人工智能：知识表示和推理 II

饶洋辉
计算机学院,
中山大学
raoyangh@mail.sysu.edu.cn
http://cse.sysu.edu.cn/node/2471

课件来源：中山大学刘咏梅教授、王甲海教授；多伦多大学Hector Levesque教授和Sheila McIlraith教授；海军工程大学贲可荣教授等

知识表示和推理

1 谓词逻辑

2 归结推理

3 知识图谱

推理程序

- 我们希望找到一种自动的推理程序来判断“*KB*逻辑上蕴涵α”是否成立。
- 对于一个推理程序:
- 它是合理的（Sound）是指：如果该推理程序认为答案为yes，那么“*KB*逻辑上蕴涵α”是成立的;
- 它是完备的（Complete）是指：如果“*KB*逻辑上蕴涵α”，那么该推理程序会认为答案为yes。

归结推理

- 1965年，由Robinson (鲁宾逊)提出归结法
- 归结法的基本思想
- 命题逻辑的归结原理和过程
- 谓词逻辑的归结原理和过程
- 应用归结原理求解问题
- 归结反演

什么是归结原理

- 在定理证明系统中，已知一个公式集F_1，F_2，…，F_n，要证明一个公式W (定理)是否成立，即要证明W是公式集的逻辑推论时，一种证明法就是要证明$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow W$为永真式。
- 反证法：证明$F = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg W$为永假，这等价于证明$F$对应的子句集$S = \{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg W\}$为不可满足的。

子句集

- **文字（literal）**：原子公式及其否定。例如，P：正文字，$\neg P$：负文字。
- **子句（clause）**：任何文字的析取。某个文字本身也都是子句。

$$P \vee Q \vee \neg R,\ \text{记作}(P, Q, \neg R)$$

- **空子句（NIL）**：不包含任何文字的子句。

空子句是永假的，不可满足的。

- **子句集**：由子句构成的集合（子句的合取）。

归结式的定义及性质

- 对于任意两个子句C_1和C_2，若C_1中有一个文字L，而C_2中有一个与L成互补的文字$\neg L$，则分别从C_1和C_2中删去L和$\neg L$，并将其剩余部分组成新的析取式。这个新的子句被称为C_1和C_2关于L的归结式，C_1和C_2则是该归结式的亲本子句

- 例如，P和$\neg P$的归结式为空子句，记作()、□或NIL；(W, R, Q)和$(W, S, \neg R)$关于R的归结式为(W, Q, S)

- 定理：两个子句的归结式是这两个子句的逻辑推论，如$\{(P, C_1), (\neg P, C_2)\} \models (C_1, C_2)$

鲁宾逊归结原理

- 子句集中子句之间是合取关系，只要有一个子句不可满足，则子句集就不可满足。

- **鲁宾逊归结原理（消解原理）的基本思想：**
  - **检查子句集 *S* 中是否包含空子句，若包含，则 *S* 不可满足。**
  - **若不包含，在 *S* 中选择合适的子句进行归结，一旦归结出空子句，就说明 *S* 是不可满足的。**

推导

- 从一个子句集S（如KB）推导出一个子句C的过程中会产生一系列子句$C_1, C_2, \ldots, C_n$，其中$C_n = C$，且对于C_i $(i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$均有：
  - $C_i \in S$
  - 或者C_i是推导过程中产生的某两个子句的归结式
- 从S推导出C记为：$S \vdash C$

推导的合理性

- 定理：如果$S \vdash C$，那么$S \models C$
- 证明：
  - 令S推导出C产生的子句序列为$C_1, C_2, \ldots, C_n$
  - 通过数学归纳法证明对于$i \in [1, n]$，$S \models C_i$均成立
- 反之，若$S \models C$，则从S中不一定能够推导出C。例如，$P \models (P, Q)$，但是P不能推导出(P, Q)

归结法的合理性和完备性

- 定理：$S \vdash ()$，当且仅当$S \models ()$，当且仅当S不可满足
- 由前文可知，$KB \models \alpha$，当且仅当$KB \wedge \neg \alpha$不可满足。结合上述定理，我们通过下述过程来判断$KB \models \alpha$是否成立：
  - 记$KB \wedge \neg \alpha$的子句集为S
  - 判断$S \vdash ()$是否成立，即从S中能否推导出空子句
- 归结法的过程比较单纯，只涉及归结推理规则的应用问题，因而便于实现机器证明。

命题逻辑的归结原理和过程

命题逻辑中，若给定前提集F和命题P，则归结证明过程可归纳如下：

(1)把F转化成子句集表示，得到子句集S_0;

(2)把命题P的否定式$\neg P$也转化成子句集表示，并将其加到S_0中，得$S = S_0 \cup S_{\neg P}$，

(3)对子句集S反复应用归结推理规则（推导），直至导出含有空子句的扩大子句集为止。即出现归结式为空子句时，表明已找到矛盾，证明过程结束。

命题逻辑的归结原理和过程

例1：设已知前提集为

P...............(1)　　$(P \wedge Q) \to R$......(2)

$(S \vee T) \to Q$...(3)　　T..................(4)

求证R。

证明：化成子句集

$S = \{P, \ \neg P \vee \neg Q \vee R,$

$\neg S \vee Q, \ \neg T \vee Q, \ T,$

$\neg R\}$

- 归结可用图的演绎树表示，由于根部出现空子句，因此命题R得证。

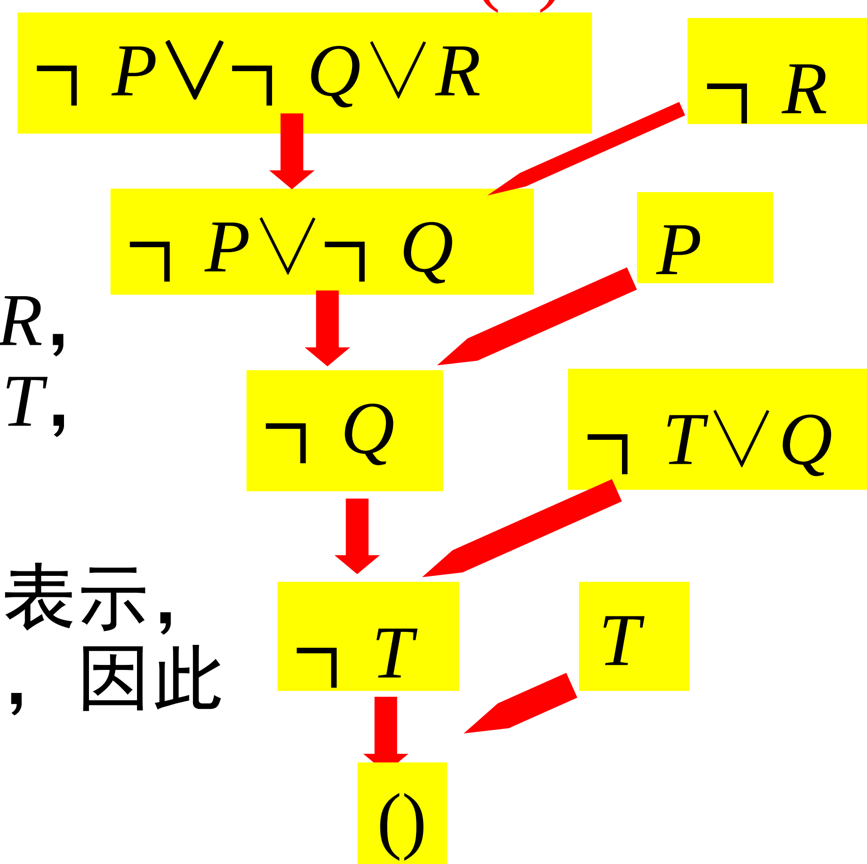
命题逻辑的归结原理和过程

例1：设已知前提集为

P……………(1)　　$(P\wedge Q)\rightarrow R$……(2)

$(S\vee T)\rightarrow Q$…(3)　　T………………(4)

求证R。



证明：化成子句集

$S=\{P,\ \neg P\vee\neg Q\vee R,\ \neg S\vee Q,\ \neg T\vee Q,\ T,\ \neg R\}$

- 归结可用图的演绎树表示，由于根部出现空子句，因此命题R得证。

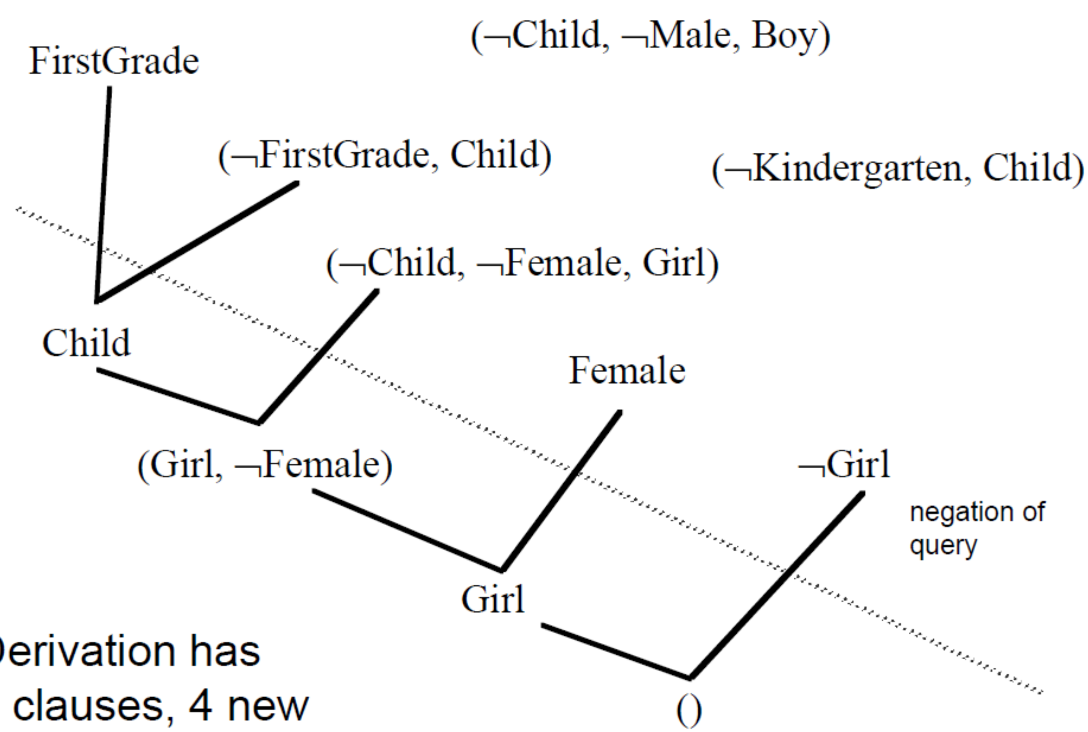
命题逻辑的归结原理和过程

例2：

KB

FirstGrade
FirstGrade -> Child
Child $\wedge$ Male -> Boy
Kindergarten -> Child
Child $\wedge$ Female -> Girl
Female

Show that KB |= Girl



Derivation has
9 clauses, 4 new

谓词逻辑的归结原理和过程

在谓词逻辑中应用归结法时，首先需要：

（1）将所有谓词公式（包括知识库KB和查询α）化为子句集

（2）通过合一，对含有变量的子句进行归结

$$C_1 = P(x) \vee Q(x)$$

$$C_2 = \neg P(\mathrm{a}) \vee R(y)$$

?

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\forall y P(x,y) \rightarrow \neg\forall y(Q(x,y) \rightarrow R(x,y)))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(1) 消去蕴涵和等价符号（→和↔ 联结词）。

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q,\quad P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg\forall y P(x,y) \vee \neg\forall y(\neg Q(x,y) \vee R(x,y)))$$

(2) 内移否定符号¬，将其移到紧靠谓词的位置上。

双重否定律 $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

德.摩根律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q,\quad \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

量词转换律 $\neg\exists x P \Leftrightarrow \forall x \neg P,\quad \neg\forall x P \Leftrightarrow \exists x \neg P$

$$\Longleftrightarrow \forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(3) 变量标准化。对变量作必要的换名，使每一量词只约束一个唯一的变量名。

$$\exists x P(x) \equiv \exists y P(y), \qquad \forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists z(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$$

(4) 消去存在量词（Skolemize）。对于待消去的存在量词，若不在任何全称量词辖域之内，则用Skolem常量替代公式中存在量词约束的变量；若受全称量词约束，则要用Skolem函数替代存在量词约束的变量，然后就可消去存在量词。

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists z(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$$

Skolemize：

对于一般情况

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \exists y P(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$$

存在量词y 的Skolem函数为$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Skolem化：用Skolem函数替代存在量词约束的变量的过程。

$y = f(x)$,
$z = g(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall x(\neg P(x, f(x)) \vee (Q(x, g(x)) \wedge \neg R(x, g(x))))$

(5) 化为前束型。前束型=（前缀）{母式}。其中，前缀为全称量词串，母式为不含量词的谓词公式。

谓词逻辑的归结原理和过程

$$\forall x(\neg P(x, f(x)) \vee (Q(x, g(x)) \wedge \neg R(x, g(x))))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(6) 把母式化成合取范式。反复使用结合律和分配律，将母式表达成合取范式的Skolem标准形。

Skolem 标准形：$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n M$

M：子句的合取式，称为Skolem标准形的母式。

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x((\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))))$$

(7) 略去全称量词。由于母式的变量均受全称量词的约束，因此可省略掉全称量词。

$$\Longleftrightarrow \quad (\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x)))$$

谓词逻辑的归结原理和过程

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x)))$$

谓词公式化为子句集的步骤：

(8) 把母式用子句集表示。把母式中每一个合取元称为一个子句，省去合取联结词，这样就可把母式写成集合的形式表示，每一个元素就是一个子句。

$$\Longleftrightarrow \{(\neg P(x, f(x)), Q(x, g(x))),\quad (\neg P(x, f(x)), \neg R(x, g(x)))\}$$

(9) 子句变量标准化。对某些变量重新命名，使任意两个子句不会有相同的变量出现。这是因为在使用子句集进行证明推理的过程中，有时需要例化某一个全称量词约束的变量，该步骤可以使公式尽量保持其一般化形式，增加了应用过程的灵活性。

$$\Longleftrightarrow \{(\neg P(x, f(x)), Q(x, g(x))),\quad (\neg P(y, f(y)), \neg R(y, g(y)))\}$$

谓词逻辑的归结原理和过程

- 例1 将下列谓词公式化为子句集。

$$\forall x\{[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\rightarrow\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall x[P(x)\vee B(x)]$$

- （1）消去蕴涵符号

$$\forall x\{\neg[\neg P(x)\vee\neg Q(x)]\vee\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall x[P(x)\vee B(x)]$$

- （2）把否定符号移到每个谓词前面

$$\forall x\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall x[P(x)\vee B(x)]$$

- （3）变量标准化

$$\forall x\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee\exists y[S(x,y)\wedge Q(x)]\}\wedge\forall w[P(w)\vee B(w)]$$

- （4）消去存在量词，设*y*的Skolem函数是*f*(*x*)，则

$$\forall x\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee[S(x,f(x))\wedge Q(x)]\}\wedge\forall w[P(w)\vee B(w)]$$

谓词逻辑的归结原理和过程

- 例1 将下列谓词公式化为子句集（续）。

（5）化为前束型

$$\forall x \forall w\{\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee [S(x, f(x)) \wedge Q(x)]\} \wedge [P(w) \vee B(w)]\}$$

（6）化为标准形

$$\forall x \forall w\{\{[Q(x) \wedge P(x)] \vee [Q(x) \wedge S(x, f(x))]\} \wedge [P(w) \vee B(w)]\}$$

$$\forall x \forall w\{Q(x) \wedge [P(x) \vee S(x, f(x))] \wedge [P(w) \vee B(w)]\}$$

（7）略去全称量词

$$Q(x) \wedge [P(x) \vee S(x, f(x))] \wedge [P(w) \vee B(w)]$$

（8）消去合取词，把母式用子句集表示

$$\{Q(x), (P(x), S(x, f(x))), (P(w), B(w))\}$$

（9）子句变量标准化 $\{Q(x),(P(y), S(y, f(y))), (P(w), B(w))\}$

谓词逻辑的归结原理和过程

- **例2** 将下列谓词公式化为不含存在量词的前束型。

$$\exists x \forall y(\forall z(P(z) \land \neg Q(x,z)) \to R(x,y,f(a)))$$

- **（1）消去存在量词**

$$\forall y(\forall z(P(z) \land \neg Q(b,z)) \to R(b,y,f(a)))$$

- **（2）消去蕴涵符号**

$$\forall y(\neg \forall z(P(z) \land \neg Q(b,z)) \lor R(b,y,f(a)))$$

$$\forall y(\exists z(\neg P(z) \lor Q(b,z)) \lor R(b,y,f(a)))$$

- **（3）设z的Skolem函数是*g*(*y*)，则**

$$\forall y(\neg P(g(y)) \lor Q(b,g(y)) \lor R(b,y,f(a)))$$

谓词逻辑的归结原理和过程

- 在证明定理的演绎过程中，经常要对量化的表达式进行匹配操作，因而需要对项作变量置换使表达式一致起来。

归结过程：

- ◆若S中两个子句间有相同互补文字的谓词，但它们的项不同，则必须找出对应的不一致项；
- ◆进行变量置换，使它们的对应项一致；
- ◆求归结式看能否推导出空子句。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

在谓词逻辑的归结过程中，寻找项之间合适的变量置换使表达式一致，这个过程称为合一。

- 一个表达式的项可以是常量符号、变量符号或函数式。
- 表达式的例（instance）是指在表达式中用置换项置换变量后而得到的一个特定的表达式。
- 用$\sigma = \{v_1/t_1, v_2/t_2, \ldots, v_n/t_n\}$来表示任一置换。$v_i/t_i$是指表达式中的变量$v_i$以项$t_i$来替换，且不允许$v_i$用与$v_i$有关的项$t_i$（但是$t_i$中可以包含其它变量）作置换。为了便于理解，后续记$\sigma = \{v_1 = t_1, v_2 = t_2, \ldots, v_n = t_n\}$。
- 用σ对表达式E作置换后的例简记为$E\sigma$。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

- 例如，$P(x,\ g(y,z))\{x=y,\ y=f(\mathrm{a})\} \Rightarrow P(y,\ g(f(\mathrm{a}),z))$
- 注意：置换是同时进行的，而不是先后进行的。
- 可以对表达式多次置换，如用θ和σ依次对E进行置换，记为$(E\theta)\sigma$ 。其结果等价于先将这两个置换合成（组合）为一个置换，即$\theta\sigma$，再用合成置换对E进行置换，即$E(\theta\sigma)$。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

$$\theta=\{x_1=s_1, x_2=s_2, ..., x_m=s_m\},\ \sigma=\{y_1=t_1, y_2=t_2, ..., y_k=t_k\}$$

- 合成置换$\theta\sigma$的组成：1) θ的置换对，只是θ的项被σ作了置换；2) σ中与θ变量不同的那些变量对。
- 合成置换$\theta\sigma$的步骤：
  - 1. Get $S=\{x_1=s_1\sigma, x_2=s_2\sigma, ..., x_m=s_m\sigma, y_1=t_1, y_2=t_2, ..., y_k=t_k\}$
  - 2. Delete any equation $y_i = s_i$ where y_i is equal to one of the x_j in θ
  - 3. Delete any identities, i.e., equations of the form $v = v$

谓词逻辑的归结原理和过程

合一（Unify）：

- 令 $\theta = \{x = f(y), y = z\},\ \sigma = \{x = \mathrm{a}, y = \mathrm{b}, z = y\}$
  - 1. Get $S = \{x = f(\mathrm{b}), y = y, x = \mathrm{a}, y = \mathrm{b}, z = y\}$
  - 2. Delete x = a; Delete y = b
  - 3. Delete $y = y$

$\theta\sigma = S = \{x = f(\mathrm{b}), z = y\}$

这样的合成法可使$(E\theta)\sigma = E(\theta\sigma)$，即可结合。
但置换是不可交换的，即$\theta\sigma \neq \sigma\theta$ 。
空置换$\epsilon = \{\}$也是一个置换，且$\theta\epsilon = \theta$。

谓词逻辑的归结原理和过程

合一项（Unifier）：

- A unifier (合一项) of two formulas f and g is a substitution σ that makes f and g syntactically identical.
- Note that not all formulas can be unified – substitutions only affect variables.
- *e.g.*, $P(f(x), a)$ and $P(y, f(w))$ cannot be unified, as there is no way of making $a = f(w)$ with a substitution.

谓词逻辑的归结原理和过程

最一般的合一项（Most General Unifier）：

A substitution σ of two formulas f and g is a Most General Unifier (MGU) if

- σ is a unifier.
- For every other unifier θ of f and g there must exist a third substitution λ such that $\theta = \sigma\lambda$.

This says that every other unifier is "more specialized" than σ.

The MGU of a pair of formulas f and g is unique up to renaming.

谓词逻辑的归结原理和过程

MGU示例：

- $P(f(x), z)$ and $P(y, a)$
- $\sigma = \{y = f(a), x = a, z = a\}$ is a unifier, but not an MGU
- $\theta = \{y = f(x), z = a\}$ is an MGU
- $\sigma = \theta\lambda$, where $\lambda = \{x = a\}$

谓词逻辑的归结原理和过程

计算MGU：

- The MGU is the "least specialized" way of making atomic formulas with variables match.
- We can compute MGUs.
- Intuitively we line up the two formulas and find the first sub-expression where they disagree.
- The pair of subexpressions where they first disagree is called the disagreement set.
- The algorithm works by successively fixing disagreement sets until the two formulas become syntactically identical.

谓词逻辑的归结原理和过程

计算MGU：

Given two atomic formulas f and g

1. $\sigma = \{\}$; $S = \{f, g\}$
2. If S contains an identical pair of formulas, stop and return σ as the MGU of f and g.
3. Else find the disagreement set $D = \{e_1, e_2\}$ of S
4. If $e_1 = V$ a variable, and $e_2 = t$ a term not containing V (or vice-versa) then let $\sigma = \sigma\{V = t\}$; $S = S\{V = t\}$; Goto 2
5. Else stop, f and g cannot be unified.

Note: to update σ, we must compose σ with $\{V = t\}$.
A common error is to just add $V = t$ to σ.

谓词逻辑的归结原理和过程

示例：

1. $P(f(a), g(x))$ and $P(y, y)$
2. $P(a, x, h(g(z)))$ and $P(z, h(y), h(y))$
3. $P(x, x)$ and $P(y, f(y))$

谓词逻辑的归结原理和过程

归结原理和过程：

From the two clauses $\{\rho_1\} \cup c_1$ and $\{\neg\rho_2\} \cup c_2$, where there exists a MGU σ for ρ_1 and ρ_2, infer the clause $(c_1 \cup c_2)\sigma$

Theorem. $S \vdash ()$ iff S is unsatisfiable

1. $(P(x), Q(g(x)))$
2. $(R(a), Q(z), \neg P(a))$
3. R[1a,2c]{X=a} $(Q(g(a)), R(a), Q(z))$

- "R" means resolution step.
- "1a" means the 1st (a-th) literal in the first clause: $P(x)$.
- "2c" means the 3rd (c-th) literal in the second clause: $\neg P(a)$.
- 1a and 2c are the "clashing" literals.
- $\{X = a\}$ is the MGU applied.

示例1

已知：

（1） 会朗读的人是识字的，

（2） 海豚都不识字，

（3） 有些海豚是很机灵的。

证明：有些很机灵的东西不会朗读。

解：把问题用谓词逻辑描述如下，

已知：

(1) $\forall x(R(x) \rightarrow L(x))$

(2) $\forall x(D(x) \rightarrow \neg L(x))$

(3) $\exists x(D(x) \wedge I(x))$

求证： $\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$

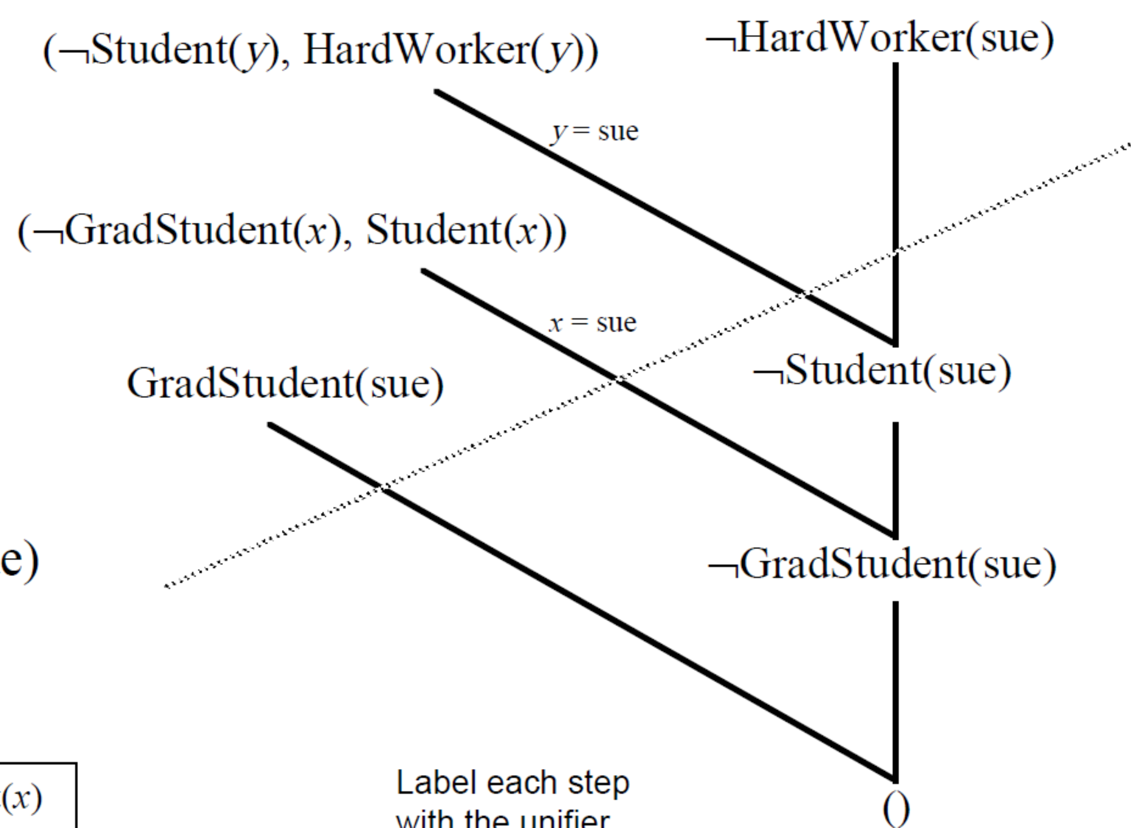
示例1

- 前提化简，待证结论取反并化成子句形，求得子句集：
  1. $(\neg R(x),\ L(x))$
  2. $(\neg D(y),\ \neg L(y))$
  3. D(a)
  4. I(a)
  5. $(\neg I(z),\ R(z))$

一个可行的证明过程：

6. R[4, 5] $\{z = a\}$ R(a)
7. R[1, 6] $\{x = a\}$ L(a)
8. R[2, 7] $\{y = a\}$ $\neg$ D(a)
9. R[3, 8] ()

示例2



$\text{KB} \overset{?}{\models} \text{HardWorker(sue)}$

KB

$\forall x$ GradStudent(x) -> Student(x)
$\forall x$ Student(x) -> HardWorker(x)
GradStudent(sue)

Label each step with the unifier

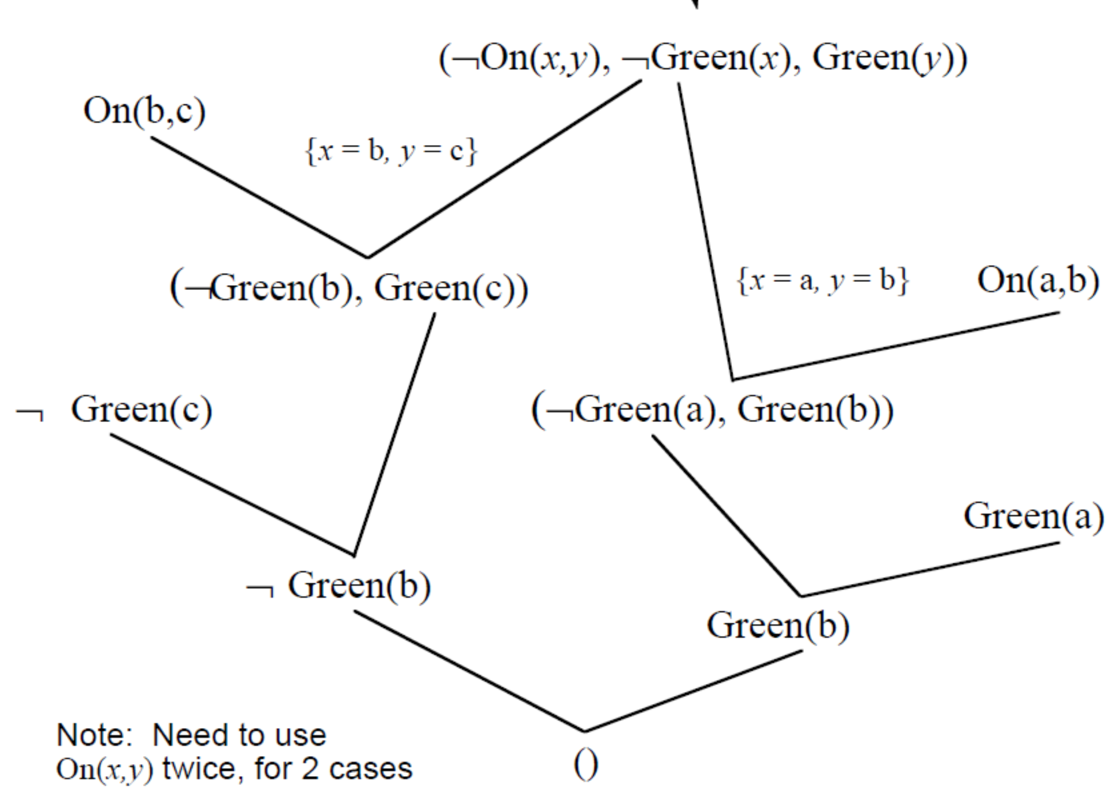
Point to relevant literals in clauses

示例3

KB = {On(a,b), On(b,c), Green(a), ¬Green(c)} already in CNF

Query = $\exists x \exists y[On(x,y) \wedge Green(x) \wedge \neg Green(y)]$

Note: ¬Q has no existentials, so yields



练习

Prove that $\exists y \forall x P(x, y) \models \forall x \exists y P(x, y)$

- $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow 1. P(x, a)$
- $\neg \forall x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists x \forall y \neg P(x, y) \Rightarrow 2. \neg P(b, y)$
- R[1,2]$\{x = b, y = a\}()$

Exercises: Prove

- $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

不可判定问题

We use 1 for succ(0), 2 for succ(succ(0)), . . .

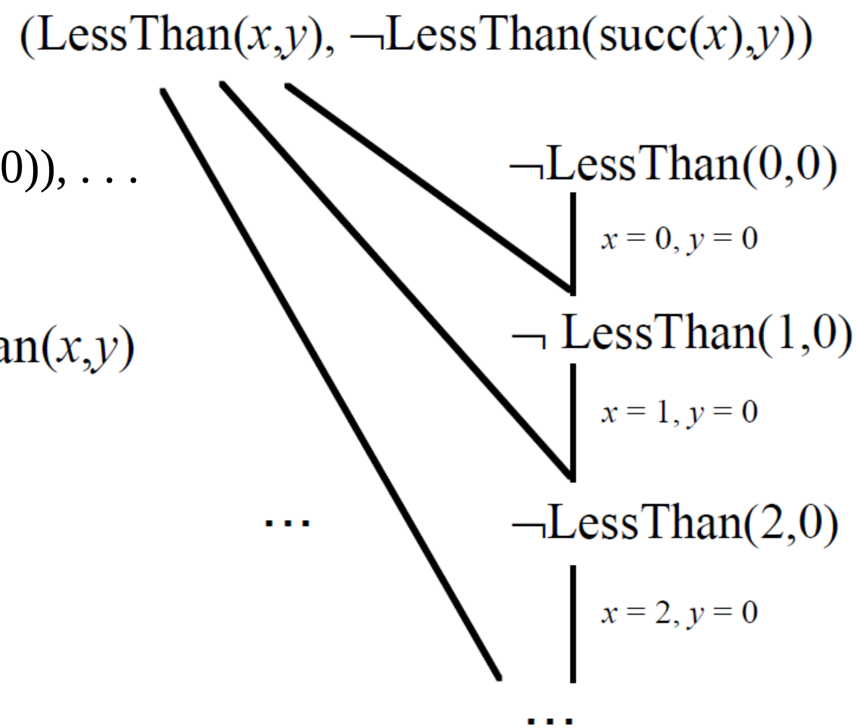
KB:

LessThan(succ(x),y) -> LessThan(x,y)

Query:

LessThan(0,0)

Should fail since KB $|\neq$ Q



Infinite branch of resolvents

对于谓词逻辑，若子句集不可满足，则必存在一个从该子句集到空子句的推导；若从子句集存在一个到空子句的推导，则该子句集是不可满足的。
如果没有归结出空子句，则既不能说 S 不可满足，也不能说 S 是可满足的。

不可判定问题

- 可判定的问题：如果存在一个算法或过程，该算法用于求解该类问题时，可在有限步内停止，并给出正确的解答。
- 如果不存在这样的算法或过程则称这类问题是不可判定的。例如，There can be no procedure to decide if a set of clauses is satisfiable.

Theorem. $S \vdash ()$ iff S is unsatisfiable

However, there is no procedure to check if $S \vdash ()$, because

When S is satisfiable, the search for $()$ may not terminate

应用归结原理求解问题

- Replace query $\exists x P(x)$ by $\exists x[P(x) \land \neg answer(x)]$
- Instead of deriving (), derive any clause containing just the answer predicate
- 应用归结原理求解问题的步骤：

（1）已知前提 F 用谓词公式表示，并化为子句集 S；

（2）把待求解的问题 P 用谓词公式表示，并否定P，再与 *answer* 构成析取式（$\neg P \lor answer$）；

（3）把（$\neg P \lor$ answer）化为子句集，并入到子句集 S中，得到子句集S'；

（4）对 S' 应用归结原理进行归结；

（5）若得到归结式*answer*，则答案就在*answer*中。

示例1

KB: Student(john)
Student(jane)
Happy(john)

Q: $\exists x[\text{Student}(x) \wedge \text{Happy}(x)]$

Happy(john) $\quad$ $(\neg\text{Student}(x), \neg\text{Happy}(x), A(x))$

$\{x = \text{john}\}$

Student(john) $\quad$ $(\neg\text{Student}(\text{john}), A(\text{john}))$

$A(\text{john})$ $\quad$ An answer is: John

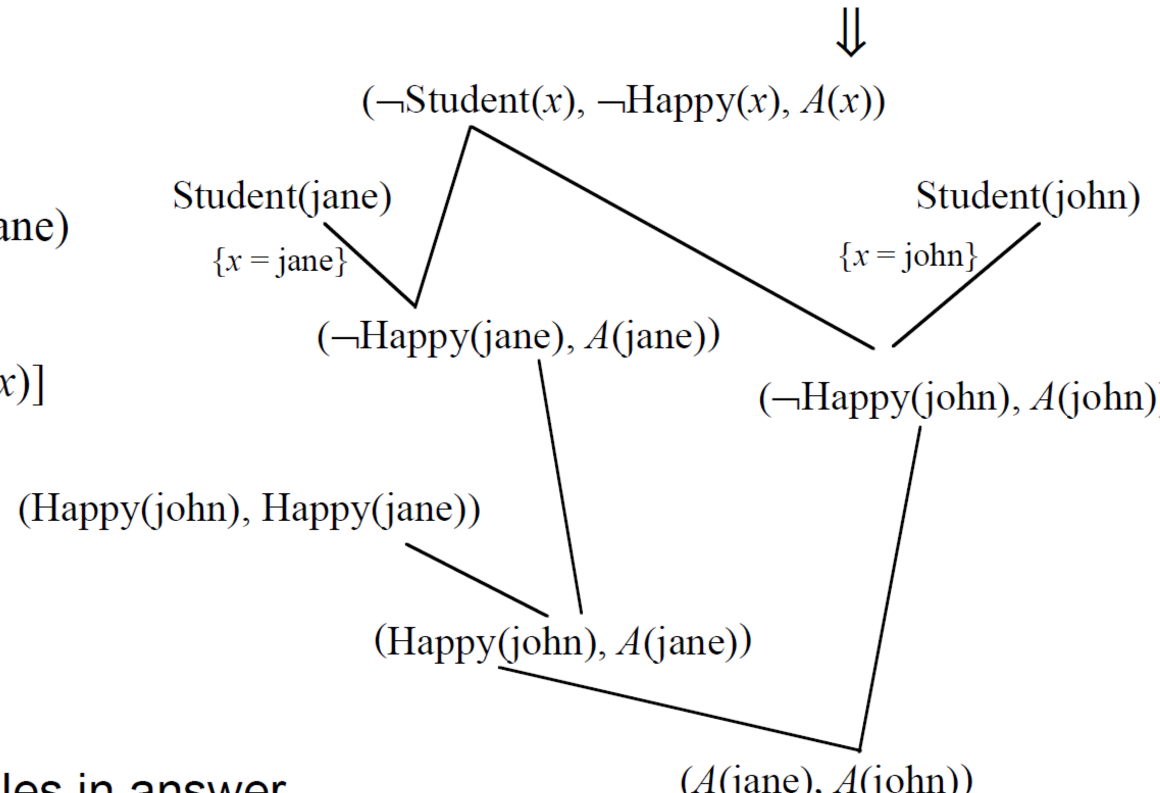
示例2

KB:

Student(john)
Student(jane)
Happy(john) ∨ Happy(jane)

Query:

$\exists x[\text{Student}(x) \wedge \text{Happy}(x)]$



Note: can have variables in answer

An answer is: either Jane or John

练习

- Whoever can read is literate.
- Dolphins are not literate.
- Flipper is an intelligent dolphin.
- Who is intelligent but cannot read.

Use predicates: $R(x), L(x), D(x), I(x)$

归结反演

- 应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。
- 用归结反演证明的步骤是：

（1）将已知前提表示为谓词公式F。

（2）将待证明的结论表示为谓词公式Q，并否定得到$\neg Q$。

（3）把谓词公式集$\{F，\neg Q\}$化为子句集S。

（4）应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次归结得到的归结式都并入到S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止归结，此时就证明了Q为真。

吴氏方法

吴文俊（1919年5月12日—2017年5月7日），1919年5月12日出生于上海，祖籍浙江嘉兴，数学家，中国科学院院士，中国科学院数学与系统科学研究院研究员，系统科学研究所名誉所长。

吴文俊先生的研究工作涉及数学的诸多领域，其主要成就表现在拓扑学和数学机械化两个领域。他为拓扑学做了奠基性的工作；他的示性类和示嵌类研究被国际数学界称为“吴公式”，“吴示性类”，“吴示嵌类”，至今仍被国际同行广泛引用。

吴氏方法

吴方法进行几何定理机器证明的步骤如下：

- 第一步是几何问题代数化，建立坐标系，并将命题涉及的几何图形的点选取适当的坐标；
- 然后把命题的条件和结论表示为坐标的多项式方程组；
- 最后判断条件方程组的解是否满足结论方程。

吴氏方法

- 通常的几何命题涉及的多项式方程组都是非线形的，一般无法将约束变元求出。吴氏方法是利用伪除法判定条件方程组的解是否是结论方程组的解。而且利用吴氏方法不仅可以判断定理的正确与否，还可以自动找出定理赖以成立的非退化条件，这是传统的做法无法做到的。
- 多项式的伪余除法可以通过计算机做符号计算进行。此外，单点例证法和数值并行法，这两种方法与吴方法进行大量符号计算不同，主要利用数值计算的方法进行定理的证明，所以有时也被单独列为一类方法，即几何定理证明的数值方法。数值方法与其它方法相比，具有效率高的优点。

王氏算法

王浩（1921年5月20日—1995年5月13日）数理逻辑学家。祖籍山东省德州市齐河县，生于山东省济南市。

20世纪50年代初被选为美国科学院院士，后又被选为不列颠科学院外国院士。1983年，被国际人工智能联合会授予第一届“数学定理机械证明里程碑奖”，以表彰他在数学定理机械证明研究领域中所作的开创性贡献。著有《数理逻辑概论》、《从数学到哲学》、《哥德尔》、《超越分析哲学》等专著。

王氏算法

1959年，王浩用他首创的“王氏算法”，在一台速度不高的IBM-704电脑上再次向《数学原理》发起挑战。不到9分钟，王浩的机器把这本数学史上视为里程碑的著作中全部（350条以上）的一阶逻辑定理，统统证明了一遍。

该书作者，数学大师罗素得知此事后感慨万端，他在信里写到：“我真希望，在怀海特和我浪费了10年的时间用手算来证明这些定理之前，就知道有这种可能。”王浩教授因此被国际上公认为机器定理证明的开拓者之一。

参考网址

- https://baike.baidu.com/item/吴文俊/44938?fr=aladdin
- https://baike.baidu.com/item/几何定理机器证明/2197024?fr=aladdin
- https://baike.baidu.com/item/王浩/22564?fr=aladdin
- http://blog.sina.com.cn/s/blog_684b35950100n186.html