

实验二 离散序列卷积和的 MATLAB 实现

【一】实验目的

1. 掌握卷积和的计算机编程方法，利用 MATLAB 实现两个离散序列的卷积和；
2. 利用卷积和求离散系统的响应，观察、分析系统的时域特性。

【二】实验原理

两个离散序列卷积和的定义为

$$f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) \cdot f_2(k-i) \quad (1)$$

定义式可以看作是：将序列 $f_2(i)$ 的时间轴反并将其移位 k 个样本，然后将移位后的 $f_2(k-i)$ 乘以 $f_1(i)$ 并在 i 上将所得到的乘积序列相加。这种说法直接来自离散时间系统的线性和时不变性质。信号 $f_1(k)$ 可以看成是由延时和加权脉冲的线性叠加所构成，因为一个 LTI 系统能够用它对单个脉冲的响应来表示，那么一个 LTI 系统的输出就应该相对于系统对构成 $f_1(k)$ 的每一个延时和加权脉冲的叠加。在数学上，这个结果就是卷积和。

在离散信号与系统的分析过程中，我们有两个与卷积和相关的重要结论，这就是：

$$1) f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) \cdot \delta(k-i) = f(k) * \delta(k), \text{ 即离散序列可分解为一系列幅}$$

度由 $f(k)$ 决定的单位序列 $\delta(k)$ 及其移位序列之和。

$$2) \text{ 对线性时不变系统，设其输入序列为 } f(k), \text{ 单位响应为 } h(k), \text{ 其零状态响应为 } y(k), \text{ 则有： } y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) \cdot h(k-i) = f(k) * h(k)$$

可见，离散序列卷积和的计算对进行离散信号与系统的分析具有非常重要的意义。

设序列 $f_1(k)$ 在区间 $n_1 \sim n_2$ 非零， $f_2(k)$ 在区间 $m_1 \sim m_2$ 非零，则 $f_1(k)$ 的时域宽度为 $L_1 = n_2 - n_1 + 1$ ， $f_2(k)$ 的时域宽度为 $L_2 = m_2 - m_1 + 1$ 。由卷积和的定义可得，序列 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$ 的时域宽度为 $L = L_1 + L_2 - 1$ ，且只在区间 $(n_1 + m_1) \sim n_1 + m_1 + (L_1 + L_2) - 2$ 非零。因此，对于 $f_1(k)$ 和均为有限期间非零的情况，我们只需要计算序列 $f(k)$ 在区间 $(n_1 + m_1) \sim n_1 + m_1 + (L_1 + L_2) - 2$ 的序列值，便可以表征整个序列 $f(k)$ 。

MATLAB 的 `conv ()` 函数可以帮助我们快速求出两个离散序列的卷积和。`conv ()` 函数的调用格式为：

$$f = \text{conv}(f1, f2)$$

其中 f_1 为包含序列 $f_1(k)$ 的非零样值点的行向量， f_2 为包含序列 $f_2(k)$ 的非零样值点的行向量，向量 f 则返回序列 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$ 的所有非零样值点行向量。

例 1. 已知序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 如下所示：

$$f_1(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad f_2(k) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 2 & k = 2 \\ 3 & k = 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则调用 `conv()` 函数求上述两序列的卷积和的 MATLAB 命令为：

```
f1=ones(1,3);
```

```
f2=0:3;
```

```
f=conv(f1,f2)
```

运行结果为：

```
f =
```

```
0    1    3    6    5    3
```

由上例可以看出，函数 `conv()` 不需要给定序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 非零样值点的时间序号，也不返回序列 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$ 的非零样值点的时间序号。因此，要正确的标识出函数 `conv()` 的计算结果向量 f ，我们还必须构造序列 $f_1(k)$ 、 $f_2(k)$ 及 $f(k)$ 的对应时间序号向量。对于上例，设序列 $f_1(k)$ 、 $f_2(k)$ 及 $f(k)$ 的对应序号向量分别为 k_1, k_2 和 k ，则应有：

```
k1=[0,1,2];
```

```
k2=[0,1,2,3];
```

```
k=[0,1,2,3,4,5];
```

如前所述， $f(k)$ 的序号向量 k 由序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 非零样值点的起始序号及它们的时域宽度决定。故上例最终的卷积和结果应为：

$$f(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 1 & k = 1 \\ 3 & k = 2 \\ 6 & k = 3 \\ 5 & k = 4 \\ 3 & k = 5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

下面是利用 MATLAB 计算两离散序列卷积和 $f(k) = f_1(k) * f_2(k)$ 的实用函数 `dconv()` 程序，该程序在计算出卷积和 $f(k)$ 的同时，还绘出序列 $f_1(k)$ 、 $f_2(k)$ 及 $f(k)$ 的时域波形图，并返回 $f(k)$ 的非零样值点的对应向量。

```
function [f,k]=dconv(f1,f2,k1,k2)
```

```

%The function of compute f=f1*f2
%f 卷积和序列 f(k)对应的非零样值向量
%k 序列 f(k)的对应序号向量
%f1 序列 f1(k)非零样值向量
%f2 序列 f2(k)非零样值向量
%k1 序列 f1(k)的对应序号向量
%k2 序列 f2(k)的对应序号向量

f=conv(f1,f2) %计算序列 f1 与 f2 的卷积和 f
k0=k1(1)+k2(1); %计算序列 f 非零样值的起点位置
k3=length(f1)+length(f2)-2; %计算卷积和 f 非零样值的宽度
k=k0:k0+k3; %确定卷积和 f 非零样值的序号向量

subplot(2,2,1);
stem(k1,f1) %在子图 1 绘序列 f1(k)的波形
title('f1(k)')
xlabel('k')
ylabel('f1(k)')
subplot(2,2,2);
stem(k2,f2) %在子图 2 绘序列 f2(k)的波形
title('f2(k)')
xlabel('k')
ylabel('f2(k)')
subplot(2,2,3);
stem(k,f); %在子图 3 绘序列 f(k)的波形
title('f1(k)与 f2(k)的卷积和 f(k)')
xlabel('k')
ylabel('f(k)')
h=get(gca,'position');
h(3)=2.5*h(3);
set(gca,'position',h) %将第三个子图的横坐标范围扩为原来的 2.5 倍

```

例 2. 试用 MATLAB 计算如下所示序列的卷积和 $f(k)$ ，绘出它们的时域波形。

$$f_1(k) = \{1 \ 2 \ 1 \ 0\}, f_2(k) = \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0\}$$

解：该问题可用上述介绍的 `dconv()` 函数来解决，实现这一过程的命令如下：

```

f1=[1 2 1];
k1=[-1 0 1];

```

```
f2=ones(1,5);
k2=-2:2;
[f,k]=dconv(f1,f2,k1,k2)
```

运行结果:

```
f =
    1     3     4     4     4     3     1

k =
   -3    -2    -1     0     1     2     3
```

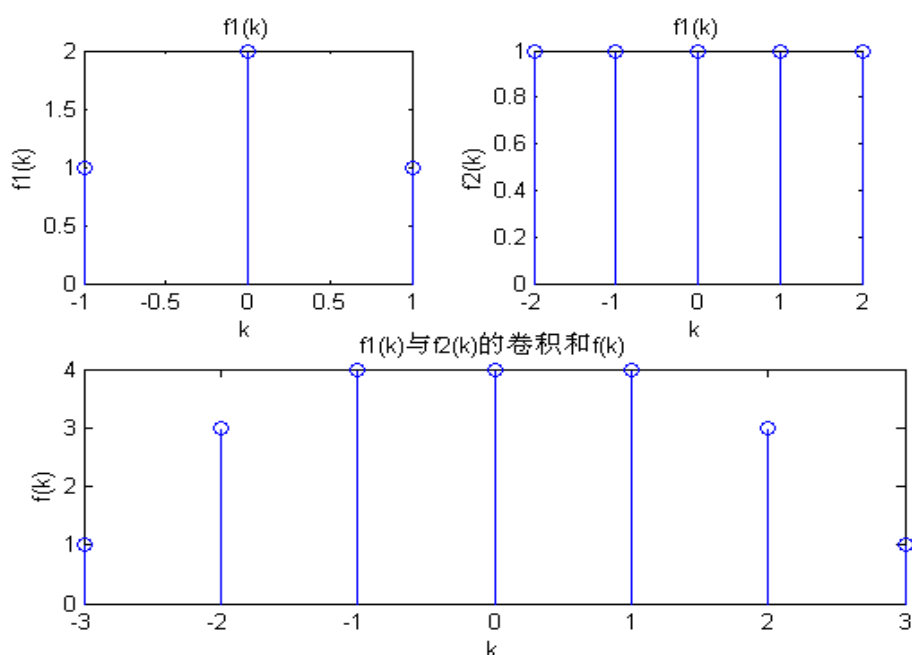


图1 例2的运行结果

【三】上机练习

1. 将实验原理中提到的例子在计算机上全部练习一遍;
2. 已知某 LTI 离散系统, 其单位响应 $h(k)=u(k)-u(k-4)$, 求该系统在激励为 $f(k)=u(k)-u(k-3)$ 时的零状态响应 $y(k)$, 并绘出其时域波形图。
3. 如果上题 $h(k)=u(k)$, 重作上题。(提示: 时间序列无限长时, 必须将其进行截断, 如只保留 100 个样值点)

【四】思考题

1. 观察实验内容 3 的计算结果, 所有计算样值均是真实的吗?
2. 尝试编写连续系统卷积计算的子程序。

由连续信号的时域分解可知, 信号的卷积积分可用信号的分段求和来实现, 即

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \lim_{H \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k\Delta) \cdot f_2(t - k\Delta) \Delta$$

如果我们只求当 $t = n\Delta$ (n 为整数) 时 $f(t)$ 的值 $f(n\Delta)$, 则由上式可得:

$$f(n\Delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k\Delta) \cdot f_2(t - k\Delta) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k\Delta) \cdot f_2[(n - k)\Delta]$$

上式中的 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k\Delta) \cdot f_2[(n - k)\Delta]$ 实际上就是连续信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 经等时间间隔

Δ 均匀抽样的离散序列 $f_1(k\Delta)$ 和 $f_2(k\Delta)$ 的卷积和。当 Δ 足够小时, $f(n\Delta)$ 就是卷积积分的结果——连续时间信号 $f(t)$ 较好的数值近似。

将连续信号进行取样, 构造与 $f_1(k\Delta)$ 和 $f_2(k\Delta)$ 相对应的时间向量 $k1$ 和 $k2$ (注意, 此时时间序号向量 $k1$ 和 $k2$ 的元素不再是整数, 而是取样时间间隔 Δ 的整数倍的时间隔点);

调用 `conv()` 函数计算卷积积分 $f(t)$ 的近似向量 $f(n\Delta)$:

构造 $f(n\Delta)$ 对应的时间向量 k 。

可见我们只要对前面介绍的计算离散序列卷积和及绘制序列波形的子程序 `dconv()` 进行适当的改变, 即可编写出计算连续时间信号卷积积分的数值近似并绘制其时域波形的通用函数。需要注意的是, 程序中如何构造 $f(t)$ 的对应时间变量 k ? 另外, 程序在绘制 $f(t)$ 的波形图时应采用 `plot` 命令而不是 `stem` 命令。

【五】实验报告要求

1. 简述实验目的及实验原理;
2. 实验内容及结果分析:
 - 1) 附上源程序清单, 要求可读性好, 必要处要加注释;
 - 2) 实验结果, 包括运行的数值结果或图形;
 - 3) 结果分析, 正确与否, 误差原因。
3. 简要回答思考题;
4. 简述本次实验的体会和建议。