# Groupes et Anneaux II — Cours

Ivan Lejeune

23 janvier 2025

## Table des matières

Chapitre 1 — qqch . . . . . . . . 2
1 Exemples importants de groupes. . . . . . . . 2
2 Action de groupe . . . . . . . . 2

# Chapitre 1 — qqch

## 1 Exemples importants de groupes

### $A^\times$

Soit $A$ un anneau et $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de $A$. L'ensemble $A^\times$ est un groupe pour la multiplication.
Si $A = \mathbb{K}$ est un corps, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$\mu_n(\mathbb{K}) = \{z \in \mathbb{K} \mid z^n = 1\}$$

est un groupe pour la multiplication.

> **Remarque.** On a $\mu_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ via l'isomorphisme de groupes
>
> $$\begin{aligned} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mu_n \\ \overline{k} &\mapsto e^{2i\pi k/n} \end{aligned}$$

### $\mathsf{GL_n}(\mathbb{K})$

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathsf{GL_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathsf{GL_n}(\mathbb{K})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

> **Remarque.** Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p$ premier, alors $|\mathsf{GL_n}(\mathbb{F}_p)|$ est fini. Pour le calculer, considérons $X \in \mathsf{GL_n}(\mathbb{F}_p)$. On a
>
> $$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$$
>
> avec $X_i \in \mathbb{F}_p^n$. On a $X_1 \neq 0$, donc on a $p^n - 1$ choix pour $X_1$.
> Ensuite, on a $X_2 \notin \mathbb{F}_p X_1 = \mathsf{Vect}_{\mathbb{F}_p}(X_1)$, donc on a $p^n - p$ choix pour $X_2$.
> En général, on a $p^n - p^{i-1}$ choix pour $X_i$.
> On a donc
>
> $$|\mathsf{GL_n}(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p)\cdots(p^n - p^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1}(p^n - p^k)$$

### $\mathscr{S}_n$

Considérons les éléments suivants :

- $n > 1$ un entier naturel,
- $R \in \mathsf{GL_n}(\mathbb{R})$ la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ dans le plan (dans le sens anti-horaire),
- $S \in \mathsf{GL_n}(\mathbb{R})$ la réflexion par rapport à l'axe des abscisses.

Si on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$R(z) = e^{\frac{2i\pi}{n}} z \quad \text{et} \quad S(z) = \overline{z}$$

et alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$SR^kS = R^{-k}$$

Alors, le groupe

$$\mathscr{D}_n = \left\{\mathsf{Id}, R, \ldots, R^{n-1}, S, SR, \ldots, SR^{n-1}\right\}$$

est un sous-groupe de $\mathsf{GL_n}(\mathbb{R})$, c'est le groupe diédral à $2n$ éléments.

## 2 Action de groupe

Soit $G$ un groupe et $X$ un ensemble.

**Définition 2.1.** Une **action** de $G$ sur $X$ est une application

$$\begin{aligned}\alpha : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

telle que

(i) pour tout $x \in X$, on a $e \cdot x = x$,

(ii) pour tout $g, h \in G$ et $x \in X$, on a $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

**Notation.**

- On notera $g \cdot x$ pour signifier $\alpha(g, x)$.
- On notera $G \circlearrowright X$ pour signifier que $G$ agit sur $X$.

**Définition 2.2.** Un **$G$-ensemble** est un ensemble muni de l'action de $G$.

**Définition 2.3.** Une **représentation** de $G$ dans $X$ est un morphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathfrak{S}_X$$

où $\mathfrak{S}_X$ est le groupe des permutations/bijections de $X$.

**Notation.** On notera alors pour tout $g \in G$

$$\rho_g := \rho(g)$$

et pour tout $x \in X$

$$\rho_g(x) := \rho(g(x))$$

**Exercice.**

- Montrer que si $\alpha : G \times X \to X$ est une action alors il existe $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$ telle que, pour tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}\rho(g) : X &\to X \\ x &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

- Réciproquement, montrer que si $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$ est une représentation alors $\alpha : G \times X \to X$ définie pour tout $g \in G$ et $x \in X$ par

$$\alpha(g, x) := \rho_g(x)$$

est une action.

**Exemple.**

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\{1, \ldots, n\}$ par permutation, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_n \times \{1, \ldots, n\} &\to \{1, \ldots, n\} \\ (\sigma, k) &\mapsto \sigma(k)\end{aligned}$$

- Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le groupe $\mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathbb{K}^n$ par multiplication, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\mathsf{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ (A, x) &\mapsto Ax\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Le groupe diédral $\mathscr{D}_n$ agit sur $\mu_n$ par multiplication, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_n \times \mu_n &\to \mu_n \\ (g, \zeta) &\mapsto g(\zeta) \end{aligned}$$

  On peut vérifier que cette action est bien définie pour les générateurs $R$ et $S$.
- Soit $H < G$ (sous-groupe de $G$). On a
  1. L'action par translation à gauche :

$$H \circlearrowright G \quad \text{par} \quad \rho^L : H \to \mathfrak{S}_G$$

     avec $\rho_h^L(g) = hg$
  2. L'action par translation à droite :

$$H \circlearrowright G \quad \text{par} \quad \rho^R : H \to \mathfrak{S}_G$$

     avec $\rho_h^R(g) = gh^{-1}$

**Remarque.** Attention, en général $\rho_h(g) := gh$ ne définit pas une action de $H$ sur $G$.

**Définition 2.4.** Soient $X$ et $Y$ des $G$-ensembles. On dit que

$$f : X \to Y$$

est ***$G$-équivariante*** si pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$, on a

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

**Exercice.** On considère $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$. On note $G^L$ (respectivement $G^R$) l'ensemble $G$ muni de l'action de $H$ par translation à gauche (respectivement à droite). Montrer que

$$\begin{aligned} (\cdot)^{-1} : G^L &\to G^R \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

est une bijection $H$-équivariante.

**Définition 2.5.** Soient $G$ et $\Gamma$ des groupes et $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Si $G \circlearrowright \Gamma$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- $G$ ***agit par homomorphismes*** sur $\Gamma$,
- pour tout $g \in G$ et tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on a

$$g \cdot (\gamma_1 \gamma_2) = (g \cdot \gamma_1)(g \cdot \gamma_2)$$

- Il existe un morphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathsf{Aut}(\Gamma) < \mathfrak{S}_\Gamma$$

  tel que pour tout $g \in G$, on a $\rho_g$ est un morphisme de groupes.

(ii) Si $G \circlearrowright V$, les assertions suivantes sont équivalentes :
- $G$ ***agit linéairement*** sur $V$ (l'action est linéaire),
- pour tout $g \in G$ et tout $v_1, v_2 \in V$ et tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, on a

$$g \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (g \cdot v_1) + \lambda_2 (g \cdot v_2)$$

- Il existe un morphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V) < \mathfrak{S}_V$$

tel que pour tout $g \in G$, on a $\rho_g$ est une application linéaire.

**Exemple.**

1. Avec $H < G$, l'action de $H$ par translation à gauche sur $G$ est une action par homomorphismes si et seulement si $H = \{e\}$.
   En effet, si $H = \{e\}$, alors l'action est triviale. Réciproquement, si l'action est par homomorphismes, on a
   $$\begin{aligned} & h \cdot (gg') = (h \cdot g)(h \cdot g') \\ \iff & hgg' = hghg' \\ \iff & e = h \end{aligned}$$
   pour tout $g, g' \in G$, donc $H = \{e\}$.
2. L'action de $\mathsf{GL_n}(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ est linéaire.
3. L'action par conjugaison :
   Si $H < G$ alors $H \circlearrowright G$ par $\rho^C : H \to \mathsf{Aut}(G) < \mathfrak{S}_G$ et $\rho^C_h(g) = hgh^{-1}$.
   Il s'agit d'une action par homomorphismes.

**Théorème de Cayley.** Si $G$ est un groupe d'ordre $n$, alors il est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

*Démonstration.* On sait que $G$ agit sur lui meme par translation à gauche $\rho^L : G \to \mathfrak{S}_G \simeq \mathfrak{S}_n$. Donc

$$g \in \mathsf{Ker}(\rho^L) \implies \rho^L_g(e) = g \cdot e = e \implies g = e$$

Donc $\rho^L$ est injectif et

$$\rho^L : G \to \rho^L(G) < \mathfrak{S}_G$$

est un isomorphisme de groupes. □

**Exemple.** $\mu_n$ est isomorphe au sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par $(1\ 2\ \cdots\ u)$.

$$\zeta_n = e^{2i\pi/n}, \quad \mu_n = \{\zeta^1, \ldots, \zeta^n\} \simeq \{1, 2, \ldots, n\}$$

et

$$\begin{aligned} \rho^L : \mu_n &\to \mathfrak{S}_{\mu_n} \simeq \mathfrak{S}_n \\ \zeta_n^k &\mapsto (1\ 2\ \cdots\ n)^k \end{aligned}$$

**Définition 2.6.** On prend $G \circlearrowright X$.

1. On dit que $Y \subset X$ est **stable** par $G$ si
   $$\{g \cdot y \mid g \in G,\ y \in Y\} = G \cdot Y = Y$$
2. L'**orbite** de $x \in X$ est
   $$\mathsf{orb}(x) = G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$
   qui est stable par $G$.
3. Le **stabilisateur** de $x \in X$ est
   $$\mathsf{st}(x) = G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$
   qui est un sous-groupe de $G$.

4. On dit que $x \in X$ est un **point fixe** de $g \in G$ si

$$g \cdot x = x$$

c'est à dire si $g \in \mathsf{st}(x)$. L'ensemble des points fixes de $g$ est noté

$$X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

De plus, $x \in X$ est un point fixe de $G$ si et seulement si

$$x \in X^g, \quad \forall g \in G$$

c'est à dire si et seulement si $G_X = G$. L'ensemble des points fixes de $G$ est noté

$$X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x, \ \forall g \in G\}$$

5. L'action est **transitive** si il existe $x \in X$ tel que $\mathsf{orb}(x) = G \cdot x = X$ (dans ce cas, $X = G \cdot x, \forall x \in X$) Dans ce cas, on dit que $X$ est un **$G$-espace homogène**.