

Лекции по ТФКП, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Модели комплексных чисел

Введем стандартные понятия нужным образом:

\mathbb{R} - множество точек на прямой.

\mathbb{C} - расширение \mathbb{R} с помощью одного из корней уравнения $z^2 = -1$: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{0\}$, с замыканием относительно сложения и умножения.

Теорема 1 (Основная теорема алгебры) Множество комплексных чисел (\mathbb{C}) алгебраически замкнуто (любой многочлен степени n , коэффициенты которого лежат в \mathbb{C}), имеет корни в \mathbb{C} (с учетом кратности).

Замечание: Теорема верна и в частном случае многочлена, определенного над \mathbb{R} .

1.1 Стандартная модель комплексных чисел

Комплексное число z представляется парой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с операциями:

- "+" : $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- "·" : $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$

Замечание: Операции согласованы с операциями на \mathbb{R} .

Замечание: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

В станд. модели $\begin{cases} 0 = (0, 0) \\ 1 = (1, 0) \end{cases}$

Опр. 1. Мнимая единица определена как пара $(0, 1)$.

Замечание: Некорректно определять мнимую единицу как корень уравнения $z^2 = -1$, т.к. $-i$ так же является корнем.

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$(-i)^2 = (0, -1) \cdot (0, -1) = (-(-1) \cdot (-1), 0) = (-1, 0) = -1$$

Замечание: Запись $\sqrt{-1}$ тоже некорректна.

Утв. 1 На \mathbb{C} нельзя ввести линейный порядок.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{C}$, и существует некий линейный порядок $<$.

$$\forall x \neq 0 \begin{cases} \text{либо } -\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \text{ и } 0 = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \\ \text{либо } \frac{x}{2} < -\frac{x}{2} \text{ и } 0 > x \end{cases}$$

Тогда $\forall x \neq 0$ либо $x > 0$, либо $-x > 0$. Т.е. $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$. Но $-1 = i^2 < 0$ - противоречие. \square

1.2 Матричная модель

Комплексное число $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$+ : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$” \cdot ” : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

В матричной модели ноль (нейтральный элемент по сложению) представлен матрицей $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, единица (нейтральный по умножению) $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мнимая единица $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В стандартной модели произвольное комплексное число $z = (x, y)$ имеет стандартную запись $z = x + iy$, где $\begin{cases} x - \text{вещественная часть} \\ y = \text{мнимая часть} \end{cases}$

Действия с комплексными числами:

1. Сравнение (проверка равенства):

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ и } b = d$$

2. Сложение:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

3. Умножение:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

4. Деление:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac - bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

1.3 Геометрическая модель

Комплексное число представлено точкой с координатами (x, y) на плоскости. Операции:

- “+”: действует как сложение векторов (покоординатно).

$$” \cdot ” : z_3 = z_1 z_2 \iff \begin{cases} |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_3) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{cases}$$

где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\arg(z)$ задает угол между \vec{z} и Ох (определяется с точностью до периода).

Аргумент комплексного числа $\arg(z)$ - угол φ с точностью до периода 2π . **Главное значение аргумента** $\arg(z)$ - φ в промежутке $[0; 2\pi]$.

Комплексно сопряженное к $z = x + iy$ это $\bar{z} = x - iy$.

$$|z| = |\bar{z}|, \quad \arg(z) = -\arg(\bar{z}), \quad \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$$

$$\bar{z} \cdot z = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Законы де Моргана:

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Неравенство треугольника:

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \end{cases} \implies ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.4 Стереографическая проекция

На комплексную плоскость положили сферу S радиуса $\frac{1}{2}$. Северный полюс сферы - вершина $N(0; 0; 1)$. Комплексному числу c , лежащему в плоскости комплексных чисел и имеющему координаты $(x, y, 0)$ ставится в соответствие точка, которая является точкой пересечения прямой Nc со сферой S . Зададим систему координат $O\xi\eta\zeta$ аналогично $Oxyz$, но O имеет координаты $(0, 0, \frac{1}{2})$. Уравнение сферы S :

$$\xi^2 + \eta^2 + (\xi - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \quad (1)$$

Уравнение прямой Nc по двум точкам:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0 \quad (2)$$

Получаем набор **обратных формул стереографической проекции**: $x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta}, z = \frac{\xi+i\eta}{\zeta-1}$. Отсюда найдем

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} \stackrel{\text{из 2}}{=} \frac{\zeta}{1-\zeta} \implies \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (3)$$

Подставим 3 в уравнение 1 и получим прямые формулы стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (4)$$

Из геометр. построения стереографическая проекция взаимно однозначно отображает комплексную плоскость на сферу $S \setminus \{N\}$. Дополним стер. проекцию по непрерывности:

$$P: \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{на}} S \quad \text{где } \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ а } S \text{ называют сферой Римана.} \quad (5)$$

Опр. 2. Обобщенная окрестность на комплексной плоскости - это любая окружность (или прямая, рассматриваемая как окружность бесконечного радиуса).

Свойства стереографической проекции:

1. Для любой обобщенной окружности $l \subset \overline{\mathbb{C}}$ ее образ $P(l) \subset S^2$ - это окружность.

Доказательство. Пусть l - некая обобщ. окрестность на $\overline{\mathbb{C}}$, тогда ее уравнение:

$$l: A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \text{ - окружность при } A \neq 0, \text{ прямая при } A = 0$$

Подставим в него обратные формулы стереогр. проекции:

$$A \frac{\zeta}{1-\zeta} + B \frac{\xi}{1-\zeta} + C \frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0 \quad (6)$$

Поделим на $1-\zeta$ и получим:

$$\Pi: B\xi + C\eta + (A-D)\zeta + D = 0 \quad (7)$$

Но это уравнение некоторой плоскости Π в \mathbb{R}^3 , кроме того, $P(l) \subset S^2$, значит для l выполнено уравнение сферы Римана $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$. Тогда $P(l) = S^2 \cap \Pi$ - пересечение сферы с плоскостью окружность. \square

2. \forall окружности $L \subset S^2$ $P^{-1}(L)$ является обобщенной окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ такая, что $\Pi \cap S^2 = L$, а значит ее уравнение имеет вид (7). Разделим (7) на $1-\zeta$, получим обобщенное уравнение прямой, подставим туда прямые формулы проекции и получим уравнение вида $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, а это - уравнение обобщенной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$. \square

3. Стереографическая проекция сохраняет углы. То есть $\forall l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ и α - угол между ними, верно, что угол между $P(l_1)$ и $P(l_2)$ тоже равен α (угол между окружностями это угол между касательными в точке пересечения).

Опр. 3. Кривая - это функция (или ее образ) $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Параметром кривой g называют $t \in [a, b]$.

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) \quad \vec{n} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

Натуральный параметр на кривой g это $l \in [0, L]$ (L - длина g), такой, что $\forall l$ выполнено $\frac{\partial g}{\partial l} = 1$. Набор $\{v, n\}$ называется базис Френе, для него выполнена теорема Френе. Уравнения Френе:

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(l) \\ -k(l) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}, \quad k(l) \text{ называется кривизной } g \subset \mathbb{R}^2$$

1.5 Виды записи

Стандартная запись $z = x + iy$.

Пусть $r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$.

Опр. 4. Тригонометрическая запись комплексного числа:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = x = r \cdot \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(z) = y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \implies z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Опр. 5. Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \implies z = r e^{i\varphi}$$

Тогда для натурального n :

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Пусть $z \neq 0 \implies r = |z| > 0$. тогда $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}$, где $k = 0 \dots n-1$. Отсюда же получается формула Муавра для корней степени n из $z \neq 0$:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \right)$$

Замечание: $\exists n$ различных корней степени n из комплексного числа $z \neq 0$.

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \text{окружности радиуса } r^{\frac{1}{n}} \text{ с центром в } (0, 0)$$

2 Множества на $\overline{\mathbb{C}}$

Опр. 6. • δ - окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C(\delta, z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}, \delta > 0$.

- Проколотая окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C^*(\delta, z_0) = C(\delta, z_0) \setminus \{z_0\}$
- Окрестность точки $\{\infty\}$ - множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \delta\}$
- Точка z - изолированная точка множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 : C(\delta, z) \cap E = \{z\}$

Опр. 7. Точка z называется предельной точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\forall \delta > 0 \ C^*(\delta, z) \cap E \neq \emptyset$

Опр. 8. Точка z называется внутренней точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 \ C(\delta, z) \subset E$

Опр. 9. Точка z называется внешней точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 \ C(\delta, z) \cap E = \emptyset$

Опр. 10. Точка z называется граничной точкой E , если

$$\forall \delta > 0 \begin{cases} C(\delta, z) \cap E \neq \emptyset \\ C(\delta, z) \setminus E \neq \emptyset \end{cases}$$

Замечание: Если граничная точка $z \notin E$, то она является предельной для E .

Опр. 11. Граница E - это совокупность всех граничных точек, обозначается ∂E .

Опр. 12. Множество называется ограниченным, если $\exists M \ (0 < M < \infty)$ - число, такое, что $\forall z \in E \ |z| < M$

Опр. 13. Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки (или их нет).

Опр. 14. Множество E называется открытым, если $\forall z \in E \ z$ является внутренней точкой для E , то есть $\forall z \in E \ \exists \delta > 0 : C(\delta, z) \subset E$

Опр. 15. Замыкание множества E это $\overline{E} = E \cup \partial E$.

Опр. 16. Диаметр множества $d(E) = \sup_{z, \xi \in E} |z - \xi|$

Опр. 17. Расстоянием между множествами E и G называется $D(E, G) = \inf_{z \in E, \zeta \in G} |z - \zeta|$

Опр. 18. Множество E называется связным, если его нельзя представить как $E = A \cup B$, $A, B \subset E$, таких, что

1. $A, B \neq \emptyset$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. A и B не содержат предельных точек друг друга.

Опр. 19. Множество E называется линейно связным, если $\forall z_1, z_2 \in E \ \exists$ непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$ такая, что $\varphi(0) = z_1, \varphi(1) = z_2$

Опр. 20. Областью называется открытое связное множество.

Опр. 21. Компонента множества E - \forall максимальное по включению связное подмножество E . Область $E \neq \overline{\mathbb{C}}$ n -связная, если граница ∂E состоит из n компонент ($\overline{\mathbb{C}}$ считаем 1-связным).

Утв. 2 \forall множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ граница ∂E является замкнутым множеством.

Доказательство. Доказывается от противного:

Допустим, \exists предельная точка z_0 для ∂E : $z_0 \notin \partial E$. □

Теорема 2 (Принцип Больцано-Вейерштрасса) У любого бесконечного множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ \exists хотя бы одна предельная точка.

Теорема 3 (Лемма Гейне-Бореля) Из бесконечного открытого покрытия замкнутого множества точек на $\overline{\mathbb{C}}$ можно выделить конечное подпокрытие.

Следствие: На $\overline{\mathbb{C}}$ любое замкнутое и ограниченное множество является компактом.

3 Предельные ряды комплексных чисел

Опр. 22. Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$ называется сходящейся к пределу $\alpha = a + ib$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |z_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$

Следствие: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$

Попробуем перенести теорию последовательностей вещественных чисел на комплексные числа:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha &\implies \begin{cases} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \implies \\ \implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_2 \end{cases} &\implies |z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) \quad |z_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n > N$

Таким образом $\begin{cases} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ Это позволяет свести теорию последовательностей $\{z_n\}$ комплексных чисел к \mathbb{R} , то есть все теоремы о сходимости вещественных последовательностей переносятся на комплексные числа.

Теорема (Критерий Коши)

Последовательность $\{z_n\}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ выполнено $\forall n, m > N$

Опр. 23. Последовательность $\{z_n\}$ сходится к ∞ ($\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$) если

$$\forall R > 0 \exists N \quad |z_n| > R \text{ выполнено для } \forall n > N$$

$$\text{При } z_n \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0$$

3.1 Ряды комплексных чисел

Если у знака суммы ряда не указаны границы - считать, что слагаемые суммируются по индексу k , k пробегает набор от 1 (иногда 0) до ∞

Опр. 24. Ряд комплексных чисел $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится (расходится), если сходится (расходится) последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Теорема (Критерий Коши сходимости ряда)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} \forall n > N \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{array} |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon \right.$$

Опр. 25. Ряд α_k сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$. Но поскольку $|\sum_{k=1}^m \alpha_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_{n+k}|$, то из абсолютной сходимости ряда следует общая сходимость.

Утв. 3 Член ряда α_k представим в виде $a_k + ib_k$. Тогда:

$$\begin{cases} |a_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \\ |b_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \end{cases}$$

Значит, если $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ абсолютно сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже абсолютно сходятся. В свою очередь, из абсолютной сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует абсолютная сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Опр. 26. Произведение двух сходящихся рядов сходится к произведению их сумм.

Стандартные разложения функций от комплексных чисел:

1. $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$
2. $\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$
3. $\cos(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!}$
4. $e^{i\alpha} = \sum \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!} + i \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$

Пусть $|\alpha| = R$, $\arg(\alpha) = \varphi$. Тогда:

$$\alpha = R \cdot e^{i \cdot \arg(\alpha)} = R(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

И поскольку можем представить $\alpha = a + ib$:

$$e^{\alpha} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)), \quad |e^{\alpha}| = e^a, \quad \arg(e^{\alpha}) = b$$

Поэтому $e^{2\pi k \cdot i} = 1$

4 Функции комплексного переменного

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ и $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е. $z \rightarrow f(z)$). Если f - инъекция, т.е. $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, то говорят, что f - однослойна. Если f действует из E в $f(E)$ (то есть еще и сюръективна, а значит - биекция), то $\exists f^{-1} : f(E) \rightarrow E$.

Опр. 27. Если z_0 - предельная точка множества E и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, то $f(z)$ непрерывна в z_0 .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Функция $f(z)$ представима в виде $u(z) + iv(z)$ (мнимая и комплексная части), а значит f непрерывна на $E \iff u(z), v(z), |f(z)|$ - непрерывны на E .

Если E - компактно, а f - непрерывно, то:

1. $|f(z)|$ достигает max и min на E
2. $f(z)$ равномерно непрерывна на E по т. Кантора

Опр. 28. Функция $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ - задает кривую на комплексной плоскости, если $x(t), y(t)$ - непрерывны.

- Если $\gamma(t)$ инъективна (за исключением $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$), то γ - жорданова кривая.
- $\gamma(t)$ называется гладкой, если $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\forall t \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$

Теорема (о стандартном радиусе) Пусть $\Gamma(t), t \in [\alpha, \beta]$ - гладкая замкнутая жорданова кривая. Тогда

$$\forall \theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) \exists \delta_0 \text{ такая, что}$$

1. Окружность $|z - z_0| = \underset{z_0 \in \Gamma}{R} \leq \delta_0$ пересекает Γ строго в двух точках
2. При переходе от $z_1 \in \Gamma$ к $z_2 \in \Gamma$, где $|z_2 - z_1| < \delta_0$ угол наклона касательной меняется меньше, чем θ_0
3. Если $|z - z_0| < \delta_0$ то $dS(s) < \frac{dr}{d \cos(\theta_0)}$

4.1 Функциональные ряды

Опр. 29. Ряд $\sum f_n(z)$ сходится на $E \subset \mathbb{C}$, если он сходится $\forall z \in E$. Сходится равномерно на E , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \mid \forall n > N \forall z \mid S_n(z) - S(z) \mid < \varepsilon$$

Или ряд $\sum f_n(z)$ сходится равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall m \forall z \left| \sum_{k=0}^m f_{n+k}(z) \right| < \varepsilon$$

Теорема (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса) Если $\forall z \in E$ каждый элемент ряда, начиная с некоторого номера n_0 удовлетворяет неравенству

$$|f_k(z)| \leq \alpha_k, \quad k \geq n_0 \tag{8}$$

и числовой ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то Функциональный ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно на E .

Доказательство. Так как ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^m \alpha_{n+k} < \varepsilon \quad \forall n > N, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\left| \sum_{k=1}^m f_{n+k}(z) \right| \leq \sum_{k=1}^m |f_{n+k}(z)| \stackrel{\text{по нер-ву 8}}{\leq} \sum_{k=1}^m \alpha_{n+k} < \varepsilon$$

Следовательно, по критерию Коши $\sum f_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно. \square

Теорема Сумма $S(z) = \sum f_k(z)$ равномерно сходящегося ряда непрерывных на E функций $f_k(z)$ сама непрерывна на E .

Доказательство. Пусть $z_0 \in E$ - произвольная точка. Тогда для $z \in E$:

$$|S(z) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)|$$

По определению равномерной сходимости ряда $\sum f_k(z)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid |S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |S_N(z_0) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Конечная сумма $S_N(z) = \sum_{k=1}^N f_k(z)$ непрерывных на E функций $f_k(z)$ - сама непрерывна на E . Тогда по определению непрерывности функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

А значит $|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon \implies$ функция $S(z)$ непрерывна в z_0 . В силу произвольности выбора $z_0 \in E$ $S(z)$ непрерывна на E . \square

Опр. 30. Бесконечная сумма вида $\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot (z - z_0)^k$ называется степенным рядом, в котором C_k - коэффициенты степенного ряда.

Поскольку линейная замена $t = z - z_0$ превращает этот ряд в более удобную форму $\sum C_k t^k$ - то будем рассматривать ряды именно такого вида.

Теорема (Коши-Адамара) Пусть дан ряд $\sum C_k z^k$ и $l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то данный ряд сходится на всей комплексной плоскости ($\forall z \in \mathbb{C}$).
2. Если $l = \infty$, то ряд сходится при $z = 0$ и расходится $\forall z \neq 0$.
3. Если $0 < l < \infty$, то ряд абсолютно сходится в круге $|z| < \frac{1}{l}$ и расходится при $|z| > \frac{1}{l}$.

Число $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}}$ называется радиусом сходимости степенного ряда, а круг $|z - z_0| < R$ называется кругом сходимости.

Доказательство. В точке $z = 0$ утверждение верно при $\forall C_k \implies \forall l$ ряд сходится, так как ряд сходится в $z = 0$. Пусть теперь $z \neq 0$.

Случай 1: $l = 0$.

То есть $l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0$. Значит:

$$\forall z \neq \infty \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = |z| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0 \text{ так как } |z| \neq \infty, \text{ а предел равен } 0$$

Тогда по радикальному признаку Коши для рядов с положительными членами ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |C_k z^k|$ сходится $\forall z \neq \infty$, т.е. ряд $\sum C_k z^k$ сходится на \mathbb{C} .

Случай 2: $l = \infty$.

Если бы ряд сходиллся в точке $z \neq 0$, то в силу необходимого условия сходимости $\exists M > 1 \quad |C_k z^k| < M$ или $\sqrt[k]{|C_k|} < \frac{M}{|z|}$, что противоречит условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \infty$.

Случай 3: $0 < l < \infty$

Пусть $0 < |z| < \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \sqrt[k]{|C_k|} < \varepsilon \quad \forall k > N$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1-l|z|}{2|z|} \Rightarrow \sqrt[k]{|C_k|} < l + \frac{1-l|z|}{2|z|} = \frac{1+l|z|}{2|z|}$. Тогда:

$$|z| \sqrt[k]{|C_k|} < \frac{1+l|z|}{2} = q < 1$$

$$|C_k z^k| < q^k, \quad k > N$$

Значит ряд сходится абсолютно при $|z| < \frac{1}{l}$.

Пусть $|z| > \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ бесконечное множество индексов } k_n, \quad n = 1 \dots \infty \text{ таких, что } \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > l - \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = \frac{l|z|-1}{|z|}$. Тогда $\sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > \frac{l|z|-1}{|z|} + 1 \Rightarrow |z| \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > 1$. Значит ряд расходится по радикальному признаку Коши при $|z| > \frac{1}{l}$. \square

Теорема 4 (Первая теорема Абеля) Если степенной ряд $\sum C_k z^k$ сходится в некоторой $z_0 \in \mathbb{C}$ такой, что $z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в круге $|z| < |z_0|$.

Доказательство. По теореме Коши-Адамара ряд сходится абсолютно в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Значит $|z_0| \leq R \Rightarrow$ ряд сходится абсолютно при $|z| < |z_0|$. \square

Напомним контекст: ряд $(1) \sum C_k z^k$, $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}}$.

Замечание: Степенной ряд не обязательно сходится равномерно в круге $|z| < R$.

Определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \quad \forall n > N, \forall z \in E$$

Доказательство. Для доказательства этого замечания сначала докажем формулы геометрической прогрессии:

Утв.

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Доказательство.

$$S_n + q^{n+1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = 1 + q * S_n$$

$$\text{Значит } S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

\square

Утв.

$$|q| < 1 \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} (1 - q^{n+1}) = \frac{1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - q^{n+1} = \frac{1}{1 - q}$$

□

По первому утверждению:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \implies \forall \in \mathbb{N} S(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1 - z} \implies \sup_{|z| < 1} |S(z) - S_n(z)| = \sup_{|z| < 1} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = \infty$$

□

Замечание: Степенной ряд равномерно сходится в любом замкнутом круге $|z| < r, \forall r < R$ (может быть 0).

Доказательство. Из условия теоремы ряд мажорируется рядом $\sum |C_k| r^k$, который сходится по радикальному признаку Коши. Значит степенной ряд равномерно сходится по признаку Вейерштрасса. □

Замечание: На границе круга сходимости (при $|z| = R$) степенной ряд может:

- расходится во всех точках (пример $\sum z^k$)
- сходится в некоторых точках границы и расходится в других (например, $\sum \frac{z^k}{k}$)
- сходится во всех точках границы (например, $\sum \frac{z^k}{k^2}$)

Теорема 5 (Вторая теорема Абеля) Если степенной ряд с радиусом сходимости $R \in (0, \infty)$ сходится в точке z_0 , такой, что $|z_0| = R$, то сумма $S(z) \rightarrow S(z_0)$ при $z \rightarrow z_0$ изнутри круга по любой некасательной траектории.

Возвращаясь к формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

Степенные ряды для $e^z, \cos(z), \sin(z)$ сходятся равномерно в \forall круге $|z| < R$, где $0 < R < \infty \implies$ эти функции непрерывны на \mathbb{C} .

Утв. e^z - периодическая функция с периодом $2\pi ki$

Доказательство.

$$e^z \cdot e^t = e^{z+t} \implies e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z (\cos(2\pi ki) + i \sin(2\pi ki)), k \in \mathbb{Z}$$

□

По формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \tag{9}$$

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z) \tag{10}$$

$$(9) + (10) : e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos(z) \implies \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{11}$$

$$(9) - (10) : e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin(z) \implies \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{12}$$

То есть формулы тригонометрии остаются в силе.

Нули функции $\sin(z)$: Из (12):

$$\sin(z) = 0 \implies e^{iz} - e^{-iz} = 0 \implies e^{2iz} - 1 = 0 \implies e^{2iz} = e^{2\pi ki}, k \in \mathbb{Z}$$

Значит нули функции $\sin(z)$ имеют вид $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ Аналогично нули функции $\cos(z)$ имеют вид $z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Замечание: Функции $\sin(z)$ и $\cos(z)$ не ограничены на \mathbb{C}

Доказательство. z представимо в виде $x+iy$. Из (11): $2\cos(z) = e^{iz} + e^{-iz}$. Мы знаем, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, значит:

$$|2\cos(z)|^2 = (e^{iz} + e^{-iz}) \cdot (e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}) = e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty$$

□

Опр. 31.

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \cosh(iz) = \cos(iz)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sinh(iz) = i\sin(iz)$$