Вопросы к коллоквиуму по ТФКП, 3 семестр

Коваленко Никита, Тимошенко Иван, 24123

1 Вторая теорема Абеля

2 Теорема Коши-Адамара

Теорема Пусть дан ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ и пусть $l = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|}$. Тогда имеем три случая:

1. $l = 0 \implies$ данный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. $l = \infty \implies$ данный ряд сходится только в $z = 0$.
3. $0 < l < \infty \implies$ ряд абсолютно сходится в круге $|z| < \frac{1}{l}$ и расходится при $|z| > \frac{1}{l}$. Случай $|z| = \frac{1}{l}$ требует проверки более сильными признаками.

Доказательство. Сразу заметим, что для $z = 0$ утверждение теоремы верно при любых коэффициентах C_k, а значит верно при $\forall l$. Разберем три случая, будем считать $z \neq 0$.

1. $l = 0, l = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0$.
   Тогда $\forall z \neq 0$:
   $$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = \underbrace{|z|}_{\neq\infty} \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|}}_{=0} = 0$$
   Заметим, что мы рассматриваем $\left|C_k z^k\right|$, т.е. знакоположительный ряд.
   Тогда можем применить радикальный признак Коши:
   $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = 0 < 1$, а значит ряд сходится для любых z.
2. $l = \infty$
   Предположим, что ряд сходится при $z \neq 0$. Тогда в силу необходимого условия сходимости можем указать число $G > 1$, такое, что $\left|C_k z^k\right| < G$, или (применяя радикальный признак Коши):
   $$\sqrt[k]{|C_k|} < \frac{G}{|z|} \tag{1}$$
   Однако, из того, что $l = \infty$ очевидно, что $\sqrt[k]{|C_k|}$ не может быть ограничен, значит неравенство (1) невозможно (получили противоречие с предположением).

   Таким образом ряд сходится в $z = 0$.
3. $0 < l < \infty$
   Пусть $0 < |z| < l$. Из определения верхнего предела:
   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \sqrt[k]{|C_k|} < l + \varepsilon \quad \forall k > N$$
   Выберем $\varepsilon = \frac{1-l|z|}{2|z|}$. Тогда:
   $$\sqrt[k]{|C_k|} < l + \frac{1 - l\,|z|}{2\,|z|} = \frac{1 + l\,|z|}{2\,|z|} \implies |z| \cdot \sqrt[k]{|C_k|} < \frac{1 + l\,|z|}{2} < 1 \text{ в силу } 0 < |z| < \frac{1}{l}$$
   Можно переписать в виде $\sqrt[k]{|C_k z^k|} < 1$ - вновь применяем радикальный признак Коши и получаем абсолютную сходимость в результате.

□

Справка:

Теорема (радикальный признак Коши) Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$. Если существует предел $\lim_{n\to\infty} sqrt[n]u_n = l$, то

1. $l < 1$ - ряд сходится
2. $l > 1$ - ряд расходится
3. $l = 1$ - надо проверять точнее

Да, в теореме Коши-Адамара мы применяем радикальный признак Коши, хоть и ряд в теореме начинается с $k = 0$, а признак работает для рядов с нумерацией от $k = 1$. Однако сложение ряда с конечным число (нулевым членом) никак не влияет на его сходимость.

Утв. 1 Ссылка на необходимый признак сходимости звучит так:
Необходимый признак сходимости гласит, что общий член должен стремиться к нулю. Мы предполагаем, что ряд $\sum C_k z^k$ сходится, а значит последовательность его общих членов тоже стремится к 0. Любая сходящаяся последовательность ограничена, а значит можно выбрать некоторую константу $M > 0$, которая будет ее ограничивать. Тогда выбра нашу константу G как $\max(M, 2)$ мы получим, что $G > 1$.

3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Определение конформного отображения.

Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - аналитическая функция в области D и $f'(z) \neq 0$.
Пусть γ - гладкая кривая Жордана, заданная уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.
Если $z_0 = z(t_0),\ t_0 \in [\alpha, \beta]$, то пусть $z'(t_0) \neq 0$.
Функция $w = f(z)$ отображает кривую γ в Γ, $w_0 = f(z_0) \in \Gamma$.
Уравнение кривой Γ:

$$\Gamma : w = w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \implies w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \tag{2}$$

$$\begin{cases} dz = z'(t)dt = [x'(t) + iy'(t)]\, dt \\ dw = w'(t)dt = [u'(t) + iv'(t)]\, dt \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = |z'(t)|\, dt \\ d\sigma = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}dt = |w'(t)|\, dt \end{cases} \text{ - элементы длины кривой } \gamma(\text{ds}) \text{ и } \Gamma(d\sigma) \text{ соответственно} \tag{4}$$

Из (3) $\implies \frac{dw}{dz}|_{t=t_0} = \frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} \overset{(2)}{=} f'(z_0) \implies |f'(z_0)| = \frac{|w'(t_0)|}{|z'(t_0)|} = \frac{d\sigma_0}{ds_0}$, где $d\sigma_0$ и ds_0 - элементы длины кривых γ и Γ в точках $z_0 = z(t_0)$ и $w_0 = w(t_0) \implies |f'(z_0)|$ - коэффициент искажения элемента длины дуги в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.
Коэффициент искажения не зависит от направления кривой в этой точке, а лишь от f.
Будем говорить, что при отображении $\begin{cases} w = f(z) \\ f'(z_0) \neq 0 \end{cases}$ в z_0 имеет место **постоянство искажения**.

Из (2):

$$\implies \arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) \tag{5}$$

Из (5) $\arg f'(z_0)$ - угол поворота $\forall$ кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Опр. 1. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в D. Если $f'(z) \neq 0$ для $z \in D$, то в z при отображении $w = f(z)$ имеет место **консерватизм углов**.

Опр. 2. Конформное отображение области D - это топологическое (гомеоморфное: взаимнооднозначное и непрерывное) отображение этой области, при котором в каждой точке $z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения.

Это определение с лекций, оно эквивалентно иному: отображение $f : D \to \mathbb{C}$ конформно, если

1. f дифференцирума в каждой точке D.
2. $f'(z_0) \neq 0$ для всех $z_0 \in D$.

Это вытекает из определений постоянства искажения и консерватизма углов.

Из геометрического смысла $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$ делаем вывод:

Утв. Если функция $w = f(z)$ осуществляет отображение области D и $\forall z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения, то $w = f(z)$ аналитична в D и $f'(z) \neq 0\ \forall z \in D$.

Из него сразу вытекает:

Утв. Конформное отображение области D осуществляется однолистной в D аналитической функцией $w = f(z),\ f'(z) \neq 0$.

4 Условие дифференциируемости Коши-Римана

Опр. 3. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой (моногенной), в точке $z \in D$, если

$$\exists! \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \text{ где } z + \Delta z \in D$$

Этот предел называется производной функции f и обозначается $f'(z)$

Замечание: Если этот предел существует, то он не зависит от того, как Δz стремится к 0.

Доказательство. **Шаг 1**
Рассмотрим $\Delta z = \Delta x \to 0$ $(\Delta y = 0)$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Шаг 2
Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y \to 0$ $(\Delta x = 0)$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для доказательства замечания нам необходимо, чтобы эти производные были равны, тогда:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{ - условие Коши-Римана}$$

□

Утв. 2 Если $\exists f'(z)$ в точке $z \in D$, то выполнено условие Коши-Римана, но обратное утверждение не верно.

Доказательство. Слева направо ($\Longrightarrow$) доказали в предыдущем замечании. Докажем справа налево ($\Longleftarrow$). Построим контрпример:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} \ z \neq 0 \\ 0 \ z = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если $f(0) = 0$, то $f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$

Пусть $x \to 0, y = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x} = u_x + iv_x = 0 \implies u_x = 0, v_x = 0$$

Пусть $y \to 0, x = 0$:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(iy)}{iy} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(iy)^4}}}{iy} = v_y + iu_y = 0 \implies v_y = 0, u_y = 0$$

То есть $u_x = v_y = 0, v_x = -u_y = 0$. Значит условие Коши-Римана выполнено в $z = 0$, но с другой стороны, $f(z)$ не то, что не дифференцируема, она разрывна в $z = 0$:

Пусть $z = (1+i)x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f((1+i)x)}{(1+i)x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(1+i)^4 x^4}}}{(1+i)x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{(1+i)x} = \infty$$

$\infty \neq 0 \implies$ функция $f(z)$ не непрерывна в 0 $\implies \nexists f'(0)$.

□

Утв. 3 Если функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в z и выполнено условие Коши-Римана, то $\exists f'(z)$.

Доказательство. Так как u, v - дифференцируемы в z, то

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) \end{aligned} \quad \text{где } |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{6}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\Delta z + \Delta \overline{z}\right), \ \Delta y = \frac{1}{2i}\left(\Delta z - \Delta \overline{z}\right) \tag{8}$$

Тогда перепишем (6):

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + o(\Delta z) \overset{\text{по (7) и } \Delta x, \Delta y}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta \overline{z} + o(\Delta z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \end{aligned}$$

Это выражение - формальная частная производная по z и $\overline{z}$. Подставив эти формулы в (8) получим

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta \overline{z} + o(|\Delta z|)$$

Заметим, что $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \iff$ выполнено условие Коши-Римана.Разделим предыдущее выражение на $\Delta z \neq 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

Поскольку $\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \underset{\Delta z \to 0}{\to} 0$, то

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$$

□

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) \implies \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \ \lim_{\Delta z \to 0} \eta = 0$$

Значит $\Delta w = \Delta f = f'(z)\Delta z + \eta \cdot \Delta z$, где $f'(z)\Delta z$ - линейная часть приращения функции относительная Δz, она же главная часть приращения, она же дифференциал функции.

Обозначим $dw = df(z) = f'(z)\Delta z$. В частности, если $f(z) = z$, то $df(z) = dz = \Delta z \implies df(z) = f'(z)dz$ или $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$.

Опр. 4. Функция $f(z)$ называется аналитичной в области D, если $\forall z \in D\ \exists f'(z)$.

Опр. 5. Функция $f(z)$ называется аналитичной в точке $z_0 \in D$ (D - область), если $f(z)$ аналитична в некоторой открытой окрестности точки z_0.

5 Риманова поверхность функции e^z, z^n. Обращение этих функций. Понятия многолистной функции, ветви многолистной функции, точки ветвления и точки отделимости многолистной функции.

Опр. 6. Однолистная функция - это биекция

Опр. 7. Областью однолистности функции называется максимальная по вложению область, в которой функцияо однолистна.

Исследуем функции e^z и z^n.

5.1 Степенная функция z^n

Рассмотрим значения $z_1 = |z_1| e^{i\varphi}, z_2 = |z_1| e^{i\varphi}$, $\varphi_1 \neq \varphi_2 + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$. Посмотрим на разность значений функции:

$$w_1 - w_2 = |z_1| (e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2})$$

Тогда равенство точек w_1, w_2 возможно лишь при условии, что $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi k}{n}$ ($k \neq ln$ с учетом $\varphi_2 \neq \varphi_1 + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$)
В таком случае, область однолистности - угол раствора $\frac{2\pi}{n}$.

Обратную функцию в области однолистности обозначим $z_k = w_k^{\frac{1}{n}}$. Тогда

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i \cdot \frac{arg(w) + 2\pi k}{n}},\ 0 < arg(w) < 2\pi$$

Рассматривать такие прообразы по отдельности не принято, поэтому z_k просто называют ветвями многозначной функции $z = w^{\frac{1}{n}}$. Говорят, что $w = z^n$ при $n > 1$ является многолистным. Каждая z_k аналитична в области однолистности, причем

$$\frac{\partial z_k}{\partial w} = \frac{1}{n z_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\left[(w^{\frac{1}{n}})_k\right]^{1-n} = \frac{1}{nw}(w^{\frac{1}{n}})_k$$

Заметим, что во взаимноодназачном соответствии находятся лишь $z = \infty$ и $z = 0$.

Точки $z = \infty, z = 0$ обладают следующим свойством: если выйти из фиксированной точки w_0 и обойти вокруг нуля против часовой стрелки m раз, то происходит переход от ветви z_k в w_0 к ветви z_{k+m} в этой же точке. С $z = \infty$ - так же, такие точки называются точками ветлвения.

5.2 Экспонента e^z

$$e^{z_1} = e^{z_2} \implies z_2 = z_1 + 2i\pi k$$

Значит область однолистности экспоненты - полоса ширины 2π параллельная действительной оси. При отображении $w = e^z$ переведет $Im(z) = c$ в луч $arg(w) = c$:

$$|w| = e^{Re(z)},\ arg(w) = Im(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Обратная функция: $z_k = (log(w))_k$.

$$z_k = (log(w))_k = log(|w|) + i \cdot arg(w) + 2i\pi k \text{ - логарифмическая функция Ln(z)}$$

Она бесконечнолистна, $w = 0$ - трансцендентная точка ветлвения, которая не принадлежит Римановой поверхности.

Опр. 8. Точка отделимости - точка комплексной плоскости, над которой многозначная функция имеет несколько различных, независимых значений, причем в окрестностях этих значений листы не слипаются.

Тогда для z^n и e^z точка отделимости - это $w \neq 0$,

6 ДЛО. Определение и основные свойства (круговое, симметрическое). Конформность ДЛО на всей комлексной плоскости.

Опр. 9. Дробно-линейным называют отображение вида $w = \frac{az+b}{cz+d}$.

Конформным отображением области D называют топологическое, т.е. взаимнооднозначное и взаимно непрерывное (обратное тоже непрерывно) отображение (оно же гомеоморфизм), при котором в каждой точке имеет место консерватизм углов (углы между кривыми при отображении сохраняются) и постоянство искажения. Искажение - изменение длины дуги кривой в коэффициент $K = |f'(z)|$ раз, постоянство означает, что в каждое точке области коэффициент одинаков.

Мы работаем с неыврожденными отображениями, т.е. $ad - bc \neq 0$. Из этого следует однолистность ДЛО на $\overline{\mathbb{C}}$:

Утв. Невырожденное ДЛО w однолистно на $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть z_1 и z_2 из $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $w_1 = w(z_1)$, $w_2 = w(z_2)$. Тогда

$$w_1 - w_2 = \frac{az_1+b}{cz_1+d} + \frac{az_2+b}{cz_2+d} = \frac{az_1+b}{cz_1+d} \cdot (cz_2+d) + \frac{az_2+b}{cz_2+d} \cdot (cz_1+d) =$$
$$= \frac{acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd - acz_1z_2 - adz_2 - bcz_1 - bd}{(cz_1+d)(cz_2+d)} =$$
$$= \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$$

Однолистность означает, что у разных прообразов разные образы. Если $z_1 \neq z_2$, то полученная дробь никогда не равна нулю и точки w_1 и w_2 - различны, а если они равны - то и $w_1 = w_2$. □

6.1 Основные свойства ДЛО

- Круговое свойство: обобщенные окружности переходят в обобщенные окружности.
  Рассмотрим на примере отображения $w = \frac{1}{z}$. Любая обобщенная окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ имеет вид

  $$A(x^2+y^2) + bx + b_1y + C = 0, \ z = x + iy$$

  $$Az \cdot \overline{z} + Bz + \overline{B} \cdot \overline{z} + C = 0$$
  $$A\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\overline{w}} + B\frac{1}{w} + \overline{B}\frac{1}{\overline{w}} + C = 0$$

  Умножим на $w\overline{w}$:

  $$A + B\overline{w} + \overline{B}w + Cw\overline{w} = 0$$

  Получили уравнение обобщенной окружности в (w).

- Симметричное: ДЛО сохраняет симметрию относительно обобщенной окружности.
  Справка:

  Симметрия относительно прямой: пусть $z = z_0 + te^{i\varphi}, \ t \in \mathbb{R}$, тогда если точка w симметрична относительно прямой, то она имеет вид $w = z_0 + e^{i2\varphi}(\overline{z} - \overline{z_0})$.
  Симметрия относительно окружности: точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности $|z - z_0| = R^2$, если выполнено $|z_1 - z_0| \cdot |z_0 - z_2| = R^2$ (эта формула следует из теоремы об отрезках касательной). Точку $w(z)$ симметричную для z относительно данной окружности можно найти как $w(z) = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}$

  Введем лемму:

Утв. Сначала покажем, что z_1, z_2 симметричны относительно $\Gamma = \{z \mid Az\overline{z}+Bz+\overline{B}\cdot\overline{z}+C=0\}$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$Az_1z_2 + Bz_1 + \overline{B}\overline{z_2} + C = 0$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $\Gamma = \{z \mid |z-z_0| = R\}$, т.е. является обычной окружностью. Тогда условие симметричности состоит в том, что $arg(z_1 - z_0)$ совпадает с $arg(z_2 - z_0)$, а $|z_1 - z_0|$ равен $\frac{R^2}{|z_2-z_0|}$, что эквивалентно $z_1 - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z_2-z_0}}$. Тогда

$$(z_1 - z_0)(\overline{z_2} - \overline{z_0}) = R^2$$

$$z_1\overline{z_2} - \overline{z_0}z_1 - z_0\overline{z_2} + z_0\overline{z_0} = R^2$$

Сравним это с уравнением $\Gamma : (z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0}) = R^2 \iff z\overline{z}-\overline{z_0}z-z_0\overline{z}+z_0\overline{z_0} = R^2$. Утверждение верно.

Рассмотрим случай, когда $\Gamma = \{Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$, т.е. прямая. Это эквивалентно уравнению $Re(Bz + \frac{1}{2}C = 0)$ (так как $Bz + \overline{B}\overline{z}$ удаляет мнимую часть и удваивает вещественную):

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0 \iff 2Re(Bz) + C = 0 \implies Re(Bz + \frac{1}{2}C) = 0$$

Деля коэффициенты на $|B|$ можно, не ограничивая общности, считать, что $|B| = 1$.

В частном случае $B = 1, C = 0$ утверждение очевидно:

$$z_1 + \overline{z_2} = 0 \iff Re(z) = 0$$

Общий случай можно свести к нему же. Зададим $w = Bz + \frac{1}{2}C = 0$ - композиция поворота, растяжения и сдвига, а значит сохраняет симметрию относительно прямой.
Точки z_1, z_2 симметричны относительно прямой $\Gamma = \{Re(Bz + \frac{1}{2}C) = 0\} \iff w_1 = Bz_1 + \frac{1}{2}C$ и $w_2 = Bz_2 + \frac{1}{2}C$ симметричны относительно $Re(w) = 0$. То есть $w_1 + \overline{w_2} = 0 \implies Bz_1 + \frac{1}{2}C + \overline{B}\overline{z_2} + \frac{1}{2}C = 0 \iff Bz_1 + \overline{B}\overline{z_2} = 0$. □

С помощью леммы докажем:

Утв. Дробно-линейные отображения сохраняют симметрию относительно обобщенных окружностей, то есть если точки z_1, z_2 симметричны относительно Γ, то $f(z_1), f(z_2)$ симметричны относительно $f(\Gamma)$.

Доказательство. Всякое ДЛО является композицией отображений вида $w = az + b$ и $w = \frac{1}{z}$:

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} =: A + \frac{B}{z+C}$$

Таким образом представили отображение w как композицию $f_1 \circ f_2 \circ f_3$, где

$$f_1 = A + Bz, \quad f_2 = \frac{1}{z}, \quad f_3 = z + C$$

Сохранение симметрии при сдвиге плоскости или повороте очевидно, поэтому надо проверить сохранение симметри при отображениях вида $w = \frac{1}{z}$ и $w = \lambda z, \lambda > 0$.
При отображении $w = \frac{1}{z}$ обобщенная окружность

$$\Gamma = \{Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$$

перейдет в обобщенную окружность

$$w(\Gamma) = \{A + B\overline{w} + \overline{B}w + Cw\overline{w} = 0\}$$

Поэтому если точки симметричны относительно Γ (выполнено $Az_1\overline{z_2} + Bz_1 + \overline{B}\overline{z_2} + C = 0$), то их образы $w(z_1) = \frac{1}{z_1}, w(z_2) = \frac{1}{z_2}$ удовлетворяют уравнению

$$A + B\overline{w_2} + \overline{B}w_1 + Cw_1\overline{w_2} = 0$$

Т.е. w_1, w_2 симметричны относительно $w(\Gamma)$. Симметрия при $w = \lambda z$ доказывается аналогично. $\square$

- Конформность: поскольку рассматриваем Невырожденные ДЛО - можем вычислить производную:

$$w'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \iff ad - bc \neq 0$$

Тогда производная не обращается в 0, а значит, нет точек, где нарушается конформность.

7 Формулы стереографичнеской проекции.

На комплексную плоскость положили сферу S радиуса $\frac{1}{2}$. Северный полюс сферы - вершина $N(0,0,1)$. Комплексному числу c, лежащему в плоскости комплексных чисел и имеющему координаты $(x, y, 0)$ ставится в соответствие точка, которая является точкой пересечения прямой Nc со сферой S. Зададим систему координат $O\xi\eta\zeta$ аналогично $Oxyz$, но O имеет координаты $(0, 0, \frac{1}{2})$.
Уравнение сферы S:

$$\xi^2 + \eta^2 + (\xi - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \tag{9}$$

Уравнение прямой Nc по двум точкам:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0 \tag{10}$$

Получаем набор **обратных формул стереографической проекции:** $x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta}, z = \frac{\xi+i\eta}{\zeta-1}$.
Отсюда найдем

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} \underset{\text{из } 10}{=} \frac{\zeta}{1-\zeta} \implies \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \tag{11}$$

Подставим 11 в уравнение 9 и получим прямые формулы стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \tag{12}$$

Из геометр. постреония стереографическая проекция взаимно однозначно отображает комплексную плокость на сферу $S \setminus \{N\}$. Дополним стер. проекцию по непрерывности:

$$P : \overline{\mathbb{C}} \overset{\text{на}}{\to} S \quad \text{где } \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{а } S \text{ называют сферой Римана.} \tag{13}$$

Опр. 10. Обобщенная окрестность на комплексной плоскости - это любая окружность (или прямая, рассмотренная как окружность бесконечного радиуса).

Свойства стереографической проекции:

1. Для любой обобщенной окружности $l \subset \overline{\mathbb{C}}$ ее образ $P(l) \subset S^2$ - это окружность.

   Доказательство. Пусть l - некая обобщ. окрестность на $\overline{\mathbb{C}}$, тогда ее уравнение:

   $$l : A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \text{ - окружность при } A \neq 0, \text{ прямая при } A = 0$$

   Подставим в него обратные формулы стереогр. проекции:

   $$A\frac{\zeta}{1-\zeta} + B\frac{\xi}{1-\zeta} + C\frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0 \tag{14}$$

   Поделим на $1 - \zeta$ и получим:

   $$\Pi\text{: } B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0 \tag{15}$$

   Но это уравнение некоторой плоскости Π в $\mathbb{R}^3$, кроме того, $P(l) \subset S^2$, значит для l выполнено уравнение сферы Римана $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$. Тогда $P(l) = S^2 \cap \Pi$ - пересечение сферы с плоскосью окружность. □

2. $\forall$ окружности $L \subset S^2$ $P^{-1}(L)$ является обобщенной окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$.

   Доказательство. Плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ такая, что $\Pi \cap S^2 = L$, а значит ее уравнение имеет вид (15). Разделим (15) на $1 - \zeta$, получим обобщенное уравнение прямой, подставим туда прямые формулы проекции и получим уравнение вида $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, а это - уравнение обобщенной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$. □

3. Стереографическая проекция сохраняет углы. То есть $\forall l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $l_1 \cap l_2 \neq$ и α - угол между ними, верно, что угол между $P(l_1)$ и $P(l_2)$ тоже равен α (угол между окружностями это угол между касательными в точке пересечения).

8 Теорема Коши о равенстве нулю интеграла по границе области для функции, аналитической в данной области.