

Вопросы к экзамену по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Вопросы

1. Производная вдоль вектора.
2. Частные производные.
3. Дифференциал.
4. Дифференцируемость функции в точке.
5. Достаточный признак дифференцируемости.
6. Необходимые условия экстремума.
7. Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению.
8. Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.
9. Градиент вещественной функции.
10. Векторные поля.
11. Потенциал векторного поля.
12. Многократная дифференцируемость.
13. Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример". **TODO: контрпример**
14. Высшие дифференциалы.
15. Пример не коммутирующих дифференциальных операторов.
16. Теорема о разложении Тейлора.
17. Гессиан вещественной функции. Достаточные условия экстремума.
18. Функции класса C^k на открытом множестве (и на множествах, не обязательно открытых).
19. Теорема об открытости отображения вида $f(x) = x + \varphi(x)$, где φ — сжимающее отображение.
20. Теорема о локальной обратимости, "контрпримеры".
21. Лемма о локальном наложении.
22. Теорема о неявной функции.
23. Теорема об обратной функции.
24. Многообразия в \mathbb{R}^n .
25. Примеры двумерных многообразий: сфера, тор, цилиндр, лист Мёбиуса.
26. Теорема Брауэра об инвариантности области (формулировка).
Гомеоморфизмы и C^r -изоморфизмы.
27. Многообразия с краем. лемма о крае полупространства.
28. Лемма об изоморфизме многообразий. лемма об открытых частях многообразия.

29. Теорема о крае многообразия.
30. Теоремы о регулярных решениях.
31. Касательное пространство. Дифференциал как отображение касательных пространств, корректность определения, свойства.
32. Круг и квадрат гладко не изоморфны.
33. Теорема о регулярном дополнении.
34. Метод множителей Лагранжа, достаточные условия экстремума.
35. Лемма о локальном вложении.
36. Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций.
37. Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей и для рядов.
38. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.
39. Признак Абеля. Признак Дирихле.
40. Непрерывность дзета-функции при $x > 1$.
41. Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций.
42. Интегрирование равномерного предела. Пример "расползающаяся куча".
43. Теорема о пределе производных.
44. Теорема о дифференцировании функционального ряда.
45. Теорема Абеля.
46. Теорема о сумме степенного ряда.
47. Ортогональность тригонометрической системы функций.
48. Вещественная и комплексная форма записи ряда Фурье.
49. Лемма об интегралах периодической функции.
50. Формула Дирихле.
51. Теорема Фурье.
52. Теоремы Вейерштрасса о тригонометрической и о полиномиальной аппроксимации.
53. Равенство Парсеваля.
54. Изопериметрическое неравенство.
55. Примитивный интеграл.
56. Мера сегмента.
57. Ступенчатые функции.
58. Интеграл ступенчатой функции, корректность и элементарная теорема Фубини.
59. Лемма о счетном покрытии интервала.

2 Ответы

2.1 Производная вдоль вектора

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр.. Производная вдоль вектора v :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

2.2 Частные производные.

Опр.. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

2.3 Дифференциал.

Опр.. Дифференциал функции f в точке p - линейное отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки p на вектор h :

$$f(p + h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

2.4 Дифференцируемость функции в точке.

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференцируема в p , если:

1. $p \in \text{Int}(U)$ ($\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U$)
2. \exists дифференциал функции (линейное отображение) f в точке p $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

2.5 Достаточный признак дифференцируемости.

Теорема (Достаточный признак дифференцируемости): Если все частные производные непрерывны в p , то f дифференцируема в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x, y) = x^y$ дифференцируема во всех точках (x_0, y_0) , где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

2.6 Необходимые условия экстремума.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции одной переменной - условие Ферма): Пусть $f \in D(p)$ (дифференцируема в p). Если p - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, но 0 - не экстремум нашей функции $f(x)$.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции многих переменных): Вектор частных производных первого порядка по переменным равен нулевому вектору:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = (0, \dots, 0)$$

2.7 Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению

Возьмем такую функцию:

$$f = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ее частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Т.е. существуют и равны 0. Рассмотрим производную по направлению, для этого будем брать производную по вектору $u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, который не направлен по осям координат, то есть $\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos(\alpha), t \sin(\alpha)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t \cos(\alpha), t \sin(\alpha))}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t \cos(\alpha) \cdot t \sin(\alpha)}{(t \cos(\alpha))^2 + (t \sin(\alpha))^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 \cdot \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cos(\alpha) \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Ясно видно, что этот предел равен бесконечности. На самом деле, есть теорема, которая гласит "если функция дифференцируема в точке, то она в ней непрерывна и у нее существуют все направленные производные". Условие "существуют производные по любому направлению" на самом деле является достаточным признаком непрерывности функции в точке.

2.8 Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.

Дифференцируемость суммы, произведения и композиции удовлетворяет классическим правилам дифференцируемости, это несложно доказать, но мне лень.

2.9 Градиент вещественной функции

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1 \times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр.. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Опр.. Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ и $p \in \text{Int}(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать как $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ - вектор частных производных в точке p .

Утв. Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p , вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi - \text{угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p)| = \text{const}$, $|v| = 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ , чтобы $\cos(\varphi)$ был максимален, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. \square

Утв. $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x | f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ ($p \in \Omega$). Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит $0 \underset{n \rightarrow \infty}{=} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

\square

2.10 Векторные поля.

Опр. 1. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

2.11 Потенциал векторного поля.

Опр. 2. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

2.12 Многократная дифференцируемость.

Опр.. Рекурсивное: $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ k раз дифференцируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки p ;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференцируемы $k-1$ раз в точке p .

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$, $g(x) \in D^k(p)$, $f(x) \in D^k(p)$, $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. □

2.13 Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример".

Теорема (о вторых производных): Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2 , т.к. при дифференцировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1 :

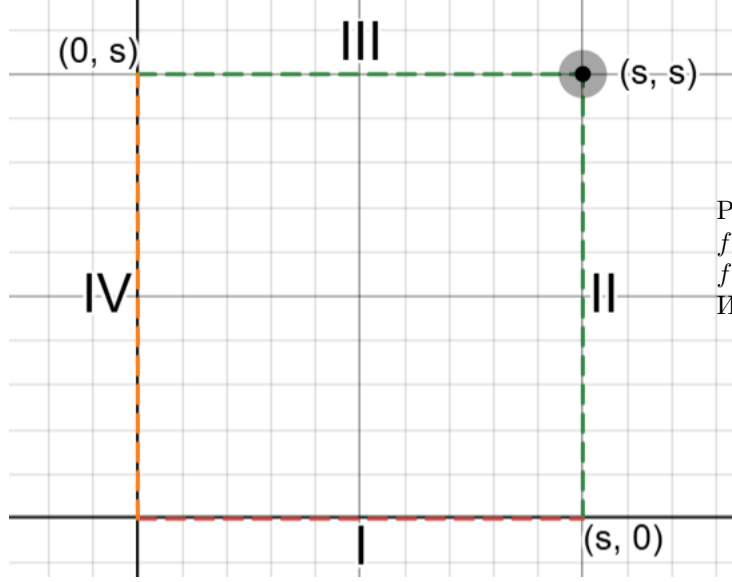
$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0) \end{aligned}$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0, 0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \quad \text{где } \alpha_1(x, y) = o(x, y), \quad (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y \rangle$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому $a_{11} = f_{xx}(0)$, $a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y), \quad a_{21} = f_{yx}(0), \quad a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s, s) вблизи нуля. Для нее
 $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I)$.
 И в то же время $f(s, s) = (IV) + (III)$

$$II = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^s \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) dt = \int_{t=0}^s a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t) dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt$. Аналогично для I:

$$I = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) dt = \int_{t=0}^s a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t) dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \quad \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, 0) dt$$

$$\text{Итого: } f(s, s) - f(0, 0) = I + II = s^2 \left(a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \right), \text{ что на самом деле равно } III + IV = \\ = s^2 \left(a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \right)$$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \quad (1)$$

При малых s :

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(0, t) dt, \quad \varepsilon_4(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, s) dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x, y \rightarrow 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0, 0)$ выполнено $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. Для s таких, что $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$, при $|x| \leq s, |y| \leq s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left| \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt \right| \leq \int_{t=0}^s |\alpha_2(s, t)| dt \leq \int_{t=0}^s \varepsilon \cdot s\sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$. Тогда в равенстве 1 $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \rightarrow 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \rightarrow 0$, а значит $a_{21} = a_{12}$, то есть $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$. \square