Calcul différentiel — TDs

Ivan Lejeune

22 janvier 2025

Table des matières

TD1

Equations différentielles et Cauchy-Lipschitz

Exercice 1.1. La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$

où m, F, R sont des constantes. Calculer v.

Solution. On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

avec

$$y(x) = v(t), \quad a(x) = \frac{R}{m}, \quad b(x) = \frac{F}{m}, \quad x = t$$

Pour résoudre une équation de cette forme, on résout l'équation homogène puis on cherche une solution particulière.

▷ Résolvons l'équation homogène

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = 0$$

- Une primitive de la fonction $\frac{R}{m}$ est

$$\frac{R}{m}t$$

- Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$v_h = \lambda e^{-\frac{R}{m}t}$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

▷ Trouvons une solution particulière à l'équation

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$

- Ici le second membre est une constante donc on cherche une solution évidente sous forme de constante.
  On voit que $v_p = \frac{F}{R}$ convient :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v &= \frac{F}{m} \\ 0 + \frac{R}{m} \times \frac{F}{R} &= \frac{F}{m} \\ \frac{F}{m} &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

▷ Les solutions de l'équation s'écrivent comme somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène, soit ici :

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = \lambda e^{-\frac{R}{m}t} + \frac{F}{R}$$

Exercice 1.2. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $x' - 2x = e^{2t}t^2$ avec $x(0) = 0$,
2. $x' - \frac{1}{1+t}x = 2t^2$ avec $x(0) = -3$,
3. $x' - (1+t)x = -2t - t^2$ avec $x(0) = 2$.

Solution.

1. ▷ Résolvons l'équation homogène

$$x' - 2x = e^{2t}t^2$$

- Une primitive de la fonction -2 est

$$-2t$$

- Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$x_h = \lambda e^{2t}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

▷ Trouvons une solution particulière à l'équation

$$x' - 2x = e^{2t}t^2$$

- Ici le second membre est de la forme polynome fois exponentielle donc on cherche une solution sous la forme

$$x_p = t\left(at^2 + bt + c\right)e^{2t}$$

Ce facteur t est nécessaire car on a déjà une solution homogène de la forme e^{2t} et on ne veut pas de redondance. On intègre dans l'équation pour avoir

$$\begin{aligned}
&x' - 2x = e^{2t}t^2 \\
\Longrightarrow\ &\left(3at^2 + 2bt + c\right)e^{2t} + 2\left(at^3 + bt^2 + ct\right)e^{2t} - 2\left(at^3 + bt^2 + ct\right)e^{2t} = e^{2t}t^2 \\
\Longrightarrow\ &\left(2at^3 + (3a+2b)t^2 + (2b+c)t + 2c\right)e^{2t} = e^{2t}t^2
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
a &= 0 \\
b &= \frac{1}{2} \\
c &= 0
\end{aligned}$$

Donc la solution particulière est

$$x_p = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

▷ Les solutions de l'équation s'écrivent comme somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène, soit ici :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \lambda e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

2. 2e partie

Exercice 1.3. Résoudre les équations différentielles suivantes en en donnant toutes les solutions maximales :

1. $x' + x = \sin t$,
2. $x' = 3t^2 - \frac{x}{t}$.

Exercice 1.4. On considère le système linéaire d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' & = -5x + 8y - 4 \\ y' & = -4x + 7y + 3 \end{cases} \quad \text{avec les conditions initiales} \quad \begin{cases} x(0) & = 0 \\ y(0) & = 1 \end{cases} \tag{1}$$

1. Trouver les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice suivante :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Expliquer pourquoi résoudre (1) revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a' & = 3a + 10 \\ b' & = -b - 7 \end{cases} \quad \text{avec les conditions initiales} \quad \begin{cases} a(0) & = 2 \\ b(0) & = -1 \end{cases} \tag{2}$$

Remarque. Il est possible d'arriver à un système différent, ce qui n'est pas grave du moment que les calculs sont corrects et que le résultat est un système découplé.

3. Trouver la solution du (2) puis du (1).

Solution.

1. ▷ Les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ sont les solutions de l'équation caractéristique

$$\mathsf{det}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$.

▷ Les vecteurs propres sont les solutions du système

$$\begin{cases} (-5-3)x + 8y & = 0 \\ -4x + (7-3)y & = 0 \end{cases}$$

On trouve alors les vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on peut écrire la matrice $\mathcal{A}$ sous forme diagonale

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{P}^{-}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. ▷ On peut réécrire le système (1) sous la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On peut alors poser

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y \end{pmatrix}$$

On a alors

$$a' = x' + 2y'$$
$$b' = x' + y'$$

On a donc

$$a' = -5a + 8b - 4$$
$$b' = -4a + 7b + 3$$

qui est le système (2).
Comme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P^{-1}X$$

on a

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc on a bien $a(0) = 2$ et $b(0) = -1$.

3. ▷ Résolvons le système (2)

- Pour a, on a
$$a(t) = ce^{3t} - \frac{10}{3}$$
et avec la condition initiale $a(0) = 2$, on trouve $c = \frac{16}{3}$.
- Pour b, on a
$$b(t) = de^{-t} + 7$$
et avec la condition initiale $b(0) = -1$, on trouve $d = 6$.
- Les solutions du système (2) sont donc
$$a(t) = \frac{16}{3}e^{3t} - \frac{10}{3}$$
$$b(t) = 6e^{-t} + 7$$
Ce qui, traduit pour x et y donne :
$$x(t) = \frac{16}{3}e^{3t} - \frac{10}{3} + 12e^{-t} - 14 = \frac{16}{3}e^{3t} + 12e^{-t} - \frac{52}{3}$$
$$y(t) = \frac{16}{3}e^{3t} - \frac{10}{3} + 6e^{-t} - 7 = \frac{16}{3}e^{3t} + 6e^{-t} - \frac{31}{3}$$

Exercice 1.5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose
$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\, dt$$

1. Montrer que φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
3. En intégrant par parties l'expression de $\varphi'(x)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par φ.
4. Calculer $\varphi(x)$.

Exercice 1.6. Calculer la solution maximale du problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.7. Résoudre sur un intervalle à préciser le problème suivant :
$$\begin{cases} xx' = \frac{1}{2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 1.8. On considère le **modèle de Gompertz**, utilisé en dynamique des populations, dans lequel l'évolution de la population $N(t)$ considérée est décrite par l'équation suivante :

$$N'(t) = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)$$

où r et $K > 0$ sont des constantes données. Donner une expression de la population en fonction de la population initiale $N(0) = N_0 > 0$. Que se passe-t-il quand $t \to \infty$?

Solution.

- Utilisons Cauchy-Lipschitz pour résoudre l'équation différentielle.
  ▷ On cherche $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)\ln\left(\dfrac{K}{N(t)}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

  Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u : x \mapsto f(t,x) = rx\ln\left(\frac{K}{x}\right)$$

  Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe x_3 tel que

$$u'(x_3) = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1}$$

  par le théorème des accroissements finis.
  Alors,

$$|u(x_2) - u(x_1)| = |u'(x_3)||x_2 - x_1|$$

  On prend u' continue sur $ffx_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon$. Soit

$$M = \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |u'(x)|$$

  Si $x_1, x_2 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, on a

$$\begin{aligned} |u(x_2) - u(x_1)| &= |u'(x_3)||x_2 - x_1| \\ &\leq M|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

  Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon = \frac{x_0}{2} > 0$ et $\lambda = \sup\limits_{[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |u'|$.
  Soient t, x_1, x_2 tels que

$$\sup\{|t - t_0|, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|\} < \varepsilon$$

  On a $x_1, x_2 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ donc, par le T.A.F.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |u(x_1) - u(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2|$$

  f est continue et localement Lipschitzienne en espace donc il existe une unique solution maximale

Exercice 1.9.