Théorie des probabilités — TDs

Ivan Lejeune

16 octobre 2024

Table des matières

TD1 — Espaces probabilisés

Exercice 1.1.

1. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et $x \in \Omega$. Montrer que
$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$$
définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
2. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $[0,1]$ telle que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$
Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(I)$ finie et strictement positive. Montrer que
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$
définit une probabilité sur $(I, \mathscr{B}(I))$.
4. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré (pas forcément de probabilité) et $f : \Omega \to [0, \infty[$ une fonction mesurable telle que
$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) = 1.$$
Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathscr{F} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)\, d\mu(\omega) \end{aligned}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

Solution.

1. Commençons par montrer que
$$\delta_x(A)$$

est une mesure, puis que c'est une probabilité.

- ▷ Pour faire un rappel, vérifions les propriétés d'une mesure :
  - — On a bien $\delta_x(\varnothing) = 0$ pour tout $x \in \Omega$
  - — On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$. Alors

$$\begin{aligned}\delta_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{1}_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_x A_n\end{aligned}$$

  Ainsi, $\delta_x(A)$ est bien une mesure.

- ▷ Comme $x \in \Omega$, on a toujours $\delta_x(\Omega) = 1$.

Ainsi, comme δ_x est une mesure et $\delta_x(\Omega) = 1$, on a bien que δ_x est une probabilité.

2. On considère

$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$

Vérifions les hypothèses d'une probabilité :

- ▷ On a

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\mathbb{P}_n(\varnothing)}_{=0} = 0$$

- ▷ On considère $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n(A_k)}_{=\mathbb{P}(A_k)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\end{aligned}$$

  On rappelle qu'on peut intervertir les deux sommes car tous les éléments sont positifs

- ▷ Enfin, on a

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\mathbb{P}_n(\Omega)}_{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

3. On considère

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$

Comme λ est une mesure et $\frac{1}{\lambda(I)} \geq 0$, on a bien que $\mathbb{P}$ est une mesure. Montrons maintenant que c'est une probabilité :

▷ Comme

$$\mathbb{P}(I) = \frac{\lambda(I)}{\lambda(I)} = 1$$

on a bien que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

4. On considère

$$\mathbb{P}(A) = \int_\Omega f(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_A f(\omega)\,d\mu(\omega)$$

On vérifie les hypothèses :

▷ On a

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \int_\Omega f(\omega)\mathbb{1}_\varnothing(\omega)\,d\mu(\omega) = 0$$

▷ On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \int_\Omega f(\omega)\mathbb{1}_{\cup_{n=0}^{\infty} A_n}(\omega)\,d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega f(\omega)\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{1}_{A_n}(\omega)\,d\mu(\omega)\end{aligned}$$

Comme on a la positivité et la somme est finie, on peut appliquer le théorème de convergence monotone pour intervertir somme et integrale. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \int_\Omega f(\omega)\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{1}_{A_n}(\omega)\,d\mu(\omega)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega f(\omega)\mathbb{1}_{A_n}(\omega)\,d\mu(\omega)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

▷ On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= \int_\Omega f(\omega)\underbrace{\mathbb{1}_\Omega(\omega)}_{=1}\,d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega f(\omega)\,d\mu(\omega)\\ &= 1\end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathbb{P}$ est une probabilité

Exercice 1.2. On considère la mesure $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{oo0,2}(x)\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
On peut imaginer que cette mesure représente le temps d'attente à un carrefour composé de trois feux piétons (rouge, vert), chaque feu restant au vert pendant une minute.

1. Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
2. Calculer $\mathbb{P}([a,b])$ pour tout intervalle $0 \le a < b \le 2$.
3. Déterminer

$$\int_\mathbb{R} x\,d\mathbb{P}(x), \qquad \text{puis} \qquad \int_\mathbb{R} x^2\,d\mathbb{P}(x).$$

Solution. On rappelle que

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\lambda$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{3}\delta_0(A) + \frac{1}{3}\int_A \mathbb{1}_{]0,2[}(x)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{3}\delta_0(A) + \frac{1}{3}\lambda\left(]0,2[\cap A\right)\end{aligned}$$

1. On vérifie que c'est une probabilité :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\mathbb{P}_1 + \frac{2}{3}\mathbb{P}_2$$

   avec $\mathbb{P}_1 = \delta_0$ et $\mathbb{P}_2 = \frac{1}{2}\lambda\left(]0,2[\cap\cdot\right)$.
   L'exercice 1 assure que $\mathbb{P}$ est une probabilité

2. On a

$$\mathbb{P}_1\left([a,b]\right) = \delta_0\left([a,b]\right) = \mathbb{1}_{\{0\}}(a)$$

   et

$$\mathbb{P}_2\left([a,b]\right) = \frac{1}{2}\lambda\left(]0,2[\cap[a,b]\right) = \frac{b-a}{2}$$

   Alors

$$\mathbb{P}\left([a,b]\right) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\{0\}}(a) = \frac{1}{3}(b-a)$$

3. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x\,d\mathbb{P}(x) &= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x\,d\delta_0(x) + \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   Il suit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x^2\,d\mathbb{P}(x) &= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x^2\,d\delta_0(x) + \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x^2\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{3}\times 0^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

Exercice 1.3. Soit $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soient A et B deux événements.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-1 \le \mathbb{P}(A\cap B) \le \min\{\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)\}.$$
   (b) On considère le lancer d'un dé équilibré. Proposer un exemple d'événements A et B (d'intersection non vide) pour lequel l'inégalité de gauche est une égalité. Même question pour l'inégalité de droite.
2. Montrer que si $A_1,\dots,A_n$ sont des n événements, alors

$$\mathbb{P}(A_1)+\cdots+\mathbb{P}(A_n)-(n-1) \le \mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \le \min_{1\le i\le n}\mathbb{P}(A_i).$$

Solution.

1. On a
   (a) $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\le 1$ et $A\cap B\subset A,\quad A\cap B\subset B$, on en déduit facilement les inégalités.

(b) On peut considérer

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Alors

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{6}{6} \quad = \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6} \quad = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Pour la deuxième partie, on peut considérer

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\}$$

Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) \quad = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{6} \quad = \min\left(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\right)$$

2. On fait une preuve par récurrence :
   - ▷ Hypothèse :

     $$\mathbb{P}(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) \leq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i)$$

     l'initialisation est montrée à l'exercice 1.
   - ▷ Hérédité :
     On suppose $\mathbb{P}(n)$ vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, prouvons $\mathbb{P}(n+1)$:

     $$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}) \\ &\geq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1 \\ &\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) - n \end{aligned}$$

     Pour la deuxième inégalité on a

     $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &\leq \min\left(\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}), \mathbb{P}(A_n)\right) \\ &\leq \min\left(\min \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\right) \cdots \\ &\leq \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$