

# Лекции по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

# 1 Дифференцирование функций

**Опр. 1.** Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $p \in U$ , если:

1.  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $p$  ( $p \in \text{Int}(U)$ )
2.  $\exists \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(p+\Delta h) - f(p)}{\Delta h} \in \mathbb{R}$  (и этот предел равен  $f'(p)$ )

## 1.1 Экстремумы

**Необходимое условие экстремума:**

Пусть  $f \in D(p)$  (дифференцируема в  $p$ ). Если  $p$  - экстремум, то  $f'(p) = 0$ .

**Замечание:** НО например для  $f(x) = x^3$   $f'(0) = 0$ , но  $f(x)$  не дифференцируема в 0.

**Замечание:** Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

**Достаточное условие экстремума:**

Пусть  $f \in D^2(p)$  (дважды дифференцируема в  $p$ ) и  $f'(p) = 0$ . В таком случае если

- $f''(p) < 0$  - точка  $p$  является локальным максимумом и экстремумом.
- $f''(p) > 0$  - точка  $p$  является локальным минимумом и экстремумом.

Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $p \in U$ . Функция  $f$  дифференцируема в  $p$ , если:

1.  $p \in \text{Int}(U)$  ( $\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U$ )
2.  $\exists$  дифференциал функции (линейное отображение)  $f$  в точке  $p$   $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки  $p$  на вектор  $h$ :

$$f(p + h) = f(p) + df(p) \langle h \rangle + o(|h|)$$

## 1.2 Частные производные

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

**Опр. 2.** Частная производная по координате  $x_i$  это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_1, \dots, p_i + t, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

Пример для  $f(x, y) = x^y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

**Опр. 3.** Производная вдоль вектора  $v$ :

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если  $v = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ , то  $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору  $v = (v_1, v_2)$  у функции есть производная в  $(0, 0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

**Утв. 1** Если  $f$  дифференцируема в  $p$ , то  $f$  - непрерывна в  $p$ .

*Доказательство.*

$$f(p+h) - f(p) \underset{h \rightarrow 0}{=} df(p) \langle h \rangle$$

Линейное отображение  $df(p) \langle \cdot \rangle$  непрерывно,  $o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , т.е.  $f(p+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(p)$ . □

**Достаточный признак дифференцируемости:**

Все частные производные непрерывны в  $p$  ( $f \in D(p)$ ).

Пример:  $f(x, y) = x^y$  дифференцируема во всех точках  $(x_0, y_0)$ , где  $x_0 > 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

### 1.3 Матрица Якоби и градиент функции

Контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad p \in U$$

**Опр. 4.** Матрицей Якоби называют матрицу

$$D_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

В случае, если функция  $f$  отображает  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , то матрица Якоби принимает вид  $1 \times n$  и называется **градиентом функции**.

**Опр. 5.** Градиентом функции называется вектор

$$D_f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

**Опр. 6.** Функция дифференцируема в точке, если

- $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  и  $p \in \text{Int}(U)$
- $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p \rangle + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) = o(x - p)$ .

Если  $k = 1$ , то лин. отображение  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно задать как  $df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle$  - скалярное произведение градиента функции на вектор, причем  $\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$  - вектор частных производных в точке  $p$ .

**Утв. 2** Градиент функции задает направление, при движении в котором функция растет быстрее всего.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $f$  в точке  $p$ , вектор  $v$  единичной длины будет задавать произвольное направление.

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial v} = df(p)\langle v \rangle = \langle \nabla f(p); v \rangle = |\nabla f(p)| \cdot |v| \cdot \cos(\varphi), \text{ где } \varphi - \text{угол между } \nabla f \text{ и } v.$$

Поскольку  $|\nabla f(p)| = \text{const}$ ,  $|v| = 1$ , то для максимизации надо выбрать такое  $\varphi$ , чтобы  $\cos(\varphi)$  был максимален, т.е. вектора  $v$  и  $\nabla f$  параллельны и  $\nabla f$  задает наибольшую скорость роста.  $\square$

**Утв. 3**  $\nabla f(p)$  ортогонален поверхности уровня  $\Omega = \{x | f(x) = c\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(p) = c$  ( $p \in \Omega$ ). Пусть  $x_n \in \Omega$ , покажем, что  $\cos(\nabla f(p), \overrightarrow{x_n - p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ :

$$f(x_n) = f(p) = c \implies 0 = f(x_n) - f(p) = df(p)\langle x_n - p \rangle + o(x_n - p) = \langle \nabla f(p); x_n - p \rangle + o(x_n - p).$$

Значит  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle + o(1)$ , т.е.  $\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle \rightarrow 0$ . Тогда:

$$\langle \nabla f(p); \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \rangle = |\nabla f(p)| \cdot \left| \frac{x_n - p}{|x_n - p|} \right| \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 0, \text{ т.е. } \alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

**Опр. 7.** Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется векторным полем.

**Опр. 8.** Потенциалом векторного поля  $F$  (если он есть) называется **скалярная** функция  $U : W \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что  $\nabla U = F$ . Если потенциал существует, то  $F$  называется потенциальным полем.

**Теорема:** Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in C^1(p)$ ,  $g \in C^1(q)$ ,  $q = f(p)$ .

Тогда  $g \circ f \in C^1(p)$ ,  $dg \circ f = dg(f(p)) \cdot df(p)$ . В матрицах Якоби:  $D_{g \circ f}(p) = D_g(f(p)) \cdot D_f(p)$ .

**Пример:**

$$\begin{cases} f(x, y, z) = (xy, xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(a, b) = \cosh(ab) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad f = \begin{cases} f_1(x, y, z) = xy \\ f_2(x, y, z) = xz \end{cases}$$

$$h = g(f(x, y, z)) = \cosh(xy \cdot xz) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \sinh(x^2 yz) \cdot 2xyz \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \sinh(x^2 yz) \cdot x^2 y$$

$$D_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$D_g = (\sinh(ab) \cdot a \quad \sinh(ab) \cdot b)$$

$$D_g \cdot D_f = (\sinh(x^2 y z) \cdot x z \quad \sinh(x^2 y z) \cdot x y) \cdot \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Досчитывать я это не буду, поверим Стороожуку на слово.

**Правило дифференцирования обратного отображения:** Если невырождено и  $\exists$  обратное отображение  $g : V \rightarrow U$ , непрерывное в точке  $q = f(p)$ , тогда:

$$g \in D(q) \text{ и } dg(q) = (df(p))^{-1}$$

## 1.4 Многократная дифференцируемость

**Опр. 9.**  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $k$  раз дифференцируема в точке  $p$  ( $f \in D^k(p)$ ), если:

1.  $f$  дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки  $p$ ;
2. Все частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  дифференцируемы  $k-1$  раз в точке  $p$ .

**Пример:**

$$f \in D^2(p) \implies f \in D(x) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(p)$$

**Утв.** Если  $\begin{cases} f \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \\ g \in D^k(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \end{cases}$  тогда  $h(x) = f(x) \cdot g(x) \in D^k(p)$

*Доказательство.*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Так как  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in D^{k-1}(p)$ ,  $g(x) \in D^k(p)$ ,  $f(x) \in D^k(p)$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ , то  $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in D^{k-1}(p)$ . □

**Теорема 1** (о вторых производных): Пусть  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in D^2(p)$ . Тогда  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ .

*Доказательство.* Можно считать, что  $n = 2$ , так как при заданной функции  $f(x_1, x_2, \dots)$  можно в качестве  $f$  рассмотреть сужение  $f$  на плоскость  $Ox_1x_2$ , т.к. при дифференцировании по  $x_1$  или  $x_2$  остальные переменные не изменяются.

$$f = f(x, y) \in D^2(p), \quad p = (x_0, y_0, \dots)$$

Считаем, что  $p = 0$  и что  $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$ . Чтобы показать почему так можно считать введем  $f_1$ :

$$f_1(x, y) := f(x, y) - f'_x(0, 0) \cdot x - f'_y(0, 0) \cdot y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - f'_x(0, 0)$$

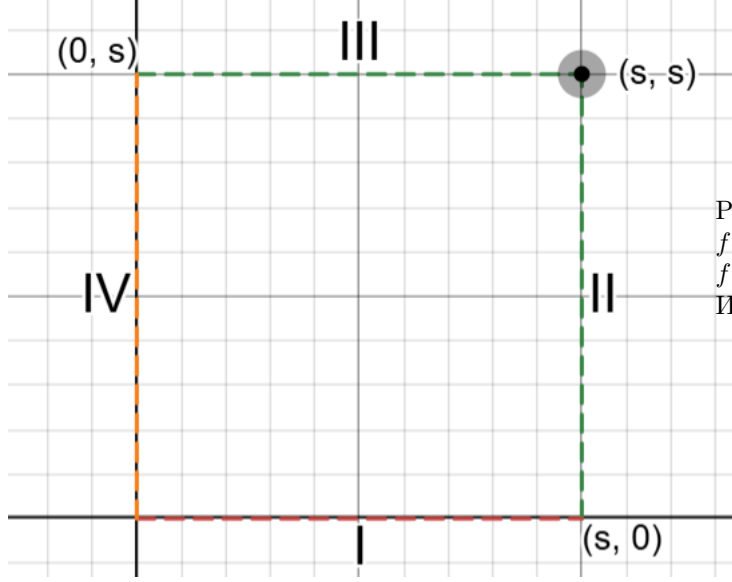
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - f'_y(0, 0)$$

Дальше считаем, что  $f = f_1$  и  $f(0, 0) = 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(0, 0) + a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + \alpha_1(x, y), \text{ где } \alpha_1(x, y) = o(x, y), \quad (a_{11}, a_{12}) = df(0, 0)\langle x, y \rangle$$

По условию  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in D(0)$ , поэтому  $a_{11} = f_{xx}(0)$ ,  $a_{12} = f_{xy}(0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(0, 0) + a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + \alpha_2(x, y), \quad a_{21} = f_{yx}(0), \quad a_{22} = f_{yy}(0)$$



Рассмотрим точку  $(s, s)$  вблизи нуля. Для нее  
 $f(s, s) - f(0, 0) = (f(s, s) - f(s, 0)) + (f(s, 0) - f(0, 0)) = (II) + (I)$ .  
 И в то же время  $f(s, s) = (IV) + (III)$

$$\Pi = f(s, s) - f(s, 0) = \int_{y=0}^s \frac{\partial f}{\partial y}(s, t) dt = \int_{t=0}^s a_{21}s + a_{22}t + \alpha_2(s, t) dt = a_{21}s^2 + \frac{a_{22}s^2}{2} + \varepsilon_1(s),$$

причем  $\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt$ . Аналогично для I:

$$I = f(s, 0) - f(0, 0) = \int_{t=0}^s \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) dt = \int_{t=0}^s a_{11}t + a_{12} \cdot 0 + \alpha_1(t) dt = \frac{a_{11}}{2}s^2 + \varepsilon_2(s), \quad \varepsilon_2(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, 0) dt$$

$$\text{Итого: } f(s, s) - f(0, 0) = I + \Pi = s^2 \left( a_{21} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \right), \text{ что на самом деле равно } \Pi + IV = \\ = s^2 \left( a_{12} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \right)$$

$$a_{21} + \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} = a_{12} + \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \quad (1)$$

При малых  $s$ :

$$\varepsilon_3(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(0, t) dt, \quad \varepsilon_4(s) = \int_{t=0}^s \alpha_1(t, s) dt$$

Осталось показать, что  $\varepsilon_{1,2,3,4} \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Вспомним, что

$$\varepsilon_1(s) = \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt, \quad \alpha_2(x, y) \underset{x, y \rightarrow 0}{=} o(x, y)$$

То есть, в некотором круге  $V$  точки  $(0, 0)$  выполнено  $\forall (x, y) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ . Для  $s$  таких, что  $(s, s) \in V \quad \alpha_2(x, y) \leq \varepsilon \cdot \sqrt{2} \cdot s$ , при  $|x| \leq s, |y| \leq s$ . Тогда

$$|\varepsilon_1(s)| = \left| \int_{t=0}^s \alpha_2(s, t) dt \right| \leq \int_{t=0}^s |\alpha_2(s, t)| dt \leq \int_{t=0}^s \varepsilon \cdot s\sqrt{2} \cdot dt = \varepsilon s^2 \sqrt{2}$$

. Итак, мы доказали, что  $\varepsilon_1(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} o(s^2)$ , аналогичным образом показываем для  $\varepsilon_{2,3,4}$ . Тогда в равенстве 1  $\frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{s^2} \rightarrow 0$  и  $\frac{\varepsilon_3(s) + \varepsilon_4(s)}{s^2} \rightarrow 0$ , а значит  $a_{21} = a_{12}$ , то есть  $f_{xy}(0) = f_{yx}(0)$ .  $\square$

### Правило дифференцирования монома:

Пусть  $f(x) = x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . Тогда

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_m} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(0) = i_1! \cdot \dots \cdot i_m!$$

Любая другая производная любого порядка в точке 0 равна 0.

## 1.5 Мульти-индексы

Придумаем  $\mu = (i_1, \dots, i_m)$  - численный вектор, в котором  $\forall j = \overline{1 \dots m} \ i_j \geq 0$  и назовем его **мультииндексом**.

Для мультииндексов определены операции:

$$\mu! := i_1! \cdot \dots \cdot i_m! \quad |\mu| = \sum_{j=1}^m i_j \text{ - порядок мультииндекса}$$

$$x \in \mathbb{R}^m, x = (x_1, \dots, x_m), \quad x^\mu = x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_m^{i_m}$$

$$C_k^\mu = \frac{k!}{\mu!} = \frac{k!}{i_1! \cdot \dots \cdot i_m!}, \text{ где } k = |\mu|$$

Зададим контекст:

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow E, \ f \in D^k(p), \ \mu = (i_1, \dots, i_m)$$

Тогда:

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu} = D^\mu f = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \left( \frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}} \left( \dots \left( \frac{\partial^{i_m}}{\partial x_m^{i_m}} f \right) \right) \right)$$

**Теорема** (разложение Тейлора):  $\exists!$  многочлен  $A(x)$  степени  $\leq k$  такой, что  $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p)^k$

$$A(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

**Теорема** (разложение Тейлора для нескольких переменных): Пусть  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow E$ ,  $f \in D^k(p)$ , тогда  $\exists!$  многочлен  $A(x)$   $\deg(A) \leq k$ , такой, что  $f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$ :

$$A(x) = f(p) + \frac{df(p)\langle x-p \rangle}{1!} + \frac{d^2f(p)\langle x-p \rangle^2}{2!} + \dots + \frac{d^k f(p)\langle x-p \rangle^k}{k!}$$

**Доказательство. Единственность:** Пусть есть два таких многочлена  $A(x), B(x)$ . Введем  $C(x) := A(x) - B(x) = o(|x-p|^k)$ . И докажем вспомогательное утверждение:

**Утв.**  $\deg C \leq k \ C(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$ , тогда  $C \equiv 0$ .

**Доказательство.** 1. Фиксируем  $v \in \mathbb{R}^m$  и рассмотрим  $h(t) = C(p+tv)$  - многочлен одной переменной. По условию  $h(t) = o(t^k)$  для одной переменной (доказывали это в первом семестре), т.е.  $h(t) \equiv 0$ . В частности, при  $t = 1$   $h(t) = C(p+v) = 0$ .

2. Поскольку 1. выполняется  $\forall v$ , то  $C(p+v) = 0 \ \forall v$ .

□

Тогда в силу доказанного утверждения получаем единственность.

**Существование:** Введем  $g(x) = f(x) - A(x)$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow E$ .  $g(p) = 0$  и все производные до порядка  $k$  включительно равны 0 в  $p$ ,  $g \in D^K(p)$ . Необходимо доказать, что из этого следует, что  $g(x) = o(|x - p|^k)$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ , надо показать, что  $|g(x)| < \varepsilon \cdot |x - p|^k$  в некоторой  $U$  - окрестности точки  $p$ . Пусть  $\varepsilon_{k-1}(x)$  - какая-то производная порядка  $k - 1$  функции  $g$ ,  $\varepsilon_{k-1}$  определена в некотором шаре  $V_p$  с центром в  $p$ .

$$\varepsilon_{k-1}(p) = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{k-1}}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \quad (2)$$

Поэтому имеется маленький шар  $U \subset V_p$  в котором выполнено:

$$\forall x \in U \quad |\varepsilon_{k-1}|(x) \leq \varepsilon \cdot |x - p| \quad (3)$$

В самом деле,  $\varepsilon_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(p) + d\varepsilon_{k-1}(p)\langle x - p \rangle + o(|x - p|)$ , причем первое слагаемое равно нулю из того, что "все производные до порядка  $k$  включительно равны 0 в  $p$  а второе - из уравнения (1). Значит  $\varepsilon_{k-1}(x) = o(|x - p|) \implies \varepsilon_{k-1}(x) \leq \varepsilon |x - p|$  Итак, ясно, что существует шарик  $U$ , в котором все производные  $k - 1$  порядка имеют оценку (3) Пусть  $\varepsilon_{k-2}$  - какая-то производная функции  $g$  порядка  $k - 2$ . Все ее первые частные производные по доказанному в шаре  $U$  оцениваются в  $\varepsilon \cdot |x - p|$ . По лемме о степенной оценке приращения для  $\varepsilon_{k-2}$  выполнено в шаре  $U$ :

$$|\varepsilon_{k-2}(x)| \leq \left| \frac{\varepsilon |x - p|^2}{2} \right|$$

Для  $k - 3, k - 4, \dots$  аналогично.

$$|g(x)| = |g^{(k-k)}(x)| \leq \varepsilon \cdot \frac{|x - p|^k}{k!} \leq \varepsilon \cdot |x - p|^k$$

□

**Теорема 2** (Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных): Пусть  $f \in D^2(p)$ ,  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  и  $df(p) > 0$ . Тогда:

1.  $d^2 f(p) > 0$  - строгий локальный минимум
2.  $d^2 f(p) < 0$  - строгий локальный максимум
3. Если  $d^2 f(p)$  неопределен, т.е.  $\exists u \in \mathbb{R}^m \quad d^2 f(p)\langle u \rangle > 0$  и  $\exists v \in \mathbb{R}^m \quad d^2 f(p)\langle v \rangle < 0$ , то  $p$  - седловая точка.

*Доказательство.* Докажем пункт 3:

*Доказательство.* Пусть  $df(p) = 0$  и существуют вектора  $u$  и  $v$ , такие, что  $d^2 f(p)\langle u \rangle > 0$ ,  $d^2 f(p)\langle v \rangle < 0$ .

Введем функцию  $h(t) = f(p + tu)$ . Тогда  $h'(0) = df(p)\langle u \rangle = 0$ ,  $h''(0) = d^2 f(p)\langle u \rangle > 0$ . Значит у функции  $h$  в точке 0 строгий минимум (по достаточному условию экстремума для одной переменной). Аналогично вдоль  $p + tv$  функция имеет строгий максимум, значит  $p$  - седловая точка. □

Докажем пункт 1:

*Доказательство.* Пусть  $d^2 f(p) > 0$ , то есть  $\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p)\langle v \rangle > 0$ . Сфера  $S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m \mid |v| = 1\}$  - компактна (замкнута и ограничена).  $d^2 f(p) : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  - однородный многочлен второго порядка. Так как  $d^2 f$  - непрерывная функция на компакте, то у нее  $\exists \min = C > 0$ , т.е.  $\forall v \in S^{m-1} \quad d^2 f(p)\langle v \rangle \geq C$ .

**Утв.** Тогда  $\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p)\langle v \rangle \geq C \cdot |v|^2$



*Доказательство.*

$$\forall v \neq 0 \quad d^2 f(p) \langle v \rangle = d^2 f(p) \langle |v| \cdot \frac{v}{|v|} \rangle = |v|^2 \cdot d^2 f(p) \langle \frac{v}{|v|} \rangle \geq C \cdot |v|^2$$

□

Значит

$$f(x) = f(p) + df(p) \langle x - p \rangle + \frac{d^2 f(p) \langle x - p \rangle}{2!} + \alpha(x) |x - p|^2, \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} O(1)$$

$$f(x) \geq f(p) + 0 + \frac{C}{2!} \cdot |x - p|^2 + \alpha(x) |x - p|^2$$

Существует окрестность  $U$  точки  $p$ , такая, что  $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{3} \quad \forall x \in U$ . Тогда для  $\forall x \in U$ :

$$f(x) \geq f(p) + \frac{C}{2!} |x - p|^2 - \frac{C}{3} |x - p|^2 = f(p) + \frac{C}{6} |x - p|^2$$

То есть  $f(x) - f(p) \geq \frac{C}{6} |x - p|^2 > 0 \implies$  в  $U \quad f(p) < f(x) \quad \forall x \in U$ . Пункт 1 доказан. □

Пункт 2 доказывается аналогично пункту 1. □

**Теорема 3** (Полиномиальное разложение композиции): Пусть  $k \geq 0$ ,  $f, g$  - функции,  $A(x), B(y)$  - полиномы. Предположим, что  $f$  и  $A$  в точке  $p$  имеют порядок касания  $\geq k$ ,  $g$  и  $B$  в точке  $p$  имеют порядок касания  $\geq k$ . То есть:

$$f(x) - A(x) = \alpha(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x - p|^k), \quad \alpha(p) = 0$$

$$g(y) - B(y) = \beta(y) \underset{y \rightarrow q}{=} o(|y - q|^k), \quad \beta(q) = 0$$

Тогда  $g \circ f$  имеет с  $B \circ A$  порядок касания  $\geq k$ .

*Доказательство.* При  $k = 0$ :

$$\alpha(x) = o(1) \implies f(x) - A(x) \underset{x \rightarrow p}{=} 0 \implies f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p)$$

Для функции  $g$  аналогично, после чего применяем теорему о непрерывности композиции. Для  $k = 0$  доказано.

Пусть  $k \geq 0$ . Тогда:

$$\begin{cases} f(x) = \alpha(x) + A(x) \\ g(y) = \beta(y) + B(y) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha(x) = o(|x - p|) \\ \beta(y) = o(|y - q|) \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha \in D^1(p) \\ \beta \in D^1(q) \end{cases} \implies \begin{cases} f \in D^1(p) \\ g \in D^1(q) \end{cases}$$

$$g(f(x)) - B(A(x)) = g(f(x)) - B(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x)) = \beta(f(x)) + B(f(x)) - B(A(x))$$

Заметим, что  $\beta(f(x)) = o(|f(x) - q|^k) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|f(x) - f(p)|^k)$ . При этом  $f(x) - f(p) = O(|x - p|^1)$ , так как  $f \in D^1(p)$ . А значит:

$$\beta(f(x)) = o(O(|x - p|^k)) = o(|x - p|^k)$$

Пусть теперь  $V$  - шар конечного радиуса с центром в  $q$ . Все частные производные многочлена  $B$  в шаре  $V$  ограничены некоторой константой  $C$ . Тогда по лемме об оценке приращения:

$$\forall y_1, y_2 \in V \quad |B(y_1) - B(y_2)| = O(|y_1 - y_2|)$$

При  $x \rightarrow p \begin{cases} f(x) \rightarrow q \\ A(x) \rightarrow q \end{cases}$  и поэтому  $f(x), B(x) \in V$ . В таком случае

$$B(f(x)) - B(A(x)) \underset{x \rightarrow p}{=} O(f(x) - A(x)) = O(o(|x - p|^k))$$

□

## 2 Основы гладкого анализа

Символ  $\underset{op}{\subset}$  обозначает "открыто в". Контекст:

$$U \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m, f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, f \in C^r(U), r \geq 0$$

**Опр. 10.** Отображение  $f$  называется  $r$ -гладким, если все ее частные производные до порядка  $r$  непрерывны на  $U$ .

Пусть  $X$  - не обязательно открыто в  $\mathbb{R}^m$ .

**Опр. 11.**  $f \in C^r(X)$ , если  $f = \tilde{f}$  - сужение на  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{f} : \tilde{X} \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  -  $C^r$ -гладкая на  $\tilde{X}$ . **НАДО УТОЧНИТЬ:**  $X \subset \tilde{X}$  или наоборот.

**Утв. 4** Пусть  $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  -  $C^r$  отображения. Тогда  $f + g \in C^r(X)$

*Доказательство.* Пусть  $f = \tilde{f}$ ,  $g = \tilde{g}$  и т.д. по определению  $r$ -гладкости:

$$\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^k, \tilde{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^k, U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m, X \subset U, X \subset V$$

Введем  $U \cap V = W \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$ . На  $W$  заданы оба отображения и ясно, что  $f + g = \tilde{f} + \tilde{g}$ .  $\square$

**Утв. 5** Композиция:

$$X \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \supset Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$$

Если  $f \in C^r$  и  $g \in C^r$ , то  $g \circ f \in C^r$ .

*Доказательство.* Область определения  $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X \cap f^{-1}(\text{dom}(g))$

$$\begin{cases} f \in C^r \implies f = \tilde{f}, \tilde{f} : \mathbb{R}^m \supset \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^k - C^r\text{-гладкое.} \\ g \in C^r \implies g = \tilde{g}, \tilde{g} : \mathbb{R}^k \supset \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}^m - C^r\text{-гладкое.} \end{cases}$$

$$\text{dom}(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = \text{dom}(\tilde{f}) \cap \tilde{f}^{-1}(\text{dom}(\tilde{g})) = \tilde{X} \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$$

$\tilde{X}$  - открытое,  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{Y})$  - открытое, как прообраз открытого множества  $\tilde{Y}$  при непрерывном отображении.

Ясно, что  $g \circ f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$  - сужение  $\text{dom}(g \circ f)$ .  $\square$

**Теорема 4** (Лемма о классе гладкости обратного отображения): Пусть  $U, V \underset{op}{\subset} \mathbb{R}^m$ .

$U \xrightleftharpoons[g]{f} V$ ,  $f, g$  - непрерывны и взаимно обратны. Если  $f \in C^r(U)$  и  $\forall x \in U$   $df(x)$  - невырожден:  $\det(df(x)) \neq 0$ , то  $g \in C^r(U)$ .

*Доказательство.* При  $r > 0$   $g$  дифференцируема в  $\forall y \in V$  по правилу дифференцирования обратного отображения. В матрицах Якоби:

$$Dg(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in U, \text{ причем } f(x) = y, x = g(y)$$

$$Dg(y) = (Df(g(y)))^{-1}, \text{ цепочка преобразований } y \rightarrow g(y) \rightarrow Df(g(y)) \rightarrow (Df(g(y)))^{-1}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), w - \text{отображение обращения матрицы.}$$

$$Dg(y) = w \circ Df \circ g(y), \text{ причем } w - C^\infty, Df - C^{r-1}, g(y) - \text{дифференцируема}$$

$g$  дифференцируема  $\implies Dg$  тоже дифференцируема как композиция  $\implies$  все производные  $g$  дифференцируемы  $\implies Dg \in C^1 \implies g \in C^2 \implies \dots \implies g \in C^{r-1} \implies Dg \in C^{r-1} \implies g \in C^r$ .  $\square$

**Лемма** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^m$ , а  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  такое, что отображение  $f(x) - x = \lambda(x)$  сжимающее, то есть  $\forall x_1, x_2 \in U \mid \lambda(x_1) - \lambda(x_2) \mid \leq \lambda < 1$ . Тогда:

1.  $f(U) \subset_{op} \mathbb{R}^m$

2. Сужение  $f : U \rightarrow f(U)$  обратимо и обратное отображение - липшицево с константой  $\frac{1}{1-\lambda}$ .

*Доказательство.* Докажем пункт 2:

$f$  инъективно:  $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\begin{cases} f(x_1) - x_1 = \lambda(x_1) \\ f(x_2) - x_2 = \lambda(x_2) \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) = \lambda(x_1) + x_1 \\ f(x_2) = \lambda(x_2) + x_2 \end{cases}$$

Тогда

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid = \mid \lambda(x_1) - \lambda(x_2) + (x_1 - x_2) \mid \leq \mid \lambda(x_1) - \lambda(x_2) \mid + \mid x_1 - x_2 \mid \leq \lambda \mid x_1 - x_2 \mid + \mid x_1 - x_2 \mid = (\lambda + 1) \mid x_1 - x_2 \mid$$

В силу неравенства треугольника:

$$(1 - \lambda) \mid x_1 - x_2 \mid \leq \mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq (1 + \lambda) \mid x_1 - x_2 \mid$$

Инъективность есть, а сужение  $f : U \rightarrow f(U)$  - биективно, значит обратимо. Поймем, что обратное

отображение будет  $\frac{1}{1-\lambda}$  липшицево. Пусть  $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \\ y_2 = f(x_2) \end{cases} \in f(U) \quad \begin{cases} x_1 = g(y_1) \\ x_2 = g(y_2) \end{cases}$

$$\mid y_1 - y_2 \mid \geq (1 - \lambda) \mid g(y_1) - g(y_2) \mid \implies \frac{1}{1 - \lambda} \mid y_1 - y_2 \mid \geq \mid g(y_1) - g(y_2) \mid$$

Пункт 2 доказан.

Пусть теперь  $q \in f(U)$ . Рассмотрим  $p \in U \mid q = f(p)$ .  $U$  открыто, а значит  $\exists \varepsilon > 0 \mid B_\varepsilon(p) \subset U$ , где  $B_\varepsilon(p)$  - открытый шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $p$ . Мы покажем, что множество  $f(U)$  содержит шар с центром в  $q$  радиуса  $(1 - \lambda)\varepsilon$ .

Пусть  $y \in B_{\varepsilon(1-\lambda)}(q)$ , т.е.  $\mid q - y \mid < (1 - \lambda)\varepsilon$ . Надо показать, что  $\exists x$  такой, что  $\mid p - x \mid < \varepsilon$ ,  $f(x) = y$ . Воспользуемся теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения. Перепишем условие:

$$f(x) = y \implies y - f(x) = 0 \implies y - f(x) + x = x$$

Положим

$$\varphi(x) = y - f(x) + x = y - \lambda(x)$$

Заметим, что  $\varphi(x)$  является сжимающим и покажем, что  $\varphi$  переводит  $B_\varepsilon(p)$  в себя.

$$x \in B_\varepsilon(p) \implies \mid x - p \mid \leq \varepsilon \implies \mid \varphi(x) - \varphi(p) \mid \leq \lambda \varepsilon$$

$$\mid \varphi(x) - p \mid = \mid (\varphi(x) - \varphi(p)) + (\varphi(p) - p) \mid \leq \mid \varphi(x) - \varphi(p) \mid + \mid \varphi(p) - p \mid$$

Первое слагаемое, как мы уже доказали, не превышает  $\lambda \varepsilon$ . Преобразуем второе:

$$\mid \varphi(p) - p \mid = \mid y - f(p) + p - p \mid = \mid y - f(p) \mid = \mid y - q \mid \leq (1 - \lambda)\varepsilon$$

Тогда:

$$\mid \varphi(x) - p \mid \leq \lambda \varepsilon + (1 - \lambda)\varepsilon = \varepsilon$$

Значит  $\mid \varphi(x) - p \mid \leq \varepsilon$  и  $\varphi(x) \in B_\varepsilon(p) \mid x \in B_\varepsilon(p)$ . □

**Теорема 5: о локальной обратимости**

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  -  $C^r$ -гладкое отображение,  $r \geq 1$ . Пусть  $p \in U$ . Если  $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - невырожден, то у точки  $p$  имеется окрестность  $U_1$  такая, что  $f(U_1) \subset \mathbb{R}^m$  и сужение  $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow f(U_1)$  является  $C^r$ -изоморфизмом (т.е. обратное отображение тоже принадлежит классу  $C^r$ ).

*Доказательство.* Считаем сначала, что  $\forall v \, df(p)\langle v \rangle = v$ , т.е.  $df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  - тождественное отображение,  $Df(p) = E$ . Рассмотрим отображение  $h(x) = f(x) - x$ :

$$dh(x) = df(x) - dx, \text{ при } x = p: dh(p) = dx - dx = 0 (Dh(x) = E - E = 0)$$

Все частные производные отображения  $h$  в точке  $p$  равны 0. Значит, в силу их непрерывности в  $p$ , у точки  $p$  имеется некоторый шарик  $U$  с центром в  $p$  такой, что  $\forall x \in U$  все эти производные ограничены, например,  $\frac{1}{2} < 1$ .

$$\forall x_1, x_2 \in U_1 \quad |h(x_1) - h(x_2)| \leq \frac{1}{2}$$

По предыдущей лемме  $f(U_1)$  открыто в  $\mathbb{R}^m$  и  $f|_{U_1} \rightarrow f(U_1)$  обратимо, обратное отображение непрерывно. По теореме о классе гладкости обратного отображения оно  $(f^{-1})$  имеет нужный класс. Заметим, что в той лемме необходимо, чтобы  $\forall x \in U_1 \, \det(Df(x)) \neq 0$ , поэтому когда мы выбираем окрестность  $U_1$  надо это тоже потребовать:

$$Df(p) = E, \det(E) = 1 \neq 0 \text{ и в некоторой окрестности точки } p \, \det(Df(x)) \neq 0$$

Мы доказали теорему для  $Df(p) = E$ . Пусть теперь  $Df(p) = A$ ,  $\det(A) \neq 0 \implies$  значит существует обратная матрица  $A^{-1}$ , тоже невырожденная. Пусть  $\tilde{f} = A^{-1}f(x)$  - композиция линейного отображения и отображения  $f$ . Для  $\tilde{f}$  выполнена теорема, ведь  $D\tilde{f}(p) = A^{-1}Df(p) = A^{-1}A = E$ . Значит  $\exists \tilde{U} \ni p \mid \tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$  -  $C^r$ -изоморфизм и  $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^k$ .

$f(x) = A\tilde{f}(x)$  - композиция двух "хороших" отображений и  $f(\tilde{U}) = A \cdot \tilde{f}(\tilde{U})$  - образ открытого множества под действием линейного изоморфизма  $A$  - тоже открыт в  $\mathbb{R}^k$ .  $\square$

**Теорема 6 (о неявной функции):** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$  и  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  -  $C^r$ -отображение,  $r \geq 1$ .

Функция  $f$  представляет собой набор:

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) \end{pmatrix}$$

Пусть некоторая точка  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U$  и  $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$ ,  $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}$$

Множество  $M = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$ , где  $\Omega$  - окрестность точки  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Точка  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in M$ ,  $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)) \neq 0$

Тогда у  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  имеется такая окрестность  $\Omega$ , что  $\Omega \cap M$  - график некоторой  $C^r$ -функции  $\alpha$ , такой, что  $\alpha : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^l$  и

$$D\alpha(x) = (\frac{\partial f}{\partial y}(x, \alpha(x)))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha(x))$$

*Доказательство.* **А ПРУФ БУДЕТ ПОТОМ ПОКА НА СЛОВО ВЕРЬТЕ**  $\square$