Topologie des espaces métriques — Cours

Ivan Lejeune

30 janvier 2025

Table des matières

Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique)

1 Espaces métriques

Soit X un ensemble.

Définition 1.1. On appellle une **distance** (ou métrique) sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y, z \in X$,

(i) la distance est *positive* :
$$d(x, y) \geq 0$$

(ii) la distance possède la *séparation* :
$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

(iii) la distance est *symétrique* :
$$d(x, y) = d(y, x)$$

(iv) la distance vérifie l'*inégalité triangulaire* :
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Exemple. Un exemple classique de distance est la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^n$:
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) la norme possède la *séparation* :
$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(ii) la norme est *homogène* :
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$

(iii) la norme vérifie l'*inégalité triangulaire* :
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Exercice $\star$.
Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, alors la fonction
$$d(x, y) = \|x - y\|$$
est une distance sur E.

Exemple. Un exemple classique est $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Exercice $\star$.
Soit X et $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que
$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que δ est une distance sur X appelée **distance discrète**.

Remarque. Si on considère $\mathbb{R}$ muni de δ alors δ n'est pas une norme.

2 Ouverts d'un espace métrique

Soit (X,d) un espace métrique.

Définition 2.1. Pour $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X$, on note

$$\mathsf{B}\left(x_0, \varepsilon\right[= \{x \in X \mid d(x,x_0) < \varepsilon\}$$

la **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon ε.

Définition 2.2. Une partie $U \subset X$ est dite **ouverte** si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathsf{B}\left(x, \varepsilon\right[\subset U$.

Exemple.

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne, on a

$$\mathsf{B}\left(x_0, \varepsilon\right[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

qui est l'intervalle ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
- Un contre-exemple est l'intervalle $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas ouvert.

Définition 2.3. On note $\mathcal{T}_d = \{$**ouverts de** $X\}$

Proposition. On a les propriétés suivantes :

(i) $X \in \mathcal{T}_d$ et $\varnothing \in \mathcal{T}_d$,

(ii) Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est une famille de $\mathcal{T}_d$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$,

(iii) Si $\{U_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est une famille finie de $\mathcal{T}_d$, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$.

Démonstration.

(i) Par convention de logique, on a $\varnothing \in \mathcal{T}_d$. Soit $x \in X$, alors $\mathsf{B}\left(x, 1\right[\subset X$, donc $X \in \mathcal{T}_d$.

(ii) Soit $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Comme $U_i \in \mathcal{T}_d$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathsf{B}\left(x, \varepsilon\right[\subset U_i \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Donc $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

(iii) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, alors pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $x \in U_i$. Comme $U_i \in \mathcal{T}_d$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $\mathsf{B}\left(x, \varepsilon_i\right[\subset U_i$. Posons $\varepsilon = \min_{i=1}^n \varepsilon_i$, alors pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a $\mathsf{B}\left(x, \varepsilon\right[\subset U_i$. Donc $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$.

□

Définition 2.4. Soit X un ensemble (pas forcément métrique). On dit que $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(x)$ est une **topologie** sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) $X \in \mathcal{T}$ et $\varnothing \in \mathcal{T}$,

(ii) Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est une famille de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,

(iii) Si $\{U_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est une famille finie de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés **ouverts** de X. On dit alors que $(X,\mathcal{T})$ est un **espace topologique**.

Exemple. Soit X un ensemble. On a les exemples suivants :

(a) Si (X,d) est un espace métrique, alors $\mathcal{T}_d$ est une topologie sur X.

(b) $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ est une topologie sur X.

(c) $\mathcal{T} = \mathscr{P}(X) = \mathcal{T}_\delta$ est une topologie sur X où δ est la distance discrète.

(d) Si $X = \{a, b\}$, alors $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$ est une topologie sur X.

Définition 2.5. Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **continue** si pour tout ouvert $V \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Définition 2.6. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est **fermé** si $X \setminus A$ est ouvert.

Remarque. Un ensemble $A \subset X$ peut être ouvert et fermé en même temps.

Exemple. Si on se place dans $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne, alors l'intervalle $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.