

Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Дифференцирование функций

Опр. 1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $p \in U$, если:

1. f определена в некоторой окрестности точки p ($p \in \text{Int}(U)$)
2. $\exists \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(p+\Delta h)-f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$ (и этот предел равен $f'(p)$)

1.1 Экстремумы

Необходимое условие экстремума:

Пусть $f \in D(p)$ (дифференцируема в p). Если p - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, но $f(x)$ не дифференцируема в 0.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Достаточное условие экстремума:

Пусть $f \in D^2(p)$ (дважды дифференцируема в p) и $f'(p) = 0$. В таком случае если

- $f''(p) < 0$ - точка p является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$ - точка p является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференцируема в p , если:

1. $p \in \text{Int}(U)$ ($\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U$)
2. \exists дифференциал функции (линейное отображение) f в точке p $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки p на вектор h :

$$f(p + h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр. 2. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

Опр. 3. Производная вдоль вектора v :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

Утв. 1 Если f дифференцируема в p , то f - непрерывна в p .

Доказательство.

$$f(p+h) - f(p) \underset{h \rightarrow 0}{=} df(p) \langle h \rangle$$

Линейное отображение $df(p) \langle \cdot \rangle$ непрерывно, $o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, т.е. $f(p+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(p)$. □

Достаточный признак дифференцируемости:

Все частные производные непрерывны в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x, y) = x^y$ дифференцируема во всех точках (x_0, y_0) , где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

Опр. 4. Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1 \times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр. 5. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Опр. 6. Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ и $p \in \text{Int}(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать как $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ - вектор частных производных в точке p .

Утв. 2 Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p , вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi - \text{угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p)| = \text{const}$, $|v| = 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ , чтобы $\cos(\varphi)$ был максимален, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. \square

Утв. 3 $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x | f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ ($p \in \Omega$). Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

\square

Опр. 7. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

Опр. 8. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

Теорема: Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(p)$, $g \in C^1(q)$, $q = f(p)$.

Тогда $g \circ f \in C^1(p)$, $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$. В матрицах Якоби: $D_{g \circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$.

Пример:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2 yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_f = (\sinh(ab) \cdot a \quad \sinh(ab) \cdot b)$$

$$D_g \cdot D_f = (\sinh(x^2 y z) \cdot x z \quad \sinh(x^2 y z) \cdot x y) \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Стороожуку на слово.

Правило дифференцирования обратного отображения: Если невырождено и \exists обратное отображение $g : V \rightarrow U$, непрерывное в точке $q = f(p)$, тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

1.4 Многократная дифференцируемость

Опр. 9. $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ k раз дифференцируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки p ;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференцируемы $k-1$ раз в точке p .

Пример:

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$, $g(x) \in D^k(p)$, $f(x) \in D^k(p)$, $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. □

Теорема 1 (о вторых производных): Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2 , т.к. при дифференцировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1 :

$$f_1(x, y) := f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0)$$

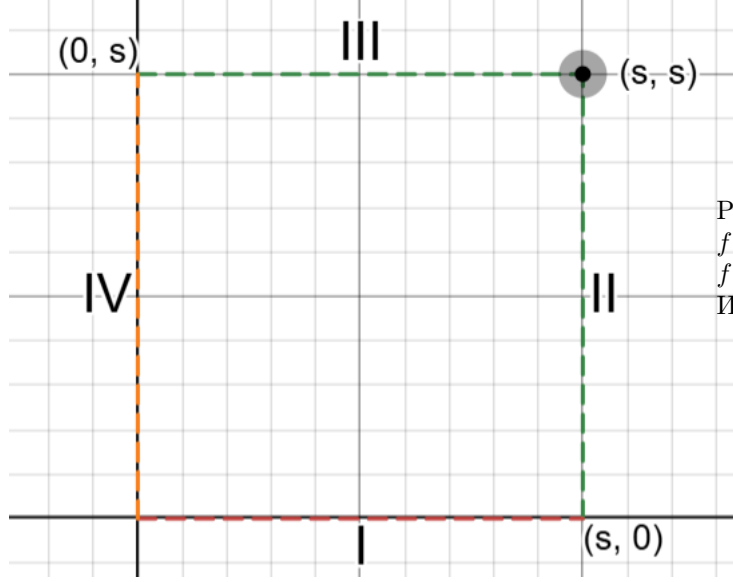
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0)$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0, 0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \text{ где } \alpha_1(x, y) = o(x, y), \quad (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y \rangle$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому $a_{11} = f_{xx}(0)$, $a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y), \quad a_{21} = f_{yx}(0), \quad a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s, s) вблизи нуля. Для нее
 $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I)$.
 И в то же время $f(s, s) = (IV) + (III)$

$$\Pi = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^s \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) dt = \int_{t=0}^s a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t) dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt$. Аналогично для I:

$$I = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) dt = \int_{t=0}^s a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t) dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \quad \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, 0) dt$$

$$\text{Итого: } f(s, s) - f(0, 0) = I + \Pi = s^2 \left(a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \right), \text{ что на самом деле равно } \Pi + IV = \\ = s^2 \left(a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \right)$$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \quad (1)$$

При малых s :

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(0, t) dt, \quad \varepsilon_4(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, s) dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x, y \rightarrow 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0, 0)$ выполнено $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. Для s таких, что $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$, при $|x| \leq s, |y| \leq s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left| \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt \right| \leq \int_{t=0}^s |\alpha_2(s, t)| dt \leq \int_{t=0}^s \varepsilon \cdot s\sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$. Тогда в равенстве 1 $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \rightarrow 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \rightarrow 0$, а значит $a_{21} = a_{12}$, то есть $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$. \square