Théorie des probabilités — Cours

Ivan Lejeune

16 octobre 2024

Table des matières

Chapitre 1 — Bases de la théorie des probabilités **1**
1.1 Espaces probabilisés 1
1.1.1 Probabilité 1
1.2.1 Exemples d'espaces probabilisés 2
1.2 Variables aléatoires 2
1.2.1 Loi d'une variable aléatoire 2
1.8.1 Lois usuelles 4

Chapitre 1 — Bases de la théorie des probabilités

1.1 Espaces probabilisés

1.1.1 Probabilité

Définition 1.1. Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Une **mesure** sur $(\Omega, \mathscr{F})$ est une application

$$\begin{aligned} \mu \colon \mathscr{F} &\to [0, +\infty] \\ A &\mapsto \mu(A) \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. μ est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$, on a
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un **espace mesuré**.
Si de plus $\mu(\Omega) = 1$, on dit que $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un **espace probabilisé** et μ est une **probabilité**.
On notera alors $\mu = \mathbb{P}$.

Remarque. Comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, une mesure de probabilité est une mesure dans $[0, 1]$. Un événement A est dit **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemples 1.2.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable et ω un élément fixé dans Ω. La mesure (ou masse) de Dirac en ω est la mesure définie pour tout $A \in \mathscr{F}$ par
$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_A(\omega)$$
On vérifie facilement que c'est bien une probabilité.

2. Sur le segment $[0,1]$ muni de sa tribu borélienne, la mesure de Lebesgue est une probabilité.
3. Si $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un espace mesuré avec $0 < \mu(\Omega) < +\infty$, alors on obtient une probabilité en considérant la mesure
$$\mathbb{P} = \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\Omega)}$$

Interprétation. Un espace probabilisé est donc un cas particulier d'espace mesuré pour lequel la masse totale de la mesure est égale à 1. En fait, le point de vue diffère de la théorie de l'intégration : dans le cadre de la théorie des probabilités, on cherche à fournir un modèle mathématique pour une "expérience aléatoire".

- L'ensemble Ω est appelé **univers** : il représente l'ensemble de toutes les éventualiés possibles, toutes les déterminations du hasard dans l'expérience considérée. Les éléments ω de Ω, parfois appelés **événements élémentaires**, correspondent donc aux issues possibles de l'expérience aléatoire.
- La tribu $\mathscr{F}$ correspond à l'ensemble des **événements** : ce sont les parties de Ω dont on peut évaluer la probabilité. Il faut voir un événement A de $\mathscr{F}$ comme un sous-ensemble de Ω contenant toutes les éventualités ω pour lesquelles une certaine propriété est vérifiée.
- On associe à chaque événement $A \in \mathscr{F}$ un réel $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ qui donne la plausibilité que le résultat de l'expérience soit dans A.

1.2.1 Exemples d'espaces probabilisés

Suivent quelques exemples classiques d'espaces probabilisés.

Exemples 1.1. cours a completer

1.2 Variables aléatoires

1.2.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.3. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Une **variable aléatoire** est une application
$$X : \Omega \to E$$
mesurable. C'est-à-dire
$$\forall A \in \mathscr{E}, X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathscr{F}$$
Si $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on parle de **variable aléatoire réelle**.
Si $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on parle de **variable aléatoire vectorielle**.

Exemples 1.4.
▷ Lancer de deux dés.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés équilibrés. Alors
$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2, \quad \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega).$$
On s'intéresse à la somme des résultats obtenus et on définit
$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \{2, \dots, 12\} \\ (i,j) &\mapsto i + j \end{aligned}$$
On munit l'ensemble d'arrivée de la tribu pleine.
X est une variable aléatoire car l'espace de départ est muni de la tribu pleine.
▷ Infinité de lancers d'un dé.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré une infinité de fois. Alors

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}^*} = \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \omega_n \in \{1, \dots, 6\}\}$$

On considère la tribu $\mathscr{F}$ la plus petite tribu contenant les $A_{x_1, \dots, x_k}$. On s'intéresse au nombre de lancers jusqu'à l'apparition du premier 6. On définit

$$\begin{aligned} Y \colon \Omega &\to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega_n = 6\} \end{aligned}$$

avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$. On munit l'ensemble d'arrivée de la tribu pleine.
Pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{k\}) &= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \omega_1 \neq 6, \dots, \omega_{k-1} \neq 6, \omega_k = 6\} \\ &= \bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_{k-1}, 6} \in \mathscr{F} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{+\infty\}) &= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \omega_n \neq 6\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_k} \in \mathscr{F} \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est dénombrable, on en déduit que Y est une variable aléatoire.
▷ Bouteille à la mer.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à observer la position d'une bouteille à la mer. Alors

$$\Omega = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}^2)$$

On considère la tribu $\mathscr{F}$ la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées

$$\begin{aligned} f_t \colon \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto \omega(t) \end{aligned}$$

On s'intéresse à la position de la bouteille au temps $t = 1$. On définit

$$\begin{aligned} Z \colon \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto \omega(1) \end{aligned}$$

Alors, par construction de la tribu $\mathscr{F}$, on a que Z est une variable aléatoire.

Définition 1.5. Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dans $(E, \mathscr{E})$. La **loi** de X est la mesure image de X par $\mathbb{P}$, définie par

$$\forall A \in \mathscr{E}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$$

Exemples 1.6.
▷ Infinité de lancers d'un dé.
On considère

$$\begin{aligned} Y \colon \Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}^*} &\to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega_n = 6\} \end{aligned}$$

La loi $\mathbb{P}_Y$ de Y est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_Y(\{k\}) &= \mathbb{P}(Y^{-1}(\{k\})) \\
&= \mathbb{P}(Y = k) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_1,\dots,x_{k-1}\in\{1,\dots,5\}} A_{x_1,\dots,x_{k-1},6}\right) \\
&= \sum_{x_1,\dots,x_{k-1}} \underbrace{\mathbb{P}(A_{x_1,\dots,x_{k-1},6})}_{=\frac{1}{6^k}} \\
&= \frac{5^{k-1}}{6^k} &&= \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a vu à la fin de la section précédente que la probabilité de ne jamais obtenir de 6 est nulle :

$$\mathbb{P}_Y(\{+\infty\}) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\{+\infty\})) = \mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$$

On en déduit que la loi de Y est

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}\delta_k$$

Cette loi est appelée **loi géométrique** de paramètre $\frac{5}{6}$.

Définition 1.7 Variable aléatoire discrète. Une variable aléatoire X est dite **discrète** si X est à valeurs dans un ensemble E au plus dénombrable. On prend alors $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$ et si $A \in \mathscr{E}$, on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in \cup_{x\in A}\{x\}) = \sum_{x\in A}\mathbb{P}(X = x)$$

La loi $\mathbb{P}_X$ de X est alors entièrement déterminée par les quantités $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E$:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x\in E} p_x\delta_x$$

Définition 1.8 Variable aléatoire à densité. Une variable aléatoire X à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ est dite **à densité** par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d si il existe une fonction mesurable

$$f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$$

telle que $\mathbb{P}_X = f\lambda_d$:

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\, d\lambda_d(x)$$

Il faut que f vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\lambda_d(x) = 1$$

Par exemple, si $d = 1$, on a

$$\mathbb{P}_X([a, b]) = \int_a^b f(x)\, d\lambda_1(x)$$

On notera souvent $f_X = f$ et on appelle cette fonction la **densité** de X.

1.8.1 Lois usuelles

Lois discrètes :
Loi uniforme sur un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$.
Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini.
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur E, notée $X \sim \mathcal{U}(E)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$$

c'est-à-dire
$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{card}(A)}{n}$$
Loi de Bernoulli.
Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, notée $X \sim \mathcal{B}(p)$, si sa loi est
$$\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$$
c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(X=1) = p, \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$
Loi binomiale.
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, notée $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, si sa loi est
$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$
cela correspond au nombre de succès dans n répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre p (de manière indépendante).
Loi géométrique.
Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$, notée $X \sim \mathcal{G}(p)$, si sa loi est
$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \delta_k$$
c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$
cela correspond au nombre de répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre p avant le premier succès.
Loi de Poisson.
Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$, notée $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, si sa loi est
$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \delta_k$$
c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$
cela correspond au nombre d'événements rares dans un intervalle de temps donné.
Lois à densité sur $\mathbb{R}^d$:
Loi uniforme sur un ensemble A de $\mathbb{R}^d$.
Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, telle que $0 < \lambda_d(A) < +\infty$. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur A, notée $X \sim \mathcal{U}(A)$, si sa loi est
$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A$$
c'est-à-dire $\mathbb{P}_X$ admet la densité constante $\frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A$. Autrement dit, si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on a
$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B \frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A(x)\, d\lambda_d(x) = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(A)}$$
dans le cas $d=1$ et $A = [a,b]$, la densité est $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}$.
Loi exponentielle.
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, notée $X \sim \mathcal{E}(\theta)$, si sa loi est
$$\mathbb{P}_X = \theta e^{-\theta x} \lambda_1 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$$
c'est-à-dire $\mathbb{P}_X$ admet la densité $f_X(x)\theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1. Autrement dit, si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a
$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, d\lambda_1(x)$$

dans le cas $d = 1$. Cette loi vérifie la propriété de l'absence de mémoire, c'est-à-dire

$$\forall s, t \geq 0, \mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

Loi normale ou gaussienne.
Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, notée $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = f_X \lambda_1$$

où f_X est la densité de la loi normale, donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Autrement dit, si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, d\lambda_1(x)$$

remarque, la loi $\mathcal{N}(,)$, c'est-à-dire avec la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

est appelée loi normale standard.