

Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Дифференцирование функций

Опр. 1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $p \in U$, если:

1. f определена в некоторой окрестности точки p ($p \in \text{Int}(U)$)
2. $\exists \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(p+\Delta h)-f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$ (и этот предел равен $f'(p)$)

1.1 Экстремумы

Необходимое условие экстремума:

Пусть $f \in D(p)$ (дифференцируема в p). Если p - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: Но например для $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, но $f(x)$ не дифференцируема в 0.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Достаточное условие экстремума:

Пусть $f \in D^2(p)$ (дважды дифференцируема в p) и $f'(p) = 0$. В таком случае если

- $f''(p) < 0$ - точка p является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$ - точка p является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференцируема в p , если:

1. $p \in \text{Int}(U)$ ($\exists \epsilon > 0$ $B_\epsilon(p) \subset U$)
2. \exists дифференциал функции (линейное отображение) f в точке p $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + o(x-p) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p))$$

При сдвиге точки p на вектор h :

$$f(p+h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр. 2. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

Опр. 3. Продводная вдоль вектора v :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t \rightarrow 0}{\equiv} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

Утв. 1 Если f дифференцируема в p , то f - непрерывна в p .

Доказательство.

$$f(p+h) - f(p) \underset{h \rightarrow 0}{=} df(p) < h >$$

Линейное отображение $df(p) < >$ непрерывно, $o(h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, т.е. $f(p+h) \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} f(p)$. \square

Достаточный признак дифференцируемости:

Все частные производные непрерывны в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x, y) = x^y$ дифференцируема во всех точках (x_0, y_0) , где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

Опр. 4. Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1 \times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр. 5. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Опр. 6. Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ и $p \in Int(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать как $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ - вектор частных производных в точке p .

Утв. 2 Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p , вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi \text{ - угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p)| = const$, $|v| = 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ , чтобы $\cos(\varphi)$ был максимальен, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. \square

Утв. 3 $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x | f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ ($p \in \Omega$). Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$:

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит $0 \underset{n \rightarrow \infty}{=} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

\square

Опр. 7. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

Опр. 8. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

Теорема: Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(p)$, $g \in C^1(q)$, $q = f(p)$.

Тогда $g \circ f \in C^1(p)$, $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$. В матрицах Якоби: $D_{g \circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$.

Пример:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz. \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2yz) \cdot x^2y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_f = \begin{pmatrix} \sinh(ab) \cdot a & \sinh(ab) \cdot b \end{pmatrix}$$

$$D_g \cdot D_f = \begin{pmatrix} \sinh(x^2yz) \cdot xz & \sinh(x^2yz) \cdot xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Сторожку на слово.

Правило дифференцирования обратного отображения: Если невырождено и \exists обратное отображение $g : V \rightarrow U$, непрерывное в точке $q = f(p)$, тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

1.4 Многократная дифференцируемость

Опр. 9. $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ k раз дифференцируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки p ;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференцируемы $k - 1$ раз в точке p .

Пример:

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$, $g(x) \in D^k(p)$, $f(x) \in D^k(p)$, $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. \square

Теорема 1 (о вторых производных): Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2 , т.к. при дифференцировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1 :

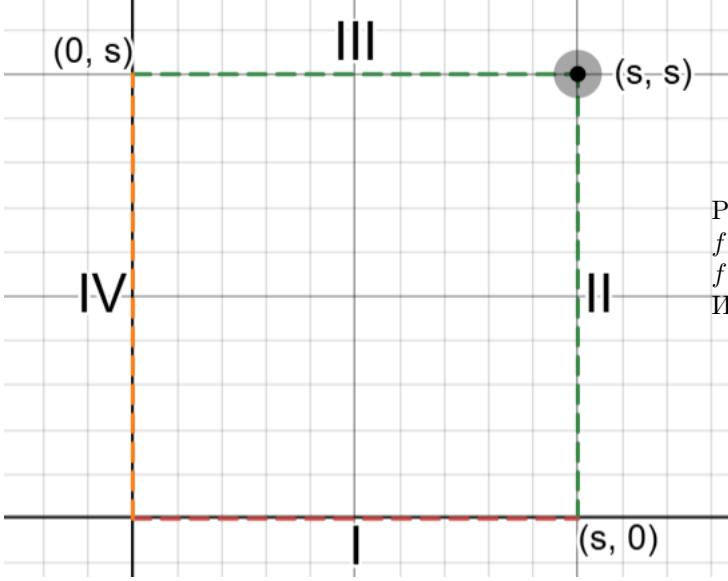
$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0) \end{aligned}$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0, 0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \quad \text{где } \alpha_1(x, y) = o(x, y), \quad (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y \rangle$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому $a_{11} = f_{xx}(0)$, $a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y), \quad a_{21} = f_{yx}(0), \quad a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s, s) вблизи нуля. Для нее $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I)$. И в то же время $f(s, s) = (IV) + (III)$

$$II = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^s \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) dt = \int_{t=0}^s a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t) dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt$. Аналогично для I:

$$I = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) dt = \int_{t=0}^s a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t) dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \quad \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, 0) dt$$

Итого: $f(s, s) - f(0, 0) = I + II = s^2 \left(a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \right)$, что на самом деле равно $III + IV = s^2 \left(a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \right)$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \quad (1)$$

При малых s :

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(0, t) dt, \quad \varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, s) dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x, y \rightarrow 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0, 0)$ выполнено $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. Для s таких, что $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$, при $|x| \leq s, |y| \leq s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left| \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt \right| \leq \int_{t=0}^s |\alpha_2(s, t)| dt \leq \int_{t=0}^s \varepsilon \cdot s \sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$. Тогда в равенстве 1 $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \rightarrow 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \rightarrow 0$, а значит $a_{21} = a_{12}$, то есть $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$. \square

Правило дифференцирования монома:

Пусть $f(x) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$. Тогда

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(0) = i_1! \cdot \dots \cdot i_m!$$

Любая другая производная любого порядка в точке 0 равна 0.

1.5 Мульти-индексы

Придумаем $\mu = (i_1, \dots, i_m)$ - численный вектор, в котором $\forall j = \overline{1 \dots m} \quad i_j \geq 0$ и назовем его **мультииндексом**.

Для мультииндексов определены операции:

$$\mu! := i_1! \cdot \dots \cdot i_m! \quad |\mu| = \sum_{j=1}^m i_j \text{ - порядок мультииндекса}$$

$$x \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, \dots, x_m), \quad x^\mu = x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$$

$$C_k^\mu = \frac{k!}{\mu!} = \frac{k!}{i_1! \cdot \dots \cdot i_m!}, \text{ где } k = |\mu|$$

Зададим контекст:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow E, \quad f \in D^k(p), \quad \mu = (i_1, \dots, i_m)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} = D^\mu f = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \left(\frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f \right) \right) \right)$$

Теорема (разложение Тейлора): $\exists!$ многочлен $A(x)$ степени $\leq k$ такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

Теорема (разложение Тейлора для нескольких переменных): Пусть $f : \mathbb{R}^m \rightarrow E$, $f \in D^k(p)$, тогда $\exists!$ многочлен $A(x)$ $\deg(A) \leq k$, такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$:

$$A(x) = f(p) + \frac{df(p)\langle x-p \rangle}{1!} + \frac{d^2f(p)\langle x-p \rangle}{2!} + \dots + \frac{d^k f(p)\langle x-p \rangle}{k!}$$

Доказательство. Единственность: Пусть есть два таких многочлена $A(x), B(x)$. Введем $C(x) := A(x) - B(x) = o(|x-p|^k)$. И докажем вспомогательное утверждение:

Утв. $\deg C \leq k$ $C(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$, тогда $C \equiv 0$.

Доказательство. 1. Фиксируем $v \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим $h(t) = C(p+tv)$ - многочлен одной переменной. По условию $h(t) = o(t^k)$ для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е. $h(t) \equiv 0$. В частности, при $t = 1$ $h(t) = C(p+v) = 0$.

2. Поскольку 1. выполняется $\forall v$, то $C(p+v) = 0 \forall v$.

□

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

Существование: Введем $g(x) = f(x) - A(x)$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow E$. $g(p) = 0$ и все производные до порядка k включительно равны 0 в p , $g \in D^K(p)$. Необходимо доказать, что из этого следует, что $g(x) = o(|x - p|^k)$.

Пусть $\varepsilon > 0$, надо показать, что $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x - p|^k$ в некоторой U - окрестности точки p . Пусть $\varepsilon_{k-1}(x)$ - какая-то производная порядка $k-1$ функции g , ε_{k-1} определена в некотором шаре V_p с центром в p .

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0, \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \quad (2)$$

Поэтому имеется маленький шар $U \subset V_p$ в котором выполнено:

$$\forall x \in U \quad |\varepsilon_{k-1}(x)| \leq \varepsilon \cdot |x - p| \quad (3)$$

В самом деле, $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x - p \rangle + o(|x - p|)$, причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка k включительно равны 0 в p а второе - из уравнения (1). Значит $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x - p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon |x - p|$. Итак, ясно, что существует шарик U , в котором все производные $k-1$ порядка имеют оценку (3). Пусть ε_{k-2} - какая-то производная функции g порядка $k-2$. Все ее первые частные производные по доказанному в шаре U оцениваются в $\varepsilon \cdot |x - p|$. По лемме о степенной оценке приращения для ε_{k-2} выполнено в шаре U :

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left| \frac{\varepsilon |x - p|^2}{2} \right|$$

Для $k-3, k-4, \dots$ аналогично.

$$|g(x)| = \left| g^{(k-k)}(x) \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x - p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x - p|^k$$

□

Теорема 2 (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных): Пусть $f \in D^2(p)$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow R$ и $df(p) > 0$. Тогда:

1. $d^2f(p) > 0$ - строгий локальный минимум
2. $d^2f(p) < 0$ - строгий локальный максимум
3. Если $d^2f(p)$ знаконеопределен, т.е. $\exists u \in \mathbb{R}^m \quad d^2f(p)\langle u \rangle > 0$ и $\exists v \in \mathbb{R}^m \quad d^2f(p)\langle v \rangle < 0$, то p - седловая точка.

Доказательство. Докажем пункт 3:

Доказательство. Пусть $df(p) = 0$ и существуют вектора u и v , такие, что $d^2f(p)\langle u \rangle > 0$, $d^2f(p)\langle v \rangle < 0$.

Введем функцию $h(t) = f(p + tu)$. Тогда $h'(0) = df(p)\langle u \rangle = 0$, $h''(0) = d^2f(p)\langle u \rangle > 0$. Значит у функции h в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль $p + tv$ функция имеет строгий максимум, значит p - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

Доказательство. Пусть $d^2f(p) > 0$, то есть $\forall v \neq 0 \quad d^2f(p)\langle v \rangle > 0$. Сфера $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid |v| = 1\}$ - компактна (замкнута и ограничена). $d^2f(p) : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ - однородный многочлен второго порядка. Так как d^2f - непрерывная функция на компакте, то у нее $\exists \min = C > 0$, т.е. $\forall v \in S^{m-1} \quad d^2f(p)\langle v \rangle \geq C$.

Утв. Тогда $\forall v \neq 0 \quad d^2f(p)\langle v \rangle \geq C \cdot |v|^2$

Доказательство.

$$\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p) \langle v \rangle = d^f(p) \langle |v| \cdot \frac{v}{|v|} \rangle = |v|^2 \cdot d^2 f(p) \langle \frac{v}{|v|} \rangle \geq C \cdot |v|^2$$

□

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \frac{d^2 f(p) \langle x - p \rangle}{2!} + \alpha(x) |x - p|^2, \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!} \cdot |x - p|^2 + \alpha(x) |x - p|^2$$

Существует окрестность U точки p , такая, что $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3}$ $\forall x \in U$. Тогда для $\forall x \in U$:

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!} |x - p|^2 - \frac{C}{3} |x - p|^2 = f(p) + \frac{C}{6} |x - p|^2$$

То есть $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6} |x - p|^2 > 0 \implies$ в U $f(p) < f(x) \forall x \in U$. Пункт 1 доказан. □

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. □

Теорема 3 (Полиномиальное разложение композиции): Пусть $k \geq 0$, f, g - функции, $A(x), B(y)$ - полиномы. Предположим, что f и A в точке p имеют порядок касания $\geq k$, g и B в точке p имеют порядок касания $\geq k$. То есть:

$$f(x) - A(x) = \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} o(|x - p|^k), \quad \alpha(p) = 0$$

$$g(y) - B(y) = \beta(y) \xrightarrow{y \rightarrow q} o(|y - q|^k), \quad \beta(q) = 0$$

Тогда $g \circ f$ имеет с $B \circ A$ порядок касания $\geq k$.

Доказательство. При $k = 0$:

$$\alpha(x) = o(1) \implies f(x) - A(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} 0 \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p)$$

Для функции g аналогично, после чего применяем теорему о непрерывности композиции. Для $k = 0$ доказано.

Пусть $k \geq 0$. Тогда:

$$\begin{cases} f(x) = \alpha(x) + A(x) \\ g(y) = \beta(y) + B(y) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(x) = o(|x - p|) \\ \beta(y) = o(|y - q|) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in D^1(p) \\ \beta \in D^1(q) \end{cases} \implies \begin{cases} f \in D^1(p) \\ g \in D^1(q) \end{cases}$$

$$g(f(x)) - B(A(x)) = g(f(x)) - B(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x)) = \beta(f(x)) + B(f(x)) + B(A(x))$$

Заметим, что $\beta(f(x)) = o(|f(x) - q|^k) \xrightarrow{x \rightarrow p} o(|f(x) - f(p)|^k)$. При этом $f(x) - f(p) = O(|x - p|^1)$, так как $f \in D^1(p)$. А значит:

$$\beta(f(x)) = o(O(|x - p|^k)) = o(|x - p|^k)$$

Пусть теперь V - шар конечного радиуса с центром в q . Все частные производные многочлена B в шаре V ограничены некоторой константой C . Тогда по лемме об оценке приращения:

$$\forall y_1, y_2 \in V \quad |B(y_1) - B(y_2)| = O(|y_1 - y_2|)$$

При $x \rightarrow p$ $\begin{cases} f(x) \rightarrow q \\ A(x) \rightarrow q \end{cases}$ и поэтому $f(x), B(x) \in V$. В таком случае

$$B(f(x)) - B(A(x)) \xrightarrow{x \rightarrow p} O(f(x) - A(x)) = O(o(|x - p|^k))$$

□

2 Основы гладкого анализа

Символ \subset_{op} обозначает "открыто в". Контекст:

$$U \subset_{op} \mathbb{R}^m, f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, f \in C^r(U), r \geq 0$$

Опр. 10. Отображение f называется r -гладким, если все ее частные производные до порядка r непрерывны на U .

Пусть X - не обязательно открыто в \mathbb{R}^m .

Опр. 11. $f \in C^r(X)$, если $f = \tilde{f}$ - сужение на \tilde{X} , $\tilde{f} : \tilde{X} \subset_{op} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ - C^r -гладкая на \tilde{X} . **НАДО УТОЧНИТЬ:** $X \subset \tilde{X}$ или наоборот.

Утв. 4 Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ - C^r отображения. Тогда $f + g \in C^r(X)$

Доказательство. Пусть $f = \tilde{f}$, $g = \tilde{g}$ и т.д. по определению r -гладкости:

$$\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^m, U, V \subset_{op} \mathbb{R}^m, X \subset U, X \subset V$$

Введем $U \cap V = W \subset_{op} \mathbb{R}^m$. На W заданы оба отображения и ясно, что $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$. \square

Утв. 5 Композиция:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \supset Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Если $f \in C^r$ и $g \in C^r$, то $g \circ f \in C^r$.

Доказательство. Область определения $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X \cap f^{-1}(\text{dom}(g))$

$$\begin{cases} f \in C^r \implies f = \tilde{f}, \tilde{f} : \mathbb{R}^m \supset_{op} \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^k - C^r\text{-гладкое.} \\ g \in C^r \implies g = \tilde{g}, \tilde{g} : \mathbb{R}^k \supset_{op} \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}^m - C^r\text{-гладкое.} \end{cases}$$

$$\text{dom}(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = \text{dom}(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(\text{dom}(\tilde{g})) = \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$$

\tilde{X} - открытое, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$ - открытое, как прообраз открытого множества \tilde{Y} при непрерывном отображении.

Ясно, что $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ - сужение $\text{dom}(g \circ f)$. \square

Теорема 4 (Лемма о классе гладкости обратного отображения): Пусть $U, V \subset_{op} \mathbb{R}^m$.

$U \xrightleftharpoons[f]{g} V$, f, g - непрерывны и взаимно обратны. Если $f \in C^r(U)$ и $\forall x \in U \ df(x)$ - невырожден: $\det(Df(x)) \neq 0$, то $g \in C^r(V)$.

Доказательство. При $r > 0$ g дифференцируема в $\forall y \in V$ по правилу дифференциирования обратного отображения. В матрицах Якоби:

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U, \text{ причем } f(x) = y, x = g(y)$$

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}, \text{ цепочка преобразований } y \rightarrow g(y) \rightarrow Df(g(y)) \rightarrow (Df(g(y)))^{-1}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), w - \text{отображение обращения матрицы.}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), \text{ причем } w \in C^\infty, Df \in C^{r-1}, g(y) - \text{дифференцируема}$$

g дифференцируема $\implies Dg$ тоже дифференцируема как композиция \implies все производные g дифференцируемы $\implies Dg \in C^1 \implies g \in C^2 \implies \dots \implies g \in C^{r-1} \implies Dg \in C^{r-1} \implies g \in C^r$. \square

Лемма Пусть $U \subset \overset{op}{\mathbb{R}^m}$, а $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое, что отображение $f(x) - x = \lambda(x)$ сжимающее, то есть $\forall x_1, x_2 \in U | \lambda(x_1) - \lambda(x_2) | \leq \lambda < 1$. Тогда:

$$1. f(U) \subset \mathbb{R}^m$$

2. Сужение $f : U \rightarrow f(U)$ обратимо и обратное отображение - липшицево с константой $\frac{1}{1-\lambda}$.

Доказательство. Докажем пункт 2:

f инъективно: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) - x_1 = \lambda(x_1) \\ f(x_2) - x_2 = \lambda(x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) = \lambda(x_1) + x_1 \\ f(x_2) = \lambda(x_2) + x_2 \end{cases}$$

Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\lambda(x_1) - \lambda(x_2) + (x_1 - x_2)| \leq |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| + |x_1 - x_2| \lambda \cdot |x_1 - x_2| + |x_1 - x_2| = (\lambda + 1) |x_1 - x_2|$$

В силу неравенства треугольника:

$$(1 - \lambda) |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq (1 + \lambda) |x_1 - x_2|$$

Инъективность есть, а сужение $f : U \rightarrow f(U)$ - биективно, значит обратимо. Поймем, что обратное отображение будет $\frac{1}{1-\lambda}$ липшицево. Пусть $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \in f(U) \quad \begin{cases} x_1 = g(y_1) \\ x_2 = g(y_2) \end{cases}$

$$|y_1 - y_2| \geq (1 - \lambda) |g(y_1) - g(y_2)| \implies \frac{1}{1 - \lambda} |y_1 - y_2| \geq g(y_1) - g(y_2)$$

Пункт 2 доказан.

Пусть теперь $q \in f(U)$. Рассмотрим $p \in U | q = f(p)$. U открыто, а значит $\exists \varepsilon > 0 | B_\varepsilon(p) \subset U$, где $B_\varepsilon(p)$ - открытый шар радиуса ε с центром в точке p . Мы покажем, что множество $f(U)$ содержит шар с центром в q радиуса $(1 - \lambda)\varepsilon$.

Пусть $y \in B_{\varepsilon(1-\lambda)}(q)$, т.е. $|q - y| < (1 - \lambda)\varepsilon$. Надо показать, что $\exists x$ такой, что $|p - x| < \varepsilon$, $f(x) = y$. Воспользуемся теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения. Перепишем условие:

$$f(x) = y \implies y - f(x) = 0 \implies y - f(x) + x = x$$

Положим

$$\varphi(x) = y - f(x) + x = y - \lambda(x)$$

Заметим, что $\varphi(x)$ является сжимающим и покажем, что φ переводит $B_\varepsilon(p)$ в себя.

$$x \in B_\varepsilon(p) \implies |x - p| \leq \varepsilon \implies |\varphi(x) - \varphi(p)| \leq \lambda\varepsilon$$

$$|\varphi(x) - p| = |(\varphi(x) - \varphi(p)) + (\varphi(p) - p)| \leq |\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p|$$

Первое слагаемое, как мы уже доказали, не превышает $\lambda\varepsilon$. Преобразуем второе:

$$|\varphi(p) - p| = |y - f(p) + p - p| = |y - f(p)| = |y - q| \leq (1 - \lambda)\varepsilon$$

Тогда:

$$|\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(p) - p| \leq \lambda\varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

Значит $|\varphi(x) - p| \leq \varepsilon$ и $\varphi(x) \in B_\varepsilon(p) | x \in B_\varepsilon(p)$. \square

Теорема 5: о локальной обратимости

Пусть $U \subset_{op} \mathbb{R}^m$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ – C^r -гладкое отображение, $r \geq 1$. Пусть $p \in U$. Если $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – невырожден, то у точки p имеется окрестность U_1 такая, что $f(U_1) \subset_{op} \mathbb{R}^m$ и сужение $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow f(U_1)$ является C^r -изоморфизмом (т.е. обратное отображение тоже принадлежит классу C^r).

Доказательство. Считаем сначала, что $\forall v \ df(p)\langle v \rangle = v$, т.е. $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – тождественное отображение, $Df(p) = E$. Рассмотрим отображение $h(x) = f(x) - x$:

$$dh(x) = df(x) - dx, \text{ при } x = p: dh(p) = dx - dx = 0 (Dh(x) = E - E = 0)$$

Все частные производные отображения h в точке p равны 0. Значит, в силу их непрерывности в p , у точки p имеется некоторый шарик U с центром в p такой, что $\forall x \in U$ все эти производные ограничены, например, $\frac{1}{2} < 1$.

$$\forall x_1, x_2 \in U_1 \ |h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{1}{2}$$

По предыдущей лемме $f(U_1)$ открыто в \mathbb{R}^m и $f|_{U_1} \rightarrow f(U_1)$ обратимо, обратное отображение непрерывно. По теореме о классе гладкости обратного отображения оно (f^{-1}) имеет нужный класс. Заметим, что в той лемме необходимо, чтобы $\forall x \in U_1 \ \det(Df(x)) \neq 0$, поэтому когда мы выбираем окрестность U_1 надо это тоже потребовать:

$$Df(p) = E, \ \det(E) = 1 \neq 0 \text{ и в некоторой окрестности точки } p \ \det(Df(x)) = 0$$

Мы доказали теорему для $Df(p) = E$. Пусть теперь $Df(p) = A$, $\det(A) \neq 0 \implies$ значит существует обратная матрица A^{-1} , тоже невырожденная. Пусть $\tilde{f} = A^{-1}f(x)$ – композиция линейного отображения и отображения f . Для \tilde{f} выполнена теорема, ведь $D\tilde{f}(p) = A^{-1}Df(p) = A^{-1}A = E$. Значит $\exists \tilde{U} \ni p \mid \tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$ – C^r -изоморфизм и $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset_{op} \mathbb{R}^k$.

$f(x) = A\tilde{f}(x)$ – композиция двух "хороших" отображений и $f(\tilde{U}) = A \cdot \tilde{f}(\tilde{U})$ – образ открытого множества под действием линейного изоморфизма A – тоже открыт в \mathbb{R}^k . \square

Теорема 6 (о неявной функции): Пусть $U \subset_{op} \mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ – C^r -отображение, $r \geq 1$.

Функция f представляет собой набор:

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \end{pmatrix}$$

Пусть некоторая точка $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U$ и $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$, $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}$$

Множество $M = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$, где Ω – окрестность точки (\vec{x}_0, \vec{y}_0) . Точка $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in M$, $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$

Тогда у (\vec{x}_0, \vec{y}_0) имеется такая окрестность Ω , что $\Omega \cap M$ – график некоторой C^r -функции α , такой, что $\alpha : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^l$ и

$$D\alpha(x) = (\frac{\partial f}{\partial y}(x, \alpha(x)))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha(x))$$

Доказательство. Рассмотрим новое отображение

$$\tilde{f} : (x, y) \rightarrow (x, y) \equiv \mathbb{R}^{k+l} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}, \quad x, y - \text{векторы размера } k \text{ и } l \text{ соответственно}$$

Определим $\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y))$. В матричном виде:

$$\tilde{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & \vdots & & \\ & x_k & & \\ f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) & & & \\ & \vdots & & \\ f_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) & & & \end{pmatrix}$$

Тогда $D\tilde{f}$ - блочная матрица вида:

$$D\tilde{f}(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right)$$

Ее определитель в этом случае $1 \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \neq 0$.

По теореме о локальной обратимости у (x_0, y_0) существует окрестность $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ такая, что отображение $\tilde{f}|_{\Omega}: \Omega \rightarrow \tilde{f}(\Omega) \subset \mathbb{R}^{k+l}$ является C^r -изоморфизмом. Пусть $g: \tilde{f}(\Omega) \rightarrow \Omega$ - обратное отображение.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[g]{f} \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

Функция g задана как $g = \begin{cases} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{cases}$, причем $g_2(x, y) = x$.

Положим $\alpha(x) = g_2(x, 0)$. Надо проверить, что $f(x, \alpha(x)) = 0$.

$$(x, f(x, \alpha(x))) = (x, 0)$$

\Updownarrow

$$\tilde{f}(x, y) = (x, 0) \implies (x, y) = g(x, 0) \implies (x, y) = (x, g_2(x, 0)) \implies y = g_2(x, 0)$$

Поскольку $\alpha(x) = g_2(x, 0)$ - все выполнено. □

Опр. 12. Регулярные точки:

Пусть $f \in D(p)$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Точка p называется регулярной, если $Df(p)$ - сюръективное отображение. Это условие эквивалентно тому, что $\text{rank}(Df(p)) = k$ (т.е. в $Df(p)$ есть k линейно независимых строк).

Матрица $Df(p)$ имеет вид

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ если } n < k \text{ то не существует регулярных точек}$$

Теорема 7 (Лемма о регулярном дополнении): Пусть $f \in C^r$, $r > 0$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$ и f регулярна в точке p .

Тогда \exists функции $(g_1, \dots, g_{n-k}) = \bar{g} - C^r$ -гладкие, отображающие $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, такие, что отображение $(f, g): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n=n-k+k}$ регулярно в точке p и, в частности, обратимо в некоторой окрестности точки p .

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & \frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k \times n}$$

Из алгебры знаем: $\exists k$ линейно независимых столбцов (можем считать, что первые k штук). Дополним нижнюю часть матрицы фрагментом

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_k} & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n-k \times n}$$

Итоговая матрица будет иметь размеры $n \times n$.

Пусть теперь $g(x_1, x_2)$ такое, что $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$. И положим:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = x_{k+1} \\ \vdots \\ g_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = x_n \end{cases}$$

Тогда матрица $n \times n$ будет иметь вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} k \times k, \det \neq 0 & \text{неважно что} \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Ее определитель $\det = \det(\frac{\partial f_{1 \dots k}}{\partial x_{1 \dots k}}) \cdot \det E \neq 0$ А обратимость следует из невырожденности. \square

Теорема 8 (Лемма о локальном наложении): Пусть $f \in C^r, r > 1, f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, U \subset_{op} \mathbb{R}^n$ - регуляна в точке p .

Тогда $f(p)$ - внутренняя точка множества $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$. То есть:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \varepsilon\text{-шар } \overset{o}{B}_\varepsilon(f(p)) \text{ целиком содержится в } f(\Omega)$$

Доказательство. По предыдущей лемме $\exists \bar{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ такое, что отображение $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ регулярно (и, в частности, локально обратимо в p).

По теореме о локальной обратимости \exists окрестность $p \in U \subset_{op} \mathbb{R}^n$ такая, что $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \subset_{op} \mathbb{R}^n$.

Образ множества U , т.е. множество точек вида $(f_1(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x}), g_1(\bar{x}), \dots, g_{n-k}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in U$ открыт в \mathbb{R}^n .

Тогда пользуясь тем, что при проекции образы открытых множеств открыты, получаем, что

Множество точек из проекций на первые k координат множества $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(U)$: $\begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \dots \\ f_k(\bar{x}) \end{pmatrix} \subset_{op} \mathbb{R}^k$

Проверим теперь, что если $A \subset_{op} X \times Y$, то $\Pi(A) \subset_{op} X$, Π - проекция.

Берем точку $x_0 \in \Pi(A)$. Существует точка $(x_0, y_0) \in A$, значит \exists шарик с центром в (x_0, y_0) целиком лежащий в A . Ясно, что проекция этого шарика накрывает ε -шарик в X с центром в x_0 . \square

3 Многообразия в \mathbb{R}^n

3.1 Многообразия

Опр. 13. Пусть M - метрическое пространство (не обязательно подмножество в \mathbb{R}^n). M является k -мерным многообразием без края, если $\forall p \in M$ у точки $p \exists$ окрестность $U_p \subset_{op} M$ гомеоморфная открытому шару в \mathbb{R}^k .

Опр. 14. Гомеоморфизм - непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно.

Теорема 9 (Брауэра об инвариантности области (без док-ва).): Пусть $U \subset_{op} \mathbb{R}^k$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ - непрерывна и инъективна.

Тогда $f(U) \subset_{op} \mathbb{R}^k$ и $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ - тоже непрерывна.

Опр. 15. M - k -мерное C^r -многообразие в R^n , если:

$$\forall p \in M \exists U \in \mathcal{N}(p), U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \stackrel{C^r}{\cong} \text{ открытому шару в } \mathbb{R}^k$$

Утв. Предыдущее утверждение эквивалентно требованиям:

1.

$$\exists U \in \mathcal{N}(p) U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \cong \text{ открытому подмножеству } \omega \in \mathbb{R}^k$$

2.

$$\exists U \in \mathcal{N}(p) U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \cong \mathbb{R}^k$$

Теорема (1 о регулярных решениях): Пусть $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$, $f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - C^r гладкие функции.

Непустое множество M задано как

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \\ M = \{\bar{x} \in \Omega \mid &\vdots\}, \text{ где } \bar{x} \text{ - регулярная точка} \\ f_k(x) &= 0 \end{aligned}$$

То есть $\text{rank } \frac{\partial f_1 \dots k}{\partial x_1 \dots n} = k$ Тогда M - $n - k$ -мерное C^r -многообразие без края.

Доказательство. Пусть $p \in M$. Можно считать, что последние k столбцов линейно независимы, то есть $\left| \frac{\partial f_1 \dots k}{\partial x_{n-k+1} \dots n} \right| \neq 0$ - определитель матрицы Якоби. По теореме о неявной функции существует такая окрестность \tilde{U} точки p , $\tilde{U} \subset_{op} \mathbb{R}^n$, такая, что $\tilde{U} \cap M$ - график некоторой функции:

$$x_{n-k+1 \dots n} = g(x_1 \dots n-k)$$

Осталось показать, что график функции является многообразием $U \subset \mathbb{R}^k$.

Лемма График любого C^r отображения g , определенного на открытом подмножестве - это многообразие, гомеоморфное U .

Доказательство.

$$X \xrightarrow{g} Y$$

График $\Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in X\}$

$$U \xrightarrow{g} \Gamma_g \text{ - } C^r \text{ отображение}$$

$$x \xrightarrow{g} (x, g(x)) \xrightarrow{g^{-1}-\text{проекция на } X} X$$

□

По лемме теорема доказана. \square

Замечание: Если у градиента функции в точке p хотя бы одна координата не равна 0, то p - регулярная.

Утв. $X \xrightarrow{C^r} Y$ - если X - C^r -многобразие, то Y - тоже.

Доказательство. Пусть $\psi : X \rightarrow Y$ - C^r -изоморфизм. Пусть $q \in Y, p = \psi^{-1}(q)$, по условию существует открытая окрестность V точки p , C^r -изоморфная $U \subset_{op} \mathbb{R}^k$.

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} \psi(V) \subset_{op} Y$$

$\psi(V)$ - прообраз V под действием $\psi^{-1}, V = \psi^{-1}(\psi(V))$
 $\psi \circ \varphi$ - C^r -изоморфизм U на окрестность точки q в X . \square

$$f_1(x_1, \dots, x_k)$$

Лемма (о локальном вложении) Пусть $f = \begin{pmatrix} & \dots & \\ \vdots & & \\ f_n(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix}$, $U \subset_{op} \mathbb{R}^k, f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Если точка $\bar{x}_0 \in U$ такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = k$, то у точки x_0 существует окрестность \tilde{U} такая, что $f(\tilde{U})$ - k -мерное многобразие.

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Переставим f (если надо) и считаем первые k строк невырожденными в x_0 . Рассмотрим урезанное отображение $\psi = \begin{pmatrix} & \dots & \\ \vdots & & \\ f_k \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$

По теореме о локальной обратимости существует окрестность $\tilde{U} \ni x_0$, такая, что $\psi(\tilde{U}) \subset_{op} \mathbb{R}^k$ и $\psi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \psi(\tilde{U})$ - C^r -изоморфизм.

$$\psi(\tilde{U}) \xrightarrow{\psi^{-1}} \tilde{U}$$

\tilde{U} в свою очередь, отображается в $f(\tilde{U})$ данным отображением:

$$\begin{array}{c} f_1(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ \vdots \\ f_k(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ f_{\text{остальные индексы}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \end{array}$$

Причем $f_1, \dots, f_k = (x_1, \dots, x_k)$.

$$f_{\text{остальные}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = f_{\text{остальные}} \circ \psi(x_1, \dots, x_k)$$

$f(\tilde{U}) = \{(\bar{x}, \psi(\bar{x})) \mid \bar{x} \in \tilde{U}\}$ - график отображения ψ , то есть по соответствующей лемме о графике это многобразие. \square

Опр. 16. M - многообразие (с краем, а может и без), если $\forall p \in M \exists U \subset M$ C^r -изоморфно op

$$1. \tilde{U} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$$

$$2. \mathbb{R}_+^k = \{x_1, \dots, x_k \mid x_1 \geq 0\}$$

Опр. 17. Точка $p \in \partial M$ (принадлежит краю), если у точки p \notin окрестности первого типа.

Лемма (о крае полупространства) \mathbb{R}_+^k - многообразие с краем, $\partial \mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1 = 0\}$. При этом \mathbb{R}_+^k называется полупространством.

Доказательство. \mathbb{R}_+^k является многообразием по определению, ведь любая ее точка гарантированно имеет окрестность, открытую в \mathbb{R}_+^k , например, в качестве такой окрестности можно взять само \mathbb{R}_+^k .

Пусть $x_1 > 0$, тогда очевидно, что множество $\mathbb{R}_+^k \cap \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1 > 0\}$ открытое в \mathbb{R}_+^k является окрестностью точки p и поэтому $p \in M \setminus \partial M$

Пусть $x_1 = 0$. Ясно, что никакая окрестность точки p в \mathbb{R}_+^k не является открытым множеством в \mathbb{R}_+^k . Однако, нам было необходимо более сложное утверждение, а именно - нужно было показать, что U не может быть C^r -изоморфно открытому подмножеству $\Omega \in \mathbb{R}_+^k$. Пусть $r > 0$ в C^r , по теореме о локальной обратимости если $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ и $\psi : \Omega \rightarrow \psi(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$ C^r -изоморфизм, то $\psi(\Omega) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$.

И наконец, $r \neq 0$ по теореме Брауэра об инвариантности области. \square

Лемма (об изоморфизме многообразий) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ - C^r -многообразие. Отображение $\varphi : X \xrightarrow{C^r} Y \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\varphi(\partial X) = \partial Y$. Тогда Y - тоже C^r -многообразие.

Более "стильная" \circledcirc формулировка: $\varphi(\partial X) = \partial(\varphi(X))$

Доказательство. Пусть $q \in Y$. Пусть $p = \varphi^{-1}(q) \in X$. Если $p \in X \setminus \partial X$, то $\exists U \subset X \mid p \in U \underset{op}{\subset} W \subset \mathbb{R}^k$, тогда $\varphi(U) = \varphi \circ \psi^{-1}$ - C^r -изоморфизм как композиция. Т.е. мы нашли окрестность точки $q \in Y$, которая C^r -изоморфна открытому в \mathbb{R}^k множеству.

Пусть $p \in \partial X$, тогда не существует окрестности $U \underset{op}{\subset} X$, C^r -изоморфной подмножеству W , открытому в \mathbb{R}^k .

Если предположить, что $q \in \partial Y$, то $\exists V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$ и $\psi : V \xrightarrow{\cong} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k$. Тогда $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}(W) \underset{op}{\subset} X$ - открытая окрестность точки $p \in X$, а композиция - это C^r -изоморфизм W , чего не может быть по условию. Получаем противоречие. \square

Лемма (об открытых частях многообразия) X - C^r -многообразие в \mathbb{R}^n , $U \underset{op}{\subset} X$, тогда U - тоже C^r -многообразие той же размерности, а $\partial U = U \cap \partial X$

Доказательство. Пусть $p \in X$, тогда у p существует окрестность $V \underset{op}{\subset} X$, такая, что $V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^k$ открытому подмножеству W в \mathbb{R}^k или \mathbb{R}_+^k .

Если $p \in U$, то множество $V \underset{op}{\cap} U \subset U$ как пересечение открытых (лемма из 2 семестра 1 курса о пересечении открытых метрических пространств).

$$\varphi(U \cap V) \underset{op}{\subset} W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k \text{ или } \mathbb{R}_+^k \implies \varphi(V \cap U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^k \text{ или } \mathbb{R}_+^k$$

Пусть $p \in U$. Если $p \notin \partial X$, то W в предыдущих строчках можно выбрать первого типа ($W \in \mathbb{R}^k$). Значит $p \notin \partial U$.

Если $p \notin \partial U$, тогда (поскольку мы уже доказали, что U - многообразие) $\exists \Omega \subset_{op} U \mid p \in \Omega \xrightarrow{\psi} A \subset_{op} \mathbb{R}^k$.
Но поскольку $U \subset_{op} X$, выполнено утверждение $\Omega \subset_{op} X \implies p \notin \partial X$. \square

Теорема 10 (о крае многообразия): Пусть X - C^r -многообразие размерности k . Тогда если его край ∂X непуст, то он является C^r -многообразием без края размерности $k-1$ ($\partial\partial X = \emptyset$)

Доказательство. Пусть $p \in \partial X$. Надо показать, что $\exists U \subset_{op} \partial X$, такое, что $U \cong$ открытому подмножеству W в \mathbb{R}^{k-1} .

По условию у точки p существует открытая в X окрестность $\tilde{U} \subset_{op} X$, такая, что $\tilde{U} \xrightarrow{\varphi} W \subset_{op} \mathbb{R}_+^k$.

$$\begin{aligned} p \in \partial X &\implies p \in \partial \tilde{U} (\text{ по предыдущей лемме}) \implies \\ &\implies \varphi(p) \in \partial \tilde{W} \implies \text{первая координата точки } \varphi(p) \text{ равна } 0 \end{aligned}$$

$\tilde{W} \subset_{op} \mathbb{R}_+^k \implies \tilde{W} \cap \{x_1, \dots, x_k \mid x_1 = 0\} \subset_{op} \mathbb{R}^k$ - по лемме об открытых частях подпространства

Заметим, что пересечение этих множеств это W , а $\{x_1, \dots, x_k \mid x_1 = 0\} = \mathbb{R}^{k-1} \varphi^{-1}(W) \subset_{op} \partial X$ (как прообраз открытого), значит $\varphi^{-1}(W)$ - искомая окрестность U . \square

Теорема 11 (2 о регулярных решениях): Пусть $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$, $h, f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Множество M регулярных решений системы

$$\begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

является $n-k$ -мерным C^r -гладким многообразием, край которого задается уравнением $\begin{cases} h(x) = 0 \\ f_i(x) = 0 \end{cases}$

Опр. 18. Пусть p - решение системы (4).

- Если $h(p) > 0$ и $\nabla f_i(p)$ линейно независимы, то p - регулярна
- Если $h(p) = 0$ и $\nabla h, \nabla f_1, \dots, \nabla f_k$ линейно независимы, то p - регулярна

Доказательство. Пусть $p \in M$

1. Если $h(p) > 0$, то у точки p существует окрестность $W \subset_{op} \mathbb{R}^n$, в которой $h(W) > 0$. Множество

$$\begin{cases} h(x) > 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases} = M \cap W \subset_{op} M \quad (5)$$

Итак, множество $M \cap W$ совпадает с множеством тех точек из $\Omega \cap W \subset_{op} \mathbb{R}^n$, где $\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_k = 0 \end{cases}$ -
многообразие размерности $n-k$

2. Если $h(p) = 0$,

то продолжим наш набор отображений и получим набор $\varphi = (h, f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_{n-1})$ так, чтобы n штук функций были регулярными в окрестности U точки p (это разрешается сделать в силу леммы о регулярном дополнении).

$$M \cap U = \{x \in M \mid x \in U\}, \text{ причем } x \in M \equiv \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Отображение } \varphi = \begin{matrix} h \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{matrix} : U \rightarrow \varphi(U) C^r\text{-изоморфизм}$$

$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ по лемме о локальной обратимости и

$$\varphi(M \cap U) = (y_1, \dots, y_n) = \bar{y} \in \varphi(U) = \begin{pmatrix} y_1 \geq 0 \\ y_2 = 0 \\ \vdots \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ где на } y_{k+1} \dots y_{n-1} \text{ не ограничений}$$

— это некоторое $n - k$ мерное подпространство Q , пересеченное с $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$

Тогда $Q \cap \varphi(U) \subset Q$

□

3.2 Касательные пространства

Опр. 19. Пусть $p \in X \subset \mathbb{R}^n$. Вектор v называется касательным вектором в точке p к множеству X ($v \in T_p(X)$), если существует $T \subset [0, \varepsilon]$, содержащая 0, такая, что 0 - предельная точка множества T и \exists отображение $\gamma : T \rightarrow X$ такое, что $\gamma(0) = p$, $\gamma'_T(0) = v$. При этом $\gamma'_T = \lim_{t \rightarrow 0|_T} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$

На бытовом уровне (человеческий перевод):

v - касательный вектор к X в p к X , если из точки p возможно двигаться по X с начальной скоростью v

В таком случае $T_p(X)$ называется касательным пространством к X в p и **обязательно** проходит через нулевую точку пространства. А чтобы $T_p(X)$ проходило через точку p - придумали специальное множество $K_p(X) = p + T_p(X)$, называемую контингенцией (чтобы сложение точки и пространства не смущало читателя - считайте p вектором из нулевой точки пространства в p).

Теорема 12: Свойства $T_p(X)$:

1. Пусть $p \in X \subset \mathbb{R}^n, 0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. v - касательный вектор $\iff \exists$ последовательность точек $x_n \rightarrow p$, такая, что $\frac{x_n-p}{|x_n-p|} \rightarrow \frac{v}{|v|}$ (угол между векторами $x_n - p$ и v стремится к 0).
2. Ноль всегда $\in T_p(X)$
3. $T_p(X)$ - замкнутое пространство
4. $T_p(X)$ - конус с вершиной в 0, т.е. $v \in T_p(X) \implies \forall \lambda \geq 0 \ \lambda v \in T_p(X)$
5. $p \in A \subset B \implies T_p(A) \subset T_p(B)$
6. Локальность:

$$p \in X, U - \text{окрестность } p \text{ в } X \implies T_p(X) = T_p(U)$$

Утв. $v \in T_p(X) \iff \exists x_n \in X, x_n \rightarrow p \text{ и } t_n > 0, t_n \rightarrow 0 \text{ так, что}$

$$\frac{x_n - p}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$$

Доказательство. Слева направо (\implies):

Пусть $v \in T_p(X)$. Выберем T и φ как в определении. Т.к. 0 - предельная точка T (из определения), то $\exists t_n \in T, t_n \rightarrow 0$, положим $x_n = \varphi(t_n)$. Вот так вот раз-раз и готово. Справа налево (\impliedby):

Пусть есть $x_n \in X, t_n \rightarrow 0$ и $\frac{x_n-p}{t_n} \rightarrow v$. Положим $T = \{0, t_1, t_2, \dots\}, \varphi(t_n)$ приравняем к x_n . \square

Опр. 20. $K \subset \mathbb{R}^n$ называется полупространством размерности $k \leq n$, если $\exists e_1, \dots, e_k$ - линейно независимый набор из \mathbb{R}^n , такой, что $K = \{(t_1 e_1 + \dots + t_k e_k) \mid t_1 \geq 0, t_{>1} - \text{любые}\}$

Любое векторное полупространство в \mathbb{R}^n - замкнутый конус с вершиной в любой точке границы.

3.3 Дифференциал гладкого отображения

Дифференциал - отображение касательных пространств. Пусть $\mathbb{R}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{R}^m$.

Опр. 21. $p \in T_p(X), \varphi - C^r$ -гладкое отображение.

$d\varphi(p) : T_p(X) \rightarrow T_{\varphi(p)}(Y)$ определим следующим образом:

$d\varphi(p)\langle v \rangle = d\tilde{\varphi}(p)\langle v \rangle$, где $\tilde{\varphi} - C^r$ -продолжение отображения φ на окрестность множества

Покажем корректность определения:

Доказательство. Почему значение дифференциала не зависит от выбора φ , почему образ лежит в $T_q(Y), q = \varphi(p)$?

Пусть $v \in T_p(X), v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n-p}{t_n}$. Покажем, что $d\varphi(p)\langle v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(p)}{t_n}$. Пусть $\tilde{\varphi}$ - некоторое C^r -продолжение отображения φ .

$$p, x_n \in X \implies \varphi(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n), (\tilde{\varphi})(p) = \varphi(p)$$

$$\varphi(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n) = \tilde{\varphi}(p) + d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|) - \text{из определения } d\tilde{\varphi}$$

$$\frac{\varphi(x_n) - \varphi(p)}{t_n} = \frac{\tilde{\varphi}(x_n) - \tilde{\varphi}(p)}{t_n} = \frac{d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle}{t_n} + o\left(\frac{|x_n - p|}{t_n}\right)$$

Отображене $d\tilde{\varphi}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ линейно, поэтому $\frac{d\tilde{\varphi}(p)\langle x_n - p \rangle}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle \frac{x_n - p}{t_n} \rangle$

Итак, $\frac{\varphi(x_n) - q}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle \frac{x_n - p}{t_n} \rangle + o\left(\frac{|x_n - p|}{t_n}\right)$. Поскольку $\frac{x_n - p}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_n) - q}{t_n} = d\tilde{\varphi}(p)\langle v \rangle + o(\dots)$$

\square

Свойства дифференциала:

$$p \in X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

1. Композиция:

$$d(\psi \circ \varphi)(p) : T_p(X) \rightarrow T_{\psi \circ \varphi(p)}(Z)$$

$$d(\psi \circ \varphi)(p) = d\psi(\varphi(p)) \circ d\varphi(p), \quad \forall v \in T_p(X) \quad d\psi(\varphi(p)) \langle d\varphi(p) \langle v \rangle \rangle$$

2. Если $\varphi : X \rightarrow Y$ – C^r -изоморфизм, то $T_p(X)$ и $T_q(Y)$ линейно изоморфны (\exists линейный изоморфизм этих пространств).

Утв. Пусть M – k -мерное гладкое множество в \mathbb{R}^n .

1. Если $p \in M \setminus \partial M$, то $T_p(M)$ – k -мерное векторное пространство.
2. Если $p \in \partial M$, то $T_p(M)$ – k -мерное полупространство.

Доказательство. Было утверждение: $\varphi : (p \in) A \cong B$, тогда $T_p(A) \xrightarrow{d\varphi(p)} T_{\varphi(p)}(B)$ – линейно изоморфны.

1. Пусть $\exists U \underset{op}{\subset} M, p \in U$ и $\exists \varphi : U \cong \mathbb{R}^k$. Тогда $d\varphi(p) : T_p(U) \rightarrow T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$. А по свойству локальности касательных пространств $T_p(U) = T_p(M)$.
2. Пусть $\exists U \underset{op}{\subset} M, p \in U$ и $\varphi : U \cong \mathbb{R}_+^k, \varphi(p) \in \partial \mathbb{R}_+^k$

$$d\varphi(p) : T_p(M) \xrightarrow{\text{линейно}} T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}_+^k) = \mathbb{R}_+^k$$

□

Теорема 13 (о касательном пространстве к регулярному решению систему уравнений): Пусть p – регулярное решение системы уравнений $f_1(\bar{x}) = 0$

- регулярное решение системы уравнений $\vdots, f_i - C^r$ -отображение $\Omega \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^n \rightarrow R$. Точка p – регулярная $\iff rank(df_1, \dots, df_k) = k$ – матрица Якоби, в которой дифференциал – это вектор столбец матрицы.

Тогда $T_p(M)$ (M – множество всех регулярных решений) – это ортогональное дополнение к $\nabla f_1(p) \oplus df_1(p) \langle v \rangle = 0$

$\dots \oplus \nabla f_k(p) =$ множеству решений линейной системы уравнений \vdots
 $df_k(p) \langle v \rangle = 0$

Напоминание: Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (не обязательно векторное пространство). V^\perp (орт. дополнение) = $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in V \ u \perp v\}$

Утв. V^\perp – всегда векторное подпространство.

Утв. V – векторное пространство $\implies V^\perp$ имеет дополнительную размерность (в смысле дополнения к пространству):

$$\dim V = k \implies \dim V^\perp = n - k$$

Доказательство. У точки p имеется окрестность $U \underset{op}{\subset} M$, в которой все решения регулярны $\implies U$ – $(n-k)$ -мерное многообразие по теореме о регулярных решениях. Тогда $T_p(M) = T_p(U)$ – $(n-k)$ -мерное векторное подпространство в \mathbb{R}^n

Лемма Пусть $p \in X$ – произвольное множество $\subset \mathbb{R}^n$, $g|_X = const$ – постоянная на множестве гладкая функция. Тогда $dg(p) : T_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ – нулевое (зануляющее) отображение.

Доказательство. Пусть $v \neq 0$ из $T_p(X)$. $\exists x_n \rightarrow p, t_n \searrow 0, \frac{x_n - p}{t_n} \rightarrow v$

$$dg(p)\langle v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n) - g(p)}{t_n} = \frac{0}{t_n} = 0$$

□

$$f_i|_u \equiv 0 \implies df_i(p)\langle v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_p(U) = T_p(M)$$

Помним: $df(p)\langle v \rangle = (\nabla f, v) = 0$. Тогда ясно, что $\nabla f_i(p) \perp v \quad \forall v \in T_p(U) = T_p(M)$.

Осталось доказать, что если $v \perp$ всем градиентам f_i , то $v \in T_p(M)$:

$\nabla f_1, \dots, \nabla f_k(p)$ - линейно независимы как строки матрицы Якоби ранга k . v - решене линеаризованной системы $(\nabla f, v) = 0$ (помним, что градиент f это матрица из градиентов f_i) Эта система имеет ранг k - значит множество ее решений это $(n - k)$ -мерное векторное пространство W . Но мы знаем, что множество $T_p(M)$ - тоже $(n - k)$ -мерное векторное подпространство и уже доказали, что $T_p(M) \subset W$.

$$\dim T_p(M) = \dim W \text{ и } T_p(M) \subset W \implies T_p(M) = W$$

□

3.4 Условные экстремумы

Лемма (о не-максимуме) Пусть $p \in X \subset \mathbb{R}^n$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция.

Если $\exists v \in T_p(X)$ такое, что $dg(p)\langle v \rangle > 0$, то p - не локальный максимум.

Доказательство. Пусть v - вектор из условия. Тогда $\exists x_n \in X$, $t_n \searrow 0$, $\frac{x_n - p}{t_n} \rightarrow v$

Знаем, что $dg(p)\langle v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n) - g(p)}{t_n} > 0 \implies$ числитель больше 0 при $n \rightarrow \infty$, значит $g(x_n) > g(p) \implies p$ - не локальный максимум. \square

Утв. (Следствие) Если X - многообразие и $p \in X \setminus \partial X$, то p - экстремум $g \implies dg(P)|_{T_p(X)} \equiv 0$

Доказательство. Если $dg(p)|_{T_p(X)} \neq 0$, то $\exists v \in T_p(X)$ $dg(p)\langle v \rangle \neq 0$, при этом $-v \in T_p(X)$ и $dg(p)\langle v \rangle$ будет другого знака. Тогда по лемме о не-экстремуме p - не экстремум. \square

$$f_1(\bar{x}) = 0$$

Теорема 14 (о градиентах): Пусть p - регулярное решение гладкой системы $\begin{array}{c} f_1(p) = 0 \\ \vdots \\ f_k(p) = 0 \end{array}$. Пусть $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция.

Если p - экстремум g на M , то $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, такие, что

$$\nabla g(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_k \nabla f_k(p)$$

Доказательство. Мы уже знаем, что если p - экстремум, то $\nabla g(p) \perp T_p(M)$ или, что то же самое: $\nabla g(p) \in T_p(M)^\perp$.

Пространство $T_p(M)^\perp$ - линейная оболочка градиентов функций f_1, \dots, f_k в точке p ($T_p(M)^\perp$ имеет размерность $k \implies \nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p)$ - его базис). \square

3.5 Достаточное условие экстремума

Теорема 15: Пусть f_1, \dots, f_k - C^r -дифференцируемы и точка p - регулярное решение, $p \in M = \{\bar{x} \mid f_1(\bar{x}) = 0, \dots, f_k(\bar{x}) = 0\}$. Пусть g - C^2 -гладкая функция, определенная в окрестности точки p .

Необходимое условие:

Если p - экстремум, то $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$, а в p $L(p)$ равна 0:

$$L(x) = g(x) - (\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_k f_k(x))$$

Достаточное условие:

Если в такой точке матрица Гессе $\Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ положительно определена на $T_p(M)$, то p - строгий локальный минимум, если $\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) < 0$ - локальный максимум, если же $\exists u, v \in T_p(M)$, такие, что $\Gamma\langle v \rangle > 0, \Gamma\langle u \rangle < 0$, то p - не экстремум.

Доказательство. Если p - экстремум, то необходимое условие выполнено по теореме о градиентах:

$$\exists \lambda_i : \nabla g(p) = \sum \lambda_i \nabla f_i(p)$$

Это на самом деле то же самое, что и $\frac{\partial L}{\partial x_1}(\bar{x}, p) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_k}(\bar{x}, p) = 0$, где $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x}, p) = \frac{\partial g}{\partial x_i} - (\lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}) = 0$.

При этом $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x) = -f_i(x) = 0$, так как $x \in M$.

Докажем достаточное условие:

Пусть $dL(p) = 0, \Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) > 0$ (т.е. положительно определенная матрица). Покажем, что у точки p существует окрестность в M такая, что в нее $g(x) > g(p)$.

От противного: предположим, что это не так, тогда $\exists x_n \in M, x_n \rightarrow p, g(x_n) \leq g(p)$. Можно выбрать такую подпоследовательность x_{n_k} такую, что

$$\frac{x_{n_k} - p}{|x_{n_k} - p|} \rightarrow v \text{- единичный вектор, } v \in T_p(M)$$

Считаем, что уже x_n такая, что $\frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rightarrow v \in T_p(M), g(x_n) = L(x_n)$ - на множестве M функция $g = L$, ведь $x \in M \implies f_i(x) = 0$.

Значит $L \in C^2$ (в окрестности p), мы знаем, что

$$L(x) = L(p) + dL(P)\langle x - p \rangle + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x - p \rangle + o(|x - p|^2)$$

В частности

$$L(x_n) - L(p) = dL(p)\langle x_n - p \rangle + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2), dL(p)\langle x_n - p \rangle = 0 \text{ по предположению}$$

$$g(x_n) - g(p) = L(x_n) - L(p) = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p)\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2)$$

По "противному" предположению это ≤ 0 , но с другой стороны, поскольку $\Gamma = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p) > 0$ для $p \in T_p(M)$, то $\exists \varepsilon > 0$ такой, что $\Gamma\langle v \rangle \geq \varepsilon \cdot |v|^2 \forall v \in T_p(M)$. Это самое сложное место доказательства, вот почему это так:

$\Gamma : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ - 2-однородная функция, непрерывная на $T_p(M)$ (поскольку это многочлен). Значит на множестве W , составленном из множества единичных векторов из $T_p(M)$ эта функция имеет минимум, больший 0, поскольку множество W - компакт.

Итак, $\forall v \in T_p(M)$ если $|v| = 1 \implies \Gamma\langle v \rangle \geq \varepsilon$, тогда $\forall v \in T_p(M)$ при любой длине v $\Gamma\langle v \rangle \geq |v|^2$ (вместо единичного v взяли v не единичной длины, вторая степень вылезла в силу 2-го порядка однородности).

Итак, $0 \geq g(x_n) - g(p) = L(x_n) - L(p) = \Gamma\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2)$. Поделим это равенство на $|x_n - p|^2$:

$$0 \geq \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} = \frac{\Gamma(p)\langle x_n - p \rangle}{|x_n - p|^2} + o(1)$$

Поскольку $o(1) \xrightarrow{x_n \rightarrow p} 0$, то:

$$\frac{\Gamma\langle x_n - p \rangle}{|x_n - p|^2} = \Gamma\langle \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow \Gamma\langle v \rangle \geq \varepsilon$$

Значит $0 \geq \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2}$ - пополам для уверенности. Получаем противоречие, таким образом доказали достаточность.

Пусть теперь $\exists u, v \in T_p(M), \Gamma\langle u \rangle > 0, \Gamma\langle v \rangle < 0$

Заметим, что $u \in T_p(M) \implies \exists x_n \in M$ такая, что $\frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rightarrow \frac{u}{|u|}$.

$$g(x_n) - g(p) = \Gamma\langle x_n - p \rangle + o(|x_n - p|^2) \text{ - поделим уравнение на } |x_n - p|^2$$

$$\frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} = \Gamma\langle \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$$

Первое слагаемое стремится к $\Gamma\langle \frac{u}{|u|} \rangle > 0$, а второе - к нулю. Значит при $n \rightarrow \infty \frac{g(x_n) - g(p)}{|x_n - p|^2} > 0$.

Значит, p - не максимум функции g на множестве M . Аналогично расписав для вектора v получаем, что p - не минимум.

□

4 Поточечная и равномерная сходимость

Пусть X - некое множество, $Y \subset \mathbb{R}$ или \mathbb{R}^n или вообще любое метрическое пространство. Даны последовательность функций $f_n : X \rightarrow Y, n = 1, 2, \dots$, и функция $f : X \rightarrow Y$.

Опр. 22. Последовательность функций сходится на X к функции f , поточечно, если $\forall x \in X$ последовательность значений $f_n(x)$ сходится к f при $n \rightarrow \infty$.

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

Утв. 6 Из непрерывной функции f_n не всегда следует непрерывность функции f

Доказательство. Пусть $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$. Тогда $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$ и так далее. В это случае

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \in [0, 1]}} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Видно, что $f(x)$ разрывна, хотя все f_n непрерывны. \square

Опр. 23. Пусть $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Последовательность f_n сходится к f **равномерно** на множестве X , если

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (6)$$

"Оригинальное" определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \mid \forall x \in X \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (7)$$

Доказательство. Докажем эквивалентность двух определений:

(6) \implies (7):

Пусть $\varepsilon > 0$, надо подобрать n_0 . По условию (6):

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Но $\forall x \in X \sup \geq |f_n(x) - f(x)|$, значит

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

\square

Опр. 24. Последовательность $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$ при любых x , если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(7) \implies (6): Надо доказать, что $\forall \varepsilon \exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

По условию (7):

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \implies \sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Равномерную сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ будем обозначать $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$

Теорема 16 (Критерий отсутствия равномерной сходимости): f_n не сходится равномерно к $f \iff \exists x_n \in X$ такая, что $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$

Теорема 17 (о пределе пределов): Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ (или \mathbb{V} метрического пространства).

Пусть $\begin{cases} f : X \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$, p - предельная точка X .

Предположим, что $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} y_n$ и $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Если f_n **равномерно** сходится к f ($f_n \rightrightarrows f$) на X , то $f(x) \rightarrow y$ при $x \rightarrow p$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow p} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow p} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, надо доказать, что у точки p имеется окрестность U , такая, что $\forall x \in X \cap U |f(x) - y| \leq \varepsilon$.

$$|f(x) - y| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - y_n + y_n - y| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - y_n| + |y_n - y|$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности:

1:

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

3:

$$\exists n_1 \mid \forall n \geq n_1 \quad |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Пусть $n_2 = \max n_0, n_1$. Тогда $\forall n \geq n_2$ выполнено и 1, и 3.

2:

$$f_{n_2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} y_{n_2} \implies \exists U - \text{окрестность точки } p, \text{ такая, что } \forall x \in U \cap X |f_{n_2}(x) - y_{n_2}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Для таких x из $U \cap X$ выполнено:

$$|f(x) - y| \leq |f(x) - f_{n_2}(x)| + |f_{n_2}(x) - y_{n_2}| + |y_{n_2} - y| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Теорема (Следствие): Если все f_n непрерывны в $p \in X$ и $f_n \rightrightarrows f$ на X , то f тоже непрерывна в точке p .

Нет, тот контрпример показывал, что просто непрерывности f_n недостаточно, а следствие утверждает, что непрерывности + равномерной сходимости уже достаточно.

Доказательство. Надо показать, что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p)$. Заметим, что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в силу обычной поточечной сходимости. Теперь по теореме:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \implies \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) \stackrel{\text{по теореме}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow p} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p)$$

□

Теорема (Еще одно следствие): Если все f_n непрерывны на X и $f_n \rightrightarrows$, то f тоже непрерывна на X .

Доказательство. Нечего тут доказывать: определение непрерывности в точке расширяем до определения непрерывности на множестве. □

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций): Пусть X - множество, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\exists \text{функция } f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ такая, что } f_n \rightrightarrows f \text{ на } X \implies \forall \varepsilon \exists n_0 \mid \forall x \in X \quad \forall k, l \geq n_0 \quad |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$$

Доказательство. " \Leftarrow ":

Пусть $x \in X$. Тогда для числовой последовательности $f_n(x)$ выполнен обычный критерий Коши сходимости последовательности, поэтому $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$ (обозначим $f(x)$ равной этому пределу).

Осталось показать, что f_n сходится к f равномерно. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию Коши выполнено:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \mid |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$$

С помощью поточечной сходимости f_l к f_x можем перейти к пределу по $l \rightarrow \infty$:

$$\forall x \in X \mid \forall k \geq n_0 \mid |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

" \Leftarrow " доказано.

" \Rightarrow ":

Пусть $\varepsilon > 0$. По условию

$$\exists k \geq n_0 \mid \forall x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Имеем: если $k, l \geq n_0$, то $\forall x$ выполнено:

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Утв. (Следствие) Пространство непрерывных функций на множестве $[a, b] \subset \mathbb{R}$ полно в sup-норме. $C(x)$ - множество непрерывных функций на $x = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|_c = \sup_{x \in X} |f(x)|$

Доказательство. Полнота: если последовательность функций удовлетворяет критерию Коши, то есть предел $f_n \rightarrow f$ в sup-норме $\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Условие Коши для последовательностей $f_n \in C[a, b]$ как раз и означает, что $f_n \rightrightarrows f$ - какой-то функции. Функции f_n непрерывны и $\rightrightarrows f \Rightarrow f \in C[a, b]$

□

Теорема (Дини): Пусть X - компакт, $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, f : X \rightarrow \mathbb{R}, f_n, f \in C(X)$.

Если f_n сходится к f на X поточечно, то сходимость равномерна.

Доказательство. Ключ к доказательству: $\forall x$ последовательность $|f_n(x) - f(x)|$ монотонно убывает к 0.

Пусть $\varepsilon > 0$. Надо понять, что:

$$\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \mid \forall x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Положим $U_n \subset X, U_n = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$.

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$. В самом деле, $\forall x \forall n$ начиная с какого-то n_0 выполнено $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (поточечная сходимость из условия) и $x \in U_n \forall n \geq n_0$.
2. Все U_n открыты в X (по функциональному признаку - $|f_n(x) - f(x)|$ непрерывна и у нас есть неравенство).
3. X компактно \Rightarrow существует конечное подпокрытие $U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} = X$.

Заметим, $U_n \subset U_{n+1}$, так как $|f_{n+1} - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ в силу ключа.

$$x \in U_n \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Так как

$$|f_n(x) - f(x)| \geq |f_{n+1}(x) - f(x)| \Rightarrow \text{тоже } < \varepsilon \Rightarrow x \in U_{n+1}, U_{n+1} \supset U_n$$

Значит, \exists какое-то $n_0 \mid U_{n_0} = X$. Итак, $\forall x |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ и для всех $n \geq n_0$ тоже. □

4.1 Функциональные ряды

Опр. 25. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно, если последовательность функций $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ сходится поточечно (т.е. сходится при $\forall x$).

Ряд функций сходится на множестве X равномерно к функции f , если $S_n \rightrightarrows f$ на множестве X .

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда): Ряд (25) сходится равномерно тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon \exists n_0 \mid \forall k, l : l > k \geq n_0 \forall x \in X \left| \sum_{i=k}^l f_i(x) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Сумма $\sum_k^l f_k(x) = S_l(x) - S_{k-1}(x)$ - задача сведена к критерию Коши для последовательности функций частичных сумм (числовой последовательности). \square

Теорема (Признак сравнения): Пусть числовой ряд $\sum a_n$, где $a_n \geq 0$ сходится, если функции $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что $\sup_{x \in X} f_n(x) \leq a_n$ (эквивалентно $\forall x \in X \mid f_n(x) \leq a_n$). Тогда функциональный ряд $\sum f_n$ сходится на X равномерно.

Доказательство. Покажем, что для ряда $\sum f_n$ выполнено условие Коши:

Пусть $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum a_n$ сходится \Rightarrow для этого числового ряда выполнено условие Коши числовых рядов:

$$\exists n_0 \forall k > l \geq n_0 \left| \sum_{m=k}^l a_m \right| \leq \varepsilon$$

Тогда $\forall x \in X$ имеем:

$$\left| \sum_{m=k}^l f_m(x) \right| \leq \sum_{m=k}^l |f_m(x)| \leq \sum_{m=k}^l a_m \leq \varepsilon$$

Значит условие Коши выполнено для функционального ряда \Rightarrow он сходится равномерно. \square

Теорема (Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда): Ряд $\sum f_n$ сходится на множестве X равномерно $\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Доказательство.

$$\sup_{x \in X} |f_n(x)| = \sup_{x \in X} \left| \sum_{m=n}^n f_m(x) \right|$$

По условию Коши это стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. \square

Утв. Пусть ряд $S(x) = \sum f_n(x)$ равномерно сходится на X . Если все f_n непрерывны, то f - непрерывна.

Доказательство. Все $S_n(x) = (f_1(x) + \dots + f_n(x))$ - непрерывные функции. $S_n \rightrightarrows f$ и применяем теорему о непрерывности предельной функции для последовательности (теорема о пределе пределов). \square

Теорема (об интеграле): Пусть (a, b) - ограниченный промежуток, f_n - интегрируемые на (a, b) функции.

Если последовательность f_n равномерно сходится на (a, b) , то последовательность $\int_a^b f_n$ сходится. Если при этом предельная функция f ($f_n \rightrightarrows f$) интегрируема, то $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$.

Доказательство. Используем критерий Коши:

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0$ выполнено:

$$\sup_{x \in (a,b)} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|a-b|}$$

Для таких k и l выполнено:

$$\left| \int_a^b f_k(x) - \int_a^b f_l(x) \right| = \left| \int_a^b f_k(x) - f_l(x) \right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f_l(x)| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

То есть для числовой последовательности $\int_a^b f_n(x)$ выполнено условие Коши и она имеет предел.

Если $f_n \rightrightarrows f$ интегрируема, то ясно, что $\int_a^b f_n - \int_a^b f \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$. Важно, что (a, b) ограничен. \square

4.2 Дифференцирование

Теорема 18: Пусть ограниченный отрезок $(a, b) \subset \mathbb{R}$ и f_n дифференцируемы на (a, b) и таковы, что

1. $f'_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} h$ на (a, b) .
2. $\exists p \in (a, b)$ такая, что последовательность $f_n(p)$ сходится.

Тогда \exists функция f (дифференцируема на (a, b)) и такая, что $f_n \rightrightarrows f$ и $f' = h$.

Теорема утверждает, что предел производных последовательности функций равен производной предела.

Доказательство. Положим $g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(p)}{x-p}$, область определения g_n это промежуток $(a, b) \setminus \{p\}$. Покажем, что последовательность g_n равномерно сходится на своей области определения:

Применим критерий Коши:

$$g_k(x) - g_l(x) = \frac{(f_k(x) - f_l(x)) - (f_k(p) - f_l(p))}{x-p}, \text{ обозначим } f_{kl}(x) = f_k(x) - f_l(x), f_{kl}(p) = f_k(p) - f_l(p)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, имеем:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \sup_{x \in (a,b)} |f'_k(x) - f'_l(x)| \leq \varepsilon, \text{ то есть, } |f'_{kl}(x)| \leq \varepsilon$$

Тогда по теореме о среднем (теорема о приращениях):

$$\forall x |f_{kl}(x) - f_{kl}(p)| \leq \varepsilon \cdot |x - p|$$

Значит

$$g_k(x) - g_l(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{p\} \quad \forall k, l \geq n_0$$

Согласно критерию Коши последовательность функций g_n сходится равномерно к g . Покажем, что $f_n(x)$ равномерно сходится.

$$f_n(x) = g_n(x)(x - p) + f_n(p) \quad \forall x \neq p$$

Так как $g_n \rightrightarrows g$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, то можем определить $f(x) := g(x)(x - p) + f_n(p)$.

$$f_n(x) - f(x) = [g_n(x) - g(x)](x - p) + f_n(p) - f(x)$$

Применим условие Коши к обоим слагаемым: пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 |g_k(x) - g_l(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(a-b)}$$

и

$$(f_l(x) - f_l(p)) - (f_k(x) - f_k(p)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда

$$|f_l(x) - f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon(x-p)}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Итак, $f_n \Rightarrow f$ на области определения.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \text{ по теореме о пределе пределов}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{f_n(x) - f_n(p)}{x - p} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(p) \\ \lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p) \end{aligned}$$

Эти пределы равны по теореме о пределе пределов, значит $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(p) = f'(p)$. \square

Утв. (Следствие 1) Пусть ряд $\sum f_n$ сходится равномерно на ограниченном промежутке (a, b) . Если f_n интегрируема и f ($f = \sum f_n$) интегрируема, то

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$$

Доказательство. Сумма $\sum f_n$ - это предел частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $S_n(x) \Rightarrow f$ и применяем теорему об интеграле. \square

Утв. (Следствие 2) Пусть ряд $\sum f_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $p \in (a, b)$ и ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ сходится равномерно на (a, b) .

Тогда исходный ряд сходится равномерно на всем (a, b) , а его сумма дифференцируема на (a, b) , и $(\sum f_n)' = \sum (f'_n)$.

Доказательство. Теорема о дифференцируемости, примененная к частичным суммам. \square

Далее будем рассматривать степенной ряд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$.

Теорема 19 (Формула Коши-Адамара): Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$$

- При $|x| < R$ - сходится.
- При $|x| > R$ - расходится.
- При $|x| = R$ - нужно более тонкое исследование.

Доказательство. Доказывается признаком Коши (в лекциях по ТФКП должно быть). \square

Теорема: Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum C_n z^n$ равен r . Тогда $\forall r_0 < r$ ряд сходится равномерно на множестве $|z| \leq r_0$.

Доказательство. Выберем r_1 так, что $r_0 < r_1 < r$. По условию $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$. Поскольку $r_1 < r$, при больших n выполнено $\sqrt[n]{|C_n|} < \frac{1}{r_1}$, то есть $|C_n| < \frac{1}{r_1^n}$.

Если $|z| \leq r_0$, то $|C_n z^n| < |C_n r_0^n| < \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$ - геометрическая прогрессия, причем $\frac{r_0}{r_1} < 1$. Числовой ряд $\sum \frac{r_0}{r_1}$ сходится, значит по признаку сравнения для равномерной сходимости степенной ряд сходится равномерно на $|z| \leq r_0$. \square

Следствие: Внутри (на Int) круга сходимости степенной ряд задает ∞ -дифференцируемую функцию, при этом $(\sum C_n z^n)' = \sum nC_n z^{n-1}$.

Доказательство. Пусть $|z| < r$. Выберем $r_0 > z$, но $r_0 < r$. В круге радиуса r_1 сходимость ряда $\sum C_n z^n$ равномерна, более того (именно это нам и надо):

ряд $\sum nC_n z^{n-1}$, полученный дифференцированием, тоже сходится равномерно (для доказательства этой фразы надо посчитать радиус сходимости нового ряда, он будет такой же, как у исходного). По теореме о дифференции функционального ряда выполнено $(\sum C_n x^n)' = \sum (nC_n x^{n-1})$ в точке X . \square

Теорема (Признак Дирихле равномерной сходимости ряда функций): Пусть ряд $\sum u_n(x)v_n(x)$ таков, что

1. $\forall x \in X$ последовательность $u_n(x)$ монотонна по n и $u_n \rightharpoonup 0$ на X .
2. Частичные суммы ряда $\sum v_n(x)$ равномерно ограничены (единая константа для всех частичных сумм):

$$\exists C < \infty \mid \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in X \left| \sum_{n=1}^k v_n(x) \right| \leq C$$

Тогда $\sum u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно на X .

Справка (большая):

В курсе матанализа был признак Абеля-Дирихле (А-Д) для числового ряда $\sum u_n v_n$ сходится, если

1. Частичные суммы ряда $\sum v_n$ ограничены
2. $u_n \rightarrow 0$ монотонно

В основе доказательства признака Абеля-Дирихле для числовых рядов - неравенство Абеля:

Пусть $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_m \geq 0$ и числа a_1, \dots, a_m - какие-то. Тогда:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m| \leq b_1 \cdot \left(\max_{k=1}^m |S_k| \right), \text{ где } S_k = a_1 + \dots + a_k$$

Доказательство. Докажем неравенство Абеля (для прикола):

$$a_1 = S_1, \quad a_2 = S_2 - S_1, \quad a_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\begin{aligned} |a_1 b_1 + \dots + a_m b_m| &= \\ &= |S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \dots + (S_m - S_{m-1}) b_m| = \\ &= |S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \dots + S_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + S_m b_m| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} |S_k| (b_k - b_{k+1}) + |S_m| b_m \leq \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq m} |S_k| \left((b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{m-1} - b_m) + b_m \right) = \\ &= \max_{1 \leq k \leq m} |S_k| \cdot b_1 \end{aligned}$$

\square

Доказательство. Докажем признак Дирихле для рядов функций:

Воспользуемся критерием Коши:

Пусть $\varepsilon > 0$, u_n сходится равномерно к 0 на X , значит $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \forall x \in X |u_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$ (C - ограничивающая константа для v_n). Пусть $X_- = \{x \mid u_n \searrow\}$, $X_+ = \{x \mid u_n \nearrow\}$.

По неравенству Абеля:

$\forall x \in X_- \ \forall l \geq k > n_0$ выполнено

$$\left| \sum_k^l u_n(x)v_n(x) \right| \leq u_k \cdot S, \text{ где } S = \max_{n=k}^{\tilde{l}} v_n(x), \tilde{l} \leq l$$

$$\left| \sum_k^{\tilde{l}} \right| = \left| \sum_1^{\tilde{l}} - \sum_1^{\tilde{l}-1} \right| \leq \left| \sum_1^{\tilde{l}} \right| + \left| \sum_1^k \right| \leq C + C \text{ (по второму условию из признака)}$$

Итак, $\sum_k^l u_n(x)v_n(x) \leq u_k \cdot 2C \leq \frac{\varepsilon}{2C} \cdot 2C = \varepsilon$. Условие Коши выполнено и ряд сходится равномерно на X_- . Для X_+ аналогично, значит на X тоже равномерно. \square

Утв. Ряд $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ сходится равномерно на $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$.

Доказательство. Для таких X выполнено $\left| \sum_{n=0}^k \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\delta}|}$, то есть для ряда $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ выполнено условие (2) из признака А-Д. Поскольку $u_n(x) \rightarrow 0$ и монотонна по n , значит условие (1) тоже выполнено. Тогда по признаку А-Д ряд $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ сходится равномерно. \square

Теорема (Признак Абеля): Пусть ряд $\sum u_n(x)v_n(x)$ таков, что

1. Любая последовательность $u_n(x)$ для каждого x монотонна и все $u_n(x)$ равномерно ограничены:

$$\exists M < \infty \mid \forall n \ \forall x \in X \ |u_n(x)| \leq M$$

2. Ряд $\sum v_n(x)$ **равномерно** сходится

Тогда $\sum u_n(x)v_n(x)$ сходится равномерно.

Доказательство. Этот признак не следует напрямую из признака Дирихле. Воспользуемся тем же Критерием Коши:

Пусть $\varepsilon > 0$, X_-, X_+ такие же, как раньше. Применим К.К. к ряду $\sum v_n(x)$ и получим:

$$\exists n_0 \mid \forall k, l \geq n_0 \ \forall x \in X \ \left| \sum_{n=k}^l v_n(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{C}$$

Константа C такая, что ограничивает все $u_n(x) \ \forall n \forall x$.

$$\begin{aligned} \forall k, l \geq n_0 \ \forall x \in X_- \quad & \left| \sum_k^l u_n(x)v_n(x) \right| \underset{\text{нер-во Абеля}}{\leq} \\ & \leq u_k \cdot |\text{самое большое из чисел } v_k(x), (v_k(x) + v_{k+1}), \dots, (v_k(x) + \dots + v_l(x))| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Выполнено условие Коши, значит ряд $\sum u_n v_n$ сходится равномерно на X_- . Для X_+ аналогично.

В рассуждении использовалось то, чего не было в условии: мы предполагали (применяя неравенство Абеля), что $u_n \geq 0$. Этого может не быть, как спасти ситуацию?

Пусть $\tilde{u}_n(x) = u_n(x) + C \in [0, 2C] \ \forall n \forall x \in X$

$$\sum u_n(x)v_n(x) = \sum (\tilde{u}_n(x) - C)v_n(x) \leq \sum \tilde{u}_n(x)v_n(x) - C \cdot \sum v_n(x)$$

Для первого слагаемого доказательство, приведенное выше работает, а второе ряд сходится равномерно. Осталось показать, что $\sum \lambda a_n(x) + \gamma b_n(x)$ равномерно сходится (упражнение, но кажется достаточно расписать через определение).

\square

Теорема (Теорема Абеля о степенных рядах): Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $a_n \in \mathbb{C}$. Тогда на $[0, 1]$ степенной ряд $f(t) = \sum a_n t^n$ сходится равномерно и, значит, $f(t)$ непрерывна как функция от t на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Согласно признаку Абеля $\sum u_n(t)v_n(t)$ сходится равномерно, если ряд $\sum v_n(t)$ сходится равномерно, последовательность функций $u_n(t)$ равномерно ограничена константой C и для любого t последовательность $u_n(t)$ монотонна по n .

Положим $v_n(t) = a_n$; $u_n(t) = t^n$. Тогда у нас выполнено условие признака Абеля:

- $|u_n(t)| \leq 1 \forall n \forall t \in [0, 1]$
- если $t \in [0, 1)$, то $t^n \xrightarrow{\text{МОНОТОННО}} 0$
- если $t = 1$, то $t^n \equiv 1$ тоже монотонна!

Значит $f(t)$ сходится на $t \in [0, 1]$ равномерно, а сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций тоже непрерывна. \square

Опр. 26 (Метод суммирования Абеля). Пусть есть ряд $\sum a_n$ (неважно, сходящийся или нет). Он сходится методом суммирования Абеля, если

$$\exists \lim_{t \rightarrow 1|_{[0,1]}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \right) \text{ (конечный)}$$

Теорема: Пусть ряды $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся и ряд $\sum c_n$ получен из них произведением Коши:

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j; \quad c_0 = a_0 b_0; \quad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1; \quad c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

Если ряд $\sum c_n$ сходится, то его сумма равна $(\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$.

Доказательство. Пусть $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Перемножим эти ряды по Коши:

$$c_n(t) = \sum_{i+j=n} a_i t^i \cdot b_j t^j = \sum_{i+j=n} a_i b_j t^{i+j=n} = c_n t^n$$

По условию все три ряда сходятся: $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$, $\sum c_n = C$. Значит при $|t| < 1$ ряды $\sum a_n t^n$, $\sum b_n t^n$, $\sum c_n t^n$ сходятся абсолютно (потому что мажорируются убывающей геометрической прогрессией). По теореме из прошлого, произведение $A(t) \cdot B(t) = C(t)$.

При $t \nearrow 1$ по теореме Абеля:

- $A(t) \rightarrow A(1) = A$
- $B(t) \rightarrow B(1) = B$
- $C(t) \rightarrow C(1) = C$

Значит, при переходе к пределу $A \cdot B = C$.

\square

Долг из прошлого:

Теорема (Теорема Мертенса (упрощенная, но достаточная для нас)):

Пусть ряд $A = \sum a_i$, $B = \sum b_i$ сходятся абсолютно, тогда ряд $\sum c_n$ сходится ($c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$) и его сумма равна $A \cdot B$.

Доказательство. Применим критерий Коши к ряду $\sum c_n$ и покажем, что $\sum_{n=k}^l |c_n| \xrightarrow[k,l \rightarrow 0]{} 0$.

$$\sum_k^l |c_n| = \left| \sum a_i b_j \right|, \quad i + j \in [k, l]$$

$$\left| \sum_{n=k}^l c_n \right| = \left| \sum_{n=k}^l \sum_{i+j=n} a_i b_j \right| \leq \sum_{n=k}^l \sum_{i+j=n} |a_i| \cdot |b_j| \leq \sum_{i,j=0}^l - \sum_{i,j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} |a_i| \cdot |b_j|$$

$$\sum_{i,j=0}^l |a_i| \cdot |b_j| = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l |a_i| \cdot |b_j| = S_1(l) \cdot S_2(l)$$

В этой записи $S_1(l)$ - частичная сумма ряда $\sum |a_i|$, $S_2(l)$ - частичная сумма ряда $\sum |b_i|$, $S_1(l) \rightarrow \sum |a_n|$, $S_2(l) \rightarrow \sum |b_n|$. В квадрате на рисунке, который я не могу сюда приложить, но его можно посмотреть в ваших лекциях, площадь квадрата с квадратным вырезом в левом верхнем углу равна

$$= S_1(l) \cdot S_2(l) - S_1\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) \cdot S_2\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) \xrightarrow[k,l \rightarrow \infty]{} 0$$

□

5 Ряды Фурье

Пусть E - евклидово пространство (векторное пространство со скалярным произведением). Скалярное произведение $\langle a, b \rangle$ - бинарная операция, удовлетворяющая аксиомам:

1. $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \iff a, b \in \mathbb{R}; \langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle} \iff a, b \in \mathbb{C}$
2. $\langle a, a \rangle \geq 0, \langle a, a \rangle = 0 \iff a = 0$
3. $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$

Модуль вектора вычисляется с помощью $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Утв. Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ - попарно ортогональные векторы ($\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$). Пусть $\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$, тогда

$$x_i = \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Доказательство.

$$k \neq i \implies \langle e_k, e_i \rangle = 0 \implies \langle v, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n x_k \langle e_k, e_i \rangle = x_i \langle e_i, e_i \rangle$$

□

Если $\{\vec{e}_i\}$ - попарно ортогональные ненулевые вектора, то они образуют линейно независимый набор.

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum x_i e_i, \sum x_j e_j \right\rangle = \sum x_i x_j \langle e_j, e_i \rangle = \sum x_i^2 |e_i|^2$$

В частности, если все длины векторов \vec{e}_i равны 1, то $|v|^2 = \sum x_i^2$.

Пусть f, g - хорошие функции на отрезке $[0, 2\pi]$, то их скалярное произведение определено следующим образом:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

Утв. Функции $\sin(nx)$ и $\cos(mx)$ ортогональны при $\forall n, m \in \mathbb{N}$. А также:

- $\sin(nx) \perp \sin(mx) \quad \forall n \neq m \geq 0$
- $\cos(nx) \perp \cos(mx) \quad \forall n \neq m \geq 0$
- $\|\sin(nx)\| = \pi \quad n > 0$
- $\|\cos(nx)\| = \pi \quad n > 0$

Доказательство.

$$\cos(mx) = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}; \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{imx} dx, \quad n, m \in \mathbb{N} = \int_0^{2\pi} e^{i(n+m)x} dx = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi \quad n + m = 0 \\ \left. \frac{e^{i(n+m)x}}{i(n+m)} \right|_0^{2\pi} = 0 \quad n + m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+m)x} - e^{i(n-m)x} + e^{i(m-n)x} - e^{-i(n+m)x}}{2 \cdot 2i} dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Аналогично остальные

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{2inx} - e^{-2inx} - 2}{-4} dx = \int_0^{2\pi} \frac{-2}{-4} dx = \pi$$

□

Утв. (Следствие) Пусть $f(t)$ - линейная комбинация вида

$$f(t) = \lambda + b_1 \sin(t) + \dots + b_n \sin(nt) + a_1 \cos(t) + \dots + a_n \cos(nt)$$

Тогда

$$b_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt}{\pi}, \quad a_k = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt}{\pi}, \quad \lambda = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \cdot 1 dt}{2\pi}$$

Опр. 27. Ряд Фурье функции $f(t)$ (разложение обозначается знаком \Leftarrow)

$$\begin{aligned} f(t) &\Leftarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)] \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Введем контекст:

Пусть f - функция, интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$. Разложим ее в ряд Фурье в соответствии с определением:

$$\begin{aligned} f(x) &\Leftarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Теорема (Лемма об интеграле периодичной функции): Пусть f - T -периодична, если f интегрируема на $[0, T]$, то f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{T+a} f(x) dx$$

Доказательство. Функция f интегрируема на любом отрезке $[T, (n+1)T]$, отсюда следует интегрируемость на любом $[a, b]$. Пусть $a \in [0, T]$, тогда

$$\int_0^{T+a} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{T+a} f(x) dx$$

Разложим интеграл от 0 до $T+a$ двумя способами, в силу периодичности $\int_T^{T+a} = \int_0^a$, значит другие два интеграла тоже равны. В общем случае $a > T$, тогда $\exists n \mid a \in [nT, (n+1)T]$ и $\int_0^T = \int_{nT}^{(n+1)T} = \int_a^{a+T}$. \square

Следствие:

Если f - 2π -периодична, то пределы интегрирования для коэффициентов a_n, b_n будем брать $[-\pi, \pi]$.

5.1 Комплексная форма ряда Фурье

$$f(x) \Leftarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Такая форма получается из 2π -периодичной функции f , при $k \geq 0$, тогда

$$a_k + i b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(kt) + i \sin(kt)) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = 2c_k$$

Теорема Пифагора:

Пусть $f = \sum x_n e_n$. $e_n \perp e_k (n \neq k)$, f - хорошая, тогда $\langle f, f \rangle = \sum |x|^2 \langle e_n, e_n \rangle$. При этом $\langle e_n, e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi$.

$$\langle e_0, e_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi$$

Если f - хорошая и $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, то

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Это равенство называется равенством Парсеваля.

Опр. 28. Формула Дирихле.

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + 2(\cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(nt)) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Опр. 29. Если функция f 2π -периодична, кусочно дифференцируемая и ее первая производная ограничена, то f - функция класса Фурье.

Утв. Функция класса Фурье может иметь разрывы только 1-го рода, то есть существует конечные пределы:

$$\forall x \exists f(x+0) := \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h), \exists f(x-0) := \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h)$$

Доказательство. Пусть x_0 - точка разрыва функции f . Выберем $a < x_0$ так, что на $[a, x_0)$ f - дифференцируема. Тогда $\forall x \in [a, x_0)$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Этот интеграл сходится, значит утверждение доказано. \square

Утв. Обозначим разложение функции f в ряд Фурье через $S_n f$. Тогда

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt$$

Функция Дирихле четна, 2π -периодична.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(-t) dt \quad (\text{т.к. } D_n(t) = D_n(-t)) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} dt = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{k=-n}^n \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau) e^{-ik(\tau-x)} d\tau \quad (\tau = x+t) \\ &= \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} e^{ikx} d\tau \quad (\text{периодичность}) \\ &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \cdot 2\pi c_k. \end{aligned}$$

\square

Следствие:

Если функция класса Фурье, то

$$\begin{aligned} 2\pi \left(S_n f(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right) &= \\ &= \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x-0)D_n(t)) dt + \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+0)D_n(t)) dt \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 2\pi \left[S_n f(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right] &= \\ &= \int_{-\pi}^\pi f(x+t)D_n(t) dt - \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \cdot D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^\pi \left[f(x+t) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right] D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^0 [f(x+t) - f(x-0)] D_n(t) dt + \int_0^\pi [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \end{aligned}$$

□

Теорема (Теорема Фурье): Пусть f - функция класса Фурье. Тогда

1. $\forall x \ S_n f(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{f(x-0) - f(x+0)}{2}$.
2. Если a_0, \dots, a_n - точки разрыва из отрезка $[-\pi, \pi]$, то для любого отрезка I , не содержащего ни одной точки разрыва a_i , сходимость на I будет равномерной.

Доказательство. Надо доказать, что

$$\int_0^\pi [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Пусть $\varepsilon > 0$, выберем такое h , что $\int_0^h < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|(f(x+t) - f(x+0))D_n(t)| = \left| (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin(t(n + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{t}{2})} \right|$$

Поскольку при $t \in [0, \pi]$ $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$, то

$$\left| (f(x+t) - f(x+0)) \frac{\sin(t(n + \frac{1}{2}))}{\sin(\frac{t}{2})} \right| \leq \underbrace{\frac{|f(x+t) - f(x+0)| \cdot |\sin(t(n + \frac{1}{2}))|}{|\frac{t}{\pi}|}}_{*} \leq \frac{\pi |f(x+t) - f(x+0)|}{t}$$

Если выбрать h такое, чтобы на $(x, x+h)$ у функции $f(x)$ не было разрывов, то $\forall t \in (x, x+h)$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x+0)| &\leq t \cdot \underbrace{\sup(|f'(x)|)}_{\leq C \text{ по условию}} \end{aligned}$$

Продолжая цепочку неравенств $*$ получим $\leq \pi \cdot \frac{C}{t} = \pi C$. Итак, если h такое, что на $(x, x+h)$ нет точек разрыва, то

$$\begin{aligned} \left| \int_0^h [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \right| &\leq \int_0^h |[f(x+t) - f(x+0)] D_n(t)| dt \leq \\ &\leq \int_0^h \pi \cdot C dt = \pi \cdot Ch \end{aligned}$$

А если взять $h < \frac{\varepsilon}{2\pi c}$, то $\left| \int_0^h \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Утв. (Лемма) Пусть $h \in (0, \pi)$. Тогда $\exists K < \infty$ такая, что

$$\left| \int_h^\pi [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \right| \leq \frac{K}{h}$$

Доказательство леммы.

$$[f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) = \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x+0)}{\sin(\frac{t}{2})} \cdot \sin(t(n + \frac{1}{2}))}_{g(t)}$$

Пусть (a, b) - один из промежутков в (h, π) , на котором f дифференцируема. Пусть всего таких промежутков m штук.

$$|g'(t)| = \left| \frac{f'(x+t) \cdot \sin(\frac{t}{2}) - [f(x+t) - f(x+0)] \cdot \frac{1}{2} \cos(t)}{\sin^2(\frac{t}{2})} \right| \quad (8)$$

Заметим, что $\sin^2(\frac{t}{2}) \geq (\frac{t}{\pi})^2 \geq (\frac{h}{\pi})^2$. Тогда продолжим (8):

$$(8) \leq \frac{|\text{числитель}| \pi^2}{h^2} \leq \frac{C + M}{h^2} =: \xi$$

где $M = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} (|f(x)|)$, $C = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} (|f'(x)|)$.

$$\begin{aligned} I := \left| \int_a^b [f(x+t) - f(x+0)] D_n(t) dt \right| &= \left| \int_a^b g(t) \sin(t(n + \frac{1}{2})) dt \right| \stackrel{\Phi\text{ИЧ}}{=} \underbrace{\left| g(t) \cdot \frac{\cos(t(n + \frac{1}{2}))}{n + \frac{1}{2}} \right|_a^b}_{I_1} - \\ &- \underbrace{\int_a^b g'(t) \frac{\cos(t(n + \frac{1}{2}))}{n + \frac{1}{2}} t dt}_{I_2} \leq \frac{2 \max(g(t))}{n + \frac{1}{2}} + \underbrace{|b-a| \cdot \xi \cdot 1}_{\leq \pi} \cdot \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} [K], \\ K &= 2 \max(g(t)) + \pi \cdot \xi \end{aligned}$$

Итого $|g(t)| \leq M_1$, $|g'(t)| \leq M_2$. Тогда

$$|I_1| \leq \frac{2M_1}{n + \frac{1}{2}}, \quad |I_2| \leq \frac{|b-a| M_2}{n + \frac{1}{2}} \leq \frac{\pi \cdot M_2}{n + \frac{1}{2}}$$

$$|I| = |I_1 - I_2| \leq |I_1| + |I_2| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cdot \text{const}, \quad \text{const} := 2M_1 + \pi M_2 \cdot [\text{кол-во промежутков (a,b)}]$$

□

Продолжаем доказывать теорему Фурье:

Получили, что $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0 \left| \int_h^\pi \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом:

1. Выбрали $h \in [0, \pi]$ такое, что у функции $f(x+t) - f(x+0)$ нет разрывов на $t \in (0, h)$ (то есть у f нет разрывов на $(x, x+h)$) и при этом h такое хитрое, что $\left| \int_0^h \dots \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Это мы уже сделали.
2. Вторая часть доказательства:

Пусть теперь на $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$ нет точек разрыва функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Покажем, что $S_n(f) \rightharpoonup f$ на этом (a, b) .

$\exists h_0 > 0$ такое, что на $[a - h_0, b + h_0]$ функция f непрерывна. Тогда в части 1 доказательства того, что уже было, можно выбрать $h = h(\varepsilon)$, а не $h = h(x, \varepsilon)$ (выбрать h независимо от x). Таким образом выбор h_0 можно сделать независимым от выбора x_0 .

□

Утв. (Равенство Парсеваля) Пусть f, g - непрерывные функции класса Фурье, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(f)\overline{C_k(g)}$$

где

$$C_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx$$

Сумма от минус бесконечности до бесконечности подразумевается в следующем смысле:

$$f(x) \doteq \sum_{-\infty}^{\infty} C_k(f)e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f), \quad S_n(f) = \sum_{k=-n}^n C_k(f)e^{ikx}$$

Доказательство.

- $S_n(f) \rightrightarrows f$ на $[-\pi, \pi]$

- $S_n(g) \rightrightarrows g$ на $[-\pi, \pi]$

$S_n(f) \cdot \overline{S_n(g)} \rightrightarrows f \cdot \bar{g}$, так как f и g ограничены (было оставлено как упражнение).

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \bar{g} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(f(x)) \cdot \overline{S_n(g(x))} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^n C_k(f)e^{ikx} \right) \left(\sum_{m=-n}^n \overline{C_m(g)} e^{-imx} \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \sum_{m=-n}^n C_k(f) \overline{C_m(g)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n C_k(f) \overline{C_k(g)} \int_{-\pi}^{\pi} e^0 dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k(f) \overline{C_k(g)} \end{aligned}$$

□

Если $f = g$, то

$$\int f \cdot \bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \overline{C_k} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

Утв. Равенство Парсеваля верно для всех $f, g \in L_2[-\pi, \pi]$, где $L_2[-\pi, \pi]$ - это множество всех функций, таких, что $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$.

Теорема (Лемма о натуральной параметризации): Пусть Γ - гладкая кривая в \mathbb{R}^n длины L . Тогда существует натуральная параметризация (т.е. модуль скорости) вида

$$\gamma(s) : [0, L] \rightarrow \Gamma \mid |\dot{\gamma}(s)| = 1$$

Доказательство. Возьмем какое-то отображение (пусть) $f : [a, b] \rightarrow \Gamma$, $f \in C^1$, $f'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. Длина L будет выражаться как $\int_a^b |f'(t)| dt$. Пройденное расстояние $S : [a, b] \rightarrow [0, L]$ представлено в виде $S(t) = \int_a^t |\dot{f}(s)| ds$.

$$\dot{S}(t) = \left(\int_a^t |\dot{f}(s)| ds \right)' = |\dot{f}(t)| > 0 \forall t$$

При этом S возрастает монотонно, а значит обратима, пусть $t(S)$ - обратная функция.

$$t(S) : [0, L] \rightarrow [a, b], \quad t'(S) = \frac{1}{s'(t)}$$

Значит $\gamma(s) := f(t(s))$ - искомая параметризация.

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{f}(t(s)) \cdot t'(s) = \dot{f}(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t)} = \frac{\dot{f}(t(s))}{|\dot{f}(t(s))|} \text{ и } |\dot{\gamma}(s)| = 1$$

□

Теорема (Площадь сектора кривой): Пусть кривая $f(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, а f и \dot{f} имеют ориентацию. Точка на кривой $f = (x, y)$, вектор скорости в точке $\dot{f} = (\dot{x}, \dot{y})$. Заметим, что

$$\forall t \quad \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} > 0$$

То есть, если эта матрица положительно определена, то вектора f и \dot{f} положительно определены и точка t_0 всегда лежит справа от точки t_1 (t_0 и t_1 - точки начала и конца сегмента кривой, ограничивающего наш сектор). Мы показали, что при движении по кривой мы перемещаемся против часовой стрелки).

Площадь сектора:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt$$

Пусть ds - площадь треугольника, заметаемого за время $(t, t + dt)$, из формулы площади параллелограмма через определитель:

$$ds = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} ds = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} dt$$

Теорема (Изопериметрическое неравенство): Пусть Γ - кусочно дважды гладкая замкнутая кривая длины 2π . Тогда $S \leq \pi$, причем если $S = \pi$, то Γ - это окружность.

Доказательство. Пусть $\gamma = (x(s), y(s))$ - натуральная параметризация кривой Γ , $s \in [0, 2\pi]$.

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x\dot{y} - \dot{x}y) ds$$

$\begin{cases} x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ - принадлежат классу Фурье и непрерывны.

$$\begin{aligned} x(s) &\doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ns) + b_n \sin(ns) \\ \dot{x}(s) &\doteq \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin(ns) + b_n \cos(ns)) \end{aligned}$$

$$y(s) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n \cos(ns) + \tilde{b}_n \sin(ns))$$

$$\dot{y}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-\tilde{a}_n \sin(ns) + \tilde{b}_n \cos(ns))$$

Вспомним равенство Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} fg = \pi \left(\frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum [a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)] \right)$$

Тогда:

$$\int_0^{2\pi} x\dot{y} = \pi \cdot \sum_{n \geq 1} n [a_n \tilde{b}_n - \tilde{a}_n b_n]$$

Утверждение о том, что $\int_0^{2\pi} x\dot{y} = \int_0^{2\pi} -\dot{x}y$ было упражнением (либо раньше, либо я это не вписал).

Итак:

$$S = \pi \sum_{n \geq 1} n \cdot [a_n \tilde{b}_n - \tilde{a}_n b_n] \leq \pi \sum_{n \geq 1} n [|a_n \tilde{b}_n| + |\tilde{a}_n b_n|]$$

Из $(a \pm b)^2 \geq 0 \implies |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Значит:

$$S \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 1} n (a_n^2 \tilde{b}_n^2 + \tilde{a}_n^2 b_n^2)$$

Длина нашей кривой Γ :

$$L(\Gamma) = 2\pi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|}}_{dt} dt = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt$$

По равенству Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 dt = \pi \left(\sum_{n \geq 1} n^2 (a_n^2 + b_n^2) + \sum_{n \geq 1} n^2 (\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) \right) \text{ по условию } 2\pi$$

Сократим на 2:

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 1} n (a_n^2 + b_n^2 + \tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) \underset{\text{тут}}{\leq} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2) = \pi \implies S \leq \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

Итого $S \leq \pi$. Осталось доказать, что если $S = \pi$, то Γ - окружность. Если $S = \pi$, то $\forall n$ в неравенстве "тут" в (9) $= n^2(\dots) = n(\dots) \implies n = 1$. Тогда $\forall n \geq 2 a_n = 0, b_n = 0, \tilde{a}_n = 0, \tilde{b}_n = 0$.

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(s) + b_1 \sin(s), \quad y(s) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \tilde{a}_1 \cos(s) + \tilde{b}_1 \sin(s)$$

$$\frac{\pi}{2} (a_1^2 \tilde{b}_1^2 - \tilde{a}_1 b_1^2 = \pi), \quad S = \pi (a_1^2 \tilde{b}_1^2 - \tilde{a}_1^2 \tilde{b}_1^2)$$

Из $|ab| = \frac{a^2 + b^2}{2} \implies a_1 = \pm b_1$ и доказываем, что это окружность. \square

Теорема (Теорема о тригонометрической аппроксимации): Пусть f - непрерывная функция на $[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$. Тогда $\forall \varepsilon \exists$ тригонометрический многочлен $P(x)$, такой, что $\forall x \in [0, 2\pi] |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

Доказательство. 1. Заменим f кусочно гладкой линейной функцией \tilde{f} , так, что $\forall x |\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

По теореме Кантора-Гейне (функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем) непрерывная функция \tilde{f} на отрезке $[0, 2\pi]$ равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in [0, 2\pi] |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

Пользуясь этим разобьем $[0, 2\pi]$ на конечное число кусочков $[a_k, a_{k+1}]$, настолько коротких, что $\forall x_1, x_2 \in [a_k, a_{k+1}] |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Пусть $\tilde{f}(a_i) = f(a_i) \forall i$. На промежутках $[a_i, a_{i+1}]$ \tilde{f} - прямая между точками $(a_i, f(a_i))$ и $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [a_i, a_{i+1}] \\ |\tilde{f}(x) - f(x)| &= |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i) + \tilde{f}(a_i) - f(x)| \leq \\ &\leq |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i)| + |\tilde{f}(a_i) - f(x)| \end{aligned}$$

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a_i)| \leq |\tilde{f}(a_{i+1}) - f(a_i)| = |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|\tilde{f}(a_i) - f(x)| = |f(a_i) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

2. Функция \tilde{f} принадлежит классу Фурье, $\tilde{f}(0) = f(2\pi)$. По теореме Фурье $S_n(\tilde{f}) \rightharpoonup \tilde{f}$ на $[0, 2\pi]$. Тогда $\exists n_0 \sup_{x \in [0, 2\pi]} |S_{n_0}(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. А значит $|S_{n_0}(\tilde{f}(x)) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ (доказывается хитрым движением $\pm \tilde{f}(x)$ под модуль).

□

Теорема (Теорема Стоуна-Вейерштрасса): Непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить многочленом:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}) \implies \forall \varepsilon \exists \text{многочлен } P(x) \forall x \in [a, b] |U(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Доказательство. 1. Пусть $\lambda(x) : [a, b] \xrightarrow{\text{линейное}} [0, 2\pi]$.

$$g(t) = f(\lambda^{-1}(t)) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

Существует тригонометрический многочлен $Q(t)$ (например, форма Фурье) такой, что $\forall t \in [0, 2\pi] |Q(t) - g(t)| \leq \varepsilon$. Теперь осталось приблизить $Q(t)$ обычным многочленом.

$$Q(t) = q_0 + q_1 \cos(t) + \dots + q_N \cos(Nt) + q_1 \sin(t) + \dots + q_N \sin(Nt)$$

Для $\forall k_0$ форма $\cos(k_0 t)$ равномерно приближаемая на $[0, 2\pi]$ частичными суммами своего ряда Тейлора.

$$\cos(k_0 t) = 1 - \frac{(k_0 t)^2}{2!} + \frac{(k_0 t)^4}{4!} + \dots$$

Радиус сходимости равен бесконечности, поэтому ряд сходится равномерно на любом отрезке конечной длины.

Пусть n_0 настолько большое, что все частичные суммы для $\cos(t), \dots, \cos(Nt), \sin(t), \dots, \sin(Nt)$ были δ -близки к своим функциям. Т.е.

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{i=1}^k |q_i| + \sum_{i=1}^k |\tilde{q}_i|\right)}$$

Соответствующая сумма имеет вид

$$q_0 + \sum_{k=1}^{n_0} q_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n_0} \tilde{q}_k \sin(kt),$$

где первая сумма — это частичная сумма ряда Тейлора (до n_0) для $\cos(kt)$, а вторая — для $\sin(kt)$. Поскольку каждая из функций $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ аппроксимируется многочленом от t , вся сумма является многочленом; следовательно, можно взять $P(t)$ в указанном виде.

□