Вопросы к экзамену по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Вопросы

1. ~~Производная вдоль вектора.~~
2. ~~Частные производные.~~
3. ~~Дифференциал.~~
4. ~~Дифференцируемость функции в точке.~~
5. ~~Достаточный признак дифференцируемости.~~
6. ~~Необходимые условия экстремума.~~
7. Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению. **TODO: в чате группы**
8. ~~Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.~~
9. ~~Градиент вещественной функции.~~
10. ~~Векторные поля.~~
11. ~~Потенциал векторного поля.~~
12. ~~Многократная дифференцируемость.~~
13. ~~Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример".~~
14. Высшие дифференциалы. **TODO: в тетрадке есть оказывается**
15. Пример не коммутирующих дифференциальных операторов.
16. ~~Теорема о разложении Тейлора.~~
17. Гессиан вещественной функции. Достаточные условия экстремума. **TODO: гессиан? что тут про него писать, интересно?**
18. Функции класса C^k на открытом множестве (и на множествах, не обязательно открытых).
19. Теорема об открытости отображения вида $f(x) = x + \varphi(x)$, где φ — сжимающее отображение.
20. Теорема о локальной обратимости, "контрпримеры".
21. Лемма о локальном наложении.
22. Теорема о неявной функции.
23. Теорема об обратной функции.
24. Многообразия в $\mathbb{R}^n$.
25. Примеры двумерных многообразий: сфера, тор, цилиндр, лист Мёбиуса.
26. Теорема Брауэра об инвариантности области (формулировка).
Гомеоморфизмы и C^r-изоморфизмы.
27. Многообразия с краем. лемма о крае полупространства.

28. Лемма об изоморфизме многообразий. лемма об открытых частях многообразия.
29. Теорема о крае многообразия.
30. Теоремы о регулярных решениях.
31. Касательное пространство. Дифференциал как отображение касательных пространств, корректность определения, свойства.
32. Круг и квадрат гладко не изоморфны.
33. Теорема о регулярном дополнении.
34. Метод множителей Лагранжа, достаточные условия экстремума.
35. Лемма о локальном вложении.
36. Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций.
37. Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей и для рядов.
38. Признак Вирштрасса равномерной сходимости ряда.
39. Признак Абеля. Признак Дирихле.
40. Непрерывность дзета-функции при $x>1$.
41. Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций.
42. Интегрирование равномерного предела. Пример "расползающаяся куча".
43. Теорема о пределе производных.
44. Теорема о дифференцировании функционального ряда.
45. Теорема Абеля.
46. Теорема о сумме степенного ряда.
47. Ортогональность тригонометрической системы функций.
48. Вещественная и комплексная форма записи ряда Фурье.
49. Лемма об интегралах периодической функции.
50. Формула Дирихле.
51. Теорема Фурье.
52. Теоремы Вейерштрасса о тригонометрической и о полиномиальной аппроксимации.
53. Равенство Парсеваля.
54. Изопериметрическое неравенство.
55. Примитивный интеграл.
56. Мера сегмента.
57. Ступенчатые функции.
58. Интеграл ступенчатой функции, корректность и элементарная теорема Фубини.
59. Лемма о счетном покрытии интервала.

2 Ответы

2.1 Производная вдоль вектора

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр.. Прозводная вдоль вектора v:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0, 0)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t \to 0}{=} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

2.2 Частные производные.

Опр.. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

2.3 Дифференциал.

Опр.. Дифференциал функции f в точке p - линейное отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \to p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки p на вектор h:

$$f(p + h) = f(p) + df(p) < h > + o(|h|)$$

2.4 Дифференцируемость функции в точке.

Пусть $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференциируема в p, если:

1. $p \in Int(U) \quad (\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U)$
2. $\exists$ дифференциал функции (линейное отображение) f в точке $p \quad df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \to p}{=} o(x - p))$$

2.5 Достаточный признак дифференциируемости.

Теорема (Достаточный признак дифференциируемости)**:** Если все частные производные непрерывны в p, то f дифференциируема в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x,y) = x^y$ дифференциируема во всех точках (x_0, y_0), где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

2.6 Необходимые условия экстремума.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции одной переменной - условие Ферма)**:** Пусть $f \in D(p)$ (дифференциируема в p). Если p - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0$, но 0 - не экстремум нашей функции $f(x)$.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции многих переменных)**:** Вектор частных производных первого порядка по переменным равен нулевому вектору:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (0, \ldots, 0)$$

2.7 Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению

Возьмем такую функцию:

$$f = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ при } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ при } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ее частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Т.е. существуют и равны 0. Рассмотрим производную по направлению, для этого будем брать производную по вектору $u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, который не направлен по осям координат, то есть $\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\cos(\alpha), t\sin(\alpha)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t\cos(\alpha)), t\sin(\alpha)}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t\cos(\alpha) \cdot t\sin(\alpha)}{(t\cos(\alpha))^2 + (t\sin(\alpha))^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 \cdot \cos(\alpha)\sin(\alpha)}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

Ясно видно, что этот предел равен бесконечности. На самом деле, есть теорема, которая гласит "если функция дифференциируема в точке, то она в ней непрерывна и у нее существуют все направленные производные". Условие "существуют производные по любому направлению"на самом деле является достаточным признаком непрерывности функции в точке.

2.8 Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.

Дифференцируемость суммы, произведения и композиции удовлетворяет классическим правилам дифференциируемости, это несложно доказать, но мне лень.

2.9 Градиент вещественной функции

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1 \times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр.. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Опр.. Функция дифференциируема в точке, если

- $f : U \to \mathbb{R}^k$ и $p \in Int(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно задатьа как $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ - вектор частных производных в точке p.

Утв. Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p, вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \underset{t \to 0}{\to} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot cos(\varphi), \text{где } \varphi \text{ - угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p) = const, |v| = 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ, чтобы $cos(\varphi)$ был максимален, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. ☐

Утв. $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x | f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ $(p \in \Omega)$. Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \underset{n \to \infty}{\to} 0$:

$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p)$.

Значит $0 \underset{n \to \infty}{=} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \to 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot cos(\alpha) \to 0, \text{ т.е.} \alpha \underset{n \to \infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

☐

2.10 Векторные поля.

Опр.. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

2.11 Потенциал векторного поля.

Опр.. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \to \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

2.12 Многократная дифференцируемость.

Опр.. Рекурсивное: $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ k раз дифференциируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференциируема во всех точках некоторой окрестности точки p;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференциируемы $k-1$ раз в точке p.

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p),\ g(x) \in D^k(p),\ f(x) \in D^k(p),\ \frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. □

2.13 Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример".

Теорема (о вторых производных)**:** Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2, т.к. при дифференциировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1:

$$f_1(x, y) := f(x, y) - f'_x(0,0) \cdot x - f'_y(0,0) \cdot y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - f'_x(0,0)$$

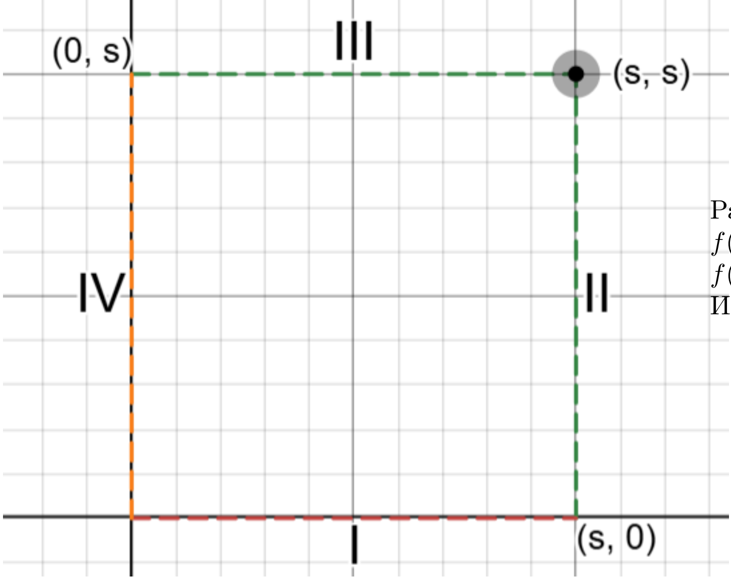
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) - f'_y(0,0)$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0,0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0,0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y),\ \text{где}\ \alpha_1(x, y) = o(x, y),\ (a_{11}, a_{12}) = df(0,0)\langle x, y \rangle$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому $a_{11} = f_{xx}(0),\ a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0,0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y),\ a_{21} = f_{yx}(0),\ a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s,s) вблизи нуля. Для нее $f(s,s)-f(0,0)=(f(s,s)-f(s,0))+(f(s,0)-f(0,0))=(II)+(I)$.
И в то же время $f(s,s)=(\mathrm{IV})+(\mathrm{III})$

$$\mathrm{II}=f(s,s)-f(s,0)=\int_{y=0}^{s}\frac{\partial f}{\partial y}(s,t)dt=\int_{t=0}^{s}a_{21}s+a_{22}t+\alpha_2(s,t)dt=a_{21}s^2+\frac{a_{22}s^2}{2}+\varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s)=\int_{t=0}^{s}\alpha_2(s,t)dt$. Аналогично для I:

$$\mathrm{I}=f(s,0)-f(0,0)=\int_{t=0}^{s}\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt=\int_{t=0}^{s}a_{11}t+a_{12}\cdot 0+\alpha_1(t)dt=\frac{a_{11}}{2}s^2+\varepsilon_2(s),\ \varepsilon_2(s)=\int_{t=0}^{s}\alpha_1(t,0)dt$$

Итого: $f(s,s)-f(0,0)=\mathrm{I}+\mathrm{II}=s^2\left(a_{21}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{22}}{2}+\frac{\varepsilon_1(s)+\varepsilon_2(s)}{s^2}\right)$, что на самом деле равно $\mathrm{III}+\mathrm{IV}=$ $=s^2\left(a_{12}+\frac{a_{11}}{2}+\frac{a_{22}}{2}+\frac{\varepsilon_3(s)+\varepsilon_4(s)}{s^2}\right)$

$$a_{21}+\frac{a_{11}+a_{22}}{2}+\frac{\varepsilon_1(s)+\varepsilon_2(s)}{s^2}=a_{12}+\frac{a_{22}+a11}{2}+\frac{\varepsilon_3(s)+\varepsilon_4(s)}{s^2}\tag{1}$$

При малых s:

$$\varepsilon_3(s)=\int_{t=0}^{s}\alpha_2(0,t)dt,\quad \varepsilon_3(s)=\int_{t=0}^{s}\alpha_1(t,s)dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4}\underset{s\to 0}{=}o(s^2)$. Пусть $\varepsilon>0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s)=\int_{t=0}\alpha_2(s,t)dt,\quad \alpha_2(x,y)\underset{x,y\to 0}{=}o(x,y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0,0)$ выполнено $\forall(x,y)\in V\quad \alpha_2(x,y)\le\varepsilon\cdot\sqrt{x^2+y^2}$. Для s таких, что $(s,s)\in V\quad \alpha_2(x,y)\le\varepsilon\cdot\sqrt{2}\cdot s$, при $|x|\le s,\ |y|\le s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)|=\left|\int_{t=0}^{s}\alpha_2(s,t)dt\right|\le\int_{t=0}^{s}|\alpha_2(s,t)|\,dt\le\int_{t=0}^{s}\varepsilon\cdot s\sqrt{2}\cdot dt=\varepsilon s^2\sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s)\underset{s\to 0}{=}o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$ Тогда в равенстве 1 $\frac{\varepsilon_1(s)+\varepsilon_2(s)}{s^2}\to 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s)+\varepsilon_4(s)}{s^2}\to 0$, а значит $a_{21}=a_{12}$, то есть $f_{xy}(0)=f_{yx}(0)$. □

Пример: Контрпример:

Возьмем функцию $f=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\ (x,y)\ne(0,0)\\ 0\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Если $x^2+y^2\ne 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}=g(x,y)$$

Если $x^2+y^2=0$, то поскольку $f(0,y)=f(x,0)=0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(-y)^4}{(0^2+y^2)^2}=-1$$

В силу симметричности функции (но с минусом) $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y^4x-4y^2x^3+x^5}{(x^2+y^2)^2}$.

$$f_{yy}(0,0)=0 \ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](0,0)=1$$

Однако функция g не дифференциируема в $0,0$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=0 \ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=-1$$

Если предположить, что да, то будет выполнена дифференицальная формула:

$$g(x,y) \underset{(x,y)\to 0}{=} 0\cdot x-1\cdot y+o(x,y)$$

$$\begin{cases} y=kt \\ x=t \end{cases} \quad g(x,y)=\frac{t^5(k+4k^3-k^5)}{t^4(1+k^2)^2}=\frac{t(k+4k^3-k^5)}{(1+k^2)^2}$$

Если, например, $k=1$, то $g(t,t)=t\cdot 1$, а если g дифференциируема, должно быть $g(t,t)=-t+o(t)$. Значит, предположение не выполняется и g - не дифференциируема.

2.14 Высшие дифференциалы.

2.15 Пример не коммутирующих дифференциальных операторов.

2.16 Теорема о разложении Тейлора.

Теорема (разложение Тейлора)**:** $\exists!$ многочлен $A(x)$ степени $\leq k$ такой, что $f(x)-A(x) \underset{x\to p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

Теорема (разложение Тейлора для нескольких переменных)**:** Пусть $f:\mathbb{R}^m\to E,\ f\in D^k(p)$, тогда $\exists!$ многочлен $A(x)$ $deg(A)\leq k$, такой, что $f(x)-A(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k)$:

$$A(x)=f(p)+\frac{df(p)\langle x-p\rangle}{1!}+\frac{d^f(p)\langle x-p\rangle}{2!}+\ldots+\frac{d^kf(p)\langle x-p\rangle}{k!}$$

Доказательство. **Единственность:** Пусть есть два таких многочлена $A(x),B(x)$. Введем $C(x):=A(x)-B(x)=o(|x-p|^k)$. И докажем вспомогательное утверждение:

Утв. $degC\leq k$ $C(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k)$, тогда $C\equiv 0$.

Доказательство.

1. Фиксируем $v\in\mathbb{R}^m$ и рассмотрим $h(t)=C(p+tv)$ - многочлен одной переменной. По условию $h(t)=o(t^k)$ для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е. $h(t)\equiv 0$. В частности, при $t=1$ $h(t)=C(p+v)=0$.
2. Поскольку 1. выполняется $\forall v$, то $C(p+v)=0\ \forall v$.

$\square$

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

Существование: Введем $g(x) = f(x) - A(x),\ f : \mathbb{R}^m \to E$. $g(p) = 0$ и все производные до порядка k включительно равны 0 в p, $g \in D^K(p)$. Необходимо доказать, что из этого следует, что $g(x) = o(|x-p|^k)$.

Пусть $\varepsilon > 0$, надо показать, что $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x-p|^k$ в некоторой U - окрестности точки p. Пусть $\varepsilon_{k-1}(x)$ - какая-то производная порядка $k-1$ функции g, ε_{k-1} определена в некотором шаре V_p с центром в p.

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0,\ \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0\ \forall i = 1 \dots m \tag{2}$$

Поэтому имеется маленький шар $U \subset V_p$ в котором выполнено:

$$\forall x \in U\ \ |\varepsilon_{k-1}|(x) \leq \varepsilon \cdot |x-p| \tag{3}$$

В самом деле, $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x-p\rangle + o(|x-p|)$, причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка k включительно равны 0 в p а второе - из уравнения (1). Значит $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x-p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon\,|x-p|$ Итак, ясно, что существует шарик U, в котором все производные $k-1$ порядка имеют оценку (3) Пусть ε_{k-2} - какая-то производная функции g порядка $k-2$. Все ее первые частные производные по доказанному в шаре U оцениваются в $\varepsilon \cdot |x-p|$. По лемме о степенной оценке приращения для ε_{k-2} выполнено в шаре U:

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left|\frac{\varepsilon\,|x-p|^2}{2}\right|$$

Для $k-3, k-4, \dots$ аналогично.

$$|g(x)| = \left|g^{(k-k)}(x)\right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x-p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x-p|^k$$

□

2.17 Гессиан вещественной функции. Достаточные условия экстремума.

Теорема 1 (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных)**:** Пусть $f \in D^2(p),\ f : \mathbb{R}^m \to R$ и $df(p) > 0$. Тогда:

1. $d^2 f(p) > 0$ - строгий локальный минимум
2. $d^2 f(p) < 0$ - строгий локальный максимум
3. Если $d^2 f(p)$ знаконеопределен, т.е. $\exists u \in \mathbb{R}^m\ d^2 f(p)\langle u\rangle > 0$ и $\exists v \in \mathbb{R}^m\ d^2 f(p)\langle v\rangle < 0$, то p - седловая точка.

Доказательство. Докажем пункт 3:

Доказательство. Пусть $df(p) = 0$ и существуют вектора u и v, такие, что $d^2 f(p)\langle u\rangle > 0,\ d^2 f(p)\langle v\rangle < 0$.

Введем функцию $h(t) = f(p+tu)$. Тогда $h'(0) = df(p)\langle u\rangle = 0,\ h''(0) = d^2 f(p)\langle u\rangle > 0$. Значит у функции h в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль $p + tv$ функция имеет строгий максимум, значит p - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

Доказательство. Пусть $d^2 f(p) > 0$, то есть $\forall v \neq 0\ d^2 f(p)\langle v\rangle > 0$. Сфера $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \quad |v| = 1\}$ - компактна (замкнута и ограничена). $d^2 f(p) : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ - однородный многочлен второго порядка. Так как $d^2 f$ - непрерывная функция на компакте, то у нее $\exists \min = C > 0$, т.е.
$\forall v \in S^{m-1} \quad d^2 f(p)\langle v\rangle \geq C$.

Утв. Тогда $\forall v \neq 0\ d^2 f(p)\langle v\rangle \geq C \cdot |v|^2$

Доказательство.

$$\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p)\langle v\rangle = d^f(p)\langle |v| \cdot \frac{v}{|v|}\rangle = |v|^2 \cdot d^2 f(p)\langle \frac{v}{|v|}\rangle \geq C \cdot |v|^2$$

$\square$

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p)\langle x-p\rangle + \frac{d^2 f(p)\langle x-p\rangle}{2!} + \alpha(x)\left|x-p\right|^2, \ \alpha(x) \underset{x\to p}{\to} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!} \cdot |x-p|^2 + \alpha(x)\left|x-p\right|^2$$

Существует окрестность U точки p, такая, что $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3}$ $\forall x \in U$. Тогда для $\forall x \in U$:

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!}\left|x-p\right|^2 - \frac{C}{3}\left|x-p\right|^2 = f(p) + \frac{C}{6}\left|x-p\right|^2$$

То есть $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6}\left|x-p\right|^2 > 0 \implies$ в U $f(p) < f(x)$ $\forall x \in U$. Пункт 1 доказан. $\square$

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. $\square$