

Лекции по ТФКП, 3 семестр

Тимошенко Иван, 24123

1 Модели комплексных чисел

Введем стандартные понятия нужным образом:

\mathbb{R} - множество точек на прямой.

\mathbb{C} - расширение \mathbb{R} с помощью одного из корней уравнения $z^2 = -1$: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{0\}$, с замыканием относительно сложения и умножения.

Теорема 1 (Основная теорема алгебры) Множество комплексных чисел (\mathbb{C}) алгебраически замкнуто (любой многочлен степени n , коэффициенты которого лежат в \mathbb{C}), имеет корни в \mathbb{C} (с учетом кратности).

Замечание: Теорема верна и в частном случае многочлена, определенного над \mathbb{R} .

1.1 Стандартная модель комплексных чисел

Комплексное число z представляется парой $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с операциями:

- " + " : $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- " · " : $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$

Замечание: Операции согласованы с операциями на \mathbb{R} .

Замечание: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{R} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

В станд. модели $\begin{cases} 0 = (0, 0) \\ 1 = (1, 0) \end{cases}$

Опр. 1. Мнимая единица определена как пара $(0, 1)$.

Замечание: Некорректно определять мнимую единицу как корень уравнения $z^2 = -1$, т.к. $-i$ также является корнем.

$$\begin{aligned} i^2 &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \\ (-i^2) &= (0, -1) \cdot (0, -1) = (-(-1) \cdot (-1), 0) = (-1, 0) = -1 \end{aligned}$$

Замечание: Запись $\sqrt{-1}$ тоже некорректна.

Утв. 1 На \mathbb{C} нельзя ввести линейный порядок.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{C}$, и существует некий линейный порядок $<$.

$$\forall x \neq 0 \begin{cases} \text{либо } -\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \text{ и } 0 = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \\ \text{либо } \frac{x}{2} < -\frac{x}{2} \text{ и } 0 > x \end{cases}$$

Тогда $\forall x \neq 0$ либо $x > 0$, либо $-x > 0$. Т.е. $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$. Но $-1 = i^2 < 0$ - противоречие. \square

1.2 Матричная модель

Комплексное число $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{" + " : } \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{”} \cdot \text{”} : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_1y_2 - x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

В матричной модели ноль (нейтральный элемент по сложению) представлен матрицей $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, единица (нейтральный по умножению) $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мнимая единица $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В стандартной модели произвольное комплексное число $z = (x, y)$ имеет стандартную запись

$$z = x + iy, \text{ где } \begin{cases} x - \text{ вещественная часть} \\ y = \text{ мнимая часть} \end{cases}$$

Действия с комплексными числами:

- Сравнение (проверка равенства):

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ и } b = d$$

- Сложение:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

- Умножение:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

- Деление:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib) \cdot (c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac - bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

1.3 Геометрическая модель

Комплексное число представлено точкой с координатами (x, y) на плоскости.

Операции:

- ” + ”: действует как сложение векторов (покоординатно).

- ” . ” : $z_3 = z_1z_2 \iff \begin{cases} |z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \\ arg(z_3) = arg(z_1) + arg(z_2) \end{cases}$
где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $arg(z)$ задает угол между \vec{z} и Ох (определяется с точностью до периода).

Аргумент комплексного числа $Arg(z)$ - угол φ с точностью до периода 2π . **Главное значение аргумента** $arg(z)$ - φ в промежутке $[0; 2\pi]$.

Комплексно сопряженное к $z = x + iy$ это $\bar{z} = x - iy$.

$$|z| = |\bar{z}|, \quad arg(z) = -arg(\bar{z}), \quad Re(z) = Re(\bar{z}), \quad Im(z) = -Im(\bar{z})$$

$$\bar{z} \cdot z = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Законы де Моргана:

- $\overline{(z)}$ = z
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Неравенство треугольника:

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \end{cases} \implies ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.4 Стереографическая проекция

На комплексную плоскость положили сферу S радиуса $\frac{1}{2}$. Северный полюс сферы - вершина $N(0; 0; 1)$. Комплексному числу c , лежащему в плоскости комплексных чисел и имеющему координаты $(x, y, 0)$ ставится в соответствие точка, которая является точкой пересечения прямой Nc со сферой S . Зададим систему координат $O\xi\eta\zeta$ аналогично $Oxyz$, но O имеет координаты $(0, 0, \frac{1}{2})$. Уравнение сферы S :

$$\xi^2 + \eta^2 + (\xi - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 \quad (1)$$

Уравнение прямой Nc по двум точкам:

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0 \quad (2)$$

Получаем набор **обратных формул стереографической проекции**: $x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$, $z = \frac{\xi+i\eta}{\zeta-1}$. Отсюда найдем

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} \stackrel{\text{из } 2}{=} \frac{\zeta}{1-\zeta} \implies \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (3)$$

Подставим 3 в уравнение 1 и получим прямые формулы стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \quad (4)$$

Из геометр. построения стереографическая проекция взаимно однозначно отображает комплексную плоскость на сферу $S \setminus \{N\}$. Дополним стер. проекцию по непрерывности:

$$P : \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{на}} S \quad \text{где } \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{ а } S \text{ называют сферой Римана.} \quad (5)$$

Опр. 2. Обобщенная окрестность на комплексной плоскости - это любая окружность (или прямая, рассмотренная как окружность бесконечного радиуса).

Свойства стереографической проекции:

- Для любой обобщенной окружности $l \subset \overline{\mathbb{C}}$ ее образ $P(l) \subset S^2$ - это окружность.

Доказательство. Пусть l - некая обобщ. окрестность на $\overline{\mathbb{C}}$, тогда ее уравнение:

$$l : A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad \text{окружность при } A \neq 0, \text{ прямая при } A = 0$$

Подставим в него обратные формулы стереогр. проекции:

$$A \frac{\zeta}{1-\zeta} + B \frac{\xi}{1-\zeta} + C \frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0 \quad (6)$$

Поделим на $1 - \zeta$ и получим:

$$\Pi : B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0 \quad (7)$$

Но это уравнение некоторой плоскости Π в \mathbb{R}^3 , кроме того, $P(l) \subset S^2$, значит для l выполнено уравнение сферы Римана $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$. Тогда $P(l) = S^2 \cap \Pi$ - пересечение сферы с плоскостью окружность. \square

- \forall окружности $L \subset S^2$ $P^{-1}(L)$ является обобщенной окружностью на $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ такая, что $\Pi \cap S^2 = L$, а значит ее уравнение имеет вид (7). Разделим (7) на $1 - \zeta$, получим обобщенное уравнение прямой, подставим туда прямые формулы проекции и получим уравнение вида $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, а это - уравнение обобщенной окружности в $\overline{\mathbb{C}}$. \square

3. Стереографическая проекция сохраняет углы. То есть $\forall l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ и α - угол между ними, верно, что угол между $P(l_1)$ и $P(l_2)$ тоже равен α (угол между окружностями это угол между касательными в точке пересечения).

Опр. 3. Кривая - это функция (или ее образ) $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Параметром кривой g называют $t \in [a, b]$.

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\left| \frac{\partial g}{\partial t} \right|}, \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\left| \frac{\partial g}{\partial t} \right|} \right) \quad \vec{n} = \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}}{\left| \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right|}$$

Натуральный параметр на кривой g это $l \subset [0, L]$ (L - длина g), такой, что $\forall l$ выполнено $\frac{\partial g}{\partial l} = 1$. Набор $\{v, n\}$ называется базис Френе, для него выполнена теорема Френе. Уравнения Френе:

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(l) \\ -k(l) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}, \quad k(l) \text{ называется кривизной } g \subset \mathbb{R}^2$$

1.5 Виды записи

Стандартная запись $z = x + iy$.

Пусть $r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$.

Опр. 4. Тригонометрическая запись комплексного числа:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = x = r \cdot \cos(\varphi) \\ \operatorname{Im}(z) = y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \implies z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Опр. 5. Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \implies z = re^{i\varphi}$$

Тогда для натурального n :

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

Пусть $z \neq 0 \implies r = |z| > 0$. тогда $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}$, где $k = 0 \dots n-1$. Отсюда же получается формула Муавра для корней степени n из $z \neq 0$:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right)$$

Замечание: $\exists n$ различных корней степени n из комплексного числа $z \neq 0$.

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \text{окружности радиуса } r^{\frac{1}{n}} \text{ с центром в } (0, 0)$$

2 Множества на $\overline{\mathbb{C}}$

Опр. 6. • δ - окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C(\delta, z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}, \delta > 0$.

- Проколотая окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ - это множество $C^*(\delta, z_0) = C(\delta, z_0) \setminus \{z_0\}$

- Окрестность точки $\{\infty\}$ - множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \delta\}$

- Точка z - изолированная точка множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 : C(\delta, z) \cap E = \{z_0\}$

Опр. 7. Точка z называется предельной точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\forall \delta > 0 C^*(\delta, z) \cap E \neq \emptyset$

Опр. 8. Точка z называется внутренней точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 C(\delta, z) \subset E$

Опр. 9. Точка z называется внешней точкой множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\exists \delta > 0 C(\delta, z) \cap E = \emptyset$

Опр. 10. Точка z называется граничной точкой E , если

$$\forall \delta > 0 \begin{cases} C(\delta, z) \cap E \neq \emptyset \\ C(\delta, z) \setminus E \neq \emptyset \end{cases}$$

Замечание: Если граничная точка $z \notin E$, то она является предельной для E .

Опр. 11. Граница E - это совокупность всех граничных точек, обозначается ∂E .

Опр. 12. Множество называется ограниченным, если $\exists M (0 < M < \infty)$ - число, такое, что $\forall z \in E |z| < M$

Опр. 13. Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки (или их нет).

Опр. 14. Множество E называется открытым, если $\forall z \in E z$ является внутренней точкой для E , то есть $\forall z \in E \exists \delta > 0 : C(\delta, z) \subset E$

Опр. 15. Замыкание множества E это $\overline{E} = E \cup \partial E$.

Опр. 16. Диаметр множества $d(E) = \sup_{z, \xi \in E} |z - \xi|$

Опр. 17. Расстоянием между множествами E и G называется $D(E, G) = \inf_{z \in E, \zeta \in G} |z - \zeta|$

Опр. 18. Множество E называется связным, если его нельзя представить как $E = A \cup B$, $A, B \subset E$, таких, что

1. $A, B \neq \emptyset$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. A и B не содержат предельных точек друг друга.

Опр. 19. Множество E называется линейно связным, если $\forall z_1, z_2 \in E \exists$ непрерывная функция $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$ такая, что $\varphi(0) = z_1, \varphi(1) = z_2$

Опр. 20. Областью называется открытое связное множество.

Опр. 21. Компонента множества E - \forall максимальное по включению связное подмножество E . Область $E \neq \overline{\mathbb{C}}$ n -связная, если граница ∂E состоит из n компонент ($\overline{\mathbb{C}}$ считаем 1-связным).

Утв. 2 \forall множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ граница ∂E является замкнутым множеством.

Доказательство. Доказывается от противного:

Допустим, \exists предельная точка z_0 для ∂E : $z_0 \notin \partial E$. □

Теорема 2 (Принцип Больцано-Вейерштрасса) У любого бесконечного множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ \exists хотя бы одна предельная точка.

Теорема 3 (Лемма Гейне-Бореля) Из бесконечного открытого покрытия замкнутого множества точек на $\overline{\mathbb{C}}$ можно выделить конечное подпокрытие.

Следствие: На $\overline{\mathbb{C}}$ любое замкнутое и ограниченное множество является компактом.

3 Предельные ряды комплексных чисел

Опр. 22. Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$ называется сходящейся к пределу $\alpha = a + ib$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |z_n - \alpha| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Обозначается $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$

Следствие: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$

Попробуем перенести теорию последовательностей вещественных чисел на комплексные числа:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha &\implies \begin{cases} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \implies \\ \implies \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > N_2 \end{cases} &\implies |z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) |z_n - \alpha| < \varepsilon \forall n > N$

Таким образом $\begin{cases} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{cases} \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha$ Это позволяет свести теорию последовательностей $\{z_n\}$ комплексных чисел к \mathbb{R} , то есть все теоремы о сходимости вещественных последовательностей переносятся на комплексные числа.

Теорема (Критерий Коши)

Последовательность $\{z_n\}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |z_{n+m} - z_n| < \varepsilon$ выполнено $\forall n, m > N$

Опр. 23. Последовательность $\{z_n\}$ сходится к ∞ ($\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$) если

$$\forall R > 0 \exists N |z_n| > R \text{ выполнено для } \forall n > N$$

$$\text{При } z_n \neq 0 \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0$$

3.1 Ряды комплексных чисел

Если у знака суммы ряда не указаны границы - считать, что слагаемые суммируются по индексу k , k пробегает набор от 1 (иногда 0) до ∞

Опр. 24. Ряд комплексных чисел $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится (расходится), если сходится (расходится) последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Теорема (Критерий Коши сходимости ряда)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \begin{cases} \forall n > N \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases} |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$$

Опр. 25. Ряд α_k сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$. Но поскольку $|\sum_{k=1}^m \alpha_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_{n+k}|$, то из абсолютной сходимости ряда следует общая сходимость.

Утв. 3 Член ряда α_k представим в виде $a_k + ib_k$. Тогда:

$$\begin{cases} |a_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \\ |b_k| \leq |\alpha_k| \leq |a_k| + |b_k| \end{cases}$$

Значит, если $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ абсолютно сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже абсолютно сходятся. В свою очередь, из абсолютной сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует абсолютная сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$.

Опр. 26. Произведение двух сходящихся рядов сходится к произведению их сумм.

Стандартные разложения функций от комплексных чисел:

1. $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$
2. $\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$
3. $\cos(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!}$
4. $e^{i\alpha} = \sum \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{2k}}{2k!} + i \sum \frac{(-1)^k \cdot \alpha^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$

Пусть $|\alpha| = R$, $\arg(\alpha) = \varphi$. Тогда:

$$\alpha = R \cdot e^{i\arg(\alpha)} = R(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

И поскольку можем представить $\alpha = a + ib$:

$$e^{\alpha} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b)), \quad |e^{\alpha}| = e^a, \quad \arg(e^{\alpha}) = b$$

Поэтому $e^{2\pi k \cdot i} = 1$

4 Функции комплексного переменного

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ и $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ (т.е. $z \rightarrow f(z)$). Если f - инъекция, т.е. $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, то говорят, что f - однослойна. Если f действует из E в $f(E)$ (то есть еще и сюръективна, а значит - биекция), то $\exists f^{-1} : f(E) \rightarrow E$.

Опр. 27. Если z_0 - предельная точка множества E и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, то $f(z)$ непрерывна в z_0 .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Функция $f(z)$ представима в виде $u(z) + iv(z)$ (мнимая и комплексная части), а значит f непрерывна на $E \iff u(z), v(z), |f(z)|$ - непрерывны на E .

Если E - компактно, а f - непрерывно, то:

1. $|f(z)|$ достигает max и min на E
2. $f(z)$ равномерно непрерывна на E по т. Кантора

Опр. 28. Функция $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ - задает кривую на комплексной плоскости, если $x(t), y(t)$ - непрерывны.

- Если $\gamma(t)$ инъективна (за исключением $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$), то γ - жорданова кривая.
- $\gamma(t)$ называется гладкой, если $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\forall t \ \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$

Теорема (о стандартном радиусе) Пусть $\Gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ - гладкая замкнутая жорданова кривая. Тогда

$$\forall \theta_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) \ \exists \delta_0 \text{ такая, что}$$

1. Окружность $|z - z_0| = \inf_{z \in \Gamma} R \leq \delta_0$ пересекает Γ строго в двух точках
2. При переходе от $z_1 \in \Gamma$ к $z_2 \in \Gamma$, где $|z_2 - z_1| < \delta_0$ угол наклона касательной меняется меньше, чем θ_0
3. Если $|z - z_0| < \delta_0$ то $dS(s) < \frac{dr}{d\cos(\theta_0)}$

4.1 Функциональные ряды

Опр. 29. Ряд $\sum f_n(z)$ сходится на $E \subset \mathbb{C}$, если он сходится $\forall z \in E$. Сходится равномерно на E , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid \forall n > N \ \forall z \ |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Или ряд $\sum f_n(z)$ сходится равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall m \forall z \left| \sum_{k=0}^m f_{n+k}(z) \right| < \varepsilon$$

Теорема (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса) Если $\forall z \in E$ каждый элемент ряда, начиная с некоторого номера n_0 удовлетворяет неравенству

$$|f_k(z)| \leq \alpha_k, \ k \geq n_0 \tag{8}$$

и числовой ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то Функциональный ряд $\sum f_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно на E .

Доказательство. Так как ряд $\sum_{k=n_0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^m \alpha_{n+k} < \varepsilon \quad \forall n > N, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\left| \sum_{k=1}^m f_{n+k}(z) \right| \leq \sum_{k=1}^m |f_{n+k}(z)| \stackrel{\text{по нер-в} 8}{\leq} \sum_{k=1}^m \alpha_{n+k} < \varepsilon$$

Следовательно, по критерию Коши $\sum f_k(z)$ сходится равномерно и абсолютно. \square

Теорема Сумма $S(z) = \sum f_k(z)$ равномерно сходящегося ряда непрерывных на E функций $f_k(z)$ сама непрерывна на E .

Доказательство. Пусть $z_0 \in E$ - произвольная точка. Тогда для $z \in E$:

$$|S(z) - S(z_0)| \leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)|$$

По определению равномерной сходимости ряда $\sum f_k(z)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} |S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |S_N(z_0) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Конечная сумма $S_N(z) = \sum_{k=1}^N f_k(z)$ непрерывных на E функций $f_k(z)$ - сама непрерывна на E . Тогда по определению непрерывности функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

А значит $|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon \implies$ функция $S(z)$ непрерывна в z_0 . В силу произвольности выбора $z_0 \in E$ $S(z)$ непрерывна на E . \square

Опр. 30. Бесконечная сумма вида $\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot (z - z_0)^k$ называется степенным рядом, в котором C_k - коэффициенты степенного ряда.

Поскольку линейная замена $t = z - z_0$ превращает этот ряд в более удобную форму $\sum C_k t^k$ - то будем рассматривать ряды именно такого вида.

Теорема (Коши-Адамара) Пусть дан ряд $\sum C_k z^k$ и $l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}$. Тогда:

1. Если $l = 0$, то данный ряд сходится на всей комплексной плоскости ($\forall z \in \mathbb{C}$).
2. Если $l = \infty$, то ряд сходится при $z = 0$ и расходится $\forall z \neq 0$.
3. Если $0 < l < \infty$, то ряд абсолютно сходится в круге $|z| < \frac{1}{l}$ и расходится при $|z| > \frac{1}{l}$.

Число $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|}}$ называется радиусом сходимости степенного ряда, а круг $|z - z_0| < R$ называется кругом сходимости.

Доказательство. В точке $z = 0$ утверждение верно при $\forall C_k \implies \forall l$ ряд сходится, так как ряд сходится в $z = 0$. Пусть теперь $z \neq 0$.

Случай 1: $l = 0$.

То есть $l = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0$. Значит:

$$\forall z \neq \infty \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k z^k|} = |z| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 0 \text{ так как } |z| \neq \infty, \text{ а предел равен } 0$$

Тогда по радикальному признаку Коши для рядов с положительными членами ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |C_k z^k|$ сходится $\forall z \neq \infty$, т.е. ряд $\sum C_k z^k$ сходится на \mathbb{C} .

Случай 2: $l = \infty$.

Если бы ряд сходился в точке $z \neq 0$, то в силу необходимого условия сходимости $\exists M > 1 \ |C_k z^k| < M$ или $\sqrt[k]{|C_k|} < \frac{M}{|z|}$, что противоречит условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \infty$.

Случай 3: $0 < l < \infty$

Пусть $0 < |z| < \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \sqrt[k]{|C_k|} < \varepsilon \ \forall k > N$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1-l|z|}{2|z|} \implies \sqrt[k]{|C_k|} < l + \frac{1-l|z|}{2|z|} = \frac{1+l|z|}{2|z|}$. Тогда:

$$|z| \sqrt[k]{|C_k|} < \frac{1+l|z|}{2} = q < 1$$

$$|C_k z^k| < q^k, \ k > N$$

Значит ряд сходится абсолютно при $|z| < \frac{1}{l}$.

Пусть $|z| > \frac{1}{l}$. По определению верхнего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ бесконечное множество индексов } k_n, \ n = 1 \dots \infty \text{ таких, что } \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > l - \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon = \frac{l|z|-1}{|z|}$. Тогда $\sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > \frac{l|z|-l|z|+1}{|z|} \implies |z| \sqrt[k_n]{|C_{k_n}|} > 1$. Значит ряд расходится по радикальному признаку Коши при $|z| > \frac{1}{l}$. \square

Теорема 4 (Первая теорема Абеля) Если степенной ряд $\sum C_k z^k$ сходится в некоторой $z_0 \in \mathbb{C}$ такой, что $z_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в круге $|z| < |z_0|$.

Доказательство. По теореме Коши-Адамара ряд сходится абсолютно в круге $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Значит $|z_0| \leq R \implies$ ряд сходится абсолютно при $|z| < |z_0|$. \square

Напомню контекст: ряд (1) $\sum C_k z^k$, $R = \sqrt[\infty]{\lim_{k \rightarrow \infty} |C_k|}$.

Замечание: Степенной ряд не обязательно сходится равномерно в круге $|z| < R$.

Определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon \ \forall n > N, \forall z \in E$$

Доказательство. Для доказательства этого замечания сначала докажем формулы геометрической прогрессии:

Утв.

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Доказательство.

$$S_n + q^{n+1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = 1 + q * S_n$$

Значит $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ \square

Утв.

$$|q| < 1 \implies S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} (1 - q^{n+1}) = \frac{1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - q^{n+1} = \frac{1}{1 - q}$$

□

По первому утверждению:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \implies \forall z \in \mathbb{N} S(z) - S_n(z) = \frac{z^{n+1}}{1 - z} \implies \sup_{|z| < 1} |S(z) - S_n(z)| = \sup_{|z| < 1} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = \infty$$

□

Замечание: Степенной ряд равномерно сходится в любом замкнутом круге $|z| < r, \forall r < R$ (может быть 0).

Доказательство. Из условия теоремы ряд мажорируется рядом $\sum |C_k| r^k$, который сходится по радикальному признаку Коши. Значит степенной ряд равномерно сходится по признаку Вейерштрасса. □

Замечание: На границе круга сходимости (при $|z| = R$) степенной ряд может:

- расходится во всех точках (пример $\sum z^k$)
- сходится в некоторых точках границы и расходится в других (например, $\sum \frac{z^k}{k}$)
- сходиться во всех точках границы (например, $\sum \frac{z^k}{k^2}$)

Теорема 5 (Вторая теорема Абеля) Если степенной ряд с радиусом сходимости $R \in (0, \infty)$ сходится в точке z_0 , такой, что $|z_0| = R$, то сумма $S(z) \rightarrow S(z_0)$ при $z \rightarrow z_0$ изнутри круга по любой некасательной траектории.

Возвращаясь к формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$$

Степенные ряды для $e^z, \cos(z), \sin(z)$ сходятся равномерно в \forall круге $|z| < R$, где $0 < R < \infty \implies$ эти функции непрерывны на \mathbb{C} .

Утв. e^z - периодичная функция с периодом $2\pi ki$

Доказательство.

$$e^z \cdot e^t = e^{z+t} \implies e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z (\cos(2\pi ki) + i \sin(2\pi ki)), k \in \mathbb{Z}$$

□

По формуле Эйлера:

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \tag{9}$$

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z) \tag{10}$$

$$(9) + (10) : e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos(z) \implies \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{11}$$

$$(9) - (10) : e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin(z) \implies \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{12}$$

То есть формулы тригонометрии остаются в силе.

Нули функции $\sin(z)$: Из (12):

$$\sin(z) = 0 \implies e^{iz} - e^{-iz} = 0 \implies e^{2iz} - 1 = 0 \implies e^{2iz} = e^{2\pi ki}, k \in \mathbb{Z}$$

Значит нули функции $\sin(z)$ имеют вид $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично нули функции $\cos(z)$ имеют вид $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание: Функции $\sin(z)$ и $\cos(z)$ не ограничены на \mathbb{C}

Доказательство. z представимо в виде $x+iy$. Из (11): $2\cos(z) = e^{iz} + e^{-iz}$. Мы знаем, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, значит:

$$|2\cos(z)|^2 = (e^{iz} + e^{-iz}) \cdot (e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}) = e^{-2y} + e^{2y} + 2\cos(2x) \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} \infty$$

□

Опр. 31.

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \cosh(iz) = \cos(iz)$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \sinh(iz) = i \sin(iz)$$

5 Аналитические функции

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$ - функция, определенная в области $D \in \mathbb{C}$.

Опр. 32. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой (моногенной), в точке $z \in D$, если

$$\exists! \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \text{ где } z + \Delta z \in D$$

Этот предел называется производной функции f и обозначается $f'(z)$

Замечание: Если этот предел существует, то он не зависит от того, как Δz стремится к 0.

Доказательство. **Шаг 1**

Рассмотрим $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta y = 0$):

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Шаг 2

Пусть теперь $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ ($\Delta x = 0$):

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right] = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для доказательства замечания нам необходимо, чтобы эти производные были равны, тогда:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \text{ - условие Коши-Римана}$$

□

Утв. 4 Если $\exists f'(z)$ в точке $z \in D$, то выполнено условие Коши-Римана, но обратное утверждение не верно.

Доказательство. Слева направо (\implies) доказали в предыдущем замечании. Докажем справа налево (\impliedby). Построим контрпример:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Заметим, что если $f(0) = 0$, то $f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$

Пусть $x \rightarrow 0, y = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x} = u_x + iv_x = 0 \implies u_x = 0, v_x = 0$$

Пусть $y \rightarrow 0, x = 0$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(iy)}{iy} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(iy)^4}}}{iy} = v_y + iu_y = 0 \implies v_y = 0, u_y = 0$$

То есть $u_x = v_y = 0, v_x = -u_y = 0$. Значит условие Коши-Римана выполнено в $z = 0$, но с другой стороны, $f(z)$ не то, что не дифференцируема, она разрывна в $z = 0$:

Пусть $z = (1+i)x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f((1+i)x)}{(1+i)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{(1+i)^4 x^4}}}{(1+i)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{(1+i)x} = \infty$$

$\infty \neq 0 \implies$ функция $f(z)$ не непрерывна в 0 $\implies \nexists f'(0)$.

□

Утв. 5 Если функции $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в z и выполнено условие Коши-Римана, то $\exists f'(z)$.

Доказательство. Так как u, v - дифференцируемы в z , то

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|)\end{aligned}\quad \text{где } |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (13)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (14)$$

Заметим, что

$$\Delta x = \frac{1}{2} (\Delta z + \Delta \bar{z}), \quad \Delta y = \frac{1}{2i} (\Delta z - \Delta \bar{z}) \quad (15)$$

Тогда перепишем (13):

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u + i \Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + o(\Delta z) \stackrel{\text{по (14) и } \Delta x, \Delta y}{=} \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}$$

Это выражение - формальная частная производная по z и \bar{z} . Подставив эти формулы в (15) получим

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|)$$

Заметим, что $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff$ выполнено условие Коши-Римана. Разделим предыдущее выражение на $\Delta z \neq 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$$

Поскольку $\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$, то

$$\exists \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$$

□

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) \implies \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z) + \eta, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta = 0$$

Значит $\Delta w = \Delta f = f'(z) \Delta z + \eta \cdot \Delta z$, где $f'(z) \Delta z$ - линейная часть приращения функции относительная Δz , она же главная часть приращения, она же дифференциал функции.

Обозначим $dw = df(z) = f'(z) \Delta z$. В частности, если $f(z) = z$, то $df(z) = dz = \Delta z \implies df(z) = f'(z)dz$ или $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$.

Опр. 33. Функция $f(z)$ называется аналитичной в области D , если $\forall z \in D \exists f'(z)$.

Опр. 34. Функция $f(z)$ называется аналитичной в точке $z_0 \in D$ (D - область), если $f(z)$ аналитична в некоторой открытой окрестности точки z_0 .

Теорема Сумма степенного ряда $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k$ аналитична в круге его сходимости $|z| < R$, причем $S'(z) = \sum k C_k z^{k-1}$.

Доказательство. Пусть ряд

$$S_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k C_k z^{k-1} \quad (16)$$

Заметим, что радиус сходимости ряда $S'_0(z)$ тоже равен R :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k C_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = R - \text{по теореме Коши-Адамара}$$

$$S_0(0) = C_1; \quad S_0(z) = \sum k C_k z^{k-1} = \frac{1}{z} \sum k C_k z^k$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} k = (1 + (k^{\frac{1}{k}} - 1))^k &= 1 + k(k^{\frac{1}{k}} - 1) + \frac{k(k-1)}{2}(k^{\frac{1}{k}} - 1)^2 + \dots + (k^{\frac{1}{k}} - 1)^k \implies k > \frac{k(k-1)}{2}(k^{\frac{1}{k}} - 1)^2 \\ &\implies |k^2 - 1| < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{k-1}}} < \varepsilon \end{aligned}$$

Пусть z - произвольная точка круга $|z| < R$ и $\Delta z : |z + \Delta z| < R$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z) \right| &\stackrel{?}{<} \varepsilon \\ \left| \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z) \right| &\leq \left| \sum \left[\frac{C_k(z + \Delta z)^k - C_k z^k}{\Delta z} - k C_k z^k \right] \right| = \left| \sum C_k \left[\frac{(z + \Delta z)^k}{\Delta z} \right] \right| \quad (17) \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое можно расписать как

$$\begin{aligned} \frac{(z + \Delta z)^k}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)^{k-1}(z + \Delta z)}{\Delta z} = \\ &= (z + \Delta z)^{k-1} + \frac{z(z + \Delta z)^{k-1}}{\Delta z} \stackrel{\text{так же}}{=} (z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1} + \frac{z^k}{\Delta z} \quad (18) \end{aligned}$$

Тогда второе слагаемое из (17) сокращается с последним слагаемым (18) и получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum C_k [(z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1} - k z^{k-1}] \right| &\stackrel{\text{дважды нер-во } \Delta\text{-ника}}{\leq} \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^N C_k [(z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1} - k z^{k-1}] \right| + \\ &\quad \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} C_k [(z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \dots + z^{k-1}] \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} k C_k z^{k-1} \right| \end{aligned}$$

Возьмем число $r : 0 < r < R$ и $|z + \Delta z| < r$. Из абсолютной сходимости ряда (16) в круге $|z| < R \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(r, \varepsilon)$ Введем новый ряд

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k |C_k| r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

При таком N второй и третий модули $< \frac{\varepsilon}{3}$ по критерию Коши абсолютной сходимости ряда (16). А в первом модуле конечная сумма, которая стремится к 0 при $\Delta z \rightarrow 0$, то есть по определению предела, первый модуль тоже $< \frac{\varepsilon}{3}$ \square

Замечание: Сумма степенного ряда $S'(z) = \sum kC_k z^{k-1}$ тоже аналитична в круге $|z| < R$, причем

$$S''(z) = \sum k(k-1)C_k z^{k-2}$$

$$S^{(n)} = \sum k(k-1)\dots(k-n+1)C_k z^{k-n} \xrightarrow{\text{при } z=0} C_n = \frac{S^{(n)}(z)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

6 Конформные отображения

Рассмотрим функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, она аналитична в области D , причем $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$.

$$\text{Условие Коши-Римана: } \begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

Якобиан $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = |f'(z)|^2 \stackrel{f'(z_0) \neq 0}{\Rightarrow} \frac{D(u,v)}{D(x,y)}|_{z=z_0} \neq 0$.

Значит по теореме о неявной функции система $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определяет однозначные непрерывные функции $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, значения которых лежат в окрестности точки z_0 .

$$(f^{-1}(w_0))' = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Обратная функция $z = f^{-1}(w)$ непрерывна в окрестности точки $w_0 \implies (\Delta w \rightarrow 0) \iff (\Delta z \rightarrow 0)$

Опр. 35. Если $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$, то функция $f(z)$ называется локально однолистной в D (синоним "взаимнооднозначной").

Замечание: Из локальной обратимости не следует глобальная обратимость (функция $w = f(z)$ локально обратима в области $D \nRightarrow$ функция $w = f(z)$ однолистна в D).

6.1 Геометрический смысл $|f'(z)|$ и $\arg f'(z)$ аналитической функции $f(z)$

Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - аналитическая функция в области D и $f'(z) \neq 0$.

Пусть γ - гладкая кривая Жордана, заданная уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, где $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Если $z_0 = z(t_0)$, $t_0 \in [\alpha, \beta]$, то пусть $z'(t_0) \neq 0$.

Функция $w = f(z)$ отображает кривую γ в Γ , $w_0 = f(z_0) \in \Gamma$.

Уравнение кривой Γ :

$$\Gamma : w = w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \implies w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0) \quad (19)$$

$$\begin{cases} dz = z'(t)dt = [x'(t) + iy'(t)]dt \\ dw = w'(t)dt = [u'(t) + iv'(t)]dt \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = |z'(t)|dt \\ d\sigma = \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2}dt = |w'(t)|dt \end{cases} \quad \text{- элементы длины кривой } \gamma(ds) \text{ и } \Gamma(d\sigma) \text{ соответственно} \quad (21)$$

Из (20) $\implies \frac{dw}{dz}|_{t=t_0} \stackrel{(19)}{=} f'(z_0) \implies |f'(z_0)| = \frac{d\sigma_0}{ds_0}$, где $d\sigma_0$ и ds_0 - элементы длины кривых γ и Γ в точках $z_0 = z(t_0)$ и $w_0 = w(t_0) \implies |f'(z_0)|$ - коэффициент искажения элемента длины дуги в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Коэффициент искажения не зависит от направления кривой в этой точке, а лишь от f .

Будем говорить, что при отображении $\begin{cases} w = f(z) \\ f'(z_0) \neq 0 \end{cases}$ в z_0 имеет место **постоянство искажения**.

Из (19):

$$\implies \arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) \quad (22)$$

Из (22) $\arg f'(z_0)$ - угол поворота \forall кривой в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Опр. 36. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в D . Если $f'(z) \neq 0$ для $z \in D$, то в z при отображении $w = f(z)$ имеет место **консерватизм углов**.

Опр. 37. Конформное отображение области D - это топологическое (гомеоморфное: взаимнооднозначное и непрерывное) отображение этой области, при котором в каждой точке $z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения.

Из геометрического смысла $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$ делаем вывод:

Утв. Если функция $w = f(z)$ осуществляет отображение области D и $\forall z \in D$ имеет место консерватизм углов и постоянство искажения, то $w = f(z)$ аналитична в D и $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$.

Из него сразу вытекает:

Утв. Конформное отображение области D осуществляется однолистной в D аналитической функцией $w = f(z)$, $f'(z) \neq 0$.

6.2 Дробно-линейное отображение

Опр. 38. Дробно-линейным отображением (ДЛО) называется отображение $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, у которого $ad-bc \neq 0$. Если $ad-bc = 0$, то такое отображение называется **вырожденным** дробно-линейным отображением.

Пусть отображение $w = \frac{az+b}{cz+d}$ переводит z_1 в w_1 , z_2 - в w_2 :

$$w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}, \quad w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}, \quad w_1 - w_2 = \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$$

Опр. 39. Линейное отображение: $w = az + b$ можно представить как композицию отображений следующих отображений:

$$\zeta = |a| z(\text{подобие}), \quad v = e^{i \arg a} \cdot \zeta(\text{поворот на угол } \arg a \text{ вокруг } O), \quad w = v + b(\text{сдвиг})$$

Таким образом линейное отображение конформно отображает комплексную плоскость (\mathbb{Z}) на комплексную плоскость (\mathbb{W}) :

$$w(z) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

Покажем, что $w = \frac{1}{z}$ обладает круговым свойством. Функция $w = \frac{1}{z}$ однолистна и аналитична в $\overline{\mathbb{C}}$, $w' \neq 0 \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, значит $w = \frac{1}{z}$ конформно отображает комплексную плоскость (\mathbb{Z}) на комплексную плоскость (\mathbb{W}) : $w(z) = \frac{1}{z} : \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow[\text{на}]{} \overline{\mathbb{C}}$.

Любая обобщенная окружность на $\overline{\mathbb{C}}$ имеет уравнение вида

$$A(x^2 + y^2) + bx + b_1y + c = 0$$

Можем преобразовать:

$$z = x + iy \implies Az \cdot \bar{z} + \bar{B}z \cdot B\bar{z} + c = 0, \quad B = \frac{b + ib_1}{2}$$

Подействуем на эту окружность отображением $w = \frac{1}{z}$:

$$A \cdot \frac{1}{ww} + \bar{B} \cdot \frac{1}{w} + B \cdot \frac{1}{\bar{w}} + c = 0$$

Значит уравнение обобщенной окружности на плоскости (\mathbb{W}) имеет вид:

$$Cw\bar{w} + \bar{B}\bar{w} + Bw + A = 0$$

То есть функция $w = \frac{1}{z}$ обладает круговым свойством.

Любое невырожденное ДЛО $w = \frac{az+b}{cz+d}$ либо является линейным (при $c = 0$), либо композиция следующих отображений:

$$\zeta = \frac{c^2}{ad-bc}z + \frac{cd}{ad-bc}, \quad v = \frac{1}{\zeta}, \quad w = v + \frac{\alpha}{c}$$

А значит любое непрерывное ДЛО обладает круговым свойством и конформно отображает комплексную плоскость \mathbb{C} на \mathbb{C} .

6.3 Симметрия относительно окружности $|z - z_0| = R$

Опр. 40. Точки z_1, z_2 называются симметричными относительно окружности $|z - z_0| = R$, если они лежат на одном луче с началом в z_0 и $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R$. Отображение $w = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{z}_0}$ меняет внутреннюю и внешнюю области окружности местами, оставляя окружность неподвижной.

6.4 Симметрия относительно прямой $z = z_0 + te^{i\varphi}, t \in \mathbb{R}$

Две точки симметричны относительно прямой на комплексной плоскости, если перпендикуляры, опущенные из этих точек на прямую равны по длине. Отображение $w = z_0 + e^{2i\varphi}(z - \bar{z}_0)$ отображает комплексную плоскость симметрично относительно прямой (меняет две области по ее сторонам местами).

6.5 Сдвиг плоскости на вектор

Сдвиг плоскости на вектор b - это композиция двух симметрий:

1. $\zeta = e^{2i\varphi}\bar{z}$
2. $w = \frac{b}{2} + e^{2i\varphi}(\bar{\zeta} - \frac{\bar{b}}{2})$, где $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arg b$

6.6 Подобие

Отображение подобия $w = kz, k > 0$ - композиция двух симметрий:

1. $\zeta = \frac{1}{z}$ (относительно окружности $|z| = 1$)
2. $w = \frac{k}{\zeta}$ (относительно окружности $|\zeta| = \sqrt{k}$)

Утв. Любое невырожденное ДЛО $w = \frac{az+b}{cz+d}$ - это композиция четного числа отображений симметрии относительно обобщенных окружностей.

Замечание:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \omega = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} = \frac{Az+B}{Cz+D} \text{ - если } AD - BC = (ad - bc)(a\delta - \gamma\beta).$$

Композиция двух ДЛО является невырожденным ДЛО \iff эти два ДЛО невырожденные.

Утв. (Следствие) Композиция любого четного числа симметрий относительно обобщенных окружностей является ДЛО.

Теорема Пусть заданы 3 точки: $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, и 3 точки $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует единственное ДЛО $w = \frac{az+b}{cz+d}$ такое, что

$$w_1 = w(z_1), \quad w_2 = w(z_2), \quad w_3 = w(z_3)$$

Доказательство.

$$w_j - w_k = \frac{(ad - bc)(z_j - z_k)}{(cz_j + d)(cz_k + d)}$$

Причем

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \quad (23)$$

Используя $w = \frac{az+b}{cz+d}$ что-то куда-то подставим и все будет хорошо. Соотношение (23) называются ангармоническим соотношением четверки точек. \square

Утв. (Следствие) Любое невырожденное ДЛО сохраняет ангармоническое соотношение.

Опр. 41. Положительное направление обход границы это такое направление, при котором область D остается слева.

Утв. Любое невырожденное ДЛО сохраняет положительное направление обхода (то есть ориентацию на \mathbb{C}).

Общий вид ДЛО: $w = \frac{az+b}{cz+d}$, оно отображает область $Im(z) > 0$ на единичную окружность $|z| < 1$. Прообразом z_1 точки $w_1 = 0$ будет точка $-\frac{b}{a}$, прообразом точки $w_2 = \infty$ будет точка $z_2 = -\frac{d}{c}$. Так как точки $w_1 = 0$; $w_2 = \infty$ симметричны относительно окружности $|w| < 1$, то их прообразы z_1 и z_2 должны быть симметрично относительно прямой $y = 0$. Обозначим $z_0 = z_1 = -\frac{b}{a}$ и $\bar{z}_0 = z_2 = -\frac{d}{c}$.

Раз $w_1 \in w(D)$, то $z_0 \in D \implies Im(z_0) > 0$.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \implies |w| = \left| \frac{a}{c} \right| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$$

При $y = 0$: $1 = |w| = \left| \frac{a}{c} \right| = 1$, так как $\left| \frac{a}{c} \right|$ - это константа, равная единице, то эта точка лежит на единичной окружности, тогда ее представление в формуле Эйлера $\frac{a}{c} = e^{i\varphi}$ для некоторого φ . В таком случае $w = e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, где φ - константа $\in [0; 2\pi]$, а z_0 - константа $\in \mathbb{C}$, но $Im(z_0) > 0$.

$w = e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ - этот общий вид ДЛО, которое отображает верхнюю полуплоскость $Im(z) > 0$ на единичный круг.

В случае, когда $Im(z_0) < 0$ - верхняя полуплоскость отображает во внешность единичной окружности $|z| > 1$.

Построим ДЛО для отображения внутренности единичной окружности $|z| < 1$ в такую же единичную окружность $|w| < 1$.

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{b}{a} \\ z_2 = -\frac{d}{c} \end{cases} \implies \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = \infty \end{cases}$$

Аналогично предыдущим рассуждениям $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ симметричны относительно $|w| = 1$, значит их прообразы симметричны относительно $|z| = 1$. В таком случае $z_1 = \frac{1}{\bar{z}_0}$. Обозначим $z_0 = z_1 = -\frac{b}{a} \implies -\frac{d}{c} = \frac{1}{\bar{z}_0}$. При этом $|z_0| < 1$ так как $z_0 \in \{|z| < 1\}$.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} = \frac{a\bar{z}_0}{cz_0} \cdot \frac{z - z}{\bar{z}_0 - \frac{1}{z}} \implies |w| = \left| \frac{a\bar{z}_0}{cz_0} \right| \cdot \left| \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 - \frac{1}{z}} \right|$$

На границе окружности при $|z| = 1$:

$$|z| = 1 \rightarrow 1 = |w| = \left| \frac{a\bar{z}_0}{cz_0} \right| \cdot \left| \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 - \frac{1}{z}} \right| \implies \left| \frac{a\bar{z}_0}{cz_0} \right| - const$$

То есть $\left| \frac{a\bar{z}_0}{cz_0} \right| = e^{i\varphi}$ для постоянного $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Значит $w = e^{i\varphi} \cdot \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 - \frac{1}{z}}$ - общий вид ДЛО, отображающего $|z| < 1$ в $|w| < 1$. Если $|z_0| > 1$, то $|z| < 1$ перейдет в $|w| > 1$.

7 Теория интеграла Коши

Пусть Γ - гладкая кривая Жордана (то есть без самопересечений) с началом в точке a и концом в точке b . Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - непрерывная функция, заданная на Γ . Выделим упорядоченный набор точек $z_k = x_k + iy_k$ на этой кривой, $a = z_0$, $b = z_{n+1}$. Выделим последовательность точек ζ_k , таких, что каждая ζ_k лежит где-то в отрезке (z_k, z_{k+1}) .

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, k = 0, \dots, n$$

Введем некоторое $\Delta = \max_{0 \leq k \leq n} |\Delta z_k|$, которое будем называть диаметром разбиения $\{z_k\}$ кривой Γ . $S = \sum_{k=0}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$ - интегральная сумма. Представим все через действительную и мнимую части:

$$S = S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i \sum_{k=0}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k]$$

Таким образом первое слагаемое представляет S_1 , а второе представляет S_2 .

При стремлении разбиения $\Delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S_1 = \int_{\Gamma} u \, dx - v \, dy, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_2 = \int_{\Gamma} u \, dy - v \, dx$$

Тогда

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_{\Gamma} u \, dx - v \, dy + i \int_{\Gamma} u \, dy - v \, dx$$

Этот предел не зависит от выбора разбиения $\{z_k\}$ кривой Γ и от выбора точек ζ_k из соответствующих дуг кривой с концами z_k и z_{k+1} , это доказывается в курсе матанализа для каждого из двух интегралов.

Если кривая Γ задана уравнением $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) \, dt$$

Свойства интеграла:

1. Ориентированность:

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = - \int_{\Gamma^-} f(z) \, dz, \text{ где } \Gamma^- \text{ - кривая } \Gamma \text{ с противоположным направлением движения}$$

2. Линейность: если $f_k(z)$, $k = 1, \dots, m$ - непрерывные функции на Γ , c_k - константы из \mathbb{C} , то

$$\int_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^m c_k f_k(z) \right] \, dz = \sum_{k=1}^m c_k \int_{\Gamma} f_k(z) \, dz$$

3. Аддитивность: если $\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z) \, dz$$

Утв. Пусть D - $(m+1)$ -связная область, $\partial D = \Gamma = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_m$, где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ лежат внутри области, ограниченной Γ_0 .

Тогда $\int_{\Gamma^+} f(z) \, dz = \int_{\Gamma_0} f(z) \, dz - \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} f(z) \, dz$, где Γ^+ - кривая Γ с положительным направлением обхода.

Рассмотрим $\int_{|z|=R} z^n dz$. Пусть $\gamma(t) = R \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \int_{|z|=R} z^n dz &= \int_0^{2\pi} (R \cdot e^{it})^n \cdot i \cdot R \cdot e^{it} dt = \\ &= iR^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{iR^{n+1}}{i(n+2)} e^{i(n+2)t} \Big|_0^{2\pi} \underset{\text{при } n \neq -2}{=} 0 \\ \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{iR \cdot e^{it} dt}{R \cdot e^{it}} = \int_0^{2\pi} i dt = i \cdot t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \cdot i \end{aligned}$$