Topologie des espaces métriques — Cours

Ivan Lejeune

24 janvier 2025

Table des matières

Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique)

1 Espaces métriques

Soit X un ensemble.

Définition 1.1. On appellle une **distance** (ou métrique) sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y, z \in X$,

(i) la distance est *positive* :
$$d(x,y) \geq 0$$

(ii) la distance possède la *séparation* :
$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

(iii) la distance est *symétrique* :
$$d(x,y) = d(y,x)$$

(iv) la distance vérifie l'*inégalité triangulaire* :
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Exemple. Un exemple classique de distance est la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^n$:
$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) la norme possède la *séparation* :
$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(ii) la norme est *homogène* :
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$

(iii) la norme vérifie l'*inégalité triangulaire* :
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Exercice $\star$.
Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, alors la fonction
$$d(x,y) = \|x - y\|$$
est une distance sur E.

Exemple. Un exemple classique est $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Exercice $\star$.
Soit X et $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que
$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que δ est une distance sur X appelée **distance discrète**.

Remarque. Si on considère $\mathbb{R}$ muni de δ alors δ n'est pas une norme.

2 Ouverts d'un espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 2.1. Pour $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X$, on note

$$B\left(x_0, \varepsilon\right[= \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

la **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon ε.

Définition 2.2. Une partie $U \subset X$ est dite **ouverte** si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B\left(x, \varepsilon\right[\subset U$.

Exemple.

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne, on a

$$B\left(x_0, \varepsilon\right[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

qui est l'intervalle ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
- Un contre-exemple est l'intervalle $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas ouvert.