

# Вопросы к экзамену по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

## 1 Вопросы

1. Производная вдоль вектора.
2. Частные производные.
3. Дифференциал.
4. Дифференцируемость функции в точке.
5. Достаточный признак дифференцируемости.
6. Необходимые условия экстремума.
7. Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению.
8. Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.
9. Градиент вещественной функции.
10. Векторные поля.
11. Потенциал векторного поля.
12. Многократная дифференцируемость.
13. Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример". **TODO:** контрпример
14. Высшие дифференциалы.
15. Пример не коммутирующих дифференциальных операторов.
16. Теорема о разложении Тейлора.
17. Гессиан вещественной функции. Достаточные условия экстремума.
18. Функции класса  $C^k$  на открытом множестве (и на множествах, не обязательно открытых).
19. Теорема об открытости отображения вида  $f(x) = x + \varphi(x)$ , где  $\varphi$  — сжимающее отображение.
20. Теорема о локальной обратимости, "контрпримеры".
21. Лемма о локальном наложении.
22. Теорема о неявной функции.
23. Теорема об обратной функции.
24. Многообразия в  $\mathbb{R}^n$ .
25. Примеры двумерных многообразий: сфера, тор, цилиндр, лист Мёбиуса.
26. Теорема Брауэра об инвариантности области (формулировка).  
Гомеоморфизмы и  $C^r$ -изоморфизмы.
27. Многообразия с краем. лемма о крае полупространства.
28. Лемма об изоморфизме многообразий. лемма об открытых частях многообразия.

29. Теорема о крае многообразия.
30. Теоремы о регулярных решениях.
31. Касательное пространство. Дифференциал как отображение касательных пространств, корректность определения, свойства.
32. Круг и квадрат гладко не изоморфны.
33. Теорема о регулярном дополнении.
34. Метод множителей Лагранжа, достаточные условия экстремума.
35. Лемма о локальном вложении.
36. Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций.
37. Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей и для рядов.
38. Признак Вирштрасса равномерной сходимости ряда.
39. Признак Абеля. Признак Дирихле.
40. Непрерывность дзета-функции при  $x>1$ .
41. Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций.
42. Интегрирование равномерного предела. Пример "расползающаяся кучка".
43. Теорема о пределе производных.
44. Теорема о дифференцировании функционального ряда.
45. Теорема Абеля.
46. Теорема о сумме степенного ряда.
47. Ортогональность тригонометрической системы функций.
48. вещественная и комплексная форма записи ряда Фурье.
49. Лемма об интегралах периодической функции.
50. Формула Дирихле.
51. Теорема Фурье.
52. Теоремы Вейерштрасса о тригонометрической и о полиномиальной аппроксимации.
53. Равенство Парсеваля.
54. Изoperиметрическое неравенство.
55. Прimitивный интеграл.
56. Мера сегмента.
57. Ступенчатые функции.
58. Интеграл ступенчатой функции, корректность и элементарная теорема Фубини.
59. Лемма о счетном покрытии интервала.

## 2 Ответы

### 2.1 Производная вдоль вектора

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

**Опр..** Производная вдоль вектора  $v$ :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если  $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ , то  $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

**Пример:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору  $v = (v_1, v_2)$  у функции есть производная в  $(0, 0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

### 2.2 Частные производные.

**Опр..** Частная производная по координате  $x_i$  это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для  $f(x, y) = x^y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

### 2.3 Дифференциал.

**Опр..** Дифференциал функции  $f$  в точке  $p$  - линейное отображение  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + o(x - p) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки  $p$  на вектор  $h$ :

$$f(p + h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

### 2.4 Дифференцируемость функции в точке.

Пусть  $f : U \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $p \in U$ . Функция  $f$  дифференцируема в  $p$ , если:

1.  $p \in Int(U)$  ( $\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U$ )
2.  $\exists$  дифференциал функции (линейное отображение)  $f$  в точке  $p \quad df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + o(x - p) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

## 2.5 Достаточный признак дифференцируемости.

**Теорема** (Достаточный признак дифференцируемости): Если все частные производные непрерывны в  $p$ , то  $f$  дифференцируема в  $p$  ( $f \in D(p)$ ).

Пример:  $f(x, y) = x^y$  дифференцируема во всех точках  $(x_0, y_0)$ , где  $x_0 > 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

## 2.6 Необходимые условия экстремума.

**Теорема** (Необходимое условие экстремума функции одной переменной - условие Ферма): Пусть  $f \in D(p)$  (дифференцируема в  $p$ ). Если  $p$  - экстремум, то  $f'(p) = 0$ .

**Замечание:** Но например для  $f(x) = x^3$   $f'(0) = 0$ , но 0 - не экстремум нашей функции  $f(x)$ .

**Замечание:** Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

**Теорема** (Необходимое условие экстремума функции многих переменных): Вектор частных производных первого порядка по переменным равен нулевому вектору:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = (0, \dots, 0)$$

## 2.7 Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению

Возьмем такую функцию:

$$f = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ее частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Т.е. существуют и равны 0. Рассмотрим производную по направлению, для этого будем брать производную по вектору  $u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ , который не направлен по осям координат, то есть  $\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos(\alpha), t \sin(\alpha)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t \cos(\alpha), t \sin(\alpha))}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t \cos(\alpha) \cdot t \sin(\alpha)}{(t \cos(\alpha))^2 + (t \sin(\alpha))^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 \cdot \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Ясно видно, что этот предел равен бесконечности. На самом деле, есть теорема, которая гласит "если функция дифференцируема в точке, то она в ней непрерывна и у нее существуют все направленные производные". Условие "существуют производные по любому направлению" на самом деле является достаточным признаком непрерывности функции в точке.

## 2.8 Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.

Дифференцируемость суммы, произведения и композиции удовлетворяет классическим правилам дифференцируемости, это несложно доказать, но мне лень.

## 2.9 Градиент вещественной функции

В случае, если функция  $f$  отображает  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , то матрица Якоби принимает вид  $1 \times n$  и называется **градиентом функции**.

**Опр..** Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

**Опр..** Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $p \in Int(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) = o(x - p)$ .

Если  $k = 1$ , то лин. отображение  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно задать как  $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$  - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем  $\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$  - вектор частных производных в точке  $p$ .

**Утв.** Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $f$  в точке  $p$ , вектор  $v$  единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi \text{ - угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку  $|\nabla f(p)| = const$ ,  $|v| = 1$ , то для максимизации надо выбрать такое  $\varphi$ , чтобы  $\cos(\varphi)$  был максимальен, т.е. вектора  $v$  и  $\nabla f$  параллельны и  $\nabla f$  задает наибольшую скорость роста.  $\square$

**Утв.**  $\nabla f(p)$  ортогонален поверхности уровня  $\Omega = \{x | f(x) = c\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(p) = c$  ( $p \in \Omega$ ). Пусть  $x_n \in \Omega$ , покажем, что  $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ :

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$ , т.е.  $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$ . Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

## 2.10 Векторные поля.

**Опр. 1.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется векторным полем.

## 2.11 Потенциал векторного поля.

**Опр. 2.** Потенциалом векторного поля  $F$  (если он есть) называется **скалярная** функция  $U : W \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\nabla U = F$ . Если потенциал существует, то  $F$  называется потенциальным полем.

## 2.12 Многократная дифференцируемость.

**Опр..** Рекурсивное:  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $k$  раз дифференцируема в точке  $p$  ( $f \in D^k(p)$ ), если:

1.  $f$  дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки  $p$ ;
2. Все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  дифференцируемы  $k - 1$  раз в точке  $p$ .

**Утв.** Если  $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$  тогда  $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

*Доказательство.*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$ ,  $g(x) \in D^k(p)$ ,  $f(x) \in D^k(p)$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ , то  $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ .  $\square$

## 2.13 Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример".

**Теорема** (о вторых производных): Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in D^2(p)$ . Тогда  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $n = 2$ , так как при заданной функции  $f(x_1, x_2, \dots)$  можно в качестве  $f$  рассмотреть сужение  $f$  на плоскость  $Ox_1x_2$ , т.к. при дифференцировании по  $x_1$  или  $x_2$  остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что  $p = 0$  и что  $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ . Чтобы показать почему так можно считать введем  $f_1$ :

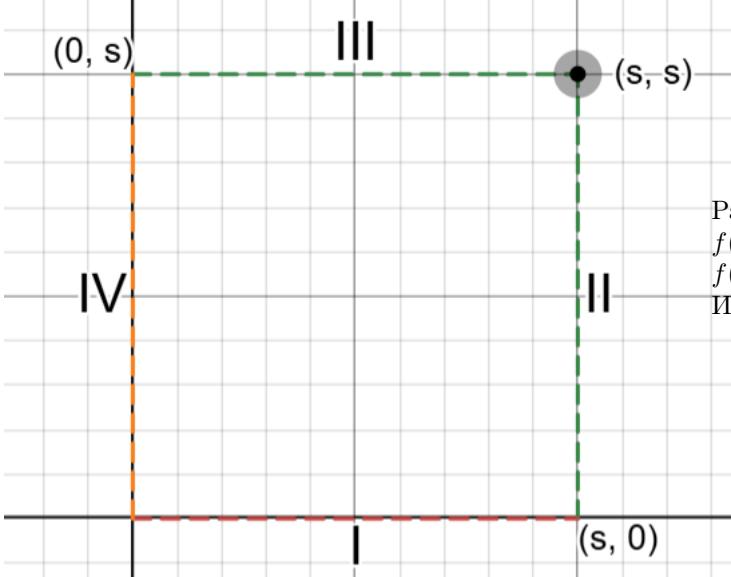
$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0) \end{aligned}$$

Дальше считаем, что  $f = f_1$  и  $f(0, 0) = 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \text{ где } \alpha_1(x, y) = o(x, y), \quad (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y \rangle$$

По условию  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$ , поэтому  $a_{11} = f_{xx}(0)$ ,  $a_{12} = f_{xy}(0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y), \quad a_{21} = f_{yx}(0), \quad a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку  $(s, s)$  вблизи нуля. Для нее  $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I)$ . И в то же время  $f(s, s) = (IV) + (III)$

$$II = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^s \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) dt = \int_{t=0}^s a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t) dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем  $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt$ . Аналогично для I:

$$I = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) dt = \int_{t=0}^s a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t) dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \quad \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, 0) dt$$

Итого:  $f(s, s) - f(0, 0) = I + II = s^2 \left( a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \right)$ , что на самом деле равно  $III + IV = s^2 \left( a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \right)$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \quad (1)$$

При малых  $s$ :

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(0, t) dt, \quad \varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, s) dt$$

Осталось показать, что  $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x,y \rightarrow 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге  $V$  точки  $(0, 0)$  выполнено  $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ . Для  $s$  таких, что  $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$ , при  $|x| \leq s, |y| \leq s$ . Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left| \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt \right| \leq \int_{t=0}^s |\alpha_2(s, t)| dt \leq \int_{t=0}^s \varepsilon \cdot s \sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что  $\varepsilon_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$ , аналогичным образом показываем для  $\varepsilon_{2,3,4}$ . Тогда в равенстве 1  $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \rightarrow 0$  и  $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \rightarrow 0$ , а значит  $a_{21} = a_{12}$ , то есть  $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$ .  $\square$