

Вопросы к коллоквиуму по ТФКП, 3 семестр

Коваленко Никита, Тимошенко Иван, 24123

1 Вторая теорема Абеля

2 Теорема Коши-Адамара

Теорема Пусть дан ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ и пусть $l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}$. Тогда имеем три случая:

1. $l = 0 \implies$ данный ряд сходится $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. $l = \infty \implies$ данный ряд сходится только в $z = 0$.
3. $0 < l < \infty \implies$ ряд абсолютно сходится в круге $|z| < \frac{1}{l}$ и расходится при $|z| > \frac{1}{l}$. Случай $|z| = \frac{1}{l}$ требует проверки более сильными признаками.

Доказательство. Сразу заметим, что для $z = 0$ утверждение теоремы верно при любых коэффициентах C_k , а значит верно при $\forall l$. Разберем три случая, будем считать $z \neq 0$.

1. $l = 0, l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0$.
Тогда $\forall z \neq 0$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = \underbrace{|z|}_{\neq \infty} \cdot \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}}_{=0} = 0$$

Заметим, что мы рассматриваем $|C_k z^k|$, т.е. знакоположительный ряд.

Тогда можем применить радикальный признак Коши:

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = 0 < 1$, а значит ряд сходится для любых z .

2. $l = \infty$

Предположим, что ряд сходится при $z \neq 0$. Тогда в силу необходимого условия сходимости можем указать число $G > 1$, такое, что $|C_k z^k| < G$, или (применяя радикальный признак Коши):

$$\sqrt[k]{|C_k|} < \frac{G}{|z|} \quad (1)$$

Однако, из того, что $l = \infty$ очевидно, что $\sqrt[k]{|C_k|}$ не может быть ограничен, значит неравенство (1) невозможно (получили противоречие с предположением).

Таким образом ряд сходится в $z = 0$.

3. $0 < l < \infty$

Пусть $0 < |z| < l$. Из определения верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \sqrt[k]{|C_k|} < l + \varepsilon \quad \forall k > N$$

Выберем $\varepsilon = \frac{1-l|z|}{2|z|}$. Тогда:

$$\sqrt[k]{|C_k|} < l + \frac{1-l|z|}{2|z|} = \frac{1+l|z|}{2|z|} \implies |z| \cdot \sqrt[k]{|C_k|} < \frac{1+l|z|}{2} < 1 \text{ в силу } 0 < |z| < \frac{1}{l}$$

Можно переписать в виде $\sqrt[k]{|C_k z^k|} < 1$ - вновь применяем радикальный признак Коши и получаем абсолютную сходимость в результате.

□

Справка:

Теорема (радикальный признак Коши) Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n > 0$. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то

1. $l < 1$ - ряд сходится
2. $l > 1$ - ряд расходится
3. $l = 1$ - надо проверять точнее

Да, в теореме Коши-Адамара мы применяем радикальный признак Коши, хоть и ряд в теореме начинается с $k = 0$, а признак работает для рядов с нумерацией от $k = 1$. Однако сложение ряда с конечным число (нулевым членом) никак не влияет на его сходимость.

Утв. 1 Ссылка на необходимый признак сходимости звучит так:

Необходимый признак сходимости гласит, что общий член должен стремиться к нулю. Мы предполагаем, что ряд $\sum C_k z^k$ сходится, а значит последовательность его общих членов тоже стремится к 0. Любая сходящаяся последовательность ограничена, а значит можно выбрать некоторую константу $M > 0$, которая будет ее ограничивать. Тогда выберем нашу константу G как $\max(M, 2)$ мы получим, что $G > 1$.

3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Определение конформного отображения.

Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - аналитическая функция в области D и $f'(z) \neq 0$.
Пусть γ - гладкая кривая Жордана, заданная уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.
Если $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in [\alpha, \beta]$, то пусть $z'(t_0) \neq 0$.
Функция $w = f(z)$ отображает кривую γ в Γ , $w_0 = f(z_0) \in \Gamma$.
Уравнение кривой Γ :

$$\Gamma : w = w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \implies w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \quad (2)$$

$$\begin{cases} dz = z'(t)dt = [x'(t) + iy'(t)] dt \\ dw = w'(t)dt = [u'(t) + iv'(t)] dt \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = |z'(t)| dt \\ d\sigma = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2} dt = |w'(t)| dt \end{cases} \quad \text{- элементы длины кривой } \gamma(ds) \text{ и } \Gamma(d\sigma) \text{ соответственно} \quad (4)$$

Из (3) $\implies \frac{dw}{dz}|_{t=t_0} = \frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} \stackrel{(2)}{=} f'(z_0) \implies |f'(z_0)| = \frac{|w'(t_0)|}{|z'(t_0)|} = \frac{d\sigma_0}{ds_0}$, где $d\sigma_0$ и ds_0 - элементы длины кривых γ и Γ в точках $z_0 = z(t_0)$ и $w_0 = w(t_0) \implies |f'(z_0)|$ - коэффициент искажения элемента длины дуги в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Коэффициент искажения не зависит от направления кривой в этой точке, а лишь от f .

Будем говорить, что при отображении $\begin{cases} w = f(z) \\ f'(z_0) \neq 0 \end{cases}$ в z_0 имеет место **постоянство искажения**.

Из (2):

$$\implies \arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) \quad (5)$$

Из (5) $\arg f'(z_0)$ - угол поворота \forall кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Опр. 1. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в D . Если $f'(z) \neq 0$ для $z \in D$, то в z при отображении $w = f(z)$ имеет место **консерватизм углов**.

Опр. 2. Конформное отображение области D - это топологическое (гомеоморфное: взаимно-однозначное и непрерывное) отображение этой области, при котором в каждой точке $z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения.

Это определение с лекций, оно эквивалентно иному: отображение $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ конформно, если

1. f дифференцируема в каждой точке D .
2. $f'(z_0) \neq 0$ для всех $z_0 \in D$.

Это вытекает из определений постоянства искажения и консерватизма углов.

Из геометрического смысла $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$ делаем вывод:

Утв. Если функция $w = f(z)$ осуществляет отображение области D и $\forall z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения, то $w = f(z)$ аналитична в D и $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$.

Из него сразу вытекает:

Утв. Конформное отображение области D осуществляется однолистной в D аналитической функцией $w = f(z)$, $f'(z) \neq 0$.

4 Условие дифференцируемости Коши-Римана

Опр. 3. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой (монотонной), в точке $z \in D$, если

$$\exists! \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \text{ где } z + \Delta z \in D$$

Этот предел называется производной функции f и обозначается $f'(z)$

Замечание: Если этот предел существует, то он не зависит от того, как Δz стремится к 0.

Доказательство. Шаг 1

Рассмотрим $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta y = 0$):

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Шаг 2

Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ ($\Delta x = 0$):

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для доказательства замечания нам необходимо, чтобы эти производные были равны, тогда:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{ - условие Коши-Римана}$$

□

Утв. 2 Если $\exists f'(z)$ в точке $z \in D$, то выполнено условие Коши-Римана, но обратное утверждение не верно.

Доказательство. Слева направо (\implies) доказали в предыдущем замечании. Докажем справа налево (\impliedby). Построим контрпример:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если $f(0) = 0$, то $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$

Пусть $x \rightarrow 0, y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x} = u_x + iv_x = 0 \implies u_x = 0, v_x = 0$$

Пусть $y \rightarrow 0, x = 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(iy)}{iy} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(iy)^4}}}{iy} = v_y + iu_y = 0 \implies v_y = 0, u_y = 0$$

То есть $u_x = v_y = 0, v_x = -u_y = 0$. Значит условие Коши-Римана выполнено в $z = 0$, но с другой стороны, $f(z)$ не то, что не дифференцируема, она разрывна в $z = 0$:

Пусть $z = (1 + i)x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f((1 + i)x)}{(1 + i)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(1+i)^4 x^4}}}{(1 + i)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{(1 + i)x} = \infty$$

$\infty \neq 0 \implies$ функция $f(z)$ не непрерывна в 0 $\implies \nexists f'(0)$.

□

Утв. 3 Если функции $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в z и выполнено условие Коши-Римана, то $\exists f'(z)$.

Доказательство. Так как u, v - дифференцируемы в z , то

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|)\end{aligned}\quad \text{где } |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (6)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что

$$\Delta x = \frac{1}{2} (\Delta z + \Delta \bar{z}), \quad \Delta y = \frac{1}{2i} (\Delta z - \Delta \bar{z}) \quad (8)$$

Тогда перепишем (6):

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u + i \Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + o(\Delta z) \stackrel{\text{по (7)}}{=} \Delta x \frac{\partial f}{\partial z} + \Delta \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + o(\Delta z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}$$

Это выражение - формальная частная производная по z и \bar{z} . Подставив эти формулы в (8) получим

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|)$$

Заметим, что $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff$ выполнено условие Коши-Римана. Разделим предыдущее выражение на $\Delta z \neq 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

Поскольку $\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$, то

$$\exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$$

□

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) \implies \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta = 0$$

Значит $\Delta w = \Delta f = f'(z) \Delta z + \eta \cdot \Delta z$, где $f'(z) \Delta z$ - линейная часть приращения функции относительно Δz , она же главная часть приращения, она же дифференциал функции.

Обозначим $dw = df(z) = f'(z) \Delta z$. В частности, если $f(z) = z$, то $df(z) = dz = \Delta z \implies df(z) = f'(z) dz$ или $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$.

Опр. 4. Функция $f(z)$ называется аналитической в области D , если $\forall z \in D \exists f'(z)$.

Опр. 5. Функция $f(z)$ называется аналитической в точке $z_0 \in D$ (D - область), если $f(z)$ аналитична в некоторой открытой окрестности точки z_0 .

- 5 Риманова поверхность функции e^z, z^n . Обращение этих функций. Понятия многолистной функции, ветви многолистной функции, точки ветвления и точки отделимости многолистной функции.

6 ДЛО. Определение и основные свойства (круговое, симметрическое). Конформность ДЛО на всей комплексной плоскости.

Опр. 6. Дробно-линейным называют отображение вида $w = \frac{az+b}{cz+d}$.

Конформным отображением области D называют топологическое, т.е. взаимнооднозначное и взаимно непрерывное (обратное тоже непрерывно) отображение (оно же гомеоморфизм), при котором в каждой точке имеет место консерватизм углов (углы между кривыми при отображении сохраняются) и постоянство искажения. Искажение - изменение длины дуги кривой в коэффициент $K = |f'(z)|$ раз, постоянство означает, что в каждой точке области коэффициент одинаков.

Мы работаем с невырожденными отображениями, т.е. $ad - bc \neq 0$. Из этого следует однолистность ДЛО на $\bar{\mathbb{C}}$:

Утв. Невырожденное ДЛО w однолистно на $\bar{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть z_1 и z_2 из $\bar{\mathbb{C}}$. Тогда $w_1 = w(z_1)$, $w_2 = w(z_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} \cdot (cz_2 + d) - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \cdot (cz_1 + d) = \\ &= \frac{acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd - acz_1z_2 - adz_2 - bcz_1 - bd}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} = \\ &= \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \end{aligned}$$

Однолистность означает, что у разных прообразов разные образы. Если $z_1 \neq z_2$, то полученная дробь никогда не равна нулю и точки w_1 и w_2 - различны, а если они равны - то и $w_1 = w_2$. \square

6.1 Основные свойства ДЛО

- **Круговое свойство:** обобщенные окружности переходят в обобщенные окружности. Рассмотрим на примере отображения $w = \frac{1}{z}$. Любая обобщенная окружность на $\bar{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + bx + b_1y + C = 0, \quad z = x + iy$$

$$Az \cdot \bar{z} + Bz + \bar{B} \cdot \bar{z} + C = 0$$

$$A \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\bar{w}} + B \frac{1}{w} + \bar{B} \frac{1}{\bar{w}} + C = 0$$

Умножим на $w\bar{w}$:

$$A + B\bar{w} + \bar{B}w + Cw\bar{w} = 0$$

Получили уравнение обобщенной окружности в (\bar{w}) .

- **Симметрическое:** ДЛО сохраняет симметрию относительно обобщенной окружности.

Справка:

Симметрия относительно прямой: пусть $z = z_0 + te^{i\varphi}$, $t \in \mathbb{R}$, тогда если точка w симметрична относительно прямой, то она имеет вид $w = z_0 + e^{i2\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

Симметрия относительно окружности: точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности $|z - z_0| = R^2$, если выполнено $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$ (эта формула следует из теоремы об отрезках касательной). Точку $w(z)$ симметричную для z относительно данной окружности можно найти как $w(z) = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}$

Утв. Точки z_1, z_2 симметричны относительно обобщенной окружности $\Gamma = \{z \mid Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0\}$. Тогда w тогда и только тогда, когда $Az_1\bar{z}_2 + Bz_1 + \bar{B}\bar{z}_2 + C = 0$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $\Gamma = \{z \mid |z - z_0| = R\}$, т.е. является обычной окружностью. Тогда условие симметричности состоит в том, что $\arg(z_1 - z_0)$ совпадает с $\arg(z_2 - z_0)$, а $|z_1 - z_0|$ равен $\frac{R^2}{|z_2 - z_0|}$, что эквивалентно $z_1 - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z_2 - z_0}}$. Тогда

$$(z_1 - z_0)(\overline{z_2 - z_0}) = R^2$$

$$z_1 \overline{z_2} - \overline{z_0} z_1 - z_0 \overline{z_2} + z_0 \overline{z_0} = R^2$$

Сравним это с уравнением $\Gamma : (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = R^2 \iff z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} = R^2$. Утверждение верно.

Рассмотрим случай, когда $\Gamma = \{Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0\}$, т.е. прямая. Это эквивалентно уравнению $\operatorname{Re}(Bz + \frac{1}{2}C) = 0$ (так как $Bz + \overline{B}\overline{z}$ удаляет мнимую часть и удваивает вещественную):

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0 \iff 2\operatorname{Re}(Bz) + C = 0 \implies \operatorname{Re}(Bz + \frac{1}{2}C) = 0$$

Деля коэффициенты на $|B|$ можно, не ограничивая общности, считать, что $|B| = 1$.

В частном случае $B = 1, C = 0$ утверждение очевидно:

$$z_1 + \overline{z_2} = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = 0$$

Общий случай можно свести к нему же. Зададим $w = Bz + \frac{1}{2}C = 0$ - композиция поворота, растяжения и сдвига, а значит сохраняет симметрию относительно прямой.

Точки z_1, z_2 симметричны относительно прямой $\Gamma = \{\operatorname{Re}(Bz + \frac{1}{2}C) = 0\} \iff w_1 = Bz_1 + \frac{1}{2}C$ и $w_2 = Bz_2 + \frac{1}{2}C$ симметричны относительно $\operatorname{Re}(w) = 0$. То есть $w_1 + \overline{w_2} = 0 \implies Bz_1 + \frac{1}{2}C + \overline{B}\overline{z_2} + \frac{1}{2}C = 0 \iff Bz_1 + \overline{B}\overline{z_2} = 0$.

□

- Конформность: поскольку рассматриваем невырожденные ДЛЮ - можем вычислить производную:

$$w'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \iff ad - bc \neq 0$$

Тогда производная не обращается в 0, а значит, нет точек, где нарушается конформность.

7 Формулы стереографической проекции.

- 8 Теорема Коши о равенстве нулю интеграла по границе области для функции, аналитической в данной области.