Вопросы к экзамену по математическому анализу, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Вопросы

1. ~~Производная вдоль вектора.~~
2. ~~Частные производные.~~
3. ~~Дифференциал.~~
4. ~~Дифференцируемость функции в точке.~~
5. ~~Достаточный признак дифференцируемости.~~
6. Необходимые условия экстремума. **TODO**
7. Пример разрывной в точке функции, имеющей в ней производную по любому направлению.
8. Дифференцируемость суммы, произведения, композиции.
9. Градиент вещественной функции.
10. Векторные поля.
11. Потенциал векторного поля.
12. Многократная дифференцируемость.
13. Теорема о равенстве смешанных производных, "контрпример".
14. Высшие дифференциалы.
15. Пример не коммутирующих дифференциальных операторов.
16. Теорема о разложении Тейлора.
17. Гессиан вещественной функции. Достаточные условия экстремума.
18. Функции класса C^k на открытом множестве (и на множествах, не обязательно открытых).
19. Теорема об открытости отображения вида $f(x) = x + \varphi(x)$, где φ — сжимающее отображение.
20. Теорема о локальной обратимости, "контрпримеры".
21. Лемма о локальном наложении.
22. Теорема о неявной функции.
23. Теорема об обратной функции.
24. Многообразия в $\mathbb{R}^n$.
25. Примеры двумерных многообразий: сфера, тор, цилиндр, лист Мёбиуса.
26. Теорема Брауэра об инвариантности области (формулировка).
    Гомеоморфизмы и C^r-изоморфизмы.
27. Многообразия с краем. лемма о крае полупространства.
28. Лемма об изоморфизме многообразий. лемма об открытых частях многообразия.

29. Теорема о крае многообразия.
30. Теоремы о регулярных решениях.
31. Касательное пространство. Дифференциал как отображение касательных пространств, корректность определения, свойства.
32. Круг и квадрат гладко не изоморфны.
33. Теорема о регулярном дополнении.
34. Метод множителей Лагранжа, достаточные условия экстремума.
35. Лемма о локальном вложении.
36. Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций.
37. Критерий Коши равномерной сходимости для последовательностей и для рядов.
38. Признак Вирштрасса равномерной сходимости ряда.
39. Признак Абеля. Признак Дирихле.
40. Непрерывность дзета-функции при $x>1$.
41. Непрерывность равномерного предела последовательности непрерывных функций.
42. Интегрирование равномерного предела. Пример "расползающаяся куча".
43. Теорема о пределе производных.
44. Теорема о дифференцировании функционального ряда.
45. Теорема Абеля.
46. Теорема о сумме степенного ряда.
47. Ортогональность тригонометрической системы функций.
48. Вещественная и комплексная форма записи ряда Фурье.
49. Лемма об интегралах периодической функции.
50. Формула Дирихле.
51. Теорема Фурье.
52. Теоремы Вейерштрасса о тригонометрической и о полиномиальной аппроксимации.
53. Равенство Парсеваля.
54. Изопериметрическое неравенство.
55. Примитивный интеграл.
56. Мера сегмента.
57. Ступенчатые функции.
58. Интеграл ступенчатой функции, корректность и элементарная теорема Фубини.
59. Лемма о счетном покрытии интервала.

2 Ответы

2.1 Производная вдоль вектора

Стандартный контекст в котором работаем:

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad p \in U, \quad p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

Опр.. Прозводная вдоль вектора v:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Если $v = e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$, то $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{при}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \quad \text{при}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По любому вектору $v = (v_1, v_2)$ у функции есть производная в $(0, 0)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0, 0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v^2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^2 v_2^2} \underset{t \to 0}{=} \begin{cases} 0 & v_2 = 0 \\ \frac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \end{cases}$$

2.2 Частные производные.

Опр.. Частная производная по координате x_i это:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_n)}{t}$$

Пример для $f(x, y) = x^y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln(x)$$

2.3 Дифференциал.

Опр.. Дифференциал функции f в точке p - линейное отображение $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \to p}{=} o(x - p))$$

При сдвиге точки p на вектор h:

$$f(p + h) = f(p) + df(p) < h > + o(|h|)$$

2.4 Дифференцируемость функции в точке.

Пусть $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $p \in U$. Функция f дифференциируема в p, если:

1. $p \in Int(U) \quad (\exists \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(p) \subset U)$
2. $\exists$ дифференциал функции (линейное отображение) f в точке $p \quad df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ такое, что

$$f(x) = f(p) + df(p) < x - p > + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \underset{x \to p}{=} o(x - p))$$

2.5 Достаточный признак дифференциируемости.

Теорема (Достаточный признак дифференциируемости)**:** Если все частные производные непрерывны в p, то f дифференциируема в p ($f \in D(p)$).

Пример: $f(x, y) = x^y$ дифференциируема во всех точках (x_0, y_0), где $x_0 > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln(x)$$

Частные производные непрерывны, значит и функция непрерывна.

2.6 Необходимые условия экстремума.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции одной переменной - условие Ферма)**:** Пусть $f \in D(p)$ (дифференциируема в p). Если p - экстремум, то $f'(p) = 0$.

Замечание: НО например для $f(x) = x^3 \quad f'(0) = 0$, но $f(x)$ не дифференциируема в 0. **ЧТО ЗА ОБМАН**

Замечание: Необходимое условие экстремума выполнено лишь для точек во внутренности области определения, точки на границе необходимо проверять отдельно.

Теорема (Необходимое условие экстремума функции многих переменных)**:** Вектор частных производных первого порядка по переменным равен нулевому вектору:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (0, \dots, 0)$$