Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Дифференциирование функций

Опр 1. Функция $f(x)$ дифференциируема в точке $p \in U$, если:

1. f определена в некоторой окрестности точки p ($p \in Int(U)$)
2. $\exists \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(p+\Delta h)-f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$ (и этот предел равен $f'(p)$)

1.1 Экстремумы

Необходимое условие экстремума:
Пусть $f \in D(p)$ (дифференциируема в р). Если р - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0$, но $f(x)$ не дифференциируема в 0.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Достаточное условие экстремума:
Пусть $f \in D^2(p)$ (дважды дифференциируема в p) и $f'(p) = 0$.В таком случае если

- $f''(p) < 0$ - точка p является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$ - точка p является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференциируема в p, если:

1. $p \in Int(U) \quad (\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U)$
2. $\exists$ дифференциал функции (линейное отображение) f в точке $p \quad df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > +\alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \to p}{=} o(x-p))$$

При сдвиге точки p на вектор h:

$$f(p+h) = f(p) + df(p) < h > +o(|h|)$$

1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр 2. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, .., p_i + t, .., p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

Опр 3. Прозводная вдоль вектора v:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{при}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{при}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0,0)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3v_1^2v^2}{t^5v_1^4 + t^3v_2^2} = \frac{v_1^2v_2}{t^2v_1^2v_2^2} \underset{t\to 0}{=} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

Утв. 1 Если f дифференциируема в p, то f - непрерына в p.

Доказательство.

$$f(p+h) - f(p) \underset{h\to 0}{=} df(p) < h >$$

Линейное отображение df(p)<> непрерывно, $o(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$, т.е. $f(p+h) \underset{h\to 0}{\to} f(p)$. □

Достаточный признак дифференциируемости:
Все частные производные непрерырвны в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x,y) = x^y$ дифференциируема во всех точках (x_0, y_0), где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

Опр 4. Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1\times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр 5. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Опр 6. Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \to \mathbb{R}^k$ и $p \in Int(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p\rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно задатья как $df(p)\langle v\rangle = \langle \nabla f(p); v\rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$ - вектор частных производных в точке p.

Утв. 2 Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p, вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \underset{t\to 0}{\to} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v\rangle = \langle \nabla f(p); v\rangle = |\nabla f(p)|\cdot|v|\cdot cos(\varphi), \text{где } \varphi \text{ - угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p) = const, |v|= 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ, чтобы $cos(\varphi)$ был максимален, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. $\square$

Утв. 3 $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x|f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ $(p \in \Omega)$. Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \underset{n\to\infty}{\to} 0:$

$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p\rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p\rangle + o(x_n - p).$

Значит $0 \underset{n\to\infty}{=} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle \to 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle = |\nabla f(p)|\cdot \left|\frac{x_n - p}{|x_n - p|}\right| \cdot cos(\alpha) \to 0, \text{ т.е.} \alpha \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Опр 7. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

Опр 8. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \to \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

Теорема: Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,\ g : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m,\ f \in C^1(p),\ g \in C^1(q),\ q = f(p)$.
Тогда $g \circ f \in C^1(p)$, $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$. В матрицах Якоби: $D_{g\circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$.

Пример:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases} \qquad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz. \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathrm{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_f = \begin{pmatrix} \sinh(ab) \cdot a & \sinh(ab) \cdot b \end{pmatrix}$$

$$D_g \cdot D_f = \begin{pmatrix}\sinh(x^2yz)\cdot xz & \sinh(x^2yz)\cdot xy\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Сторожуку на слово.

Правило дифференциирования обратного отображения: Если невырождено и $\exists$ обратное отображение $g : V \to U$, непрерывное в точке $q = f(p)$, тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

1.4 Многократная дифференциируемость

Опр 9. $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ k раз дифференциируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференциируема во всех точках некоторой окрестности точки p;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференциируемы $k-1$ раз в точке p.

Пример:

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p),\ g(x) \in D^k(p),\ f(x) \in D^k(p),\ \frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. □

Теорема 1 (о вторых производных)**:** Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2, т.к. при дифференциировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменются.

$$f = f(x,y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1:

$$f_1(x,y) := f(x,y) - f'_x(0,0)\cdot x - f'_y(0,0)\cdot y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - f'_x(0,0)$$

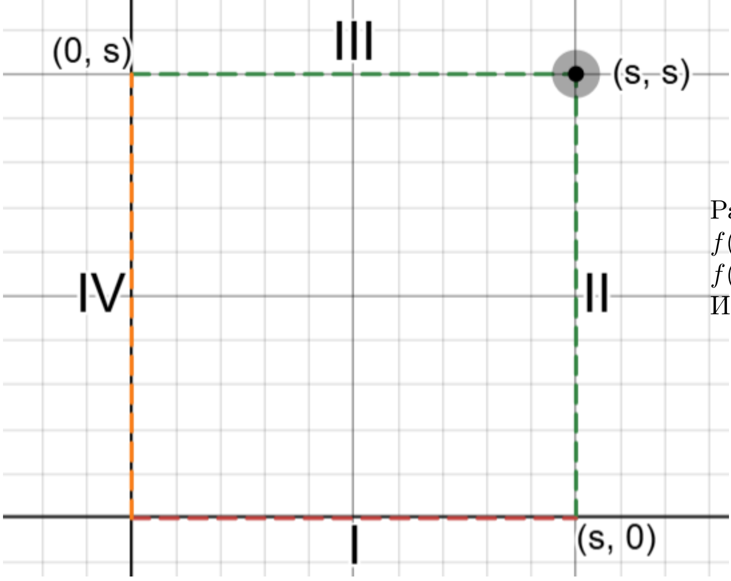
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) - f'_y(0,0)$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0,0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(0,0) + a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y + \alpha_1(x,y), \text{ где } \alpha_1(x,y) = o(x,y),\ (a_{11}, a_{12}) = df(0,0)\langle x, y\rangle$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому $a_{11} = f_{xx}(0),\ a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(0,0) + a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y + \alpha_2(x,y),\ a_{21} = f_{yx}(0),\ a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s, s) вблизи нуля. Для нее $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I)$.
И в то же время $f(s, s) = (\text{IV}) + (\text{III})$

$$\text{II} = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^{s} \frac{\partial f}{\partial y}(s, t)dt = \int_{t=0}^{s} a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t)dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_2(s, t)dt$. Аналогично для I:

$$\text{I} = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^{s} \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)dt = \int_{t=0}^{s} a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t)dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \ \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_1(t, 0)dt$$

Итого: $f(s, s) - f(0, 0) = \text{I} + \text{II} = s^2 \left(a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2}\right)$, что на самом деле равно $\text{III} + \text{IV} =$ $= s^2 \left(a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2}\right)$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a11}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \tag{1}$$

При малых s:

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_2(0, t)dt, \quad \varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_1(t, s)dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \to 0}{=} o(s^2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0} \alpha_2(s, t)dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x, y \to 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0, 0)$ выполнено $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \le \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. Для s таких, что $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \le \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$, при $|x| \le s, \ |y| \le s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left|\int_{t=0}^{s} \alpha_2(s, t)dt\right| \le \int_{t=0}^{s} |\alpha_2(s, t)|\, dt \le \int_{t=0}^{s} \varepsilon \cdot s\sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s) \underset{s \to 0}{=} o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$ Тогда в равенстве 1 $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \to 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \to 0$, а значит $a_{21} = a_{12}$, то есть $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$. $\square$

Правило дифференциирования монома:
Пусть $f(x) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{i_m},\ x = (x_1, \ldots, x_m)$. Тогда

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}}(0) = i_1! \cdot \ldots \cdot i_m!$$

Любая другая производная любого порядка в точке 0 равна 0.

1.5 Мульти-индексы

Придумаем $\mu = (i_1, \ldots, i_m)$ - численный вектор, в котором $\forall j = \overline{1 \ldots m}\ i_j \geq 0$ и назовем его **мультииндексом**.

Для мультииндексов определены операции:

$$\mu! := i_1! \cdot \ldots \cdot i_m! \qquad |\mu| = \sum_{j=1}^{m} i_j \text{ - порядок мультииндекса}$$

$$x \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, \ldots, x_m), \quad x^\mu = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{i_m}$$

$$C_k^\mu = \frac{k!}{\mu!} = \frac{k!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_m!}, \text{ где } k = |\mu|$$

Зададим контекст:

$$f : \mathbb{R}^m \to E,\ f \in D^k(p),\ \mu = (i_1, \ldots, i_m)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} = D^\mu f = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}}(\frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}}(\ldots(\frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f)))$$

Теорема (разложение Тейлора)**:** $\exists!$ многочлен $A(x)$ степени $\leq k$ такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \to p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

Теорема (разложение Тейлора для нескольких переменных)**:** Пусть $f : \mathbb{R}^m \to E,\ f \in D^k(p)$, тогда $\exists!$ многочлен $A(x)$ $deg(A) \leq k$, такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \to p}{=} o(|x-p|^k)$:

$$A(x) = f(p) + \frac{df(p)\langle x-p \rangle}{1!} + \frac{d^f(p)\langle x-p \rangle}{2!} + \ldots + \frac{d^k f(p)\langle x-p \rangle}{k!}$$

Доказательство. **Единственность:** Пусть есть два таких многочлена $A(x), B(x)$. Введем $C(x) := A(x) - B(x) = o(|x-p|^k)$. И докажем вспомогательное утверждение:

Утв. $degC \leq k$ $C(x) \underset{x \to p}{=} o(|x-p|^k)$, тогда $C \equiv 0$.

Доказательство.
1. Фиксируем $v \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим $h(t) = C(p + tv)$ - многочлен одной переменной. По условию $h(t) = o(t^k)$ для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е. $h(t) \equiv 0$. В частности, при $t = 1$ $h(t) = C(p + v) = 0$.
2. Поскольку 1. выполняется $\forall v$, то $C(p + v) = 0\ \forall v$.

□

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

Существование: Введем $g(x) = f(x) - A(x),\ f : \mathbb{R}^m \to E$. $g(p) = 0$ и все производные до порядка k включительно равны 0 в p, $g \in D^K(p)$. Необходимо доказать, что из этого следует, что $g(x) = o(|x-p|^k)$.

Пусть $\varepsilon > 0$, надо показать, что $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x-p|^k$ в некоторой U - окрестности точки p. Пусть $\varepsilon_{k-1}(x)$ - какая-то производная порядка $k-1$ функции g, ε_{k-1} определена в некотором шаре V_p с центром в p.

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0,\ \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0\ \forall i = 1 \dots m \tag{2}$$

Поэтому имеется маленький шар $U \subset V_p$ в котором выполнено:

$$\forall x \in U\ \ |\varepsilon_{k-1}|(x) \leq \varepsilon \cdot |x-p| \tag{3}$$

В самом деле, $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x-p\rangle + o(|x-p|)$, причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка k включительно равны 0 в p а второе - из уравнения (1). Значит $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x-p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon\,|x-p|$ Итак, ясно, что существует шарик U, в котором все производные $k-1$ порядка имеют оценку (3) Пусть ε_{k-2} - какая-то производная функции g порядка $k-2$. Все ее первые частные производные по доказанному в шаре U оцениваются в $\varepsilon \cdot |x-p|$. По лемме о степенной оценке приращения для ε_{k-2} выполнено в шаре U:

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left|\frac{\varepsilon\,|x-p|^2}{2}\right|$$

Для $k-3, k-4, \dots$ аналогично.

$$|g(x)| = \left|g^{(k-k)}(x)\right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x-p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x-p|^k$$

□

Теорема 2 (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных)**:** Пусть $f \in D^2(p),\ f : \mathbb{R}^m \to R$ и $df(p) > 0$. Тогда:

1. $d^2 f(p) > 0$ - строгий локальный минимум
2. $d^2 f(p) < 0$ - строгий локальный максимум
3. Если $d^2 f(p)$ знаконеопределен, т.е. $\exists u \in \mathbb{R}^m\ d^2 f(p)\langle u\rangle > 0$ и $\exists v \in \mathbb{R}^m\ d^2 f(p)\langle v\rangle < 0$, то p - седловая точка.

Доказательство. Докажем пункт 3:

Доказательство. Пусть $df(p) = 0$ и существуют вектора u и v, такие, что $d^2 f(p)\langle u\rangle > 0,\ d^2 f(p)\langle v\rangle < 0$.

Введем функцию $h(t) = f(p+tu)$. Тогда $h'(0) = df(p)\langle u\rangle = 0,\ h''(0) = d^2 f(p)\langle u\rangle > 0$. Значит у функции h в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль $p + tv$ функция имеет строгий максимум, значит p - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

Доказательство. Пусть $d^2 f(p) > 0$, то есть $\forall v \neq 0\ d^2 f(p)\langle v\rangle > 0$. Сфера $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \quad |v| = 1\}$ - компактна (замкнута и ограничена). $d^2 f(p) : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ - однородный многочлен второго порядка. Так как $d^2 f$ - непрерывная функция на компакте, то у нее $\exists \min = C > 0$, т.е.
$\forall v \in S^{m-1} \quad d^2 f(p)\langle v\rangle \geq C$.

Утв. Тогда $\forall v \neq 0\ d^2 f(p)\langle v\rangle \geq C \cdot |v|^2$

Доказательство.

$$\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p)\langle v\rangle = d^f(p)\langle |v| \cdot \frac{v}{|v|}\rangle = |v|^2 \cdot d^2 f(p)\langle \frac{v}{|v|}\rangle \geq C \cdot |v|^2$$

□

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p)\langle x-p\rangle + \frac{d^2 f(p)\langle x-p\rangle}{2!} + \alpha(x)\,|x-p|^2\,,\ \alpha(x) \underset{x\to p}{\to} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!} \cdot |x-p|^2 + \alpha(x)\,|x-p|^2$$

Существует окрестность U точки p, такая, что $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3}$ $\forall x \in U$. Тогда для $\forall x \in U$:

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!}\,|x-p|^2 - \frac{C}{3}\,|x-p|^2 = f(p) + \frac{C}{6}\,|x-p|^2$$

То есть $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6}\,|x-p|^2 > 0 \implies$ в U $f(p) < f(x)$ $\forall x \in U$. Пункт 1 доказан. □

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. □

Теорема 3 (Полиномиальное разложение композиции)**:** Пусть $k \geq 0, f, g$ - функции, $A(x), B(y)$ - полиномы. Предположим, что f и A в точке p имеют порядок касания $\geq k$, g и B в точке p имеют порядок касания $\geq k$. То есть:

$$f(x) - A(x) = \alpha(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k),\ \alpha(p) = 0$$

$$g(y) - B(y) = \beta(y) \underset{y\to q}{=} o(|y-q|^k),\ \beta(q) = 0$$

Тогда $g \circ f$ имеет с $B \circ A$ порядок касания $\geq k$.

Доказательство. При $k = 0$:

$$\alpha(x) = o(1) \implies f(x) - A(x) \underset{x\to p}{=} 0 \implies f(x) \underset{x\to p}{\to} f(p)$$

Для функции g аналогично, после чего применяем теорему о непрерывности композиции. Для $k = 0$ доказано.
Пусть $k \geq 0$. Тогда:

$$\begin{cases} f(x) = \alpha(x) + A(x) \\ g(y) = \beta(x) + B(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(x) = o(|x-p|) \\ \beta(x) = o(|y-q|) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in D^1(p) \\ \beta \in D^1(q) \end{cases} \implies \begin{cases} f \in D^1(p) \\ g \in D^1(q) \end{cases}$$

$$g(f(x)) - B(A(x)) = g(f(x)) - B(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x)) = \beta(f(x)) + B(f(x)) + B(A(x))$$

Заметим, что $\beta(f(x)) = o(|f(x)-q|^k) \underset{x\to p}{=} o(|f(x)-f(p)|^k)$. При этом $f(x) - f(p) = O(|x-p|^1)$, так как $f \in D^1(p)$. А значит:

$$\beta(f(x)) = o(O(|x-p|^k)) = o(|x-p|^k)$$

Пусть теперь V - шар конечного радиуса с центром в q. Все частные производные многочлена B в шаре V ограничены некоторой константой C. Тогда по лемме об оценке приращения:

$$\forall y_1, y_2 \in V \quad |B(y_1) - B(y_2)| = O(|y_1 - y_2|)$$

При $x \to p$ $\begin{cases} f(x) \to q \\ A(x) \to q \end{cases}$ и поэтому $f(x), B(x) \in V$. В таком случае

$$B(f(x)) - B(A(x)) \underset{x\to p}{=} O(f(x) - A(x)) = O(o(|x-p|^k))$$

□

2 Основы гладкого анализа

Символ $\underset{op}{\subset}$ обозначает "открыто в". Контекст:

$$U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ f : U \to \mathbb{R}^k,\ f \in C^r(U),\ r \geq 0$$

Опр 10. Отображение f называется r-гладким, если все ее частные производные до порядка r непрерывны на U.

Пусть X - не обязательно открыто в $\mathbb{R}^m$.

Опр 11. $f \in C^r(X)$, если $f = \tilde{f}$ - сужение на $\tilde{X}$, $\tilde{f} : \tilde{X} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - C^r-гладкая на $tildeX$. **НАДО УТОЧНИТЬ:** $X \subset \tilde{X}$ или наоборот.

Утв. 4 Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k,\ g : X \to \mathbb{R}^k$ - C^r отображения. Тогда $f + g \in C^r(X)$

Доказательство. Пусть $f = \tilde{f},\ g = \tilde{g}$ и т.д. по определению r-гладкости:

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m, \tilde{g} : V \to \mathbb{R}^m,\ U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ X \subset U, X \subset V$$

Введем $U \cap V = W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$. На W заданы оба отображения и ясно, что $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$. □

Утв. 5 Композиция:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \supset Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Если $f \in C^r$ и $g \in C^r$, то $g \circ f \in C^r$.

Доказательство. Область определения $\mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in X |\ f(x) \in Y\} = X \cap f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$

$$\begin{cases} f \in C^r \implies f = \tilde{f},\ \tilde{f} : \mathbb{R}^m \underset{op}{\supset} \tilde{X} \to \mathbb{R}^k - C^r\text{-гладкое.} \\ g \in C^r \implies g = \tilde{g},\ \tilde{g} : \mathbb{R}^k \underset{op}{\supset} \tilde{Y} \to \mathbb{R}^m - C^r\text{-гладкое.} \end{cases}$$

$$\mathrm{dom}(\tilde{\mathrm{g}} \circ \tilde{\mathrm{f}}) = \mathrm{dom}(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(\mathrm{dom}(\tilde{g})) = \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$$

$\tilde{X}$ - открытое, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$ - открытое, как прообраз открытого множества $\tilde{Y}$ при непрерывном отображении.
Ясно, что $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ - сужение $\mathrm{dom}(g \circ f)$. □

Теорема 4 (Лемма о классе гладкости обратного отображения)**:** Пусть $U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$.

$U \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} V,\ f, g$ - непрерывны и взаимно обратны. Если $f \in C^r(U)$ и $\forall x \in U\ df(x)$ - невырожден: $\det(Df(x)) \neq 0$, то $g \in C^r(U)$.

Доказательство. При $r > 0$ g дифференциируема в $\forall y \in V$ по правилу дифференциирования обратного отображения. В матрицах Якоби:

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U, \text{ причем } f(x) = y,\ x = g(y)$$

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}, \quad \text{цепочка преобразований } y \to g(y) \to Df(g(y)) \to (Df(g(y)))^{-1}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y),\ w \text{ - отображение обращения матрицы.}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y),\ \text{причем } w - C^\infty, Df - C^{r-1}, g(y) - \text{дифференциируема}$$

g дифференциируема $\implies$ Dg тоже дифференциируема как композиция $\implies$ все производные g дифференциируемы $\implies Dg \in C^1 \implies g \in C^2 \implies \ldots \implies g \in C^{r-1} \implies Dg \in C^{r-1} \implies g \in C^r$. □

Лемма Пусть $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$, а $f : U \to \mathbb{R}^m$ такое, что отображение $f(x) - x = \lambda(x)$ сжимающее, то есть $\forall x_1, x_2 \in U \, |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| \le \lambda < 1$. Тогда:

1. $f(U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$

2. Сужение $f : U \to f(U)$ обратимо и обратное отображение - липшицево с константой $\frac{1}{1-\lambda}$.

Доказательство. Докажем пункт 2:
f инъективно: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) - x_1 = \lambda(x_1) \\ f(x_2) - x_2 = \lambda(x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) = \lambda(x_1) + x_1 \\ f(x_2) = \lambda(x_2) + x_2 \end{cases}$$

Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\lambda(x_1) - \lambda(x_2) + (x_1 - x_2)| \le |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| + |x_1 - x_2| \, \lambda \cdot |x_1 - x_2| + |x_1 - x_2| = (\lambda + 1) \, |x_1 - x_2|$$

В силу неравенства треугольника:

$$(1 - \lambda) \, |x_1 - x_2| \le |f(x_1) - f(x_2)| \le (1 + \lambda) \, |x_1 - x_2|$$

Инъективность есть, а сужение $f : U \to f(U)$ - биективно, значит обратимо. Поймем, что обратное отображение будет $\frac{1}{1-\lambda}$ липшицево. Пусть $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \in f(U)$ $\begin{cases} x_1 = g(y_1) \\ x_2 = g(y_2) \end{cases}$

$$|y_1 - y_2| \ge (1 - \lambda) \, |g(y_1) - g(y_2)| \implies \frac{1}{1 - \lambda} \, |y_1 - y_2| \ge g(y_1) - g(y_2)$$

Пункт 2 доказан.
Пусть теперь $q \in f(U)$. Рассмотрим $p \in U \mid q = f(p)$. U открыто, а значит $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subset U$, где $B_\varepsilon(p)$ - открытый шар радиуса ε с центром в точке p. Мы покажем, что множество $f(U)$ содержит шар с центром в q радиуса $(1 - \lambda)\varepsilon$.
Пусть $y \in B_{\varepsilon(1-\lambda)}(q)$, т.е. $|q - y| < (1 - \lambda)\varepsilon$. Надо показать, что $\exists x$ такой, что $|p - x| < \varepsilon, \; f(x) = y$. Воспользуемся теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения. Перепишем условие:

$$f(x) = y \implies y - f(x) = 0 \implies y - f(x) + x = x$$

Положим

$$\varphi(x) = y - f(x) + x = y - \lambda(x)$$

Заметим, что $\varphi(x)$ является сжимающим и покажем, что φ переводит $B_\varepsilon(p)$ в себя.

$$x \in B_\varepsilon(p) \implies |x - p| \le \varepsilon \implies |\varphi(x) - \varphi(p)| \le \lambda\varepsilon$$

$$|\varphi(x) - p| = |(\varphi(x) - \varphi(p)) + (\varphi(p) - p)| \le |\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p|$$

Первое слагаемое, как мы уже доказали, не превышает $\lambda\varepsilon$. Преобразуем второе:

$$|\varphi(p) - p| = |y - f(p) + p - p| = |y - f(p)| = |y - q| \le (1 - \lambda)\varepsilon$$

Тогда:

$$|\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p| \le \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

Значит $|\varphi(x) - p| \le \varepsilon$ и $\varphi(x) \in B_\varepsilon(p) \mid x \in B_\varepsilon(p)$. $\square$

Теорема 5: о локальной обратимости
Пусть $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ f: U \to \mathbb{R}^m - C^r$-гладкое отображение, $r \geq 1$. Пусть $p \in U$. Если $df(p): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - невырожден, то у точки p имеется окрестность U_1 такая, что $f(U_1) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$ и сужение $f|_{U_1}: U_1 \to f(U_1)$ является C^r-изоморфизмом (т.е. обратное отображение тоже принадлижети классу C^r).

Доказательство. Считаем сначала, что $\forall v\ df(p)\langle v\rangle = v$, т.е. $df(p): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - тождественное отображение, $Df(p) = E$. Рассмотрим отображение $h(x) = f(x) - x$:

$$dh(x) = df(x) - dx, \text{ при x = p: } dh(p) = dx - dx = 0 (Dh(x) = E - E = 0)$$

Все частные производные отображения h в точке p равны 0. Значит, в силу их непрерывности в p, у точки p имеется некоторый шарик U с центром в p такой, что $\forall x \in U$ все эти производные ограничены, например, $\frac{1}{2} < 1$.

$$\forall x_1, x_2 \in U_1\ \ |h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{1}{2}$$

По предыдущей лемме $f(U_1)$ открыто в $\mathbb{R}^m$ и $f|_{U_1} \to f(U_1)$ обратимо, обратное отображение непрерывно. По теореме о классе гладкости обратного отображения оно (f^{-1}) имеет нужный класс. Заметим, что в той лемме необходимо, чтобы $\forall x \in U_1\ \det(Df(x)) \neq 0$, поэтому когда мы выбираем окрестность U_1 надо это тоже потребовать:

$$Df(p) = E,\ \det(E) = 1 \neq 0 \text{ и в некоторой окрестности точки } p\ \det(Df(x)) = 0$$

Мы доказали теорему для $Df(p) = E$. Пусть теперь $Df(p) = A,\ \det(A) \neq 0 \implies$ значит существует обратная матрица A^{-1}, тоже невырожденная. Пусть $\tilde{f} = A^{-1} f(x)$ - композиция линейного отображения и отображения f. Для $\tilde{f}$ выполнена теорема, ведь $D\tilde{f}(p) = A^{-1}Df(p) = A^{-1}A = E$. Значит $\exists \tilde{U} \ni p \mid \tilde{f}: \tilde{U} \to \tilde{f}(\tilde{U})$ - C^r-изоморфизм и $\tilde{f}(\tilde{U}) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$.

$f(x) = A\tilde{f}(x)$ - композиция двух "хороших"отображений и $f(\tilde{U}) = A \cdot \tilde{f}(\tilde{U})$ - образ открытого множества под действием линейного изоморфизма A - тоже открыт в $\mathbb{R}^k$. $\square$

Теорема 6 (о неявной функции)**:** Пусть $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ и $f: U \to \mathbb{R}^l$ - C^r-отображение, $r \geq 1$.

Функция f представляет собой набор:

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l) \end{pmatrix}$$

Пусть некоторая точка $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) \in U$ и $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_0})) \neq 0,\ f(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}$$

Множество $M = \{(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \Omega \mid f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0\}$, где Ω - окрестность точки $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$. Точка $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}) \in M,\ \det(\frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})) \neq 0$
Тогда у $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$ имеется такая окрестность Ω, что $\Omega \cap M$ - график некоторой C^r-функции α, такой, что $\alpha: \Omega_x \to \mathbb{R}^l$ и

$$D\alpha(x) = (\frac{\partial f}{\partial y}(x, \alpha(x)))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha(x))$$

Доказательство. Рассмотрим новое отображение

$$\tilde{f} : (x,y) \to (x,y) \equiv \mathbb{R}^{k+l} \supset \Omega \to \mathbb{R}^{k+l},\ x, y \text{ - векторы размера } k \text{ и } l \text{ соответственно}$$

Определим $\tilde{f}(x,y) = (x, f(x,y))$. В матричном виде:

$$\tilde{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ f_1(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l) \\ \vdots \\ f_l(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l) \end{pmatrix}$$

Тогда $D\tilde{f}$ - блочная матрица вида:

$$D\tilde{f}(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right)$$

Ее определитель в этом случае $1 \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \neq 0$.
По теореме о локальной обратимости у (x_0, y_0) существует окрестность $\Omega \underset{op}{\subset} R^k \times R^l$ такая, что отображение $\tilde{f}|_\Omega \colon \Omega \to \tilde{f}(U) \subset \mathbb{R}^{k+l}$ является C^r-изоморфизмом. Пусть $g : \tilde{f}(\Omega) \to \Omega$ - обратное отображение.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{g}{\overset{f}{\leftrightarrows}} \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

Функция g задана как $g = \begin{cases} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{cases}$, причем $g_2(x,y) = x$.
Положим $\alpha(x) = g_2(x,0)$. Надо проверить, что $f(x,\alpha(x)) = 0$.

$$(x, f(x,\alpha(x))) = (x,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{f}(x,y) = (x,0) \implies (x,y) = g(x,0) \implies (x,y) = (x, g_2(x,0)) \implies y = g_2(x,0)$$

Поскольку $\alpha(x) = g_2(x,0)$ - все выполнено. □

Опр 12. Регулярные точки:
Пусть $f \in D(p),\ f : U \to \mathbb{R}^k,\ U \subset \mathbb{R}^n$. Точка p называется регулярной, если $df(p)$ - сюръективное отображение. Это условие эквивалентно тому, что $\mathrm{rank}(Df(p)) = k$ (т.е. в $Df(p)$ есть k линейно независимых строк).

Матрица $Df(p)$ имеет вид

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{x_n} \end{pmatrix} \text{ если } n < k \text{ то не существует регулярных точек}$$

Теорема 7 (Лемма о регулярном дополнении)**:** Пусть $f \in C^r, r > 0, f : \Omega \to \mathbb{R}^k, \Omega \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$ и f регулярна в точке p.
Тогда $\exists$ функции $(g_1,\dots,g_{n-k}) = \overline{g} - C^r$-гладкие, отображающе $\Omega \to \mathbb{R}^{n-k}$, такие, что отображение $(f,g) : \Omega \to \mathbb{R}^{n=n-k+k}$ регулярно в точке p и, в частности, обратимо в некоторой окрестности точки p.

Доказательство.
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & \frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k\times n}$$
Из алгебры знаем: $\exists k$ линейно независимых столбцов (можем считать, что первые k штук). Дополним нижнюю часть матрицы фрагментом
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_k} & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n-k\times n}$$
Итоговая матрица будет иметь размеры $n \times n$.
Пусть теперь $g(x_1, x_2)$ такое, что $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$. И положим:
$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = x_{k+1} \\ \vdots \\ g_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = x_n \end{cases}$$
Тогда матрица $n \times n$ будет иметь вид:
$$\left(\begin{array}{c|c} k\times k, det \neq 0 & \text{неважно что} \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$
Ее определитель $\det = \det(\frac{\partial f_{1\dots k}}{\partial x_{1\dots k}}) \cdot \det E \neq 0$ А обратимость следует из невырожденности. □

Теорема 8 (Лемма о локальном наложении)**:** Пусть $f \in C^r, r > 1, f : U \to \mathbb{R}^k, U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$ - регуляна в точке p.
Тогда $f(p)$ - внутренняя точка множества $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$. То есть:
$$\exists \varepsilon > 0 \mid \varepsilon\text{-шар } \overset{o}{B}_\varepsilon(f(p)) \text{ целиком содержится в } f(\Omega)$$

Доказательство. По предыдущей лемме $\exists \overline{g} : \Omega \to \mathrm{R}^{n-k}$ такое, что отображение $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ регулярно (и, в частности, локально обратимо в p).
По теореме о локальной обратимости $\exists$ окрестность $p \in U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$ такая, что $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$.
Образ множества U, т.е. множество точек вида $(f_1(\overline{x}), \dots, f_k(\overline{x}), g_1(\overline{x}), \dots, g_{n-k}(\overline{x})) \in \mathbb{R}^n, \overline{x} \in U$ открыт в $\mathbb{R}^n$.

Тогда пользуясь тем, что при проекции образы открытых множеств открыты, получаем, что
$$\text{Множество точек из проекций на первые } k \text{ координат монжества } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(U)\text{:} \ \begin{pmatrix} f_1(\overline{x}) \\ \dots \\ f_k(\overline{x}) \end{pmatrix} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$$

Проверим теперь, что если $A \underset{op}{\subset} X \times Y$, то $\Pi(A) \underset{op}{\subset} X$, Π - проекция.

Берем точку $x_0 \in \Pi(A)$. Существует точка $(x_0, y_0) \in A$, значит $\exists$ шарик с центром в (x_0, y_0) целиком лежащий в A. Ясно, что проекция этого шарика накрывает ε-шарик в X с центром в x_0. □

3 Многообразия в $\mathbb{R}^n$

3.1 Многообразия

Опр 13. Пусть M - метрическое пространство (необязательно подмножество в $\mathbb{R}^n$). M является k-мерным многообразием без края, если $\forall p \in M$ у точки p $\exists$ окрестность $U_p \underset{op}{\subset} M$ гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^k$.

Опр 14. Гомеоморфизм - непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно.

Теорема (Брауэра об инвариантности области (без док-ва).)**:** Пусть $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ и $f : U \to \mathbb{R}^k$ - непрерывна и инъективна.
Тогда $f(U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ и $f^{-1} : f(U) \to U$ - тоже непрерывна.

Опр 15. M - k-мерное C^r-многобразие в R^n, если:

$$\forall p \in M \ \exists U \in \mathcal{N}(p),\ U \underset{op}{\subset} M \text{ такая, что } U \overset{C^r}{\cong} \text{ открытому шару в } \mathbb{R}^k$$

Утв. Предыдущее утверждение эквивалентно требованиям:

1. $$\exists U \in \mathcal{N}(p)\ U \underset{op}{\subset} M \text{ такая, что } U \cong \text{ открытому подмножеству } \omega \in \mathbb{R}^k$$

2. $$\exists U \in \mathcal{N}(p)\ U \underset{op}{\subset} M \text{ такая, что } U \cong \mathbb{R}^k$$

Теорема (1 о регулярных решениях)**:** Пусть $\Omega \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n,\ f_1, \dots, f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ - C^r гладкие функции. Непустое множество M задано как

$$M = \{\overline{x} \in \Omega \mid \begin{matrix} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{matrix} \},\ \text{где } \overline{x} \text{ - регулярная точка}$$

То есть $\operatorname{rank}\frac{\partial f_{1\dots k}}{\partial x_{1\dots n}} = k$ Тогда M - $n-k$-мерное C^r-многобразие без края.

Доказательство. Пусть $p \in M$. Можно считать, что последние k столбцов линейно независимы, то есть $\left|\frac{\partial f_{1\dots k}}{\partial x_{n-k+1\dots n}}\right| \neq 0$ - определитель матрицы Якоби. По теореме о неявной функции существует такая окрестность $\tilde{U}$ точки p, $\tilde{U} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$, такая, что $\tilde{U} \cap M$ - график некоторой функции:

$$x_{n-k+1\dots n} = g(x_{1\dots n-k})$$

Осталось показать, что график функции является многобразием $U \subset \mathbb{R}^k$.

Лемма График любого C^r отображения g, определенного на открытом подмножестве - это многобразие, гомеоморфное U.

Доказательство.

$$X \overset{g}{\to} Y$$

График $\Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in X\}$

$$U \overset{g}{\to} \Gamma_g \ \ - C^r \text{ отображение}$$

$$x \overset{g}{\to} (x, g(x)) \overset{g^{-1} - \text{проекция на X}}{\to} X$$

$\square$

По лемме теорема доказана. $\square$

Замечание: Если у градиента функции в точке p хотя бы одна координата не равна 0, то p - регулярная.

Утв. $X \overset{C^r}{\cong} Y$ - если X - C^r-многобразие, то Y - тоже.

Доказательство. Пусть $\psi : X \to Y$ - C^r-изоморфизм. Пусть $q \in Y, p = \psi^{-1}(q)$, по условию существует открытая окрестность V точки p, C^r-изоморфная $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$.

$$U \overset{\varphi}{\cong} V \overset{\psi}{\cong} \psi(V) \underset{op}{\subset} Y$$

$\psi(V)$ - прообраз V под действием $\psi^{-1}, V = \psi^{-1}(\psi(V))$
$\psi \circ \varphi$ - C^r-изоморфизм U на окрестность точки q в X. $\square$

Лемма (о локальном вложении) Пусть $f = \begin{matrix} f_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_k) \end{matrix}$, $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k, f : U \to \mathbb{R}^n$.
Если точка $\overline{x_0} \in U$ такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = k$, то у точки x_0 существует окрестность $\tilde{U}$ такая, что $f(\tilde{U})$ - k-мерное многобразие.

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Переставим f (если надо) и считаем первые k строк невырожденными в x_0. Рассмотрим урезанное отображение $\psi = (\begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{matrix}) : U \to \mathbb{R}^k$
По теореме о локальной обратимости существует окрестность $\tilde{U} \ni x_0$, такая, что $\psi(\tilde{U}) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ и $\psi|_{\tilde{U}} \colon \tilde{U} \to \psi(\tilde{U})$ - C^r-изоморфизм.

$$\psi(\tilde{U}) \overset{\psi^{-1}}{\to} \tilde{U}$$

$\tilde{U}$ в свою очередь, отображается в $f(\tilde{U})$ данным отображением:

$$\begin{matrix} f_1(\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_k}) \\ \vdots \\ f_k(\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_k}) \\ f_{\text{остальные индексы}}(\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_k}) \end{matrix}$$

Причем $f_1, \dots, f_k = (x_1, \dots, x_k)$.

$$f_{\text{остальные}}(\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_k}) = f_{\text{остальные}} \circ \psi(x_1, \dots, x_k)$$

$f(\tilde{U}) = \{(\overline{x}, \psi(\overline{x})) \mid \overline{x} \in \tilde{U}\}$ - график отображения ψ, то есть по соответствующей лемме о графике это многобразие. $\square$

Опр 16. M - многобразие (с краем, а может и без), если $\forall p \in M\ \exists U \underset{op}{\subset} M$ C^r-изоморфно

1. $\tilde{U} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$
2. $\mathbb{R}^k_+ = \{x_1, \ldots, x_k \mid x_1 \geq 0\}$

Опр 17. Точка $p \in \partial M$ (принадлежит краю), если у точки $p \nexists$ окрестности первого типа.

Лемма (о крае полупространства) $\mathbb{R}^k_+$ - многообразие с краем, $\partial\mathbb{R}^k_+ = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_1 = 0\}$. При этом $\mathbb{R}^k_+$ называется полупространством.

Доказательство. $\mathbb{R}^k_+$ является многобразием по опрделению, ведь любая ее точка гарантированно имеет окрестность, открытую в $\mathbb{R}^k_+$, например, в качестве такой окрестности можно взять само $\mathbb{R}^k_+$.

Пусть $x_1 > 0$, тогда очевидно, что множество $\mathbb{R}^k_+ \cap \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_1 > 0\}$ открытое в $\mathbb{R}^k_+$ является окрестностью точки p и поэтому $p \in M \backslash \partial M$

Пусть $x_1 = 0$. Ясно, что никакая окрестность точки p в $\mathbb{R}^k_+$ не является открытым множеством в $\mathbb{R}^k_+$. Однако, нам было необходимо более сложное утверждение, а именно - нужно было показать, что U не может быть C^r-изоморфно открытому подмножеству $\Omega \in \mathbb{R}^k_+$. Пусть $r > 0$ в C^r, по теореме о локальной обратимости если $\Omega \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ и $\psi : \Omega \to \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$ C^r-изоморфизм, то $\psi(\Omega) \underset{op}{\subset} \mathrm{R}^k$.

И наконец, $r \neq 0$ по теореме Брауэра об инвариантности области. $\square$

Лемма (об изоморфизме многообразий) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ - C^r-многобразие. Отображение $\varphi : X \overset{C^r}{\cong} Y \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\varphi(\partial X) = \partial Y$. Тогда Y - тоже C^r-многообразие.

Более "стильная"© формулировка: $\varphi(\partial X) = \partial(\varphi(X))$

Доказательство. Пусть $q \in Y$. Пусть $p = \varphi^{-1}(q) \in X$. Если $p \in X \backslash \partial X$, то $\exists U \underset{op}{\subset} X \mid p \in U \overset{\psi}{\cong} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$, тогда $\varphi(U) = \varphi \circ \psi^{-1}$ - C^r-изоморфизм как композиция. Т.е. мы нашли окрестность точки $q \in Y$, которая C^r-изоморфна открытому в $\mathbb{R}^k$ множеству.

Пусть $p \in \partial X$, тогда <u>не существует</u> окрестности $U \underset{op}{\subset} X$, C^r-изоморфной подмножеству W, открытому в $\mathbb{R}^k$.
Если предположить, что $q \in \partial Y$, то $\exists V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ и $\psi : V \underset{\cong}{\to} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$. Тогда $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(W) \underset{op}{\subset} X$ - открытая окрестность точки $p \in X$, а композиция - это C^r-изоморфизм W, чего не может быть по условию. Получаем противоречие. $\square$

Лемма (об открытых частях многобразия) X - C^r-многобразие в $\mathbb{R}^n$, $U \underset{op}{\subset} X$, тогда U - тоже C^r-многобразие той же размерности, а $\partial U = U \cap \partial X$

Доказательство. Пусть $p \in X$, тогда у p существует окрестность $V \underset{op}{\subset} X$, такая, что $V \overset{\varphi}{\cong}$ открытому подмножеству W в $\mathbb{R}^k$ или $\mathbb{R}^k_+$.
Если $p \in U$, то множество $V \cap U \underset{op}{\subset} U$ как пересечение открытых (лемма из 2 семестра 1 курса о пересечении открытых метрических пространств).

$$\varphi(U \cap V) \underset{op}{\subset} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k \text{ или } \mathbb{R}^k_+ \implies \varphi(V \cap U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k \text{ или } \mathbb{R}^k_+$$

Пусть $p \in U$. Если $p \notin \partial X$, то W в предыдущих строчках можно выбрать первого типа ($W \in \mathbb{R}^k$). Значит $p \notin \partial U$.

Если $p \notin \partial U$, тогда (поскольку мы уже доказали, что U - многообразие) $\exists \Omega \underset{op}{\subset} U \mid p \in \Omega \overset{\psi}{\cong} A \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$. Но посольку $U \underset{op}{\subset} X$, выполнено утверждение $\Omega \underset{op}{\subset} X \implies p \notin \partial X$. □

Теорема 9 (о крае многообразия)**:** Пусть X - C^r-многообразие размерности k. Тогда если его край ∂X непуст, то он является C^r-многообразием без края размерности $k-1$ ($\partial\partial X = \varnothing$)

Доказательство. Пусть $p \in \partial X$. Надо показать, что $\exists U \underset{op}{\subset} \partial X$, такое, что $U \cong$ открытому подмножеству W в $\mathbb{R}^{k-1}$.

По условию у точки p существует открытая в X окрестность $\tilde{U} \underset{op}{\subset} X$, такая, что $\tilde{U} \overset{\varphi}{\cong} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k_+$.

$$p \in \partial X \implies p \in \partial \tilde{U} (\text{ по предыдущей лемме}) \implies$$
$$\implies \varphi(p) \in \partial \tilde{W} \implies \text{первая координата точки } \varphi(p) \text{ равна } 0$$

$$\tilde{W} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k_+ \implies \tilde{W} \cap \{x_1, \ldots, x_k \mid x_1 = 0\} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k \text{ - по лемме об открытых частях подпространства}$$

Заметим, что пересечение этих множест это W, а $\{x_1, \ldots, x_k \mid x_1 = 0\} = \mathbb{R}^{k-1}$ $\varphi^{-1}(W) \underset{op}{\subset} \partial X$ (как прообраз открытого), значит $\varphi^{-1}(W)$ - искомая окрестность U. □

Теорема 10 (2 о регулярных решениях)**:** Пусть $\Omega \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n,\ h, f_1, \ldots, f_k : \Omega \to \mathbb{R}$.

Множество M регулярных решений системы

$$\begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

является $n-k$-мерным C^r-гладким многообразием, край которого задается уравнением $\begin{cases} h(x) = 0 \\ f_i(x) = 0 \end{cases}$

Опр 18. Пусть p - решение системы (4).

- Если $h(p) > 0$ и $\nabla f_i(p)$ линейно независимы, то p - регулярна
- Если $h(p) = 0$ и $\nabla h, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_k$ линейно независимы, то p - регулярна

Доказательство. Пусть $p \in M$

1. Если $h(p) > 0$, то у точки p существует окрестность $W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$, в которой $h(W) > 0$. Множество

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases} = M \cap W \underset{op}{\subset} M \tag{5}$$

Итак, множество $M \cap W$ совпадает с множеством тех точек из $\Omega \cap W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$, где $\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_k = 0 \end{cases}$ - многообразие размерности $n-k$

2. Если $h(p) = 0$,
то продолжим наш набор отображений и получим набор $\varphi = (h, f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{n-1})$ так, чтобы n штук функций были регулярными в окрестности U точки p (это разрешается сделать в силу леммы о регулярном дополнении).

$$M \cap U = \{x \in M \mid x \in U\}, \text{ причем } x \in M \equiv \begin{cases} h(x) \geq= 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Отображение } \varphi = \begin{matrix} h \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{matrix} : U \to \varphi(U) C^r\text{-изоморфизм}$$

$\varphi(U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$ по лемме о локальной обратимости и

$$\varphi(M \cap U) = (y_1, \ldots, y_n) = \overline{y} \in \varphi(U) = \begin{pmatrix} y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0 \\ \vdots \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ где на } y_{k+1} \ldots y_{n-1} \text{ не ограничений}$$

$-$ это некоторое $n-k$ мерное подпространство Q, пересеченное с $\varphi(U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n$

Тогда $Q \cap \varphi(U) \underset{op}{\subset} Q$

□

3.2 Касательные пространства

Опр 19. Пусть $p \in X \subset \mathbb{R}^n$. Вектор v называется касательным вектором в точке p к множеству X ($v \in T_p(X)$), если существует $T \subset [0, \varepsilon]$, содержащая 0, такая, что 0 - предельная точка множества T и $\exists$ отображение $\gamma : T \to X$ такое, что $\gamma(0) = p, \gamma'_T(0) = v$. При этом $\gamma'_T = \lim_{t \to 0|_T} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$

На бытовом уровне (человеческий перевод):
v - касательный вектор к в p к X, если из точки p возможно двигаться по X с начальной скоростью v

В таком случае $T_p(X)$ называется касательным пространством к X в p и **обязательно** проходит через нулевую точку пространства. А чтобы $T_p(X)$ проходило через точку p - придумали специальное множество $K_p(X) = p + T_p(X)$, называемую контингенцией (чтобы сложение точки и пространства не смущало читателя - считайте p вектором из нулевой точки пространства в p).

Теорема 11: Свойства $T_p(X)$:

1. Пусть $p \in X \subset \mathbb{R}^n, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. v - касательный вектор $\iff$ $\exists$ последовательность точек $x_n \to p$, такая, что $\frac{x_n - p}{|x_n - p|} \to \frac{v}{|v|}$ (угол между векторами $x_n - p$ и v стремится к 0).
2. Ноль всегда $\in T_p(X)$
3. $T_p(X)$ - замкнутое пространство
4. $T_p(X)$ - конус с вершиной в 0, т.е. $v \in T_p(X) \implies \forall \lambda \geq 0 \ \lambda v \in T_p(X)$
5. $p \in A \subset B \implies T_p(A) \subset T_p(B)$
6. Локальность:
$$p \in X, U - \text{ окрестность } p \text{ в } X \implies T_p(X) = T_p(X)$$

Утв. $v \in T_p(X) \iff \exists x_n \in X, \ x_n \to p$ и $t_n > 0, t_n \to 0$ так, что
$$\frac{x_n - p}{t_n} \underset{n\to\infty}{\to} v$$

Доказательство. Слева направо ($\implies$):

Пусть $v \in T_p(X)$. Выберем T и φ как в определении. Т.к. 0 - предельная точка T (из определения), то $\exists t_n \in T, t_n \to 0$, положим $x_n = \varphi(t_n)$. Вот так вот раз-раз и готово. Справа налево ($\impliedby$):

Пусть есть $x_n \in X, t_n \to 0$ и $\frac{x_n - p}{t_n} \to v$. Положим $T = \{0, t_1, t_2, \ldots\}, \varphi(t_n)$ приравняем к x_n. □

Опр 20. $K \subset \mathbb{R}^n$ называется полупространством размерности $k \leq n$, если $\exists e_1, \ldots, e_k$ - линейно независимый набор из $\mathbb{R}^n$, такой, что $K = \{(t_1 e_1 + \ldots + t_k e_k) \mid t_1 \geq 0, t_{>1} - \text{любые}\}$

Любое векторное полупространство в $\mathbb{R}^n$ - замкнутый конус с вершиной в любой точке границы.

3.3 Дифференциал гладкого отображения

Дифференциал - отображение касательных пространств. Пусть $\mathbb{R}^n \supset X \overset{\varphi}{\to} Y \subset \mathbb{R}^n$.

Опр 21. $p \in T_p(X), \varphi - C^r$-гладкое отображение.
$$d\varphi(p) : T_p(X) \to T_{\varphi(p)}(Y) \text{ определим следующим образом:}$$
$$d\varphi(p)\langle v \rangle = d\tilde{\varphi}(p)\langle v \rangle, \text{ где } \tilde{\varphi} - C^r\text{-продолжение отображения } \varphi \text{ на окрестность множества}$$

Покажем корректность определения:

Доказательство. Почему значение дифференциала не зависит от выбора φ, почему образ лежит в $T_q(Y), q = \varphi(p)$?

Пусть $v \in T_p(X), v = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - p}{t_n}$. Покажем, что $d\varphi(p)\langle v \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(p)}{t_n}$. Пусть $\tilde{\varphi}$ - некоторое C^r-продолжение отображения φ.
$$p, x_n \in X \implies \varphi(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n), \tilde{(\varphi)}(p) = \varphi(p)$$
$$\varphi(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n) = \tilde{\varphi}(p) + d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|) \text{ - из определения } d\tilde{\varphi}$$
$$\frac{\varphi(x_n) - \varphi(p)}{t_n} = \frac{\tilde{\varphi}(x_n) - \tilde{\varphi}(p)}{t_n} = \frac{d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle}{t_n} + o(\frac{x_n - p}{t_n})$$
Отображене $d\tilde{\varphi}(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линейно, поэтому $\frac{d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle \frac{x_n - p}{t_n} \rangle$

Итак, $\frac{\varphi(x_n) - q}{t_n} \underset{n\to\infty}{=} d\tilde{\varphi}(p)\langle \frac{x_n - p}{t_n} \rangle + o(\frac{x_n - p}{t_n})$. Поскольку $\frac{x_n - p}{t_n} \underset{n\to\infty}{\to} v$, то
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_n) - q}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle v \rangle + o(\ldots)$$
□

Свойства дифференциала:

$$p \in X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

1. Композиция:
$$d(\psi \circ \varphi)(p) : T_p(X) \to T_{\psi\circ\varphi(p)}(Z)$$
$$d(\psi \circ \varphi)(p) = d\psi(\varphi(p)) \circ d\varphi(p), \underset{\forall v \in T_p(X)}{=} \forall v \in T_p(X)\ d\psi(\varphi(p))\langle d\varphi(p)\langle v\rangle\rangle$$

2. Если $\varphi : X \to Y$ – C^r-изоморфизм, то $T_p(X)$ и $T_q(Y)$ линейно изоморфны ($\exists$ линейный изоморфизм этих пространств).

Утв. Пусть M - k-мерное гладкое множество в $\mathbb{R}^n$.

1. Если $p \in M \backslash \partial M$, то $T_p(M)$ - k-мерное векторное пространство.
2. Если $p \in \partial M$, то $T_p(M)$ - k-мерное полупространство.

Доказательство. Было утверждение: $\varphi : (p \in)A \cong B$, тогда $T_p(A) \overset{d\varphi(p)}{\cong} T_{\varphi(p)}(B)$ - линейно изоморфны.

1. Пусть $\exists U \underset{op}{\subset} M, p \in U$ и $\exists \varphi : U \cong \mathbb{R}^k$. Тогда $d\varphi(p) : T_p(U) \to T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$. А по свойству локальности касательных пространств $T_p(U) = T_p(M)$.
2. Пусть $\exists U \underset{op}{\subset} M, p \in U$ и $\varphi : U \cong \mathbb{R}^k_+, \varphi(p) \in \partial\mathbb{R}^k_+$
$$d\varphi(p) : T_p(M) \overset{\text{линейно}}{\cong} T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k_+) = \mathbb{R}^k_+$$

□

Теорема 12 (о касательном пространстве к регулярному решению систему уравнений)**:** Пусть p - регулярное решение системы уравнений $\begin{matrix} f_1(\overline{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_k(\overline{x}) = 0 \end{matrix}$, f_i - C^r-отображение $\Omega \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n \to R$. Точка p - регулярная $\iff$ $rank(df_1, \dots, df_k) = k$ - матрица Якоби, в которой дифференциал - это вектор столбец матрицы.

Тогда $T_p(M)$ (M - множество всех регулярных решений) - это ортогональное дополнение к $\nabla f_1(p) \oplus \ldots \oplus \nabla f_k(p)$ = множеству решений линейной системы уравнений $\begin{matrix} df_1(p)\langle v\rangle = 0 \\ \vdots \\ df_k(p)\langle v\rangle = 0 \end{matrix}$

Напоминание: Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (не обязательно векторное пространство). $V^\perp$(орт. дополнение) = $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in V\ u \perp v\}$

Утв. $V^\perp$ - всегда векторное подпространство.

Утв. V - векторно пространство $\implies$ $V^\perp$ имеет дополнительную размерность (в смысле дополнения к пространству):
$$\dim V = k \implies \dim V^\perp = n - k$$

Доказательство. У точки p имеется окрестность $U \underset{op}{\subset} M$, в которой все решения регулярны $\implies$ U - $(n-k)$-мерное многообразие по теореме о регулярных решениях. Тогда $T_p(M) = T_p(U)$ - $(n-k)$-мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$

Лемма Пусть $p \in X$ - произвольное множество $\subset \mathbb{R}^n$, $g|_X = const$ - постоянная на множестве гладкая функция. Тогда $dg(p) : T_p(X) \to \mathbb{R}$ - нулевое (зануляющее) отображение.

Доказательство. Пусть $v \neq 0$ из $T_p(X)$. $\exists x_n \to p,\ t_n \searrow 0,\ \frac{x_n - p}{t_n} \to v$

$$dg(p)\langle v\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(p)}{t_n} = \frac{0}{t_n} = 0$$

$\square$

$$f_i|_u \equiv 0 \implies df_i(p)\langle v\rangle = 0\ \forall v \in T_p(U) = T_p(M)$$

Помним: $df(p)\langle v\rangle = (\nabla f, v) = 0$. Тогда ясно, что $\nabla f_i(p) \perp v\ \forall v \in T_p(U) = T_p(M)$.

Осталось доказать, что если $v\perp$ всем градиентам f_i, то $v \in T_p(M)$:
$\nabla f_1, \ldots, \nabla f_k(p)$ - линейно независимы как строки матрицы Якоби ранга k. v - решене линеаризованной системы $(\nabla f, v) = 0$ (помним, что градиент f это матрица из градиентов f_i) Эта система имеет ранг k - значит множество ее решений это $(n-k)$-мерное векторное пространство W. Но мы знаем, что множество $T_p(M)$ - тоже $(n-k)$-мерное векторное подпространство и уже доказали, что $T_p(M) \subset W$.

$$\dim T_p(M) = \dim W \text{ и } T_p(M) \subset W \implies T_p(M) = W$$

$\square$

3.4 Условные экстремумы

Лемма (о не-максимуме) Пусть $p \in X \subset \mathbb{R}^n,\ g : X \to \mathbb{R}$ - гладкая функция.
Если $\exists v \in T_p(X)$ такое, что $df(p)\langle v\rangle > 0$, то p - не локальный максимум.

Доказательство. Пусть v - вектор из условия. Тогда $\exists x_n \in X,\ t_n \searrow 0,\ \frac{x_n - p}{t_n} \to v$
Знаем, что $dg(p)\langle v\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)-g(p)}{t_n} > 0 \implies$ числитель больше 0 при $n \to \infty$, значит $g(x_n) > g(p) \implies p$ - не локальный максимум. $\square$

Утв. (Следствие) Если X - многообразие и $p \in X \backslash \partial X$, то p - экстремум $g \implies dg(P)|_{T_p(X)} \equiv 0$

Доказательство. Если $dg(p)|_{T_p(X)} \neq 0$, то $\exists v \in T_p(X)\ dg(p)\langle v\rangle \neq 0$, при этом $-v \in T_p(X)$ и $dg(p)\langle v\rangle$ будет другого знака. Тогда по лемме о не-экстремуме p - не экстремум. $\square$

Теорема 13 (о градиентах)**:** Пусть p - регулярное решение гладкой системы $\begin{matrix} f_1(\overline{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_k(\overline{x}) = 0 \end{matrix}$. Пусть $g : M \to \mathbb{R}$ - гладкая функция.

Если p - экстремум g на M, то $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\nabla g(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \ldots + \lambda_k \nabla f_k(p)$$

Доказательство. Мы уже знаем, что если p - экстремум, то $\nabla g(p) \perp T_p(M)$ или, что то же самое: $\nabla g(p) \in T_p(M)^\perp$.

Пространство $T_p(M)^\perp$ - линейная оболочка градиентов функций $f_1, \ldots, f_k$ в точке p ($T_p(M)^\perp$ имеет размерность $k \implies \nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_k(p)$ - его базис). $\square$

3.5 Достаточное условие экстремума

Теорема 14: Пусть $f_1, \ldots, f_k$ - C^r-дифференцируемы и точка p - регулярное решение, $p \in M = \{\overline{x} \mid f_1(\overline{x}) = 0, \ldots, f_k(\overline{x}) = 0\}$. Пусть g - C^2-гладкая функция, определенная в окрестности точки p.

Необходимое условие:
Если p - экстремум, то $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, а в p $L(p)$ равна 0:

$$L(x) = g(x) - (\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x))$$

Достаточное условие:
Если в такой точке матрица Гессе $\Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ положительно определена на $T_p(M)$, то p - строгий локальный минимум, если $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) < 0$ - локальный максимум, если же $\exists u, v \in T_p(M)$, такие, что $\Gamma\langle v\rangle > 0, \Gamma\langle u\rangle < 0$, то p - не экстремум.

Доказательство. Если p - экстремум, то необходимое условие выполнено по теореме о градиентах:

$$\exists \lambda_i :\ \nabla g(p) = \sum \lambda_i \nabla f_i(p)$$

Это на самом деле то же самое, что и $\frac{\partial L}{\partial x_1}(\overline{\lambda}, p) = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_k}(\overline{\lambda}, p) = 0$, где $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\overline{\lambda}, p) = \frac{\partial g}{\partial x_i} - (\lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_k \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}) = 0$.

При этом $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x) = -f_i(x) = 0$, так как $x \in M$.

Докажем достаточное условие:
Пусть $dL(p) = 0, \Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) > 0$ (т.е. положительно определенная матрица). Покажем, что у точки p существует окрестность в M такая, что в не $g(x) > g(p)$.

От противного: предположим, что это не так, тогда $\exists x_n \in M,\ x_n \to p, g(x_n) \leq g(p)$. Можно выбрать такую подпоследовательность x_{n_k} такую, что

$$\frac{x_{n_k} - p}{|x_{n_k} - p|} \to v\text{- единичный вектор}, v \in T_p(M)$$

Считаем, что уже x_n такая, что $\frac{x_n - p}{|x_n - p|} \to v \in T_p(M),\ g(x_n) = L(x_n)$ - на множестве M функция $g = L$, ведь $x \in M \implies f_i(x) = 0$.
Значит $L \in C^2$ (в окрестности p), мы знаем, что

$$L(x) = L(p) + dL(P)\langle x - p\rangle + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} + o(|x - p|^2)$$

В частности

$$L(x_n) - L(p) = dL(p)\langle x_n - p\rangle + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x_n - p\rangle + o(|x_n - p|^2),\ dL(p)\langle x_n - p\rangle = 0 \text{ по предположению}$$

$$g(x_n) - g(p) = L(x_n) - L(p) = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x_n - p\rangle + o(|x_n - p|^2)$$

По "противному"предположению это ≤ 0, но с другой стороны, поскольку $\Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) > 0$ для $p \in T_p(M)$, то $\exists \varepsilon > 0$ такой, что $\Gamma\langle v\rangle \geq \varepsilon \cdot |v|^2\ \ \forall v \in T_p(M)$. Это самое сложное место доказательства, вот почему это так:

$\Gamma : T_p(M) \to \mathbb{R}$ - 2-однородная функция, непрерывная на $T_p(M)$ (поскольку это многочлен). Значит на множестве W, составленном из множества единичных векторов из $T_p(M)$ эта функция имеет минимум, больший 0, поскольку множество W - компакт.
Итак, $\forall v \in T_p(M)$ если $|v| = 1 \implies \Gamma\langle v\rangle \geq \varepsilon$, тогда $\forall v \in T_p(M)$ при любой длине v $\Gamma\langle v\rangle \geq |v|^2$ (вместо единичного v взяли v не единичной длины, вторая степень вылезла в силу 2-го порядка однородности).

Итак, $0 \geq g(x_n) - g(p) = L(x_n) - L(P) = \Gamma\langle x_n - p\rangle + o(|x_n - p|^2)$. Поделим это равенство на $|x_n - p|^2$:

$$0 \geq \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} = \frac{\Gamma(p)\langle x_n - p\rangle}{|x_n - p|^2} + o(1)$$

Поскольку $o(1) \underset{x_n \to p}{\to} 0$, то:

$$\frac{\Gamma\langle x_n - p\rangle}{|x_n - p|^2} = \Gamma\langle \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle \to \Gamma\langle v\rangle \geq \varepsilon$$

Значит $0 \geq \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} \underset{n \to \infty}{>} \frac{\varepsilon}{2}$ - пополам для уверенности. Получаем противоречие, таким образом доказали достаточность.

Пусть теперь $\exists u, v \in T_p(M),\ \Gamma\langle u\rangle > 0, \Gamma\langle v\rangle < 0$
Заметим, что $u \in T_p(M) \implies \exists x_n \in M$ такая, что $\frac{x_n - p}{|x_n - p|} \to \frac{u}{|u|}$.

$$g(x_n) - g(p) = \Gamma\langle x_n - p\rangle + o(|x_n - p|^2) \text{ - поделим уравнение на } |x_n - p|^2$$

$$\frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} = \Gamma\langle \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle + o(1)$$

Первое слагаемое стремится к $\Gamma\langle \frac{u}{|u|}\rangle > 0$, а второе - к нулю. Значит при $n \to \infty$ $\frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} > 0$.
Значит, p - не максимум функции g на множестве M. Аналогично расписав для вектора v получаем, что p - не минимум.

$\square$

4 Поточечная и равномерная сходимость

Пусть X - некое множество, Y - $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^n$ или вообще любое метрическое пространство. Даны последовательность функций $f_n : X \to Y, n = 1, 2, \ldots$, и функция $f : X \to Y$.

Опр 22. Последовательность функций сходится на X к функции f, поточечно, если $\forall x \in X$ последовательность значений $f_n(x)$ сходится к f при $n \to \infty$.

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$$

Утв. 6 Из непрерывной функций f_n не всегда следует непрерывность функции f

Доказательство. Пусть $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$ и так далее. В это случае

$$\underset{\substack{n\to\infty \\ x\in[0,1]}}{lim} = \begin{cases} 0 \; x < 1 \\ 1 \; x = 1 \end{cases}$$

Видно, что $f(x)$ разрывна, хотя все f_n непрерывны. □

Опр 23. Пусть $f_n : X \to \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$.
Последовательность f_n сходится к f **равномерно** на множестве X, если

$$\underset{x\in X}{sup}\,|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \tag{6}$$

"Оригинальное"определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \mid \forall x \in X \; \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{7}$$

Доказательство. Докажем эквивалентность двух определений:

(6) $\implies$ (7):
Пусть $\varepsilon > 0$, надо подобрать n_0. По условию (6):

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \quad \underset{x\in X}{sup}\,|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Но $\forall x \in X \;\; \sup \geq |f_n(x) - f(x)|$, значит

$$\forall x \in X \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

□

Опр 24. Последовательность $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$ при любых x, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in X \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(7) $\implies$ (6): Надо доказать, что $\forall \varepsilon \; \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \; \underset{x\in X}{sup}\,|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

По условию (7):

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \; \forall x \in X \;\; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \implies sup\,|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Равномерную сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ будем обозначать $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$

Теорема 15 (Критерий отсутствия равномерной сходимости)**:** f_n не сходится равномерно к $f \iff \exists x_n \in X$ такая, что $f_n(x_n) - f(x_n) \nrightarrow 0$

Теорема 16 (о пределе пределов)**:** Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ (или $\forall$ метрического пространства).
Пусть $\begin{cases} f : X \to \mathbb{R} \\ f_n : X \to \mathbb{R} \end{cases}$, p - предельная точка X.

Предположим, что $f_n(x) \underset{x \to p}{\to} y_n$ и $y_n \underset{n \to \infty}{\to} y$. Если f_n **равномерно** сходится к f ($f_n \rightrightarrows f$) на X, то $f(x) \to y$ при $x \to p$.

$$\lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to p} f_n(x)) = \lim_{x \to p} (\lim_{n \to \infty} f_n(x))$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, надо доказать, что у точки p имеется окрестность U, такая, что $\forall x \in X \cap U \ \ |f(x) - y| \le \varepsilon$.

$$|f(x) - y| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - y_n + y_n - y| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y_n| + |y_n - y|$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности:
1:

$$\exists n_0 \mid \forall n \ge n_0 \quad |f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

3:

$$\exists n_1 \mid \forall n \ge n_1 \quad |y_n - y| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

Пусть $n_2 = \max n_0, n_1$. Тогда $\forall n \ge n_2$ выполнено и 1, и 3.
2:

$$f_{n_2}(x) \underset{x \to p}{\to} y_{n_2} \implies \exists U \text{ - окрестность точки } p\text{, такая, что } \forall x \in U \cap X \ \ |f_{n_2}(x) - y_{n_2}| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

Для таких x из $U \cap X$ выполнено:

$$|f(x) - y| \le |f(x) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - y_{n_2}| + |y_{n_2} - y| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Теорема (Следствие)**:** Если все f_n непрерывны в $p \in X$ и $f_n \rightrightarrows f$ на X, то f тоже непрерывна в точке p.
Нет, тот контрпример показывал, что просто непрерывности f_n недостаточно, а следствие утверждает, что непрерывности + равномерной сходимости уже достаточно.

Доказательство. Надо показать, что $f(x) \underset{x \to p}{\to} f(p)$. Заметим, что $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ в силу обычной поточечной сходимости. Теперь по теореме:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \implies \lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) \overset{\text{по теореме}}{=} \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to p} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} f_n(p) = f(p)$$

□

Теорема (Еще одно следствие)**:** Если все f_n непрерывны **на** X и $f_n \rightrightarrows$, то f тоже непрерывна на X.

Доказательство. Нечего тут доказывать: определение непрерывности в точке расширяем до определения непрерывности на множестве. □

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций)**:** Пусть X - множество, $f_n : X \to \mathbb{R}$.

$$\exists \text{функция } f : X \to \mathbb{R} \text{ такая, что } f_n \rightrightarrows f \text{ на } X \implies \forall \varepsilon \ \exists n_0 \mid \begin{matrix} \forall x \in X \\ \forall k, l \ge n_0 \end{matrix} \quad |f_k(x) - f_l(x)| \le \varepsilon$$

Доказательство. " $\Longleftarrow$ ":

Пусть $x \in X$. Тогда для числовой последовательности $f_n(x)$ выполнен обычный критерий Коши сходимости последовательности, поэтому $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ (обозначим $f(x)$ равной этому пределу).
Осталось показать, что f_n сходится к f равномерно. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию Коши выполнено:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \ \ |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$$

С помощью поточечной сходимости f_l к f_x можем перейти к пределу по $l \to \infty$:

$$\forall x \in X \ \forall k \geq n_0 \ \ |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

" $\Longleftarrow$ "доказано.

" $\Longrightarrow$ ":

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию

$$\exists k \geq n_0 \ \forall x \in X \, |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Имеем: если $k, l \geq n_0$, то $\forall x$ выполнено:

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Утв. (Следствие) Пространство непрерывных функций на множестве $[a, b] \subset \mathbb{R}$ полно в sup-норме. $C(x)$ - множество непрерывных функций на $x = [a, b] \to \mathbb{R}$, $\parallel f \parallel_c = \underset{x\in X}{sup}$

Доказательство. Полнота: если последовательность функций удовлетворяет критерию Коши, то есть предел $f_n \to f$ в sup-норме $\Longrightarrow \underset{x\in X}{sup} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Условие Коши для последовательностей $f_n \in C\,[a, b]$ как раз и означает, что $f_n \rightrightarrows f$ - какой-то функции. Функции f_n непрерывны и $\rightrightarrows f \implies f \in C\,[a, b]$

□

Теорема (Дини)**:** Пусть X - компакт, $f_n : X \to \mathbb{R}, f : X \to \mathbb{R}$, $f_n, f \in C(X)$.
Если f_n сходится к f на X поточечно, то сходимость равномерна.

Доказательство. Ключ к доказательству: $\forall x$ последовательность $|f_n(x) - f(x)|$ монотонно убывет к 0.
Пусть $\varepsilon > 0$. Надо понять, что:

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Положим $U_n \subset X$, $U_n = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$.

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$. В самом деле, $\forall x \forall n$ начиная с какого-то n_0 выполнено $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (поточечная сходимость из условия) и $x \in U_n \ \forall n \geq n_0$.
2. Все U_n открыты в X (по функциональному признаку - $|f_n(x) - f(x)|$ непрерывна и у нас есть неравенство).
3. X компактно $\Longrightarrow$ существует конечное подпокрытие $U_{n_1} \cup \ldots \cup U_{n_k} = X$.

Заметим, $U_n \subset U_{n+1}$, так как $|f_{n+1} - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ в силу ключа.

$$x \in U_n \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Так как

$$|f_n(x) - f(x)| \geq |f_{n+1}(x) - f(x)| \implies \text{ тоже} < \varepsilon \implies x \in U_{n+1}, U_{n+1} \supset U_n$$

Значит, $\exists$ какое-то $n_0 \mid U_{n_0} = X$. Итак, $\forall x \, |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ и для всех $n \geq n_0$ тоже. □

4.1 Функциональные ряды

Опр 25. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно, если последовательность функций $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ сходится поточечно (т.е. сходится при $\forall x$).

Ряд функций сходится на множестве X равномерно к функции f, если $S_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на множестве X.

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда)**:** Ряд (25) сходится равномерно тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon \ \exists n_0 \mid \forall k, l : l > k \geq n_0 \ \forall x \in X \ \left| \sum_{i=k}^{l} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Сумма $\sum_k^l f_k(x) = S_l(x) - S_{k-1}(x)$ - задача сведена к критерию Коши для последовательности фукнций частичных сумм (числовой последовательности). □

Теорема (Признак сравнения)**:** Пусть числовой ряд $\sum a_n$, где $a_n \geq 0$ сходится, если функции $f_n : X \to \mathbb{R}$ таковы, что $\underset{x\in X}{sup} f_n(x) \leq a_n$ (эквивалентно $\forall x \in X \mid f_n(x) \leq a_n$). Тогда функциональный ряд $\sum f_n$ сходится на X равномерно.

Доказательство. Покажем, что для ряда $\sum f_n$ выполнено условие Коши:
Пусть $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum a_n$ сходится $\implies$ для этого числового ряда выполнено условие Коши числовых рядов:

$$\exists n_0 \forall k > l \geq n_0 \ \left| \sum_{m=k}^{l} a_m \right| \leq \varepsilon$$

Тогда $\forall x \in X$ имеем:

$$\left| \sum_{m=k}^{l} f_m(x) \right| \leq \sum_{m=k}^{l} |f_m(x)| \leq \sum_{m=k}^{l} a_m \leq \varepsilon$$

Значит условие Коши выполнено для функционального ряда $\implies$ он сходится равномерно. □

Теорема (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда)**:** Ряд $\sum f_n$ сходится на множестве X равномерно $\implies \underset{x\in X}{sup} |f_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Доказательство.

$$\underset{x\in X}{sup} |f_n(x)| = \underset{x\in X}{sup} \left| \sum_{m=n}^{n} f_n(x) \right|$$

По условию Коши это стремится к 0 при $n \to \infty$. □

Утв. Пусть ряд $S(x) = \sum f_n(x)$ равномерно сходится на X. Если все f_n непрерывны, то f - непрерывна.

Доказательство. Все $S_n(x) = (f_1(x) + \ldots + f_n(x))$ - непрерывные функции. $S_n \rightrightarrows f$ и применяем теорему о непрерывности предельной функции для последовательности (теорема о пределе пределов). □

Теорема (об интеграле)**:** Пусть (a, b) - ограниченный промежуток, f_n - интегрируемые на (a, b) функции.
Если последовательность f_n равномерно сходится на (a, b), то последовательность $\int_a^b f_n$ сходится.
Если при этом предельная функция f $(f_n \rightrightarrows f)$ интегрируема, то $\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f$.

Доказательство. Используем критерий Коши:
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0$ выполнено:

$$\underset{x\in(a,b)}{sup} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|a-b|}$$

Для таких k и l выполнено:

$$\left| \int_a^b f_k(x) - \int_a^b f_l(x) \right| = \left| \int_a^b f_k(x) - f_l(x) \right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f_l(x)| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

То есть для числовой последовательности $\int_a^b f_n(x)$ выполнено условие Коши и она имеет предел.

Если $f_n \rightrightarrows f$ интегрируема, то ясно, что $\int_a^b f_n - \int_a^b f \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Важно, что (a, b) ограничен. □

4.2 Дифференциирование

Теорема 17: Пусть ограниченный отрезок $(a, b) \subset \mathbb{R}$ и f_n дифференцируемы на (a, b) и таковы, что

1. $f'_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} h$ на (a, b).
2. $\exists p \in (a, b)$ такая, что последовательность $f_n(p)$ сходится.

Тогда $\exists$ функция f (дифференцируема на (a, b)) и такая, что $f_n \rightrightarrows f$ и $f' = h$.

Теорема утверждает, что предел производных последовательности функций равен производной предела.

Доказательство. Положим $g_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(p)}{x-p}$, область определения g_n это промежуток $(a, b)\backslash\{p\}$.
Покажем, что последовательность g_n равномерно сходится на своей области определения:
Применим критерий Коши:

$$g_k(x)-g_l(x) = \frac{(f_k(x) - f_l(x)) - (f_k(p) - f_l(p))}{x-p}, \text{ обозначим } f_{kl}(x) = f_k(x)-f_l(x), f_{kl}(p) = f_k(p)-f_l(p)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, имеем:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \underset{x\in(a,b)}{sup} |f'_k(x) - f'_l(x)| \leq \varepsilon, \text{ то есть, } |f'_{kl}(x)| \leq \varepsilon$$

Тогда по теореме о среднем (теорема о приращениях):

$$\forall x\, |f_{kl}(x) - f_{kl}(p)| \leq \varepsilon \cdot |x-p|$$

Значит

$$g_k(x) - g_l(x) \leq \varepsilon \;\forall x \in (a, b)\{p\} \;\forall k, l \geq n_0$$

Согласно критерию Коши последовательность функций g_n сходится равномерно к g. Покажем, что $f_n(x)$ равномерно сходится.

$$f_n(x) = g_n(x)(x-p) + f_n(p) \;\forall x \neq p$$

Так как $g_n \rightrightarrows g$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, то можем определить $f(x) := g(x)(x-p) + f_n(p)$.

$$f_n(x) - f(x) = [g_n(x) - g(x)]\,(x-p) + f_n(p) - f(x)$$

Применим условие Коши к обоим слагаемым: пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \;\; |g_k(x) - g_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(a-b)}$$

и
$$(f_l(x) - f_l(p)) - (f_k(x) - f_k(p)) \le \frac{\varepsilon}{2}$$
Тогда
$$|f_l(x) - f_k(x)| \le \frac{\varepsilon(x-p)}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$
Итак, $f_n \rightrightarrows f$ на области определения.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to p} g_n(x) = \lim_{x\to p}\lim_{n\to\infty} g_n(x) \text{ по теореме о пределе пределов}$$
Заметим, что
$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(p)}{x-p} \implies \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to p} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(p)$$
$$\lim_{x\to p}\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p)$$
Эти пределы равны по теореме о пределе пределов, значит $\lim_{n\to\infty} f_n'(p) = f'(p)$. □

Утв. (Следствие 1) Пусть ряд $\sum f_n$ сходится равномерно на ограниченном промежутке (a, b). Если f_n интегрируема и f ($f = \sum f_n$) интгерируема, то
$$\int_a^b f = \int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$$

Доказательство. Сумма $\sum f_n$ - это предел частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $S_n(x) \rightrightarrows f$ и применяем теорему об интеграле. □

Утв. (Следствие 2) Пусть ряд $\sum f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $p \in (a, b)$ и ряд производных $\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ сходится равномерно на (a, b).
Тогда исходный ряд сходится равномерно на всем (a, b), а его сумма дифференцируема на (a, b), и $(\sum f_n)' = \sum(f_n')$.

Доказательство. Теорема о дифференцируемости, примененная к частичным суммам. □

Далее будем рассматривать степенной ряд $f(x) = \sum_{n=1}^\infty C_n x^n$.

Теорема 18 (Формула Коши-Адамара)**:** Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле Коши-Адамара:
$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}$$

- При $|x| < R$ - сходится.
- При $|x| > R$ - расходится.
- При $|x| = R$ - нужно более тонкое исследование.

Доказательство. Доказывается признаком Коши (в лекциях по ТФКП должно быть). □

Теорема: Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum C_n z^n$ равен r. Тогда $\forall r_0 < r$ ряд сходится равномерно на множестве $|z| \le r_0$.

Доказательство. Выберем r_1 так, что $r_0 < r_1 < r$. По условию $r = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|}}$. Поскольку $r_1 < r$, при больших n выполнено $\sqrt[n]{|C_n|} < \frac{1}{r_1}$, то есть $|C_n| < \frac{1}{r_1^n}$.
Если $|z| \le r_0$, то $|C_n z^n| < |C_n r_0^n| < \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$ - геометрическая прогрессия, причем $\frac{r_0}{r_1} < 1$. Числовой ряд $\sum \frac{r_0}{r_1}$ сходится, значит по признаку сравнения для равномерной сходимости степенной ряд сходится равномерно на $|z| \le r_0$. □

Следствие: Внутри (на Int) круга сходимости степенной ряд задает ∞-дифференцируемую функцию, при этом $(\sum C_n z^n)' = \sum nC_n z^{n-1}$.

Доказательство. Пусть $|z| < r$. Выберем $r_0 > z$, но $r_0 < r$. В круге радиуса r_1 сходимость ряда $\sum C_n z^n$ равномерна, более того (именно это нам и надо):
ряд $\sum nC_n z^{n-1}$, полученный дифференцированием, тоже сходится равномерно (для доказательства этой фразы надо посчитать радиус сходимости нового ряда, он будет такой же, как у исходного). По теореме о дифференцировании функционального ряда выполнено $(\sum C_n x^n)' = \sum(nC_n z^{n-1})$ в точке X. □

Теорема (Признак Дирихле равномерной сходимости ряда функций)**:** Пусть ряд $\sum u_n(x)v_n(x)$ таков, что

1. $\forall x \in X$ последовательность $u_n(x)$ монотонна по n и $u_n \rightrightarrows 0$ на X.
2. Частичные суммы ряда $\sum v_n(x)$ равномерно ограничены (единая константа для всех частичных сумм):

$$\exists C < \infty \mid \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \left| \sum_{n=1}^{k} v_n(x) \right| \leq C$$

Тогда $\sum u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно на X.
Справка (большая):

В курсе матанализа был признак Абеля-Дирихле (А-Д) для числового ряда $\sum u_n v_n$ сходится, если

1. Частичные суммы ряда $\sum v_n$ ограничены
2. $u_n \to 0$ монотонно

В основе доказательства признака Абеля-Дирихле для числовых рядов - неравенство Абеля:
Пусть $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_m \geq 0$ и числа $a_1, \ldots, a_m$ - какие-то. Тогда:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m| \leq b_1 \cdot \left(\max_{k=1}^{m} |S_k| \right), \text{ где } S_k = a_1 + \ldots + a_k$$

Доказательство. Докажем неравенство Абеля (для прикола):

$$a_1 = S_1, \ a_2 = S_2 - S_1, \ a_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\begin{aligned}
&|a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m| = \\
&\quad = |S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \cdots + (S_m - S_{m-1}) b_m| = \\
&\quad = |S_1 (b_1 - b_2) + S_2 (b_2 - b_3) + \cdots + S_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + S_m b_m| \leq \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{m-1} |S_k| (b_k - b_{k+1}) + |S_m| b_m \leq \\
&\quad \leq \max_{1 \leq k \leq m} |S_k| \Big((b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{m-1} - b_m) + b_m \Big) = \\
&\quad = \max_{1 \leq k \leq m} |S_k| \cdot b_1
\end{aligned}$$

□

Доказательство. Докажем признак Дирихле для рядов функций:
Воспользуемся критерием Коши:

Пусть $\varepsilon > 0$, u_n сходится равномерно к 0 на X, значит $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X \, |u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$ (C - ограничивающая константа для v_n). Пусть $X_- = \{x \mid u_n \searrow\}, X_+ = \{x \mid u_n \nearrow\}$.

По неравенству Абеля:
$\forall x \in X_- \ \forall l \geq k > n_0$ выполнено

$$\left|\sum_{k}^{l} u_n(x)v_n(x)\right| \leq u_k \cdot S, \text{ где } S = max\sum_{n=k}^{\tilde{l}} v_n(x), \ \tilde{l} \leq l$$

$$\left|\sum_{k}^{\tilde{l}}\right| = \left|\sum_{1}^{\tilde{l}} - \sum_{1}^{\tilde{l}-1}\right| \leq \left|\sum_{1}^{\tilde{l}}\right| + \left|\sum_{1}^{k}\right| \leq C + C \text{ (по второму условию из признака)}$$

Итак, $\sum_k^l u_n(x)v_n(x) \leq u_k \cdot 2C \leq \frac{\varepsilon}{2C} \cdot 2C = \varepsilon$. Условие Коши выполнено и ряд сходится равномерно на X_-. Для X_+ аналогично, значит на X тоже равномерно. $\square$

Утв. Ряд $\sum \frac{sin(nx)}{n}$ сходится равномерно на $x \in [\delta, 2\pi - \delta]\,, \ \delta > 0$.

Доказательство. Для таких X выполнено $\left|\sum_{n=0}^{k} \frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\delta}|}$, то есть для ряда $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ выполнено условие (2) из признака А-Д. Поскольку $u_n(x) \rightrightarrows 0$ и монотонна по n, значит условие (1) тоже выполнено. Тогда по признаку А-Д ряд $\sum \frac{sin(nx)}{n}$ сходится равномерно. $\square$

Теорема (Признак Абеля)**:** Пусть ряд $\sum u_n(x)v_n(x)$ таков, что

1. Любая последовательность $u_n(x)$ для каждого x монотонна и все $u_n(x)$ равномерно ограничены:
$$\exists M < \infty \mid \forall n \ \forall x \in X \ \ |u_n(x)| \leq M$$
2. Ряд $\sum v_n(x)$ **равномерно** сходится

Тогда $\sum u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. Этот признак не следует напрямую из признака Дирихле.
Воспользуемся тем же Критерием Коши:

Пусть $\varepsilon > 0, X_-, X_+$ такие же, как раньше. Применим К.К. к ряду $\sum v_n(x)$ и получим:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \ \forall x \in X \ \left|\sum_{n=k}^{l} v_n(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

Константа C такая, что ограничивает все $u_n(x)$ $\forall n \forall x$.

$$\forall k, l \geq n_0 \ \forall x \in X_- \quad \left|\sum_{k}^{l} u_n(x)v_n(x)\right| \overset{\text{нер-во Абеля}}{\leq}$$

$$\leq u_k \cdot |\text{самое большое из чисел } v_k(x), (v_k(x) + v_{k+1}), \ldots, (v_k(x) + \ldots + v_l(x))| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} \leq \varepsilon$$

Выполнено условие Коши, значит ряд $\sum u_n v_n$ сходится равномерно на X_-. Для X_+ аналогично.

В рассуждении использовалось то, чего не было в условии: мы предполагали (применяя неравенство Абеля), что $u_n \geq 0$. Этого может не быть, как спасти ситуацию?
Пусть $\tilde{u_n}(x) = u_n(x) + C \in [0, 2C] \ \ \forall n \ \forall x \in X$

$$\sum u_n(x)v_n(x) = \sum(\tilde{u_n}(x) - C)v_n(x) \leq \sum \tilde{u_n}(x)v_n(x) - C \cdot \sum v_n(x)$$

Для первого слагаемого доказательство, приведенное выше работает, а второе ряд сходится равномерно. Осталось показать, что $\sum \lambda a_n(x) + \gamma b_n(x)$ равномерно сходится (упражнение, но кажется достаточно расписать через определение).

$\square$

Теорема (Теорема Абеля о степенных рядах)**:** Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $a_n \in \mathbb{C}$. Тогда на $[0,1]$ степенной ряд $f(t) = \sum a_n t^n$ сходится равномерно и, значит, $f(t)$ непрерывна как функция от t на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Согласно признаку Абеля $\sum u_n(t) v_n(t)$ сходится равномерно, если ряд $\sum v_n(t)$ сходится равномерно, последовательность функций $u_n(t)$ равномерно ограничена константой C и для любого t последовательность $u_n(t)$ монотонна по n.

Положим $v_n(t) = a_n;\ u_n(t) = t^n$.Тогда у нас выполнено условие признака Абеля:

- $|u_n(t)| \le 1\ \forall n\ \forall t \in [0,1]$
- если $t \in [0,1)$, то $t^n \underset{\text{монотонно}}{\searrow} 0$
- если $t = 1$, то $t^n \equiv 1$ тоже монотонна!

Значит $f(t)$ сходится на $t \in [0,1]$ равномерно, а сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций тоже непрерывна. □

Опр 26 (Метод суммирования Абеля). Пусть есть ряд $\sum a_n$ (неважно, сходящийся или нет). Он сходится методом суммирования Абеля, если

$$\exists \lim_{t \to 1|_{[0,1]}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n\right) \text{ (конечный)}$$

Теорема: Пусть ряды $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся и ряд $\sum c_n$ получен из них произведением Коши:

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j;\ c_0 = a_0 b_0;\ c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1; c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

Если ряд $\sum c_n$ сходится, то его сумма равна $(\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$.

Доказательство. Пусть $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\ B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Перемножим эти ряды по Коши:

$$c_n(t) = \sum_{i+j=n} a_i t^i \cdot b_j t^j = \sum_{i+j=n} a_i b_j t^{i+j=n} = c_n t^n$$

По условию все три ряда сходятся: $\sum a_n = A,\ \sum b_n = B,\ \sum c_n = C$. Значит при $|t| < 1$ ряды $\sum a_n t^n,\ \sum b_n t^n,\ \sum c_n t^n$ сходятся абсолютно (потому что мажорируются убывающей геометрической прогрессией). По теореме из прошлого, произведение $A(t) \cdot B(t) = C(t)$.
При $t \nearrow 1$ по теореме Абеля:

- $A(t) \to A(1) = A$
- $B(t) \to B(1) = B$
- $C(t) \to C(1) = C$

Значит, при переходе к пределу $A \cdot B = C$.

□

Долг из прошлого:

Теорема (Теорема Мертенса (упрощенная, но достаточная для нас))**:** Пусть ряд $A = \sum a_i,\ B = \sum b_i$ сходятся абсолютно, тогда ряд $\sum c_n$ сходится ($c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$) и его сумма равна $A \cdot B$.

Доказательство. Применим критерий Коши к ряду $\sum c_n$ и покажем, что $\sum_{n=k}^{l} |c_n| \underset{k,l \to 0}{\to} 0$.

$$\sum_{k}^{l} |c_n| = \left|\sum a_i b_j\right|,\ i + j \in [k,l]$$

$$\left|\sum_{n=k}^{l} c_n\right| = \left|\sum_{n=k}^{l} \sum_{i+j=n} a_i b_j\right| \le \sum_{n=k}^{l} \sum_{i+j=n} |a_i| \cdot |b_j| \le \sum_{i,j=0}^{l} - \sum_{i,j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\sum_{i,j=0}^{l} |a_i| \cdot |b_j| = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{l} |a_i| \cdot |b_j| = S_1(l) \cdot S_2(l)$$

В этой записи $S_1(l)$ - частичная сумма ряда $\sum |a_i|$, $S_2(l)$ - частичная сумма ряда $\sum |b_i|$, $S_1(l) \to \sum |a_n|$, $S_2(l) \to \sum |b_n|$. В квадрате на рисунке, который я не могу сюда приложить, но его можно посмотреть в ваших лекциях, площадь квадрата с квадратным вырезом в левом верхнем углу равна

$$= S_1(l) \cdot S_2(l) - S_1(\left[\frac{k}{2}\right] - 1) \cdot S_2(\left[\frac{k}{2}\right] - 1) \underset{k,l\to\infty}{\to} 0$$

$\square$

5 Ряды Фурье

Пусть E - евклидово пространство (векторное пространство со скалярным произведением). Скалярное произведение $\langle a, b\rangle$ - бинарная операция, удовлетворяющая аксиомам:

1. $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle \iff a,b\in\mathbb{R}$; $\langle a,b\rangle = \overline{\langle b,a\rangle} \iff a,b\in\mathbb{C}$
2. $\langle a,a\rangle \geq 0,\ \langle a,a\rangle = 0 \iff a=0$
3. $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle + \mu\langle v,w\rangle$

Модуль вектора вычисляется с помощью $|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Утв. Пусть $\vec{e_1},\ldots,\vec{e_n}$ - попарно ортогональные векторы ($\langle\vec{e_i},\vec{e_j}\rangle = 0$). Пусть $\vec{v} = x_1\vec{e_1}+\ldots+x_n\vec{e_n}$, тогда

$$x_i = \frac{\langle v,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle}\ \forall i=1,\ldots,n$$

Доказательство.

$$k\neq i \implies \langle e_k,e_i\rangle = 0 \implies \langle v,e_i\rangle = \langle\sum_{k=1}^n x_k e_k, e_i\rangle = \sum_{k=1}^n x_k\langle e_k,e_i\rangle = x_i\langle e_i,e_i\rangle$$

□

Если $\{\vec{e_i}\}$ - попарно ортогональные ненулевые вектора, то они образуют линейно независимый набор.

$$|v|^2 = \langle v,v\rangle = \langle\sum x_i e_i, \sum x_j e_j\rangle = \sum x_i x_j\langle e_j,e_i\rangle = \sum x_i^2\,|e_i|^2$$

В частности, если все длины векторов $\vec{e_i}$ равны 1, то $|v|^2 = \sum x_i^2$.

Пусть f,g - хорошие функции на отрезке $[0,2\pi]$, то их скалярное произведение определено следующим образом:

$$\langle f,g\rangle := \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

Утв. Функции $\sin(nx)$ и $\cos(mx)$ ортогональны при $\forall n,m\in\mathbb{N}$. А также:

- $\sin(nx)\perp\sin(mx)\ \forall n\neq m\geq 0$
- $\cos(nx)\perp\cos(mx)\ \forall n\neq m\geq 0$
- $||\sin(nx)||=\pi\ n>0$
- $||\cos(nx)||=\pi\ n>0$

Доказательство.

$$\cos(mx) = \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2};\ \sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\cdot e^{imx}\,dx,\ n,m\in\mathbb{N} = \int_0^{2\pi} e^{i(n+m)x}\,dx = \begin{cases}\int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi\ n+m=0\\ \frac{e^{i(n+m)x}}{i(n+m)}\Big|_0^{2\pi} = 0\ n+m\neq 0\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{e^{i(n+m)x}-e^{i(n-m)x}+e^{i(m-n)x}-e^{-i(n+m)x}}{2\cdot 2i}\,dx = 0\ \forall n,m\in\mathbb{N}$$

Аналогично остальные

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)^2\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{e^{2inx}-e^{-2inx}-2}{-4}\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{-2}{-4}\,dx = \pi$$

□

Утв. (Следствие) Пусть $f(t)$ - линейная комбинация вида

$$f(t) = \lambda + b_1 \sin(t) + \ldots + b_n \sin(nt) + a_1 \sin(t) + \ldots + a_n \cos(nt)$$

Тогда

$$b_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt}{\pi}, \quad a_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt}{\pi}, \quad \lambda = \frac{\int_0^{2\pi} f(t)\cdot 1\,dt}{2\pi}$$

Опр 27. Ряд Фурье функции $f(t)$ (разложение обозначается знаком $\leftrightharpoons$)

$$f(t) \leftrightharpoons \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt,\ k \geq 0$$

Введем контекст:

Пусть f - функция, интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$. Разложим ее в ряд Фурье в соответствии с определением:

$$f(x) \leftrightharpoons \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Теорема (Лемма об интеграле периодичной функции)**:** Пусть f - T-периодична, если f интегрируема на $[0, T]$, то f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{T+a} f(x)\,dx$$

Доказательство. Функция f интегрируема на любом отрезке $[T, (n+1)T]$, отсюда следует интегрируемость на любом $[a, b]$. Пусть $a \in [0, T]$, тогда

$$\int_0^{T+a} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{T+a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{T+a} f(x)\,dx$$

Разложим интеграл от 0 до $T+a$ двумя способами, в силу периодичности $\int_T^{T+a} = \int_0^a$, значит другие два интеграла тоже равны. В общем случае $a > T$, тогда $\exists n \mid a \in [nT, (n+1)T]$ и $\int_0^T = \int_{nT}^{(n+1)T} = \int_a^{a+T}$. □

Следствие:

Если f - 2π-периодична, то пределы интегрирования для коэффициентов a_n, b_n будем брать $[-\pi, \pi]$.

5.1 Комплексная форма ряда Фурье

$$f(x) \leftrightharpoons \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},\ c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$$

Такая форма получается из 2π-перодичной функции f, при $k \geq 0$, тогда

$$a_k + ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt) + i\sin(kt))\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\,dt = 2c_k$$

Теорема Пифагора:

Пусть $f = \sum x_n \vec{e_n}$. $e_n \perp e_n (n \neq k)$, f - хорошая, тогда $\langle f, f, \rangle = \sum |x|^2 \langle e_n, e_n \rangle$. При этом $\langle e_n, e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \pi$.

$$\langle e_0, e_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = 2\pi$$

Если f - хорошая и $f =\leftrightharpoons \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$$

Это равенство называется равенством Парсеваля.

Опр 28. Формула Дирихле.

$$D_n(t) \leftrightharpoons \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = 1 + 2(\cos(t) + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt)) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Опр 29. Если функция f 2π-периодична, кусочно дифференциируемая и ее первая производная ограничена, то f - функция класса Фурье.

Утв. Функция класса Фурье может иметь разрывы только 1-го рода, то есть существует конечные пределы:

$$\forall x\ \exists f(x+0) := \lim_{n \to 0} f(x+h),\ \exists f(x-0) := \lim_{h \to 0} f(x-h)$$

Доказательство. Пусть x_0 - точка разрыва функции f. Выберем $a < x_0$ так, что на $[a, x_0)$ f - дифференциируема. Тогда $\forall x \in [a, x_0)$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

Этот интеграл сходится, значит утверждение доказано. □

Утв. Обозначим разложение функции f в ряд Фурье через $S_n f$. Тогда

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt$$

Функция Дирихле четна, 2π-периодична.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(-t)\, dt \qquad (\text{т.к. } D_n(t) = D_n(-t)) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}\, dt = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) e^{-ikt}\, dt \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau) e^{-ik(\tau - x)}\, d\tau \qquad (\tau = x + t) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} e^{ikx}\, d\tau \qquad (\text{периодичность}) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau}\, d\tau = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \cdot 2\pi c_k.
\end{aligned}$$

□

Следствие:

Если функция класса Фурье, то

$$\begin{aligned}
&2\pi\left(S_n f(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right) = \\
&= \int_{-\pi}^{0} \left(f(x+t) - f(x-0) D_n(t)\right) dt + \int_{0}^{\pi} \left(f(x+t) - f(x+0) D_n(t)\right) dt
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&2\pi\left[S_n f(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right] = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \cdot D_n(t)\, dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+t) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right] D_n(t)\, dt = \\
&= \int_{-\pi}^{0} \left[f(x+t) - f(x-0)\right] D_n(t)\, dt + \int_{0}^{\pi} \left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t)\, dt
\end{aligned}$$

□

Теорема (Теорема Фурье)**:** Пусть f - функция класса Фурье. Тогда

1. $\forall x\ S_n f(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x-0)-f(x+0)}{2}$.
2. Если $a_0, \ldots, a_n$ - точки разрыва из отрезка $[-\pi, \pi]$, то для любого отрезка I, не содержащего ни одной точки разрыва a_i, сходимость на I будет равномерной.

Доказательство. Надо доказать, что

$$\int_{0}^{\pi} \left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t)\, dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем такое h, что $\int_0^h < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|(f(x+t) - f(x+0))D_n(t)| = \left|(f(x+t) - f(x+0)\frac{\sin(t(n+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{t}{2})})\right|$$

Поскольку при $t \in [0, \pi]$ $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$, то

$$\left|(f(x+t) - f(x+0)\frac{\sin(t(n+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{t}{2})})\right| \leq \underbrace{\frac{|f(x+t)-f(x+0)| \cdot \left|\sin(t(n+\frac{1}{2}))\right|}{\left|\frac{t}{\pi}\right|}}_{\star} \leq \frac{\pi\,|f(x+t)-f(x+0)|}{t}$$

Если выбрать h такое, чтобы на $(x, x+h)$ у функции $f(x)$ не было разрывов, то $\forall t \in (x, x+h)$ выполнена оценка

$$|f(x+t) - f(x+0)| \leq t \cdot \underbrace{\sup(|f'(x)|)}_{\leq C \text{ по условию}}$$

Продолжая цепочку неравенств $\star$ получим $\leq \pi \cdot \frac{C}{t} = \pi C$. Итак, если h такое, что на $(x, x+h)$ нет точек разрыва, то

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^h \left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t)\, dt\right| &\leq \int_0^h \left|\left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t)\right| dt \leq \\
&\leq \int_0^h \pi \cdot C\, dt = \pi \cdot Ch
\end{aligned}$$

А если взять $h < \frac{\varepsilon}{2\pi c}$, то $\left|\int_0^h\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Утв. (Лемма) Пусть $h \in (0, \pi)$. Тогда $\exists K < \infty$ такая, что

$$\left|\int_h^{\pi} \left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t)\, dt\right| \le \frac{K}{h}$$

Доказательство леммы.

$$\left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t) = \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x+0)}{\sin(\frac{t}{2})}}_{g(t)} \cdot \sin(t(n+\frac{1}{2}))$$

Пусть (a, b) - один из промежутков в (h, π), на котором f дифференциируема. Пусть всего таких промежутков m штук.

$$|g'(t)| = \left|\frac{f'(x+t)\cdot\sin(\frac{t}{2}) - \left[f(x+t) - f(x+0)\right]\cdot\frac{1}{2}\cos(t)}{\sin^2(\frac{t}{2})}\right| \tag{8}$$

Заметим, что $\sin^2(\frac{t}{2}) \ge \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \ge \left(\frac{h}{\pi}\right)^2$. Тогда продолжим (8):

$$(8) \le \frac{|\text{числитель}|\,\pi^2}{h^2} \le \frac{C+M}{h^2} =: \xi$$

где $M = \underset{x\in[-\pi,\pi]}{sup}(|f(x)|)$, $C = \underset{x\in[-\pi,\pi]}{sup}(|f'(x)|)$.

$$I := \left|\int_a^b \left[f(x+t) - f(x+0)\right] D_n(t)\, dt\right| = \left|\int_a^b g(t)\sin(t(n+\frac{1}{2}))\, dt\right| \overset{\text{ФИЧ}}{=} \underbrace{\left| g(t)\cdot\frac{\cos(t(n+\frac{1}{2}))}{n+\frac{1}{2}}\right|_a^b}_{I_1} -$$

$$-\underbrace{\int_a^b g'(t)\frac{\cos(t(n+\frac{1}{2}))}{n+\frac{1}{2}} t\, dt}_{I_2} \le \frac{2\max(g(t))}{n+\frac{1}{2}} + \underbrace{|b-a|}_{\le\pi}\cdot\xi\cdot 1\cdot\frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left[K\right],$$

$$K = 2\max(g(t)) + \pi\cdot\xi$$

Итого $|g(t)| \le M_1$, $|g'(t)| \le M_2$. Тогда

$$|I_1| \le \frac{2M_1}{n+\frac{1}{2}}, \quad |I_2| \le \frac{|b-a|\,M_2}{n+\frac{1}{2}} \le \frac{\pi\cdot M_2}{n+\frac{1}{2}}$$

$$|I| = |I_1 - I_2| \le |I_1| + |I_2| \le \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot const,\ const := 2M_1 + \pi M_2\cdot[\text{кол-во промежутков (a,b)}]$$

$\square$

Продолжаем доказывать теорему Фурье:
Получили, что $\exists n_0 \mid \forall n \ge n_0 \left|\int_h^{\pi}\ldots\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом:

1. Выбрали $h \in [0, \pi]$ такое, что у функции $f(x+t) - f(x+0)$ нет разрывов на $t \in (0, h)$ (то есть у f нет разрывов на $(x, x+h)$) и при этом h такое хитрое, что $\left|\int_0^h\ldots\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Это мы уже сделали.

2. Вторая часть доказательства:

   Пусть теперь на $(a, b) \subset [-\pi, pi]$ нет точек разрыва функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Покажем, что $S_n(f) \rightrightarrows f$ на этом (a, b).
   $\exists h_0 > 0$ такое, что на $[a - h_0, b + h_0]$ функция f непрерывна. Тогда в части 1 доказательства того, что уже было, можно выбрать $h = h(\varepsilon)$, а не $h = h(x, \varepsilon)$ (выбрать h независимо от x). Таким образом выбор h_0 можно сделать независимым от выбора x_0.

$\square$

Утв. (Равенство Парсеваля) Пусть f, g - непрерывные функции класса Фурье, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(f)\overline{C_k(g)}$$

где

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

Сумма от минус бесконечности до бесконечности подразумевается в следующем смысле:

$$f(x) \leftrightharpoons \sum_{-\infty}^{\infty} C_k(f) e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} S_n(f), \quad S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} C_k(f) e^{ikx}$$

Доказательство.

- $S_n(f) \rightrightarrows f$ на $[-\pi, \pi]$
- $S_n(g) \rightrightarrows g$ на $[-\pi, \pi]$

$S_n(f) \cdot \overline{S_n(g)} \rightrightarrows f \cdot \overline{g}$, так как f и g ограничены (было оставлено как упражнение).

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{g} &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f(x)) \cdot \overline{S_n(g(x))}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} C_k(f) e^{ikx} \right) \left(\sum_{m=-n}^{n} \overline{C_m(g)} e^{-imx} \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{m=-n}^{n} C_k(f)\overline{C_m(g)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)\overline{C_k(g)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\, dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k(f)\overline{C_k(g)}
\end{aligned}$$

$\square$

Если $f = g$, то

$$\int f \cdot \overline{f} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \overline{C_k} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

Утв. Равенство Парсеваля верно для всех $f, g \in L_2[-\pi, \pi]$, где $L_2[-\pi, \pi]$ - это множество всех функций, таких, что $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty$.

Теорема (Лемма о натуральной параметризации)**:** Пусть Γ - гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$ длины L. Тогда существует натуральная параметризация (т.е. модуль скорости) вида

$$\gamma(s) : [0, L] \to \Gamma \mid |\dot{\gamma}(s)| = 1$$

Доказательство. Возьмем какое-то отображение (путь) $f : [a, b] \to \Gamma$, $f \in C^1, f'(t) \neq 0\ \forall t \in [a, b]$. Длина L будет выражаться как $\int_a^b |f'(t)|\, dt$. Пройденное расстояние $S : [a, b] \to [0, L]$ представлено в виде $S(t) = \int_a^t \left| \dot{f(s)} \right| ds$.

$$\dot{S}(t) = \left(\int_a^t \left| \dot{f}(s) \right| ds \right)' = \left| \dot{f}(t) \right| > 0\ \forall t$$

При этом S возрастает монотонно, а значит обратима, пусть $t(S)$ - обратная функция.

$$t(S) : [0, L] \to [a.b],\ t'(S) = \frac{1}{s'(t)}$$

Значит $\gamma(s) := f(t(s))$ - искомая параметризация.

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{f}(t(s)) \cdot t'(s) = \dot{f}(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t)} = \frac{\dot{f}(t(s))}{\left|\dot{f}(t(s))\right|} \text{ и } |\dot{\gamma}(s)| = 1$$

$\square$

Теорема (Площадь сектора кривой)**:** Пусть кривая $f(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, а f и $\dot{f}$ имеют ориентацию. Точка на кривой $f = (x, y)$, вектор скорости в точке $\dot{f} = (\dot{x}, \dot{y})$. Заметим, что

$$\forall t \quad \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} > 0$$

То есть, если эта матрица положительно определена, то вектора f и $\dot{f}$ положительно определены и точка t_0 всегда лежит справа от точки t_1 (t_0 и t_1 - точки начала и конца сегмента кривой, ограничивающего наш сектор. Мы показали, что при движении по кривой мы перемещаемся против часовой стрелки).

Площадь сектора:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt$$

Пусть ds - площадь треугольника, заметаемого за время $(t, t + dt)$, из формулы площади параллелограма через определитель:

$$ds = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} ds = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt$$

Теорема (Изопериметрическое неравенство)**:** Пусть Γ - кусочно дважды гладкая замкнутая кривая длины 2π. Тогда $S \leq \pi$, причем если $S = \pi$, то Γ - это окружность.

Доказательство. Пусть $\gamma = (x(s), y(s))$ - натуральная параметризация кривой Γ, $s \in [0, 2\pi]$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, ds$$

$\begin{cases} x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \\ y : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \end{cases}$ - принадлежат классу Фурье и непрерывны.

$$x(s) \leftrightharpoons \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ns) + b_n \sin(ns)$$

$$\dot{x}(s) \leftrightharpoons \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin(ns) + b_n \cos(ns))$$

$$y(s) \leftrightharpoons \frac{\tilde{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a_n}\cos(ns) + \tilde{b_n}\sin(ns))$$

$$\dot{y}(s) \leftrightharpoons \sum_{n=1}^{\infty} n(-\tilde{a_n}\sin(ns) + \tilde{b_n}\cos(ns))$$

Вспомним равенство Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} fg = \pi\left(\frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum[a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)]\right)$$

Тогда:

$$\int_0^{2\pi} x\dot{y} = \pi \cdot \sum_{n\geq 1} n\left[a_n\tilde{b_n} - \tilde{a_n}b_n\right]$$

Утверждение о том, что $\int_0^{2\pi} x\dot{y} = \int_0^{2\pi} -\dot{x}y$ было упражнением (либо раньше, либо я это не вписал). Итак:

$$S = \pi\sum_{n\geq 1} n\cdot\left[a_n\tilde{b_n} - \tilde{a_n}b_n\right] \leq \pi\sum n\left[\left|a_n\tilde{b_n}\right| + |\tilde{a_n}b_n|\right]$$

Из $(a\pm b)^2 \geq 0 \implies |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. Значит:

$$S \leq \frac{\pi}{2}\sum n(a_n^2\tilde{b_n}^2 + \tilde{a_n}^2 b_n)$$

Длина нашей кривой Γ:

$$L(\Gamma) = 2\pi = \int_0^{2\pi} \underbrace{1}_{|\dot{\gamma}(t)|} dt = \int_0^{2\pi}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,dt$$

По равенству Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}^2 + \dot{y}^2\,dt = \pi\left(\sum_{n\geq 1} n^2(a_n^2 + b_n^2) + \sum_{n\geq 1} n^2(\tilde{a_n}^2 + \tilde{b_n}^2)\right) \overset{\text{по условию}}{=} 2\pi$$

Сократим на 2:

$$\frac{\pi}{2}\sum n(a_n^2 + b_n^2 + \tilde{a_n}^2 + \tilde{b_n}^2)\underbrace{\leq}_{\text{тут}}\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + \tilde{a_n}^2 + \tilde{b_n}^2) = \pi \implies S \leq \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

Итого $S \leq \pi$. Осталось доказать, что если $S = \pi$, то Γ - окружность. Если $S = \pi$, то $\forall n$ в неравенстве "тут"в (9) $= n^2(\ldots) = n(\ldots) \implies n = 1$. Тогда $\forall n \geq 2$ $a_n = 0,\ b_n = 0,\ \tilde{a_n} = 0,\ \tilde{b_n} = 0$.

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(s) + b_1\sin(s),\ y(S) = \frac{\tilde{a_0}}{2} + \tilde{a_1}\cos(s) + \tilde{b_1}\sin(s)$$

$$\frac{\pi}{2}(a_1^2\tilde{b_1}^2 - \tilde{a_1}b_1^2 = \pi),\ S = \pi(a_1^2\tilde{b_1}^2 - \tilde{a_1^2}\tilde{b_1}^2)$$

Из $|ab| = \frac{a^2+b^2}{2} \implies a_1 = \pm b_1$ и доказываем, что это окружность. □

Теорема (Теорема о тригонометрической аппроксимации)**:** Пусть f - непрерывная функция на $[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$. Тогда $\forall\varepsilon\ \exists$ тригонометрический многочлен $P(x)$, такой, что $\forall x \in [0, 2\pi]\ \ |f(x) - P(x)| \le \varepsilon$.

Доказательство.

1. Заменим f кусочно гладкой линейной функцией $\tilde{f}$, так, что $\forall x\ \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

   По теореме Кантора-Гейне (функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем) непрерывная функция f на отрезке $[0, 2\pi]$ равномерно непрерывна, то есть

   $$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in [0, 2\pi] \quad |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon$$

   Пользуясь этим разобьем $[0, 2\pi]$ на конечное число кусочков $[a_k, a_{k+1}]$, настолько коротких, что $\forall x_1, x_2 \in [a_k, a_{k+1}]\ \ |f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{\varepsilon}{4}$.

   Пусть $\tilde{f}(a_i) = f(a_i)\ \forall i$. На промежутках $[a_i, a_{i+1}]$ $\tilde{f}$ - прямая между точками $(a_i, f(a_i))$ и $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

   $$\begin{aligned} &\forall x \in [a_i, a_{i+1}] \\ \left|\tilde{f}(x) - f(x)\right| &= \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i) + \tilde{f}(a_i) - f(x)\right| \le \\ &\le \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i)\right| + \left|\tilde{f}(a_i) - f(x)\right| \end{aligned}$$

   $$\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i)\right| \le \left|\tilde{f}(a_{i+1}) - f(a_i)\right| = |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \le \frac{\varepsilon}{4}$$

   $$\left|\tilde{f}(a_i) - f(x)\right| = |f(a_i) - f(a_i)| \le \frac{\varepsilon}{4}$$

2. Функция $\tilde{f}$ принадлежит классу Фурье, $\tilde{f}(0) = f(2\pi)$. По теореме Фурье $S_n(\tilde{f}) \rightrightarrows \tilde{f}$ на $[0, 2\pi]$. Тогда $\exists n_0 \underset{x\in[0,2\pi]}{sup} \left|S_{n_0}(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. А значит $\left|S_{n_0}(\tilde{f}(x)) - f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ (доказывается хитрым движением $\pm\tilde{f}(x)$ под модуль).

$\square$

Теорема (Теорема Стоуна-Вейерштрасса)**:** Непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить многочленом:

$$f : [a, b] \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \implies \forall\varepsilon\ \exists\text{многочлен } P(x)\ \forall x \in [a, b]\ \ |U(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

Доказательство.

1. Пусть $\lambda(x) : [a, b] \underset{\text{линейное}}{\to} [0, 2\pi]$.

   $$g(t) = f(\lambda^{-1}(t)) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$

   Существует тригонометрический многочлен $Q(t)$ (например, форма Фурье) такой, что $\forall t \in [0, 2\pi]\ \ |Q(t) - g(t)| \le \varepsilon$. Теперь осталось приблизить $Q(t)$ обычным многочленом.

   $$Q(t) = q_0 + q_1 \cos(t) + \ldots + q_N \cos(Nt) + q_1 \sin(t) + \ldots + q_N \sin(Nt)$$

   Для $\forall k_0$ форма $\cos(k_0 t)$ равномерно приближаемая на $[0, 2\pi]$ частичными суммами своего ряда Тейлора.

   $$\cos(k_0 t) = 1 - \frac{(k_0 t)^2}{2!} + \frac{(k_0 t)^4}{4!} + \ldots$$

   Радиус сходимости равен бесконечности, поэтому ряд сходится равномерно на любом отрезке конечной длины.

Пусть n_0 настолько большое, что все частичные суммы для $\cos(t), \dots, \cos(Nt), \sin(t), \dots, \sin(Nt)$ были δ-близки к своим функциям. Т.е.

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2\Big(\sum_{i=1}^k |q_i| + \sum_{i=1}^k |\tilde{q}_i|\Big)}$$

Соответствующая сумма имеет вид

$$q_0 + \sum_{k=1}^{n_0} q_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n_0} \tilde{q}_k \sin(kt),$$

где первая сумма — это частичная сумма ряда Тейлора (до n_0) для $\cos(kt)$, а вторая — для $\sin(kt)$. Поскольку каждая из функций $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ аппроксимируется многочленом от t, вся сумма является многочленом; следовательно, можно взять $P(t)$ в указанном виде.

□

6 Примитивный интеграл, интеграл Лебега

Опр. Отрезки вида $I = a, (a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$ - примитивные сегменты в $\mathbb{R}$. Для них на прямой определена примитивная мера, как функция $\mu_1(I) := |b-a|$.

Элементарный сегмент в $\mathbb{R}^n$ это $I_1 \times \ldots \times I_n$, где I_k - элементарный сегмент в $\mathbb{R}$ $\forall k \in 1, \dots, n$. Для сегментов большой размерности мера определена в виде $\mu_n(I) = \mu_1(I_1) \cdot \ldots \cdot \mu_1(I_n)$.

Множество S будем считать примитивным (ступенчатым) множеством, если S - объединение конечного числа сегментов.

Лемма (Лемма о дроблении) Для любого примитивного (стуенчатого) множества A $\exists$ дизъюнктный набор сегментов (т.е. набор непересекающихся сегментов) $I_1, \dots, I_N$ такой, что $A = \bigcup_{n=1}^N I_n$.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup J_k$, $J_k = J_k^1 \times \ldots \times J_k^r$. Пусть $a_0^i < a_1^i < \ldots < a_{N_i}^i$ - концы сегментов $J_1^i, \dots, J_m^i$. Возьмем $\{a_0^i\}, \{a_0^i, a_1^i\}, \{a_1^i\}, \{a_1^i, a_2^i\}$ и так далее - это элементарные сегменты на оси i-ой координаты. Искомая система дизъюнктных элементов - это декартово произведение этих сегментов по каждой координате. □

Свойства ступенчатых множеств:

1. Если A, B - ступенчатые множества, то $A \cup B$ - ступенчатое множество.
2. Если A, B - ступенчатые множества, то $A \cap B$ - ступенчатое множество.

   Доказательство. Есть сегменты, которые в объединении дают A и дают B. Возьмем их, раздробим по лемме о дроблении, посчитаем пересечение. □

3. $A \backslash B$ - ступенчатое множество.

Опр. Ступенчатые функции:

Пусть E - векторное пространство. Определим функцию f как ступенчатую функцию на множествах $\mathbb{R}^n$ и E ($f \in Step(\mathbb{R}^n, E)$), если $\exists$ система сегментов в $\mathbb{R}^n$ $J_1, \dots, J_k$ такая, что $f = \sum_{i=1}^k C_i \chi_{J_i}$ и $C_1, \dots, C_k \in E$. Уточнение: $\chi_{J_i}(x)$ - характеристическая функция вида

$$\chi_{J_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in J_i \\ 0 & x \notin J_i \end{cases}$$

А C_i - некоторый вектор из E.

Утв. Пусть $f, g \in Step(\mathbb{R}^n, E)$. Тогда $f + j \in Step(\mathbb{R}^n, E)$, $\lambda \cdot f \in Step(\mathbb{R}^n, E)$. Если в E можно перемножать веткора ($\forall a, b \in E\ \exists a \cdot b \in E$), то $f \cdot g \in Step(\mathbb{R}^n, E)$.

Доказательство. Упражнение, надо поковыряться с определением новой функции и (возможно) хар. функциии. $\square$

Утв. $f \in Step(\mathbb{R}^n, E) \iff \exists$ дизъюнктная система отрезков, на каждом из которых $f = const$.

Опр. Элементарный (примитивный) интеграл определим как функцию $\int_{\mathbb{R}^n} : Step(\mathbb{R}^n, E) \to E$. Функция f должна иметь вид $\sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \chi_{J_i}$. Тогда

$$f = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \chi_{J_i} \implies \int_{\mathbb{R}^n} f := \sum_{i=1}^{k} C_i \mu_n(J_i)$$

При $n = 1$ набор $J_1, \ldots, J_n$ - это интервалы, полуинтервалы, отрезки и точки.

$$f(x) = \sum C_i \chi_{J_i} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \text{ - обычный интеграл не зависит от разбиения}$$

Теорема (Примитивная теорема Фубини)**:** Введем удобные обозначения: $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m,\ X \times Y = \mathbb{R}^{n+m}$. Пусть $f \in Step(X \times Y, E)$. Тогда:

1. $\forall x \in X$ функция $f(x, y)$ от y (выбрали $\forall x \in X$, зафиксировали, аргументом стал только y), отображающая $y \to f(x, y)$ является ступенчатой на Y.
2. Функция от x, отображающая $x \to \int_Y f(x, y)\,dy$ - ступенчатая на X.
3. $\int_X \left(\int_Y f(x, y)\,dy\right) dx = \int_{X \times Y} f(x, y)\,d(x, y)$

Доказательство. 1. По условию $\exists$ система сегментов $J_1, \ldots, J_k$ в $X \times Y$ и набор констант $C_1, \ldots, C_k$ такой, что

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \chi_{J_i}(x, y)$$

Каждый из сегментов J_i - это $\underbrace{J_i^X}_{\text{сегмент из X}} \times \underbrace{J_i^Y}_{\text{сегмент из Y}}$ Тогда

$$\chi_{J_i}(x, y) = \chi_{J_i^X}(x) \cdot \chi_{J_i^Y}(y)$$

$$\forall x\ f(x, y) = \sum \underbrace{C_i \cdot \chi_{J_i^X}(x)}_{d_i} \cdot \chi_{J_i^Y}(y) \text{ - это ступенчатая функция на Y}$$

Если x - фиксирован, то эта запись определяет ступенчатую функцию на Y.

2.

$$\int_Y f(x, y)\,dy = \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot \chi_{J_i^X}(x) \cdot \mu_Y(J_i^Y) = \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot \mu_Y(J_i^Y) \cdot \chi_{J_i^X}(x) \text{ - ступенчатая функция на X}$$

3.

$$\text{Интеграл от предыдущей функции по } X = \sum_{i=1}^{m} C_i \cdot \mu_Y(J_i^Y) \cdot \mu_X(J_i^X) = \int_{X \times Y} f(x, y)\,d(x, y)$$

$$\text{так как } \mu_Y(J_i^Y) \cdot \mu_X(J_i^X) = \mu_{X \times Y}(J_i^X \times J_i^Y) = \mu_{X \times Y}(J_i)$$

$\square$

Лемма (Лемма о счетном покрытии отрезка) Пусть $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. При этом I, J_n - сегменты в $\mathbb{R}$, и система $\{J_n\}$ - дизъюнктная (отрезки не пересекаются). Тогда $\mu_1(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(J_n)$.

Доказательство. Поскольку $\forall k \sum_{n=1}^{k} \leq \sum_{n=1}^{\infty}$, то $\mu_1(I) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(J_n)$.
Но почему $\mu_1(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(J_n)$? Будем считать, что I - замкнутый отрезок (если мы добавим концы, то ничего в рассуждениях не изменится).

Пусть $\varepsilon > 0$, покажем, что $\mu_1(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(J_n) + \varepsilon$. Каждый сегмент $J_n = \langle a_n, b_n \rangle$ удлиним на $\frac{\varepsilon}{2^n}$, положив $\tilde{J}_n = (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$, очевидно, $J_n \subseteq \tilde{J}_n$, а значит $\mu_1(\tilde{J}_n) = \mu_1(J_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Получим покрытие отрезка I открытыми множествами $\tilde{J}_n$.

В силу компактности I существует конечное подпокрытие $J_{n_1}, \ldots, J_{n_m}$:

$$I \subset \underbrace{J_{n_1} \cup \ldots \cup J_{n_m}}_{\text{конечная система}} \subset \bigcup_{n_1}^{n_m} \tilde{J}_n$$

$$\mu_1(I) \leq \sum_{n_1}^{n_m} \tilde{J}_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu_1(J_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(J_n) + \varepsilon$$

Поскольку это неравенство выполнено $\forall \varepsilon > 0$, то верно, что $\mu_1(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(J_n)$. □

Что интересно, в $\mathbb{Q}$ лемма неверна, поскольку там любой сегмент это счетное объединение точек.

Опр. Интегральная оценка:

Пусть $f : \mathbb{R}^k \to E$ - произвольная функция. Число $C \in [0, \infty)$ называется интегральной оценкой функции f, если существует возрастающая последовательность ступенчатых функций $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \forall x$ такая, что

1. $\forall x \in \mathbb{R}^k \;\; \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \geq |f(x)|$
2. $\forall n$ элементарный $\int_{\mathbb{R}^k} \varphi_n \leq C$.

Опр. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что M - пренебрежимое множество в $\mathbb{R}^n$(множество меры нуль), если $\forall \varepsilon > 0$ M можно покрыть счетным набором сегментов, сумма мер которых $\leq \varepsilon$.

Опр. Интегральная норма

$$||f||_{L_1} := \inf \text{множества всех интегральных оценок}, \;\; f \in [0, \infty)$$

Опр. $f : \mathbb{R}^k \to E$ любая интегрируема по Лебегу, если существует последовательность ступенчатых функций $f_1, \ldots, f_n, \ldots : \mathbb{R}^k \to E$ таких, что $||f - f_n||_{L_1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ Интеграл от f в этом случае:

$$\int_{\mathbb{R}} f \, dx := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, dx$$

Утв. (Принцип исчерпывания для элементарных множеств) Пусть S_k для $k = 1, 2, \ldots$ и S - элементарные множества. Если $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, то $\mu(S) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k)$.

На самом деле это кусок из доказательства леммы о счетном покрытии отрезка.

Утв. (Следствие) Если S_k - дизъюнктны ($S_k \cap S_l \neq \varnothing$ если $k \neq l$) и $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, то $\mu(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k)$.

Лемма (Принцип исчерпывания для вложенных множеств) Пусть множество U и последовательность $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \in Step$, причем $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, тогда $\lim_{i\to\infty} \mu(U_i) \geq \mu(U)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{U}_1 := U_1, \tilde{U}_2 := U_2 \backslash U_1, \ldots, \tilde{U}_n := U_n \backslash U_{n-1}$ и так далее. Поскольку $U_n = \tilde{U}_1 \cup \ldots \cup \tilde{U}_n$, то $\bigcup \tilde{U}_n = \bigcup U_n$. Тогда по классическому принципу исчерпывания:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{U}_n) \geq \mu(\tilde{U})$$

Сумма слева - классическая сумма ряда, т.е. предел последовательности частичных сумм, с учетом, что $\sum_{n=1}^{k} \mu(\tilde{U}_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{k} \tilde{U}_n)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{U}_n) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(\tilde{U}_n) = \lim_{k \to \infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{k} \tilde{U}_n) = \mu(U_n)$$

□

Утв. (Интеграл элементарной функции как мера подграфика) Пусть ступенчатая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f \geq 0 (\forall x \; f(x) \geq 0)$. Пусть $U_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, \; 0 \leq y \leq f(x)\}$. Тогда:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \mu_{n+1}(U_f)$$

Т.е. интеграл n-мерной ступенчатой функции является мерой размерности $n+1$ для ее подграфика.

Доказательство. Представим $f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \chi(S_k)$, где S_k - дизъюнктные сегменты в $\mathbb{R}^n$. Тогда из того, что $f(x) \geq 0$ следует, что $\lambda_k \geq 0$. По определению:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \mu_n(S_k)$$

Заметим, что $\lambda_k \cdot \mu_n(S_k) = \mu_{n+1}(S_k \times [0, \lambda_k])$, ведь $S_k \times [0, \lambda_k]$ - сегмент размерности $n+1$, это буквально U_f по определению. А сумма $\sum_{k=1}^{m} \mu_{n+1}(S_k \times [0, \lambda_k]) = \sum_{k=1}^{m} \mu_{n+1}(U_f)$. □

Утв. (Принцип исчерпывания для последовательности элементарных функций) Пусть даны $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots$ и φ - ступенчатые функции. Если $\forall x \; \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) \geq \varphi(x) (\star)$, то

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi$$

Доказательство. Предположим что $\varphi_1 \geq 0$ и $\varphi \geq 0$. Тогда $\forall k \; \varphi_k \geq 0$ в силу возрастания последовательности. Заметим, что из условия $(\star)$ следует, что $\bigcup_{k=1} U_{\varphi_k} \supset U_\varphi$. В самом деле, если $(x, y) \in U_\varphi$ (точка принадлежит подграфику), то $0 \leq y < \varphi(x)$ и $\exists K \mid 0 \leq y < \varphi_K(x)$, т.е. $(x, y) \in U_{\varphi_k}$. Заметим также, что из $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots$ следует, что $U_{\varphi_1} \subset U_{\varphi_2} \subset \ldots$. Теперь используя интеграл как меру подграфика:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k = \mu_{n+1}(U_{\varphi_k}), \; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = \mu_{n+1}(U_\varphi)$$

Осталось воспользоваться принципом исчерпывания для вложенных множеств.
А теперь рассмотрим общий случай, когда φ_1, φ могут быть и меньше нуля. Прибавим ко всем φ_i и φ функцию $\psi \in Step$, так, чтобы стало $\begin{cases} \varphi_1 + \psi \geq 0 \\ \varphi + \psi \geq 0 \end{cases}$ В качестве $\psi(x)$ можно взять $\psi = \max(-\varphi_1, -\varphi_1)$ - а это ступенчатая функция. Рассмотрим теперь $\begin{cases} \tilde{\varphi}_n := \varphi_n + \psi \geq 0 \\ \tilde{\varphi} := \varphi + \psi \geq 0 \end{cases}$, тогда по первой части доказательства получаем, что $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_n \geq \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}$ Заметим, что

$$\int \tilde{\varphi}_n = \int \varphi_n + \int \psi, \; \int \tilde{\varphi} = \int \varphi + \int \psi$$

В обеих частях есть $\int \psi$, который еще и не зависит от n. Избавившись от него получаем необходимое утверждение. □

Утв. (Свойства интегральной нормы) Перечислим свойства интегральной нормы:

1. $||f|| = ||\ |f|\ ||$
2. $\forall f\ \ ||f|| \geq 0$
3. $||\lambda f(x)|| = |\lambda| \cdot ||f||$
4. Неравенство бесконечноугольника:
   Если сумма $\sum_{k=1}^{f_k}$ существует $\forall x$, то

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||f||$$

Доказательство. Докажем четвертое свойство. Можно считать, что $\forall k\ f_k < \infty$, иначе справа в нашем утверждении будет ∞ и нечего там доказывать.
Пусть $\varepsilon > 0$, у нас существует каскад $\sigma_{11} \leq \sigma_{12} \leq \ldots$ для f_1 такой, что $\lim_{k\to\infty} \sigma_{1k}(x) \geq ||f_1(x)||$, но при этом $\forall k$ выполнено $\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_{1k}(x) \leq ||f(x)|| + \frac{\varepsilon}{2^1}$.
Для f_2 существует каскад $\sigma_{21} \leq \sigma_{22} \leq \ldots$, такой, что $\lim_{k\to\infty} \sigma_{2k}(x) \geq ||f_2(x)||$, но $\forall k\ \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_{2k} \leq ||f_2|| + \frac{\varepsilon}{2^2}$ и так далее для всех f_i.
Построим каскад для функции $g := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Пусть $\rho_1 := \sigma_{11},\ \rho_2 := \sigma_{21} + \sigma_{22},\ \ldots, \rho_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_{ik}$. Помним, что все ρ и σ - ступенчатые функции. А еще отметим, что ρ_i образуют возрастающую последовательность $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \ldots$.

Покажем, что $\lim_{k\to\infty} \rho_k(x) \geq ||g(x)||$. Для этого сначала установим, что
$\forall m\ \lim_{k\to\infty} \rho_k(x) \geq ||\sum_{k=1}^{m} f_k(x)||\ (\star)$.

$$\forall k \geq m\ \rho_k(x) \geq \sigma_{1k}(x) + \ldots + \sigma_{mk}(x)$$

Поэтому $\lim_{k\to\infty} \rho_k(x) \geq \lim_{k\to\infty} [\sigma_{1k}(x) + \ldots + \sigma_{mk}(x)] = \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sigma_{1k}(x)}_{\leq ||f_1||} + \ldots + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sigma_{mk}(x)}_{||f_m||} \geq$ $||f_1 + \ldots + f_m||$ В искомом неравенстве $(\star)$ теперь перейдем к пределу по $m \to \infty$ и по неравенству пределов получим, что

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k(x) \geq \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right|\right|$$

Это нам и нужно было.

Поскольку для f_i мы вводили σ_{ik} с условием, что $\forall k\ \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_{ik} \leq ||f_i|| + \frac{\varepsilon}{2^i}$, то:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_{1k}}_{\leq ||f_1|| + \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_{2k}}_{\leq ||f_2|| + \frac{\varepsilon}{2^2}} + \ldots + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \sigma_{kk}}_{\leq ||f_k|| + \frac{\varepsilon}{2^k}} \leq ||f_1|| + \ldots \leq ||f_k|| + \varepsilon \tag{10}$$

Итак, нашелся каскад ρ_k, дающий интегральную оценку вида (10) для функции $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$.
То есть:

$$\forall \varepsilon\ \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k|| + \varepsilon$$

В силу общности выбора ε получаем искомое. □

Опр. Функция $f : \mathbb{R}^n \to E$ интегрируема по Лебегу ($f \in L_1(\mathbb{R}^n, E)$), если $\exists$ последовательность $\varphi_n \in Step(\mathbb{R}^n, E)$ (т.е. $||f - \varphi_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$). В это случае:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k$$