

# Topologie — TDs

Ivan Lejeune

30 janvier 2025

## Table des matières

TD0 . . . . .	2
---------------	---

## TD0

**Exercice 0.1 Distance discrète.** Soit  $X$  un ensemble et  $\delta$  la distance discrète sur cet ensemble.

1. Vérifier que  $\delta$  est bien une distance sur  $X$ .
2. Déterminer les boules ouvertes et fermées de  $(X, \delta)$ . Puis, déterminer la topologie  $T_\delta$  associée à  $\delta$ .

**Solution.** Commençons par rappeler la définition de la distance discrète :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1. Vérifions les quatre propriétés d'une distance :
  - (i) Positivité :  $\forall x, y \in X, \delta(x, y) \geq 0$ , vrai par définition.
  - (ii) Séparation :  $\forall x, y \in X, \delta(x, y) = 0 \iff x = y$ , vrai par définition.
  - (iii) Symétrie :  $\forall x, y \in X, \delta(x, y) = \delta(y, x)$ , vrai par définition.
  - (iv) Inégalité triangulaire :  $\forall x, y, z \in X, \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ . Si  $x = y$ , alors  $\delta(x, y) = 0$  et l'inégalité est vérifiée. Sinon,  $z \neq x$  et  $z \neq y$ , donc  $\delta(x, z) = \delta(z, y) = 1$ . L'inégalité est donc vérifiée.
2. Rappelons que la boule ouverte de centre  $x \in X$  et de rayon  $r > 0$  pour une distance  $d$  est

$$B(x, r[ = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Ici on a plusieurs cas qui se présentent :

- Si  $r \leq 1$ , alors  $B(x, r[ = \{y \in X \mid \delta(x, y) < r\} = \{x\}$ .
- Si  $r > 1$ , alors  $B(x, r[ = \{y \in X \mid \delta(x, y) < r\} = X$ .

Pour les boules fermées on a

$$B(x, r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Plusieurs cas qui se présentent :

- Si  $r < 1$ , alors  $B(x, r] = \{y \in X \mid \delta(x, y) \leq r\} = \{x\}$ .
- Si  $r \geq 1$ , alors  $B(x, r] = \{y \in X \mid \delta(x, y) \leq r\} = X$ .

**Exercice 0.2 Distance et normes.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ . Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|y - x\| \end{aligned}$$

définit une distance sur  $E$ .

**Solution.** Vérifions les quatre propriétés d'une distance :

- (i) Positivité :  $\forall x, y \in E, d(x, y) = \|y - x\| \geq 0$  car la norme est positive.
- (ii) Séparation :  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff \|y - x\| = 0 \iff y - x = 0 \iff y = x$ .
- (iii) Symétrie :  $\forall x, y \in E, d(x, y) = \|y - x\| = \|x - y\| = d(y, x)$ .
- (iv) Inégalité triangulaire :  $\forall x, y, z \in E, d(x, y) = \|y - x\| \leq \|y - z\| + \|z - x\| = d(x, z) + d(z, y)$  par l'inégalité triangulaire de la norme.

**Exercice 0.3 Normes sur  $\mathbb{R}^n$ .** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que les fonctions

suivantes définissent des normes sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$N_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \text{et} \quad N_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|).$$

Dessiner leurs boules unités dans le cas  $n = 2$ .

**Solution.** Rappelons les propriétés d'une norme :

- (i) Positivité :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) \geq 0$ , vrai car la somme des valeurs absolues est positive.
- (ii) Séparation :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \forall i$ .
- (iii) Homogénéité :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| N(x)$ .
- (iv) Inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N(x+y) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = N(x) + N(y)$ .

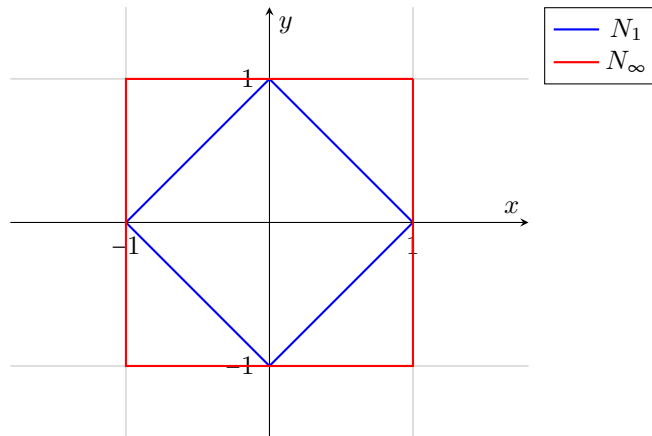
Vérifions maintenant que  $N_1$  est une norme :

- (i) Positivité :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$ .
- (ii) Séparation :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_1(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \forall i$ .
- (iii) Homogénéité :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_1(\lambda x) = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| N_1(x)$ .
- (iv) Inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N_1(x+y) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = N_1(x) + N_1(y)$ .

Vérifions maintenant que  $N_\infty$  est une norme :

- (i) Positivité :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \geq 0$ .
- (ii) Séparation :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_\infty(x) = 0 \iff \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = 0 \iff x_i = 0 \forall i$ .
- (iii) Homogénéité :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_\infty(\lambda x) = \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda x_i|) = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = |\lambda| N_\infty(x)$ .
- (iv) Inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N_\infty(x+y) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i + y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) + \max_{1 \leq i \leq n} (|y_i|) = N_\infty(x) + N_\infty(y)$ .

Voici leurs boules unités dans le cas  $n = 2$  :



**Exercice 0.4 Distance Fly Emirates.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\omega$  un point fixé de  $X$  (Dubai). On définit la fonction suivante :

$$D : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ d(x, \omega) + d(\omega, y) & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

- Montrer que  $D$  définit une distance sur  $X$ .
- On suppose que  $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$  et  $\omega = (0, 0)$ . Pour  $a \in X$ , dessiner les boules ouvertes centrées en  $a$  pour la distance  $D$ .

3. Montrer que si  $x \neq \omega$ , le singleton  $\{x\}$  est ouvert pour la distance  $D$ .

**Solution.** test