Модели Актуарной Науки

Сидоров Иван Максимович

25 ноября 2024 г.

Содержание

Модель Крамера-Лундберга для страхового резерва

$$r_t = r_0 + pt - \sum_{i=1}^{A(t)} U_i$$

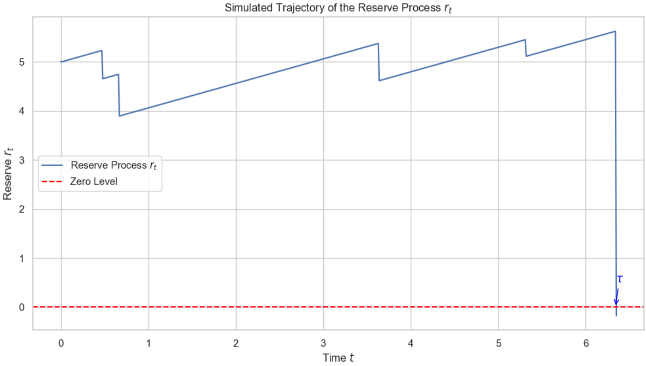
Обозначения:

- r_t: Резерв компании в момент времени t.
- r_0: Начальный резерв.
- p: Премия, получаемая за единицу времени.
- $A(t)$: Количество страховых случаев до момента времени t, следующее пуассоновскому процессу с интенсивностью λ.
- U_i: Размер i-го страхового случая, где $\{U_i\}$ — независимые одинаково распределённые неотрицательные случайные величины, где $\mathbb{E}[U_i] = m$, $Var(U_i) = s^2$.

Вероятность разорения

Определение:

- *Вероятность разорения* — это вероятность того, что резерв компании r_t пересечет нулевую отметку в некоторый конечный момент времени τ, т.е. $\mathbb{P}(\tau < \infty)$, где τ — первый момент времени, когда $r_t = 0$.



Вывод вероятности разорения (Часть 1)

Вывод уравнения для вероятности разорения:

- Пусть $\psi(r)$ — вероятность разорения при начальном резерве r.
- Рассмотрим бесконечно малый интервал времени dt, в течение которого может произойти следующее:
  1. С вероятностью $1 - \lambda dt$, не происходит ни одного страхового случая, и резерв увеличивается на pdt.
  2. С вероятностью λdt, происходит один страховой случай с размером U, и резерв уменьшается на U.

Вывод вероятности разорения (Часть 2)

Локальное мартингальное свойство и переход к предельному случаю:

- Локальное мартингальное свойство, получаем уравнение:

$$\psi(r) = \mathbb{E}[\psi(r_{r+dt})|r_t = r] \Leftrightarrow \psi(r) = (1 - \lambda dt)\psi(r + pdt)+$$
$$+ \lambda dt \int_0^r \psi(r - x)f(x)\,dx + \lambda dt\psi(0) \int_r^\infty f(x)\,dx.$$

- Упрощая и переходя к предельному случаю при $dt \to 0$, получаем дифференциальное уравнение:

$$p\psi'(r) - \lambda \left(\int_0^r \psi(r - x)f(x)\,dx + \psi(0) \int_r^\infty f(x)\,dx \right) = 0,$$

где $f(x)$ — плотность распределения страховых случаев.

Вывод вероятности разорения (Часть 3)

Решение для экспоненциального распределения:

- Подставляя $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, получаем окончательное выражение для $\psi(r_0)$:

$$\psi(r_0) = \exp\left(-\frac{2\lambda r_0}{p - \lambda m}\right),$$

где $m = \frac{1}{\theta}$ — математическое ожидание страхового случая.

Предельная диффузия

Модель Крамера-Лундберга:

$$r_t = r_0 + pt - \sum_{i=1}^{A(t)} U_i,$$

Масштабирование:

- Пусть $m = m_n$ и $p = p_n$ зависят от n и сходятся к нулю со скоростью $\sqrt{n}$.
- Определим:

$$m' = \lim_{n\to\infty} m_n\sqrt{n}, \quad p' = \lim_{n\to\infty} p_n\sqrt{n}.$$

- При изменении времени и нормализации пространства состояний: $r_t \mapsto r_{nt}/\sqrt{n}$, предельный процесс R_t описывается выражением:

$$R_t = \frac{r_{nt}}{\sqrt{n}} = \frac{r_0 + p_n \cdot nt - \sum_{i=1}^{A(nt)} U_i}{\sqrt{n}}.$$

Параметры диффузии

Диффузионное уравнение предельного процесса:

$$dR_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t.$$

Пояснение вывода параметров:

- Дрейф μ получается из среднего изменения резерва за единицу времени:

$$\mu = \lim_{n\to\infty} (p_n - \lambda m_n)\sqrt{n} = p' - \lambda m'.$$

- Дисперсия σ^2 определяется как дисперсия составного пуассоновского процесса:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda n \left(\mathbb{E}[U_i^2]\right)}{n} = \lambda \left(m^2 + s^2\right),$$

Интуиция масштабирования и замечание

Интуиция масштабирования:

- Масштабирование времени и состояния с использованием nt и деления на $\sqrt{n}$ позволяет изучать процесс на больших временных интервалах сохраняя конечные флактуации.
- При $n \to \infty$ страховые случаи становятся незначительными по сравнению с общим размером резерва, но их сумма образует непрерывный винеровский процесс.

Замечание:

- Это масштабирование эффективно для случая, когда страховые случаи незначительны по сравнению с общим резервом.

Переход к оптимальному контролю

Модель Cramer-Lundberg - Ruin Theory:

$$X_t = x_0 + \lambda a t - \sum_{i=1}^{N_t^\lambda} Y_i,$$

где:

- Y_i — размер i-го страхового случая, где $\mathbb{E}[Y_i] = a$.

Модель Cadenillas - Optimal Control:

$$X_t^\pi = x_0 + u_t^\pi(1+\eta)\lambda a t - (1-u_t^\pi)(1+\mu)\lambda a t - u_t^\pi \sum_{i=1}^{N_t^\lambda} Y_i - \sum_{i=1}^{N_t^\gamma} \xi_i^\pi,$$

где:

- η, μ — наценки на страхование и перестрахование соответственно.
- u_t^π — доля перестрахованных страховых случаев.
- ξ_i^π — размер i-й дивидендной выплаты.

Диффузионные процессы

Диффузионный процесс для модели Cramer-Lundberg:

$$dX_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t.$$

Диффузионный процесс для модели Cadenillas:

$$dX_t^\pi = u_t^\pi \mu\, dt + u_t^\pi \sigma\, dW_t - \xi_t^\pi\, dN_t^\gamma.$$

Замечание:

- Слагаемое, отвечающее за распределение дивидендов, при масштабировании не превращается в винеровский процесс, так как его внутренний процесс является элементом контроля.

Определение допустимых стратегий управления

Пусть $\mathcal{A}$ — множество стратегий $\pi = (u^\pi, \xi^\pi)$, таких что u^π и ξ^π измеримы по фильтрации $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$, порождённой (W, N^γ) и удовлетворяют условиям:

- $u^\pi \in [0, 1]$;
- ξ^π удовлетворяет $0 \leq \xi^\pi_t \leq X^\pi_{t-}$.

Мы говорим, что стратегия π является допустимой, если $\pi \in \mathcal{A}$.

Целевая функция

Expected NPV:

$$V_\pi(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\delta t} g(\xi_t^\pi) dN_t^\gamma \middle| X_0^\pi = x\right], \quad x \geq 0$$

Обозначения:

- $\delta > 0$ — ставка дисконтирования.
- $\tau = \inf\{t > 0 : X_t^\pi < 0\}$ — первый момент банкротства.
- $g(\xi) = -K\mathbb{I}_{\{\xi > 0\}} + \xi$ — функция, определяющая итоговые выплаты.
- K — постоянные транзакционные издержки.

Оптимизационная задача

Value function:

$$V(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} V_\pi(x), \quad x \geq 0$$

Цель: Найти оптимальную допустимую стратегию π^*, для которой V_{π^*} совпадает с V, если такая стратегия существует.

Динамическое программирование

Построим уравнение динамического программирования:

$$V_\pi(x) = \gamma dt e^{-\delta t}\Big(- K\mathbb{I}_{\{\xi>0\}} + \xi + \mathbb{E}_x[V_\pi(X_t - \xi)]\Big) + (1-\gamma dt)e^{-\delta t}\mathbb{E}_x[V_\pi(X_t)]$$

Это уравнение можно получить рассматривая две возможные ситуации в предельном случае $dt \to 0$:

- **Состояние 1:** С вероятностью γdt происходит выплата дивидендов в размере $g(\xi)$.
- **Состояние 2:** С вероятностью $1-\gamma dt$ ничего не происходит, и процесс продолжается.

Применение формулы Ито для NPV

Предполагая, что $V_\pi \in C^2(0, +\infty)$, по формуле Ито получаем два случая:

(i) В случае, если нет прибытия процесса Пуассона N^γ:

$$V_\pi(X_t) - V_\pi(x) = \int_0^t \left[\mu u_s V_\pi'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} u_s^2 V_\pi''(X_s) \right] ds + \int_0^t V_\pi'(X_s) dW_s$$

(ii) В случае первого прибытия процесса Пуассона N^γ:

$$V_\pi(X_t - \xi) - V_\pi(x) = \int_0^t \left[\mu u_s V_\pi'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} u_s^2 V_\pi''(X_s) \right] ds + \int_0^t V_\pi'(X_s) dW_s + (V_\pi(X_{t-} - \xi) - V_\pi(X_{t-}))$$

Применение дисконтированного матожидания

Предполагая, что $\int_0^t e^{-\delta s} V'_\pi(X_s) dW_s$ является локальным мартингалом получаем:

(i) В случае, если нет прибытия процесса Пуассона N^γ:

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-\delta t} V_\pi(X_t) - V_\pi(x) \right] =$$
$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^t e^{-\delta s} \left(\mu u_s V'_\pi(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} u_s^2 V''_\pi(X_s) - \delta V_\pi(X_s) \right) ds \right]$$

(ii) В случае первого прибытия процесса Пуассона N^γ:

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-\delta t} V_\pi(X_t - \xi^\pi) - V_\pi(x) \right] = e^{-\delta t} \left(V_\pi(X_{t-} - \xi^\pi) - V_\pi(X_{t-}) \right) +$$
$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^t e^{-\delta s} \left(\mu u_s V'_\pi(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} u_s^2 V''_\pi(X_s) - \delta V_\pi(X_s) \right) ds \right]$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Белмана (HJB)

Подставляем в уравнение динамического программирования и упрощаем:

$$0 = (\xi - K\mathbb{I}_{\{\xi>0\}})e^{-\delta t}\gamma t + \gamma t \mathbb{E}_x \left[e^{-\delta t}\left[V(X_{t-} - \xi) - V(X_{t-})\right]\right] + \mathrm{E}_x \left[\int_0^t e^{-\delta s}\left[\mu u_s V'(X_s) + \frac{\sigma^2}{2} u_s^2 V''(X_s) - \delta V(X_s)\right] ds\right]$$

В результате, при $t \to 0$ и максимизируя по $\pi \in \mathcal{A}$, получаем максимизационную задачу:

$$0 = \max_{0\le\xi\le x} \gamma\left[-K\mathbb{I}_{\{\xi>0\}} + \xi + (V_\pi(x-\xi) - V_\pi(x))\right] + \max_{0\le u\le 1}\left[V_\pi'(x)\mu u + \frac{1}{2}V_\pi''(x)\sigma^2 u^2 - \delta V_\pi(x)\right],$$

где $V_\pi(0) = 0$.

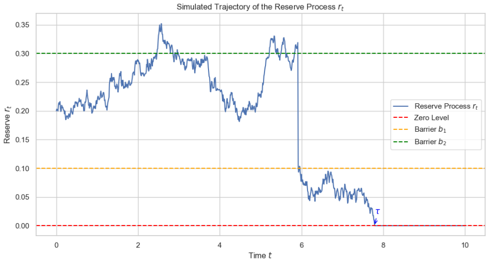
Определение периодической двухбарьерной стратегии

Определение:

$$\xi_{\tau_i} = (X_{\tau_i} - b_1)\mathbb{I}_{\{X_{\tau_i} \geq b_2\}}$$

Обозначения:

- b_1 — нижний барьер, до которого снижаются резервы при возможности выплатить дивиденды.
- b_2 — верхний барьер, при достижении которого осуществляется выплата дивидендов.
- τ_i — моменты скачков Пуассоновского процесса N^γ.



Verification Theorem

Цель Verification Theorem: Verification Theorem используется для подтверждения того, что выбранная стратегия и соответствующим NPV $V_\pi(x)$ действительно являются оптимальными среди всех возможных допустимых стратегий для данной модели, то есть $V_{\pi^*} = V$.

Предположения Verification Theorem:

- Функция ценности $V_\pi(x)$ является C^2-непрерывной, вогнутой и возрастает на $(0, \infty)$ и $\frac{V'_\pi(x)}{V''_\pi(x)}$ — убывающая функция.
- Функция $V_\pi(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB), что означает выполнение условий оптимальности для выбранной стратегии.
- Все выбранные стратегии допустимы в рамках модели и соответствуют заданным ограничениям.

Оптимальный нижний барьер b_1

Пусть V_π — вогнутая и возрастающая функция на $(0, \infty)$ и существует $b_1 > 0$, и V_π имеет следующий вид:

$$V_\pi'(x) \begin{cases} > 1, & x \in [0, b_1) \\ = 1, & x = b_1 \\ < 1, & x \in (b_1, \infty) \end{cases}$$

Тогда первый недифференцируемый член уравнения HJB достигает своего максимума при:

$$\arg \max_{0 \le \xi \le x} \gamma(\xi - K\mathbb{I}_{\{\xi > 0\}} + v(x - \xi) - v(x)) = \begin{cases} 0, & x \in [0, b_2) \\ x - b_1, & x \in [b_2, \infty) \end{cases}$$

для некоторого $b_1 \le b_2$.

Нахождение оптимальной доли реинвестирования u

Пусть $\frac{V'_\pi(x)}{V''_\pi(x)}$ — убывающая функция, тогда оптимальное реинвестирование будет иметь вид:

$$\arg\max_{0\leq u\leq 1}\left[V'_\pi(x)\mu u+\frac{1}{2}V''_\pi(x)\sigma^2u^2-\delta V_\pi(x)\right]=\begin{cases}-\frac{\mu V'(x)}{\sigma^2 V''(x)}, & x<x_0\\ 1, \quad x\geq x_0,\end{cases}$$

где x_0 - единственная точка, где $u(x_0)=1$, также предполагаем, что $x_0\leq b_2$

Система дифференциальных уравнений

В результате различных случаев HJB:

$$0 = \max_{0 \le \xi \le x} \gamma \left[-K\mathbb{I}_{\{\xi > 0\}} + \xi + (V_\pi(x-\xi) - V_\pi(x)) \right] + \max_{0 \le u \le 1} \left[V_\pi'(x)\mu u + \frac{1}{2} V_\pi''(x)\sigma^2 u^2 - \delta V_\pi(x) \right],$$

мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\mu^2 [V_\pi'(x)]^2}{2\sigma^2 V_\pi''(x)} - \delta V_\pi(x) = 0, & x \in [0, x_0] \\ \frac{1}{2}\sigma^2 V_\pi''(x) + \mu V'(x) - \delta V_\pi(x) = 0, & x \in [x_0, b_2] \\ \frac{1}{2}\sigma^2 V_\pi''(x) + \mu V_\pi'(x) - \delta V_\pi(x) + \gamma(-K + (x - b_1) + V_\pi(b_1) - V_\pi(x)) = 0, & x \in [b_2, \infty) \end{cases}$$

Для получения решения из C^2 необходимо:

- Сшить различные кусочки функции $V_\pi(x)$ так, чтобы они образовали гладкое решение, удовлетворяющее требованиям C^2-непрерывности на всём интервале $[0, \infty)$.