

Лекции по ТФКП, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

# 1 Модели комплексных чисел

Введем стандартные понятия нужным образом:

$\mathbb{R}$  - множество точек на прямой.

$\mathbb{C}$  - расширение  $\mathbb{R}$  с помощью одного из корней уравнения  $z^2 = -1$ :  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{0\}$ , с замыканием относительно сложения и умножения.

**Теорема 1** (Основная теорема алгебры) Множество комплексных чисел ( $\mathbb{C}$ ) алгебраически замкнуто (любой многочлен степени  $n$ , коэффициенты которого лежат в  $\mathbb{C}$ ), имеет корни в  $\mathbb{C}$  (с учетом кратности).

**Замечание:** Теорема верна и в частном случае многочлена, определенного над  $\mathbb{R}$ .

## 1.1 Стандартная модель комплексных чисел

Комплексное число  $z$  представляется парой  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  с операциями:

- " + " :  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- " · " :  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$

**Замечание:** Операции согласованы с операциями на  $\mathbb{R}$ .

**Замечание:**  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

В станд. модели  $\begin{cases} 0 = (0, 0) \\ 1 = (1, 0) \end{cases}$

**Опр. 1.** Мнимая единица определена как пара  $(0, 1)$ .

**Замечание:** Некорректно определять мнимую единицу как корень уравнения  $z^2 = -1$ , т.к.  $-i$  также является корнем.

$$\begin{aligned} i^2 &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \\ (-i^2) &= (0, -1) \cdot (0, -1) = (-(-1) \cdot (-1), 0) = (-1, 0) = -1 \end{aligned}$$

**Замечание:** Запись  $\sqrt{-1}$  тоже некорректна.

**Утв. 1** На  $\mathbb{C}$  нельзя ввести линейный порядок.

*Доказательство.* Пусть  $x \in \mathbb{C}$ , и существует некий линейный порядок  $<$ .

$$\forall x \neq 0 \begin{cases} \text{либо } -\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \text{ и } 0 = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \\ \text{либо } \frac{x}{2} < -\frac{x}{2} \text{ и } 0 > x \end{cases}$$

Тогда  $\forall x \neq 0$  либо  $x > 0$ , либо  $-x > 0$ . Т.е.  $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$ . Но  $-1 = i^2 < 0$  - противоречие.  $\square$

## 1.2 Матричная модель

Комплексное число  $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\text{" + " : } \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{”} \cdot \text{”} : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

В матричной модели ноль (нейтральный элемент по сложению) представлен матрицей  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , единица (нейтральный по умножению)  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , мнимая единица  $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

В стандартной модели произвольное комплексное число  $z = (x, y)$  имеет стандартную запись

$$z = x + iy, \text{ где } \begin{cases} x - \text{ вещественная часть} \\ y = \text{ мнимая часть} \end{cases}$$

Действия с комплексными числами:

- Сравнение (проверка равенства):

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ и } b = d$$

- Сложение:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

- Умножение:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

- Деление:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac - bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

### 1.3 Геометрическая модель

Комплексное число представлено точкой с координатами  $(x, y)$  на плоскости.  
Операции:

- ” + ”: действует как сложение векторов (покоординатно).

- ” . ” :  $z_3 = z_1 z_2 \iff \begin{cases} |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_3) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \end{cases}$   
где  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\arg(z)$  задает угол между  $\vec{z}$  и Ох (определяется с точностью до периода).

**Аргумент комплексного числа**  $\operatorname{Arg}(z)$  - угол  $\varphi$  с точностью до периода  $2\pi$ . **Главное значение аргумента**  $\arg(z)$  -  $\varphi$  в промежутке  $[0; 2\pi]$ .

**Комплексно сопряженное к**  $z = x + iy$  это  $\bar{z} = x - iy$ .

$$|z| = |\bar{z}|, \quad \arg(z) = -\arg(\bar{z}), \quad \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$$

$$\bar{z} \cdot z = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

**Законы де Моргана:**

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

**Неравенство треугольника:**

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \end{cases} \implies ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

## 1.4 Стереографическая проекция

На комплексную плоскость положили сферу  $S$  радиуса  $\frac{1}{2}$ . Северный полюс сферы - вершина  $N(0; 0; 1)$ . Комплексному числу  $c$ , лежащему в плоскости комплексных чисел и имеющему координаты  $(x, y, 0)$  ставится в соответствие точка, которая является точкой пересечения прямой  $Nc$  со сферой  $S$ . Зададим систему координат  $O\xi\eta\zeta$  аналогично  $Oxyz$ , но  $O$  имеет координаты  $(0, 0, \frac{1}{2})$ . Уравнение сферы  $S$ :

$$\xi^2 + \eta^2 + (\xi - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \quad (1)$$

Уравнение прямой  $Nc$  по двум точкам:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0 \quad (2)$$

Получаем набор **обратных формул стереографической проекции**:  $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$ ,  $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ ,  $z = \frac{\xi+i\eta}{\zeta-1}$ . Отсюда найдем

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} \stackrel{\text{из } 2}{=} \frac{\zeta}{1-\zeta} \implies \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (3)$$

Подставим 3 в уравнение 1 и получим прямые формулы стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (4)$$

Из геометр. построения стереографическая проекция взаимно однозначно отображает комплексную плоскость на сферу  $S \setminus \{N\}$ . Дополним стер. проекцию по непрерывности:

$$P : \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{на}} S \quad \text{где } \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ а } S \text{ называют сферой Римана.} \quad (5)$$

**Опр. 2.** Обобщенная окрестность на комплексной плоскости - это любая окружность (или прямая, рассмотренная как окружность бесконечного радиуса).

Свойства стереографической проекции:

- Для любой обобщенной окружности  $l \subset \overline{\mathbb{C}}$  ее образ  $P(l) \subset S^2$  - это окружность.

*Доказательство.* Пусть  $l$  - некая обобщ. окрестность на  $\overline{\mathbb{C}}$ , тогда ее уравнение:

$$l : A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{окружность при } A \neq 0, \text{ прямая при } A = 0$$

Подставим в него обратные формулы стереогр. проекции:

$$A \frac{\zeta}{1-\zeta} + B \frac{\xi}{1-\zeta} + C \frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0 \quad (6)$$

Поделим на  $1 - \zeta$  и получим:

$$\Pi : B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0 \quad (7)$$

Но это уравнение некоторой плоскости  $\Pi$  в  $\mathbb{R}^3$ , кроме того,  $P(l) \subset S^2$ , значит для  $l$  выполнено уравнение сферы Римана  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$ . Тогда  $P(l) = S^2 \cap \Pi$  - пересечение сферы с плоскостью окружность.  $\square$

- $\forall$  окружности  $L \subset S^2$   $P^{-1}(L)$  является обобщенной окружностью на  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Доказательство.* Плоскость  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  такая, что  $\Pi \cap S^2 = L$ , а значит ее уравнение имеет вид (7). Разделим (7) на  $1 - \zeta$ , получим обобщенное уравнение прямой, подставим туда прямые формулы проекции и получим уравнение вида  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ , а это - уравнение обобщенной окружности в  $\overline{\mathbb{C}}$ .  $\square$

3. Стереографическая проекция сохраняет углы. То есть  $\forall l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{C}}$  таких, что  $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$  и  $\alpha$  - угол между ними, верно, что угол между  $P(l_1)$  и  $P(l_2)$  тоже равен  $\alpha$  (угол между окружностями это угол между касательными в точке пересечения).

**Опр. 3.** Кривая - это функция (или ее образ)  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Параметром кривой  $g$  называют  $t \in [a, b]$ .

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \left( \frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\left| \frac{\partial g}{\partial t} \right|}, \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\left| \frac{\partial g}{\partial t} \right|} \right) \quad \vec{n} = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}}{\left| \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right|}$$

Натуральный параметр на кривой  $g$  это  $l \subset [0, L]$  ( $L$  - длина  $g$ ), такой, что  $\forall l$  выполнено  $\frac{\partial g}{\partial l} = 1$ . Набор  $\{v, n\}$  называется базис Френе, для него выполнена теорема Френе. Уравнения Френе:

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(l) \\ -k(l) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}, \quad k(l) \text{ называется кривизной } g \subset \mathbb{R}^2$$

## 1.5 Виды записи

Стандартная запись  $z = x + iy$ .

Пусть  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg(z)$ .

**Опр. 4.** Тригонометрическая запись комплексного числа:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = x = r \cdot \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(z) = y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \implies z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

**Опр. 5.** Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \implies z = re^{i\varphi}$$

Тогда для натурального  $n$ :

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Пусть  $z \neq 0 \implies r = |z| > 0$ . тогда  $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}$ , где  $k = 0 \dots n-1$ . Отсюда же получается формула Муавра для корней степени  $n$  из  $z \neq 0$ :

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right)$$

**Замечание:**  $\exists n$  различных корней степени  $n$  из комплексного числа  $z \neq 0$ .

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \text{окружности радиуса } r^{\frac{1}{n}} \text{ с центром в } (0, 0)$$

## 2 Множества на $\overline{\mathbb{C}}$

**Опр. 6.** •  $\delta$  - окрестность точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  - это множество  $C(\delta, z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}, \delta > 0$ .

- Проколотая окрестность точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  - это множество  $C^*(\delta, z_0) = C(\delta, z_0) \setminus \{z_0\}$

- Окрестность точки  $\{\infty\}$  - множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \delta\}$

- Точка  $z$  - изолированная точка множества  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ , если  $\exists \delta > 0 : C(\delta, z) \cap E = \{z_0\}$

**Опр. 7.** Точка  $z$  называется предельной точкой множества  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ , если  $\forall \delta > 0 C^*(\delta, z) \cap E \neq \emptyset$

**Опр. 8.** Точка  $z$  называется внутренней точкой множества  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ , если  $\exists \delta > 0 C(\delta, z) \subset E$

**Опр. 9.** Точка  $z$  называется внешней точкой множества  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ , если  $\exists \delta > 0 C(\delta, z) \cap E = \emptyset$

**Опр. 10.** Точка  $z$  называется граничной точкой  $E$ , если

$$\forall \delta > 0 \begin{cases} C(\delta, z) \cap E \neq \emptyset \\ C(\delta, z) \setminus E \neq \emptyset \end{cases}$$

**Замечание:** Если граничная точка  $z \notin E$ , то она является предельной для  $E$ .

**Опр. 11.** Граница  $E$  - это совокупность всех граничных точек, обозначается  $\partial E$ .

**Опр. 12.** Множество называется ограниченным, если  $\exists M (0 < M < \infty)$  - число, такое, что  $\forall z \in E |z| < M$

**Опр. 13.** Множество  $E$  называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки (или их нет).

**Опр. 14.** Множество  $E$  называется открытым, если  $\forall z \in E z$  является внутренней точкой для  $E$ , то есть  $\forall z \in E \exists \delta > 0 : C(\delta, z) \subset E$

**Опр. 15.** Замыкание множества  $E$  это  $\overline{E} = E \cup \partial E$ .

**Опр. 16.** Диаметр множества  $d(E) = \sup_{z, \xi \in E} |z - \xi|$

**Опр. 17.** Расстоянием между множествами  $E$  и  $G$  называется  $D(E, G) = \inf_{z \in E, \zeta \in G} |z - \zeta|$

**Опр. 18.** Множество  $E$  называется связным, если его нельзя представить как  $E = A \cup B$ ,  $A, B \subset E$ , таких, что

1.  $A, B \neq \emptyset$
2.  $A \cap B = \emptyset$
3.  $A$  и  $B$  не содержат предельных точек друг друга.

**Опр. 19.** Множество  $E$  называется линейно связным, если  $\forall z_1, z_2 \in E \exists$  непрерывная функция  $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$  такая, что  $\varphi(0) = z_1, \varphi(1) = z_2$

**Опр. 20.** Областью называется открытое связное множество.

**Опр. 21.** Компонента множества  $E$  -  $\forall$  максимальное по включению связное подмножество  $E$ . Область  $E \neq \overline{\mathbb{C}}$   $n$ -связная, если граница  $\partial E$  состоит из  $n$  компонент ( $\overline{\mathbb{C}}$  считаем 1-связным).

**Утв. 2**  $\forall$  множества  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$  граница  $\partial E$  является замкнутым множеством.

*Доказательство.* Доказывается от противного:

Допустим,  $\exists$  предельная точка  $z_0$  для  $\partial E$ :  $z_0 \notin \partial E$ . □

**Теорема 2** (Принцип Больцано-Вейерштрасса) У любого бесконечного множества  $E \subset \overline{\mathbb{C}}$   $\exists$  хотя бы одна предельная точка.

**Теорема 3** (Лемма Гейне-Бореля) Из бесконечного открытого покрытия замкнутого множества точек на  $\overline{\mathbb{C}}$  можно выделить конечное подпокрытие.

**Следствие:** На  $\overline{\mathbb{C}}$  любое замкнутое и ограниченное множество является компактом.

### 3 Предельные ряды комплексных чисел

**Опр. 22.** Последовательность  $\{z_n\}$  комплексных чисел  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  называется сходящейся к пределу  $\alpha = a + ib$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |z_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$

**Следствие:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$

Попробуем перенести теорию последовательностей вещественных чисел на комплексные числа:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha &\implies \begin{cases} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \implies \\ \implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N_2 \end{cases} &\implies |z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

Значит  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) |z_n - \alpha| < \varepsilon \forall n > N$

Таким образом  $\begin{cases} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$  Это позволяет свести теорию последовательностей  $\{z_n\}$  комплексных чисел к  $\mathbb{R}$ , то есть все теоремы о сходимости вещественных последовательностей переносятся на комплексные числа.

**Теорема** (Критерий Коши)

Последовательность  $\{z_n\}$  сходится  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$  выполнено  $\forall n, m > N$

**Опр. 23.** Последовательность  $\{z_n\}$  сходится к  $\infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ) если

$$\forall R > 0 \exists N |z_n| > R \text{ выполнено для } \forall n > N$$

$$\text{При } z_n \neq 0 \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0$$

### 3.1 Ряды комплексных чисел

Если у знака суммы ряда не указаны границы - считать, что слагаемые суммируются по индексу  $k$ ,  $k$  пробегает набор от 1 (иногда 0) до  $\infty$

**Опр. 24.** Ряд комплексных чисел  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$  сходится (расходится), если сходится (расходится) последовательность частичных сумм  $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ , т.е.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

**Теорема** (Критерий Коши сходимости ряда)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \begin{cases} \forall n > N \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$$

**Опр. 25.** Ряд  $\alpha_k$  сходится абсолютно, если сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ . Но поскольку  $|\sum_{k=1}^m \alpha_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_{n+k}|$ , то из абсолютной сходимости ряда следует общая сходимость.

**Утв. 3** Член ряда  $\alpha_k$  представим в виде  $a_k + ib_k$ . Тогда:

$$\begin{cases} |a_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \\ |b_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \end{cases}$$

Значит, если  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$  абсолютно сходится, то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  тоже абсолютно сходятся. В свою очередь, из абсолютной сходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  следует абсолютная сходимость  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ .

**Опр. 26.** Произведение двух сходящихся рядов сходится к произведению их сумм.

Стандартные разложения функций от комплексных чисел:

1.  $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$
2.  $\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$
3.  $\cos(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!}$
4.  $e^{i\alpha} = \sum \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!} + i \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$

Пусть  $|\alpha| = R$ ,  $\arg(\alpha) = \varphi$ . Тогда:

$$\alpha = R \cdot e^{i\arg(\alpha)} = R(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

И поскольку можем представить  $\alpha = a + ib$ :

$$e^{\alpha} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)), \quad |e^{\alpha}| = e^a, \quad \arg(e^{\alpha}) = b$$

Поэтому  $e^{2\pi k \cdot i} = 1$

## 4 Функции комплексного переменного

Пусть  $E \subset \mathbb{C}$  и  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  (т.е.  $z \rightarrow f(z)$ ). Если  $f$  - инъекция, т.е.  $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$ , то говорят, что  $f$  - однослойна. Если  $f$  действует из  $E$  в  $f(E)$  (то есть еще и сюръективна, а значит - биекция), то  $\exists f^{-1} : f(E) \rightarrow E$ .

**Опр. 27.** Если  $z_0$  - предельная точка множества  $E$  и  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , то  $f(z)$  непрерывна в  $z_0$ .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Функция  $f(z)$  представима в виде  $u(z) + iv(z)$  (мнимая и комплексная части), а значит  $f$  непрерывна на  $E \iff u(z), v(z), |f(z)|$  - непрерывны на  $E$ .

Если  $E$  - компактно, а  $f$  - непрерывно, то:

1.  $|f(z)|$  достигает max и min на  $E$
2.  $f(z)$  равномерно непрерывна на  $E$  по т. Кантора

**Опр. 28.** Функция  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  - задает кривую на комплексной плоскости, если  $x(t), y(t)$  - непрерывны.

- Если  $\gamma(t)$  инъективна (за исключением  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ ), то  $\gamma$  - жорданова кривая.
- $\gamma(t)$  называется гладкой, если  $x(t), y(t)$  непрерывно дифференцируемы и  $\forall t \ \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$

**Теорема** (о стандартном радиусе) Пусть  $\Gamma(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  - гладкая замкнутая жорданова кривая. Тогда

$$\forall \theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) \ \exists \delta_0 \text{ такая, что}$$

1. Окружность  $|z - z_0| = \inf_{z \in \Gamma} R \leq \delta_0$  пересекает  $\Gamma$  строго в двух точках
2. При переходе от  $z_1 \in \Gamma$  к  $z_2 \in \Gamma$ , где  $|z_2 - z_1| < \delta_0$  угол наклона касательной меняется меньше, чем  $\theta_0$
3. Если  $|z - z_0| < \delta_0$  то  $dS(s) < \frac{dr}{d\cos(\theta_0)}$

### 4.1 Функциональные ряды

**Опр. 29.** Ряд  $\sum f_n(z)$  сходится на  $E \subset \mathbb{C}$ , если он сходится  $\forall z \in E$ . Сходится равномерно на  $E$ , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid \forall n > N \ \forall z \ |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Или ряд  $\sum f_n(z)$  сходится равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall m \forall z \left| \sum_{k=0}^m f_{n+k}(z) \right| < \varepsilon$$

**Теорема** (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса) Если  $\forall z \in E$  каждый элемент ряда, начиная с некоторого номера  $n_0$  удовлетворяет неравенству

$$|f_k(z)| \leq \alpha_k, \ k \geq n_0 \tag{8}$$

и числовой ряд  $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$  сходится, то Функциональный ряд  $\sum f_k(z)$  сходится равномерно и абсолютно на  $E$ .

*Доказательство.* Так как ряд  $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$  сходится, то по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^m \alpha_{n+k} < \varepsilon \quad \forall n > N, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\left| \sum_{k=1}^m f_{n+k}(z) \right| \leq \sum_{k=1}^m |f_{n+k}(z)| \stackrel{\text{по нер-в} 8}{\leq} \sum_{k=1}^m \alpha_{n+k} < \varepsilon$$

Следовательно, по критерию Коши  $\sum f_k(z)$  сходится равномерно и абсолютно.  $\square$

**Теорема** Сумма  $S(z) = \sum f_k(z)$  равномерно сходящегося ряда непрерывных на  $E$  функций  $f_k(z)$  сама непрерывна на  $E$ .

*Доказательство.* Пусть  $z_0 \in E$  - произвольная точка. Тогда для  $z \in E$ :

$$|S(z) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)|$$

По определению равномерной сходимости ряда  $\sum f_k(z)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} |S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |S_N(z_0) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Конечная сумма  $S_N(z) = \sum_{k=1}^N f_k(z)$  непрерывных на  $E$  функций  $f_k(z)$  - сама непрерывна на  $E$ . Тогда по определению непрерывности функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

А значит  $|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon \implies$  функция  $S(z)$  непрерывна в  $z_0$ . В силу произвольности выбора  $z_0 \in E$   $S(z)$  непрерывна на  $E$ .  $\square$

**Опр. 30.** Бесконечная сумма вида  $\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot (z - z_0)^k$  называется степенным рядом, в котором  $C_k$  - коэффициенты степенного ряда.

Поскольку линейная замена  $t = z - z_0$  превращает этот ряд в более удобную форму  $\sum C_k t^k$  - то будем рассматривать ряды именно такого вида.

**Теорема** (Коши-Адамара) Пусть дан ряд  $\sum C_k z^k$  и  $l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}$ . Тогда:

1. Если  $l = 0$ , то данный ряд сходится на всей комплексной плоскости ( $\forall z \in \mathbb{C}$ ).
2. Если  $l = \infty$ , то ряд сходится при  $z = 0$  и расходится  $\forall z \neq 0$ .
3. Если  $0 < l < \infty$ , то ряд абсолютно сходится в круге  $|z| < \frac{1}{l}$  и расходится при  $|z| > \frac{1}{l}$ .

Число  $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}}$  называется радиусом сходимости степенного ряда, а круг  $|z - z_0| < R$  называется кругом сходимости.

*Доказательство.* В точке  $z = 0$  утверждение верно при  $\forall C_k \implies \forall l$  ряд сходится, так как ряд сходится в  $z = 0$ . Пусть теперь  $z \neq 0$ .

Случай 1:  $l = 0$ .

То есть  $l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0$ . Значит:

$$\forall z \neq \infty \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = |z| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0 \text{ так как } |z| \neq \infty, \text{ а предел равен } 0$$

Тогда по радикальному признаку Коши для рядов с положительными членами ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |C_k z^k|$  сходится  $\forall z \neq \infty$ , т.е. ряд  $\sum C_k z^k$  сходится на  $\mathbb{C}$ .

Случай 2:  $l = \infty$ .

Если бы ряд сходился в точке  $z \neq 0$ , то в силу необходимого условия сходимости  $\exists M > 1 \ |C_k z^k| < M$  или  $\sqrt[k]{|C_k|} < \frac{M}{|z|}$ , что противоречит условию  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \infty$ .

Случай 3:  $0 < l < \infty$

Пусть  $0 < |z| < \frac{1}{l}$ . По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \sqrt[k]{|C_k|} < \varepsilon \ \forall k > N$$

Пусть  $\varepsilon = \frac{1-l|z|}{2|z|} \implies \sqrt[k]{|C_k|} < l + \frac{1-l|z|}{2|z|} = \frac{1+l|z|}{2|z|}$ . Тогда:

$$|z| \sqrt[k]{|C_k|} < \frac{1+l|z|}{2} = q < 1$$

$$|C_k z^k| < q^k, \ k > N$$

Значит ряд сходится абсолютно при  $|z| < \frac{1}{l}$ .

Пусть  $|z| > \frac{1}{l}$ . По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ бесконечное множество индексов } k_n, \ n = 1 \dots \infty \text{ таких, что } \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > l - \varepsilon$$

Пусть  $\varepsilon = \frac{l|z|-1}{|z|}$ . Тогда  $\sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > \frac{l|z|-l|z|+1}{|z|} \implies |z| \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > 1$ . Значит ряд расходится по радикальному признаку Коши при  $|z| > \frac{1}{l}$ .  $\square$

**Теорема 4** (Первая теорема Абеля) Если степенной ряд  $\sum C_k z^k$  сходится в некоторой  $z_0 \in \mathbb{C}$  такой, что  $z_0 \neq 0$ , то он сходится абсолютно в круге  $|z| < |z_0|$ .

*Доказательство.* По теореме Коши-Адамара ряд сходится абсолютно в круге  $|z| < R$  и расходится при  $|z| > R$ . Значит  $|z_0| \leq R \implies$  ряд сходится абсолютно при  $|z| < |z_0|$ .  $\square$

Напомню контекст: ряд (1)  $\sum C_k z^k$ ,  $R = \sqrt[\infty]{\lim_{k \rightarrow \infty} |C_k|}$ .

**Замечание:** Степенной ряд не обязательно сходится равномерно в круге  $|z| < R$ .

Определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \ \forall n > N, \forall z \in E$$

*Доказательство.* Для доказательства этого замечания сначала докажем формулы геометрической прогрессии:

**Утв.**

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

*Доказательство.*

$$S_n + q^{n+1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = 1 + q * S_n$$

Значит  $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$   $\square$

**Утв.**

$$|q| < 1 \implies S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

*Доказательство.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} (1 - q^{n+1}) = \frac{1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - q^{n+1} = \frac{1}{1 - q}$$

□

По первому утверждению:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \implies \forall z \in \mathbb{N} S(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1 - z} \implies \sup_{|z| < 1} |S(z) - S_n(z)| = \sup_{|z| < 1} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = \infty$$

□

**Замечание:** Степенной ряд равномерно сходится в любом замкнутом круге  $|z| < r, \forall r < R$  (может быть 0).

*Доказательство.* Из условия теоремы ряд мажорируется рядом  $\sum |C_k| r^k$ , который сходится по радикальному признаку Коши. Значит степенной ряд равномерно сходится по признаку Вейерштрасса. □

**Замечание:** На границе круга сходимости (при  $|z| = R$ ) степенной ряд может:

- расходится во всех точках (пример  $\sum z^k$ )
- сходится в некоторых точках границы и расходится в других (например,  $\sum \frac{z^k}{k}$ )
- сходиться во всех точках границы (например,  $\sum \frac{z^k}{k^2}$ )

**Теорема 5** (Вторая теорема Абеля) Если степенной ряд с радиусом сходимости  $R \in (0, \infty)$  сходится в точке  $z_0$ , такой, что  $|z_0| = R$ , то сумма  $S(z) \rightarrow S(z_0)$  при  $z \rightarrow z_0$  изнутри круга по любой некасательной траектории.

Возвращаясь к формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

Степенные ряды для  $e^z, \cos(z), \sin(z)$  сходятся равномерно в  $\forall$  круге  $|z| < R$ , где  $0 < R < \infty \implies$  эти функции непрерывны на  $\mathbb{C}$ .

**Утв.**  $e^z$  - периодичная функция с периодом  $2\pi ki$

*Доказательство.*

$$e^z \cdot e^t = e^{z+t} \implies e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z (\cos(2\pi ki) + i \sin(2\pi ki)), k \in \mathbb{Z}$$

□

По формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \tag{9}$$

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z) \tag{10}$$

$$(9) + (10) : e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos(z) \implies \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{11}$$

$$(9) - (10) : e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin(z) \implies \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{12}$$

То есть формулы тригонометрии остаются в силе.

Нули функции  $\sin(z)$ : Из (12):

$$\sin(z) = 0 \implies e^{iz} - e^{-iz} = 0 \implies e^{2iz} - 1 = 0 \implies e^{2iz} = e^{2\pi ki}, k \in \mathbb{Z}$$

Значит нули функции  $\sin(z)$  имеют вид  $z = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Аналогично нули функции  $\cos(z)$  имеют вид  $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Замечание:** Функции  $\sin(z)$  и  $\cos(z)$  не ограничены на  $\mathbb{C}$

*Доказательство.*  $z$  представимо в виде  $x+iy$ . Из (11):  $2\cos(z) = e^{iz} + e^{-iz}$ . Мы знаем, что  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ , значит:

$$|2\cos(z)|^2 = (e^{iz} + e^{-iz}) \cdot (e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}) = e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} \infty$$

□

**Опр. 31.**

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \cosh(iz) = \cos(iz)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sinh(iz) = i \sin(iz)$$

## 5 Аналитические функции

Пусть  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $z = x + iy$  - функция, определенная в области  $D \in \mathbb{C}$ .

**Опр. 32.** Функция  $f(z)$  называется дифференцируемой (моногенной), в точке  $z \in D$ , если

$$\exists! \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \text{ где } z + \Delta z \in D$$

Этот предел называется производной функции  $f$  и обозначается  $f'(z)$

**Замечание:** Если этот предел существует, то он не зависит от того, как  $\Delta z$  стремится к 0.

*Доказательство.* **Шаг 1**

Рассмотрим  $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$  ( $\Delta y = 0$ ):

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

**Шаг 2**

Пусть теперь  $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$  ( $\Delta x = 0$ ):

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для доказательства замечания нам необходимо, чтобы эти производные были равны, тогда:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{ - условие Коши-Римана}$$

□

**Утв. 4** Если  $\exists f'(z)$  в точке  $z \in D$ , то выполнено условие Коши-Римана, но обратное утверждение не верно.

*Доказательство.* Слева направо ( $\implies$ ) доказали в предыдущем замечании. Докажем справа налево ( $\impliedby$ ). Построим контрпример:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если  $f(0) = 0$ , то  $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$

Пусть  $x \rightarrow 0, y = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x} = u_x + iv_x = 0 \implies u_x = 0, v_x = 0$$

Пусть  $y \rightarrow 0, x = 0$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(iy)}{iy} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(iy)^4}}}{iy} = v_y + iu_y = 0 \implies v_y = 0, u_y = 0$$

То есть  $u_x = v_y = 0, v_x = -u_y = 0$ . Значит условие Коши-Римана выполнено в  $z = 0$ , но с другой стороны,  $f(z)$  не то, что не дифференцируема, она разрывна в  $z = 0$ :

Пусть  $z = (1+i)x \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f((1+i)x)}{(1+i)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(1+i)^4 x^4}}}{(1+i)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{(1+i)x} = \infty$$

$\infty \neq 0 \implies$  функция  $f(z)$  не непрерывна в 0  $\implies \nexists f'(0)$ .

□

**Утв. 5** Если функции  $u(x, y), v(x, y)$  дифференцируемы в  $z$  и выполнено условие Коши-Римана, то  $\exists f'(z)$ .

*Доказательство.* Так как  $u, v$  - дифференцируемы в  $z$ , то

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|)\end{aligned}\quad \text{где } |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (13)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (14)$$

Заметим, что

$$\Delta x = \frac{1}{2} (\Delta z + \Delta \bar{z}), \quad \Delta y = \frac{1}{2i} (\Delta z - \Delta \bar{z}) \quad (15)$$

Тогда перепишем (13):

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u + i \Delta v = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + o(\Delta z) \stackrel{\text{по (14) и } \Delta x, \Delta y}{=} \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}$$

Это выражение - формальная частная производная по  $z$  и  $\bar{z}$ . Подставив эти формулы в (15) получим

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|)$$

Заметим, что  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff$  выполнено условие Коши-Римана. Разделим предыдущее выражение на  $\Delta z \neq 0$ :

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

Поскольку  $\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$ , то

$$\exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$$

□

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) \implies \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta = 0$$

Значит  $\Delta w = \Delta f = f'(z) \Delta z + \eta \cdot \Delta z$ , где  $f'(z) \Delta z$  - линейная часть приращения функции относительная  $\Delta z$ , она же главная часть приращения, она же дифференциал функции.

Обозначим  $dw = df(z) = f'(z) \Delta z$ . В частности, если  $f(z) = z$ , то  $df(z) = dz = \Delta z \implies df(z) = f'(z)dz$  или  $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$ .

**Опр. 33.** Функция  $f(z)$  называется аналитичной в области  $D$ , если  $\forall z \in D \exists f'(z)$ .

**Опр. 34.** Функция  $f(z)$  называется аналитичной в точке  $z_0 \in D$  ( $D$  - область), если  $f(z)$  аналитична в некоторой открытой окрестности точки  $z_0$ .

**Теорема** Сумма степенного ряда  $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k$  аналитична в круге его сходимости  $|z| < R$ , причем  $S'(z) = \sum k C_k z^{k-1}$ .

*Доказательство.* Пусть ряд

$$S_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k C_k z^{k-1} \quad (16)$$

Заметим, что радиус сходимости ряда  $S'_0(z)$  тоже равен  $R$ :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k C_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = R - \text{по теореме Коши-Адамара}$$

$$S_0(0) = C_1; \quad S_0(z) = \sum k C_k z^{k-1} = \frac{1}{z} \sum k C_k z^k$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} k = (1 + (k^{\frac{1}{k}} - 1))^k &= 1 + k(k^{\frac{1}{k}} - 1) + \frac{k(k-1)}{2}(k^{\frac{1}{k}} - 1)^2 + \dots + (k^{\frac{1}{k}} - 1)^k \implies k > \frac{k(k-1)}{2}(k^{\frac{1}{k}} - 1)^2 \\ &\implies |k^2 - 1| < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{k-1}}} < \varepsilon \end{aligned}$$

Пусть  $z$  - произвольная точка круга  $|z| < R$  и  $\Delta z : |z + \Delta z| < R$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z) \right| &\stackrel{?}{<} \varepsilon \\ \left| \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z) \right| &\leq \left| \sum \left[ \frac{C_k(z + \Delta z)^k - C_k z^k}{\Delta z} - k C_k z^k \right] \right| = \left| \sum C_k \left[ \frac{(z + \Delta z)^k}{\Delta z} \right] \right| \quad (17) \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое можно расписать как

$$\begin{aligned} \frac{(z + \Delta z)^k}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)^{k-1}(z + \Delta z)}{\Delta z} = \\ &= (z + \Delta z)^{k-1} + \frac{z(z + \Delta z)^{k-1}}{\Delta z} \stackrel{\text{так же}}{=} (z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1} + \frac{z^k}{\Delta z} \quad (18) \end{aligned}$$

Тогда второе слагаемое из (17) сокращается с последним слагаемым (18) и получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum C_k [(z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1} - k z^{k-1}] \right| &\stackrel{\text{дважды нер-во } \Delta\text{-ника}}{\leq} \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^N C_k [(z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1} - k z^{k-1}] \right| + \\ &\quad \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k [(z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1}] \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} k C_k z^{k-1} \right| \end{aligned}$$

Возьмем число  $r : 0 < r < R$  и  $|z + \Delta z| < r$ . Из абсолютной сходимости ряда (16) в круге  $|z| < R \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(r, \varepsilon)$  Введем новый ряд

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k |C_k| r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

При таком  $N$  второй и третий модули  $< \frac{\varepsilon}{3}$  по критерию Коши абсолютной сходимости ряда (16). А в первом модуле конечная сумма, которая стремится к 0 при  $\Delta z \rightarrow 0$ , то есть по определению предела, первый модуль тоже  $< \frac{\varepsilon}{3}$   $\square$

**Замечание:** Сумма степенного ряда  $S'(z) = \sum kC_k z^{k-1}$  тоже аналитична в круге  $|z| < R$ , причем

$$S''(z) = \sum k(k-1)C_k z^{k-2}$$

$$S^{(n)} = \sum k(k-1)\dots(k-n+1)C_k z^{k-n} \xrightarrow{\text{при } z=0} C_n = \frac{S^{(n)}(z)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 6 Конформные отображения

Рассмотрим функцию  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , она аналитична в области  $D$ , причем  $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$ .

$$\text{Условие Коши-Римана: } \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Якобиан  $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = |f'(z)|^2 \stackrel{f'(z_0) \neq 0}{\Rightarrow} \frac{D(u,v)}{D(x,y)}|_{z=z_0} \neq 0$ .

Значит по теореме о неявной функции система  $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$  в некоторой окрестности точки  $w_0 = f(z_0)$  определяет однозначные непрерывные функции  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ , значения которых лежат в окрестности точки  $z_0$ .

$$(f^{-1}(w_0))' = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Обратная функция  $z = f^{-1}(w)$  непрерывна в окрестности точки  $w_0 \implies (\Delta w \rightarrow 0) \iff (\Delta z \rightarrow 0)$

**Опр. 35.** Если  $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$ , то функция  $f(z)$  называется локально однолистной в  $D$  (синоним "взаимнооднозначной").

**Замечание:** Из локальной обратимости не следует глобальная обратимость (функция  $w = f(z)$  локально обратима в области  $D \nRightarrow$  функция  $w = f(z)$  однолистна в  $D$ ).

### 6.1 Геометрический смысл $|f'(z)|$ и $\arg f'(z)$ аналитической функции $f(z)$

Пусть функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  - аналитическая функция в области  $D$  и  $f'(z) \neq 0$ .

Пусть  $\gamma$  - гладкая кривая Жордана, заданная уравнением  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ , где  $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ . Если  $z_0 = z(t_0)$ ,  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ , то пусть  $z'(t_0) \neq 0$ .

Функция  $w = f(z)$  отображает кривую  $\gamma$  в  $\Gamma$ ,  $w_0 = f(z_0) \in \Gamma$ .

Уравнение кривой  $\Gamma$ :

$$\Gamma : w = w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \implies w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \quad (19)$$

$$\begin{cases} dz = z'(t)dt = [x'(t) + iy'(t)]dt \\ dw = w'(t)dt = [u'(t) + iv'(t)]dt \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = |z'(t)|dt \\ d\sigma = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}dt = |w'(t)|dt \end{cases} \quad \text{- элементы длины кривой } \gamma(ds) \text{ и } \Gamma(d\sigma) \text{ соответственно} \quad (21)$$

Из (20)  $\implies \frac{dw}{dz}|_{t=t_0} \stackrel{(19)}{=} f'(z_0) \implies |f'(z_0)| = \frac{d\sigma_0}{ds_0}$ , где  $d\sigma_0$  и  $ds_0$  - элементы длины кривых  $\gamma$  и  $\Gamma$  в точках  $z_0 = z(t_0)$  и  $w_0 = w(t_0) \implies |f'(z_0)|$  - коэффициент искажения элемента длины дуги в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ .

Коэффициент искажения не зависит от направления кривой в этой точке, а лишь от  $f$ .

Будем говорить, что при отображении  $\begin{cases} w = f(z) \\ f'(z_0) \neq 0 \end{cases}$  в  $z_0$  имеет место **постоянство искажения**.

Из (19):

$$\implies \arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) \quad (22)$$

Из (22)  $\arg f'(z_0)$  - угол поворота  $\forall$  кривой в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ .

**Опр. 36.** Пусть функция  $w = f(z)$  аналитична в  $D$ . Если  $f'(z) \neq 0$  для  $z \in D$ , то в  $z$  при отображении  $w = f(z)$  имеет место **консерватизм углов**.

**Опр. 37.** Конформное отображение области  $D$  - это топологическое (гомеоморфное: взаимнооднозначное и непрерывное) отображение этой области, при котором в каждой точке  $z \in D$  имеет место консерватизм углов и постоянство искажения.

Из геометрического смысла  $|f'(z_0)|$  и  $\arg f'(z_0)$  делаем вывод:

**Утв.** Если функция  $w = f(z)$  осуществляет отображение области  $D$  и  $\forall z \in D$  имеет место консерватизм углов и постоянство искажения, то  $w = f(z)$  аналитична в  $D$  и  $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$ .

Из него сразу вытекает:

**Утв.** Конформное отображение области  $D$  осуществляется однолистной в  $D$  аналитической функцией  $w = f(z)$ ,  $f'(z) \neq 0$ .