

Topologie des espaces métriques — Cours

Ivan Lejeune

28 janvier 2025

Table des matières

Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique)	2
1 Espaces métriques	2
2 Ouverts d'un espace métrique.	3

Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique)

1 Espaces métriques

Soit X un ensemble.

Définition 1.1. On appelle une **distance** (ou *métrique*) sur X une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y, z \in X$,

(i) la distance est *positive* :

$$d(x, y) \geq 0$$

(ii) la distance possède la *séparation* :

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

(iii) la distance est *symétrique* :

$$d(x, y) = d(y, x)$$

(iv) la distance vérifie l'*inégalité triangulaire* :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Exemple. Un exemple classique de distance est la **distance euclidienne** sur \mathbb{R}^n :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Définition 1.2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On appelle **norme** sur E une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) la norme possède la *séparation* :

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(ii) la norme est *homogène* :

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

(iii) la norme vérifie l'*inégalité triangulaire* :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Exercice *.

Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E , alors la fonction

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur E .

Exemple. Un exemple classique est \mathbb{R}^n muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Exercice *.

Soit X et $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que δ est une distance sur X appelée **distance discrète**.

Remarque. Si on considère \mathbb{R} muni de δ alors δ n'est pas une norme.

2 Ouverts d'un espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 2.1. Pour $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X$, on note

$$B(x_0, \varepsilon[= \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

la **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon ε .

Définition 2.2. Une partie $U \subset X$ est dite **ouverte** si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon[\subset U$.

Exemple.

- Dans \mathbb{R} muni de la norme euclidienne, on a

$$B(x_0, \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

qui est l'intervalle ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

- Un contre-exemple est l'intervalle $[0, 1[$ dans \mathbb{R} qui n'est pas ouvert.

Définition 2.3. On note $\mathcal{T}_d = \{\text{ouverts de } X\}$

Proposition. On a les propriétés suivantes :

- (i) $X \in \mathcal{T}_d$ et $\emptyset \in \mathcal{T}_d$,
- (ii) Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est une famille de \mathcal{T}_d , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$,
- (iii) Si $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une famille finie de \mathcal{T}_d , alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$.

Démonstration.

- (i) Par convention de logique, on a $\emptyset \in \mathcal{T}_d$. Soit $x \in X$, alors $B(x, 1[\subset X$, donc $X \in \mathcal{T}_d$.
- (ii) Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Comme $U_i \in \mathcal{T}_d$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon[\subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.
- (iii) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $x \in U_i$. Comme $U_i \in \mathcal{T}_d$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_i[\subset U_i$. Posons $\varepsilon = \min_{i=1}^n \varepsilon_i$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $B(x, \varepsilon[\subset U_i$. Donc $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$.

□

Définition 2.4. Soit X un ensemble (pas forcément métrique). On dit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est une **topologie** sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $X \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$,
- (ii) Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est une famille de \mathcal{T} , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
- (iii) Si $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une famille finie de \mathcal{T} , alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Les éléments de \mathcal{T} sont appelés **ouverts** de X . On dit alors que (X, \mathcal{T}) est un **espace topologique**.

Exemple. Soit X un ensemble. On a les exemples suivants :

- (a) Si (X, d) est un espace métrique, alors \mathcal{T}_d est une topologie sur X .
- (b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X .
- (c) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_\delta$ est une topologie sur X où δ est la distance discrète.

(d) Si $X = \{a, b\}$, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ est une topologie sur X .

Définition 2.5. Soit (X, \mathcal{T}_X) et (Y, \mathcal{T}_Y) deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est **continue** si pour tout ouvert $V \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Définition 2.6. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est **fermé** si $X \setminus A$ est ouvert.

Remarque. Un ensemble $A \subset X$ peut être ouvert et fermé en même temps.

Exemple. Si on se place dans \mathbb{R} muni de la norme euclidienne, alors l'intervalle $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.