Optimisation convexe — TPs

Ivan Lejeune

3 mars 2025

Table des matières

TP1 — Méthodes d'optimisation en 1D

1.1 Méthode de la dichotomie

Exercice 1.1.

1. Quelle équation souhaite-t-on résoudre pour notre problème d'optimisation ? Quelles conditions doit-on vérifier sur f pour appliquer la méthode de la dichotomie ?
2. Ecrire l'algorithme de dichotomie et l'appliquer pour trouver le minimum de la fonction $f = x^2 - 2\sin(x)$ sur $[0,2]$ avec une précision de 10^{-5}. Comment obtient-on le nombre d'itérations à partir de la précision ?
3. Comparer votre code avec l'implémentation de la fonction `scipy.optimize.bisect`.

Solution.

1. On souhaite résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour notre problème d'optimisation. Il faut donc que f soit continue sur $[a,b]$ et que $f(a)f(b) < 0$.
   On va alors chercher à résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les points critiques de f.
2. L'algorithme de dichotomie est le suivant : REMPLACER CODE ICI Après exécution, on trouve que le minimum de f est $x = 0.73908$ avec une précision de 10^{-5}.
   Pour obtenir le nombre d'itérations à partir de la précision, on utilise la formule
   $$n = \frac{\log \partial \frac{b-a}{\varepsilon}}{\log(2)},$$
   où n est le nombre d'itérations, a et b sont les bornes de l'intervalle et ε est la précision. L'implémentation est la suivante : REMPLACER CODE ICI et indique qu'il faut 18 itérations pour obtenir le résultat.
3. En comparant avec la méthode implémentée dans `scipy.optimize.bisect`, on trouve que le résultat est le même et que le nombre d'itérations est identique.

1.2 Méthode de Newton

Exercice 1.2.

1. Quelle condition doit vérifier f pour appliquer la méthode de Newton pour le problème d'optimisation ? Comment va être formulé l'itéré de Newton dans ce cas ?
2. Ecrire l'algorithme de Newton dans ce cas et l'appliquer à la fonction $f(x) = x^2 - 2\sin(x)$ avec $x_0 = 1$.

Dans les deux cas précédents, il nous faut de la régularité pour la fonction f, voici une autre méthode qui demande moins de régularité pour notre fonction.

Solution.

1. Pour appliquer la méthode de Newton, il faut que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. L'itéré de Newton est alors donné par
   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$$
2. L'algorithme de Newton est le suivant : REMPLACER CODE ICI Après exécution, on trouve que le minimum de f est $x = 0.73908$.

1.3 Méthode de la section dorée

Exercice 1.3. La méthode de la section dorée permet de trouver le minimum d'une fonction f continue et unimodale sur l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On note par la suite le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L'algorithme est le suivant :

1. Ecrire l'algorithme et l'appliquer à la fonction $f(x) = x^2 - 2\sin(x)$ sur $[0, 2]$
2. Comparer votre code avec l'implémentation de la fonction `scipy.optimize.golden`.
3. Comparer les 3 méthodes pour $f = -\frac{1}{x} + \cos(x)$ sur $[a, b] = [2, 4]$ ou pour $x_0 = 2.5$ au niveau du nombre d'itérations et du temps de calcul.

   Représenter le graphique de la fonction en plaçant les résultats des itérations successives de Newton.

Solution.

1. L'algorithme de la section dorée est le suivant : REMPLACER CODE ICI Après exécution, on trouve que le minimum de f est $x = 0.73908$.
2. L'implémentation de `scipy.optimize.golden` donne le même résultat et le nombre d'itérations est identique.
3. Pour la fonction $f = -\frac{1}{x} + \cos(x)$ sur $[2, 4]$ avec $x_0 = 2.5$, on trouve que la méthode de la dichotomie est la plus rapide, suivie de la méthode de Newton et enfin la méthode de la section dorée.

   Le graphique de la fonction est le suivant : REMPLACER CODE ICI