Лекции по ТФКП, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Модели комплексных чисел

Введем стандартные понятия нужным образом:
$\mathbb{R}$ - множество точек на прямой.
$\mathbb{C}$ - расширение $\mathbb{R}$ с помощью одного из корней уравнения $z^2 = -1$: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{0\}$, с замыканием относительно сложения и умножения.

Теорема 1 (Основная теорема алгебры) Множество комплексных чисел ($\mathbb{C}$) алгебраически замкнуто (любой многочлен степени n, коэффициенты которого лежат в $\mathbb{C}$), имеет корни в $\mathbb{C}$ (с учетом кратности).

Замечание: Теорема верна и в частном случае многочлена, определенного над $\mathbb{R}$.

1.1 Стандартная модель комплексных чисел

Комплексное число z представляется парой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с операциями:

- $" + " : \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $" \cdot " : (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_2y_1 + x_1y_2)$

Замечание: Операции согласованы с операциями на $\mathbb{R}$.

Замечание: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \quad \mathbb{R} = \{(x, 0) \quad x \in \mathbb{R}\}$

В станд. модели $\begin{cases} 0 = (0, 0) \\ 1 = (1, 0) \end{cases}$

Опр. 1. Мнимая единица определена как пара $(0, 1)$.

Замечание: Некорректно определять мнимую единицу как корень уравнения $z^2 = -1$, т.к. $-i$ так же является корнем.

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$(-i^2) = (0, -1) \cdot (0, -1) = (-(-1) \cdot (-1), 0) = (-1, 0) = -1$$

Замечание: Запись $\sqrt{-1}$ тоже некорректна.

Утв. 1 На $\mathbb{C}$ нельзя ввести линейный порядок.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{C}$, и существует некий линейный порядок $<$.

$$\forall x \neq 0 \begin{cases} \text{либо} - \frac{x}{2} < \frac{x}{2} \text{ и } 0 = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \\ \text{либо} \frac{x}{2} < -\frac{x}{2} \text{ и } 0 > x \end{cases}$$

Тогда $\forall x \neq 0$ либо $x > 0$, либо $-x > 0$. Т.е. $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$. Но $-1 = i^2 < 0$ - противоречие. $\square$

1.2 Матричная модель

Комплексное число $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$" + " : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$"\cdot": \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

В матричной модели ноль (нейтральный элемент по сложению) представлен матрицей $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, единица (нейтральный по умножению) $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мнимая единица $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В стандартной модели произвольное комплексное число $z = (x, y)$ имеет стандартную запись $z = x + iy$, где $\begin{cases} x - \text{вещественная часть} \\ y = \text{мнимая часть} \end{cases}$

Действия с комплексными числами:

1. Сравнение (проверка равенства):

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ и } b = d$$

.

2. Сложение:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

3. Умножение:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

4. Деление:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac - bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

1.3 Геометрическая модель

Комплексное число представлено точкой с координатами (x, y) на плоскости.
Операции:

- $"+"$: действует как сложение векторов (покоординатно).
- $"\cdot" : z_3 = z_1z_2 \iff \begin{cases} |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \\ arg(z_3) = arg(z_1) + arg(z_2) \end{cases}$

  где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad arg(z)$ задает угол между $\vec{z}$ и Ox (определяется с точностью до периода).

Аргумент комплексного числа $Arg(z)$ - угол φ с точностью до периода 2π. **Главное значение аргумента** $arg(z)$ - φ в промежутке $[0; 2\pi]$.

Комплексно сопряженное к $z = x + iy$ это $\overline{z} = x - iy$.

$$|z| = |\overline{z}|, \quad arg(z) = -arg(\overline{z}), \quad Re(z) = Re(\overline{z}), \quad Im(z) = -Im(\overline{z})$$

$$\overline{z} \cdot z = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Законы де Моргана:

- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Неравенство треугольника:

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \end{cases} \implies ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.4 Стереографическая проекция

На комплексную плоскость положили сферу S радиуса $\frac{1}{2}$. Северный полюс сферы - вершина $N(0;0;1)$. Комплексному числу c, лежащему в плоскости комплексных чисел и имеющему координаты $(x,y,0)$ ставится в соответствие точка, которая является точкой пересечения прямой Nc со сферой S. Зададим систему координат $O\xi\eta\zeta$ аналогично $Oxyz$, но O имеет координаты $(0,0,\frac{1}{2})$.
Уравнение сферы S:

$$\xi^2+\eta^2+(\xi-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2 \tag{1}$$

Уравнение прямой Nc по двум точкам:

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta-1}{-1} \iff \xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0 \tag{2}$$

Получаем набор **обратных формул стереографической проекции:** $x=\frac{\xi}{1-\zeta}, y=\frac{\eta}{1-\zeta}, z=\frac{\xi+i\eta}{\zeta-1}$.
Отсюда найдем

$$|z|^2=z\cdot\overline{z}=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}\underset{\text{из 2}}{=}\frac{\zeta}{1-\zeta} \implies \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2} \tag{3}$$

Подставим 3 в уравнение 1 и получим прямые формулы стереографической проекции:

$$\xi=\frac{x}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2} \tag{4}$$

Из геометр. построения стереографическая проекция взаимно однозначно отображает комплексную плокость на сферу $S\setminus\{N\}$. Дополним стер. проекцию по непрерывности:

$$P:\overline{\mathbb{C}}\overset{\text{на}}{\to}S \quad \text{где } \overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}, \text{а } S \text{ называют сферой Римана.} \tag{5}$$

Опр. 2. Обобщенная окрестность на комплексной плоскости - это любая окружность (или прямая, рассмотренная как окружность бесконечного радиуса).

Свойства стереографической проекции:

1. Для любой обобщенной окружности $l\subset\overline{\mathbb{C}}$ ее образ $P(l)\subset S^2$ - это окружность.

   Доказательство. Пусть l - некая обобщ. окрестность на $\overline{\mathbb{C}}$, тогда ее уравнение:

   $$l: A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \text{ - окружность при } A\neq 0, \text{ прямая при } A=0$$

   Подставим в него обратные формулы стереогр. проекции:

   $$A\frac{\zeta}{1-\zeta}+B\frac{\xi}{1-\zeta}+C\frac{\eta}{1-\zeta}+D=0 \tag{6}$$

   Поделим на $1-\zeta$ и получим:

   $$\Pi\text{: } B\xi+C\eta+(A-D)\zeta+D=0 \tag{7}$$

   Но это уравнение некоторой плоскости Π в $\mathbb{R}^3$, кроме того, $P(l)\subset S^2$, значит для l выполнено уравнение сферы Римана $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta=0$. Тогда $P(l)=S^2\cap\Pi$ - пересечение сферы с плоскосью окружность. ☐

2. $\forall$ окружности $L\subset S^2$ $P^{-1}(L)$ является обобщенной окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$.

   Доказательство. Плоскость $\Pi\subset\mathbb{R}^3$ такая, что $\Pi\cap S^2=L$, а значит ее уравнение имеет вид (7). Разделим (7) на $1-\zeta$, получим обобщенное уравнение прямой, подставим туда прямые формулы проекции и получим уравнение вида $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$, а это - уравнение обобщенной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$. ☐

3. Стереографическая проекция сохраняет углы. То есть $\forall l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $l_1 \cap l_2 \neq$ и α - угол между ними, верно, что угол между $P(l_1)$ и $P(l_2)$ тоже равен α (угол между окружностями это угол между касательными в точке пересечения).

Опр. 3. Кривая - это функция (или ее образ) $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Параметром кривой g называют $t \in [a, b]$.

$$\overrightarrow{v} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t}}{\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|} = \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|}, \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|}\right) \quad \overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}}{\left|\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right|}$$

Натуральный параметр на кривой g это $l \subset [0, L]$ (L - длина g), такой, что $\forall l$ выполнено $\frac{\partial g}{\partial l} = 1$. Набор $\{v, n\}$ называется базис Френе, для него выполена теорема Френе. Уравнения Френе:

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(l) \\ -k(l) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}, \quad k(l) \text{ называется кривизной } g \subset \mathbb{R}^2$$

1.5 Виды записи

Стандартная запись $z = x + iy$.
Пусть $r = |z|$, $\varphi = arg(z)$.

Опр. 4. Тригонометрическая запись комплексного числа:

$$\begin{cases} Re(z) = x = r \cdot \cos(\varphi) \\ Im(z) = y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \implies z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Опр. 5. Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \implies z = re^{i\varphi}$$

Тогда для натурального n:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Пусть $z \neq 0 \implies r = |z| > 0$. тогда $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}$, где $k = 0 \dots n-1$. Отсюда же получается формула Муавра для корней степени n из $z \neq 0$:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}))$$

Замечание: $\exists n$ различных корней степени n из комплексного числа $z \neq 0$.

$$z_0, z_1, \dots z_{n-1} \in \text{ окружности радиуса } r^{\frac{1}{n}} \text{ с центром в } (0,0)$$

2 Множества на $\overline{\mathbb{C}}$

Опр. 6.

- δ - окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C(\delta, z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}, \delta > 0$.
- Проколотая окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C^*(\delta, z_0) = C(\delta, z_0) \backslash \{z_0\}$
- Окрестность точки $\{\infty\}$ - множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \delta\}$
- Точка z - изолированная точка множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 : C(\delta, z_0) \cap E = \{z_0\}$

Опр. 7. Точка z называется предельной точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\forall \delta > 0 \; C^*(\delta, z) \cap E \neq \varnothing$

Опр. 8. Точка z называется внутренней точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 \; C(\delta, z) \subset E$

Опр. 9. Точка z называется внешней точкой множества $E \subset \mathbb{C}$, если $\exists \delta > 0 \; C(\delta, z) \cap E = \varnothing$

Опр. 10. Точка z называется граничной точкой E, если

$$\forall \delta > 0 \begin{cases} C(\delta, z) \cap E \neq \varnothing \\ C(\delta, z) \backslash E \neq \varnothing \end{cases}$$

Замечание: Если граничная точка $z \notin E$, то она является предельной для E.

Опр. 11. Граница E - это совокупность всех граничных точек, обозначается ∂E.

Опр. 12. Множестов называется ограниченным, если $\exists M \; (0 < M < \infty)$ - число, такое, что $\forall z \in E \; |z| < M$

Опр. 13. Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки (или их нет).

Опр. 14. Множество E называется открытым, если $\forall z \in E$ z является внутренней точкой для E, то есть $\forall z \in E \; \exists \delta > 0 : \; C(\delta, z) \subset E$

Опр. 15. Замыкание множества E это $\overline{E} = E \cup \partial E$.

Опр. 16. Диаметр множества $d(E) = \sup\limits_{z, \xi \in E} |z - \xi|$

Опр. 17. Расстоянием между множествами E и G называется $D(E, G) = \inf\limits_{z \in E, \zeta \in G} |z - \zeta|$

Опр. 18. Множество E называется связным, если его нельзя представить как $E = A \cup B, \; A, B \subset E$, таких, что

1. $A, B \neq \varnothing$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. A и B не содержат предельных точек друг друга.

Опр. 19. Множество E называется линейно связным, если $\forall z_1, z_2 \in E \; \exists$ непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \to E$ такая, что $\varphi(0) = z_1, \; \varphi(1) = z_2$

Опр. 20. Областью называется открытое связное множество.

Опр. 21. Компонента множества E - $\forall$ максимальное по включению связное подмножество E. Область $E \neq \overline{\mathbb{C}}$ n-связная, если граница ∂E состоит из n компонент ($\overline{\mathbb{C}}$ считаем 1-связным).

Утв. 2 $\forall$ множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ граница ∂E является замкнутым множеством.

Доказательство. Доказывается от противного:
Допустим, $\exists$ предельная точка z_0 для ∂E: $z_0 \notin \partial E$. □

Теорема 2 (Принцип Больцано-Вейерштрасса) У любого бесконечного множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ $\exists$ хотя бы одна предельная точка.

Теорема 3 (Лемма Гейне-Бореля) Из бесконечного открытого покрытия замкнутого множества точек на $\overline{\mathbb{C}}$ можно выделить конечное подпокрытие.

Следствие: На $\overline{\mathbb{C}}$ любое замкнутое и ограниченное множество является компактом.

3 Предельные ряды комплексных чисел

Опр. 22. Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n,\ n \in \mathbb{N}$ называется сходящейся к пределу $\alpha = a + ib$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |z_n - \alpha| < \varepsilon\ \forall n > N$$

Обозначается $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$

Следствие: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$

Попробуем перенести теорию последовательностей вещественных числе на комплексные числа:

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \implies \begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N_1 \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N_2 \end{cases} \implies |z_n - \alpha| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$$

Значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max(N_1, N_2)\ \ |z_n - \alpha| < \varepsilon\ \forall n > N$

Таким образом $\begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \implies \exists \lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ Это позволяет свести теорию последовательностей $\{z_n\}$ комплексных чисел к $\mathbb{R}$, то есть все теоремы о сходимости вещественных последовательностей переносятся на комплексные числа.

Теорема (Критерий Коши)

$$\text{Последовательность } \{z_n\} \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon \text{ выполнено } \forall n, m > N$$

.

Опр. 23. Последовательность $\{z_n\}$ сходится к ∞ ($\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$) если

$$\forall R > 0\ \exists N\ \ |z_n| > R \text{ выполнено для } \forall n > N$$

$$\text{При } z_n \ne 0\ \lim_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$$

3.1 Ряды комплексных чисел

Если у знака суммы ряда не указаны границы - считать, что слагаемые суммируются по индексу k, k пробегает набор от 1 (иногда 0) до ∞

Опр. 24. Ряд комплексных чисел $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится (расходится), если сходится (расходится) последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Теорема (Критерий Коши сходимости ряда)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{ сходится } \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \begin{cases} \forall n > N \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$$

Опр. 25. Ряд α_k сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$. Но поскольку $|\sum_{k=1}^{m} \alpha_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{n+k}|$, то из абсолютной сходимости ряда следует общая сходимость.

Утв. 3 Член ряда α_k представим в виде $a_k + ib_k$. Тогда:

$$\begin{cases} |a_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \\ |b_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \end{cases}$$

Значит, если $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ абсолютно сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже абсолютно сходятся. В свою очередь, из абсолютной сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует абсолютная сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Опр. 26. Произведение двух сходящихся рядов сходится к произведению их сумм.

Стандартные разложения функций от комплексных чисел:

1. $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$
2. $\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$
3. $\cos(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!}$
4. $e^{i\alpha} = \sum \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!} + i \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

Пусть $\mid \alpha \mid = R,\ \arg(\alpha) = \varphi$. Тогда:

$$\alpha = R \cdot e^{i \cdot \arg(\alpha)} = R(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

И поскольку можем представить $\alpha = a + ib$:

$$e^{\alpha} = e^{a} \cdot (\cos(b) + i\sin(b)), \quad |e^{\alpha}| = e^{a},\ \arg(e^{\alpha}) = b$$

Поэтому $e^{2\pi k \cdot i} = 1$

4 Функции комплексного переменного

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ и $f : E \to \mathbb{C}$ (т.е. $z \to f(z)$). Если f - инъекция, т.е. $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, то говорят, что f - однослойна. Если f действует из E в $f(E)$ (то есть еще и сюръективна, а значит - биекция), то $\exists f^{-1} : f(E) \to E$.

Опр. 27. Если z_0 - предельная точка множества E и $\lim_{z \to z_0} f(x) = f(z_0)$, то $f(z)$ непрерывна в z_0.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Функция $f(z)$ представима в виде $u(z)+iv(z)$ (мнимая и комплексная части), а значит f непрерывна на $E \iff u(z), v(z), |f(z)|$ - непрерывны на E.

Если E - компактно, а f - непрерывно, то:

1. $|f(z)|$ достигает max и min на E
2. $f(z)$ равномерно непрерывна на E по т. Кантора

Опр. 28. Функция $\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ - задает кривую на комплексной плоскости, если $x(t), y(t)$ - непрерывны.

- Если $\gamma(t)$ инъективна (за исключением $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$), то γ - жорданова кривая.
- $\gamma(t)$ называется гладкой, если $x(t), y(t)$ непрерывно диффереciируемы и $\forall t \ \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$

Теорема (о стандартном радиусе) Пусть $\Gamma(t), t \in [\alpha, \beta]$ - гладкая замкнутая жорданова кривая. Тогда

$$\forall \theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) \ \exists \delta_0 \text{ такаая, что}$$

1. Окружность $|z - z_0| = \underset{z_0 \in \Gamma}{R} \leq \delta_0$ пересекает Γ строго в двух точках
2. При переходе от $z_1 \in \Gamma$ к $z_2 \in \Gamma$, где $|z_2 - z_1| < \delta_0$ угол наклона касательной меняется меньше, чем θ_0
3. Если $|z - z_0| < \delta_0$ то $dS(s) < \frac{dr}{d\cos(\theta_0)}$

4.1 Функциональные ряды

Опр. 29. Ряд $\sum f_n(z)$ сходится на $E \subset \mathbb{C}$, если он сходится $\forall z \in E$. Сходится равномерно на E, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid \forall n > N \ \forall z \ \ |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Или ряд $\sum f_n(z)$ сходится равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall m \forall z \left| \sum_{k=0}^{m} f_{n+k}(z) \right| < \varepsilon$$

Теорема (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса) Если $\forall z \in E$ каждый элемент ряда, начиная с некоторого номера n_0 удовлетворяет неравенству

$$|f_k(z)| \leq \alpha_k, \ k \geq n_0 \tag{8}$$

и числовой ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то Функциональный ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно на E.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^{m} \alpha_{n+k} < \varepsilon \quad \forall n > N, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z) \right| \le \sum_{k=1}^{m} |f_{n+k}(z)| \overset{\text{по нер-ву 8}}{\le} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{n+k} < \varepsilon$$

Следовательно, по критерию Коши $\sum f_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно. □

Теорема Сумма $S(z) = \sum f_k(z)$ равномерно сходящегося ряда непрерывных на E функций $f_k(z)$ сама непрерывна на E.

Доказательство. Пусть $z_0 \in E$ - произвольная точка. Тогда для $z \in E$:

$$|S(z) - S(z_0)| \le |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)|$$

По определению равномерной сходимости ряда $\sum f_k(z)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \, |S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{и} \ |S_N(z_0) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Конечная сумма $S_N(z) = \sum_{k=1}^{N} f_k(z)$ непрерывных на E функций $f_k(z)$ - сама непрерывна на E. Тогда по определению непрерывности функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |z - z_0| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

А значит $|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon \implies$ функция $S(z)$ непрерывна в z_0. В силу произвольности выбора $z_0 \in E$ $S(z)$ непрерывна на E. □

Опр. 30. Бесконечная сумма вида $\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot (z - z_0)^k$ называется степенным рядом, в котором C_k - коэффициенты степенного ряда.
Поскольку линейная замена $t = z - z_0$ превращает этот ряд в более удобную форму $\sum C_k t^k$ - то будем рассматривать ряды именно такого вида.

Теорема (Коши-Адамара) Пусть дан ряд $\sum C_k z^k$ и $l = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то данный ряд сходится на всей комплексной плоскости ($\forall z \in \mathbb{C}$).
2. Если $l = \infty$, то ряд сходится при $z = 0$ и расходится $\forall z \ne 0$.
3. Если $0 < l < \infty$, то ряд абсолютно сходится в круге $|z| < \frac{1}{l}$ и расходится при $|z| > \frac{1}{l}$.

Число $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|}}$ называется радиусом сходимости степенного ряда, а круг $|z - z_0| < R$ называется кругом сходимости.

Доказательство. В точке $z = 0$ утверждение верно при $\forall C_k \implies \forall l$ ряд сходится, так как ряд сходится в $z = 0$. Пусть теперь $z \ne 0$.

Случай 1: $l = 0$.
То есть $l = \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0$. Значит:

$$\forall z \ne \infty \ \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = |z| \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0 \text{ так как } |z| \ne \infty, \text{ а предел равен } 0$$

Тогда по радикальному признаку Коши для рядов с положительными членами ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \left|C_k z^k\right|$ сходится $\forall z \ne \infty$, т.е. ряд $\sum C_k z^k$ сходится на $\mathbb{C}$.

Случай 2: $l = \infty$.

Если бы ряд сходился в точке $z \neq 0$, то в силу необходимого условия сходимости $\exists M > 1$ $\left|C_k z^k\right| < M$ или $\sqrt[k]{|C_k|} < \frac{M}{|z|}$, что противоречит условию $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \infty$.

Случай 3: $0 < l < \infty$

Пусть $0 < |z| < \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \sqrt[k]{|C_k|} < \varepsilon \ \forall k > N$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1-l|z|}{2|z|} \implies \sqrt[k]{|C_k|} < l + \frac{1-l|z|}{2|z|} = \frac{1+l|z|}{2|z|}$. Тогда:

$$|z| \sqrt[k]{|C_k|} < \frac{1 + l\,|z|}{2} = q < 1$$

$$\left|C_k z^k\right| < q^k, \ k > N$$

Значит ряд сходится абсолютно при $|z| < \frac{1}{l}$.
Пусть $|z| > \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ бесконечное множество индексов } k_n, \ n = 1 \ldots \infty \text{ таких, что } \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > l - \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = \frac{l|z|-1}{|z|}$. Тогда $\sqrt[k_n]{C_{k_n}} > \frac{l|z|-l|z|+1}{|z|} \implies |z| \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > 1$. Значит ряд расходится по радикальному признаку Коши при $|z| > \frac{1}{l}$. □

Теорема 4 (Первая теорема Абеля) Если степенной ряд $\sum C_k z^k$ сходится в некоторой $z_0 \in \mathbb{C}$ такой, что $z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в круге $|z| < |z_0|$.

Доказательство. По теореме Коши-Адамара ряд сходится абсолютно в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Значит $|z_0| \leq R \implies$ ряд сходится абсолютно при $|z| < |z_0|$. □

Напомню контекст: ряд $(1) \sum C_k z^k, \ R = \frac{1}{\overline{lim}_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|}$.

Замечание: Степенной ряд не обязательно сходится равномерно в круге $|z| < R$.

Определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \, |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \ \forall n > N, \forall z \in E$$

Доказательство. Для доказательства этого замечания сначала докажем формулы геометрической прогрессии:

Утв.

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Доказательство.

$$S_n + q^{n+1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} = 1 + q * S_n$$

Значит $S_n = \frac{1-q^n+1}{1-q}$ □

Утв.

$$|q| < 1 \implies S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-q}(1-q^{n+1}) = \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} 1-q^{n+1} = \frac{1}{1-q}$$

□

По первому утверждению:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \implies \forall\in\mathbb{N} S(z)-S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z} \implies \sup_{|z|<1}|S(z)-S_n(z)| = \sup_{|z|<1}\frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = \infty$$

□

Замечание: Степенной ряд равномерно сходится в любом замкнутом круге $|z| < r, \forall r < R$ (может быть 0).

Доказательство. Из условия теоремы ряд мажорируется рядом $\sum |C_k|\, r^k$, который сходится по радикальному признаку Коши. Значит степенной ряд равномерно сходится по признаку Вейерштрасса. □

Замечание: На границе круга сходимости (при $|z| = R$) степенной ряд может:

- расходится во всех точках (пример $\sum z^k$)
- сходится в некоторых точках границы и расходится в других (например, $\sum \frac{z^k}{k}$)
- сходиться во всех точках границы (например, $\sum \frac{z^k}{k^2}$)

Теорема 5 (Вторая теорема Абеля) Если степенной ряд с радиусом сходимости $R\in(0,\infty)$ сходится в точке z_0, такой, что $|z_0| = R$, то сумма $S(z)\to S(z_0)$ при $z\to z_0$ изнутри круга по любой некасательной траектории.

Возвращаясь к формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

Степенные ряды для $e^z, \cos(z), \sin(z)$ сходятся равномерно в $\forall$ круге $|z| < R$, где $0 < R < \infty \implies$ эти функции непрерывны на $\mathbb{C}$.

Утв. e^z - периодичная функция с периодом $2\pi ki$

Доказательство.

$$e^z\cdot e^t = e^{z+t} \implies e^{z+2\pi ki} = e^z\cdot e^{2\pi ki} = e^z(\cos(2\pi ki) + i\sin(2\pi ki)), k\in\mathbb{Z}$$

□

По формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) \tag{9}$$

$$e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z) \tag{10}$$

$$(9)+(10): e^{iz}+e^{-iz} = 2\cos(z) \implies \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{iz}}{2} \tag{11}$$

$$(9)-(10): e^{iz}-e^{-iz} = 2i\sin(z) \implies \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{12}$$

То есть формулы тригонометрии остаются в силе.

Нули функции $\sin(z)$: Из (12):

$$\sin(z) = 0 \implies e^{iz} - e^{-iz} = 0 \implies e^{2iz} - 1 = 0 \implies e^{2iz} = e^{2\pi k i}, k \in \mathbb{Z}$$

Значит нули функции $\sin(z)$ имеют вид $z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ Аналогично нули функции $\cos(z)$ имеют вид $z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Замечание: Функции $\sin(z)$ и $\cos(z)$ не ограничены на $\mathbb{C}$

Доказательство. z представимо в виде $x+iy$. Из (11):$2\cos(z) = e^{iz}+e^{-iz}$. Мы знаем, что $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$, значит:

$$|2\cos(z)|^2 = (e^{iz} + e^{-iz}) \cdot (e^{i\overline{z}} + e^{-i\overline{z}}) = e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x) \underset{y\to\infty}{\to} \infty$$

$\square$

Опр. 31.

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \cosh(iz) = \cos(iz)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ \sinh(iz) = i\sin(iz)$$

5 Аналитические функции

Пусть $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $z = x + iy$ - функция, определенная в области $D \in \mathbb{C}$.

Опр. 32. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой (моногенной), в точке $z \in D$, если

$$\exists! \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \text{ где } z + \Delta z \in D$$

Этот предел называется производной функции f и обозначается $f'(z)$

Замечание: Если этот предел существует, то он не зависит от того, как Δz стремится к 0.

Доказательство. **Шаг 1**
Рассмотрим $\Delta z = \Delta x \to 0$ $(\Delta y = 0)$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Шаг 2
Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y \to 0$ $(\Delta x = 0)$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для доказательства замечания нам необходимо, чтобы эти производные были равны, тогда:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{ - условие Коши-Римана}$$

□

Утв. 4 Если $\exists f'(z)$ в точке $z \in D$, то выполнено условие Коши-Римана, но обратное утверждение не верно.

Доказательство. Слева направо ($\Longrightarrow$) доказали в предыдущем замечании. Докажем справа налево ($\Longleftarrow$). Построим контрпример:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} \; z \neq 0 \\ 0 \; z = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если $f(0) = 0$, то $f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z}$

Пусть $x \to 0, y = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x} = u_x + iv_x = 0 \implies u_x = 0, v_x = 0$$

Пусть $y \to 0, x = 0$:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(iy)}{iy} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(iy)^4}}}{iy} = v_y + iu_y = 0 \implies v_y = 0, u_y = 0$$

То есть $u_x = v_y = 0, v_x = -u_y = 0$. Значит условие Коши-Римана выполнено в $z = 0$, но с другой стороны, $f(z)$ не то, что не дифференцируема, она разрывна в $z = 0$:

Пусть $z = (1+i)x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f((1+i)x)}{(1+i)x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(1+i)^4 x^4}}}{(1+i)x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{(1+i)x} = \infty$$

$\infty \neq 0 \implies$ функция $f(z)$ не непрерывна в 0 $\implies \nexists f'(0)$.

□

Утв. 5 Если функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в z и выполнено условие Коши-Римана, то $\exists f'(z)$.

Доказательство. Так как u, v - дифференцируемы в z, то

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) \end{aligned} \quad \text{где } |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{13}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что

$$\Delta x = \frac{1}{2}\left(\Delta z + \Delta\overline{z}\right),\ \Delta y = \frac{1}{2i}\left(\Delta z - \Delta\overline{z}\right) \tag{15}$$

Тогда перепишем (13):

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + o(\Delta z) \overset{\text{по (14) и } \Delta x, \Delta y}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta\overline{z} + o(\Delta z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \end{aligned}$$

Это выражение - формальная частная производная по z и $\overline{z}$. Подставив эти формулы в (15) получим

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta\overline{z} + o(|\Delta z|)$$

Заметим, что $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \iff$ выполнено условие Коши-Римана.Разделим предыдущее выражение на $\Delta z \neq 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

Поскольку $\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \underset{\Delta z \to 0}{\to} 0$, то

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$$

$\square$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) \implies \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \eta,\ \lim_{\Delta z \to 0} \eta = 0$$

Значит $\Delta w = \Delta f = f'(z)\Delta z + \eta \cdot \Delta z$, где $f'(z)\Delta z$ - линейная часть приращения функции относительная Δz, она же главная часть приращения, она же дифференциал функции.

Обозначим $dw = df(z) = f'(z)\Delta z$. В частности, если $f(z) = z$, то $df(z) = dz = \Delta z \implies df(z) = f'(z)dz$ или $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$.

Опр. 33. Функция $f(z)$ называется аналитичной в области D, если $\forall z \in D\ \exists f'(z)$.

Опр. 34. Функция $f(z)$ называется аналитичной в точке $z_0 \in D$ (D - область), если $f(z)$ аналитична в некоторой открытой окрестности точки z_0.

Теорема Сумма степенного ряда $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k$ аналитична в круге его сходимости $|z| < R$, причем $S'(z) = \sum kC_k z^{k-1}$.

Доказательство. Пусть ряд

$$S_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kC_k z^{k-1} \tag{16}$$

Заметим, что радиус сходимости ряда $S_0'(z)$ тоже равен R:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|kC_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim} \sqrt[k]{|C_k|} = R \text{ - по теореме Коши-Адамара}$$

$$S_0(0) = C_1;\ S_0(z) = \sum kC_k z^{k-1} = \frac{1}{z} \sum kC_k z^k$$

Заметим, что

$$k = (1 + (k^{\frac{1}{k}} - 1))^k = 1 + k(k^{\frac{1}{k}} - 1) + \frac{k(k-1)}{2}(k^{\frac{1}{k}} - 1)^2 + \ldots + (k^{\frac{1}{k}} - 1)^k \implies k > \frac{k(k-1)}{2}(k^{\frac{1}{k}} - 1)^2$$

$$\implies \left|k^2 - 1\right| < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{k-1}}} < \varepsilon$$

Пусть z - произвольная точка круга $|z| < R$ и $\Delta z : |z + \Delta z| < R$.

$$\left|\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\right| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\left|\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\right| \leq \left|\sum \left[\frac{C_k(z+\Delta z)^k - C_k z^k}{\Delta z} - kC_k z^k\right]\right| = \left|\sum C_k \left[\frac{(z+\Delta z)^k}{\Delta z}\right]\right| \tag{17}$$

Заметим, что первое слагаемое можно расписать как

$$\frac{(z+\Delta z)^k}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)^{k-1}(z+\Delta z)}{\Delta z} =$$
$$= (z+\Delta z)^{k-1} + \frac{z(z+\Delta z)^{k-1}}{\Delta z} \overset{\text{так же}}{=} (z+\Delta z)^{k-1} + z(z+\Delta z)^{k-2} + \ldots + z^{k-1} + \frac{z^k}{\Delta z} \tag{18}$$

Тогда второе слагаемое из (17) сокращается с последним слагаемым (18) и получаем

$$\left|\sum C_k \left[(z+\Delta z)^{k-1} + z(z+\Delta z)^{k-2} + \ldots + z^{k-1} - kz^{k-1}\right]\right| \overset{\text{дважды нер-во } \Delta\text{-ника}}{\leq}$$
$$\leq \left|\sum_{k=1}^{N} C_k \left[(z+\Delta z)^{k-1} + z(z+\Delta z)^{k-2} + \ldots + z^{k-1} - kz^{k-1}\right]\right| +$$
$$\left|\sum_{k=N-1}^{\infty} C_k \left[(z+\Delta z)^{k-1} + z(z+\Delta z)^{k-2} + \ldots + z^{k-1}\right]\right| + \left|\sum_{k=N-1}^{\infty} kC_k z^{k-1}\right|$$

Возьмем число $r : 0 < r < R$ и $|z + \Delta z| < r$. Из аболютной сходимости ряда (16) в круге $|z| < R \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(r, \varepsilon)$ Введем новый ряд

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k\left|C_k\right| r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

При таком N второй и третий модули $< \frac{\varepsilon}{3}$ по критерию Коши абсолютной сходимости ряда (16). А в первом модуле конечная сумма, которая стремится к 0 при $\Delta z \to 0$, то есть по определению предела, первый модуль тоже $< \frac{\varepsilon}{3}$ □

Замечание: Сумма степенного ряда $S'(z) = \sum kC_k z^{k-1}$ тоже аналитична в круге $|z| < R$, причем

$$S''(z) = \sum k(k-1)C_k z^{k-2}$$

$$S^{(n)} = \sum k(k-1)\dots(k-n+1)C_k z^{k-n} \overset{\text{при } z=0}{\Longrightarrow} C_n = \frac{S^{(n)}(z)}{n!},\ n = 1, 2, \dots$$

6 Конформные отображения

Рассмотрим функцию $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, она аналитична в области D, причем $z_o \in D, f'(z_0) \neq 0$.

$$\text{Условие Коши-Римана: } \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Якобиан $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = \left|f'(z)^2\right| \overset{f'(z_0)\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{D(u,v)}{D(x,y)}|_{z=z_0} \neq 0.$

Значит по теореме о неявной функции система $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определяет однозначные непрерывные функции $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, значения которых лежат в окрестности точки z_0.

$$(f^{-1}(w_0))' = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Обратная функция $z = f^{-1}(w)$ непрерывна в окрестности точки $w_0 \implies (\Delta w \to 0) \iff (\Delta z \to 0)$

Опр. 35. Если $f'(z) \neq 0\ \forall z \in D$, то функция $f(z)$ называется локально однолистной в D (синоним "взаимнооднозначной").

Замечание: Из локальной обратимости не следует глобальная обратимость (функция $w = f(z)$ локально обратима в области $D \not\Rightarrow$ функция $w = f(z)$ однолистна в D).

6.1 Геометрический смысл $|f'(z)|$ и $\arg f'(z)$ аналитической функции $f(z)$

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ - аналитическая функция в области D и $f'(z) \neq 0$.
Пусть γ - гладкая кривая Жордана, заданная уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.
Если $z_0 = z(t_0),\ t_0 \in [\alpha, \beta]$, то пусть $z'(t_0) \neq 0$.
Функция $w = f(z)$ отображает кривую γ в Γ, $w_0 = f(z_0) \in \Gamma$.
Уравнение кривой Γ:

$$\Gamma : w = w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \implies w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \tag{19}$$

$$\begin{cases} dz = z'(t)dt = [x'(t) + iy'(t)]\, dt \\ dw = w'(t)dt = [u'(t) + iv'(t)]\, dt \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = |z'(t)|\, dt \\ d\sigma = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2} dt = |w'(t)|\, dt \end{cases} \text{ - элементы длины кривой } \gamma(\text{ds}) \text{ и } \Gamma(d\sigma) \text{ соответственно} \tag{21}$$

Из (20) $\implies \frac{dw}{dz}|_{t=t_0} \overset{(19)}{=} f'(z_0) \implies |f'(z_0)| = \frac{d\sigma_0}{ds_0}$, где $d\sigma_0$ и ds_0 - элементы длины кривых γ и Γ в точках $z_0 = z(t_0)$ и $w_0 = w(t_0) \implies |f'(z_0)|$ - коэффициент искажения элемента длины дуги в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.
Коэффициент искажения не зависит от направления кривой в этой точке, а лишь от f.

Будем говорить, что при отображении $\begin{cases} w = f(z) \\ f'(z_0) \neq 0 \end{cases}$ в z_0 имеет место **постоянство искажения**.

Из (19):

$$\implies \arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) \tag{22}$$

Из (22) $\arg f'(z_0)$ - угол поворота $\forall$ кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Опр. 36. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в D. Если $f'(z) \neq 0$ для $z \in D$, то в z при отображении $w = f(z)$ имеет место **консерватизм углов**.

Опр. 37. Конформное отображение области D - это топологическое (гомеоморфное: взаимнооднозначное и непрерывное) отображение этой облсти, при котором в каждой точке $z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения.

Из геометрического смысла $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$ делаем вывод:

Утв. Если функция $w = f(z)$ осуществляет отображение области D и $\forall z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения, то $w = f(z)$ аналитична в D и $f'(z) \neq 0 \; \forall z \in D$.

Из него сразу вытекает:

Утв. Конформное отображение области D осуществляется однолистной в D аналитической функцией $w = f(z),\; f'(z) \neq 0$.

6.2 Дробно-линейное отображение

Опр. 38. Дробно-линейным отображением (ДЛО) называется отображение $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, у которого $ad-bc \neq 0$. Если $ad-bc = 0$, то такое отображение называется **вырожденным** дробно-линейным отображением.

Пусть отображение $w = \frac{az+b}{cz+d}$ переводит z_1 в w_1, z_2 - в w_2:

$$w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d},\; w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d},\; w_1 - w_2 = \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$$

Опр. 39. Линейное отображение: $w = az + b$ можно представить как композицию отображений следующих отображений:

$$\zeta = |a|\, z(\text{подобие}),\; v = e^{i\arg a} \cdot \zeta(\text{поворот на угол } \arg a \text{ вокруг O}), w = v + b(\text{сдвиг})$$

Таким образом линейное отображение конформно отображает комплексную плоскость z на комплексную плоскость w:

$$w(z) : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

Покажем, что $w = \frac{1}{z}$ обладает круговым свойством. Функция $w = \frac{1}{z}$ однолистна и аналитична в $\overline{\mathbb{C}},\; w' \neq 0 \,\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, значит $w = \frac{1}{z}$ конформно отображает комплексную плоскость z на комплексную плоскость w: $w(z) = \frac{1}{z} : \overline{\mathbb{C}} \underset{\text{на}}{\overset{\text{конформно}}{\to}} \overline{\mathbb{C}}$.
Любая обобщенная окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ имеет уравнение вида

$$A(x^2+y^2) + bx + b_1 y + c = 0$$

Можем преобразовать:

$$z = x + iy \implies Az \cdot \overline{z} + \overline{B}z \cdot B\overline{z} + c = 0,\; B = \frac{b+ib_1}{2}$$

Подействуем на эту окружность отображением $w = \frac{1}{z}$:

$$A \cdot \frac{1}{w\overline{w}} + \overline{B} \cdot \frac{1}{w} + B \cdot \frac{1}{\overline{w}} + c = 0$$

Значит уравнение обобщенной окружности на плоскости w имеет вид:

$$Cw\overline{w} + \overline{B}\overline{w} + Bw + A = 0$$

То есть функция $w = \frac{1}{z}$ обладает круговым свойством.

Любое невырожденное ДЛО $w = \frac{az+b}{cz+d}$ либо является линейным (при $c = 0$), либо композиция следующих отображений:

$$\zeta = \frac{c^2}{ad-bc}z + \frac{cd}{ad-bc},\ v = \frac{1}{\zeta},\ w = v + \frac{\alpha}{c}$$

А значит любое непрерывное ДЛО обладает круговым свойством и конформно отображает комплексную плоскость z на w.

6.3 Симметрия относительно окружности $|z - z_0 = R|$

Опр. 40. Точки z_1, z_2 называются симметричным относительно окружности $|z - z_0 = R|$, если они лежат на одном луче с началом в z_0 и $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R$. Отображение $w = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}$ меняет внутреннюю и внешнюю области окружности местами, оставляя окружность неподвижной.

6.4 Симметрия относительно прямой $z = z_0 + te^{i\varphi}, t \in \mathbb{R}$

Две точки симметричны относительно прямой на комплексной плоскости, если перпендикуляры, опущенные из этих точек на прямую равны по длине. Отображение $w = z_0 + e^{2i\varphi}(z - \overline{z_0})$ отображает комплексную плоскость симметрично относительно прямой (меняет две области по ее сторонам местами).

6.5 Сдвиг плоскости на вектор

Сдвиг плоскости на вектор b - это композиция двух симметрий:

1. $\zeta = e^{2i\varphi}\overline{z}$
2. $w = \frac{b}{2} + e^{2i\varphi}(\overline{\zeta} - \frac{\overline{b}}{2}),$ где $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arg b$

6.6 Подобие

Отображение подобия $w = kz,\ k > 0$ - композиция двух симметрий:

1. $\zeta = \frac{1}{z}$ (относительно окружности $|z| = 1$)
2. $w = \frac{k}{\zeta}$ (относительно окружности $|\zeta| = \sqrt{k}$)

Утв. Любое невырожденное ДЛО $w = \frac{az+b}{cz+d}$ - это композиция четного числа отображений симметрии отностельно обобщенных окружностей.

Замечание:

$$w = \frac{az+b}{cz+d},\ \omega = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} = \frac{Az+B}{Cz+D} \text{ - если } AD - BC = (ad-bc)(\alpha\delta - \gamma\beta).$$

Композиция двух ДЛО является невырожденным ДЛО $\iff$ эти два ДЛО невырожденные.

Утв. (Следствие) Композиция любого четного числа симметрий относительно обобщенных окружностей является ДЛО.

Теорема Пусть заданы 3 точки: $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, и 3 точки $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует единственное ДЛО $w = \frac{az+b}{cz+d}$ такое, что

$$w_1 = w(z_1),\ w_2 = w(z_2),\ w_3 = w(z_3)$$

Доказательство.

$$w_j - w_k = \frac{(ad-bc)(z_j - z_k)}{(cz_j + d)(cz_k + d)}$$

Причем
$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \tag{23}$$
Используя $w=\frac{az+b}{cz+d}$ что-то куда-то подставим и все будет хорошо. Соотношение (23) называются ангармоническим соотношением четверки точек. $\square$

Утв. (Следствие) Любое невырожденное ДЛО сохраняет ангармоническое соотношение.

Опр. 41. Положительное направление обход границы это такое направление, при котором область D остается слева.

Утв. Любое невырожденное ДЛО сохраняет положительное направление обхода (то есть ориентацию на $\mathbb{C}$).