Optimisation convexe — TPs

Ivan Lejeune

14 mars 2025

Table des matières

TP1 — Méthodes d'optimisation en 1D

1.1 Méthode de la dichotomie

Exercice 1.1.

1. Quelle équation souhaite-t-on résoudre pour notre problème d'optimisation ? Quelles conditions doit-on vérifier sur f pour appliquer la méthode de la dichotomie ?
2. Ecrire l'algorithme de dichotomie et l'appliquer pour trouver le minimum de la fonction $f = x^2 - 2\sin(x)$ sur $[0, 2]$ avec une précision de 10^{-5}. Comment obtient-on le nombre d'itérations à partir de la précision ?
3. Comparer votre code avec l'implémentation de la fonction `scipy.optimize.bisect`.

Solution.

1. On souhaite résoudre l'équation $f'(x) = 0$ pour trouver le minimum de f. Pour appliquer la méthode de la dichotomie, il faut que f soit continue et unimodale sur $[a, b]$.
   On va alors chercher à résoudre $f'(x) = 0$ pour trouver les points critiques de f.
2. On commence par importer les librairies nécessaires et définir la fonction f :

```python
# Import libraries
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import bisect
from scipy.optimize import golden
```
[1] ✓ 0.5s MagicPython

```python
# Define the function to minimise
def f(x):
    return x**2 - 2 * np.sin(x)
```
[2] ✓ 0.0s MagicPython

   Ensuite on définit la fonction `dichotomie` qui prend en argument la fonction f, les bornes de l'intervalle $[a, b]$ sur lequel on cherche le minimum et la précision ε. On l'applique ensuite à notre fonction f :

```python
# Define the dichotomous search algorithm
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    while b - a > epsilon:
        c = (a + b) / 2
        if f(a) * f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a + b) / 2
```
[3] ✓ 0.0s MagicPython

```python
# Define the search conditions
a = 0
b = 2
epsilon = 1e-5
```
[4] ✓ 0.0s MagicPython

```python
# Define the derivative of the function
def df(x):
    return 2 * x - 2 * np.cos(x)
```
[5] ✓ 0.0s MagicPython

```python
# Apply the search algorithm to the function
x_min = dichotomie(df, a, b, epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min)
```
[6] ✓ 0.0s MagicPython

```
··· The minimum of the function is at x = 0.7390861511230469
```

Pour obtenir le nombre d'itérations à partir de la précision, on utilise la formule

$$n = \frac{\log(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\log(2)},$$

où n est le nombre d'itérations, a et b sont les bornes de l'intervalle et ε est la précision.

3. On remarque que la méthode de dichotomie de `scipy.optimize.bisect` donne le même résultat. Un test plus avancé avec des fonctions plus complexes pourrait montrer des différences en termes de performances.

```
# Comparison with the scipy library
x_min_bisect = bisect(df, a, b, rtol=epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min_bisect)
```
```
[7]  ✓ 0.0s                                        MagicPython
...  The minimum of the function is at x = 0.7390861511230469
```

1.2 Méthode de Newton

Exercice 1.2.

1. Quelle condition doit vérifier f pour appliquer la méthode de Newton pour le problème d'optimisation ? Comment va être formulé l'itéré de Newton dans ce cas ?
2. Ecrire l'algorithme de Newton dans ce cas et l'appliquer à la fonction $f(x) = x^2 - 2\sin(x)$ avec $x_0 = 1$.

Solution.

1. Pour appliquer la méthode de Newton, il faut que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. L'itéré de Newton est alors donné par
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$$
2. On définit la fonction `newton` qui prend en argument la dérivée première et seconde de f, la valeur initiale x_0 et la précision ε. On l'applique ensuite à notre fonction f :

```
# Define the Newton search algorithm
def newton(df, df2, x0, epsilon):
    x = x0
    while abs(df(x)) > epsilon:
        x = x - df(x) / df2(x)
    return x
```
```
[8]  ✓ 0.0s                                        MagicPython
```
```
# Define the search conditions
x0 = 1
epsilon = 1e-5
```
```
[9]  ✓ 0.0s                                        MagicPython
```
```
# Define the function to minimise and its derivatives
def f(x):
    return x**2 - 2 * np.sin(x)


def df(x):
    return 2 * x - 2 * np.cos(x)


def df2(x):
    return 2 + 2 * np.sin(x)
```
```
[10]  ✓ 0.0s                                       MagicPython
```
```
# Apply the search algorithm to the function
x_min = newton(df, df2, x0, epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min)
```
```
[11]  ✓ 0.0s                                       MagicPython
...  The minimum of the function is at x = 0.739085133385284
```

On remarque que la méthode de Newton converge plus rapidement que la méthode de dichotomie. Cependant, elle nécessite des conditions plus restrictives sur la fonction f. Dans le cas de la dichotomie, f doit être unimodale, tandis que pour Newton, f doit être deux fois dérivable.

1.3 Méthode de la section dorée

Exercice 1.3.

1. Ecrire l'algorithme et l'appliquer à la fonction $f(x) = x^2 - 2\sin(x)$ sur $[0, 2]$
2. Comparer votre code avec l'implémentation de la fonction `scipy.optimize.golden`.
3. Comparer les 3 méthodes pour $f = -\frac{1}{x} + \cos(x)$ sur $[a, b] = [2, 4]$ ou pour $x_0 = 2.5$ au niveau du nombre d'itérations et du temps de calcul.

   Représenter le graphique de la fonction en plaçant les résultats des itérations successives de Newton.

Solution.

1. On définit la fonction `golden` qui prend en argument la fonction f, les bornes de l'intervalle $[a, b]$ sur lequel on cherche le minimum et la précision ε. On l'applique ensuite à notre fonction f :

```python
# Define the golden search algorithm
def golden(f, a, b, epsilon):
    rho = (1 + np.sqrt(5)) / 2
    x1 = 1 / rho * a + (1 - 1 / rho) * b
    x2 = (1 - 1 / rho) * a + 1 / rho * b
    while b - a > epsilon:
        if f(x1) < f(x2):
            b = x2
            x2 = x1
            x1 = 1 / rho * a + (1 - 1 / rho) * b
        else:
            a = x1
            x1 = x2
            x2 = (1 - 1 / rho) * a + 1 / rho * b
    return (a + b) / 2
```

```python
# Define the search conditions
a = 0
b = 2
epsilon = 1e-5
```

```python
# Apply the search algorithm to the function
x_min = golden(f, a, b, epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min)
```

```
The minimum of the function is at x = 0.7390861927011781
```

2. On remarque que la méthode de la section dorée de `scipy.optimize.golden` donne le même résultat. Un test plus avancé avec des fonctions plus complexes pourrait montrer des différences en termes de performances.

```python
# Comparison with the scipy library
x_min_golden = golden(f, a, b, epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min_golden)
```

```
The minimum of the function is at x = 0.7390861927011781
```

3. On définit la fonction $f = -\frac{1}{x} + \cos(x)$ et on applique les 3 méthodes pour trouver le minimum sur $[2, 4]$ avec $x_0 = 2.5$. On compare les 3 méthodes en termes de nombre d'itérations et de temps de calcul.

   On représente graphiquement les itérations successives des 3 méthodes.

```python
# Define the function to minimise and its derivatives
def f(x):
    return - 1 / x + np.cos(x)

def df(x):
    return 1 / x**2 + np.sin(x)

def df2(x):
    return -2 / x**3 + np.cos(x)
```

[16] ✓ 0.0s MagicPython

```python
# Define the search conditions
a = 2
b = 4
x0 = 2.5
epsilon = 1e-5
```

[17] ✓ 0.0s MagicPython

```python
# Redefine the search algorithms to return the number of iterations
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    n = 0
    while b - a > epsilon:
        c = (a + b) / 2
        if f(a) * f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
        n += 1
    return (a + b) / 2, n


def newton(df, df2, x0, epsilon):
    x = x0
    n = 0
    while abs(df(x)) > epsilon:
        x = x - df(x) / df2(x)
        n += 1
    return x, n


def golden(f, a, b, epsilon):
    rho = (1 + np.sqrt(5)) / 2
    x1 = 1 / rho * a + (1 - 1 / rho) * b
    x2 = (1 - 1 / rho) * a + 1 / rho * b
    n = 0
    while b - a > epsilon:
        if f(x1) < f(x2):
            b = x2
            x2 = x1
            x1 = 1 / rho * a + (1 - 1 / rho) * b
        else:
            a = x1
            x1 = x2
            x2 = (1 - 1 / rho) * a + 1 / rho * b
        n += 1
    return (a + b) / 2, n
```

[18] ✓ 0.0s MagicPython

```python
# Apply the search algorithms to the function
x_min_dicho, n_dicho = dichotomie(df, a, b, epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min_dicho, 'after', n_dicho, 'iterations')

x_min_newt, n_newt = newton(df, df2, x0, epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min_newt, 'after', n_newt, 'iterations')

x_min_gold, n_gold = golden(f, a, b, epsilon)
print('The minimum of the function is at x =', x_min_gold, 'after', n_gold, 'iterations')
```

[19] ✓ 0.0s MagicPython

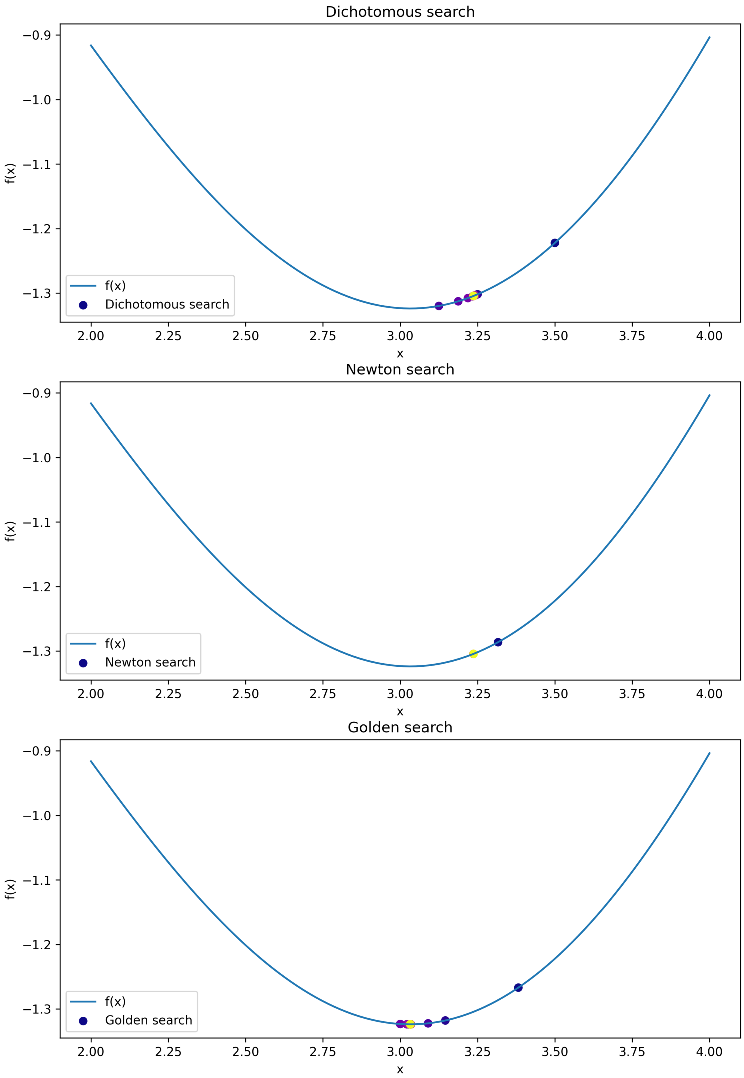
```
The minimum of the function is at x = 3.237163543701172 after 18 iterations
The minimum of the function is at x = 3.2371648550248726 after 3 iterations
The minimum of the function is at x = 3.0326441743922623 after 26 iterations
```

```python
# Redefine the search algorithms to return the successive approximations
def dichotomie(f, a, b, epsilon):
    x = []
    while b - a > epsilon:
        c = (a + b) / 2
        if f(a) * f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
        x.append((a + b) / 2)
    return x


def newton(df, df2, x0, epsilon):
    x = x0
    x_list = []
    while abs(df(x)) > epsilon:
        x = x - df(x) / df2(x)
        x_list.append(x)
    return x_list


def golden(f, a, b, epsilon):
    rho = (1 + np.sqrt(5)) / 2
    x1 = 1 / rho * a + (1 - 1 / rho) * b
    x2 = (1 - 1 / rho) * a + 1 / rho * b
    x = []
    while b - a > epsilon:
        if f(x1) < f(x2):
            b = x2
            x2 = x1
            x1 = 1 / rho * a + (1 - 1 / rho) * b
        else:
            a = x1
            x1 = x2
            x2 = (1 - 1 / rho) * a + 1 / rho * b
        x.append((a + b) / 2)
    return x
```

[20] ✓ 0.0s MagicPython

```python
# Graph the function and the search algorithms
x = np.linspace(a, b, 100)
y = f(x)

fig, ax = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 15))

# Dichotomous search
ax[0].plot(x, y, label='f(x)')
ax[0].scatter(x_min_dicho, [f(x) for x in x_min_dicho], c=range(len(x_min_dicho)), cmap='plasma', label='Dich
ax[0].set_title('Dichotomous search')
ax[0].set_xlabel('x')
ax[0].set_ylabel('f(x)')
ax[0].legend()

# Newton search
ax[1].plot(x, y, label='f(x)')
ax[1].scatter(x_min_newt, [f(x) for x in x_min_newt], c=range(len(x_min_newt)), cmap='plasma', label='Newton
ax[1].set_title('Newton search')
ax[1].set_xlabel('x')
ax[1].set_ylabel('f(x)')
ax[1].legend()

# Golden search
ax[2].plot(x, y, label='f(x)')
ax[2].scatter(x_min_gold, [f(x) for x in x_min_gold], c=range(len(x_min_gold)), cmap='plasma', label='Golden
ax[2].set_title('Golden search')
ax[2].set_xlabel('x')
ax[2].set_ylabel('f(x)')
ax[2].legend()

# Save the plot with high resolution
plt.savefig('search_algorithms.png', dpi=300)

# Display the plot
plt.show()
```

[22] ✓ 1.0s MagicPython



Dichotomous search
f(x)
x
f(x)
Dichotomous search
Newton search
f(x)
x
f(x)
Newton search
Golden search
f(x)
x
f(x)
Golden search

TP2 — Méthodes d'optimisation en 2D

Introduction aux méthodes de gradient

Expérimenter la méthode du gradient à pas fixe pour minimiser la fonction

$$f(x) = x^4 - 7x + 8.$$

On testera successivement les pas $\rho \in \{0.125, 0.1, 0.01\}$ avec l'initialisation $x_0 = 1$ et 15 itérations. On représentera la suite des itérés sur la courve représentative de la fonction f pour chaque pas ρ sur $[0.5, 1.5]$.

2.1 Méthodes d'optimisation pour des fonctions quadratiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désignera par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
On considère la matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ définis par :

$$A_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{pmatrix}}_{n \times n}, \qquad b_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{n \times 1}.$$

On cherche à minimiser à l'aide de méthodes de gradient la fonction :

$$\begin{aligned} J_n : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle A_n x, x \rangle - \langle b_n, x \rangle. \end{aligned}$$

On se concentrera sur le cas $n = 2$.

Exercice 2.1.

1. Calculer $\nabla J_n(x, y)$ puis $\nabla^2 J_n(x, y)$.
2. Cette fonction est-elle convexe ? En quels points atteint-elle son minimum ?
3. Visualiser la fonction en 3D sur $[-2, 2]^2$ puis visualiser les lignes de niveau sur $[-1.5, 1.5]^2$. Qu'observe-t-on ?

Solution.

2.2 Méthode de gradient à pas constant

Exercice 2.2.

1. Implémenter la méthode de gradient à pas constant et l'appliquer à la fonction J_n en partant du point $(-1, 1)$ avec un critère d'arrêt $\varepsilon = 10^{-6}$.
2. Afficher la trajectoire des points calculés successivement. Comment faut-il régler le pas pour arriver vraiment au minimum ?

Solution.

2.3 Méthode de gradient à pas optimal

Exercice 2.3.

1. Implémenter la méthode de gradient à pas optimal et l'appliquer à la fonction J_n en partant du point $(-1, 1)$ avec un critère d'arrêt $\varepsilon = 10^{-6}$.

2. Afficher la trajectoire des points calculés successivement.

Solution.

2.4 Méthode du gradient conjugué

Exercice 2.4.

1. Implémenter la méthode du gradient conjugué et l'appliquer à la fonction J_n en partant du point $(-1, 1)$ avec un critère d'arrêt $\varepsilon = 10^{-6}$.
2. Afficher la trajectoire des points calculés successivement.

Solution.

2.5 Conclusion

Exercice 2.5.

1. Comparer les performances des trois méthodes pour $n = 2$ en terme de nombre d'itérations et de temps de calcul.