

Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

# 1 Дифференцирование функций

**Опр. 1.** Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $p \in U$ , если:

1.  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $p$  ( $p \in \text{Int}(U)$ )
2.  $\exists \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(p+\Delta h) - f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$  (и этот предел равен  $f'(p)$ )

## 1.1 Экстремумы

**Необходимое условие экстремума:**

Пусть  $f \in D(p)$  (дифференцируема в  $p$ ). Если  $p$  - экстремум, то  $f'(p) = 0$ .

**Замечание:** Но например для  $f(x) = x^3$   $f'(0) = 0$ , но  $f(x)$  не дифференцируема в 0.

**Замечание:** Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

**Достаточное условие экстремума:**

Пусть  $f \in D^2(p)$  (дважды дифференцируема в  $p$ ) и  $f'(p) = 0$ . В таком случае если

- $f''(p) < 0$  - точка  $p$  является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$  - точка  $p$  является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $p \in U$ . Функция  $f$  дифференцируема в  $p$ , если:

1.  $p \in \text{Int}(U)$  ( $\exists \epsilon > 0$   $B_\epsilon(p) \subset U$ )
2.  $\exists$  дифференциал функции (линейное отображение)  $f$  в точке  $p$   $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + o(x-p) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p))$$

При сдвиге точки  $p$  на вектор  $h$ :

$$f(p+h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

## 1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

**Опр. 2.** Частная производная по координате  $x_i$  это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для  $f(x, y) = x^y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

**Опр. 3.** Производная вдоль вектора  $v$ :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если  $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ , то  $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору  $v = (v_1, v_2)$  у функции есть производная в  $(0, 0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

**Утв. 1** Если  $f$  дифференцируема в  $p$ , то  $f$  - непрерывна в  $p$ .

*Доказательство.*

$$f(p+h) - f(p) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} df(p) < h >$$

Линейное отображение  $df(p) < >$  непрерывно,  $o(h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ , т.е.  $f(p+h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} f(p)$ .  $\square$

**Достаточный признак дифференцируемости:**

Все частные производные непрерывны в  $p$  ( $f \in D(p)$ ).

Пример:  $f(x, y) = x^y$  дифференцируема во всех точках  $(x_0, y_0)$ , где  $x_0 > 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

### 1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

**Опр. 4.** Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция  $f$  отображает  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , то матрица Якоби принимает вид  $1 \times n$  и называется **градиентом функции**.

**Опр. 5.** Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

**Опр. 6.** Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $p \in Int(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) = o(x - p)$ .

Если  $k = 1$ , то лин. отображение  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно задать как  $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$  - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем  $\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$  - вектор частных производных в точке  $p$ .

**Утв. 2** Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $f$  в точке  $p$ , вектор  $v$  единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi \text{ - угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку  $|\nabla f(p)| = const$ ,  $|v| = 1$ , то для максимизации надо выбрать такое  $\varphi$ , чтобы  $\cos(\varphi)$  был максимальен, т.е. вектора  $v$  и  $\nabla f$  параллельны и  $\nabla f$  задает наибольшую скорость роста.  $\square$

**Утв. 3**  $\nabla f(p)$  ортогонален поверхности уровня  $\Omega = \{x | f(x) = c\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(p) = c$  ( $p \in \Omega$ ). Пусть  $x_n \in \Omega$ , покажем, что  $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ :

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит  $0 \underset{n \rightarrow \infty}{=} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$ , т.е.  $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$ . Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

**Опр. 7.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется векторным полем.

**Опр. 8.** Потенциалом векторного поля  $F$  (если он есть) называется **скалярная** функция  $U : W \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\nabla U = F$ . Если потенциал существует, то  $F$  называется потенциальным полем.

**Теорема:** Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^1(p)$ ,  $g \in C^1(q)$ ,  $q = f(p)$ .

Тогда  $g \circ f \in C^1(p)$ ,  $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$ . В матрицах Якоби:  $D_{g \circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$ .

**Пример:**

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz. \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_f = \begin{pmatrix} \sinh(ab) \cdot a & \sinh(ab) \cdot b \end{pmatrix}$$

$$D_g \cdot D_f = \begin{pmatrix} \sinh(x^2yz) \cdot xz & \sinh(x^2yz) \cdot xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Сторожку на слово.

**Правило дифференцирования обратного отображения:** Если невырождено и  $\exists$  обратное отображение  $g : V \rightarrow U$ , непрерывное в точке  $q = f(p)$ , тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

## 1.4 Многократная дифференцируемость

**Опр. 9.**  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $k$  раз дифференцируема в точке  $p$  ( $f \in D^k(p)$ ), если:

1.  $f$  дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки  $p$ ;
2. Все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  дифференцируемы  $k - 1$  раз в точке  $p$ .

**Пример:**

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

**Утв.** Если  $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$  тогда  $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

*Доказательство.*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$ ,  $g(x) \in D^k(p)$ ,  $f(x) \in D^k(p)$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ , то  $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ .  $\square$

**Теорема 1** (о вторых производных): Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in D^2(p)$ . Тогда  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $n = 2$ , так как при заданной функции  $f(x_1, x_2, \dots)$  можно в качестве  $f$  рассмотреть сужение  $f$  на плоскость  $Ox_1x_2$ , т.к. при дифференцировании по  $x_1$  или  $x_2$  остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что  $p = 0$  и что  $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ . Чтобы показать почему так можно считать введем  $f_1$ :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0) \end{aligned}$$

Дальше считаем, что  $f = f_1$  и  $f(0, 0) = 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \quad \text{где } \alpha_1(x, y) = o(x, y), \quad (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y \rangle$$

По условию  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$ , поэтому  $a_{11} = f_{xx}(0)$ ,  $a_{12} = f_{xy}(0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y), \quad a_{21} = f_{yx}(0), \quad a_{22} = f_{yy}(0)$$

Рассмотрим точку  $(s, s)$  вблизи нуля. Для нее  
 $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I).$   
И в то же время  $f(s, s) = (IV) + (III)$

$$II = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^s \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) dt = \int_{t=0}^s a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t) dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем  $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt$ . Аналогично для I:

$$I = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) dt = \int_{t=0}^s a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t) dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \quad \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, 0) dt$$

Итого:  $f(s, s) - f(0, 0) = I + II = s^2 \left( a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \right)$ , что на самом деле равно III + IV =  $= s^2 \left( a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \right)$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \quad (1)$$

При малых  $s$ :

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(0, t) dt, \quad \varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, s) dt$$

Осталось показать, что  $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x, y \rightarrow 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге  $V$  точки  $(0, 0)$  выполнено  $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ . Для  $s$  таких, что  $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$ , при  $|x| \leq s, |y| \leq s$ . Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left| \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt \right| \leq \int_{t=0}^s |\alpha_2(s, t)| dt \leq \int_{t=0}^s \varepsilon \cdot s \sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что  $\varepsilon_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$ , аналогичным образом показываем для  $\varepsilon_{2,3,4}$ . Тогда в равенстве ??  $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \rightarrow 0$  и  $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \rightarrow 0$ , а значит  $a_{21} = a_{12}$ , то есть  $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$ .  $\square$

**Правило дифференцирования монома:**

Пусть  $f(x) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . Тогда

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(0) = i_1! \cdot \dots \cdot i_m!$$

Любая другая производная любого порядка в точке 0 равна 0.

## 1.5 Мульти-индексы

Придумаем  $\mu = (i_1, \dots, i_m)$  - численный вектор, в котором  $\forall j = \overline{1 \dots m} \quad i_j \geq 0$  и назовем его **мультииндексом**.

Для мультииндексов определены операции:

$$\mu! := i_1! \cdot \dots \cdot i_m! \quad |\mu| = \sum_{j=1}^m i_j \text{ - порядок мультииндекса}$$

$$x \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, \dots, x_m), \quad x^\mu = x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$$

$$C_k^\mu = \frac{k!}{\mu!} = \frac{k!}{i_1! \cdot \dots \cdot i_m!}, \text{ где } k = |\mu|$$

Зададим контекст:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow E, \quad f \in D^k(p), \quad \mu = (i_1, \dots, i_m)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} = D^\mu f = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \left( \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} \left( \dots \left( \frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f \right) \right) \right)$$

**Теорема** (разложение Тейлора):  $\exists!$  многочлен  $A(x)$  степени  $\leq k$  такой, что  $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

**Теорема** (разложение Тейлора для нескольких переменных): Пусть  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow E$ ,  $f \in D^k(p)$ , тогда  $\exists!$  многочлен  $A(x)$   $\deg(A) \leq k$ , такой, что  $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$ :

$$A(x) = f(p) + \frac{df(p)\langle x-p \rangle}{1!} + \frac{d^2f(p)\langle x-p \rangle}{2!} + \dots + \frac{d^k f(p)\langle x-p \rangle}{k!}$$

**Доказательство. Единственность:** Пусть есть два таких многочлена  $A(x), B(x)$ . Введем  $C(x) := A(x) - B(x) = o(|x-p|^k)$ . И докажем вспомогательное утверждение:

**Утв.**  $\deg C \leq k$   $C(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$ , тогда  $C \equiv 0$ .

**Доказательство.** 1. Фиксируем  $v \in \mathbb{R}^m$  и рассмотрим  $h(t) = C(p+tv)$  - многочлен одной переменной. По условию  $h(t) = o(t^k)$  для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е.  $h(t) \equiv 0$ . В частности, при  $t = 1$   $h(t) = C(p+v) = 0$ .

2. Поскольку 1. выполняется  $\forall v$ , то  $C(p+v) = 0 \forall v$ .

□

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

**Существование:** Введем  $g(x) = f(x) - A(x)$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow E$ .  $g(p) = 0$  и все производные до порядка  $k$  включительно равны 0 в  $p$ ,  $g \in D^K(p)$ . Необходимо доказать, что из этого следует, что  $g(x) = o(|x - p|^k)$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ , надо показать, что  $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x - p|^k$  в некоторой  $U$  - окрестности точки  $p$ . Пусть  $\varepsilon_{k-1}(x)$  - какая-то производная порядка  $k-1$  функции  $g$ ,  $\varepsilon_{k-1}$  определена в некотором шаре  $V_p$  с центром в  $p$ .

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0, \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \quad (2)$$

Поэтому имеется маленький шар  $U \subset V_p$  в котором выполнено:

$$\forall x \in U \quad |\varepsilon_{k-1}(x)| \leq \varepsilon \cdot |x - p| \quad (3)$$

В самом деле,  $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x - p \rangle + o(|x - p|)$ , причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка  $k$  включительно равны 0 в  $p$  а второе - из уравнения (??). Значит  $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x - p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon |x - p|$ . Итак, ясно, что существует шарик  $U$ , в котором все производные  $k-1$  порядка имеют оценку (??). Пусть  $\varepsilon_{k-2}$  - какая-то производная функции  $g$  порядка  $k-2$ . Все ее первые частные производные по доказанному в шаре  $U$  оцениваются в  $\varepsilon \cdot |x - p|$ . По лемме о степенной оценке приращения для  $\varepsilon_{k-2}$  выполнено в шаре  $U$ :

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left| \frac{\varepsilon |x - p|^2}{2} \right|$$

Для  $k=3, k=4, \dots$  аналогично.

$$|g(x)| = \left| g^{(k-k)}(x) \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x - p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x - p|^k$$

□

**Теорема 2** (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных): Пусть  $f \in D^2(p)$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow R$  и  $df(p) > 0$ . Тогда:

1.  $d^2f(p) > 0$  - строгий локальный минимум
2.  $d^2f(p) < 0$  - строгий локальный максимум
3. Если  $d^2f(p)$  знаконеопределен, т.е.  $\exists u \in \mathbb{R}^m \quad d^2f(p)\langle u \rangle > 0$  и  $\exists v \in \mathbb{R}^m \quad d^2f(p)\langle v \rangle < 0$ , то  $p$  - седловая точка.

*Доказательство.* Докажем пункт 3:

*Доказательство.* Пусть  $df(p) = 0$  и существуют вектора  $u$  и  $v$ , такие, что  $d^2f(p)\langle u \rangle > 0$ ,  $d^2f(p)\langle v \rangle < 0$ .

Введем функцию  $h(t) = f(p+tu)$ . Тогда  $h'(0) = df(p)\langle u \rangle = 0$ ,  $h''(0) = d^2f(p)\langle u \rangle > 0$ . Значит у функции  $h$  в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль  $p+tv$  функция имеет строгий максимум, значит  $p$  - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

*Доказательство.* Пусть  $d^2f(p) > 0$ , то есть  $\forall v \neq 0 \quad d^2f(p)\langle v \rangle > 0$ . Сфера  $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid |v| = 1\}$  - компактна (замкнута и ограничена).  $d^2f(p) : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  - однородный многочлен второго порядка. Так как  $d^2f$  - непрерывная функция на компакте, то у нее  $\exists \min = C > 0$ , т.е.  $\forall v \in S^{m-1} \quad d^2f(p)\langle v \rangle \geq C$ .

**Утв.** Тогда  $\forall v \neq 0 \quad d^2f(p)\langle v \rangle \geq C \cdot |v|^2$

*Доказательство.*

$$\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p) \langle v \rangle = d^f(p) \langle |v| \cdot \frac{v}{|v|} \rangle = |v|^2 \cdot d^2 f(p) \langle \frac{v}{|v|} \rangle \geq C \cdot |v|^2$$

□

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \frac{d^2 f(p) \langle x - p \rangle}{2!} + \alpha(x) |x - p|^2, \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!} \cdot |x - p|^2 + \alpha(x) |x - p|^2$$

Существует окрестность  $U$  точки  $p$ , такая, что  $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3}$   $\forall x \in U$ . Тогда для  $\forall x \in U$ :

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!} |x - p|^2 - \frac{C}{3} |x - p|^2 = f(p) + \frac{C}{6} |x - p|^2$$

То есть  $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6} |x - p|^2 > 0 \implies$  в  $U$   $f(p) < f(x) \forall x \in U$ . Пункт 1 доказан. □

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. □

**Теорема 3** (Полиномиальное разложение композиции): Пусть  $k \geq 0$ ,  $f, g$  - функции,  $A(x), B(y)$  - полиномы. Предположим, что  $f$  и  $A$  в точке  $p$  имеют порядок касания  $\geq k$ ,  $g$  и  $B$  в точке  $q$  имеют порядок касания  $\geq k$ . То есть:

$$f(x) - A(x) = \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} o(|x - p|^k), \quad \alpha(p) = 0$$

$$g(y) - B(y) = \beta(y) \xrightarrow{y \rightarrow q} o(|y - q|^k), \quad \beta(q) = 0$$

Тогда  $g \circ f$  имеет с  $B \circ A$  порядок касания  $\geq k$ .

*Доказательство.* При  $k = 0$ :

$$\alpha(x) = o(1) \implies f(x) - A(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} 0 \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p)$$

Для функции  $g$  аналогично, после чего применяем теорему о непрерывности композиции. Для  $k = 0$  доказано.

Пусть  $k \geq 0$ . Тогда:

$$\begin{cases} f(x) = \alpha(x) + A(x) \\ g(y) = \beta(y) + B(y) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(x) = o(|x - p|) \\ \beta(y) = o(|y - q|) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in D^1(p) \\ \beta \in D^1(q) \end{cases} \implies \begin{cases} f \in D^1(p) \\ g \in D^1(q) \end{cases}$$

$$g(f(x)) - B(A(x)) = g(f(x)) - B(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x)) = \beta(f(x)) + B(f(x)) + B(A(x))$$

Заметим, что  $\beta(f(x)) = o(|f(x) - q|^k) \xrightarrow{x \rightarrow p} o(|f(x) - f(p)|^k)$ . При этом  $f(x) - f(p) = O(|x - p|^1)$ , так как  $f \in D^1(p)$ . А значит:

$$\beta(f(x)) = o(O(|x - p|^k)) = o(|x - p|^k)$$

Пусть теперь  $V$  - шар конечного радиуса с центром в  $q$ . Все частные производные многочлена  $B$  в шаре  $V$  ограничены некоторой константой  $C$ . Тогда по лемме об оценке приращения:

$$\forall y_1, y_2 \in V \quad |B(y_1) - B(y_2)| = O(|y_1 - y_2|)$$

При  $x \rightarrow p$   $\begin{cases} f(x) \rightarrow q \\ A(x) \rightarrow q \end{cases}$  и поэтому  $f(x), B(x) \in V$ . В таком случае

$$B(f(x)) - B(A(x)) \xrightarrow{x \rightarrow p} O(f(x) - A(x)) = O(o(|x - p|^k))$$

□

## 2 Основы гладкого анализа

Символ  $\subset_{op}$  обозначает "открыто в". Контекст:

$$U \subset_{op} \mathbb{R}^m, f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, f \in C^r(U), r \geq 0$$

**Опр. 10.** Отображение  $f$  называется  $r$ -гладким, если все ее частные производные до порядка  $r$  непрерывны на  $U$ .

Пусть  $X$  - не обязательно открыто в  $\mathbb{R}^m$ .

**Опр. 11.**  $f \in C^r(X)$ , если  $f = \tilde{f}$  - сужение на  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{f} : \tilde{X} \subset_{op} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  -  $C^r$ -гладкая на  $\tilde{X}$ . **НАДО УТОЧНИТЬ:**  $X \subset \tilde{X}$  или наоборот.

**Утв. 4** Пусть  $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  -  $C^r$  отображения. Тогда  $f + g \in C^r(X)$

*Доказательство.* Пусть  $f = \tilde{f}$ ,  $g = \tilde{g}$  и т.д. по определению  $r$ -гладкости:

$$\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^m, U, V \subset_{op} \mathbb{R}^m, X \subset U, X \subset V$$

Введем  $U \cap V = W \subset_{op} \mathbb{R}^m$ . На  $W$  заданы оба отображения и ясно, что  $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$ .  $\square$

**Утв. 5** Композиция:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \supset Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Если  $f \in C^r$  и  $g \in C^r$ , то  $g \circ f \in C^r$ .

*Доказательство.* Область определения  $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X \cap f^{-1}(\text{dom}(g))$

$$\begin{cases} f \in C^r \implies f = \tilde{f}, \tilde{f} : \mathbb{R}^m \supset_{op} \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^k - C^r\text{-гладкое.} \\ g \in C^r \implies g = \tilde{g}, \tilde{g} : \mathbb{R}^k \supset_{op} \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}^m - C^r\text{-гладкое.} \end{cases}$$

$$\text{dom}(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = \text{dom}(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(\text{dom}(\tilde{g})) = \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$$

$\tilde{X}$  - открытое,  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$  - открытое, как прообраз открытого множества  $\tilde{Y}$  при непрерывном отображении.

Ясно, что  $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$  - сужение  $\text{dom}(g \circ f)$ .  $\square$

**Теорема 4** (Лемма о классе гладкости обратного отображения): Пусть  $U, V \subset_{op} \mathbb{R}^m$ .

$U \xrightleftharpoons[f]{g} V$ ,  $f, g$  - непрерывны и взаимно обратны. Если  $f \in C^r(U)$  и  $\forall x \in U \ df(x)$  - невырожден:  $\det(Df(x)) \neq 0$ , то  $g \in C^r(V)$ .

*Доказательство.* При  $r > 0$   $g$  дифференцируема в  $\forall y \in V$  по правилу дифференциирования обратного отображения. В матрицах Якоби:

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U, \text{ причем } f(x) = y, x = g(y)$$

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}, \text{ цепочка преобразований } y \rightarrow g(y) \rightarrow Df(g(y)) \rightarrow (Df(g(y)))^{-1}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), w - \text{отображение обращения матрицы.}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), \text{ причем } w \in C^\infty, Df \in C^{r-1}, g(y) - \text{дифференцируема}$$

$g$  дифференцируема  $\implies Dg$  тоже дифференцируема как композиция  $\implies$  все производные  $g$  дифференцируемы  $\implies Dg \in C^1 \implies g \in C^2 \implies \dots \implies g \in C^{r-1} \implies Dg \in C^{r-1} \implies g \in C^r$ .  $\square$

**Лемма** Пусть  $U \subset \overset{op}{\mathbb{R}^m}$ , а  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  такое, что отображение  $f(x) - x = \lambda(x)$  сжимающее, то есть  $\forall x_1, x_2 \in U | \lambda(x_1) - \lambda(x_2) | \leq \lambda < 1$ . Тогда:

$$1. f(U) \subset \mathbb{R}^m$$

2. Сужение  $f : U \rightarrow f(U)$  обратимо и обратное отображение - липшицево с константой  $\frac{1}{1-\lambda}$ .

*Доказательство.* Докажем пункт 2:

$f$  инъективно:  $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) - x_1 = \lambda(x_1) \\ f(x_2) - x_2 = \lambda(x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) = \lambda(x_1) + x_1 \\ f(x_2) = \lambda(x_2) + x_2 \end{cases}$$

Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\lambda(x_1) - \lambda(x_2) + (x_1 - x_2)| \leq |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| + |x_1 - x_2| \lambda \cdot |x_1 - x_2| + |x_1 - x_2| = (\lambda + 1) |x_1 - x_2|$$

В силу неравенства треугольника:

$$(1 - \lambda) |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq (1 + \lambda) |x_1 - x_2|$$

Инъективность есть, а сужение  $f : U \rightarrow f(U)$  - биективно, значит обратимо. Поймем, что обратное отображение будет  $\frac{1}{1-\lambda}$  липшицево. Пусть  $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \in f(U) \quad \begin{cases} x_1 = g(y_1) \\ x_2 = g(y_2) \end{cases}$

$$|y_1 - y_2| \geq (1 - \lambda) |g(y_1) - g(y_2)| \implies \frac{1}{1 - \lambda} |y_1 - y_2| \geq g(y_1) - g(y_2)$$

Пункт 2 доказан.

Пусть теперь  $q \in f(U)$ . Рассмотрим  $p \in U | q = f(p)$ .  $U$  открыто, а значит  $\exists \varepsilon > 0 | B_\varepsilon(p) \subset U$ , где  $B_\varepsilon(p)$  - открытый шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $p$ . Мы покажем, что множество  $f(U)$  содержит шар с центром в  $q$  радиуса  $(1 - \lambda)\varepsilon$ .

Пусть  $y \in B_{\varepsilon(1-\lambda)}(q)$ , т.е.  $|q - y| < (1 - \lambda)\varepsilon$ . Надо показать, что  $\exists x$  такой, что  $|p - x| < \varepsilon$ ,  $f(x) = y$ . Воспользуемся теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения. Перепишем условие:

$$f(x) = y \implies y - f(x) = 0 \implies y - f(x) + x = x$$

Положим

$$\varphi(x) = y - f(x) + x = y - \lambda(x)$$

Заметим, что  $\varphi(x)$  является сжимающим и покажем, что  $\varphi$  переводит  $B_\varepsilon(p)$  в себя.

$$x \in B_\varepsilon(p) \implies |x - p| \leq \varepsilon \implies |\varphi(x) - \varphi(p)| \leq \lambda\varepsilon$$

$$|\varphi(x) - p| = |(\varphi(x) - \varphi(p)) + (\varphi(p) - p)| \leq |\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p|$$

Первое слагаемое, как мы уже доказали, не превышает  $\lambda\varepsilon$ . Преобразуем второе:

$$|\varphi(p) - p| = |y - f(p) + p - p| = |y - f(p)| = |y - q| \leq (1 - \lambda)\varepsilon$$

Тогда:

$$|\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p| \leq \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

Значит  $|\varphi(x) - p| \leq \varepsilon$  и  $\varphi(x) \in B_\varepsilon(p) | x \in B_\varepsilon(p)$ .  $\square$

**Теорема 5: о локальной обратимости**

Пусть  $U \subset_{op} \mathbb{R}^m$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  –  $C^r$ -гладкое отображение,  $r \geq 1$ . Пусть  $p \in U$ . Если  $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – невырожден, то у точки  $p$  имеется окрестность  $U_1$  такая, что  $f(U_1) \subset_{op} \mathbb{R}^m$  и сужение  $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow f(U_1)$  является  $C^r$ -изоморфизмом (т.е. обратное отображение тоже принадлежит классу  $C^r$ ).

*Доказательство.* Считаем сначала, что  $\forall v \ df(p)\langle v \rangle = v$ , т.е.  $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – тождественное отображение,  $Df(p) = E$ . Рассмотрим отображение  $h(x) = f(x) - x$ :

$$dh(x) = df(x) - dx, \text{ при } x = p: dh(p) = dx - dx = 0 (Dh(x) = E - E = 0)$$

Все частные производные отображения  $h$  в точке  $p$  равны 0. Значит, в силу их непрерывности в  $p$ , у точки  $p$  имеется некоторый шарик  $U$  с центром в  $p$  такой, что  $\forall x \in U$  все эти производные ограничены, например,  $\frac{1}{2} < 1$ .

$$\forall x_1, x_2 \in U_1 \ |h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{1}{2}$$

По предыдущей лемме  $f(U_1)$  открыто в  $\mathbb{R}^m$  и  $f|_{U_1} \rightarrow f(U_1)$  обратимо, обратное отображение непрерывно. По теореме о классе гладкости обратного отображения оно ( $f^{-1}$ ) имеет нужный класс. Заметим, что в той лемме необходимо, чтобы  $\forall x \in U_1 \ \det(Df(x)) \neq 0$ , поэтому когда мы выбираем окрестность  $U_1$  надо это тоже потребовать:

$$Df(p) = E, \ \det(E) = 1 \neq 0 \text{ и в некоторой окрестности точки } p \ \det(Df(x)) = 0$$

Мы доказали теорему для  $Df(p) = E$ . Пусть теперь  $Df(p) = A$ ,  $\det(A) \neq 0 \implies$  значит существует обратная матрица  $A^{-1}$ , тоже невырожденная. Пусть  $\tilde{f} = A^{-1}f(x)$  – композиция линейного отображения и отображения  $f$ . Для  $\tilde{f}$  выполнена теорема, ведь  $D\tilde{f}(p) = A^{-1}Df(p) = A^{-1}A = E$ . Значит  $\exists \tilde{U} \ni p \mid \tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$  –  $C^r$ -изоморфизм и  $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset_{op} \mathbb{R}^k$ .

$f(x) = A\tilde{f}(x)$  – композиция двух "хороших" отображений и  $f(\tilde{U}) = A \cdot \tilde{f}(\tilde{U})$  – образ открытого множества под действием линейного изоморфизма  $A$  – тоже открыт в  $\mathbb{R}^k$ .  $\square$

**Теорема 6 (о неявной функции):** Пусть  $U \subset_{op} \mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$  и  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  –  $C^r$ -отображение,  $r \geq 1$ .

Функция  $f$  представляет собой набор:

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \end{pmatrix}$$

Пусть некоторая точка  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U$  и  $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$ ,  $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}$$

Множество  $M = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$ , где  $\Omega$  – окрестность точки  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Точка  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in M$ ,  $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$

Тогда у  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  имеется такая окрестность  $\Omega$ , что  $\Omega \cap M$  – график некоторой  $C^r$ -функции  $\alpha$ , такой, что  $\alpha : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^l$  и

$$D\alpha(x) = (\frac{\partial f}{\partial y}(x, \alpha(x)))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha(x))$$

*Доказательство.* Рассмотрим новое отображение

$$\tilde{f} : (x, y) \rightarrow (x, y) \equiv \mathbb{R}^{k+l} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}, \quad x, y - \text{векторы размера } k \text{ и } l \text{ соответственно}$$

Определим  $\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y))$ . В матричном виде:

$$\tilde{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \vdots & & \\ & x_k & & \\ f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) & & & \\ & \vdots & & \\ f_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) & & & \end{pmatrix}$$

Тогда  $D\tilde{f}$  - блочная матрица вида:

$$D\tilde{f}(x, y) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right)$$

Ее определитель в этом случае  $1 \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \neq 0$ .

По теореме о локальной обратимости у  $(x_0, y_0)$  существует окрестность  $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$  такая, что отображение  $\tilde{f}|_{\Omega}: \Omega \rightarrow \tilde{f}(\Omega) \subset \mathbb{R}^{k+l}$  является  $C^r$ -изоморфизмом. Пусть  $g: \tilde{f}(\Omega) \rightarrow \Omega$  - обратное отображение.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[g]{f} \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

Функция  $g$  задана как  $g = \begin{cases} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{cases}$ , причем  $g_2(x, y) = x$ .

Положим  $\alpha(x) = g_2(x, 0)$ . Надо проверить, что  $f(x, \alpha(x)) = 0$ .

$$(x, f(x, \alpha(x))) = (x, 0)$$

$\Updownarrow$

$$\tilde{f}(x, y) = (x, 0) \implies (x, y) = g(x, 0) \implies (x, y) = (x, g_2(x, 0)) \implies y = g_2(x, 0)$$

Поскольку  $\alpha(x) = g_2(x, 0)$  - все выполнено. □

**Опр. 12.** Регулярные точки:

Пусть  $f \in D(p)$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Точка  $p$  называется регулярной, если  $Df(p)$  - сюръективное отображение. Это условие эквивалентно тому, что  $\text{rank}(Df(p)) = k$  (т.е. в  $Df(p)$  есть  $k$  линейно независимых строк).

Матрица  $Df(p)$  имеет вид

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ если } n < k \text{ то не существует регулярных точек}$$

**Теорема 7** (Лемма о регулярном дополнении): Пусть  $f \in C^r$ ,  $r > 0$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$  и  $f$  регулярна в точке  $p$ .

Тогда  $\exists$  функции  $(g_1, \dots, g_{n-k}) = \bar{g} - C^r$ -гладкие, отображающие  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ , такие, что отображение  $(f, g): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n=n-k+k}$  регулярно в точке  $p$  и, в частности, обратимо в некоторой окрестности точки  $p$ .

*Доказательство.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & \frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k \times n}$$

Из алгебры знаем:  $\exists k$  линейно независимых столбцов (можем считать, что первые  $k$  штук). Дополним нижнюю часть матрицы фрагментом

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_k} & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n-k \times n}$$

Итоговая матрица будет иметь размеры  $n \times n$ .

Пусть теперь  $g(x_1, x_2)$  такое, что  $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$ . И положим:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = x_{k+1} \\ \vdots \\ g_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = x_n \end{cases}$$

Тогда матрица  $n \times n$  будет иметь вид:

$$\left( \begin{array}{c|c} k \times k, \det \neq 0 & \text{неважно что} \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Ее определитель  $\det = \det(\frac{\partial f_{1 \dots k}}{\partial x_{1 \dots k}}) \cdot \det E \neq 0$  А обратимость следует из невырожденности.  $\square$

**Теорема 8** (Лемма о локальном наложении): Пусть  $f \in C^r, r > 1, f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, U \subset_{op} \mathbb{R}^n$  - регуляна в точке  $p$ .

Тогда  $f(p)$  - внутренняя точка множества  $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$ . То есть:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \varepsilon\text{-шар } \overset{o}{B}_\varepsilon(f(p)) \text{ целиком содержится в } f(\Omega)$$

*Доказательство.* По предыдущей лемме  $\exists \bar{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  такое, что отображение  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  регулярно (и, в частности, локально обратимо в  $p$ ).

По теореме о локальной обратимости  $\exists$  окрестность  $p \in U \subset_{op} \mathbb{R}^n$  такая, что  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \subset_{op} \mathbb{R}^n$ .

Образ множества  $U$ , т.е. множество точек вида  $(f_1(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x}), g_1(\bar{x}), \dots, g_{n-k}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in U$  открыт в  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда пользуясь тем, что при проекции образы открытых множеств открыты, получаем, что

Множество точек из проекций на первые  $k$  координат множества  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(U)$ :  $\begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \dots \\ f_k(\bar{x}) \end{pmatrix} \subset_{op} \mathbb{R}^k$

Проверим теперь, что если  $A \subset_{op} X \times Y$ , то  $\Pi(A) \subset_{op} X$ ,  $\Pi$  - проекция.

Берем точку  $x_0 \in \Pi(A)$ . Существует точка  $(x_0, y_0) \in A$ , значит  $\exists$  шарик с центром в  $(x_0, y_0)$  целиком лежащий в  $A$ . Ясно, что проекция этого шарика накрывает  $\varepsilon$ -шарик в  $X$  с центром в  $x_0$ .  $\square$

### 3 Многообразия в $\mathbb{R}^n$

#### 3.1 Многообразия

**Опр. 13.** Пусть  $M$  - метрическое пространство (не обязательно подмножество в  $\mathbb{R}^n$ ).  $M$  является  $k$ -мерным многообразием без края, если  $\forall p \in M$  у точки  $p \exists$  окрестность  $U_p \subset_{op} M$  гомеоморфная открытому шару в  $\mathbb{R}^k$ .

**Опр. 14.** Гомеоморфизм - непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно.

**Теорема 9** (Брауэра об инвариантности области (без док-ва).): Пусть  $U \subset_{op} \mathbb{R}^k$  и  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  - непрерывна и инъективна.

Тогда  $f(U) \subset_{op} \mathbb{R}^k$  и  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  - тоже непрерывна.

**Опр. 15.**  $M$  -  $k$ -мерное  $C^r$ -многообразие в  $R^n$ , если:

$$\forall p \in M \exists U \in \mathcal{N}(p), U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \stackrel{C^r}{\cong} \text{ открытому шару в } \mathbb{R}^k$$

**Утв.** Предыдущее утверждение эквивалентно требованиям:

1.

$$\exists U \in \mathcal{N}(p) U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \cong \text{ открытому подмножеству } \omega \in \mathbb{R}^k$$

2.

$$\exists U \in \mathcal{N}(p) U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \cong \mathbb{R}^k$$

**Теорема** (1 о регулярных решениях): Пусть  $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$ ,  $f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  -  $C^r$  гладкие функции.

Непустое множество  $M$  задано как

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ M = \{\bar{x} \in \Omega \mid &\vdots\}, \text{ где } \bar{x} \text{ - регулярная точка} \\ f_k(x) &= 0 \end{aligned}$$

То есть  $\text{rank } \frac{\partial f_1 \dots k}{\partial x_1 \dots n} = k$  Тогда  $M$  -  $n - k$ -мерное  $C^r$ -многообразие без края.

**Доказательство.** Пусть  $p \in M$ . Можно считать, что последние  $k$  столбцов линейно независимы, то есть  $\left| \frac{\partial f_1 \dots k}{\partial x_{n-k+1} \dots n} \right| \neq 0$  - определитель матрицы Якоби. По теореме о неявной функции существует такая окрестность  $\tilde{U}$  точки  $p$ ,  $\tilde{U} \subset_{op} \mathbb{R}^n$ , такая, что  $\tilde{U} \cap M$  - график некоторой функции:

$$x_{n-k+1 \dots n} = g(x_1 \dots n-k)$$

Осталось показать, что график функции является многообразием  $U \subset \mathbb{R}^k$ .

**Лемма** График любого  $C^r$  отображения  $g$ , определенного на открытом подмножестве - это многообразие, гомеоморфное  $U$ .

**Доказательство.**

$$X \xrightarrow{g} Y$$

График  $\Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in X\}$

$$U \xrightarrow{g} \Gamma_g \text{ - } C^r \text{ отображение}$$

$$x \xrightarrow{g} (x, g(x)) \xrightarrow{g^{-1}-\text{проекция на } X} X$$

□

По лемме теорема доказана.  $\square$

**Замечание:** Если у градиента функции в точке  $p$  хотя бы одна координата не равна 0, то  $p$  - регулярная.

**Утв.**  $X \xrightarrow{C^r} Y$  - если  $X$  -  $C^r$ -многобразие, то  $Y$  - тоже.

*Доказательство.* Пусть  $\psi : X \rightarrow Y$  -  $C^r$ -изоморфизм. Пусть  $q \in Y, p = \psi^{-1}(q)$ , по условию существует открытая окрестность  $V$  точки  $p$ ,  $C^r$ -изоморфная  $U \subset_{op} \mathbb{R}^k$ .

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset_{op} Y$$

$\psi(V)$  - прообраз  $V$  под действием  $\psi^{-1}, V = \psi^{-1}(\psi(V))$   
 $\psi \circ \varphi$  -  $C^r$ -изоморфизм  $U$  на окрестность точки  $q$  в  $X$ .  $\square$

$$f_1(x_1, \dots, x_k)$$

**Лемма** (о локальном вложении) Пусть  $f = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}$ ,  $U \subset_{op} \mathbb{R}^k, f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Если точка  $\bar{x}_0 \in U$  такая, что  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = k$ , то у точки  $x_0$  существует окрестность  $\tilde{U}$  такая, что  $f(\tilde{U})$  -  $k$ -мерное многобразие.

*Доказательство.*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Переставим  $f$  (если надо) и считаем первые  $k$  строк невырожденными в  $x_0$ . Рассмотрим урезанное отображение  $\psi = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ f_1 & \dots & f_k \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$

По теореме о локальной обратимости существует окрестность  $\tilde{U} \ni x_0$ , такая, что  $\psi(\tilde{U}) \subset_{op} \mathbb{R}^k$  и  $\psi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \psi(\tilde{U})$  -  $C^r$ -изоморфизм.

$$\psi(\tilde{U}) \xrightarrow{\psi^{-1}} \tilde{U}$$

$\tilde{U}$  в свою очередь, отображается в  $f(\tilde{U})$  данным отображением:

$$\begin{matrix} f_1(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ \vdots \\ f_k(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ f_{\text{остальные индексы}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \end{matrix}$$

Причем  $f_1, \dots, f_k = (x_1, \dots, x_k)$ .

$$f_{\text{остальные}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = f_{\text{остальные}} \circ \psi(x_1, \dots, x_k)$$

$f(\tilde{U}) = \{(\bar{x}, \psi(\bar{x})) \mid \bar{x} \in \tilde{U}\}$  - график отображения  $\psi$ , то есть по соответствующей лемме о графике это многобразие.  $\square$

**Опр. 16.**  $M$  - многообразие (с краем, а может и без), если  $\forall p \in M \exists U \subset M$   $C^r$ -изоморфно  $op$

$$1. \tilde{U} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$$

$$2. \mathbb{R}_+^k = \{x_1, \dots, x_k \mid x_1 \geq 0\}$$

**Опр. 17.** Точка  $p \in \partial M$  (принадлежит краю), если у точки  $p$  нет окрестности первого типа.

**Лемма** (о крае полупространства)  $\mathbb{R}_+^k$  - многообразие с краем,  $\partial \mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1 = 0\}$ . При этом  $\mathbb{R}_+^k$  называется полупространством.

*Доказательство.*  $\mathbb{R}_+^k$  является многообразием по определению, ведь любая ее точка гарантированно имеет окрестность, открытую в  $\mathbb{R}_+^k$ , например, в качестве такой окрестности можно взять само  $\mathbb{R}_+^k$ .

Пусть  $x_1 > 0$ , тогда очевидно, что множество  $\mathbb{R}_+^k \cap \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1 > 0\}$  открытое в  $\mathbb{R}_+^k$  является окрестностью точки  $p$  и поэтому  $p \in M \setminus \partial M$

Пусть  $x_1 = 0$ . Ясно, что никакая окрестность точки  $p$  в  $\mathbb{R}_+^k$  не является открытым множеством в  $\mathbb{R}_+^k$ . Однако, нам было необходимо более сложное утверждение, а именно - нужно было показать, что  $U$  не может быть  $C^r$ -изоморфно открытому подмножеству  $\Omega \in \mathbb{R}_+^k$ . Пусть  $r > 0$  в  $C^r$ , по теореме о локальной обратимости если  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  и  $\psi : \Omega \rightarrow \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$   $C^r$ -изоморфизм, то  $\psi(\Omega) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ .

И наконец,  $r \neq 0$  по теореме Брауэра об инвариантности области.  $\square$

**Лемма** (об изоморфизме многообразий) Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  -  $C^r$ -многообразие. Отображение  $\varphi : X \xrightarrow{C^r} Y \subset \mathbb{R}^n$  такое, что  $\varphi(\partial X) = \partial Y$ . Тогда  $Y$  - тоже  $C^r$ -многообразие.

Более "стильная"  $\textcircled{C}$  формулировка:  $\varphi(\partial X) = \partial(\varphi(X))$

*Доказательство.* Пусть  $q \in Y$ . Пусть  $p = \varphi^{-1}(q) \in X$ . Если  $p \in X \setminus \partial X$ , то  $\exists U \subset X \mid p \in U \underset{op}{\subset} W \subset \mathbb{R}^k$ , тогда  $\varphi(U) = \varphi \circ \psi^{-1}$  -  $C^r$ -изоморфизм как композиция. Т.е. мы нашли окрестность точки  $q \in Y$ , которая  $C^r$ -изоморфна открытому в  $\mathbb{R}^k$  множеству.

Пусть  $p \in \partial X$ , тогда не существует окрестности  $U \underset{op}{\subset} X$ ,  $C^r$ -изоморфной подмножеству  $W$ , открытому в  $\mathbb{R}^k$ .

Если предположить, что  $q \in \partial Y$ , то  $\exists V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$  и  $\psi : V \xrightarrow{\cong} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ . Тогда  $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(W) \underset{op}{\subset} X$  - открытая окрестность точки  $p \in X$ , а композиция - это  $C^r$ -изоморфизм  $W$ , чего не может быть по условию. Получаем противоречие.  $\square$

**Лемма** (об открытых частях многообразия)  $X$  -  $C^r$ -многообразие в  $\mathbb{R}^n$ ,  $U \underset{op}{\subset} X$ , тогда  $U$  - тоже  $C^r$ -многообразие той же размерности, а  $\partial U = U \cap \partial X$

*Доказательство.* Пусть  $p \in X$ , тогда у  $p$  существует окрестность  $V \underset{op}{\subset} X$ , такая, что  $V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^k$  открытому подмножеству  $W$  в  $\mathbb{R}^k$  или  $\mathbb{R}_+^k$ .

Если  $p \in U$ , то множество  $V \underset{op}{\cap} U \subset U$  как пересечение открытых (лемма из 2 семестра 1 курса о пересечении открытых метрических пространств).

$$\varphi(U \cap V) \underset{op}{\subset} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k \text{ или } \mathbb{R}_+^k \implies \varphi(V \cap U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k \text{ или } \mathbb{R}_+^k$$

Пусть  $p \in U$ . Если  $p \notin \partial X$ , то  $W$  в предыдущих строчках можно выбрать первого типа ( $W \in \mathbb{R}^k$ ). Значит  $p \notin \partial U$ .

Если  $p \notin \partial U$ , тогда (поскольку мы уже доказали, что  $U$  - многообразие)  $\exists \Omega \subset_{op} U \mid p \in \Omega \xrightarrow{\psi} A \subset_{op} \mathbb{R}^k$ .  
Но поскольку  $U \subset_{op} X$ , выполнено утверждение  $\Omega \subset_{op} X \implies p \notin \partial X$ .  $\square$

**Теорема 10** (о крае многообразия): Пусть  $X$  -  $C^r$ -многообразие размерности  $k$ . Тогда если его край  $\partial X$  непуст, то он является  $C^r$ -многообразием без края размерности  $k-1$  ( $\partial\partial X = \emptyset$ )

*Доказательство.* Пусть  $p \in \partial X$ . Надо показать, что  $\exists U \subset_{op} \partial X$ , такое, что  $U \cong$  открытому подмножеству  $W$  в  $\mathbb{R}^{k-1}$ .

По условию у точки  $p$  существует открытая в  $X$  окрестность  $\tilde{U} \subset_{op} X$ , такая, что  $\tilde{U} \xrightarrow{\varphi} W \subset_{op} \mathbb{R}_+^k$ .

$$\begin{aligned} p \in \partial X &\implies p \in \partial \tilde{U} (\text{ по предыдущей лемме}) \implies \\ &\implies \varphi(p) \in \partial \tilde{W} \implies \text{первая координата точки } \varphi(p) \text{ равна } 0 \end{aligned}$$

$\tilde{W} \subset_{op} \mathbb{R}_+^k \implies \tilde{W} \cap \{x_1, \dots, x_k \mid x_1 = 0\} \subset_{op} \mathbb{R}^k$  - по лемме об открытых частях подпространства

Заметим, что пересечение этих множеств это  $W$ , а  $\{x_1, \dots, x_k \mid x_1 = 0\} = \mathbb{R}^{k-1} \varphi^{-1}(W) \subset_{op} \partial X$  (как прообраз открытого), значит  $\varphi^{-1}(W)$  - искомая окрестность  $U$ .  $\square$

**Теорема 11** (2 о регулярных решениях): Пусть  $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$ ,  $h, f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Множество  $M$  регулярных решений системы

$$\begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

является  $n-k$ -мерным  $C^r$ -гладким многообразием, край которого задается уравнением  $\begin{cases} h(x) = 0 \\ f_i(x) = 0 \end{cases}$

**Опр. 18.** Пусть  $p$  - решение системы (??).

- Если  $h(p) > 0$  и  $\nabla f_i(p)$  линейно независимы, то  $p$  - регулярна
- Если  $h(p) = 0$  и  $\nabla h, \nabla f_1, \dots, \nabla f_k$  линейно независимы, то  $p$  - регулярна

*Доказательство.* Пусть  $p \in M$

1. Если  $h(p) > 0$ , то у точки  $p$  существует окрестность  $W \subset_{op} \mathbb{R}^n$ , в которой  $h(W) > 0$ . Множество

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases} = M \cap W \subset_{op} M \quad (5)$$

Итак, множество  $M \cap W$  совпадает с множеством тех точек из  $\Omega \cap W \subset_{op} \mathbb{R}^n$ , где  $\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_k = 0 \end{cases}$  -  
многообразие размерности  $n-k$

2. Если  $h(p) = 0$ ,

то продолжим наш набор отображений и получим набор  $\varphi = (h, f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_{n-1})$  так, чтобы  $n$  штук функций были регулярными в окрестности  $U$  точки  $p$  (это разрешается сделать в силу леммы о регулярном дополнении).

$$M \cap U = \{x \in M \mid x \in U\}, \text{ причем } x \in M \equiv \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Отображение } \varphi = \begin{matrix} h \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{matrix} : U \rightarrow \varphi(U) C^r\text{-изоморфизм}$$

$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  по лемме о локальной обратимости и

$$\varphi(M \cap U) = (y_1, \dots, y_n) = \bar{y} \in \varphi(U) = \begin{pmatrix} y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0 \\ \vdots \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ где на } y_{k+1} \dots y_{n-1} \text{ не ограничений}$$

— это некоторое  $n - k$  мерное подпространство  $Q$ , пересеченное с  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$

Тогда  $Q \cap \varphi(U) \subset Q$

□

### 3.2 Касательные пространства

**Опр. 19.** Пусть  $p \in X \subset \mathbb{R}^n$ . Вектор  $v$  называется касательным вектором в точке  $p$  к множеству  $X$  ( $v \in T_p(X)$ ), если существует  $T \subset [0, \varepsilon]$ , содержащая 0, такая, что 0 - предельная точка множества  $T$  и  $\exists$  отображение  $\gamma : T \rightarrow X$  такое, что  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'_T(0) = v$ . При этом  $\gamma'_T = \lim_{t \rightarrow 0|_T} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$

На бытовом уровне (человеческий перевод):

$v$  - касательный вектор к  $X$  в  $p$  к  $X$ , если из точки  $p$  возможно двигаться по  $X$  с начальной скоростью  $v$

В таком случае  $T_p(X)$  называется касательным пространством к  $X$  в  $p$  и **обязательно** проходит через нулевую точку пространства. А чтобы  $T_p(X)$  проходило через точку  $p$  - придумали специальное множество  $K_p(X) = p + T_p(X)$ , называемую контингенцией (чтобы сложение точки и пространства не смущало читателя - считайте  $p$  вектором из нулевой точки пространства в  $p$ ).

**Теорема 12:** Свойства  $T_p(X)$ :

1. Пусть  $p \in X \subset \mathbb{R}^n, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ .  $v$  - касательный вектор  $\iff \exists$  последовательность точек  $x_n \rightarrow p$ , такая, что  $\frac{x_n-p}{|x_n-p|} \rightarrow \frac{v}{|v|}$  (угол между векторами  $x_n - p$  и  $v$  стремится к 0).
2. Ноль всегда  $\in T_p(X)$
3.  $T_p(X)$  - замкнутое пространство
4.  $T_p(X)$  - конус с вершиной в 0, т.е.  $v \in T_p(X) \implies \forall \lambda \geq 0 \ \lambda v \in T_p(X)$
5.  $p \in A \subset B \implies T_p(A) \subset T_p(B)$
6. Локальность:

$$p \in X, U - \text{окрестность } p \text{ в } X \implies T_p(X) = T_p(U)$$

**Утв.**  $v \in T_p(X) \iff \exists x_n \in X, x_n \rightarrow p \text{ и } t_n > 0, t_n \rightarrow 0 \text{ так, что}$

$$\frac{x_n - p}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$$

*Доказательство.* Слева направо ( $\implies$ ):

Пусть  $v \in T_p(X)$ . Выберем  $T$  и  $\varphi$  как в определении. Т.к. 0 - предельная точка  $T$  (из определения), то  $\exists t_n \in T, t_n \rightarrow 0$ , положим  $x_n = \varphi(t_n)$ . Вот так вот раз-раз и готово. Справа налево ( $\impliedby$ ):

Пусть есть  $x_n \in X, t_n \rightarrow 0$  и  $\frac{x_n-p}{t_n} \rightarrow v$ . Положим  $T = \{0, t_1, t_2, \dots\}, \varphi(t_n)$  приравняем к  $x_n$ .  $\square$

**Опр. 20.**  $K \subset \mathbb{R}^n$  называется полупространством размерности  $k \leq n$ , если  $\exists e_1, \dots, e_k$  - линейно независимый набор из  $\mathbb{R}^n$ , такой, что  $K = \{(t_1 e_1 + \dots + t_k e_k) \mid t_1 \geq 0, t_{>1} - \text{любые}\}$

Любое векторное полупространство в  $\mathbb{R}^n$  - замкнутый конус с вершиной в любой точке границы.

### 3.3 Дифференциал гладкого отображения

Дифференциал - отображение касательных пространств. Пусть  $\mathbb{R}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{R}^m$ .

**Опр. 21.**  $p \in T_p(X), \varphi - C^r$ -гладкое отображение.

$d\varphi(p) : T_p(X) \rightarrow T_{\varphi(p)}(Y)$  определим следующим образом:

$d\varphi(p)\langle v \rangle = d\tilde{\varphi}(p)\langle v \rangle$ , где  $\tilde{\varphi} - C^r$ -продолжение отображения  $\varphi$  на окрестность множества

Покажем корректность определения:

*Доказательство.* Почему значение дифференциала не зависит от выбора  $\varphi$ , почему образ лежит в  $T_q(Y), q = \varphi(p)$ ?

Пусть  $v \in T_p(X), v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-p}{t_n}$ . Покажем, что  $d\varphi(p)\langle v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(p)}{t_n}$ . Пусть  $\tilde{\varphi}$  - некоторое  $C^r$ -продолжение отображения  $\varphi$ .

$$p, x_n \in X \implies \varphi(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n), (\tilde{\varphi})(p) = \varphi(p)$$

$$\varphi(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n) = \tilde{\varphi}(p) + d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|) - \text{из определения } d\tilde{\varphi}$$

$$\frac{\varphi(x_n) - \varphi(p)}{t_n} = \frac{\tilde{\varphi}(x_n) - \tilde{\varphi}(p)}{t_n} = \frac{d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle}{t_n} + o\left(\frac{|x_n - p|}{t_n}\right)$$

Отображене  $d\tilde{\varphi}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  линейно, поэтому  $\frac{d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle \frac{x_n - p}{t_n} \rangle$

Итак,  $\frac{\varphi(x_n) - q}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle \frac{x_n - p}{t_n} \rangle + o\left(\frac{|x_n - p|}{t_n}\right)$ . Поскольку  $\frac{x_n - p}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_n) - q}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle v \rangle + o(\dots)$$

$\square$

**Свойства дифференциала:**

$$p \in X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

1. Композиция:

$$d(\psi \circ \varphi)(p) : T_p(X) \rightarrow T_{\psi \circ \varphi(p)}(Z)$$

$$d(\psi \circ \varphi)(p) = d\psi(\varphi(p)) \circ d\varphi(p), \quad \forall v \in T_p(X) \quad d\psi(\varphi(p)) \langle d\varphi(p) \langle v \rangle \rangle$$

2. Если  $\varphi : X \rightarrow Y$  –  $C^r$ -изоморфизм, то  $T_p(X)$  и  $T_q(Y)$  линейно изоморфны ( $\exists$  линейный изоморфизм этих пространств).

**Утв.** Пусть  $M$  –  $k$ -мерное гладкое множество в  $\mathbb{R}^n$ .

1. Если  $p \in M \setminus \partial M$ , то  $T_p(M)$  –  $k$ -мерное векторное пространство.
2. Если  $p \in \partial M$ , то  $T_p(M)$  –  $k$ -мерное полупространство.

*Доказательство.* Было утверждение:  $\varphi : (p \in) A \cong B$ , тогда  $T_p(A) \xrightarrow{d\varphi(p)} T_{\varphi(p)}(B)$  – линейно изоморфны.

1. Пусть  $\exists U \underset{op}{\subset} M, p \in U$  и  $\exists \varphi : U \cong \mathbb{R}^k$ . Тогда  $d\varphi(p) : T_p(U) \rightarrow T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$ . А по свойству локальности касательных пространств  $T_p(U) = T_p(M)$ .
2. Пусть  $\exists U \underset{op}{\subset} M, p \in U$  и  $\varphi : U \cong \mathbb{R}_+^k, \varphi(p) \in \partial \mathbb{R}_+^k$

$$d\varphi(p) : T_p(M) \xrightarrow{\text{линейно}} T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}_+^k) = \mathbb{R}_+^k$$

□

**Теорема 13** (о касательном пространстве к регулярному решению систему уравнений): Пусть  $p$  – регулярное решение системы уравнений  $f_1(\bar{x}) = 0$

- регулярное решение системы уравнений  $\vdots, f_i - C^r$ -отображение  $\Omega \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow R$ . Точка  $p$  – регулярная  $\iff rank(df_1, \dots, df_k) = k$  – матрица Якоби, в которой дифференциал – это вектор столбец матрицы.

Тогда  $T_p(M)$  ( $M$  – множество всех регулярных решений) – это ортогональное дополнение к  $\nabla f_1(p) \oplus df_1(p) \langle v \rangle = 0$

$\dots \oplus \nabla f_k(p) =$  множеству решений линейной системы уравнений  $\vdots$   
 $df_k(p) \langle v \rangle = 0$

Напоминание: Пусть  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  (не обязательно векторное пространство).  $V^\perp$  (орт. дополнение) =  $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in V \ u \perp v\}$

**Утв.**  $V^\perp$  – всегда векторное подпространство.

**Утв.**  $V$  – векторное пространство  $\implies V^\perp$  имеет дополнительную размерность (в смысле дополнения к пространству):

$$\dim V = k \implies \dim V^\perp = n - k$$

*Доказательство.* У точки  $p$  имеется окрестность  $U \underset{op}{\subset} M$ , в которой все решения регулярны  $\implies U$  –  $(n-k)$ -мерное многообразие по теореме о регулярных решениях. Тогда  $T_p(M) = T_p(U)$  –  $(n-k)$ -мерное векторное подпространство в  $\mathbb{R}^n$

**Лемма** Пусть  $p \in X$  – произвольное множество  $\subset \mathbb{R}^n$ ,  $g|_X = const$  – постоянная на множестве гладкая функция. Тогда  $dg(p) : T_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$  – нулевое (зануляющее) отображение.

*Доказательство.* Пусть  $v \neq 0$  из  $T_p(X)$ .  $\exists x_n \rightarrow p, t_n \searrow 0, \frac{x_n - p}{t_n} \rightarrow v$

$$dg(p)\langle v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n) - g(p)}{t_n} = \frac{0}{t_n} = 0$$

□

$$f_i|_u \equiv 0 \implies df_i(p)\langle v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_p(U) = T_p(M)$$

Помним:  $df(p)\langle v \rangle = (\nabla f, v) = 0$ . Тогда ясно, что  $\nabla f_i(p) \perp v \quad \forall v \in T_p(U) = T_p(M)$ .

Осталось доказать, что если  $v \perp$  всем градиентам  $f_i$ , то  $v \in T_p(M)$ :

$\nabla f_1, \dots, \nabla f_k(p)$  - линейно независимы как строки матрицы Якоби ранга  $k$ .  $v$  - решене линеаризованной системы  $(\nabla f, v) = 0$  (помним, что градиент  $f$  это матрица из градиентов  $f_i$ ) Эта система имеет ранг  $k$  - значит множество ее решений это  $(n - k)$ -мерное векторное пространство  $W$ . Но мы знаем, что множество  $T_p(M)$  - тоже  $(n - k)$ -мерное векторное подпространство и уже доказали, что  $T_p(M) \subset W$ .

$$\dim T_p(M) = \dim W \text{ и } T_p(M) \subset W \implies T_p(M) = W$$

□

### 3.4 Условные экстремумы

**Лемма** (о не-максимуме) Пусть  $p \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  - гладкая функция.

Если  $\exists v \in T_p(X)$  такое, что  $dg(p)\langle v \rangle > 0$ , то  $p$  - не локальный максимум.

*Доказательство.* Пусть  $v$  - вектор из условия. Тогда  $\exists x_n \in X$ ,  $t_n \searrow 0$ ,  $\frac{x_n - p}{t_n} \rightarrow v$

Знаем, что  $dg(p)\langle v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n) - g(p)}{t_n} > 0 \implies$  числитель больше 0 при  $n \rightarrow \infty$ , значит  $g(x_n) > g(p) \implies p$  - не локальный максимум.  $\square$

**Утв.** (Следствие) Если  $X$  - многообразие и  $p \in X \setminus \partial X$ , то  $p$  - экстремум  $g \implies dg(P)|_{T_p(X)} \equiv 0$

*Доказательство.* Если  $dg(p)|_{T_p(X)} \neq 0$ , то  $\exists v \in T_p(X)$   $dg(p)\langle v \rangle \neq 0$ , при этом  $-v \in T_p(X)$  и  $dg(p)\langle v \rangle$  будет другого знака. Тогда по лемме о не-экстремуме  $p$  - не экстремум.  $\square$

$$f_1(\bar{x}) = 0$$

**Теорема 14** (о градиентах): Пусть  $p$  - регулярное решение гладкой системы  $\begin{array}{c} f_1(p) = 0 \\ \vdots \\ f_k(p) = 0 \end{array}$ . Пусть  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  - гладкая функция.

Если  $p$  - экстремум  $g$  на  $M$ , то  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ , такие, что

$$\nabla g(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_k \nabla f_k(p)$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что если  $p$  - экстремум, то  $\nabla g(p) \perp T_p(M)$  или, что то же самое:  $\nabla g(p) \in T_p(M)^\perp$ .

Пространство  $T_p(M)^\perp$  - линейная оболочка градиентов функций  $f_1, \dots, f_k$  в точке  $p$  ( $T_p(M)^\perp$  имеет размерность  $k \implies \nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p)$  - его базис).  $\square$

### 3.5 Достаточное условие экстремума

**Теорема 15:** Пусть  $f_1, \dots, f_k$  -  $C^r$ -дифференцируемы и точка  $p$  - регулярное решение,  $p \in M = \{\bar{x} \mid f_1(\bar{x}) = 0, \dots, f_k(\bar{x}) = 0\}$ . Пусть  $g$  -  $C^2$ -гладкая функция, определенная в окрестности точки  $p$ .

Необходимое условие:

Если  $p$  - экстремум, то  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ , а в  $p$   $L(p)$  равна 0:

$$L(x) = g(x) - (\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_k f_k(x))$$

Достаточное условие:

Если в такой точке матрица Гессе  $\Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)$  положительно определена на  $T_p(M)$ , то  $p$  - строгий локальный минимум, если  $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) < 0$  - локальный максимум, если же  $\exists u, v \in T_p(M)$ , такие, что  $\Gamma\langle v \rangle > 0, \Gamma\langle u \rangle < 0$ , то  $p$  - не экстремум.

*Доказательство.* Если  $p$  - экстремум, то необходимое условие выполнено по теореме о градиентах:

$$\exists \lambda_i : \nabla g(p) = \sum \lambda_i \nabla f_i(p)$$

Это на самом деле то же самое, что и  $\frac{\partial L}{\partial x_1}(\bar{x}, p) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_k}(\bar{x}, p) = 0$ , где  $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}, p) = \frac{\partial g}{\partial x_i} - (\lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}) = 0$ .

При этом  $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x) = -f_i(x) = 0$ , так как  $x \in M$ .

Докажем достаточное условие:

Пусть  $dL(p) = 0, \Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) > 0$  (т.е. положительно определенная матрица). Покажем, что у точки  $p$  существует окрестность в  $M$  такая, что в нее  $g(x) > g(p)$ .

От противного: предположим, что это не так, тогда  $\exists x_n \in M, x_n \rightarrow p, g(x_n) \leq g(p)$ . Можно выбрать такую подпоследовательность  $x_{n_k}$  такую, что

$$\frac{x_{n_k} - p}{|x_{n_k} - p|} \rightarrow v \text{- единичный вектор, } v \in T_p(M)$$

Считаем, что уже  $x_n$  такая, что  $\frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rightarrow v \in T_p(M), g(x_n) = L(x_n)$  - на множестве  $M$  функция  $g = L$ , ведь  $x \in M \implies f_i(x) = 0$ .

Значит  $L \in C^2$  (в окрестности  $p$ ), мы знаем, что

$$L(x) = L(p) + dL(P)\langle x - p \rangle + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x - p \rangle + o(|x - p|^2)$$

В частности

$$L(x_n) - L(p) = dL(p)\langle x_n - p \rangle + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2), dL(p)\langle x_n - p \rangle = 0 \text{ по предположению}$$

$$g(x_n) - g(p) = L(x_n) - L(p) = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2)$$

По "противному" предположению это  $\leq 0$ , но с другой стороны, поскольку  $\Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) > 0$  для  $p \in T_p(M)$ , то  $\exists \varepsilon > 0$  такой, что  $\Gamma\langle v \rangle \geq \varepsilon \cdot |v|^2 \forall v \in T_p(M)$ . Это самое сложное место доказательства, вот почему это так:

$\Gamma : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  - 2-однородная функция, непрерывная на  $T_p(M)$  (поскольку это многочлен). Значит на множестве  $W$ , составленном из множества единичных векторов из  $T_p(M)$  эта функция имеет минимум, больший 0, поскольку множество  $W$  - компакт.

Итак,  $\forall v \in T_p(M)$  если  $|v| = 1 \implies \Gamma\langle v \rangle \geq \varepsilon$ , тогда  $\forall v \in T_p(M)$  при любой длине  $v$   $\Gamma\langle v \rangle \geq |v|^2$  (вместо единичного  $v$  взяли  $v$  не единичной длины, вторая степень вылезла в силу 2-го порядка однородности).

Итак,  $0 \geq g(x_n) - g(p) = L(x_n) - L(p) = \Gamma\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2)$ . Поделим это равенство на  $|x_n - p|^2$ :

$$0 \geq \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} = \frac{\Gamma(p)\langle x_n - p \rangle}{|x_n - p|^2} + o(1)$$

Поскольку  $o(1) \xrightarrow{x_n \rightarrow p} 0$ , то:

$$\frac{\Gamma\langle x_n - p \rangle}{|x_n - p|^2} = \Gamma\langle \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow \Gamma\langle v \rangle \geq \varepsilon$$

Значит  $0 \geq \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2}$  - пополам для уверенности. Получаем противоречие, таким образом доказали достаточность.

Пусть теперь  $\exists u, v \in T_p(M), \Gamma\langle u \rangle > 0, \Gamma\langle v \rangle < 0$

Заметим, что  $u \in T_p(M) \implies \exists x_n \in M$  такая, что  $\frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rightarrow \frac{u}{|u|}$ .

$$g(x_n) - g(p) = \Gamma\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2) \text{ - поделим уравнение на } |x_n - p|^2$$

$$\frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} = \Gamma\langle \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$$

Первое слагаемое стремится к  $\Gamma\langle \frac{u}{|u|} \rangle > 0$ , а второе - к нулю. Значит при  $n \rightarrow \infty \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} > 0$ .

Значит,  $p$  - не максимум функции  $g$  на множестве  $M$ . Аналогично расписав для вектора  $v$  получаем, что  $p$  - не минимум.

□

## 4 Поточечная и равномерная сходимость

Пусть  $X$  - некое множество,  $Y \subset \mathbb{R}$  или  $\mathbb{R}^n$  или вообще любое метрическое пространство. Даны последовательность функций  $f_n : X \rightarrow Y, n = 1, 2, \dots$ , и функция  $f : X \rightarrow Y$ .

**Опр. 22.** Последовательность функций сходится на  $X$  к функции  $f$ , поточечно, если  $\forall x \in X$  последовательность значений  $f_n(x)$  сходится к  $f$  при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

**Утв. 6** Из непрерывной функции  $f_n$  не всегда следует непрерывность функции  $f$

*Доказательство.* Пусть  $X = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$ . Тогда  $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$  и так далее. В это случае

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \in [0, 1]}} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Видно, что  $f(x)$  разрывна, хотя все  $f_n$  непрерывны.  $\square$

**Опр. 23.** Пусть  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Последовательность  $f_n$  сходится к  $f$  **равномерно** на множестве  $X$ , если

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (6)$$

"Оригинальное" определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \mid \forall x \in X \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (7)$$

*Доказательство.* Докажем эквивалентность двух определений:

(??)  $\implies$  (??):

Пусть  $\varepsilon > 0$ , надо подобрать  $n_0$ . По условию (??):

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Но  $\forall x \in X \sup \geq |f_n(x) - f(x)|$ , значит

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\square$

**Опр. 24.** Последовательность  $f_n(x)$  поточечно сходится к  $f(x)$  при любых  $x$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(??)  $\implies$  (??): Надо доказать, что  $\forall \varepsilon \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

По условию (??):

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \implies \sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Равномерную сходимость  $f_n(x)$  к  $f(x)$  будем обозначать  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

**Теорема 16** (Критерий отсутствия равномерной сходимости):  $f_n$  не сходится равномерно к  $f \iff \exists x_n \in X$  такая, что  $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$

**Теорема 17** (о пределе пределов): Пусть  $X \subseteq \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{V}$  метрического пространства).

Пусть  $\begin{cases} f : X \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ ,  $p$  - предельная точка  $X$ .

Предположим, что  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} y_n$  и  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Если  $f_n$  **равномерно** сходится к  $f$  ( $f_n \rightrightarrows f$ ) на  $X$ , то  $f(x) \rightarrow y$  при  $x \rightarrow p$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow p} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow p} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$$

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ , надо доказать, что у точки  $p$  имеется окрестность  $U$ , такая, что  $\forall x \in X \cap U |f(x) - y| \leq \varepsilon$ .

$$|f(x) - y| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - y_n + y_n - y| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y_n| + |y_n - y|$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности:

1:

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

3:

$$\exists n_1 \mid \forall n \geq n_1 \quad |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Пусть  $n_2 = \max n_0, n_1$ . Тогда  $\forall n \geq n_2$  выполнено и 1, и 3.

2:

$$f_{n_2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} y_{n_2} \implies \exists U - \text{окрестность точки } p, \text{ такая, что } \forall x \in U \cap X |f_{n_2}(x) - y_{n_2}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Для таких  $x$  из  $U \cap X$  выполнено:

$$|f(x) - y| \leq |f(x) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - y_{n_2}| + |y_{n_2} - y| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

**Теорема** (Следствие): Если все  $f_n$  непрерывны в  $p \in X$  и  $f_n \rightrightarrows f$  на  $X$ , то  $f$  тоже непрерывна в точке  $p$ .

Нет, тот контрпример показывал, что просто непрерывности  $f_n$  недостаточно, а следствие утверждает, что непрерывности + равномерной сходимости уже достаточно.

*Доказательство.* Надо показать, что  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p)$ . Заметим, что  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  в силу обычной поточечной сходимости. Теперь по теореме:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \implies \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) \stackrel{\text{по теореме}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow p} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p)$$

□

**Теорема** (Еще одно следствие): Если все  $f_n$  непрерывны на  $X$  и  $f_n \rightrightarrows$ , то  $f$  тоже непрерывна на  $X$ .

*Доказательство.* Нечего тут доказывать: определение непрерывности в точке расширяем до определения непрерывности на множестве. □

**Теорема** (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций): Пусть  $X$  - множество,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\exists \text{функция } f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ такая, что } f_n \rightrightarrows f \text{ на } X \implies \forall \varepsilon \exists n_0 \mid \forall x \in X \quad \forall k, l \geq n_0 \quad |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$$

*Доказательство.* " $\Leftarrow$ ":

Пусть  $x \in X$ . Тогда для числовой последовательности  $f_n(x)$  выполнен обычный критерий Коши сходимости последовательности, поэтому  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$  (обозначим  $f(x)$  равной этому пределу).

Осталось показать, что  $f_n$  сходится к  $f$  равномерно. Пусть  $\varepsilon > 0$ . По условию Коши выполнено:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \mid |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$$

С помощью поточечной сходимости  $f_l$  к  $f_x$  можем перейти к пределу по  $l \rightarrow \infty$ :

$$\forall x \in X \mid \forall k \geq n_0 \mid |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

" $\Leftarrow$ " доказано.

" $\Rightarrow$ ":

Пусть  $\varepsilon > 0$ . По условию

$$\exists k \geq n_0 \mid \forall x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Имеем: если  $k, l \geq n_0$ , то  $\forall x$  выполнено:

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

**Утв.** (Следствие) Пространство непрерывных функций на множестве  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  полно в sup-норме.  $C(x)$  - множество непрерывных функций на  $x = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\|f\|_c = \sup_{x \in X} |f(x)|$

*Доказательство.* Полнота: если последовательность функций удовлетворяет критерию Коши, то есть предел  $f_n \rightarrow f$  в sup-норме  $\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Условие Коши для последовательностей  $f_n \in C[a, b]$  как раз и означает, что  $f_n \rightrightarrows f$  - какой-то функции. Функции  $f_n$  непрерывны и  $\rightrightarrows f \Rightarrow f \in C[a, b]$

□

**Теорема (Дини):** Пусть  $X$  - компакт,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, f : X \rightarrow \mathbb{R}, f_n, f \in C(X)$ .

Если  $f_n$  сходится к  $f$  на  $X$  поточечно, то сходимость равномерна.

*Доказательство.* Ключ к доказательству:  $\forall x$  последовательность  $|f_n(x) - f(x)|$  монотонно убывает к 0.

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Надо понять, что:

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \mid \forall x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Положим  $U_n \subset X, U_n = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ .

1.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$ . В самом деле,  $\forall x \forall n$  начиная с какого-то  $n_0$  выполнено  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  (поточечная сходимость из условия) и  $x \in U_n \forall n \geq n_0$ .
2. Все  $U_n$  открыты в  $X$  (по функциональному признаку -  $|f_n(x) - f(x)|$  непрерывна и у нас есть неравенство).
3.  $X$  компактно  $\Rightarrow$  существует конечное подпокрытие  $U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} = X$ .

Заметим,  $U_n \subset U_{n+1}$ , так как  $|f_{n+1} - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$  в силу ключа.

$$x \in U_n \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Так как

$$|f_n(x) - f(x)| \geq |f_{n+1}(x) - f(x)| \Rightarrow \text{тоже } < \varepsilon \Rightarrow x \in U_{n+1}, U_{n+1} \supset U_n$$

Значит,  $\exists$  какое-то  $n_0 \mid U_{n_0} = X$ . Итак,  $\forall x |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$  и для всех  $n \geq n_0$  тоже. □

## 4.1 Функциональные ряды

**Опр. 25.** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится поточечно, если последовательность функций  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  сходится поточечно (т.е. сходится при  $\forall x$ ).

Ряд функций сходится на множестве  $X$  равномерно к функции  $f$ , если  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  на множестве  $X$ .

**Теорема** (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда): Ряд (??) сходится равномерно тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \mid \forall k, l : l > k \geq n_0 \forall x \in X \left| \sum_{i=k}^l f_i(x) \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Сумма  $\sum_k^l f_k(x) = S_l(x) - S_{k-1}(x)$  - задача сведена к критерию Коши для последовательности функций частичных сумм (числовой последовательности).  $\square$

**Теорема** (Признак сравнения): Пусть числовой ряд  $\sum a_n$ , где  $a_n \geq 0$  сходится, если функции  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  таковы, что  $\sup_{x \in X} f_n(x) \leq a_n$  (эквивалентно  $\forall x \in X \mid f_n(x) \leq a_n$ ). Тогда функциональный ряд  $\sum f_n$  сходится на  $X$  равномерно.

*Доказательство.* Покажем, что для ряда  $\sum f_n$  выполнено условие Коши:

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Ряд  $\sum a_n$  сходится  $\implies$  для этого числового ряда выполнено условие Коши числовых рядов:

$$\exists n_0 \forall k > l \geq n_0 \left| \sum_{m=k}^l a_m \right| \leq \varepsilon$$

Тогда  $\forall x \in X$  имеем:

$$\left| \sum_{m=k}^l f_m(x) \right| \leq \sum_{m=k}^l |f_m(x)| \leq \sum_{m=k}^l a_m \leq \varepsilon$$

Значит условие Коши выполнено для функционального ряда  $\implies$  он сходится равномерно.  $\square$

**Теорема** (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда): Ряд  $\sum f_n$  сходится на множестве  $X$  равномерно  $\implies \sup_{x \in X} |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Доказательство.*

$$\sup_{x \in X} |f_n(x)| = \sup_{x \in X} \left| \sum_{m=n}^n f_m(x) \right|$$

По условию Коши это стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Утв.** Пусть ряд  $S(x) = \sum f_n(x)$  равномерно сходится на  $X$ . Если все  $f_n$  непрерывны, то  $f$  - непрерывна.

*Доказательство.* Все  $S_n(x) = (f_1(x) + \dots + f_n(x))$  - непрерывные функции.  $S_n \rightrightarrows f$  и применяем теорему о непрерывности предельной функции для последовательности (теорема о пределе пределов).  $\square$

**Теорема** (об интеграле): Пусть  $(a, b)$  - ограниченный промежуток,  $f_n$  - интегрируемые на  $(a, b)$  функции.

Если последовательность  $f_n$  равномерно сходится на  $(a, b)$ , то последовательность  $\int_a^b f_n$  сходится. Если при этом предельная функция  $f$  ( $f_n \rightrightarrows f$ ) интегрируема, то  $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$ .

*Доказательство.* Используем критерий Коши:

Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда  $\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0$  выполнено:

$$\sup_{x \in (a,b)} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|a-b|}$$

Для таких  $k$  и  $l$  выполнено:

$$\left| \int_a^b f_k(x) - \int_a^b f_l(x) \right| = \left| \int_a^b f_k(x) - f_l(x) \right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f_l(x)| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

То есть для числовой последовательности  $\int_a^b f_n(x)$  выполнено условие Коши и она имеет предел.

Если  $f_n \rightrightarrows f$  интегрируема, то ясно, что  $\int_a^b f_n - \int_a^b f \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ . Важно, что  $(a, b)$  ограничен.  $\square$

## 4.2 Дифференцирование

**Теорема 18:** Пусть ограниченный отрезок  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  и  $f_n$  дифференцируемы на  $(a, b)$  и таковы, что

1.  $f'_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} h$  на  $(a, b)$ .
2.  $\exists p \in (a, b)$  такая, что последовательность  $f_n(p)$  сходится.

Тогда  $\exists$  функция  $f$  (дифференцируема на  $(a, b)$ ) и такая, что  $f_n \rightrightarrows f$  и  $f' = h$ .

Теорема утверждает, что предел производных последовательности функций равен производной предела.

*Доказательство.* Положим  $g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(p)}{x - p}$ , область определения  $g_n$  это промежуток  $(a, b) \setminus \{p\}$ . Покажем, что последовательность  $g_n$  равномерно сходится на своей области определения:

Применим критерий Коши:

$$g_k(x) - g_l(x) = \frac{(f_k(x) - f_l(x)) - (f_k(p) - f_l(p))}{x - p}, \text{ обозначим } f_{kl}(x) = f_k(x) - f_l(x), f_{kl}(p) = f_k(p) - f_l(p)$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , имеем:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \sup_{x \in (a,b)} |f'_k(x) - f'_l(x)| \leq \varepsilon, \text{ то есть, } |f'_{kl}(x)| \leq \varepsilon$$

Тогда по теореме о среднем (теорема о приращениях):

$$\forall x |f_{kl}(x) - f_{kl}(p)| \leq \varepsilon \cdot |x - p|$$

Значит

$$g_k(x) - g_l(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{p\} \quad \forall k, l \geq n_0$$

Согласно критерию Коши последовательность функций  $g_n$  сходится равномерно к  $g$ . Покажем, что  $f_n(x)$  равномерно сходится.

$$f_n(x) = g_n(x)(x - p) + f_n(p) \quad \forall x \neq p$$

Так как  $g_n \rightrightarrows g$  и  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ , то можем определить  $f(x) := g(x)(x - p) + f_n(p)$ .

$$f_n(x) - f(x) = [g_n(x) - g(x)](x - p) + f_n(p) - f(x)$$

Применим условие Коши к обоим слагаемым: пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 |g_k(x) - g_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(a-b)}$$

и

$$(f_l(x) - f_l(p)) - (f_k(x) - f_k(p)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда

$$|f_l(x) - f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon(x-p)}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Итак,  $f_n \Rightarrow f$  на области определения.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \text{ по теореме о пределе пределов}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{f_n(x) - f_n(p)}{x - p} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(p) \\ \lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p) \end{aligned}$$

Эти пределы равны по теореме о пределе пределов, значит  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(p) = f'(p)$ .  $\square$

**Утв.** (Следствие 1) Пусть ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно на ограниченном промежутке  $(a, b)$ . Если  $f_n$  интегрируема и  $f$  ( $f = \sum f_n$ ) интегрируема, то

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$$

*Доказательство.* Сумма  $\sum f_n$  - это предел частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ ,  $S_n(x) \Rightarrow f$  и применяем теорему об интеграле.  $\square$

**Утв.** (Следствие 2) Пусть ряд  $\sum f_n(x)$  сходится хотя бы в одной точке  $p \in (a, b)$  и ряд производных  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  сходится равномерно на  $(a, b)$ .

Тогда исходный ряд сходится равномерно на всем  $(a, b)$ , а его сумма дифференцируема на  $(a, b)$ , и  $(\sum f_n)' = \sum (f'_n)$ .

*Доказательство.* Теорема о дифференцируемости, примененная к частичным суммам.  $\square$

Далее будем рассматривать степенной ряд  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ .

**Теорема 19** (Формула Коши-Адамара): Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$$

- При  $|x| < R$  - сходится.
- При  $|x| > R$  - расходится.
- При  $|x| = R$  - нужно более тонкое исследование.

*Доказательство.* Доказывается признаком Коши (в лекциях по ТФКП должно быть).  $\square$

**Теорема:** Пусть радиус сходимости степенного ряда  $\sum C_n z^n$  равен  $r$ . Тогда  $\forall r_0 < r$  ряд сходится равномерно на множестве  $|z| \leq r_0$ .

*Доказательство.* Выберем  $r_1$  так, что  $r_0 < r_1 < r$ . По условию  $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$ . Поскольку  $r_1 < r$ , при больших  $n$  выполнено  $\sqrt[n]{|C_n|} < \frac{1}{r_1}$ , то есть  $|C_n| < \frac{1}{r_1^n}$ .

Если  $|z| \leq r_0$ , то  $|C_n z^n| < |C_n r_0^n| < \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$  - геометрическая прогрессия, причем  $\frac{r_0}{r_1} < 1$ . Числовой ряд  $\sum \frac{r_0}{r_1}$  сходится, значит по признаку сравнения для равномерной сходимости степенной ряд сходится равномерно на  $|z| \leq r_0$ .  $\square$

**Следствие:** Внутри (на Int) круга сходимости степенной ряд задает  $\infty$ -дифференцируемую функцию, при этом  $(\sum C_n z^n)' = \sum nC_n z^{n-1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $|z| < r$ . Выберем  $r_0 > z$ , но  $r_0 < r$ . В круге радиуса  $r_1$  сходимость ряда  $\sum C_n z^n$  равномерна, более того (именно это нам и надо):

ряд  $\sum nC_n z^{n-1}$ , полученный дифференцированием, тоже сходится равномерно (для доказательства этой фразы надо посчитать радиус сходимости нового ряда, он будет такой же, как у исходного). По теореме о дифференции функционального ряда выполнено  $(\sum C_n x^n)' = \sum (nC_n x^{n-1})$  в точке  $X$ .  $\square$

**Теорема** (Признак Дирихле равномерной сходимости ряда функций): Пусть ряд  $\sum u_n(x)v_n(x)$  таков, что

1.  $\forall x \in X$  последовательность  $u_n(x)$  монотонна по  $n$  и  $u_n \rightharpoonup 0$  на  $X$ .
2. Частичные суммы ряда  $\sum v_n(x)$  равномерно ограничены (единая константа для всех частичных сумм):

$$\exists C < \infty \mid \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \left| \sum_{n=1}^k v_n(x) \right| \leq C$$

Тогда  $\sum u_n(x)v_n(x)$  сходится равномерно на  $X$ .

Справка (большая):

В курсе матанализа был признак Абеля-Дирихле (А-Д) для числового ряда  $\sum u_n v_n$  сходится, если

1. Частичные суммы ряда  $\sum v_n$  ограничены
2.  $u_n \rightarrow 0$  монотонно

В основе доказательства признака Абеля-Дирихле для числовых рядов - неравенство Абеля:

Пусть  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_m \geq 0$  и числа  $a_1, \dots, a_m$  - какие-то. Тогда:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m| \leq b_1 \cdot \left( \max_{k=1}^m |S_k| \right), \text{ где } S_k = a_1 + \dots + a_k$$

*Доказательство.* Докажем неравенство Абеля (для прикола):

$$a_1 = S_1, \quad a_2 = S_2 - S_1, \quad a_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\begin{aligned} |a_1 b_1 + \dots + a_m b_m| &= \\ &= |S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \dots + (S_m - S_{m-1}) b_m| = \\ &= |S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \dots + S_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + S_m b_m| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} |S_k| (b_k - b_{k+1}) + |S_m| b_m \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq m} |S_k| \left( (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{m-1} - b_m) + b_m \right) = \\ &= \max_{1 \leq k \leq m} |S_k| \cdot b_1 \end{aligned}$$

$\square$

*Доказательство.* Докажем признак Дирихле для рядов функций:

Воспользуемся критерием Коши:

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $u_n$  сходится равномерно к 0 на  $X$ , значит  $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \forall x \in X |u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$  ( $C$  - ограничивающая константа для  $v_n$ ). Пусть  $X_- = \{x \mid u_n \searrow\}, X_+ = \{x \mid u_n \nearrow\}$ .

По неравенству Абеля:

$\forall x \in X_- \ \forall l \geq k > n_0$  выполнено

$$\left| \sum_k^l u_n(x)v_n(x) \right| \leq u_k \cdot S, \text{ где } S = \max_{n=k}^{\tilde{l}} v_n(x), \tilde{l} \leq l$$

$$\left| \sum_k^{\tilde{l}} \right| = \left| \sum_1^{\tilde{l}} - \sum_1^{\tilde{l}-1} \right| \leq \left| \sum_1^{\tilde{l}} \right| + \left| \sum_1^k \right| \leq C + C \text{ (по второму условию из признака)}$$

Итак,  $\sum_k^l u_n(x)v_n(x) \leq u_k \cdot 2C \leq \frac{\varepsilon}{2C} \cdot 2C = \varepsilon$ . Условие Коши выполнено и ряд сходится равномерно на  $X_-$ . Для  $X_+$  аналогично, значит на  $X$  тоже равномерно.  $\square$

**Утв.** Ряд  $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$  сходится равномерно на  $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ,  $\delta > 0$ .

*Доказательство.* Для таких  $X$  выполнено  $\left| \sum_{n=0}^k \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\delta}|}$ , то есть для ряда  $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$  выполнено условие (2) из признака А-Д. Поскольку  $u_n(x) \rightarrow 0$  и монотонна по  $n$ , значит условие (1) тоже выполнено. Тогда по признаку А-Д ряд  $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$  сходится равномерно.  $\square$

**Теорема (Признак Абеля):** Пусть ряд  $\sum u_n(x)v_n(x)$  таков, что

1. Любая последовательность  $u_n(x)$  для каждого  $x$  монотонна и все  $u_n(x)$  равномерно ограничены:

$$\exists M < \infty \mid \forall n \ \forall x \in X \ |u_n(x)| \leq M$$

2. Ряд  $\sum v_n(x)$  **равномерно** сходится

Тогда  $\sum u_n(x)v_n(x)$  сходится равномерно.

*Доказательство.* Этот признак не следует напрямую из признака Дирихле. Воспользуемся тем же Критерием Коши:

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $X_-, X_+$  такие же, как раньше. Применим К.К. к ряду  $\sum v_n(x)$  и получим:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \ \forall x \in X \ \left| \sum_{n=k}^l v_n(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

Константа  $C$  такая, что ограничивает все  $u_n(x) \ \forall n \forall x$ .

$$\begin{aligned} \forall k, l \geq n_0 \ \forall x \in X_- \quad & \left| \sum_k^l u_n(x)v_n(x) \right| \underset{\text{нер-во Абеля}}{\leq} \\ & \leq u_k \cdot |\text{самое большое из чисел } v_k(x), (v_k(x) + v_{k+1}), \dots, (v_k(x) + \dots + v_l(x))| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Выполнено условие Коши, значит ряд  $\sum u_n v_n$  сходится равномерно на  $X_-$ . Для  $X_+$  аналогично.

В рассуждении использовалось то, чего не было в условии: мы предполагали (применяя неравенство Абеля), что  $u_n \geq 0$ . Этого может не быть, как спасти ситуацию?

Пусть  $\tilde{u}_n(x) = u_n(x) + C \in [0, 2C] \ \forall n \forall x \in X$

$$\sum u_n(x)v_n(x) = \sum (\tilde{u}_n(x) - C)v_n(x) \leq \sum \tilde{u}_n(x)v_n(x) - C \cdot \sum v_n(x)$$

Для первого слагаемого доказательство, приведенное выше работает, а второе ряд сходится равномерно. Осталось показать, что  $\sum \lambda a_n(x) + \gamma b_n(x)$  равномерно сходится (упражнение, но кажется достаточно расписать через определение).

$\square$

**Теорема** (Теорема Абеля о степенных рядах): Пусть числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится,  $a_n \in \mathbb{C}$ . Тогда на  $[0, 1]$  степенной ряд  $f(t) = \sum a_n t^n$  сходится равномерно и, значит,  $f(t)$  непрерывна как функция от  $t$  на отрезке  $[0, 1]$ .

*Доказательство.* Согласно признаку Абеля  $\sum u_n(t)v_n(t)$  сходится равномерно, если ряд  $\sum v_n(t)$  сходится равномерно, последовательность функций  $u_n(t)$  равномерно ограничена константой  $C$  и для любого  $t$  последовательность  $u_n(t)$  монотонна по  $n$ .

Положим  $v_n(t) = a_n$ ;  $u_n(t) = t^n$ . Тогда у нас выполнено условие признака Абеля:

- $|u_n(t)| \leq 1 \forall n \forall t \in [0, 1]$
- если  $t \in [0, 1)$ , то  $t^n \xrightarrow{\text{МОНОТОННО}} 0$
- если  $t = 1$ , то  $t^n \equiv 1$  тоже монотонна!

Значит  $f(t)$  сходится на  $t \in [0, 1]$  равномерно, а сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций тоже непрерывна.  $\square$

**Опр. 26 (Метод суммирования Абеля).** Пусть есть ряд  $\sum a_n$  (неважно, сходящийся или нет). Он сходится методом суммирования Абеля, если

$$\exists \lim_{t \rightarrow 1|_{[0,1]}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \right) \text{ (конечный)}$$

**Теорема:** Пусть ряды  $\sum a_n, \sum b_n$  сходятся и ряд  $\sum c_n$  получен из них произведением Коши:

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j; \quad c_0 = a_0 b_0; \quad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1; \quad c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

Если ряд  $\sum c_n$  сходится, то его сумма равна  $(\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$ .

*Доказательство.* Пусть  $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ,  $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ . Перемножим эти ряды по Коши:

$$c_n(t) = \sum_{i+j=n} a_i t^i \cdot b_j t^j = \sum_{i+j=n} a_i b_j t^{i+j=n} = c_n t^n$$

По условию все три ряда сходятся:  $\sum a_n = A$ ,  $\sum b_n = B$ ,  $\sum c_n = C$ . Значит при  $|t| < 1$  ряды  $\sum a_n t^n$ ,  $\sum b_n t^n$ ,  $\sum c_n t^n$  сходятся абсолютно (потому что мажорируются убывающей геометрической прогрессией). По теореме из прошлого, произведение  $A(t) \cdot B(t) = C(t)$ .

При  $t \nearrow 1$  по теореме Абеля:

- $A(t) \rightarrow A(1) = A$
- $B(t) \rightarrow B(1) = B$
- $C(t) \rightarrow C(1) = C$

Значит, при переходе к пределу  $A \cdot B = C$ .

$\square$

Долг из прошлого:

**Теорема** (Теорема Мертенса (упрощенная, но достаточная для нас)):

Пусть ряд  $A = \sum a_i$ ,  $B = \sum b_i$  сходятся абсолютно, тогда ряд  $\sum c_n$  сходится ( $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ ) и его сумма равна  $A \cdot B$ .

*Доказательство.* Применим критерий Коши к ряду  $\sum c_n$  и покажем, что  $\sum_{n=k}^l |c_n| \xrightarrow[k,l \rightarrow 0]{} 0$ .

$$\sum_k^l |c_n| = \left| \sum a_i b_j \right|, \quad i + j \in [k, l]$$

$$\left| \sum_{n=k}^l c_n \right| = \left| \sum_{n=k}^l \sum_{i+j=n} a_i b_j \right| \leq \sum_{n=k}^l \sum_{i+j=n} |a_i| \cdot |b_j| \leq \sum_{i,j=0}^l - \sum_{i,j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\sum_{i,j=0}^l |a_i| \cdot |b_j| = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l |a_i| \cdot |b_j| = S_1(l) \cdot S_2(l)$$

В этой записи  $S_1(l)$  - частичная сумма ряда  $\sum |a_i|$ ,  $S_2(l)$  - частичная сумма ряда  $\sum |b_i|$ ,  $S_1(l) \rightarrow \sum |a_n|$ ,  $S_2(l) \rightarrow \sum |b_n|$ . В квадрате на рисунке, который я не могу сюда приложить, но его можно посмотреть в ваших лекциях, площадь квадрата с квадратным вырезом в левом верхнем углу равна

$$= S_1(l) \cdot S_2(l) - S_1\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) \cdot S_2\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) \xrightarrow[k,l \rightarrow \infty]{} 0$$

□

## 5 Ряды Фурье

Пусть  $E$  - евклидово пространство (векторное пространство со скалярным произведением). Скалярное произведение  $\langle a, b \rangle$  - бинарная операция, удовлетворяющая аксиомам:

1.  $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \iff a, b \in \mathbb{R}; \langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle} \iff a, b \in \mathbb{C}$
2.  $\langle a, a \rangle \geq 0, \langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0$
3.  $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$

Модуль вектора вычисляется с помощью  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

**Утв.** Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  - попарно ортогональные векторы ( $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ ). Пусть  $\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ , тогда

$$x_i = \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

*Доказательство.*

$$k \neq i \implies \langle e_k, e_i \rangle = 0 \implies \langle v, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, e_i \rangle = x_i \langle e_i, e_i \rangle$$

□

Если  $\{\vec{e}_i\}$  - попарно ортогональные ненулевые вектора, то они образуют линейно независимый набор.

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum x_i e_i, \sum x_j e_j \right\rangle = \sum x_i x_j \langle e_j, e_i \rangle = \sum x_i^2 |e_i|^2$$

В частности, если все длины векторов  $\vec{e}_i$  равны 1, то  $|v|^2 = \sum x_i^2$ .

Пусть  $f, g$  - хорошие функции на отрезке  $[0, 2\pi]$ , то их скалярное произведение определено следующим образом:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

**Утв.** Функции  $\sin(nx)$  и  $\cos(mx)$  ортогональны при  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ . А также:

- $\sin(nx) \perp \sin(mx) \quad \forall n \neq m \geq 0$
- $\cos(nx) \perp \cos(mx) \quad \forall n \neq m \geq 0$
- $\|\sin(nx)\| = \pi \quad n > 0$
- $\|\cos(nx)\| = \pi \quad n > 0$

*Доказательство.*

$$\cos(mx) = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}; \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{imx} dx, \quad n, m \in \mathbb{N} = \int_0^{2\pi} e^{i(n+m)x} dx = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi \quad n + m = 0 \\ \left. \frac{e^{i(n+m)x}}{i(n+m)} \right|_0^{2\pi} = 0 \quad n + m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+m)x} - e^{i(n-m)x} + e^{i(m-n)x} - e^{-i(n+m)x}}{2 \cdot 2i} dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Аналогично остальные

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2inx} - e^{-2inx} - 2}{-4} dx = \int_0^{2\pi} \frac{-2}{-4} dx = \pi$$

□

**Утв.** (Следствие) Пусть  $f(t)$  - линейная комбинация вида

$$f(t) = \lambda + b_1 \sin(t) + \dots + b_n \sin(nt) + a_1 \cos(t) + \dots + a_n \cos(nt)$$

Тогда

$$b_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt}{\pi}, \quad a_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt}{\pi}, \quad \lambda = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \cdot 1 dt}{2\pi}$$

**Опр. 27.** Ряд Фурье функции  $f(t)$  (разложение обозначается знаком  $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} f(t) &\Leftarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)] \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Введем контекст:

Пусть  $f$  - функция, интегрируемая на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Разложим ее в ряд Фурье в соответствии с определением:

$$\begin{aligned} f(x) &\Leftarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

**Теорема** (Лемма об интеграле периодичной функции): Пусть  $f$  -  $T$ -периодична, если  $f$  интегрируема на  $[0, T]$ , то  $f$  интегрируема на любом отрезке  $[a, b]$ , причем

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{T+a} f(x) dx$$

*Доказательство.* Функция  $f$  интегрируема на любом отрезке  $[T, (n+1)T]$ , отсюда следует интегрируемость на любом  $[a, b]$ . Пусть  $a \in [0, T]$ , тогда

$$\int_0^{T+a} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{T+a} f(x) dx$$

Разложим интеграл от 0 до  $T+a$  двумя способами, в силу периодичности  $\int_T^{T+a} = \int_0^a$ , значит другие два интеграла тоже равны. В общем случае  $a > T$ , тогда  $\exists n \mid a \in [nT, (n+1)T]$  и  $\int_0^T = \int_{nT}^{(n+1)T} = \int_a^{a+T}$ .  $\square$

**Следствие:**

Если  $f$  -  $2\pi$ -периодична, то пределы интегрирования для коэффициентов  $a_n, b_n$  будем брать  $[-\pi, \pi]$ .

## 5.1 Комплексная форма ряда Фурье

$$f(x) \Leftarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Такая форма получается из  $2\pi$ -периодичной функции  $f$ , при  $k \geq 0$ , тогда

$$a_k + i b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(kt) + i \sin(kt)) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = 2c_k$$

**Теорема Пифагора:**

Пусть  $f = \sum x_n e_n$ .  $e_n \perp e_k (n \neq k)$ ,  $f$  - хорошая, тогда  $\langle f, f \rangle = \sum |x|^2 \langle e_n, e_n \rangle$ . При этом  $\langle e_n, e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi$ .

$$\langle e_0, e_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$$

Если  $f$  - хорошая и  $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ , то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Это равенство называется равенством Парсеваля.

**Опр. 28.** Формула Дирихле.

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + 2(\cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(nt)) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

**Опр. 29.** Если функция  $f$   $2\pi$ -периодична, кусочно дифференцируемая и ее первая производная ограничена, то  $f$  - функция класса Фурье.

**Утв.** Функция класса Фурье может иметь разрывы только 1-го рода, то есть существует конечные пределы:

$$\forall x \exists f(x+0) := \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h), \exists f(x-0) := \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h)$$

*Доказательство.* Пусть  $x_0$  - точка разрыва функции  $f$ . Выберем  $a < x_0$  так, что на  $[a, x_0)$   $f$  - дифференцируема. Тогда  $\forall x \in [a, x_0)$ :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Этот интеграл сходится, значит утверждение доказано.  $\square$

**Утв.** Обозначим разложение функции  $f$  в ряд Фурье через  $S_n f$ . Тогда

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

Функция Дирихле четна,  $2\pi$ -периодична.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(-t) dt \quad (\text{т.к. } D_n(t) = D_n(-t)) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} dt = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{k=-n}^n \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau) e^{-ik(\tau-x)} d\tau \quad (\tau = x+t) \\ &= \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} e^{ikx} d\tau \quad (\text{периодичность}) \\ &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \cdot 2\pi c_k. \end{aligned}$$

$\square$

**Следствие:**

Если функция класса Фурье, то

$$\begin{aligned} 2\pi \left( S_n f(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right) &= \\ &= \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x-0)D_n(t)) dt + \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+0)D_n(t)) dt \end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 2\pi \left[ S_n f(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right] &= \\ &= \int_{-\pi}^\pi f(x+t)D_n(t) dt - \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \cdot D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^\pi \left[ f(x+t) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right] D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^0 [f(x+t) - f(x-0)] D_n(t) dt + \int_0^\pi [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \end{aligned}$$

□

**Теорема** (Теорема Фурье): Пусть  $f$  - функция класса Фурье. Тогда

1.  $\forall x \ S_n f(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{f(x-0) - f(x+0)}{2}$ .
2. Если  $a_0, \dots, a_n$  - точки разрыва из отрезка  $[-\pi, \pi]$ , то для любого отрезка  $I$ , не содержащего ни одной точки разрыва  $a_i$ , сходимость на  $I$  будет равномерной.

*Доказательство.* Надо доказать, что

$$\int_0^\pi [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ , выберем такое  $h$ , что  $\int_0^h < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$|(f(x+t) - f(x+0))D_n(t)| = \left| (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin(t(n + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{t}{2})} \right|$$

Поскольку при  $t \in [0, \pi]$   $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ , то

$$\left| (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin(t(n + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{t}{2})} \right| \leq \underbrace{\frac{|f(x+t) - f(x+0)| \cdot |\sin(t(n + \frac{1}{2}))|}{|\frac{t}{\pi}|}}_{*} \leq \frac{\pi |f(x+t) - f(x+0)|}{t}$$

Если выбрать  $h$  такое, чтобы на  $(x, x+h)$  у функции  $f(x)$  не было разрывов, то  $\forall t \in (x, x+h)$  выполнена оценка

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x+0)| &\leq t \cdot \underbrace{\sup(|f'(x)|)}_{\leq C \text{ по условию}} \end{aligned}$$

Продолжая цепочку неравенств  $*$  получим  $\leq \pi \cdot \frac{C}{t} = \pi C$ . Итак, если  $h$  такое, что на  $(x, x+h)$  нет точек разрыва, то

$$\begin{aligned} \left| \int_0^h [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \right| &\leq \int_0^h |[f(x+t) - f(x+0)] D_n(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^h \pi \cdot C dt = \pi \cdot Ch \end{aligned}$$

А если взять  $h < \frac{\varepsilon}{2\pi c}$ , то  $\left| \int_0^h \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

**Утв.** (Лемма) Пусть  $h \in (0, \pi)$ . Тогда  $\exists K < \infty$  такая, что

$$\left| \int_h^\pi [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \right| \leq \frac{K}{h}$$

Доказательство леммы.

$$[f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) = \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x+0)}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \sin(t(n + \frac{1}{2}))}_{g(t)}$$

Пусть  $(a, b)$  - один из промежутков в  $(h, \pi)$ , на котором  $f$  дифференцируема. Пусть всего таких промежутков  $m$  штук.

$$|g'(t)| = \left| \frac{f'(x+t) \cdot \sin(\frac{t}{2}) - [f(x+t) - f(x+0)] \cdot \frac{1}{2} \cos(t)}{\sin^2(\frac{t}{2})} \right| \quad (8)$$

Заметим, что  $\sin^2(\frac{t}{2}) \geq (\frac{t}{\pi})^2 \geq (\frac{h}{\pi})^2$ . Тогда продолжим (??):

$$(??) \leq \frac{|\text{числитель}| \pi^2}{h^2} \leq \frac{C + M}{h^2} =: \xi$$

где  $M = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} (|f(x)|)$ ,  $C = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} (|f'(x)|)$ .

$$\begin{aligned} I := \left| \int_a^b [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \right| &= \left| \int_a^b g(t) \sin(t(n + \frac{1}{2})) dt \right| \stackrel{\Phi\text{ИЧ}}{=} \underbrace{\left| g(t) \cdot \frac{\cos(t(n + \frac{1}{2}))}{n + \frac{1}{2}} \right|_a^b}_{I_1} - \\ &- \underbrace{\int_a^b g'(t) \frac{\cos(t(n + \frac{1}{2}))}{n + \frac{1}{2}} t dt}_{I_2} \leq \frac{2 \max(g(t))}{n + \frac{1}{2}} + \underbrace{|b-a| \cdot \xi \cdot 1}_{\leq \pi} \cdot \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} [K], \\ K &= 2 \max(g(t)) + \pi \cdot \xi \end{aligned}$$

Итого  $|g(t)| \leq M_1$ ,  $|g'(t)| \leq M_2$ . Тогда

$$|I_1| \leq \frac{2M_1}{n + \frac{1}{2}}, \quad |I_2| \leq \frac{|b-a| M_2}{n + \frac{1}{2}} \leq \frac{\pi \cdot M_2}{n + \frac{1}{2}}$$

$$|I| = |I_1 - I_2| \leq |I_1| + |I_2| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cdot \text{const}, \quad \text{const} := 2M_1 + \pi M_2 \cdot [\text{кол-во промежутков (a,b)}]$$

□

Продолжаем доказывать теорему Фурье:

Получили, что  $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \left| \int_h^\pi \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Таким образом:

1. Выбрали  $h \in [0, \pi]$  такое, что у функции  $f(x+t) - f(x+0)$  нет разрывов на  $t \in (0, h)$  (то есть у  $f$  нет разрывов на  $(x, x+h)$ ) и при этом  $h$  такое хитрое, что  $\left| \int_0^h \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Это мы уже сделали.
2. Вторая часть доказательства:

Пусть теперь на  $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$  нет точек разрыва функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Покажем, что  $S_n(f) \rightrightarrows f$  на этом  $(a, b)$ .

$\exists h_0 > 0$  такое, что на  $[a - h_0, b + h_0]$  функция  $f$  непрерывна. Тогда в части 1 доказательства того, что уже было, можно выбрать  $h = h(\varepsilon)$ , а не  $h = h(x, \varepsilon)$  (выбрать  $h$  независимо от  $x$ ). Таким образом выбор  $h_0$  можно сделать независимым от выбора  $x_0$ .

□

**Утв.** (Равенство Парсеваля) Пусть  $f, g$  - непрерывные функции класса Фурье,  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(f)\overline{C_k(g)}$$

где

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx$$

Сумма от минус бесконечности до бесконечности подразумевается в следующем смысле:

$$f(x) \doteq \sum_{-\infty}^{\infty} C_k(f)e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f), \quad S_n(f) = \sum_{k=-n}^n C_k(f)e^{ikx}$$

*Доказательство.*

- $S_n(f) \rightrightarrows f$  на  $[-\pi, \pi]$

- $S_n(g) \rightrightarrows g$  на  $[-\pi, \pi]$

$S_n(f) \cdot \overline{S_n(g)} \rightrightarrows f \cdot \bar{g}$ , так как  $f$  и  $g$  ограничены (было оставлено как упражнение).

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \bar{g} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f(x)) \cdot \overline{S_n(g(x))} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-n}^n C_k(f)e^{ikx} \right) \left( \sum_{m=-n}^n \overline{C_m(g)} e^{-imx} \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \sum_{m=-n}^n C_k(f) \overline{C_m(g)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n C_k(f) \overline{C_k(g)} \int_{-\pi}^{\pi} e^0 dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k(f) \overline{C_k(g)} \end{aligned}$$

□

Если  $f = g$ , то

$$\int f \cdot \bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \overline{C_k} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

**Утв.** Равенство Парсеваля верно для всех  $f, g \in L_2[-\pi, \pi]$ , где  $L_2[-\pi, \pi]$  - это множество всех функций, таких, что  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ .

**Теорема** (Лемма о натуральной параметризации): Пусть  $\Gamma$  - гладкая кривая в  $\mathbb{R}^n$  длины  $L$ . Тогда существует натуральная параметризация (т.е. модуль скорости) вида

$$\gamma(s) : [0, L] \rightarrow \Gamma \mid |\dot{\gamma}(s)| = 1$$

*Доказательство.* Возьмем какое-то отображение (пусть)  $f : [a, b] \rightarrow \Gamma$ ,  $f \in C^1$ ,  $f'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$ . Длина  $L$  будет выражаться как  $\int_a^b |f'(t)| dt$ . Пройденное расстояние  $S : [a, b] \rightarrow [0, L]$  представлено в виде  $S(t) = \int_a^t |\dot{f}(s)| ds$ .

$$\dot{S}(t) = \left( \int_a^t |\dot{f}(s)| ds \right)' = |\dot{f}(t)| > 0 \forall t$$

При этом  $S$  возрастает монотонно, а значит обратима, пусть  $t(S)$  - обратная функция.

$$t(S) : [0, L] \rightarrow [a, b], \quad t'(S) = \frac{1}{s'(t)}$$

Значит  $\gamma(s) := f(t(s))$  - искомая параметризация.

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{f}(t(s)) \cdot t'(s) = \dot{f}(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t)} = \frac{\dot{f}(t(s))}{|\dot{f}(t(s))|} \text{ и } |\dot{\gamma}(s)| = 1$$

□

**Теорема** (Площадь сектора кривой): Пусть кривая  $f(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ , а  $f$  и  $\dot{f}$  имеют ориентацию. Точка на кривой  $f = (x, y)$ , вектор скорости в точке  $\dot{f} = (\dot{x}, \dot{y})$ . Заметим, что

$$\forall t \quad \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} > 0$$

То есть, если эта матрица положительно определена, то вектора  $f$  и  $\dot{f}$  положительно определены и точка  $t_0$  всегда лежит справа от точки  $t_1$  ( $t_0$  и  $t_1$  - точки начала и конца сегмента кривой, ограничивающего наш сектор). Мы показали, что при движении по кривой мы перемещаемся против часовой стрелки).

Площадь сектора:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt$$

Пусть  $ds$  - площадь треугольника, заметаемого за время  $(t, t + dt)$ , из формулы площади параллелограмма через определитель:

$$ds = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} ds = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt$$

**Теорема** (Изопериметрическое неравенство): Пусть  $\Gamma$  - кусочно дважды гладкая замкнутая кривая длины  $2\pi$ . Тогда  $S \leq \pi$ , причем если  $S = \pi$ , то  $\Gamma$  - это окружность.

*Доказательство.* Пусть  $\gamma = (x(s), y(s))$  - натуральная параметризация кривой  $\Gamma$ ,  $s \in [0, 2\pi]$ .

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y) ds$$

$\begin{cases} x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$  - принадлежат классу Фурье и непрерывны.

$$\begin{aligned} x(s) &\doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ns) + b_n \sin(ns) \\ \dot{x}(s) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin(ns) + b_n \cos(ns)) \end{aligned}$$

$$y(s) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n \cos(ns) + \tilde{b}_n \sin(ns))$$

$$\dot{y}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-\tilde{a}_n \sin(ns) + \tilde{b}_n \cos(ns))$$

Вспомним равенство Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} fg = \pi \left( \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)] \right)$$

Тогда:

$$\int_0^{2\pi} x\dot{y} = \pi \cdot \sum_{n \geq 1} n [a_n \tilde{b}_n - \tilde{a}_n b_n]$$

Утверждение о том, что  $\int_0^{2\pi} x\dot{y} = \int_0^{2\pi} -\dot{x}y$  было упражнением (либо раньше, либо я это не вписал).

Итак:

$$S = \pi \sum_{n \geq 1} n \cdot [a_n \tilde{b}_n - \tilde{a}_n b_n] \leq \pi \sum_{n \geq 1} n [\lvert a_n \tilde{b}_n \rvert + \lvert \tilde{a}_n b_n \rvert]$$

Из  $(a \pm b)^2 \geq 0 \implies |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ . Значит:

$$S \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 1} n (a_n^2 \tilde{b}_n^2 + \tilde{a}_n^2 b_n^2)$$

Длина нашей кривой  $\Gamma$ :

$$L(\Gamma) = 2\pi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}}_{dt} dt = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt$$

По равенству Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 dt = \pi \left( \sum_{n \geq 1} n^2 (a_n^2 + b_n^2) + \sum_{n \geq 1} n^2 (\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) \right) \text{ по условию } 2\pi$$

Сократим на 2:

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 1} n (a_n^2 + b_n^2 + \tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) \underset{\text{тут}}{\leq} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) = \pi \implies S \leq \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

Итого  $S \leq \pi$ . Осталось доказать, что если  $S = \pi$ , то  $\Gamma$  - окружность. Если  $S = \pi$ , то  $\forall n$  в неравенстве "тут" в (??)  $= n^2(\dots) = n(\dots) \implies n = 1$ . Тогда  $\forall n \geq 2 a_n = 0, b_n = 0, \tilde{a}_n = 0, \tilde{b}_n = 0$ .

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(s) + b_1 \sin(s), \quad y(S) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \tilde{a}_1 \cos(s) + \tilde{b}_1 \sin(s)$$

$$\frac{\pi}{2} (a_1^2 \tilde{b}_1^2 - \tilde{a}_1 b_1^2 = \pi), \quad S = \pi (a_1^2 \tilde{b}_1^2 - \tilde{a}_1^2 b_1^2)$$

Из  $|ab| = \frac{a^2 + b^2}{2} \implies a_1 = \pm b_1$  и доказываем, что это окружность.  $\square$

**Теорема** (Теорема о тригонометрической аппроксимации): Пусть  $f$  - непрерывная функция на  $[0, 2\pi]$ ,  $f(0) = f(2\pi)$ . Тогда  $\forall \varepsilon \exists$  тригонометрический многочлен  $P(x)$ , такой, что  $\forall x \in [0, 2\pi] |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ .

*Доказательство.* 1. Заменим  $f$  кусочно гладкой линейной функцией  $\tilde{f}$ , так, что  $\forall x |\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

По теореме Кантора-Гейне (функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем) непрерывная функция  $\tilde{f}$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in [0, 2\pi] |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

Пользуясь этим разобьем  $[0, 2\pi]$  на конечное число кусочков  $[a_k, a_{k+1}]$ , настолько коротких, что  $\forall x_1, x_2 \in [a_k, a_{k+1}] |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ .

Пусть  $\tilde{f}(a_i) = f(a_i) \forall i$ . На промежутках  $[a_i, a_{i+1}]$   $\tilde{f}$  - прямая между точками  $(a_i, f(a_i))$  и  $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in [a_i, a_{i+1}] \\ |\tilde{f}(x) - f(x)| &= |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i) + \tilde{f}(a_i) - f(x)| \leq \\ &\leq |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i)| + |\tilde{f}(a_i) - f(x)| \end{aligned}$$

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i)| \leq |\tilde{f}(a_{i+1}) - f(a_i)| = |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|\tilde{f}(a_i) - f(x)| = |f(a_i) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

2. Функция  $\tilde{f}$  принадлежит классу Фурье,  $\tilde{f}(0) = f(2\pi)$ . По теореме Фурье  $S_n(\tilde{f}) \rightharpoonup \tilde{f}$  на  $[0, 2\pi]$ . Тогда  $\exists n_0 \sup_{x \in [0, 2\pi]} |S_{n_0}(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . А значит  $|S_{n_0}(\tilde{f}(x)) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$  (доказывается хитрым движением  $\pm \tilde{f}(x)$  под модуль).

□

**Теорема** (Теорема Стоуна-Вейерштрасса): Непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить многочленом:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \implies \forall \varepsilon \exists \text{многочлен } P(x) \forall x \in [a, b] |U(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

*Доказательство.* 1. Пусть  $\lambda(x) : [a, b] \xrightarrow{\text{линейное}} [0, 2\pi]$ .

$$g(t) = f(\lambda^{-1}(t)) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

Существует тригонометрический многочлен  $Q(t)$  (например, форма Фурье) такой, что  $\forall t \in [0, 2\pi] |Q(t) - g(t)| \leq \varepsilon$ . Теперь осталось приблизить  $Q(t)$  обычным многочленом.

$$Q(t) = q_0 + q_1 \cos(t) + \dots + q_N \cos(Nt) + q_1 \sin(t) + \dots + q_N \sin(Nt)$$

Для  $\forall k_0$  форма  $\cos(k_0 t)$  равномерно приближаемая на  $[0, 2\pi]$  частичными суммами своего ряда Тейлора.

$$\cos(k_0 t) = 1 - \frac{(k_0 t)^2}{2!} + \frac{(k_0 t)^4}{4!} + \dots$$

Радиус сходимости равен бесконечности, поэтому ряд сходится равномерно на любом отрезке конечной длины.

Пусть  $n_0$  настолько большое, что все частичные суммы для  $\cos(t), \dots, \cos(Nt), \sin(t), \dots, \sin(Nt)$  были  $\delta$ -близки к своим функциям. Т.е.

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{i=1}^k |q_i| + \sum_{i=1}^k |\tilde{q}_i|\right)}$$

Соответствующая сумма имеет вид

$$q_0 + \sum_{k=1}^{n_0} q_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n_0} \tilde{q}_k \sin(kt),$$

где первая сумма — это частичная сумма ряда Тейлора (до  $n_0$ ) для  $\cos(kt)$ , а вторая — для  $\sin(kt)$ . Поскольку каждая из функций  $\cos(kt), \sin(kt)$  аппроксимируется многочленом от  $t$ , вся сумма является многочленом; следовательно, можно взять  $P(t)$  в указанном виде.

□

## 6 Примитивный интеграл, интеграл Лебега

**Опр..** Отрезки вида  $I = a, (a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$  — примитивные сегменты в  $\mathbb{R}$ . Для них на прямой определена примитивная мера, как функция  $\mu_1(I) := |b - a|$ .

Элементарный сегмент в  $\mathbb{R}^n$  это  $I_1 \times \dots \times I_n$ , где  $I_k$  — элементарный сегмент в  $\mathbb{R}$   $\forall k \in 1, \dots, n$ . Для сегментов большой размерности мера определена в виде  $\mu_n(I) = \mu_1(I_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(I_n)$ .

Множество  $S$  будем считать примитивным (ступенчатым) множеством, если  $S$  — объединение конечного числа сегментов.

**Лемма** (Лемма о дроблении) Для любого примитивного (ступенчатого) множества  $A$   $\exists$  дизъюнктный набор сегментов (т.е. набор непересекающихся сегментов)  $I_1, \dots, I_N$  такой, что  $A = \bigcup_{n=1}^N I_n$ .

*Доказательство.* Пусть  $A = \bigcup J_k$ ,  $J_k = J_k^1 \times \dots \times J_k^n$ . Пусть  $a_0^i < a_1^i < \dots < a_{N_i}^i$  — концы сегментов  $J_1^i, \dots, J_m^i$ . Возьмем  $a_0^i, a_0^i, a_1^i, a_1^i, a_1^i, a_2^i$  и так далее — это элементарные сегменты на оси  $i$ -ой координаты. Искомая система дизъюнктных элементов — это декартово произведение этих сегментов по каждой координате. □

**Свойства ступенчатых множеств:**

1. Если  $A, B$  — ступенчатые множества, то  $A \cup B$  — ступенчатое множество.
2. Если  $A, B$  — ступенчатые множества, то  $A \cap B$  — ступенчатое множество.

*Доказательство.* Есть сегменты, которые в объединении дают  $A$  и дают  $B$ . Возьмем их, разделим по лемме о дроблении, посчитаем пересечение. □

3.  $A \setminus B$  — ступенчатое множество.

**Опр..** Ступенчатые функции:

Пусть  $E$  — векторное пространство. Определим функцию  $f$  как ступенчатую функцию на множествах  $\mathbb{R}^n$  и  $E$  ( $f \in Step(\mathbb{R}^n, E)$ ), если  $\exists$  система сегментов в  $\mathbb{R}^n$   $J_1, \dots, J_k$  такая, что  $f = \sum_{i=1}^k C_i \chi_{J_i}$  и  $C_1, \dots, C_k \in E$ . Уточнение:  $\chi_{J_i}(x)$  — характеристическая функция вида

$$\chi_{J_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in J_i \\ 0 & x \notin J_i \end{cases}$$

А  $C_i$  — некоторый вектор из  $E$ .

**Утв.** Пусть  $f, g \in Step(\mathbb{R}^n, E)$ . Тогда  $f + g \in Step(\mathbb{R}^n, E)$ ,  $\lambda \cdot f \in Step(\mathbb{R}^n, E)$ . Если в  $E$  можно перемножать веткора ( $\forall a, b \in E \exists a \cdot b \in E$ ), то  $f \cdot g \in Step(\mathbb{R}^n, E)$ .

*Доказательство.* Упражнение, надо поковыряться с определением новой функции и (возможно) хар. функции.  $\square$

**Утв.**  $f \in Step(\mathbb{R}^n, E) \iff \exists$  дизъюнктная система отрезков, на каждом из которых  $f = const$ .

**Опр..** Элементарный интеграл определим как функцию  $\int_{\mathbb{R}^n} : Step(\mathbb{R}^n, E) \rightarrow E$ . Функция  $f$  должна иметь вид  $\sum_{i=1}^k C_i \cdot \chi_{J_i}$ . Тогда

$$f = \sum_{i=1}^k C_i \cdot \chi_{J_i} \implies \int_{\mathbb{R}^n} f := \sum_{i=1}^k C_i \mu_n(J_i)$$

При  $n = 1$  набор  $J_1, \dots, J_n$  - это интервалы, полуинтервалы, отрезки и точки.

$$f(x) = \sum C_i \chi_{J_i} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \text{обычный интеграл не зависит от разбиения}$$

**Теорема** (Примитивная теорема Фубини): Введем удобные обозначения:  $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, X \times Y = \mathbb{R}^{n+m}$ . Пусть  $f \in Step(X \times Y, E)$ . Тогда:

1.  $\forall x \in X$  функция от  $y$ , отображающая  $y \rightarrow f(x, y)$  является ступенчатой на  $Y$ .
2. Функция от  $x$ , отображающая  $x \rightarrow \int_Y f(x, y) dy$  - ступенчатая на  $X$ .
3.  $\int_X (\int_Y f(x, y) dy) dx = \int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y)$

*Доказательство.* 1. По условию  $\exists$  система сегментов  $J_1, \dots, J_k$  в  $X \times Y$  и набор констант  $C_1, \dots, C_k$  такой, что

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^k C_i \cdot \chi_{J_i}(x, y)$$

Каждый из сегментов  $J_i$  - это  $\underbrace{J_i^X}_{\text{сегмент из } X} \times \underbrace{J_i^Y}_{\text{сегмент из } Y}$  Тогда

$$\chi_{J_i}(x, y) = \chi_{J_i^X}(x) \cdot \chi_{J_i^Y}(y)$$

$$\forall x \ f(x, y) = \sum \underbrace{C_i \cdot \chi_{J_i^X}(x)}_{d_i} \cdot \chi_{J_i^Y}(y) - \text{это ступенчатая функция на } Y$$

Если  $x$  - фиксирован, то эта запись определяет ступенчатую функцию на  $Y$ .

2.

$$\int_Y f(x, y) dy = \sum_{i=1}^m C_i \cdot \chi_{J_i^X}(x) \cdot \mu_Y(J_i^Y) = \sum_{i=1}^m C_i \cdot \mu_Y(J_i^Y) \cdot \chi_{J_i^X}(x) - \text{ступенчатая функция на } X$$

3.

Интеграл от предыдущей функции по  $X = \sum_{i=1}^m C_i \cdot \mu_Y(J_i^Y) \cdot \mu_X(J_i^X) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y)$   
так как  $\mu_Y(J_i^Y) \cdot \mu_X(J_i^X) = \mu_{X \times Y}(J_i^X \times J_i^Y) = \mu_{X \times Y}(J_i)$

$\square$