Лекции по ТФКП, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Модели комплексных чисел

Введем стандартные понятия нужным образом:
$\mathbb{R}$ - множество точек на прямой.
$\mathbb{C}$ - расширение $\mathbb{R}$ с помощью одного из корней уравнения $z^2 = -1$: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{0\}$, с замыканием относительно сложения и умножения.

Теорема 1 (Основная теорема алгебры) Множество комплексных чисел ($\mathbb{C}$) алгебраически замкнуто (любой многочлен степени n, коэффициенты которого лежат в $\mathbb{C}$), имеет корни в $\mathbb{C}$ (с учетом кратности).

Замечание: Теорема верна и в частном случае многочлена, определенного над $\mathbb{R}$.

1.1 Стандартная модель комплексных чисел

Комплексное число z представляется парой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с операциями:

- $" + " : \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $" \cdot " : (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$

Замечание: Операции согласованы с операциями на $\mathbb{R}$.

Замечание: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \quad \mathbb{R} = \{(x, 0) \quad x \in \mathbb{R}\}$

В станд. модели $\begin{cases} 0 = (0, 0) \\ 1 = (1, 0) \end{cases}$

Опр. 1. Мнимая единица определена как пара $(0, 1)$.

Замечание: Некорректно определять мнимую единицу как корень уравнения $z^2 = -1$, т.к. $-i$ так же является корнем.

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$(-i^2) = (0, -1) \cdot (0, -1) = (-(-1) \cdot (-1), 0) = (-1, 0) = -1$$

Замечание: Запись $\sqrt{-1}$ тоже некорректна.

Утв. 1 На $\mathbb{C}$ нельзя ввести линейный порядок.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{C}$, и существует некий линейный порядок $<$.

$$\forall x \neq 0 \begin{cases} \text{либо } -\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \text{ и } 0 = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \\ \text{либо} \frac{x}{2} < -\frac{x}{2} \text{ и } 0 > x \end{cases}$$

Тогда $\forall x \neq 0$ либо $x > 0$, либо $-x > 0$. Т.е. $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$. Но $-1 = i^2 < 0$ - противоречие. $\square$

1.2 Матричная модель

Комплексное число $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$" + " : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$"\cdot":\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ -y_1 & x_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\ -y_2 & x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1x_2-y_1y_2 & x_1y_2+x_2y_1\\ -x_1y_2-x_2y_1 & x_1x_2-y_1y_2\end{pmatrix}$$

В матричной модели ноль (нейтральный элемент по сложению) представлен матрицей $0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, единица (нейтральный по умножению) $1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, мнимая единица $i=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

В стандартной модели произвольное комплексное число $z=(x,y)$ имеет стандартную запись $z=x+iy$, где $\begin{cases}x-\text{вещественная часть}\\ y=\text{мнимая часть}\end{cases}$

Действия с комплексными числами:

1. Сравнение (проверка равенства):
$$a+ib=c+id \iff a=c \text{ и } b=d$$
.

2. Сложение:
$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

3. Умножение:
$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

4. Деление:
$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{c^2+d^2}=\frac{(ac-bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

1.3 Геометрическая модель

Комплексное число представлено точкой с координатами (x,y) на плоскости.
Операции:

- $"+"$: действует как сложение векторов (покоординатно).
- $"\cdot": z_3=z_1z_2 \iff \begin{cases}|z_3|=|z_1|\cdot|z_2|\\ arg(z_3)=arg(z_1)+arg(z_2)\end{cases}$
  где $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad arg(z)$ задает угол между $\vec{z}$ и Ox (определяется с точностью до периода).

Аргумент комплексного числа $Arg(z)$ - угол φ с точностью до периода 2π. **Главное значение аргумента** $arg(z)$ - φ в промежутке $[0;2\pi]$.

Комплексно сопряженное к $z=x+iy$ это $\overline{z}=x-iy$.

$$|z|=|\overline{z}|,\quad arg(z)=-arg(\overline{z}),\quad Re(z)=Re(\overline{z}),\quad Im(z)=-Im(\overline{z})$$
$$\overline{z}\cdot z=(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$$

Законы де Моргана:

- $\overline{(\overline{z})}=z$
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

Неравенство треугольника:

$$\begin{cases}|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|\\ |z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||\end{cases}\implies ||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$$

1.4 Стереографическая проекция

На комплексную плоскость положили сферу S радиуса $\frac{1}{2}$. Северный полюс сферы - вершина $N(0;0;1)$. Комплексному числу c, лежащему в плоскости комплексных чисел и имеющему координаты $(x, y, 0)$ ставится в соответствие точка, которая является точкой пересечения прямой Nc со сферой S. Зададим систему координат $O\xi\eta\zeta$ аналогично $Oxyz$, но O имеет координаты $(0, 0, \frac{1}{2})$.
Уравнение сферы S:

$$\xi^2 + \eta^2 + (\xi - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \tag{1}$$

Уравнение прямой Nc по двум точкам:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0 \tag{2}$$

Получаем набор **обратных формул стереографической проекции:** $x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta}, z = \frac{\xi+i\eta}{\zeta-1}$.
Отсюда найдем

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} \underset{\text{из } 2}{=} \frac{\zeta}{1 - \zeta} \implies \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \tag{3}$$

Подставим 3 в уравнение 1 и получим прямые формулы стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \tag{4}$$

Из геометр. постреония стереографическая проекция взаимно однозначно отображает комплексную плокость на сферу $S \setminus \{N\}$. Дополним стер. проекцию по непрерывности:

$$P : \overline{\mathbb{C}} \overset{\text{на}}{\to} S \quad \text{где } \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{а } S \text{ называют сферой Римана.} \tag{5}$$

Опр. 2. Обобщенная окрестность на комплексной плоскости - это любая окружность (или прямая, рассмотренная как окружность бесконечного радиуса).

Свойства стереографической проекции:

1. Для любой обобщенной окружности $l \subset \overline{\mathbb{C}}$ ее образ $P(l) \subset S^2$ - это окружность.

   Доказательство. Пусть l - некая обобщ. окрестность на $\overline{\mathbb{C}}$, тогда ее уравнение:

   $$l : A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \text{ - окружность при } A \neq 0, \text{ прямая при } A = 0$$

   Подставим в него обратные формулы стереогр. проекции:

   $$A\frac{\zeta}{1 - \zeta} + B\frac{\xi}{1 - \zeta} + C\frac{\eta}{1 - \zeta} + D = 0 \tag{6}$$

   Поделим на $1 - \zeta$ и получим:

   $$\Pi\text{: } B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0 \tag{7}$$

   Но это уравнение некоторой плоскости Π в $\mathbb{R}^3$, кроме того, $P(l) \subset S^2$, значит для l выполнено уравнение сферы Римана $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$. Тогда $P(l) = S^2 \cap \Pi$ - пересечение сферы с плоскосью окружность. □

2. $\forall$ окружности $L \subset S^2$ $P^{-1}(L)$ является обобщенной окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$.

   Доказательство. Плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ такая, что $\Pi \cap S^2 = L$, а значит ее уравнение имеет вид (7). Разделим (7) на $1-\zeta$, получим обобщенное уравнение прямой, подставим туда прямые формулы проекции и получим уравнение вида $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D = 0$, а это - уравнение обобщенной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$. □

3. Стереографическая проекция сохраняет углы. То есть $\forall l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $l_1 \cap l_2 \neq$ и α - угол между ними, верно, что угол между $P(l_1)$ и $P(l_2)$ тоже равен α (угол между окружностями это угол между касательными в точке пересечения).

Опр. 3. Кривая - это функция (или ее образ) $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Параметром кривой g называют $t \in [a, b]$.

$$\overrightarrow{v} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t}}{\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|} = \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|}, \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|}\right) \quad \overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}}{\left|\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right|}$$

Натуральный параметр на кривой g это $l \subset [0, L]$ (L - длина g), такой, что $\forall l$ выполнено $\frac{\partial g}{\partial l} = 1$. Набор $\{v, n\}$ называется базис Френе, для него выполена теорема Френе. Уравнения Френе:

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(l) \\ -k(l) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}, \quad k(l) \text{ называется кривизной } g \subset \mathbb{R}^2$$

1.5 Виды записи

Стандартная запись $z = x + iy$.
Пусть $r = |z|$, $\varphi = arg(z)$.

Опр. 4. Тригонометрическая запись комплексного числа:

$$\begin{cases} Re(z) = x = r \cdot \cos(\varphi) \\ Im(z) = y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \implies z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Опр. 5. Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \implies z = re^{i\varphi}$$

Тогда для натурального n:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Пусть $z \neq 0 \implies r = |z| > 0$. тогда $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}$, где $k = 0 \ldots n-1$. Отсюда же получается формула Муавра для корней степени n из $z \neq 0$:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}))$$

Замечание: $\exists n$ различных корней степени n из комплексного числа $z \neq 0$.

$$z_0, z_1, \ldots z_{n-1} \in \text{ окружности радиуса } r^{\frac{1}{n}} \text{ с центром в } (0, 0)$$

2 Множества на $\overline{\mathbb{C}}$

Опр. 6.
- δ - окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C(\delta, z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}, \delta > 0$.
- Проколотая окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C^*(\delta, z_0) = C(\delta, z_0) \backslash \{z_0\}$
- Окрестность точки $\{\infty\}$ - множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \delta\}$
- Точка z - изолированная точка множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 : C(\delta, z_0) \cap E = \{z_0\}$

Опр. 7. Точка z называется предельной точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\forall \delta > 0$ $C^*(\delta, z) \cap E \neq \varnothing$

Опр. 8. Точка z называется внутренней точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0$ $C(\delta, z) \subset E$

Опр. 9. Точка z называется внешней точкой множества $E \subset \mathbb{C}$, если $\exists \delta > 0$ $C(\delta, z) \cap E = \varnothing$

Опр. 10. Точка z называется граничной точкой E, если

$$\forall \delta > 0 \begin{cases} C(\delta, z) \cap E \neq \varnothing \\ C(\delta, z) \backslash E \neq \varnothing \end{cases}$$

Замечание: Если граничная точка $z \notin E$, то она является предельной для E.

Опр. 11. Граница E - это совокупность всех граничных точек, обозначается ∂E.

Опр. 12. Множестов называется ограниченным, если $\exists M$ $(0 < M < \infty)$ - число, такое, что $\forall z \in E$ $|z| < M$

Опр. 13. Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки (или их нет).

Опр. 14. Множество E называется открытым, если $\forall z \in E$ z является внутренней точкой для E, то есть $\forall z \in E$ $\exists \delta > 0 :$ $C(\delta, z) \subset E$

Опр. 15. Замыкание множества E это $\overline{E} = E \cup \partial E$.

Опр. 16. Диаметр множества $d(E) = \sup\limits_{z, \xi \in E} |z - \xi|$

Опр. 17. Расстоянием между множествами E и G называется $D(E, G) = \inf\limits_{z \in E, \zeta \in G} |z - \zeta|$

Опр. 18. Множество E называется связным, если его нельзя представить как $E = A \cup B,$ $A, B \subset E$, таких, что

1. $A, B \neq \varnothing$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. A и B не содержат предельных точек друг друга.

Опр. 19. Множество E называется линейно связным, если $\forall z_1, z_2 \in E$ $\exists$ непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \to E$ такая, что $\varphi(0) = z_1,$ $\varphi(1) = z_2$

Опр. 20. Областью называется открытое связное множество.

Опр. 21. Компонента множества E - $\forall$ максимальное по включению связное подмножество E. Область $E \neq \overline{\mathbb{C}}$ n-связная, если граница ∂E состоит из n компонент ($\overline{\mathbb{C}}$ считаем 1-связным).

Утв. 2 $\forall$ множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ граница ∂E является замкнутым множеством.

Доказательство. Доказывается от противного:
Допустим, $\exists$ предельная точка z_0 для ∂E: $z_0 \notin \partial E$. $\square$

Теорема 2 (Принцип Больцано-Вейерштрасса) У любого бесконечного множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ $\exists$ хотя бы одна предельная точка.

Теорема 3 (Лемма Гейне-Бореля) Из бесконечного открытого покрытия замкнутого множества точек на $\overline{\mathbb{C}}$ можно выделить конечное подпокрытие.

Следствие: На $\overline{\mathbb{C}}$ любое замкнутое и ограниченное множество является компактом.

3 Предельные ряды комплексных чисел

Опр. 22. Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n,\ n \in \mathbb{N}$ называется сходящейся к пределу $\alpha = a + ib$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |z_n - \alpha| < \varepsilon \ \forall n > N$$

Обозначается $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$

Следствие: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$

Попробуем перенести теорию последовательностей вещественных числе на комплексные числа:

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \implies \begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > N_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > N_2 \end{cases} \implies |z_n - \alpha| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \max(N_1, N_2) \ \ |z_n - \alpha| < \varepsilon \ \forall n > N$

Таким образом $\begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b \end{cases} \implies \exists \lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ Это позволяет свести теорию последовательностей $\{z_n\}$ комплексных чисел к $\mathbb{R}$, то есть все теоремы о сходимости вещественных последовательностей переносятся на комплексные числа.

Теорема (Критерий Коши)

$$\text{Последовательность } \{z_n\} \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon \text{ выполнено } \forall n, m > N$$

.

Опр. 23. Последовательность $\{z_n\}$ сходится к ∞ ($\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$) если

$$\forall R > 0 \ \exists N \ \ |z_n| > R \text{ выполнено для } \forall n > N$$

$$\text{При } z_n \neq 0 \ \lim_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$$