilde{[\widetilde{0}, \widetilde{1}]}, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\bullet}\big)$ — шкала значений необходимости, $\widetilde{+} \sim \min$, $\widetilde{\bullet} \sim \max$;
$\widetilde{\mathcal{L}}' = ([0,1], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$ — шкала значений необходимости N' (второй вариант), $a \widetilde{+} b = \min\{a, b\}$, $a \widetilde{\times} b = a + b - ab$, $a, b \in [0,1]$;
$\mathcal{L}^+ = ([0, \infty), \leqslant, +, \times)$, $\mathcal{L}^- = ((-\infty, 0], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times})$ — шкалы значений математических P'-ожиданий $\mathsf{E}^+(\cdot)\colon \mathcal{L}^+(X) \to \mathcal{L}^+$, $\mathsf{E}^-(\cdot)\colon \mathcal{L}^-(X) \to \mathcal{L}^-$, где $\mathcal{L}^+(X)$, $\mathcal{L}^-(X)$ — классы функций $X \to \mathcal{L}^+$, $X \to \mathcal{L}^-$ (второй вариант);

$\mathcal{L} = ([0,1], \leqslant, +, \times) = ([0,1], \leqslant, \max, \min)$ — шкала значений правдоподобия Pl, гл. 5;

$\widehat{\mathcal{L}} = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \widehat{+}, \widehat{\times}) = ([0,1], \widehat{\leqslant}, \min, \max)$ — шкала значений доверия Bel, гл. 5;

$\mathcal{L}^- \otimes \mathcal{L}^+$ — шкала значений математического P′-ожидания $\mathsf{E}(\cdot)\colon \mathcal{L}^-(X) \otimes \mathcal{L}^+(X) \to \mathcal{L}^- \otimes \mathcal{L}^+$ (второй вариант);

$\widetilde{\mathcal{L}}_l = ([0,l], \widetilde{\leqslant}, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$, $\widetilde{\mathcal{L}}_{-l} = ([-l,0], \widehat{\widetilde{\leqslant}}, \widehat{\widetilde{+}}, \widehat{\widetilde{\times}})$ — шкалы значений математических N′-ожиданий $\widetilde{\mathsf{E}}^l(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}_l(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}_l$, $\widetilde{\mathsf{E}}^{-l}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}_{-l}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}_{-l}$, $l > 0$ (второй вариант);

Γ — класс непрерывных строго монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$;

$\widetilde{\Gamma}$ — класс монотонных функций $\gamma(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = 1$;

$\Gamma\circ = \{\gamma\circ\colon \mathcal{L}(\Omega) \to \mathcal{L}\} \quad \gamma \circ f(\omega) \overset{\triangle}{=} \gamma(f(\omega))$, $\omega \in \Omega, f(\cdot) \in \mathcal{L}(\Omega)$;

$\Gamma* = \{\gamma*\colon \mathcal{L}(\mathcal{L}(\Omega)) \to \mathcal{L}\} \quad \gamma * \mathrm{p}\big(f(\cdot)\big) \overset{\triangle}{=} \gamma(\mathrm{p}(\gamma^{-1} \circ f(\cdot)))$;

$\gamma \circ \mathrm{P}(A) \overset{\triangle}{=} \gamma(\mathrm{P}(A)), A \in \mathcal{P}(\Omega)$;

$\Gamma(\mathrm{Pr})$ — класс функций $\gamma(\cdot) \in \widetilde{\Gamma}$, определяющих возможность P, максимально согласованную с вероятностью Pr;

$\Gamma_{A^\cdot} = \{(x,y) \in Y \times X,\ x \in A^y\}$ — график $A^\cdot$;

$\overline{\Gamma}$ — группа автоморфизмов шкалы $\mathcal{L}$, $\gamma\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $\gamma \in \overline{\Gamma}$, и группа изоморфизмов $\gamma\colon \mathcal{L} \to \gamma\mathcal{L}$;

Γ' — класс функций $\gamma'_\alpha(a) = a^\alpha$, $a \in [0,1]$, $\alpha > 0$;

$a \bullet b = \min\{a,b\}$, $a, b \in [0,1]$;

$(f \bullet g)(x) \overset{\triangle}{=} f(x) \bullet g(x)$;

$(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n)(x) \overset{\triangle}{=} \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n(x)$, $\quad (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n)(\cdot) \equiv \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bullet}} f_n(\cdot)$;

$(a \bullet f)(x) \overset{\triangle}{=} a \bullet f(x)$, $x \in X$, $\quad (a \bullet f)(\cdot) \equiv a \bullet f(\cdot)$;

$a \boldsymbol{+} b = \max\{a,b\}$, $a, b \in [0,1]$;

$(f \boldsymbol{+} g)(x) \overset{\triangle}{=} f(x) \boldsymbol{+} g(x)$, $x \in X$;

$(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\boldsymbol{+}}} f_n)(x) \overset{\triangle}{=} \overset{\infty}{\underset{n=1}{\boldsymbol{+}}} f_n(x)$, $x \in X$, $\quad (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\boldsymbol{+}}} f_n)(\cdot) \equiv \overset{\infty}{\underset{n=1}{\boldsymbol{+}}} f_n(\cdot)$;

Θ — класс непрерывных строго монотонных функций $\theta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$;

$(\theta \circ f)(x) \overset{\triangle}{=} \theta(f(x))$, $x \in X$, $\quad (\theta \circ f)(\cdot) \equiv \theta \circ f(\cdot)$, $\theta(\cdot) \in \Theta$;

$\Theta' = \{\theta'_\beta(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1],\ \beta > 0\}$;

$\theta'_\beta(a) = 1 - a^\beta$, $a \in [0,1]$, $\beta > 0$;

$a \,\widetilde{\bullet}\, b = \theta^{-1}\big((\theta a) \bullet (\theta b)\big)$, $\theta(\cdot) \in \Theta$;

$a \,\widetilde{\boldsymbol{+}}\, b = \theta^{-1}\big((\theta a) \boldsymbol{+} (\theta b)\big)$, $\theta(\cdot) \in \Theta, a, b \in [0,1]$;

$\underset{j \in J}{\boldsymbol{+}} \sim \sup\limits_{j \in J}$, $\quad \underset{j \in J}{\bullet} \sim \inf\limits_{j \in J}$;

$\sup\limits_{x \in X} f(x) \equiv \sup\{f(x) \mid x \in X\}$;
$\mathcal{L}(X), \widetilde{\mathcal{L}}(X)$ — классы функций $f(\cdot)\colon X \to \mathcal{L}$, $\widetilde{f}(\cdot)\colon X \to \widetilde{\mathcal{L}}$;
$\mathcal{L}\big(\mathcal{L}(X)\big)$ — класс интегралов $\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to [0,1]$;
$\mathrm{p}(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ — p-интеграл;
$\mathrm{p}_g\big(f(\cdot)\big) \stackrel{\triangle}{=} \sup\limits_{x \in X} \min\big\{f(x), g(x)\big\}$;
$\mathrm{p}'_g\big(f(\cdot)\big) = \sup\limits_{x \in X} \big(f(x) \cdot g(x)\big)$;
$\mathrm{n}'_{\widetilde{h}}\big(\widetilde{f}(\cdot)\big) = \inf\limits_{x \in X} \big(\widetilde{h}(x) + \widetilde{f}(x) - \widetilde{h}(x)\widetilde{f}(x)\big)$;
$\mathrm{n}(\cdot)\colon \widetilde{\mathcal{L}}(X) \to \widetilde{\mathcal{L}}$ — n-интеграл;
$\mathrm{n}_{\widetilde{h}}\big(\widetilde{f}(\cdot)\big) = \inf\limits_{x \in X} \max\big\{\widetilde{f}(x), \widetilde{h}(x)\big\}$;
$\mathrm{p}(\cdot|C)(\cdot)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ —
условный относительно σ-алгебры C интеграл;
$\mathrm{p}(\cdot|\eta)\colon \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}$ —
условный относительно нечеткого элемента η интеграл;
$\mathrm{Pr} \sim> \mathrm{P}$ ($\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$) – возможность P согласована
(максимально согласована) с вероятностью Pr;
$\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}\colon \mathrm{P}(A) = \widetilde{\gamma}(\mathrm{Pr}(A))$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$;
$\mathrm{Pr} \overset{\mathcal{A}}{\approx>} \mathrm{P}$: возможность P, максимально согласованная
с вероятностью Pr на σ-алгебре $\mathcal{A}$;
$\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \{\gamma \circ \mathrm{P}, \gamma\circ \in \Gamma\circ, \mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}\}$, $\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}$;
$\mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}, \mathrm{P} \in \mathbb{P}(\mathrm{Pr})\}$;
$\mathbb{P}_{(e)}$ — класс возможностей, удовлетворяющих условиям
$1 \overset{0.}{=} \mathrm{p}_1 \overset{e_1}{\geqslant} \mathrm{p}_2 \overset{e_2}{\geqslant} \ldots$,
где $e = 0.e_1e_2\ldots$ — двоичная запись числа из $(0,1)$,
$e_i = 1 \sim$ «$>$», $e_i = 0 \sim$ «$=$», $i = 1, 2, \ldots$;
$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$ — класс вероятностей, соответствующих классу $\mathbb{P}_{(e)}$
возможностей, $\forall\,\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}, \forall\,\mathrm{P} \in \mathbb{P}_{(e)}$ $\mathrm{Pr} \approx> \mathrm{P}$;
$\mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)} = \{\mathrm{Pr} \in \mathbb{P}\mathrm{r},\ \mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \mathbb{P}_{(e)}\}$;
$\mathbb{P}_{(e)} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathbb{P}\mathrm{r}(\mathrm{P}) = \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}\}$, $e \in (0,1)$;
$\mathbb{P} = \bigcup\limits_{e \in (0,1)} \mathbb{P}_{(e)}$, $\mathbb{P}\mathrm{r} = \bigcup\limits_{e \in (0,1)} \mathbb{P}\mathrm{r}_{(e)}$;
L — риск потерь;
$L(\pi(\cdot))$ — риск потерь, сопутствующих правилу решения $\pi(\cdot)$;
P L — возможность потерь (possibility of the loss);
N L — необходимость потерь (necessity of the loss);
Pr E — вероятность ошибки (probability of the error);
$\mathrm{pr}l_{\cdot,\cdot}$ — вероятность потерь;
$\mathsf{E}\,\mathrm{Pr}(\pi^{\delta|\xi})$ — ожидаемая вероятность потерь, сопутствующих правилу
решения $\pi^{\delta|\xi}$;
P E — возможность ошибки (possibility of the error);
N E — необходимость ошибки (necessity of the error);
ξ, η — нечеткие элементы;

$g^{\xi}(\cdot), f^{\xi}(\cdot), \widetilde{g}^{\xi}(\cdot), \widetilde{f}^{\xi}(\cdot)$ — распределение ξ;
$g^{\xi}(x) = \mathrm{P}(\xi = x),\ x \in X,\ \widetilde{g}^{\xi}(x) = \mathrm{N}(\xi \neq x),\ x \in X$;
$A^{\boldsymbol{\cdot}}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$ — многозначное отображение;
A^{η} — нечеткое множество, образ нечеткого элемента η при отображении $A^{\boldsymbol{\cdot}}\colon Y \to \mathcal{P}(X)$; $A^{\boldsymbol{\cdot}}$ обозначает и нечеткое множество;
$g^{A^{\eta}}(\cdot), f^{A^{\eta}}(\cdot), f^{A^{\boldsymbol{\cdot}}}(\cdot)$ — индикаторная функция (одноточечного покрытия) нечеткого множества $A^{\eta}, A^{\boldsymbol{\cdot}}$;
$A_{\boldsymbol{\cdot}}\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ — многозначное отображение, обратное $A^{\boldsymbol{\cdot}}$;
E — символ математического ожидания;
$\mathrm{Pr}|_{\mathcal{A}}$ — сужение вероятности Pr на σ-алгебру $\mathcal{A}$;
$\mathrm{P}|_{\mathcal{A}}$ — сужение возможности P на σ-алгебру $\mathcal{A}$;
$\mathcal{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;
$\mathcal{B}^{(n)}$ — σ-алгебра борелевских множеств $\mathcal{R}^n$;
$\operatorname*{vraimax}_{x\in A} \varphi(x) \stackrel{\triangle}{=} \inf_{Z\in\mathcal{Z}_A} \sup_{x\in A\setminus Z} \varphi(x)$ — существенный максимум $\varphi(x)$, $x \in A$; $\mathcal{Z}_A$ — класс подмножеств A нулевой меры Лебега;
$\Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})$ — область в Ω принятия гипотезы $x = x_0$ против альтернативы $x = x_1$, отвечающая наиболее мощному критерию уровня доверия pr;
$\mathcal{D}_{\mathrm{pr}} \stackrel{\triangle}{=} \big\{(\omega, x_0) \in \Omega \times X,\ \omega \in \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr}),\ (x_0, x_1) \in Z\big\}$ — дискриминантное множество;
$Z \subset X \times X$ — фиксированное симметричное антирефлексивное отношение;
$\Phi(x_0, \mathrm{pr}) = \Phi(x_0, x_1, \mathrm{pr})|_{(x_0,x_1)\in Z},\ x_0 \in X$;
$\Phi^{-1}(\omega, \mathrm{pr}) = \big\{x_0 \in X,\ (\omega, x_0) \in \mathcal{D}_{\mathrm{pr}}\big\}$;
$\Phi(\cdot; \mathrm{pr})\colon X \to \mathcal{A}^n$;
$\Phi^{-1}(\cdot; \mathrm{pr})\colon \Omega^n \to \mathcal{P}(X)$;
$\pi^{\delta|\xi}(\cdot|\cdot)$ — нечеткое правило решения (оценивания) — распределение переходной возможности $\Pi(\cdot|\cdot)$;
$\mathrm{p}l^{\Lambda}(\cdot,\cdot)\colon \mathrm{K} \times \mathrm{D} \to [0,1]$ ($\mathrm{p}l_{\cdot,\cdot}\colon \mathrm{K} \times \mathrm{D} \to [0,1]$) — индикаторная функция нечеткого множества Λ, определенного на $(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y)$ со значениями в $\mathcal{P}(\mathrm{K} \times \mathrm{D})$, ее значение $\mathrm{p}l(k,d) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{P}_Y\big((k,d) \in \Lambda\big)$ ($\mathrm{p}l_{k,d}$), возможность покрытия точки (k,d) нечетким множеством Λ;
$l(\omega, x),\ \omega \in \Omega,$ — плотность $\mathrm{Pr}(\cdot, x)\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ относительно меры $m(\cdot)$ на $\mathcal{A}$, не зависящей от $x \in X$;
$\mathcal{R}(A) = \{Ax,\ x \in X\}$ — пространство значений оператора A;
$\mathcal{N}(A) = \{x \in X,\ Ax = 0\}$ — ноль-пространство (ядро) оператора A;
A^* — оператор, сопряженный с A;
$A^{-1}(A^-)$ — оператор, обратный (псевдообратный) A;
$A^{1/2}$ — положительный квадратный корень из положительного оператора $A = A^* \geqslant 0$;
$\big(Y, \mathcal{P}(Y), \mathrm{P}_Y^{\eta}, \mathrm{N}_Y^{\eta}\big)$ — пространство с возможностью и с необходимостью, нечеткое пространство;

$\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} = \mathrm{P}_Y\big((k,d)\in\Lambda^y\big) = \mathrm{P}_Y\big(\{y\in Y,\ (k,d)\in\Lambda^y\}\big)$;
$\mathrm{n}l^{\Lambda}_{k,d} = \mathrm{N}_Y\big(\{y\in Y,\ (k,d)\in\Lambda^y\}\big)$;
$\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d} = \mathrm{P}^{\eta}\big((k,d)\in\Lambda^{\eta}\big),\ \mathrm{n}l^{\Lambda}_{k,d} = \mathrm{N}^{\eta}\big((k,d)\in\Lambda^{\eta}\big)$;
$\mathrm{n}l^{\Lambda}_{k,d} = \mathrm{N}\big((k,d)\in\Lambda^{\eta}\big) = \theta\big(\mathrm{P}((k,d)\in(K\times D)\setminus\Lambda^{\eta})\big) = \theta\big(\mathrm{p}l^{(K\times D)\setminus\Lambda}_{k,d}\big)$; $(k,d)\in K\times D$;
$\pi^{\delta|\xi}(d|x),\ \nu^{\delta|\xi}(d|x)$ — переходные возможность и необходимость, определяющие нечеткие правила решений;
$g^{\delta,\xi,\varkappa}(d,x,k) = \min\big\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\}$;
$\widetilde{h}^{\delta,\xi,\varkappa}(d,x,k) = \max\big\{\nu^{\delta|\xi}(d|x), \widetilde{h}^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\}$;
$g^{\varkappa,\delta}(k,d) = \sup\limits_{x\in X}\min\big\{\pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}\big\}$;
$\widetilde{h}^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot) = \theta\circ g^{\xi,\varkappa}(\cdot,\cdot)$;
$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ k\in K\\ d\in D}}\min\big\{\mathrm{p}l^{\Lambda}_{k,d}, \pi^{\delta|\xi}(d|x), g^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\}$;
$\mathrm{NL}^{\Lambda}(\nu^{\delta|\xi}) = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ k\in K\\ d\in D}}\max\big\{\mathrm{n}l^{\Lambda}_{k,d}, \nu^{\delta|\xi}(d|x), \widetilde{h}^{\xi,\varkappa}(x,k)\big\},\ (k,d)\in K\times D$;
$\mathrm{PL}^{\Lambda}(\pi^{\delta|\xi}) = \theta\big(\mathrm{NL}^{(K\times D)\setminus\Lambda}(\nu^{\delta|\xi})\big)$;
$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X)\to\mathcal{L}$ — правдоподобие (plausibility), мера правдоподобия;
$\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(E)\equiv\mathrm{Pl}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)$ — правдоподобие включения неопределенного элемента (н. э.) $\widetilde{x}$ в $E\in\mathcal{P}(X)$;
$t^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X\to[0,1]$ — распределение правдоподобий значений н. э. $\widetilde{x}$, $t^{\widetilde{x}}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{P}l^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}=x),\ x\in X$;
$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon \mathcal{P}(X)\to\widehat{\mathcal{L}}=\widetilde{\mathcal{L}}$ — доверие (истинности) (belief), мера доверия;
$\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(E)\equiv\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\in E)$ — доверие (истинности) включения н. э. $\widetilde{x}\in E$, $E\in\mathcal{P}(X)$;
$\widehat{s}^{\widetilde{x}}(\cdot)\colon X\to[0,1]$ — распределение доверий значений н. э. $\widetilde{x}$, $\widehat{s}^{\widetilde{x}}(x)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Bel}^{\widetilde{x}}(\widetilde{x}\neq x),\ x\in X$;
с. п. р. — субъект, принимающий решения;
н. в. — неопределенное высказывание;
н. э. — неопределенный элемент.