

# Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

# 1 Дифференцирование функций

**Опр. 1.** Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $p \in U$ , если:

1.  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $p$  ( $p \in \text{Int}(U)$ )
2.  $\exists \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(p+\Delta h) - f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$  (и этот предел равен  $f'(p)$ )

## 1.1 Экстремумы

**Необходимое условие экстремума:**

Пусть  $f \in D(p)$  (дифференцируема в  $p$ ). Если  $p$  - экстремум, то  $f'(p) = 0$ .

**Замечание:** НО например для  $f(x) = x^3$   $f'(0) = 0$ , но  $f(x)$  не дифференцируема в 0.

**Замечание:** Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

**Достаточное условие экстремума:**

Пусть  $f \in D^2(p)$  (дважды дифференцируема в  $p$ ) и  $f'(p) = 0$ . В таком случае если

- $f''(p) < 0$  - точка  $p$  является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$  - точка  $p$  является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $p \in U$ . Функция  $f$  дифференцируема в  $p$ , если:

1.  $p \in \text{Int}(U)$  ( $\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U$ )
2.  $\exists$  дифференциал функции (линейное отображение)  $f$  в точке  $p$   $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки  $p$  на вектор  $h$ :

$$f(p + h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

## 1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

**Опр. 2.** Частная производная по координате  $x_i$  это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для  $f(x, y) = x^y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

**Опр. 3.** Производная вдоль вектора  $v$ :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если  $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ , то  $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору  $v = (v_1, v_2)$  у функции есть производная в  $(0, 0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

**Утв. 1** Если  $f$  дифференцируема в  $p$ , то  $f$  - непрерывна в  $p$ .

*Доказательство.*

$$f(p+h) - f(p) \underset{h \rightarrow 0}{=} df(p) \langle h \rangle$$

Линейное отображение  $df(p) \langle \cdot \rangle$  непрерывно,  $o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , т.е.  $f(p+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(p)$ . □

**Достаточный признак дифференцируемости:**

Все частные производные непрерывны в  $p$  ( $f \in D(p)$ ).

Пример:  $f(x, y) = x^y$  дифференцируема во всех точках  $(x_0, y_0)$ , где  $x_0 > 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

### 1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

**Опр. 4.** Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция  $f$  отображает  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , то матрица Якоби принимает вид  $1 \times n$  и называется **градиентом функции**.

**Опр. 5.** Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

**Опр. 6.** Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $p \in \text{Int}(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) = o(x - p)$ .

Если  $k = 1$ , то лин. отображение  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно задать как  $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$  - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем  $\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$  - вектор частных производных в точке  $p$ .

**Утв. 2** Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $f$  в точке  $p$ , вектор  $v$  единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi - \text{угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку  $|\nabla f(p)| = \text{const}$ ,  $|v| = 1$ , то для максимизации надо выбрать такое  $\varphi$ , чтобы  $\cos(\varphi)$  был максимален, т.е. вектора  $v$  и  $\nabla f$  параллельны и  $\nabla f$  задает наибольшую скорость роста.  $\square$

**Утв. 3**  $\nabla f(p)$  ортогонален поверхности уровня  $\Omega = \{x | f(x) = c\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(p) = c$  ( $p \in \Omega$ ). Пусть  $x_n \in \Omega$ , покажем, что  $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ :

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$ , т.е.  $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$ . Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

**Опр. 7.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется векторным полем.

**Опр. 8.** Потенциалом векторного поля  $F$  (если он есть) называется **скалярная** функция  $U : W \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\nabla U = F$ . Если потенциал существует, то  $F$  называется потенциальным полем.

**Теорема:** Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^1(p)$ ,  $g \in C^1(q)$ ,  $q = f(p)$ .

Тогда  $g \circ f \in C^1(p)$ ,  $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$ . В матрицах Якоби:  $D_{g \circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$ .

**Пример:**

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2 yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_f = (\sinh(ab) \cdot a \quad \sinh(ab) \cdot b)$$

$$D_g \cdot D_f = (\sinh(x^2 y z) \cdot x z \quad \sinh(x^2 y z) \cdot x y) \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Стороожуку на слово.

**Правило дифференцирования обратного отображения:** Если невырождено и  $\exists$  обратное отображение  $g : V \rightarrow U$ , непрерывное в точке  $q = f(p)$ , тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

## 1.4 Многократная дифференцируемость

**Опр. 9.**  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $k$  раз дифференцируема в точке  $p$  ( $f \in D^k(p)$ ), если:

1.  $f$  дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки  $p$ ;
2. Все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  дифференцируемы  $k-1$  раз в точке  $p$ .

**Пример:**

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

**Утв.** Если  $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$  тогда  $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

*Доказательство.*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$ ,  $g(x) \in D^k(p)$ ,  $f(x) \in D^k(p)$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ , то  $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ . □

**Теорема 1** (о вторых производных): Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in D^2(p)$ . Тогда  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

*Доказательство.* **ОЧЕНЬ ХОЧУ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЯМ ЖЕСТЬ КАК** □