实验三 连续时间信号、系统的频域分析

一、 实验目的

1．熟悉傅里叶变换的性质

2．熟悉常见信号的傅里叶变换

3．了解傅里叶变换的 MATLAB 实现方法

4 ．学会用 MATLAB 分析 LTI 系统的频域特性

5 ．学会用 MATLAB 分析 LTI 系统的输出响应

二、 实验原理

傅里叶变换是信号分析 的最重要的内容之一。从已知信号*f*(*t*) 求出相应的频谱函数 *F*(*jω*) 的数学表示为：

*F*(*jω*) = ∫ *f* (*t*)*e*− *jωt* *dt*

*f* (*t*) 的傅里叶变换存在的充分条件是*f*(*t*) 在无限区间内绝对可积， 即*f*(*t*) 满足下式：

∫ *f* (*t*)  *dt* <∞

但上 式并非 傅里叶变换存在的必要条件。在引入广义函数概念之后，使一些不满足绝对可 积条件的函数也能进行傅里叶变换。

傅里叶反变换 的定义为： *f* (*t*) = ∫*F*(*jω*)*ejωt* *dω* 。

在这一部分的学习中，大家都体会到了这种数学运算的麻烦。在 MATLAB 语言中有专 门对信号进行正反傅里叶变换的语句，使得傅里叶变换很容易在 MATLAB 中实现。在 MATLAB 中实现傅里叶变换的方法有两种，一种是利用 MATLAB 中的 **Symbolic** **Math** **Toolbox** 提供的专用函数直接求解函数的傅里叶变换和傅里叶反变换， 另一种是傅里叶变换 的数值计算实现法。下面分别介绍这两种实现方法的原理。

1.直接调用专用函数法

①在 MATLAB 中实现傅里叶变换的函数为：

 F=fourier( f ) 对 f(t)进行傅里叶变换，其结果为 F(w)

 F**=**fourier(f,v) 对 f(t)进行傅里叶变换，其结果为 F(v)

 F=fourier( f,u,v ) 对 f(u)进行傅里叶变换， 其结果为 F(v)

②傅里叶反变换

 f=ifourier( F ) 对 F(w)进行傅里叶反变换，其结果为 f(x)

 f=ifourier(F,U) 对 F(w)进行傅里叶反变换，其结果为 f(u)

 f=ifourier( F,v,u ) 对 F(v)进行傅里叶反变换，其结果为 f(u)

由于 MATLAB 中函数类型非常丰富，要想了解函数的意义和用法，可以用 mhelp命令。 如在命令窗口键入： mhelp fourier回车，则会得到 fourier的意义和用法。

注意：

(1)在调用函数fourier( )及ifourier( )之前，要用syms命令对所有需要用到的变量(如 t,u,v,w) 等进行说明，即要将这些变量说明成符号变量。对 fourier( )中的 f 及 ifourier( )中的 F 也要用 符号定义符 sym 将其说明为符号表达式。

(2)采用 fourier( )及 fourier( )得到的返回函数，仍然为符号表达式。在对其作图时要 用 ezplot( )函数，而不能用 plot()函数。

(3) fourier( )及 fourier( )函数的应用有很多局限性，如果在返回函数中含有 δ(ω)等函数， 则 ezplot( )函数也无法 作出 图来。另外，在用 fourier( )函数对某些信号进行变换时， 其返回 函数如果包含一些不能直接表达的式子， 则此时当然也就无法作图了。这是 fourier( )函数的 一个局限。另一个局限是在很多场合，尽管 原时间 信号*f*(*t*)是连续的， 但却不能表示成符号 表达式，此时只能应用下面介绍的数值计算法来进行傅氏变换了， 当然，大多数情况下，用 数值计算法所求的频谱函数只是一种近似值。

例 **1** 求门函数*f* (*t*) = *ε*(*t* +1) − *ε*(*t* −1) 的傅里叶变换， 并画出幅度频谱图

MATLAB 程序如下：

syms t w

Gt=sym('Heaviside(t+1)-Heaviside(t- 1)'); Fw=fourier(Gt,t,w);

FFw=maple('convert',Fw,'piecewise'); 处可以去掉

FFP=abs(FFw);

ezplot(FFP,[- 10\*pi 10\*pi]);grid;

axis([- 10\*pi 10\*pi 0 2.2])

%定义两个符号变量t,w

%产生门宽为 2 的门函数

%对门函数作傅氏变换求 F(jw) %数据类型转换，转为分段函数， 此

%求振幅频谱| F(jw)|

%绘制函数图形， 并加网格

%限定坐标轴范围

运行结果： Fw= exp(i\*w)\*(pi\*Dirac(w)-i/w)-exp(-i\*w)\*(pi\*Dirac(w)-i/w)

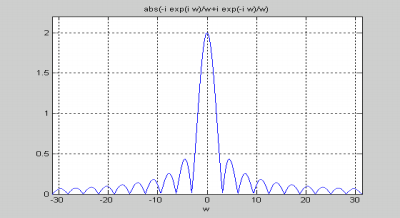
% Dirac(w)为 δ(ω)，即傅立叶变换结果中含有奇异函数，故绘图前需作函数类型

转换

FFw= -i\*exp(i\*w)/w+i\*exp(-i\*w)/w FFP= abs(-i\*exp(i\*w)/w+i\*exp(-i\*w)/w)

% FFw为复数

%求 FFw 的模值



例 **2** 求函数*F*(*jω*) =  的傅里叶反变换*f*(*t*)

MATLAB 程序如下：

syms t w

Fw=sym('1/(1+w^2)');

%定义两个符号变量t,w

%定义频谱函数 F(jw)

ft=ifourier(Fw,w,t); %对频谱函数 F(jw)进行傅氏反变换

运行结果：

ft =

1/2\*exp(-t)\*Heaviside(t)+1/2\*exp(t)\*Heaviside(-t)

例 **3** 连续时间信号的频谱图 求调制信号*f* (*t*) = *AGτ* (*t*) cos*ω*0 *t* 的频谱，式中

*A* = 4, *ω*0 = 12*π*, *τ* =  , *Gτ* (*t*) = *u*(*t* + ) − *u*(*t* − )

解： MATLAB 程序如下所示

ft=sym('4\*cos(2\*pi\*6\*t)\*(Heaviside(t+1/4)-Heaviside(t- 1/4))');

Fw=simplify(fourier(ft))

subplot(121)

ezplot(ft,[-0.5 0.5]),grid on

subplot(122)

ezplot(abs(Fw),[-24\*pi 24\*pi]),grid

2、傅里叶变换的数值计算实现法

用 MATLAB 符号算法求傅里叶变换有一定局限，当信号不能用解析式表达时， 会提示 出错， 这时用 MATLAB 的数值计算也可以求连续信号的傅里叶变换。严格说来，如果不使 用 symbolic 工具箱，是不能分析连续时间信号的。采用数值计算方法实现连续时间信号的 傅里叶变换， 实质上只是借助于 MATLAB 的强大数值计算功能， 特别是其强大的矩阵运算 能力而进行的一种近似计算。傅里叶变换的数值计算实现法的原理如下：

对于连续时间信号 f(t)，其傅里叶变换为：

*F*(*jω*) = ∫ *f* (*t*)*e*− *jωt* *dt* = l*τ* *n* *f* (*nτ*)*e*− *jωnττ*

其中 τ 为取样间隔， 如果 f(t)是时限信号， 或者当|t|大于某个给定值时，f(t)的值已经衰 减得很厉害，可以近似地看成是时限信号，则上式中的 n 取值就是有限的， 假定为 N，有：

*F*(*jω*) = *τ**f* (*nτ*)*e*− *jωnτ*

若对频率变量 ω 进行取样， 得：

*F*(*k*) = *F*(*jωk* ) = *τ**f* (*nτ*)*e*− *jωk* *nτ*

0 < *k* < *M*

通常取：*ωk* = *k* = *k* ，其中 *ω*0 是要取的频率范围，或信号的频带宽度。采用 MATLAB

实现上式时，其要点是要生成 f(t)的 N个 样本值*f* (*nτ*) 的向量，以及向量*e*− *jωk* *nτ* ，两向量的

内积(即两矩阵的乘积) ，结果即完成上式的傅里叶变换的数值计算。

注意： 时间取样间隔 τ 的确定，其依据是 τ 必须小于奈奎斯特(Nyquist)取样间隔。如果 f(t)不是严格 的带限信号 ，则可以根据实际计算的精度要求来确定一个适当的频率 *ω*0 为信

号的带宽。

例 **4** 用数值计算 法实现 上面门函数*f* (*t*) = *u*(*t* + 1) − *u*(*t* − 1) 的傅里叶变换，并画出幅度

频谱图.

分析： 该信号的频谱为*F*(*jω*) = 2*Sa*(*ω*) ，其第一个过零点频率为 π ，一般将此频率认

为是信号的带宽。但考虑到 *F*(*jω*) 的形状(为抽样函数) ，假如将精度提高到该值的 50

倍，即取 *ω*0 = 50*ωB* = 50*π* ，则据此确定的 Nyquist取样间隔为：*τ* ≤  =  = 0.02 。

MATLAB 程序如下：

R=0.02;

t=-2:R:2;

%取样间隔 τ=0.02

% t 为从-2 到 2，间隔为 0.02 的行向量,有 201 个样本点

ft=[zeros(1,50),ones(1,101),zeros(1,50)]; % 产生 f(t)的样值矩阵 (即 f(t)的样本值 组成的行向量)

|  |  |
| --- | --- |
| W1=10\*pi; | %取要计算 的频率范围 |
| M=500; k=0:M; w=k\*W1/M; | %频域采样数为 M, w 为频率正半轴的采样点 |
| Fw=ft\*exp(-j\*t'\*w)\*R; | %求傅氏变换 F(jw) |
| FRw=abs(Fw); | %取振幅 |
| W=[-fliplr(w),w(2:501)] ; | %由信号双边频谱的偶对称性， 利用fliplr(w) |

形成负半轴的点， % w(2:501)为正半轴的点， 函数 fliplr(w) 对矩阵 w 行向量作 180 度反转

FW=[fliplr(FRw),FRw(2:501)]; Subplot(2,1,1) ;

plot(t,ft) ;

grid;

%形成对应于 2M+1 个频率点的值

%画出 原时间 函数 f(t)的波形，并加网格

xlabel('t') ; ylabel('f(t)');

title('f(t)=u(t+1)-u(t- 1)');

subplot(2,1,2) ; plot(W,FW) ;grid on; xlabel ('W') ; ylabel ('F(W)');

title('f(t)的振幅频谱图');

运行结果如下：

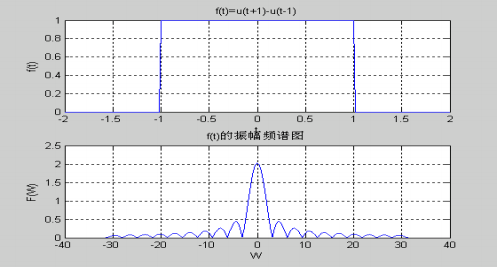
%坐标轴标注

%文本标注

%画出振幅频谱的波形,并加网格

%坐标轴标注

%文本标注



3 、用 MATLAB 分析 LTI 系统的频率特性

当系统的频率响应 H (jw)是 jw 的有理多项式时， 有

*H*(*jw*) =  = 

MATLAB 信号处理工具箱提供的freqs 函数可直接计算系统的频率响应的数值解。其调用格 式如下

H=freqs(b,a,w)

其中， a 和 b 分别是 H(jw)的分母和分子多项式的系数向量，w 为形如 w1:p:w2 的向量，定 义系统频率响应的频率范围， w1 为频率起始值，w2 为频率终止值,p 为频率取样间隔。 H 返 回 w 所定义的频率点上，系统频率响应的样值。

例如， 运行如下命令， 计算 0~2pi 频率范围内以间隔0.5 取样的系统频率响应的样值 a=[1 2 1];

b=[0 1];

h=freqs(b,a,0:0.5:2\*pi)

例 **5** 三阶归一化的 butterworth 低通滤波器的频率响应为

*H*(*jw*) = 

试画出该系统的幅度响应 *H* (*jw*) 和相位响应*ϕ*(*ω*) 。

解 其 MATLAB 程序及响应的波形如下

w=0:0.025:5;

b=[1];a=[1,2,2,1];

H=freqs(b,a,w);

subplot(2,1,1);

plot(w,abs(H));grid;

xlabel('\omega(rad/s)');

ylabel('|H(j\omega)|');

+

+

-

-

C

R

title('H(jw)的幅频特性');

subplot(2,1,2);

plot(w,angle (H));grid;

xlabel('\omega(rad/s)');

ylabel('\phi(\omega)');

title('H(jw)的相频特性');

4 、用 MATLAB 分析 LTI 系统的输出响应

例 **6** 已知一 RC 电路如图所示 系统的输入电压为 f(t)，输出信号为电阻两端的电压 y(t). 当 RC=0.04 ，f(t)=cos5t+cos100t, −∞ < *t* < +∞ 试求该系统的响应 y(t)

f(t)

y(t)

解 由图可知 ，该电路为一个微分电路， 其频率响应为

*H*(*jw*) =  = 

由此可求出余弦信号cos*ω*0 *t* 通过 LTI 系统的响应为

*y*(*t*) = *H*(*jw*0 )  cos(*ω*0 *t* +*ϕ*(*ω*0 ))

计算该系统响应的 MATLAB 程序及响应波形如下

RC=0.04;

t=linspace(-2,2,1024);

w1=5;w2=100;

H1=j\*w1/(j\*w1+1/RC);

H2=j\*w2/(j\*w2+1/RC);

f=cos(5\*t)+cos(100\*t);

y=abs(H1)\*cos(w1\*t+angle(H1))+ abs(H2)\*cos(w2\*t+angle(H2));

subplot(2,1,1);

plot(t,f);

ylabel('f(t)');

xlabel('Time(s)');

subplot(2,1,2);

plot(t,y);

ylabel('y(t)');

xlabel('Time(s)');

三、 实验内容

1.验证实验原理中所述的相关程序。

2.编程实现求下列信号的幅度频谱

(1) 求出*f*1 (*t*) = *ε*(2*t* +1) − *ε*(2*t* −1) 的频谱函数 *F*1 (*jω*)，请将它与上面门宽为 2 的门 函数*f* (*t*) = *ε*(*t* +1) −*ε*(*t* −1) 的频谱进行比较，观察两者的特点， 说明两者的关系。

(2) 三角脉冲 *f*2 (*t*) = 

(3) 单边指数 信号*f*3 (*t*) = *e*−*tε*(*t*)

(4) 高斯信号*f*3 (*t*) = *e*−*t*2

3.利用 ifourier( ) 函数求下列频谱函数的傅氏反变换

(1) *F*(*jω*) = −*j*  (2) *F*(*jω*) = 

4.设*H*(*jw*) =  ，试用 MATLAB 画出该系统的幅频特性 *H* (*jw*)  和相

频特性*ϕ*(*ω*) ，并分析系统具有什么滤波特性。

四、实验报告

1.简述实验目的及实验原理；

2.实验内容及结果分析：

1) 附上源程序清单，要求可读性好，必要处要加注释；

2) 实验结果， 包括运行的数值结果或图形；

3) 结果分析， 正确与否，误差原因。

3. 实验总结(收获及体会)