Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Дифференциирование функций

Опр. 1. Функция $f(x)$ дифференциируема в точке $p \in U$, если:

1. f определена в некоторой окрестности точки p ($p \in Int(U)$)
2. $\exists \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(p+\Delta h)-f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$ (и этот предел равен $f'(p)$)

1.1 Экстремумы

Необходимое условие экстремума:
Пусть $f \in D(p)$ (дифференциируема в р). Если р - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0$, но $f(x)$ не дифференциируема в 0.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Достаточное условие экстремума:
Пусть $f \in D^2(p)$ (дважды дифференциируема в p) и $f'(p) = 0$.В таком случае если

- $f''(p) < 0$ - точка p является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$ - точка p является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференциируема в p, если:

1. $p \in Int(U) \quad (\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U)$
2. $\exists$ дифференциал функции (линейное отображение) f в точке $p \quad df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > +\alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x\to p}{=} o(x-p))$$

При сдвиге точки p на вектор h:

$$f(p+h) = f(p) + df(p) < h > +o(|h|)$$

1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр. 2. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_1, .., p_i + t, .., p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

Опр. 3. Прозводная вдоль вектора v:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t\to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{при}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{при}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t\to 0}{=} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

Утв. 1 Если f дифференциируема в p, то f - непрерына в p.

Доказательство.

$$f(p+h) - f(p) \underset{h\to 0}{=} df(p) < h >$$

Линейное отображение df(p)<> непрерывно, $o(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$, т.е. $f(p+h) \underset{h\to 0}{\to} f(p)$. □

Достаточный признак дифференциируемости:
Все частные производные непрерырвны в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x,y) = x^y$ дифференциируема во всех точках (x_0, y_0), где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

Опр. 4. Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1\times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр. 5. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Опр. 6. Функция дифференциируема в точке, если

- $f : U \to \mathbb{R}^k$ и $p \in Int(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p\rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно задатья как $df(p)\langle v\rangle = \langle \nabla f(p); v\rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$ - вектор частных производных в точке p.

Утв. 2 Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p, вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \underset{t\to 0}{\to} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v\rangle = \langle \nabla f(p); v\rangle = |\nabla f(p)|\cdot|v|\cdot cos(\varphi), \text{где } \varphi \text{ - угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p) = const, |v|= 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ, чтобы $cos(varphi)$ был максимален, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. □

Утв. 3 $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x|f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ ($p \in \Omega$). Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \underset{n\to\infty}{\to} 0 :$

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p\rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p\rangle + o(x_n - p).$$

Значит $0 \underset{n\to\infty}{=} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle \to 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle = |\nabla f(p)|\cdot \left|\frac{x_n - p}{|x_n - p|}\right| \cdot cos(\alpha) \to 0, \text{ т.е.} \alpha \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

□

Опр. 7. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

Опр. 8. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \to \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

Теорема: Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,\ g : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m,\ f \in C^1(p),\ g \in C^1(q),\ q = f(p)$.
Тогда $g \circ f \in C^1(p)$, $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$. В матрицах Якоби: $D_{g\circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$.

Пример:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases} \qquad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz. \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathrm{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_f = \begin{pmatrix} \sinh(ab) \cdot a & \sinh(ab) \cdot b \end{pmatrix}$$

$$D_g \cdot D_f = \begin{pmatrix}\sinh(x^2yz)\cdot xz & \sinh(x^2yz)\cdot xy\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Сторожуку на слово.

Правило дифференциирования обратного отображения: Если невырождено и $\exists$ обратное отображение $g : V \to U$, непрерывное в точке $q = f(p)$, тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

1.4 Многократная дифференциируемость

Опр. 9. $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ k раз дифференциируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференциируема во всех точках некоторой окрестности точки p;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференциируемы $k-1$ раз в точке p.

Пример:

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p),\ g(x) \in D^k(p),\ f(x) \in D^k(p),\ \frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. □

Теорема 1 (о вторых производных)**:** Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2, т.к. при дифференциировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1:

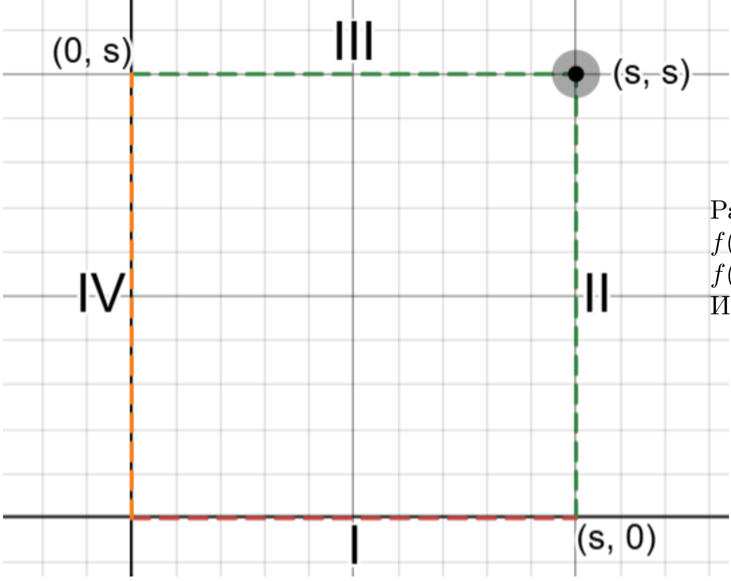
$$f_1(x, y) := f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0)$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0)$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0, 0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \text{ где } \alpha_1(x, y) = o(x, y),\ (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y\rangle$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому $a_{11} = f_{xx}(0),\ a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y),\ a_{21} = f_{yx}(0),\ a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s,s) вблизи нуля. Для нее $f(s,s) - f(0,0) = (f(s,s) - f(s,0)) + (f(s,0) - f(0,0)) = (II) + (I)$.
И в то же время $f(s,s) = (\mathrm{IV}) + (\mathrm{III})$

$$\mathrm{II} = f(s,s) - f(s,0) = \int_{y=0}^{s} \frac{\partial f}{\partial y}(s,t)dt = \int_{t=0}^{s} a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s,t)dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_2(s,t)dt$. Аналогично для I:

$$\mathrm{I} = f(s,0) - f(0,0) = \int_{t=0}^{s} \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt = \int_{t=0}^{s} a_{11}t + a_{12}\cdot 0 + \alpha_1(t)dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s),\ \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_1(t,0)dt$$

Итого: $f(s,s) - f(0,0) = \mathrm{I} + \mathrm{II} = s^2\left(a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s)+\varepsilon_2(s)}{s^2}\right)$, что на самом деле равно $\mathrm{III} + \mathrm{IV} =$
$= s^2\left(a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s)+\varepsilon_4(s)}{s^2}\right)$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a11}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \tag{1}$$

При малых s:

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_2(0,t)dt, \quad \varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_1(t,s)dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s\to 0}{=} o(s^2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0} \alpha_2(s,t)dt, \quad \alpha_2(x,y) \underset{x,y\to 0}{=} o(x,y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0,0)$ выполнено $\forall (x,y) \in V \quad \alpha_2(x,y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2+y^2}$. Для s таких, что $(s,s) \in V \quad \alpha_2(x,y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$, при $|x| \leq s,\ |y| \leq s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left|\int_{t=0}^{s} \alpha_2(s,t)dt\right| \leq \int_{t=0}^{s} |\alpha_2(s,t)|\,dt \leq \int_{t=0}^{s} \varepsilon \cdot s\sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2\sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s) \underset{s\to 0}{=} o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$ Тогда в равенстве 1 $\frac{\varepsilon_1(s)+\varepsilon_2(s)}{s^2} \to 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s)+\varepsilon_4(s)}{s^2} \to 0$, а значит $a_{21} = a_{12}$, то есть $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$. $\square$

Правило дифференциирования монома:
Пусть $f(x) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{i_m},\ x = (x_1, \ldots, x_m)$. Тогда

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}}(0) = i_1! \cdot \ldots \cdot i_m!$$

Любая другая производная любого порядка в точке 0 равна 0.

1.5 Мульти-индексы

Придумаем $\mu = (i_1, \ldots, i_m)$ - численный вектор, в котором $\forall j = \overline{1 \ldots m}\ i_j \geq 0$ и назовем его **мультииндексом**.

Для мультииндексов определены операции:

$$\mu! := i_1! \cdot \ldots \cdot i_m! \qquad |\mu| = \sum_{j=1}^{m} i_j \text{ - порядок мультииндекса}$$

$$x \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, \ldots, x_m), \quad x^\mu = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{i_m}$$

$$C_k^\mu = \frac{k!}{\mu!} = \frac{k!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_m!}, \text{ где } k = |\mu|$$

Зададим контекст:

$$f : \mathbb{R}^m \to E,\ f \in D^k(p),\ \mu = (i_1, \ldots, i_m)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} = D^\mu f = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}}(\frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}}(\ldots(\frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f)))$$

Теорема (разложение Тейлора)**:** $\exists!$ многочлен $A(x)$ степени $\leq k$ такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \to p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

Теорема (разложение Тейлора для нескольких переменных)**:** Пусть $f : \mathbb{R}^m \to E,\ f \in D^k(p)$, тогда $\exists!$ многочлен $A(x)$ $deg(A) \leq k$, такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \to p}{=} o(|x-p|^k)$:

$$A(x) = f(p) + \frac{df(p)\langle x-p \rangle}{1!} + \frac{d^f(p)\langle x-p \rangle}{2!} + \ldots + \frac{d^k f(p)\langle x-p \rangle}{k!}$$

Доказательство. **Единственность:** Пусть есть два таких многочлена $A(x), B(x)$. Введем $C(x) := A(x) - B(x) = o(|x-p|^k)$. И докажем вспомогательное утверждение:

Утв. $degC \leq k$ $C(x) \underset{x \to p}{=} o(|x-p|^k)$, тогда $C \equiv 0$.

Доказательство.
1. Фиксируем $v \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим $h(t) = C(p+tv)$ - многочлен одной переменной. По условию $h(t) = o(t^k)$ для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е. $h(t) \equiv 0$. В частности, при $t = 1$ $h(t) = C(p+v) = 0$.
2. Поскольку 1. выполняется $\forall v$, то $C(p+v) = 0\ \forall v$.

□

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

Существование: Введем $g(x) = f(x) - A(x),\ f : \mathbb{R}^m \to E$. $g(p) = 0$ и все производные до порядка k включительно равны 0 в p, $g \in D^K(p)$. Необходимо доказать, что из этого следует, что $g(x) = o(|x-p|^k)$.
Пусть $\varepsilon > 0$, надо показать, что $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x-p|^k$ в некоторой U - окрестности точки p. Пусть $\varepsilon_{k-1}(x)$ - какая-то производная порядка $k-1$ функции g, ε_{k-1} определена в некотором шаре V_p с центром в p.

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0,\ \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0\ \forall i = 1 \ldots m \tag{2}$$

Поэтому имеется маленький шар $U \subset V_p$ в котором выполнено:

$$\forall x \in U\ \ |\varepsilon_{k-1}|\,(x) \leq \varepsilon \cdot |x-p| \tag{3}$$

В самом деле, $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x-p\rangle + o(|x-p|)$, причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка k включительно равны 0 в p а второе - из уравнения (1). Значит $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x-p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon\,|x-p|$ Итак, ясно, что существует шарик U, в котором все производные $k-1$ порядка имеют оценку (3) Пусть ε_{k-2} - какая-то производная функции g порядка $k-2$. Все ее первые частные производные по доказанному в шаре U оцениваются в $\varepsilon \cdot |x-p|$. По лемме о степенной оценке приращения для ε_{k-2} выполнено в шаре U:

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left|\frac{\varepsilon\,|x-p|^2}{2}\right|$$

Для $k-3, k-4, \ldots$ аналогично.

$$|g(x)| = \left|g^{(k-k)}(x)\right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x-p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x-p|^k$$

□

Теорема 2 (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных)**:** Пусть $f \in D^2(p),\ f : \mathbb{R}^m \to R$ и $df(p) > 0$. Тогда:

1. $d^2 f(p) > 0$ - строгий локальный минимум
2. $d^2 f(p) < 0$ - строгий локальный максимум
3. Если $d^2 f(p)$ знаконеопределен, т.е. $\exists u \in \mathbb{R}^m\ d^2 f(p)\langle u\rangle > 0$ и $\exists v \in \mathbb{R}^m\ d^2 f(p)\langle v\rangle < 0$, то p - седловая точка.

Доказательство. Докажем пункт 3:

Доказательство. Пусть $df(p) = 0$ и существуют вектора u и v, такие, что $d^2 f(p)\langle u\rangle > 0,\ d^2 f(p)\langle v\rangle < 0$.

Введем функцию $h(t) = f(p+tu)$. Тогда $h'(0) = df(p)\langle u\rangle = 0,\ h''(0) = d^2 f(p)\langle u\rangle > 0$. Значит у функции h в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль $p + tv$ функция имеет строгий максимум, значит p - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

Доказательство. Пусть $d^2 f(p) > 0$, то есть $\forall v \neq 0\ d^f(p)\langle v\rangle > 0$. Сфера $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \quad |v| = 1\}$ - компактна (замкнута и ограничена). $d^2 f(p) : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ - однородный многочлен второго порядка. Так как $d^2 f$ - непрерывная функция на компакте, то у нее $\exists \min = C > 0$, т.е.
$\forall v \in S^{m-1} \quad d^2 f(p)\langle v\rangle \geq C$.

Утв. Тогда $\forall v \neq 0\ d^2 f(p)\langle v\rangle \geq C \cdot |v|^2$

Доказательство.

$$\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p)\langle v\rangle = d^f(p)\langle |v| \cdot \frac{v}{|v|}\rangle = |v|^2 \cdot d^2 f(p)\langle \frac{v}{|v|}\rangle \geq C \cdot |v|^2$$

□

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p)\langle x-p\rangle + \frac{d^2 f(p)\langle x-p\rangle}{2!} + \alpha(x)\,|x-p|^2\,,\ \alpha(x) \underset{x\to p}{\to} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!}\cdot |x-p|^2 + \alpha(x)\,|x-p|^2$$

Существует окрестность U точки p, такая, что $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3}$ $\forall x \in U$. Тогда для $\forall x \in U$:

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!}\,|x-p|^2 - \frac{C}{3}\,|x-p|^2 = f(p) + \frac{C}{6}\,|x-p|^2$$

То есть $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6}\,|x-p|^2 > 0 \implies$ в U $f(p) < f(x)$ $\forall x \in U$. Пункт 1 доказан. □

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. □

Теорема 3 (Полиномиальное разложение композиции)**:** Пусть $k \geq 0, f, g$ - функции, $A(x), B(y)$ - полиномы. Предположим, что f и A в точке p имеют порядок касания $\geq k$, g и B в точке p имеют порядок касания $\geq k$. То есть:

$$f(x) - A(x) = \alpha(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k),\ \alpha(p) = 0$$

$$g(y) - B(y) = \beta(y) \underset{y\to q}{=} o(|y-q|^k),\ \beta(q) = 0$$

Тогда $g \circ f$ имеет с $B \circ A$ порядок касания $\geq k$.

Доказательство. При $k = 0$:

$$\alpha(x) = o(1) \implies f(x) - A(x) \underset{x\to p}{=} 0 \implies f(x) \underset{x\to p}{\to} f(p)$$

Для функции g аналогично, после чего применяем теорему о непрерывности композиции. Для $k = 0$ доказано.
Пусть $k \geq 0$. Тогда:

$$\begin{cases} f(x) = \alpha(x) + A(x) \\ g(y) = \beta(x) + B(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(x) = o(|x-p|) \\ \beta(x) = o(|y-q|) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in D^1(p) \\ \beta \in D^1(q) \end{cases} \implies \begin{cases} f \in D^1(p) \\ g \in D^1(q) \end{cases}$$

$$g(f(x)) - B(A(x)) = g(f(x)) - B(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x)) = \beta(f(x)) + B(f(x)) + B(A(x))$$

Заметим, что $\beta(f(x)) = o(|f(x)-q|^k) \underset{x\to p}{=} o(|f(x)-f(p)|^k)$. При этом $f(x) - f(p) = O(|x-p|^1)$, так как $f \in D^1(p)$. А значит:

$$\beta(f(x)) = o(O(|x-p|^k)) = o(|x-p|^k)$$

Пусть теперь V - шар конечного радиуса с центром в q. Все частные производные многочлена B в шаре V ограничены некоторой константой C. Тогда по лемме об оценке приращения:

$$\forall y_1, y_2 \in V \quad |B(y_1) - B(y_2)| = O(|y_1 - y_2|)$$

При $x \to p$ $\begin{cases} f(x) \to q \\ A(x) \to q \end{cases}$ и поэтому $f(x), B(x) \in V$. В таком случае

$$B(f(x)) - B(A(x)) \underset{x\to p}{=} O(f(x) - A(x)) = O(o(|x-p|^k))$$

□

2 Основы гладкого анализа

Символ $\underset{op}{\subset}$ обозначает "открыто в". Контекст:

$$U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ f : U \to \mathbb{R}^k,\ f \in C^r(U),\ r \geq 0$$

Опр. 10. Отображение f называется r-гладким, если все ее частные производные до порядка r непрерывны на U.

Пусть X - не обязательно открыто в $\mathbb{R}^m$.

Опр. 11. $f \in C^r(X)$, если $f = \tilde{f}$ - сужение на $\tilde{X}$, $\tilde{f} : \tilde{X} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - C^r-гладкая на $tildeX$. **НАДО УТОЧНИТЬ:** $X \subset \tilde{X}$ или наоборот.

Утв. 4 Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k,\ g : X \to \mathbb{R}^k$ - C^r отображения. Тогда $f + g \in C^r(X)$

Доказательство. Пусть $f = \tilde{f},\ g = \tilde{g}$ и т.д. по определению r-гладкости:

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m, \tilde{g} : V \to \mathbb{R}^m,\ U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ X \subset U, X \subset V$$

Введем $U \cap V = W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$. На W заданы оба отображения и ясно, что $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$. □

Утв. 5 Композиция:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \supset Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Если $f \in C^r$ и $g \in C^r$, то $g \circ f \in C^r$.

Доказательство. Область определения $\mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in X |\ f(x) \in Y\} = X \cap f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$

$$\begin{cases} f \in C^r \implies f = \tilde{f},\ \tilde{f} : \mathbb{R}^m \underset{op}{\supset} \tilde{X} \to \mathbb{R}^k - C^r\text{-гладкое.} \\ g \in C^r \implies g = \tilde{g},\ \tilde{g} : \mathbb{R}^k \underset{op}{\supset} \tilde{Y} \to \mathbb{R}^m - C^r\text{-гладкое.} \end{cases}$$

$$\mathrm{dom(\tilde{g} \circ \tilde{f})} = \mathrm{dom}(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(\mathrm{dom}(\tilde{g})) = \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$$

$\tilde{X}$ - открытое, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$ - открытое, как прообраз открытого множества $\tilde{Y}$ при непрерывном отображении.
Ясно, что $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ - сужение $\mathrm{dom}(g \circ f)$. □

Теорема 4 (Лемма о классе гладкости обратного отображения)**:** Пусть $U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$.

$U \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} V,\ f, g$ - непрерывны и взаимно обратны. Если $f \in C^r(U)$ и $\forall x \in U\ df(x)$ - невырожден: $det(Df(x)) \neq 0$, то $g \in C^r(U)$.

Доказательство. При $r > 0$ g дифференциируема в $\forall y \in V$ по правилу дифференциирования обратного отображения. В матрицах Якоби:

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U, \text{ причем } f(x) = y,\ x = g(y)$$

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}, \quad \text{цепочка преобразований } y \to g(y) \to Df(g(y)) \to (Df(g(y)))^{-1}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y),\ w \text{ - отображение обращения матрицы.}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y),\ \text{причем } w - C^\infty, Df - C^{r-1}, g(y) - \text{дифференциируема}$$

g дифференциируема $\implies$ Dg тоже дифференциируема как композиция $\implies$ все производные g дифференциируемы $\implies Dg \in C^1 \implies g \in C^2 \implies \ldots \implies g \in C^{r-1} \implies Dg \in C^{r-1} \implies g \in C^r$. □

Лемма Пусть $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$, а $f : U \to \mathbb{R}^m$ такое, что отображение $f(x) - x = \lambda(x)$ сжимающее, то есть $\forall x_1, x_2 \in U\, |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| \leq \lambda < 1$. Тогда:

1. $f(U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$
2. Сужение $f : U \to f(U)$ обратимо и обратное отображение - липшицево с константой $\frac{1}{1-\lambda}$.

Доказательство. Докажем пункт 2:
f инъективно: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) - x_1 = \lambda(x_1) \\ f(x_2) - x_2 = \lambda(x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) = \lambda(x_1) + x_1 \\ f(x_2) = \lambda(x_2) + x_2 \end{cases}$$

Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\lambda(x_1) - \lambda(x_2) + (x_1 - x_2)| \leq |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| + |x_1 - x_2|\, \lambda \cdot |x_1 - x_2| + |x_1 - x_2| = (\lambda + 1)\, |x_1 - x_2|$$

В силу неравенства треугольника:

$$(1 - \lambda)\, |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq (1 + \lambda)\, |x_1 - x_2|$$

Инъективность есть, а сужение $f : U \to f(U)$ - биективно, значит обратимо. Поймем, что обратное отображение будет $\frac{1}{1-\lambda}$ липшицево. Пусть $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \in f(U)$ $\begin{cases} x_1 = g(y_1) \\ x_2 = g(y_2) \end{cases}$

$$|y_1 - y_2| \geq (1 - \lambda)\, |g(y_1) - g(y_2)| \implies \frac{1}{1 - \lambda}\, |y_1 - y_2| \geq g(y_1) - g(y_2)$$

Пункт 2 доказан.
Пусть теперь $q \in f(U)$. Рассмотрим $p \in U \mid q = f(p)$. U открыто, а значит $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subset U$, где $B_\varepsilon(p)$ - открытый шар радиуса ε с центром в точке p. Мы покажем, что множество $f(U)$ содержит шар с центром в q радиуса $(1 - \lambda)\varepsilon$.
Пусть $y \in B_{\varepsilon(1-\lambda)}(q)$, т.е. $|q - y| < (1 - \lambda)\varepsilon$. Надо показать, что $\exists x$ такой, что $|p - x| < \varepsilon,\ f(x) = y$. Воспользуемся теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения. Перепишем условие:

$$f(x) = y \implies y - f(x) = 0 \implies y - f(x) + x = x$$

Положим

$$\varphi(x) = y - f(x) + x = y - \lambda(x)$$

Заметим, что $\varphi(x)$ является сжимающим и покажем, что φ переводит $B_\varepsilon(p)$ в себя.

$$x \in B_\varepsilon(p) \implies |x - p| \leq \varepsilon \implies |\varphi(x) - \varphi(p)| \leq \lambda\varepsilon$$

$$|\varphi(x) - p| = |(\varphi(x) - \varphi(p)) + (\varphi(p) - p)| \leq |\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p|$$

Первое слагаемое, как мы уже доказали, не превышает $\lambda\varepsilon$. Преобразуем второе:

$$|\varphi(p) - p| = |y - f(p) + p - p| = |y - f(p)| = |y - q| \leq (1 - \lambda)\varepsilon$$

Тогда:

$$|\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p| \leq \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

Значит $|\varphi(x) - p| \leq \varepsilon$ и $\varphi(x) \in B_\varepsilon(p) \mid x \in B_\varepsilon(p)$. $\square$

Теорема 5: о локальной обратимости
Пусть $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ f: U \to \mathbb{R}^m - C^r$-гладкое отображение, $r \geq 1$. Пусть $p \in U$. Если $df(p): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - невырожден, то у точки p имеется окрестность U_1 такая, что $f(U_1) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$ и сужение $f|_{U_1}: U_1 \to f(U_1)$ является C^r-изоморфизмом (т.е. обратное отображение тоже принадлижети классу C^r).

Доказательство. Считаем сначала, что $\forall v\ df(p)\langle v\rangle = v$, т.е. $df(p): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - тождественное отображение, $Df(p) = E$. Рассмотрим отображение $h(x) = f(x) - x$:

$$dh(x) = df(x) - dx,\ \text{при x = p: } dh(p) = dx - dx = 0(Dh(x) = E - E = 0)$$

Все частные производные отображения h в точке p равны 0. Значит, в силу их непрерывности в p, у точки p имеется некоторый шарик U с центром в p такой, что $\forall x \in U$ все эти производные ограничены, например, $\frac{1}{2} < 1$.

$$\forall x_1, x_2 \in U_1\ \ |h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{1}{2}$$

По предыдущей лемме $f(U_1)$ открыто в $\mathbb{R}^m$ и $f|_{U_1} \to f(U_1)$ обратимо, обратное отображение непрерывно. По теореме о классе гладкости обратного отображения оно (f^{-1}) имеет нужный класс. Заметим, что в той лемме необходимо, чтобы $\forall x \in U_1\ det(Df(x)) \neq 0$, поэтому когда мы выбираем окрестность U_1 надо это тоже потребовать:

$$Df(p) = E,\ det(E) = 1 \neq 0\text{и в некоторой окрестности точки } p det(Df(x)) = 0$$

$\square$