

# Groupes et Anneaux II — Cours

Ivan Lejeune

28 janvier 2025

## Table des matières

Chapitre 1 — qqch . . . . .	2
1 Exemples importants de groupes. . . . .	2
2 Action de groupe . . . . .	2

## Chapitre 1 — qqch

### 1 Exemples importants de groupes

$A^\times$

Soit  $A$  un anneau et  $A^\times$  l'ensemble des éléments inversibles de  $A$ . L'ensemble  $A^\times$  est un groupe pour la multiplication.

Si  $A = \mathbb{K}$  est un corps, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble

$$\mu_n(\mathbb{K}) = \{z \in \mathbb{K} \mid z^n = 1\}$$

est un groupe pour la multiplication.

**Remarque.** On a  $\mu_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  via l'isomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mu_n \\ \bar{k} &\mapsto e^{2i\pi k/n} \end{aligned}$$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . L'ensemble  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  est un groupe pour la multiplication des matrices.

**Remarque.** Si  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ , c'est-à-dire un  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p$  premier, alors  $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)|$  est fini. Pour le calculer, considérons  $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ . On a

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$$

avec  $X_i \in \mathbb{F}_p^n$ . On a  $X_1 \neq 0$ , donc on a  $p^n - 1$  choix pour  $X_1$ .

Ensuite, on a  $X_2 \notin \mathbb{F}_p X_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_p}(X_1)$ , donc on a  $p^n - p$  choix pour  $X_2$ .

En général, on a  $p^n - p^{i-1}$  choix pour  $X_i$ .

On a donc

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)$$

$\mathcal{S}_n$

Considérons les éléments suivants :

- $n > 1$  un entier naturel,
- $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  dans le plan (dans le sens anti-horaire),
- $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  la réflexion par rapport à l'axe des abscisses.

Si on identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbb{C}$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$R(z) = e^{\frac{2i\pi}{n}} z \quad \text{et} \quad S(z) = \bar{z}$$

et alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$SR^k S = R^{-k}$$

Alors, le groupe

$$\mathcal{D}_n = \{\mathrm{Id}, R, \dots, R^{n-1}, S, SR, \dots, SR^{n-1}\}$$

est un sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ , c'est le groupe diédral à  $2n$  éléments.

### 2 Action de groupe

Soit  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble.

**Définition 2.1.** Une **action** de  $G$  sur  $X$  est une application

$$\begin{aligned}\alpha : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

telle que

- (i) pour tout  $x \in X$ , on a  $e \cdot x = x$ ,
- (ii) pour tout  $g, h \in G$  et  $x \in X$ , on a  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ .

**Notation.**

- On notera  $g \cdot x$  pour signifier  $\alpha(g, x)$ .
- On notera  $G \curvearrowright X$  pour signifier que  $G$  agit sur  $X$ .

**Définition 2.2.** Un  **$G$ -ensemble** est un ensemble muni de l'action de  $G$ .

**Définition 2.3.** Une **représentation** de  $G$  dans  $X$  est un morphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \mathfrak{S}_X$$

où  $\mathfrak{S}_X$  est le groupe des permutations/bijections de  $X$ .

**Notation.** On notera alors pour tout  $g \in G$

$$\rho_g := \rho(g)$$

et pour tout  $x \in X$

$$\rho_g(x) := \rho(g(x))$$

**Exercice.**

- Montrer que si  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  est une action alors il existe  $\rho : G \rightarrow \mathfrak{S}_X$  telle que, pour tout  $g \in G$ , on a

$$\begin{aligned}\rho(g) : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

- Réciproquement, montrer que si  $\rho : G \rightarrow \mathfrak{S}_X$  est une représentation alors  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  définie pour tout  $g \in G$  et  $x \in X$  par

$$\alpha(g, x) := \rho_g(x)$$

est une action.

**Exemple.**

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit sur  $\{1, \dots, n\}$  par permutation, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_n \times \{1, \dots, n\} &\rightarrow \{1, \dots, n\} \\ (\sigma, k) &\mapsto \sigma(k)\end{aligned}$$

- Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Le groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  agit sur  $\mathbb{K}^n$  par multiplication, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ (A, x) &\mapsto Ax\end{aligned}$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le groupe diédral  $\mathcal{D}_n$  agit sur  $\mu_n$  par multiplication, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n \times \mu_n &\rightarrow \mu_n \\ (g, \zeta) &\mapsto g(\zeta)\end{aligned}$$

On peut vérifier que cette action est bien définie pour les générateurs  $R$  et  $S$ .

- Soit  $H < G$  (sous-groupe de  $G$ ). On a
  1. L'action par translation à gauche :

$$H \subset G \quad \text{par} \quad \rho^L : H \rightarrow \mathfrak{S}_G$$

$$\text{avec } \rho_h^L(g) = hg$$

2. L'action par translation à droite :

$$H \subset G \quad \text{par} \quad \rho^R : H \rightarrow \mathfrak{S}_G$$

$$\text{avec } \rho_h^R(g) = gh^{-1}$$

**Remarque.** Attention, en général  $\rho_h(g) := gh$  ne définit pas une action de  $H$  sur  $G$ .

**Définition 2.4.** Soient  $X$  et  $Y$  des  $G$ -ensembles. On dit que

$$f : X \rightarrow Y$$

est  **$G$ -équivariante** si pour tout  $x \in X$  et tout  $g \in G$ , on a

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

**Exercice.** On considère  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On note  $G^L$  (respectivement  $G^R$ ) l'ensemble  $G$  muni de l'action de  $H$  par translation à gauche (respectivement à droite). Montrer que

$$\begin{aligned}(\cdot)^{-1} : G^L &\rightarrow G^R \\ g &\mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

est une bijection  $H$ -équivariante.

**Définition 2.5.** Soient  $G$  et  $\Gamma$  des groupes et  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- (i) Si  $G \subset \Gamma$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- $G$  agit par homomorphismes sur  $\Gamma$ ,
- pour tout  $g \in G$  et tout  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ , on a

$$g \cdot (\gamma_1 \gamma_2) = (g \cdot \gamma_1)(g \cdot \gamma_2)$$

- Il existe un morphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma) < \mathfrak{S}_\Gamma$$

tel que pour tout  $g \in G$ , on a  $\rho_g$  est un morphisme de groupes.

- (ii) Si  $G \subset V$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- $G$  agit linéairement sur  $V$  (l'action est linéaire),
- pour tout  $g \in G$  et tout  $v_1, v_2 \in V$  et tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ , on a

$$g \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (g \cdot v_1) + \lambda_2 (g \cdot v_2)$$

- Il existe un morphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) < \mathfrak{S}_V$$

tel que pour tout  $g \in G$ , on a  $\rho_g$  est une application linéaire.

### Exemple.

1. Avec  $H < G$ , l'action de  $H$  par translation à gauche sur  $G$  est une action par homomorphismes si et seulement si  $H = \{e\}$ .

En effet, si  $H = \{e\}$ , alors l'action est triviale. Réciproquement, si l'action est par homomorphismes, on a

$$\begin{aligned} h \cdot (gg') &= (h \cdot g)(h \cdot g') \\ \iff hgg' &= hghg' \\ \iff e &= h \end{aligned}$$

pour tout  $g, g' \in G$ , donc  $H = \{e\}$ .

2. L'action de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathbb{K}^n$  est linéaire.

3. L'action par conjugaison :

Si  $H < G$  alors  $H \subset G$  par  $\rho^C : H \rightarrow \mathrm{Aut}(G) < \mathfrak{S}_G$  et  $\rho_h^C(g) = hgh^{-1}$ .

Il s'agit d'une action par homomorphismes.

**Théorème de Cayley.** Si  $G$  est un groupe d'ordre  $n$ , alors il est isomorphe à un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$ .

*Démonstration.* On sait que  $G$  agit sur lui même par translation à gauche  $\rho^L : G \rightarrow \mathfrak{S}_G \simeq \mathfrak{S}_n$ .  
Donc

$$g \in \mathrm{Ker}(\rho^L) \implies \rho_g^L(e) = g \cdot e = e \implies g = e$$

Donc  $\rho^L$  est injectif et

$$\rho^L : G \rightarrow \rho^L(G) < \mathfrak{S}_G$$

est un isomorphisme de groupes. □

**Exemple.**  $\mu_n$  est isomorphe au sous-groupe de  $\mathfrak{S}_n$  engendré par  $(1\ 2 \dots u)$ .

$$\zeta_n = e^{2i\pi/n}, \quad \mu_n = \{\zeta^1, \dots, \zeta^n\} \simeq \{1, 2, \dots, n\}$$

et

$$\begin{aligned} \rho^L : \mu_n &\rightarrow \mathfrak{S}_{\mu_n} \simeq \mathfrak{S}_n \\ \zeta_n^k &\mapsto (1\ 2 \dots n)^k \end{aligned}$$

**Définition 2.6.** On prend  $G \subset X$ .

1. On dit que  $Y \subset X$  est **stable** par  $G$  si

$$\{g \cdot y \mid g \in G, y \in Y\} = G \cdot Y = Y$$

2. L'**orbite** de  $x \in X$  est

$$\mathrm{orb}(x) = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

qui est stable par  $G$ .

3. Le **stabilisateur** de  $x \in X$  est

$$\mathrm{st}(x) = G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

qui est un sous-groupe de  $G$ .

4. On dit que  $x \in X$  est un **point fixe** de  $g \in G$  si

$$g \cdot x = x$$

c'est à dire si  $g \in \text{st}(x)$ . L'ensemble des points fixes de  $g$  est noté

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

De plus,  $x \in X$  est un point fixe de  $G$  si et seulement si

$$x \in X^g, \quad \forall g \in G$$

c'est à dire si et seulement si  $G_X = G$ . L'ensemble des points fixes de  $G$  est noté

$$X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x, \quad \forall g \in G\}$$

5. L'action est **transitive** si il existe  $x \in X$  tel que  $\text{orb}(x) = G \cdot x = X$  (dans ce cas,  $X = G \cdot x, \forall x \in X$ ) Dans ce cas, on dit que  $X$  est un  **$G$ -espace homogène**.