

Groupes et Anneaux II — TDs

Ivan Lejeune

22 janvier 2025

Table des matières

TD1 — qqch	2
----------------------	---

TD1 — qqch

Exercice 1.1.

1. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu \mathcal{F} et $x \in \Omega$. Montrer que

$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$$

définit une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

2. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels dans $[0, 1]$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$

est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} de mesure de Lebesgue $\lambda(I)$ finie et strictement positive. Montrer que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$

définit une probabilité sur $(I, \mathcal{B}(I))$.

4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré (pas forcément de probabilité) et $f: \Omega \rightarrow [0, \infty[$ une fonction mesurable telle que

$$\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) = 1.$$

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}: \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \int_{\Omega} f(\omega) \mathbb{1}_A(\omega) d\mu(\omega) \end{aligned}$$

est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

Solution. test