Вопросы к экзамену по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Вопросы

1. ~~Производная вдоль вектора.~~
2. ~~Частные производные.~~
3. ~~Дифференциал.~~
4. ~~Дифференцируемость функции в точке.~~
5. ~~Достаточный признак дифференцируемости.~~
6. ~~Необходимые условия экстремума.~~
7. ~~Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению.~~
8. ~~Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.~~
9. ~~Градиент вещественной функции.~~
10. ~~Векторные поля.~~ **TODO: Объяснялка что такое векторное поле и его потенциал через ветер или ландшафт**
11. ~~Потенциал векторного поля.~~
12. ~~Многократная дифференцируемость.~~
13. ~~Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример".~~
14. ~~Высшие дифференциалы.~~
15. Пример не коммутирующих дифференциальных операторов.
16. ~~Теорема о разложении Тейлора.~~
17. ~~Гессиан вещественной функции. Достаточные условия экстремума.~~
18. ~~Функции класса C^k на открытом множестве (и на множествах, не обязательно открытых).~~
19. ~~Теорема об открытости отображения вида $f(x) = x + \varphi(x)$, где φ - сжимающее отображение.~~
20. Теорема о локальной обратимости, "контрпримеры".
21. Лемма о локальном наложении.
22. Теорема о неявной функции.
23. Теорема об обратной функции.
24. Многообразия в $\mathbb{R}^n$.
25. Примеры двумерных многообразий: сфера, тор, цилиндр, лист Мёбиуса.
26. Теорема Брауэра об инвариантности области (формулировка).
Гомеоморфизмы и C^r-изоморфизмы.
27. Многообразия с краем. лемма о крае полупространства.
28. Лемма об изоморфизме многообразий. лемма об открытых частях многообразия.

29. Теорема о крае многообразия.
30. Теоремы о регулярных решениях.
31. Касательное пространство. Дифференциал как отображение касательных пространств, корректность определения, свойства.
32. Круг и квадрат гладко не изоморфны.
33. Теорема о регулярном дополнении.
34. Метод множителей Лагранжа, достаточные условия экстремума.
35. Лемма о локальном вложении.
36. Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций.
37. Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей и для рядов.
38. Признак Вирштрасса равномерной сходимости ряда.
39. Признак Абеля. Признак Дирихле.
40. Непрерывность дзета-функции при x>1.
41. Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций.
42. Интегрирование равномерного предела. Пример "расползающаяся куча".
43. Теорема о пределе производных.
44. Теорема о дифференцировании функционального ряда.
45. Теорема Абеля.
46. Теорема о сумме степенного ряда.
47. Ортогональность тригонометрической системы функций.
48. Вещественная и комплексная форма записи ряда Фурье.
49. Лемма об интегралах периодической функции.
50. Формула Дирихле.
51. Теорема Фурье.
52. Теоремы Вейерштрасса о тригонометрической и о полиномиальной аппроксимации.
53. Равенство Парсеваля.
54. Изопериметрическое неравенство.
55. Примитивный интеграл.
56. Мера сегмента.
57. Ступенчатые функции.
58. Интеграл ступенчатой функции, корректность и элементарная теорема Фубини.
59. Лемма о счетном покрытии интервала.

2 Ответы

2.1 Производная вдоль вектора

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр.. Прозводная вдоль вектора v:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0, 0)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t \to 0}{=} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

2.2 Частные производные.

Опр.. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

2.3 Дифференциал.

Опр.. Дифференциал функции f в точке p - линейное отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \to p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки p на вектор h:

$$f(p + h) = f(p) + df(p) < h > + o(|h|)$$

2.4 Дифференцируемость функции в точке.

Пусть $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференциируема в p, если:

1. $p \in Int(U) \quad (\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U)$
2. $\exists$ дифференциал функции (линейное отображение) f в точке p $\quad df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \to p}{=} o(x - p))$$

2.5 Достаточный признак дифференциируемости.

Теорема (Достаточный признак дифференциируемости)**:** Если все частные производные непрерывны в p, то f дифференциируема в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x, y) = x^y$ дифференциируема во всех точках (x_0, y_0), где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

2.6 Необходимые условия экстремума.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции одной переменной - условие Ферма)**:** Пусть $f \in D(p)$ (дифференциируема в p). Если p - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0$, но 0 - не экстремум нашей функции $f(x)$.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции многих переменных)**:** Вектор частных производных первого порядка по переменным равен нулевому вектору:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (0, \ldots, 0)$$

2.7 Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению

Рассмотрим функцию $f = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \ (x, y) \neq 0 \\ 0 \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. В (0, 0) у нее есть производная по любому направлению:

$$v = (v_1, v_2) \quad \lim_{t \to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_1}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}$$

Если компонента $v_2 = 0$, то производная $= 0$, если же $v_2 \neq 0$, то производная равна $\frac{v_1^2}{v_2}$. Рассмотрим направление $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$. Если двигаться по нему к точке $(0, 0)$ (т.е. $t \to 0$) функция будет стремиться к:

$$f(t, t^2) = \lim_{t \to 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

Совсем не похоже на 0, т.е. функция разрывна в 0. Но мы показали, что у нее есть производная по этому направлению (равна 1 кстати).

2.8 Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.

Дифференцируемость суммы, произведения и композиции удовлетворяет классическим правилам дифференциируемости, это несложно доказать, но мне лень.

2.9 Градиент вещественной функции

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1 \times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр.. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Опр.. Функция дифференциируема в точке, если

- $f : U \to \mathbb{R}^k$ и $p \in Int(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p\rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно задать как $df(p)\langle v\rangle = \langle \nabla f(p); v\rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$ - вектор частных производных в точке p.

Утв. Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p, вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \underset{t\to 0}{\to} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v\rangle = \langle \nabla f(p); v\rangle = |\nabla f(p)|\cdot|v|\cdot cos(\varphi), \text{где } \varphi \text{ - угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p) = const, |v|= 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ, чтобы $cos(\varphi)$ был максимален, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. □

Утв. $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x|f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ ($p \in \Omega$). Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \underset{n\to\infty}{\to} 0 :$

$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p\rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p\rangle + o(x_n - p)$.

Значит $0 \underset{n\to\infty}{=} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle \to 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|}\rangle = |\nabla f(p)|\cdot \left|\frac{x_n - p}{|x_n - p|}\right| \cdot cos(\alpha) \to 0, \text{ т.е.} \alpha \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2}.$$

□

2.10 Векторные поля.

Опр.. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

2.11 Потенциал векторного поля.

Опр.. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \to \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

2.12 Многократная дифференцируемость.

Опр.. Рекурсивное: $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ k раз дифференциируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференциируема во всех точках некоторой окрестности точки p;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференциируемы $k - 1$ раз в точке p.

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$, $g(x) \in D^k(p)$, $f(x) \in D^k(p)$, $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. □

2.13 Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример".

Теорема (о вторых производных)**:** Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2, т.к. при дифференциировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1:

$$f_1(x, y) := f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0)$$

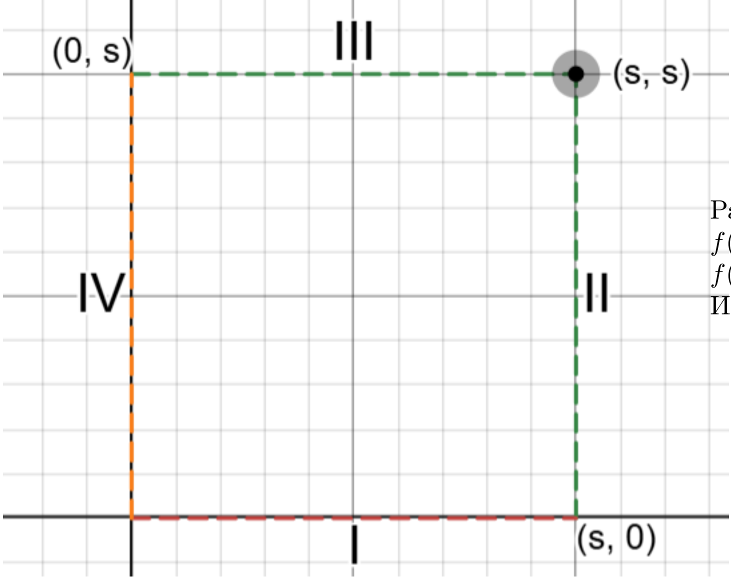
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0)$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0, 0) = 0$. Линейно приблизим производную в (0,0), взяв первые два члена ряда Тейлора с учетом $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = f(0, 0) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y),\ \text{где}\ \alpha_1(x, y) = o(x, y)$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому имеем право сказать $a_{11} = f_{xx}(0),\ a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y),\ a_{21} = f_{yx}(0),\ a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s, s) вблизи нуля. Для нее $f(s,s) - f(0,0) = (f(s,s) - f(s,0)) + (f(s,0) - f(0,0)) = (II) + (I)$.
И в то же время $f(s,s) = (\text{IV}) + (\text{III})$

$$\text{II} = f(s,s) - f(s,0) = \int_{y=0}^{s} \frac{\partial f}{\partial y}(s,t)dt = \int_{t=0}^{s} a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s,t)dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_2(s,t)dt$. Аналогично для I:

$$\text{I} = f(s,0) - f(0,0) = \int_{t=0}^{s} \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt = \int_{t=0}^{s} a_{11}t + a_{12}\cdot 0 + \alpha_1(t)dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s),\ \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_1(t,0)dt$$

Итого: $f(s,s) - f(0,0) = \text{I} + \text{II} = s^2\left(a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s)+\varepsilon_2(s)}{s^2}\right)$, что на самом деле равно $\text{III} + \text{IV} =$ $= s^2\left(a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s)+\varepsilon_4(s)}{s^2}\right)$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \tag{1}$$

При малых s:

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_2(0,t)dt, \quad \varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^{s} \alpha_1(t,s)dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s\to 0}{=} o(s^2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0} \alpha_2(s,t)dt, \quad \alpha_2(x,y) \underset{x,y\to 0}{=} o(x,y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0,0)$ выполнено $\forall (x,y) \in V \quad \alpha_2(x,y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2+y^2}$. Для s таких, что $(s,s) \in V \quad \alpha_2(x,y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$, при $|x| \leq s,\ |y| \leq s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left|\int_{t=0}^{s} \alpha_2(s,t)dt\right| \leq \int_{t=0}^{s} |\alpha_2(s,t)|\, dt \leq \int_{t=0}^{s} \varepsilon \cdot s\sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2\sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s) \underset{s\to 0}{=} o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$ Тогда в равенстве (1) $\frac{\varepsilon_1(s)+\varepsilon_2(s)}{s^2} \to 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s)+\varepsilon_4(s)}{s^2} \to 0$, а значит $a_{21} = a_{12}$, то есть $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$. □

Пример: Контрпример:

Возьмем функцию $f = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Если $x^2 + y^2 \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = g(x,y)$$

Если $x^2 + y^2 = 0$, то поскольку $f(0,y) = f(x,0) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{(-y)^4}{(0^2+y^2)^2} = -1$$

В силу симметричности функции (но с минусом) $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^4x-4y^2x^3+x^5}{(x^2+y^2)^2}$.

$$f_{yy}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](0,0) = 1$$

Однако функция g не дифференциируема в $(0,0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -1$$

Если предположить, что да, то будет выполнена дифференицальная формула:

$$g(x,y) \underset{(x,y)\to 0}{=} 0\cdot x - 1\cdot y + o(x,y)$$

$$\begin{cases} y = kt \\ x = t \end{cases} \quad g(x,y) = \frac{t^5(k+4k^3-k^5)}{t^4(1+k^2)^2} = \frac{t(k+4k^3-k^5)}{(1+k^2)^2}$$

Если, например, $k=1$, то $g(t,t) = t\cdot 1$, а если g дифференциируема, должно быть $g(t,t) = -t + o(t)$. Значит, предположение не выполняется и g - не дифференциируема.

Все дело в условии того, что функция дважды дифференциируема в нуле, в контрпримере как раз при взгляде на наше определение многократной дифференцируемости требуется, чтобы производные были дифференциируемы на один раз меньше, чем функция. А мы только что показали, что одна из производных не дифференциируема в нуле.

2.14 Высшие дифференциалы.

Пусть $f \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m \to E$, $f \in D^k(p)$. Тогда $d^kf(p)$ - k-линейная форма (линейная по каждой из k переменных).

$$d^kf(p)\langle v\rangle := \sum_{|\mu|=k}\frac{D^\mu f(p)}{\mu!}\cdot \overline{v}^\mu$$

$$k=1: \quad df(p)\langle v\rangle = \sum_{|\mu|=1}\frac{1}{\mu!}D^\mu f(p)\cdot v^\mu = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i$$

$$k=2 \implies |\mu|=2: \quad d^2f(p)\langle v\rangle = \sum \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}\right) + \sum_{i<j}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

СПРАВКА: Численный вектор $\mu = (i_1,\ldots,i_m), i_k \geq 0$ называется мультииндексом длины m. Свойства:

- $\mu! := i_1!\cdot\ldots\cdot i_m!$
- $x^\mu := x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot x_m^{i_m}$
- $|\mu| := \sum_{j=1}^m i_j$

2.15 Пример не коммутирующих дифференциальных операторов.

2.16 Теорема о разложении Тейлора.

Теорема (разложение Тейлора)**:** $\exists!$ многочлен $A(x)$ степени $\leq k$ такой, что $f(x)-A(x) \underset{x\to p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

Теорема (разложение Тейлора для нескольких переменных)**:** Пусть $f : \mathbb{R}^m \to E,\ f \in D^k(p)$, тогда $\exists!$ многочлен $A(x)$ $deg(A) \leq k$, такой, что $f(x) - A(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k)$:

$$A(x) = f(p) + \frac{df(p)\langle x-p\rangle}{1!} + \frac{d^f(p)\langle x-p\rangle}{2!} + \ldots + \frac{d^k f(p)\langle x-p\rangle}{k!}$$

Доказательство. **Единственность:** Пусть есть два таких многочлена $A(x), B(x)$. Введем $C(x) := A(x) - B(x) = o(|x-p|^k)$. И докажем вспомогательное утверждение:

Утв. $degC \leq k$ $C(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k)$, тогда $C \equiv 0$.

Доказательство.
1. Фиксируем $v \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим $h(t) = C(p+tv)$ - многочлен одной переменной. По условию $h(t) = o(t^k)$ для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е. $h(t) \equiv 0$. В частности, при $t = 1$ $h(t) = C(p+v) = 0$.
2. Поскольку 1. выполняется $\forall v$, то $C(p+v) = 0$ $\forall v$.

□

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

Существование: Введем $g(x) = f(x) - A(x),\ f : \mathbb{R}^m \to E$. $g(p) = 0$ и все производные до порядка k включительно равны 0 в p, $g \in D^K(p)$. Необходимо доказать, что из этого следует, что $g(x) = o(|x-p|^k)$.
Пусть $\varepsilon > 0$, надо показать, что $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x-p|^k$ в некоторой U - окрестности точки p. Пусть $\varepsilon_{k-1}(x)$ - какая-то производная порядка $k-1$ функции g, ε_{k-1} определена в некотором шаре V_p с центром в p.

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0,\ \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0\ \forall i = 1\ldots m \tag{2}$$

Поэтому имеется маленький шар $U \subset V_p$ в котором выполнено:

$$\forall x \in U\ \ |\varepsilon_{k-1}|\,(x) \leq \varepsilon \cdot |x-p| \tag{3}$$

В самом деле, $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x-p\rangle + o(|x-p|)$, причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка k включительно равны 0 в p а второе - из уравнения (1). Значит $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x-p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon\,|x-p|$ Итак, ясно, что существует шарик U, в котором все производные $k-1$ порядка имеют оценку (3) Пусть ε_{k-2} - какая-то производная функции g порядка $k-2$. Все ее первые частные производные по доказанному в шаре U оцениваются в $\varepsilon\cdot|x-p|$. По лемме о степенной оценке приращения для ε_{k-2} выполнено в шаре U:

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left|\frac{\varepsilon\,|x-p|^2}{2}\right|$$

Для $k-3, k-4, \ldots$ аналогично.

$$|g(x)| = \left|g^{(k-k)}(x)\right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x-p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x-p|^k$$

□

2.17 Гессиан вещественной функции. Достаточные условия экстремума.

Опр.. Матрица Гессе (обозначается H или $H(f)$, у нас часто $d^2f(x_1,\dots,x_n)$) - это матрица, у которой элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца равен второй частной производной функции f по переменным x_i, x_j:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Теорема (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных)**:** Пусть $f \in D^2(p),\ f : \mathbb{R}^m \to R$ и $df(p) > 0$. Тогда:

1. $d^2f(p) > 0$ - строгий локальный минимум
2. $d^2f(p) < 0$ - строгий локальный максимум
3. Если $d^2f(p)$ знаконеопределен, т.е. $\exists u \in \mathbb{R}^m\ d^2f(p)\langle u\rangle > 0$ и $\exists v \in \mathbb{R}^m\ d^2f(p)\langle v\rangle < 0$, то p - седловая точка.

Доказательство. Докажем пункт 3:

Доказательство. Пусть $df(p) = 0$ и существуют вектора u и v, такие, что $d^2f(p)\langle u\rangle > 0,\ d^2f(p)\langle v\rangle < 0$.

Введем функцию $h(t) = f(p+tu)$. Тогда $h'(0) = df(p)\langle u\rangle = 0,\ h''(0) = d^2f(p)\langle u\rangle > 0$. Значит у функции h в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль $p + tv$ функция имеет строгий максимум, значит p - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

Доказательство. Пусть $d^2f(p) > 0$, то есть $\forall v \neq 0\ d^2f(p)\langle v\rangle > 0$. Сфера $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \quad |v| = 1\}$ - компактна (замкнута и ограничена). $d^2f(p) : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ - однородный многочлен второго порядка. Так как d^2f - непрерывная функция на компакте, то у нее $\exists \min = C > 0$, т.е.
$\forall v \in S^{m-1} \quad d^2f(p)\langle v\rangle \geq C$.

Утв. Тогда $\forall v \neq 0\ d^2f(p)\langle v\rangle \geq C \cdot |v|^2$

Доказательство.

$$\forall v \neq 0 \quad d^2f(p)\langle v\rangle = d^f(p)\langle |v| \cdot \frac{v}{|v|}\rangle = |v|^2 \cdot d^2f(p)\langle \frac{v}{|v|}\rangle \geq C \cdot |v|^2$$

□

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p)\langle x-p\rangle + \frac{d^2f(p)\langle x-p\rangle}{2!} + \alpha(x)\,|x-p|^2,\ \alpha(x) \underset{x\to p}{\to} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!} \cdot |x-p|^2 + \alpha(x)\,|x-p|^2$$

Существует окрестность U точки p, такая, что $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3}\ \forall x \in U$. Тогда для $\forall x \in U$:

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!}\,|x-p|^2 - \frac{C}{3}\,|x-p|^2 = f(p) + \frac{C}{6}\,|x-p|^2$$

То есть $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6}\,|x-p|^2 > 0 \implies$ в U $f(p) < f(x)\ \forall x \in U$. Пункт 1 доказан. □

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. $\square$

2.18 Функции класса C^k на открытом множестве (и на множествах, не обязательно открытых).

Символ $\underset{op}{\subset}$ обозначает "открыто в". Контекст:

$$U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ f : U \to \mathbb{R}^k,\ f \in C^r(U),\ r \geq 0$$

Опр.. Отображение f называется r-гладким, если все ее частные производные до порядка r непрерывны на U.

Пусть X - не обязательно открыто в $\mathbb{R}^m$.

Опр.. $f \in C^r(X)$, если $f = \tilde{f}$ - сужение на $\tilde{X} \supset X$, $\tilde{f} : \tilde{X} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ - C^r-гладкая на $\tilde{X}$.

Утв. Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k,\ g : X \to \mathbb{R}^k$ - C^r отображения. Тогда $f + g \in C^r(X)$

Доказательство. Пусть $f = \tilde{f},\ g = \tilde{g}$ и т.д. по определению r-гладкости:

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m, \tilde{g} : V \to \mathbb{R}^m,\ U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m,\ X \subset U, X \subset V$$

Введем $U \cap V = W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$. На W заданы оба отображения и ясно, что $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$. $\square$

Утв. Композиция:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \supset Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Если $f \in C^r$ и $g \in C^r$, то $g \circ f \in C^r$.

Доказательство. Область определения $\mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in X |\ f(x) \in Y\} = X \cap f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$

$$\begin{cases} f \in C^r \implies f = \tilde{f},\ \tilde{f} : \mathbb{R}^m \underset{op}{\supset} \tilde{X} \to \mathbb{R}^k - C^r\text{-гладкое.} \\ g \in C^r \implies g = \tilde{g},\ \tilde{g} : \mathbb{R}^k \underset{op}{\supset} \tilde{Y} \to \mathbb{R}^m - C^r\text{-гладкое.} \end{cases}$$

$$\mathrm{dom}(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = \mathrm{dom}(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(\mathrm{dom}(\tilde{g})) = \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$$

$\tilde{X}$ - открытое, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$ - открытое, как прообраз открытого множества $\tilde{Y}$ при непрерывном отображении.
Ясно, что $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ - сужение $\mathrm{dom}(g \circ f)$. $\square$

2.19 Теорема об открытости отображения вида $f(x) = x + \varphi(x)$, где φ - сжимающее отображение.

Теорема: Пусть $U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$, а $f : U \to \mathbb{R}^m$ такое, что отображение $f(x) - x = \lambda(x)$ сжимающее, то есть $\forall x_1, x_2 \in U\ |\lambda(x_1) - \lambda(x_2)| \leq \lambda < 1$. Тогда:

1. $f(U) \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$
2. Сужение $f : U \to f(U)$ обратимо и обратное отображение - липшицево с константой $\frac{1}{1-\lambda}$.

Доказательство. Докажем пункт 2:
f инъективно: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) - x_1 = \lambda(x_1) \\ f(x_2) - x_2 = \lambda(x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) = \lambda(x_1) + x_1 \\ f(x_2) = \lambda(x_2) + x_2 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)| &= |\lambda(x_1)-\lambda(x_2)+(x_1-x_2)| \\ &\le |\lambda(x_1)-\lambda(x_2)| + |x_1-x_2| \\ &\le \lambda\,|x_1-x_2| + |x_1-x_2| \\ &= (\lambda+1)\,|x_1-x_2|\,.\end{aligned}$$

В силу неравенства треугольника:

$$(1-\lambda)\,|x_1-x_2| \le |f(x_1)-f(x_2)| \le (1+\lambda)\,|x_1-x_2|$$

Инъективность есть, а сужение $f : U \to f(U)$ - биективно, значит обратимо. Поймем, что обратное отображение будет $\frac{1}{1-\lambda}$ липшицево. Пусть $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \in f(U) \quad \begin{cases} x_1 = g(y_1) \\ x_2 = g(y_2) \end{cases}$

$$|y_1-y_2| \ge (1-\lambda)\,|g(y_1)-g(y_2)| \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-\lambda}\,|y_1-y_2| \ge g(y_1)-g(y_2)$$

Пункт 2 доказан.
Пусть теперь $q \in f(U)$. Рассмотрим $p \in U \mid q = f(p)$. U открыто, а значит $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subset U$, где $B_\varepsilon(p)$ - открытый шар радиуса ε с центром в точке p. Мы покажем, что множество $f(U)$ содержит шар с центром в q радиуса $(1-\lambda)\varepsilon$.
Пусть $y \in B_{\varepsilon(1-\lambda)}(q)$, т.е. $|q-y| < (1-\lambda)\varepsilon$. Надо показать, что $\exists x$ такой, что $|p-x| < \varepsilon,\ f(x) = y$. Воспользуемся теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения. Перепишем условие:

$$f(x) = y \implies y - f(x) = 0 \implies y - f(x) + x = x$$

Положим

$$\varphi(x) = y - f(x) + x = y - \lambda(x)$$

Заметим, что $\varphi(x)$ является сжимающим и покажем, что φ переводит $B_\varepsilon(p)$ в себя.

$$x \in B_\varepsilon(p) \implies |x-p| \le \varepsilon \implies |\varphi(x)-\varphi(p)| \le \lambda\varepsilon$$

$$|\varphi(x)-p| = |(\varphi(x)-\varphi(p)) + (\varphi(p)-p)| \le |\varphi(x)-\varphi(p)| + |\varphi(p)-p|$$

Первое слагаемое, как мы уже доказали, не превышает $\lambda\varepsilon$. Преобразуем второе:

$$|\varphi(p)-p| = |y-f(p)+p-p| = |y-f(p)| = |y-q| \le (1-\lambda)\varepsilon$$

Тогда:

$$|\varphi(x)-\varphi(p)| + |\varphi(p)-p| \le \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

Значит $|\varphi(x)-p| \le \varepsilon$ и $\varphi(x) \in B_\varepsilon(p) \mid x \in B_\varepsilon(p)$. $\square$