Лекции по ТФКП, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Модели комплексных чисел

Введем стандартные понятия нужным образом:
$\mathbb{R}$ - множество точек на прямой.
$\mathbb{C}$ - расширение $\mathbb{R}$ с помощью одного из корней уравнения $z^2 = -1$: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{0\}$, с замыканием относительно сложения и умножения.

Теорема 1 (Основная теорема алгебры)**.** Множество комплексных чисел ($\mathbb{C}$) алгебраически замкнуто (любой многочлен степени n, коэффициенты которого лежат в $\mathbb{C}$), имеет корни в $\mathbb{C}$ (с учетом кратности).

Замечание: Теорема верна и в частном случае многочлена, определенного над $\mathbb{R}$.

1.1 Стандартная модель комплексных чисел

Комплексное число z представляется парой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с операциями:

- $" + " : \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $" \cdot " : (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$

Замечание: Операции согласованы с операциями на $\mathbb{R}$.

Замечание: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \quad \mathbb{R} = \{(x, 0) \quad x \in \mathbb{R}\}$

В станд. модели $\begin{cases} 0 = (0,0) \\ 1 = (1,0) \end{cases}$

Опр. 1. Мнимая единица определена как пара $(0, 1)$.

Замечание: Некорректно определять мнимую единицу как корень уравнения $z^2 = -1$, т.к. $-i$ так же является корнем.

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$(-i^2) = (0,-1) \cdot (0,-1) = (-(-1) \cdot (-1), 0) = (-1, 0) = -1$$

Замечание: Запись $\sqrt{-1}$ тоже некорректна.

Утв. 1. На $\mathbb{C}$ нельзя ввести линейный порядок.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{C}$, и существует некий линейный порядок $<$.

$$\forall x \neq 0 \begin{cases} \text{либо} - \frac{x}{2} < \frac{x}{2} \text{ и } 0 = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \\ \text{либо} \frac{x}{2} < -\frac{x}{2} \text{ и } 0 > x \end{cases}$$

Тогда $\forall x \neq 0$ либо $x > 0$, либо $-x > 0$. Т.е. $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$. Но $-1 = i^2 < 0$ - противоречие. □

1.2 Матричная модель

Комплексное число $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$" + " : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$"\cdot":\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

В матричной модели ноль (нейтральный элемент по сложению) представлен матрицей $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, единица (нейтральный по умножению) $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мнимая единица $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В стандартной модели произвольное комплексное число $z = (x, y)$ имеет стандартную запись $z = x + iy$, где $\begin{cases} x - \text{вещественная часть} \\ y = \text{мнимая часть} \end{cases}$

Действия с комплексными числами:

1. Сравнение (проверка равенства):
$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ и } b = d$$
.
2. Сложение:
$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$
3. Умножение:
$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
4. Деление:
$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac - bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

1.3 Геометрическая модель

Комплексное число представлено точкой с координатами (x, y) на плоскости.
Операции:

- $"+"$: действует как сложение векторов (покоординатно).
- $"\cdot" : z_3 = z_1z_2 \iff \begin{cases} |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \\ arg(z_3) = arg(z_1) + arg(z_2) \end{cases}$
  где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad arg(z)$ задает угол между $\vec{z}$ и Ox (определяется с точностью до периода).

Аргумент комплексного числа $Arg(z)$ - угол φ с точностью до периода 2π. **Главное значение аргумента** $arg(z)$ - φ в промежутке $[0; 2\pi]$.

Комплексно сопряженное к $z = x + iy$ это $\overline{z} = x - iy$.

$$|z| = |\overline{z}|, \quad arg(z) = -arg(\overline{z}), \quad Re(z) = Re(\overline{z}), \quad Im(z) = -Im(\overline{z})$$
$$\overline{z} \cdot z = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Законы де Моргана:

- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Неравенство треугольника:

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2|| \end{cases} \implies ||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

1.4 Стереографическая проекция

На комплексную плоскость положили сферу S радиуса $\frac{1}{2}$. Северный полюс сферы - вершина $N(0;0;1)$. Комплексному числу c, лежащему в плоскости комплексных чисел и имеющему координаты $(x,y,0)$ ставится в соответствие точка, которая является точкой пересечения прямой Nc со сферой S. Зададим систему координат $O\xi\eta\zeta$ аналогично $Oxyz$, но O имеет координаты $(0,0,\frac{1}{2})$.
Уравнение сферы S:

$$\xi^2 + \eta^2 + (\xi - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \tag{1}$$

Уравнение прямой Nc по двум точкам:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0 \tag{2}$$

Получаем набор **обратных формул стереографической проекции:** $x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta}, z = \frac{\xi+i\eta}{\zeta-1}$.
Отсюда найдем

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} \underset{\text{из } 2}{=} \frac{\zeta}{1-\zeta} \implies \zeta = \frac{|z|^2}{1 - |z|^2} \tag{3}$$

Подставим 3 в уравнение 1 и получим прямые формулы стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1-|z|^2} \tag{4}$$

Из геометр. постреония стереографическая проекция взаимно однозначно отображает комплексную плокость на сферу $S \setminus \{N\}$. Дополним стер. проекцию по непрерывности:

$$P : \overline{\mathbb{C}} \overset{\text{на}}{\to} S \quad \text{где } \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{а } S \text{ называют сферой Римана.} \tag{5}$$