Сидоров, Федорюк, Шабунин

§10. Интегральная ф-ла Коши.

Теорема. Пусть $f(z)$ дифф. в односвяз. обл. D, γ - в D, для точки z внутри γ:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \quad (1)$$

Док-во. $C_\rho=|\xi-z|=\rho$ - внутри γ, тогда $J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)-f(z)+f(z)}{\xi-z}\,d\xi=J_1+f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{d\xi}{\xi-z},\quad J_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi,$$ т.к. $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{d\xi}{\xi-z}=1$,

то $J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=J_1+f(z)$ (2) т.к. $f(\xi)$ - непр. ф-ция, в точке z, для люб. ε найдется т. δ, ч. $|f(\xi)-f(z_1)|<\varepsilon$, $|\xi-z|<\delta\Rightarrow|J_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{C_\rho}\frac{|f(\xi)-f(z)|}{|\xi-z|}|d\xi|<\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\rho}\int_{C_\rho}|d\xi|=\varepsilon\Rightarrow J_1=0$ □

Теорема о среднем. Пусть ф-ция $f(z)$ дифф. в круге $K:|z-z_0|<R$ и непр. в замкн. контуре $\overline{K}$. Тогда зн-е ф-ции в центре круга равно средн. арифм. её зн-й на окр., т.е.:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi \quad (5)$$

Док-во. Пусть в ф-ле: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$ (3) Γ - окр-ть радиуса R с центром в z_0. Тогда $\xi=z_0+Re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $d\xi=iRe^{i\varphi}d\varphi$, $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\varphi})\,iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}}\,d\varphi=$
$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi$ □

Теорема о среднем для гармонич. ф-ций. Пусть ф-ция $u(z)=u(x,y)$, $z=x+iy$ гармонич. в круге $K:|z-z_0|<R$, непр. в замкн. круге $\overline{K}$. Тогда $u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+Re^{i\varphi})\,d\varphi$ (6)

Док-во. Пусть $f(z)$ - регулярн. в круге K т.ч. $\operatorname{Re}f(z)=u(z)$. По т. о среднем:

$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi$, $0<\rho<R$ (7) Отделяя в (7) действ. части, имеем:

$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi$, переходя к пределу $\rho\to R$ получ. (6) □

§11. Степенные ряды