

Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Дифференцирование функций

Опр. 1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $p \in U$, если:

1. f определена в некоторой окрестности точки p ($p \in \text{Int}(U)$)
2. $\exists \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(p+\Delta h) - f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$ (и этот предел равен $f'(p)$)

1.1 Экстремумы

Необходимое условие экстремума:

Пусть $f \in D(p)$ (дифференцируема в p). Если p - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$, но $f(x)$ не дифференцируема в 0.

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Достаточное условие экстремума:

Пусть $f \in D^2(p)$ (дважды дифференцируема в p) и $f'(p) = 0$. В таком случае если

- $f''(p) < 0$ - точка p является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$ - точка p является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференцируема в p , если:

1. $p \in \text{Int}(U)$ ($\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U$)
2. \exists дифференциал функции (линейное отображение) f в точке p $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки p на вектор h :

$$f(p + h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Опр. 2. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

Опр. 3. Производная вдоль вектора v :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0, 0)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

Утв. 1 Если f дифференцируема в p , то f - непрерывна в p .

Доказательство.

$$f(p+h) - f(p) \underset{h \rightarrow 0}{=} df(p) \langle h \rangle$$

Линейное отображение $df(p) \langle \cdot \rangle$ непрерывно, $o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, т.е. $f(p+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(p)$. □

Достаточный признак дифференцируемости:

Все частные производные непрерывны в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x, y) = x^y$ дифференцируема во всех точках (x_0, y_0) , где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

Опр. 4. Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция f отображает $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то матрица Якоби принимает вид $1 \times n$ и называется **градиентом функции**.

Опр. 5. Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Опр. 6. Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ и $p \in \text{Int}(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(x - p)$.

Если $k = 1$, то лин. отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать как $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$ - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ - вектор частных производных в точке p .

Утв. 2 Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

Доказательство. Рассмотрим функцию f в точке p , вектор v единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi - \text{угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку $|\nabla f(p)| = \text{const}$, $|v| = 1$, то для максимизации надо выбрать такое φ , чтобы $\cos(\varphi)$ был максимален, т.е. вектора v и ∇f параллельны и ∇f задает наибольшую скорость роста. \square

Утв. 3 $\nabla f(p)$ ортогонален поверхности уровня $\Omega = \{x | f(x) = c\}$.

Доказательство. Пусть $f(p) = c$ ($p \in \Omega$). Пусть $x_n \in \Omega$, покажем, что $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$, т.е. $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$. Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

\square

Опр. 7. Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется векторным полем.

Опр. 8. Потенциалом векторного поля F (если он есть) называется **скалярная** функция $U : W \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $\nabla U = F$. Если потенциал существует, то F называется потенциальным полем.

Теорема: Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(p)$, $g \in C^1(q)$, $q = f(p)$.

Тогда $g \circ f \in C^1(p)$, $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$. В матрицах Якоби: $D_{g \circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$.

Пример:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2 yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_g = (\sinh(ab) \cdot a \quad \sinh(ab) \cdot b)$$

$$D_g \cdot D_f = (\sinh(x^2 y z) \cdot x z \quad \sinh(x^2 y z) \cdot x y) \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Стороожуку на слово.

Правило дифференцирования обратного отображения: Если невырождено и \exists обратное отображение $g : V \rightarrow U$, непрерывное в точке $q = f(p)$, тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

1.4 Многократная дифференцируемость

Опр. 9. $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ k раз дифференцируема в точке p ($f \in D^k(p)$), если:

1. f дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки p ;
2. Все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ дифференцируемы $k-1$ раз в точке p .

Пример:

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

Утв. Если $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$ тогда $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

Доказательство.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$, $g(x) \in D^k(p)$, $f(x) \in D^k(p)$, $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$, то $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$. □

Теорема 1 (о вторых производных): Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in D^2(p)$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Доказательство. Можно считать, что $n = 2$, так как при заданной функции $f(x_1, x_2, \dots)$ можно в качестве f рассмотреть сужение f на плоскость Ox_1x_2 , т.к. при дифференцировании по x_1 или x_2 остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что $p = 0$ и что $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$. Чтобы показать почему так можно считать введем f_1 :

$$f_1(x, y) := f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0)$$

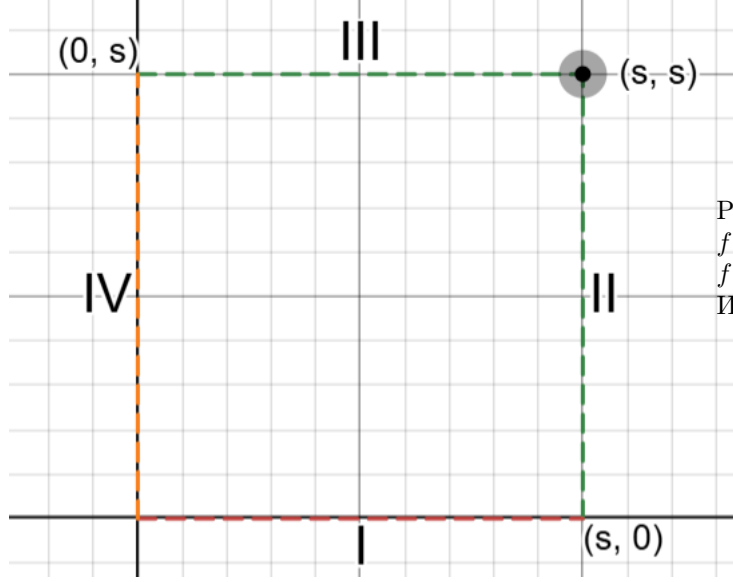
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0)$$

Дальше считаем, что $f = f_1$ и $f(0, 0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \text{ где } \alpha_1(x, y) = o(x, y), \quad (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y \rangle$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$, поэтому $a_{11} = f_{xx}(0)$, $a_{12} = f_{xy}(0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y), \quad a_{21} = f_{yx}(0), \quad a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку (s, s) вблизи нуля. Для нее
 $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I)$.
 И в то же время $f(s, s) = (IV) + (III)$

$$\Pi = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^s \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) dt = \int_{t=0}^s a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t) dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt$. Аналогично для I:

$$I = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) dt = \int_{t=0}^s a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t) dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \quad \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, 0) dt$$

$$\text{Итого: } f(s, s) - f(0, 0) = I + \Pi = s^2 \left(a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \right), \text{ что на самом деле равно } \Pi + IV = \\ = s^2 \left(a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \right)$$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \quad (1)$$

При малых s :

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(0, t) dt, \quad \varepsilon_4(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, s) dt$$

Осталось показать, что $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x, y \rightarrow 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге V точки $(0, 0)$ выполнено $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. Для s таких, что $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$, при $|x| \leq s, |y| \leq s$. Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left| \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt \right| \leq \int_{t=0}^s |\alpha_2(s, t)| dt \leq \int_{t=0}^s \varepsilon \cdot s\sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что $\varepsilon_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$, аналогичным образом показываем для $\varepsilon_{2,3,4}$. Тогда в равенстве 1 $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \rightarrow 0$ и $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \rightarrow 0$, а значит $a_{21} = a_{12}$, то есть $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$. \square

Правило дифференцирования монома:

Пусть $f(x) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$, $x = (x_1, \dots, x_m)$. Тогда

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(0) = i_1! \cdot \dots \cdot i_m!$$

Любая другая производная любого порядка в точке 0 равна 0.

1.5 Мульти-индексы

Придумаем $\mu = (i_1, \dots, i_m)$ - численный вектор, в котором $\forall j = \overline{1 \dots m} \ i_j \geq 0$ и назовем его **мультииндексом**.

Для мультииндексов определены операции:

$$\mu! := i_1! \cdot \dots \cdot i_m! \quad |\mu| = \sum_{j=1}^m i_j \text{ - порядок мультииндекса}$$

$$x \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, \dots, x_m), \quad x^\mu = x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$$

$$C_k^\mu = \frac{k!}{\mu!} = \frac{k!}{i_1! \cdot \dots \cdot i_m!}, \text{ где } k = |\mu|$$

Зададим контекст:

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow E, \ f \in D^k(p), \ \mu = (i_1, \dots, i_m)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} = D^\mu f = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \left(\frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f \right) \right) \right)$$

Теорема (разложение Тейлора): $\exists!$ многочлен $A(x)$ степени $\leq k$ такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

Теорема (разложение Тейлора для нескольких переменных): Пусть $f: \mathbb{R}^m \rightarrow E$, $f \in D^k(p)$, тогда $\exists!$ многочлен $A(x)$ $\deg(A) \leq k$, такой, что $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$:

$$A(x) = f(p) + \frac{df(p)\langle x-p \rangle}{1!} + \frac{d^2f(p)\langle x-p \rangle^2}{2!} + \dots + \frac{d^k f(p)\langle x-p \rangle^k}{k!}$$

Доказательство. Единственность: Пусть есть два таких многочлена $A(x), B(x)$. Введем $C(x) := A(x) - B(x) = o(|x-p|^k)$. И докажем вспомогательное утверждение:

Утв. $\deg C \leq k \ C(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$, тогда $C \equiv 0$.

Доказательство. 1. Фиксируем $v \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим $h(t) = C(p+tv)$ - многочлен одной переменной. По условию $h(t) = o(t^k)$ для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е. $h(t) \equiv 0$. В частности, при $t = 1$ $h(t) = C(p+v) = 0$.

2. Поскольку 1. выполняется $\forall v$, то $C(p+v) = 0 \ \forall v$.

□

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

Существование: Введем $g(x) = f(x) - A(x)$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow E$. $g(p) = 0$ и все производные до порядка k включительно равны 0 в p , $g \in D^K(p)$. Необходимо доказать, что из этого следует, что $g(x) = o(|x - p|^k)$.

Пусть $\varepsilon > 0$, надо показать, что $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x - p|^k$ в некоторой U - окрестности точки p . Пусть $\varepsilon_{k-1}(x)$ - какая-то производная порядка $k - 1$ функции g , ε_{k-1} определена в некотором шаре V_p с центром в p .

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \quad (2)$$

Поэтому имеется маленький шар $U \subset V_p$ в котором выполнено:

$$\forall x \in U \quad |\varepsilon_{k-1}|(x) \leq \varepsilon \cdot |x - p| \quad (3)$$

В самом деле, $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x - p \rangle + o(|x - p|)$, причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка k включительно равны 0 в p а второе - из уравнения (1). Значит $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x - p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon |x - p|$ Итак, ясно, что существует шарик U , в котором все производные $k - 1$ порядка имеют оценку (3) Пусть ε_{k-2} - какая-то производная функции g порядка $k - 2$. Все ее первые частные производные по доказанному в шаре U оцениваются в $\varepsilon \cdot |x - p|$. По лемме о степенной оценке приращения для ε_{k-2} выполнено в шаре U :

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left| \frac{\varepsilon |x - p|^2}{2} \right|$$

Для $k - 3, k - 4, \dots$ аналогично.

$$|g(x)| = |g^{(k-k)}(x)| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x - p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x - p|^k$$

□

Теорема 2 (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных): Пусть $f \in D^2(p)$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и $df(p) > 0$. Тогда:

1. $d^2 f(p) > 0$ - строгий локальный минимум
2. $d^2 f(p) < 0$ - строгий локальный максимум
3. Если $d^2 f(p)$ знаконеопределен, т.е. $\exists u \in \mathbb{R}^m \quad d^2 f(p)\langle u \rangle > 0$ и $\exists v \in \mathbb{R}^m \quad d^2 f(p)\langle v \rangle < 0$, то p - седловая точка.

Доказательство. Докажем пункт 3:

Доказательство. Пусть $df(p) = 0$ и существуют вектора u и v , такие, что $d^2 f(p)\langle u \rangle > 0$, $d^2 f(p)\langle v \rangle < 0$.

Введем функцию $h(t) = f(p + tu)$. Тогда $h'(0) = df(p)\langle u \rangle = 0$, $h''(0) = d^2 f(p)\langle u \rangle > 0$. Значит у функции h в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль $p + tv$ функция имеет строгий максимум, значит p - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

Доказательство. Пусть $d^2 f(p) > 0$, то есть $\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p)\langle v \rangle > 0$. Сфера $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid |v| = 1\}$ - компактна (замкнута и ограничена). $d^2 f(p) : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ - однородный многочлен второго порядка. Так как $d^2 f$ - непрерывная функция на компакте, то у нее $\exists \min = C > 0$, т.е. $\forall v \in S^{m-1} \quad d^2 f(p)\langle v \rangle \geq C$.

Утв. Тогда $\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p)\langle v \rangle \geq C \cdot |v|^2$

Доказательство.

$$\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p) \langle v \rangle = d^2 f(p) \langle |v| \cdot \frac{v}{|v|} \rangle = |v|^2 \cdot d^2 f(p) \langle \frac{v}{|v|} \rangle \geq C \cdot |v|^2$$

□

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \frac{d^2 f(p) \langle x - p \rangle}{2!} + \alpha(x) |x - p|^2, \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!} \cdot |x - p|^2 + \alpha(x) |x - p|^2$$

Существует окрестность U точки p , такая, что $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3} \quad \forall x \in U$. Тогда для $\forall x \in U$:

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!} |x - p|^2 - \frac{C}{3} |x - p|^2 = f(p) + \frac{C}{6} |x - p|^2$$

То есть $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6} |x - p|^2 > 0 \implies$ в $U \quad f(p) < f(x) \quad \forall x \in U$. Пункт 1 доказан. □

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. □

Теорема 3 (Полиномиальное разложение композиции): Пусть $k \geq 0$, f, g - функции, $A(x), B(y)$ - полиномы. Предположим, что f и A в точке p имеют порядок касания $\geq k$, g и B в точке p имеют порядок касания $\geq k$. То есть:

$$f(x) - A(x) = \alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x - p|^k), \quad \alpha(p) = 0$$

$$g(y) - B(y) = \beta(y) \underset{y \rightarrow q}{=} o(|y - q|^k), \quad \beta(q) = 0$$

Тогда $g \circ f$ имеет с $B \circ A$ порядок касания $\geq k$.

Доказательство. При $k = 0$:

$$\alpha(x) = o(1) \implies f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} 0 \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p)$$

Для функции g аналогично, после чего применяем теорему о непрерывности композиции. Для $k = 0$ доказано.

Пусть $k \geq 0$. Тогда:

$$\begin{cases} f(x) = \alpha(x) + A(x) \\ g(y) = \beta(y) + B(y) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(x) = o(|x - p|) \\ \beta(y) = o(|y - q|) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in D^1(p) \\ \beta \in D^1(q) \end{cases} \implies \begin{cases} f \in D^1(p) \\ g \in D^1(q) \end{cases}$$

$$g(f(x)) - B(A(x)) = g(f(x)) - B(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x)) = \beta(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x))$$

Заметим, что $\beta(f(x)) = o(|f(x) - q|^k) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|f(x) - f(p)|^k)$. При этом $f(x) - f(p) = O(|x - p|^1)$, так как $f \in D^1(p)$. А значит:

$$\beta(f(x)) = o(O(|x - p|^k)) = o(|x - p|^k)$$

Пусть теперь V - шар конечного радиуса с центром в q . Все частные производные многочлена B в шаре V ограничены некоторой константой C . Тогда по лемме об оценке приращения:

$$\forall y_1, y_2 \in V \quad |B(y_1) - B(y_2)| = O(|y_1 - y_2|)$$

При $x \rightarrow p \begin{cases} f(x) \rightarrow q \\ A(x) \rightarrow q \end{cases}$ и поэтому $f(x), B(x) \in V$. В таком случае

$$B(f(x)) - B(A(x)) \underset{x \rightarrow p}{=} O(f(x) - A(x)) = O(o(|x - p|^k))$$

□

2 Основы гладкого анализа

Символ $\underset{op}{\subset}$ обозначает "открыто в". Контекст:

$$U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m, f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, f \in C^r(U), r \geq 0$$

Опр. 10. Отображение f называется r -гладким, если все ее частные производные до порядка r непрерывны на U .

Пусть X - не обязательно открыто в \mathbb{R}^m .

Опр. 11. $f \in C^r(X)$, если $f = \tilde{f}$ - сужение на \tilde{X} , $\tilde{f} : \tilde{X} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ - C^r -гладкая на \tilde{X} . **НАДО УТОЧНИТЬ:** $X \subset \tilde{X}$ или наоборот.

Утв. 4 Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ - C^r отображения. Тогда $f + g \in C^r(X)$

Доказательство. Пусть $f = \tilde{f}$, $g = \tilde{g}$ и т.д. по определению r -гладкости:

$$\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^k, \tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^k, U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m, X \subset U, X \subset V$$

Введем $U \cap V = W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$. На W заданы оба отображения и ясно, что $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$. \square

Утв. 5 Композиция:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \supset Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Если $f \in C^r$ и $g \in C^r$, то $g \circ f \in C^r$.

Доказательство. Область определения $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X \cap f^{-1}(\text{dom}(g))$

$$\begin{cases} f \in C^r \implies f = \tilde{f}, \tilde{f} : \mathbb{R}^m \supset \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^k - C^r\text{-гладкое.} \\ g \in C^r \implies g = \tilde{g}, \tilde{g} : \mathbb{R}^k \supset \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}^m - C^r\text{-гладкое.} \end{cases}$$

$$\text{dom}(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = \text{dom}(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(\text{dom}(\tilde{g})) = \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$$

\tilde{X} - открытое, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$ - открытое, как прообраз открытого множества \tilde{Y} при непрерывном отображении.

Ясно, что $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ - сужение $\text{dom}(g \circ f)$. \square

Теорема 4 (Лемма о классе гладкости обратного отображения): Пусть $U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$.

$U \xrightleftharpoons[g]{f} V$, f, g - непрерывны и взаимно обратны. Если $f \in C^r(U)$ и $\forall x \in U \det(Df(x)) \neq 0$, то $g \in C^r(U)$.

Доказательство. При $r > 0$ g дифференцируема в $\forall y \in V$ по правилу дифференцирования обратного отображения. В матрицах Якоби:

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U, \text{ причем } f(x) = y, x = g(y)$$

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}, \text{ цепочка преобразований } y \rightarrow g(y) \rightarrow Df(g(y)) \rightarrow (Df(g(y)))^{-1}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), w - \text{отображение обращения матрицы.}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), \text{ причем } w - C^\infty, Df - C^{r-1}, g(y) - \text{дифференцируема}$$

g дифференцируема $\implies Dg$ тоже дифференцируема как композиция \implies все производные g дифференцируемы $\implies Dg \in C^1 \implies g \in C^2 \implies \dots \implies g \in C^{r-1} \implies Dg \in C^{r-1} \implies g \in C^r$. \square

Лемма Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, а $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое, что отображение $f(x) - x = \lambda(x)$ сжимающее, то есть $\forall x_1, x_2 \in U \mid \lambda(x_1) - \lambda(x_2) \mid \leq \lambda < 1$. Тогда:

1. $f(U) \subset_{op} \mathbb{R}^m$
2. Сужение $f : U \rightarrow f(U)$ обратимо и обратное отображение - липшицево с константой $\frac{1}{1-\lambda}$.

Доказательство. Докажем пункт 2:

f инъективно: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) - x_1 = \lambda(x_1) \\ f(x_2) - x_2 = \lambda(x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) = \lambda(x_1) + x_1 \\ f(x_2) = \lambda(x_2) + x_2 \end{cases}$$

Тогда

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid = \mid \lambda(x_1) - \lambda(x_2) + (x_1 - x_2) \mid \leq \mid \lambda(x_1) - \lambda(x_2) \mid + \mid x_1 - x_2 \mid \leq \lambda \mid x_1 - x_2 \mid + \mid x_1 - x_2 \mid = (1 + \lambda) \mid x_1 - x_2 \mid$$

В силу неравенства треугольника:

$$(1 - \lambda) \mid x_1 - x_2 \mid \leq \mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq (1 + \lambda) \mid x_1 - x_2 \mid$$

Инъективность есть, а сужение $f : U \rightarrow f(U)$ - биективно, значит обратимо. Поймем, что обратное

отображение будет $\frac{1}{1-\lambda}$ липшицево. Пусть $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \in f(U) \quad \begin{cases} x_1 = g(y_1) \\ x_2 = g(y_2) \end{cases}$

$$\mid y_1 - y_2 \mid \geq (1 - \lambda) \mid g(y_1) - g(y_2) \mid \implies \frac{1}{1 - \lambda} \mid y_1 - y_2 \mid \geq \mid g(y_1) - g(y_2) \mid$$

Пункт 2 доказан.

Пусть теперь $q \in f(U)$. Рассмотрим $p \in U \mid q = f(p)$. U открыто, а значит $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subset U$, где $B_\varepsilon(p)$ - открытый шар радиуса ε с центром в точке p . Мы покажем, что множество $f(U)$ содержит шар с центром в q радиуса $(1 - \lambda)\varepsilon$.

Пусть $y \in B_{\varepsilon(1-\lambda)}(q)$, т.е. $\mid q - y \mid < (1 - \lambda)\varepsilon$. Надо показать, что $\exists x$ такой, что $\mid p - x \mid < \varepsilon$, $f(x) = y$. Воспользуемся теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения. Перепишем условие:

$$f(x) = y \implies y - f(x) = 0 \implies y - f(x) + x = x$$

Положим

$$\varphi(x) = y - f(x) + x = y - \lambda(x)$$

Заметим, что $\varphi(x)$ является сжимающим и покажем, что φ переводит $B_\varepsilon(p)$ в себя.

$$x \in B_\varepsilon(p) \implies \mid x - p \mid \leq \varepsilon \implies \mid \varphi(x) - \varphi(p) \mid \leq \lambda \varepsilon$$

$$\mid \varphi(x) - p \mid = \mid (\varphi(x) - \varphi(p)) + (\varphi(p) - p) \mid \leq \mid \varphi(x) - \varphi(p) \mid + \mid \varphi(p) - p \mid$$

Первое слагаемое, как мы уже доказали, не превышает $\lambda \varepsilon$. Преобразуем второе:

$$\mid \varphi(p) - p \mid = \mid y - f(p) + p - p \mid = \mid y - f(p) \mid = \mid y - q \mid \leq (1 - \lambda)\varepsilon$$

Тогда:

$$\mid \varphi(x) - p \mid \leq \lambda \varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

Значит $\mid \varphi(x) - p \mid \leq \varepsilon$ и $\varphi(x) \in B_\varepsilon(p) \mid x \in B_\varepsilon(p)$. □

Теорема 5: о локальной обратимости

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ - C^r -гладкое отображение, $r \geq 1$. Пусть $p \in U$. Если $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - невырожден, то у точки p имеется окрестность U_1 такая, что $f(U_1) \subset \mathbb{R}^m$ и сужение $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow f(U_1)$ является C^r -изоморфизмом (т.е. обратное отображение тоже принадлежит классу C^r).

Доказательство. Считаем сначала, что $\forall v \, df(p)\langle v \rangle = v$, т.е. $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ - тождественное отображение, $Df(p) = E$. Рассмотрим отображение $h(x) = f(x) - x$:

$$dh(x) = df(x) - dx, \text{ при } x = p: dh(p) = dx - dx = 0 (Dh(x) = E - E = 0)$$

Все частные производные отображения h в точке p равны 0. Значит, в силу их непрерывности в p , у точки p имеется некоторый шарик U с центром в p такой, что $\forall x \in U$ все эти производные ограничены, например, $\frac{1}{2} < 1$.

$$\forall x_1, x_2 \in U_1 \quad |h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{1}{2}$$

По предыдущей лемме $f(U_1)$ открыто в \mathbb{R}^m и $f|_{U_1} \rightarrow f(U_1)$ обратимо, обратное отображение непрерывно. По теореме о классе гладкости обратного отображения оно (f^{-1}) имеет нужный класс. Заметим, что в той лемме необходимо, чтобы $\forall x \in U_1 \, \det(Df(x)) \neq 0$, поэтому когда мы выбираем окрестность U_1 надо это тоже потребовать:

$$Df(p) = E, \det(E) = 1 \neq 0 \text{ и в некоторой окрестности точки } p \, \det(Df(x)) \neq 0$$

Мы доказали теорему для $Df(p) = E$. Пусть теперь $Df(p) = A$, $\det(A) \neq 0 \implies$ значит существует обратная матрица A^{-1} , тоже невырожденная. Пусть $\tilde{f} = A^{-1}f(x)$ - композиция линейного отображения и отображения f . Для \tilde{f} выполнена теорема, ведь $D\tilde{f}(p) = A^{-1}Df(p) = A^{-1}A = E$. Значит $\exists \tilde{U} \ni p \mid \tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$ - C^r -изоморфизм и $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^k$.

$f(x) = A\tilde{f}(x)$ - композиция двух "хороших" отображений и $f(\tilde{U}) = A \cdot \tilde{f}(\tilde{U})$ - образ открытого множества под действием линейного изоморфизма A - тоже открыт в \mathbb{R}^k . \square

Теорема 6 (о неявной функции): Пусть $U \subset \mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ - C^r -отображение, $r \geq 1$.

Функция f представляет собой набор:

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \end{pmatrix}$$

Пусть некоторая точка $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U$ и $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$, $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}$$

Множество $M = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$, где Ω - окрестность точки (\vec{x}_0, \vec{y}_0) . Точка $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in M$, $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$

Тогда у (\vec{x}_0, \vec{y}_0) имеется такая окрестность Ω , что $\Omega \cap M$ - график некоторой C^r -функции α , такой, что $\alpha : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^l$ и

$$D\alpha(x) = (\frac{\partial f}{\partial y}(x, \alpha(x)))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha(x))$$

Доказательство. Рассмотрим новое отображение

$$\tilde{f} : (x, y) \rightarrow (x, y) \equiv \mathbb{R}^{k+l} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}, \quad x, y - \text{векторы размера } k \text{ и } l \text{ соответственно}$$

Определим $\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y))$. В матричном виде:

$$\tilde{f} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \end{pmatrix}$$

Тогда $D\tilde{f}$ - блочная матрица вида:

$$D\tilde{f}(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right)$$

Ее определитель в этом случае $1 \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \neq 0$.

По теореме о локальной обратимости у (x_0, y_0) существует окрестность $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ такая, что отображение $\tilde{f}|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \tilde{f}(\Omega) \subset \mathbb{R}^{k+l}$ является C^r -изоморфизмом. Пусть $g : \tilde{f}(\Omega) \rightarrow \Omega$ - обратное отображение.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xleftrightarrow[g]{f} \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

Функция g задана как $g = \begin{cases} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{cases}$, причем $g_2(x, y) = x$.

Положим $\alpha(x) = g_2(x, 0)$. Надо проверить, что $f(x, \alpha(x)) = 0$.

$$(x, f(x, \alpha(x))) = (x, 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{f}(x, y) = (x, 0) \implies (x, y) = g(x, 0) \implies (x, y) = (x, g_2(x, 0)) \implies y = g_2(x, 0)$$

Поскольку $\alpha(x) = g_2(x, 0)$ - все выполнено. □

Опр. 12. Регулярные точки:

Пусть $f \in D(p)$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Точка p называется регулярной, если $df(p)$ - сюръективное отображение. Это условие эквивалентно тому, что $\text{rank}(Df(p)) = k$ (т.е. в $Df(p)$ есть k линейно независимых строк).

Матрица $Df(p)$ имеет вид

$$Df(p) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{array} \right) \text{ если } n < k \text{ то не существует регулярных точек}$$

Теорема 7 (Лемма о регулярном дополнении): Пусть $f \in C^r, r > 0, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$ и f регулярна в точке p .

Тогда \exists функции $(g_1, \dots, g_{n-k}) = \bar{g} - C^r$ -гладкие, отображающие $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, такие, что отображение $(f, g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k+k}$ регулярно в точке p и, в частности, обратимо в некоторой окрестности точки p .

Доказательство.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & \frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k \times n}$$

Из алгебры знаем: $\exists k$ линейно независимых столбцов (можем считать, что первые k штук). Дополним нижнюю часть матрицы фрагментом

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_k} & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n-k \times n}$$

Итоговая матрица будет иметь размеры $n \times n$.

Пусть теперь $g(x_1, x_2)$ такое, что $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$. И положим:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = x_{k+1} \\ \vdots \\ g_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = x_n \end{cases}$$

Тогда матрица $n \times n$ будет иметь вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} k \times k, \det \neq 0 & \text{неважно что} \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Ее определитель $\det = \det(\frac{\partial f_{1 \dots k}}{\partial x_{1 \dots k}}) \cdot \det E \neq 0$ А обратимость следует из невырожденности. \square

Теорема 8 (Лемма о локальном наложении): Пусть $f \in C^r, r > 1, f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, U \subset \mathbb{R}^n$ - регулярна в точке p .

Тогда $f(p)$ - внутренняя точка множества $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^k$. То есть:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \varepsilon\text{-шар } \overset{\circ}{B}_\varepsilon(f(p)) \text{ целиком содержится в } f(\Omega)$$

Доказательство. По предыдущей лемме $\exists \bar{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ такое, что отображение $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ регулярно (и, в частности, локально обратимо в p).

По теореме о локальной обратимости \exists окрестность $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^n$.

Образ множества U , т.е. множество точек вида $(f_1(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x}), g_1(\bar{x}), \dots, g_{n-k}(\bar{x})) \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in U$ открыт в \mathbb{R}^n .

Тогда пользуясь тем, что при проекции образы открытых множеств открыты, получаем, что

$$\text{Множество точек из проекций на первые } k \text{ координат множества } \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(U) : \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_k(\bar{x}) \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^k$$

Проверим теперь, что если $A \subset X \times Y$, то $\Pi(A) \subset X$, Π - проекция.

Берем точку $x_0 \in \Pi(A)$. Существует точка $(x_0, y_0) \in A$, значит \exists шарик с центром в (x_0, y_0) целиком лежащий в A . Ясно, что проекция этого шарика покрывает ε -шарик в X с центром в x_0 . \square

3 Многообразия в \mathbb{R}^n

Опр. 13. Пусть M - метрическое пространство (необязательно подмножество в \mathbb{R}^n). M является k -мерным многообразием без края, если $\forall p \in M$ у точки p \exists окрестность $U_p \subset M$ гомеоморфная открытому шару в \mathbb{R}^k .

Опр. 14. Гомеоморфизм - непрерывное отображение, обратное к которому тоже непрерывно.

Теорема 9 (Брауэра об инвариантности области (без док-ва).): Пусть $U \subset_{op} \mathbb{R}^k$ и $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ - непрерывна и инъективна. Тогда $f(U) \subset_{op} \mathbb{R}^k$ и $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ - тоже непрерывна.

Опр. 15. M - k -мерное C^r -многообразие в \mathbb{R}^n , если:

$$\forall p \in M \exists U \in \mathcal{N}(p), U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \cong_{C^r} \text{ открытому шару в } \mathbb{R}^k$$

Утв. Предыдущее утверждение эквивалентно требованиям:

1.

$$\exists U \in \mathcal{N}(p) U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \cong \text{ открытому подмножеству } \omega \in \mathbb{R}^k$$

2.

$$\exists U \in \mathcal{N}(p) U \subset_{op} M \text{ такая, что } U \cong \mathbb{R}^k$$

Теорема (1 о регулярных решениях): Пусть $\Omega \subset_{op} \mathbb{R}^n$, $f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - C^r гладкие функции. Непустое множество M задано как

$$M = \{\bar{x} \in \Omega \mid \begin{array}{c} f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x) = 0 \end{array} \}, \text{ где } \bar{x} - \text{регулярная точка}$$

То есть $\text{rank} \frac{\partial f_{1\dots k}}{\partial x_{1\dots n}} = k$ Тогда M - $n - k$ -мерное C^r -многообразие без края.

Доказательство. Пусть $p \in M$. Можно считать, что последние k столбцов линейно независимы, то есть $\left| \frac{\partial f_{1\dots k}}{\partial x_{n-k+1\dots n}} \right| \neq 0$ - определитель матрицы Якоби. По теореме о неявной функции существует такая окрестность \tilde{U} точки p , $\tilde{U} \subset_{op} \mathbb{R}^n$, такая, что $\tilde{U} \cap M$ - график некоторой функции:

$$x_{n-k+1\dots n} = g(x_{1\dots n-k})$$

Осталось показать, что график функции является многообразием $U \subset \mathbb{R}^k$.

Лемма График любого C^r отображения g , определенного на открытом подмножестве - это многообразие, гомеоморфное U .

Доказательство.

$$X \xrightarrow{g} Y$$

График $\Gamma_g = \{(x, g(x)) \mid x \in X\}$

$$U \xrightarrow{g} \Gamma_g - C^r \text{ отображение}$$

$$x \xrightarrow{g} (x, g(x)) \xrightarrow{g^{-1}\text{-проекция на } X} x$$

□

По лемме теорема доказана. \square

Замечание: Если у градиента функции в точке p хотя бы одна координата не равна 0, то p - регулярная.

Утв. $X \stackrel{C^r}{\cong} Y$ - если X - C^r -многообразие, то Y - тоже.

Доказательство. Пусть $\psi : X \rightarrow Y$ - C^r -изоморфизм. Пусть $q \in Y, p = \psi^{-1}(q)$, по условию существует открытая окрестность V точки p , C^r -изоморфная $U \subset \mathbb{R}^k$.

$$U \stackrel{\varphi}{\cong} V \stackrel{\psi}{\cong} \psi(V) \subset Y$$

$\psi(V)$ - прообраз V под действием ψ^{-1} , $V = \psi^{-1}(\psi(V))$
 $\psi \circ \varphi$ - C^r -изоморфизм U на окрестность точки q в Y . \square

Лемма (о локальном вложении) Пусть $f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_k) \end{pmatrix}$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Если точка $\bar{x}_0 \in U$ такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = k$, то у точки x_0 существует окрестность \tilde{U} такая, что $f(\tilde{U})$ - k -мерное многообразие.

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

Переставим f (если надо) и считаем первые k строк невырожденными в x_0 . Рассмотрим урезанное

$$\text{отображение } \psi = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

По теореме о локальной обратимости существует окрестность $\tilde{U} \ni x_0$, такая, что $\psi(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^k$ и $\psi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow \psi(\tilde{U})$ - C^r -изоморфизм.

$$\psi(\tilde{U}) \xrightarrow{\psi^{-1}} \tilde{U}$$

\tilde{U} в свою очередь, отображается в $f(\tilde{U})$ данным отображением:

$$\begin{pmatrix} f_1(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ \vdots \\ f_k(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ f_{\text{остальные индексы}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \end{pmatrix}$$

Причем $f_1, \dots, f_k = (x_1, \dots, x_k)$.

$$f_{\text{остальные}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = f_{\text{остальные}} \circ \psi(x_1, \dots, x_k)$$

$f(\tilde{U}) = \{(\bar{x}, \psi(\bar{x})) \mid \bar{x} \in \tilde{U}\}$ - график отображения ψ , то есть по соответствующей лемме о графике это многообразие. \square