Groupes et Anneaux II — TDs

Ivan Lejeune

5 février 2025

Table des matières

TD1 — temp, rajouter contenu precedent

Exercice 1.1.

Solution. On a $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \circlearrowright \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$.
On rappelle que $\mathbb{F}_p \coloneqq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et

$$\begin{aligned} |\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_p)| &= \prod_{k=0}^{n-1}(p^n - p^k) \\ \implies |\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)| &= (2^2 - 2^0)(2^2 - 2^1) = 6. \end{aligned}$$

D'autre part,
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2) = \{[e_1], [e_2], [e_1 + e_2]\} \simeq \mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}.$$
On peut alors trouver un morphisme de groupe

$$\rho : \mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to \mathfrak{S}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)} \simeq \mathfrak{S}_3$$

On sait aussi que
$$\begin{aligned} A \in \mathsf{Ker}(\rho) &\implies \begin{cases} A[e_1] = [e_1] \\ A[e_2] = [e_2] \\ A[e_1 + e_2] = [e_1 + e_2] \end{cases} \\ &\implies A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{F}_2^\times$. Donc $A = \mathsf{Id}_2$.
Donc ρ est fidèle (injective) et comme

$$|\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)| = 6,$$

on a ρ isomorphisme.
On a $\mathscr{D}_3 \circlearrowright \mu_3 = \{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ où $\zeta = e^{2i\pi/3}$. Alors

$$\rho : \mathscr{D}_3 \to \mathfrak{S}_{\mu_3} \simeq \mathfrak{S}_3.$$

Observons ce qui arrive quand on agit sur μ_3. On a

$$R^i S^j \cdot \zeta^k = \begin{cases} \zeta^{i+k} & \text{si } j = 0 \\ \zeta^{i-k} & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

On remarque alors que
$$R^i S^j \in \mathsf{Ker}(\rho) \implies i = 0 \text{ et } j = 0$$
pour $0 \le i \le n-1, 0 \le j \le 1$. Donc $\mathsf{Ker}(\rho) = \{e\}$ et ρ est fidèle.
Comme $|\mathscr{D}_3| = 6$, on a ρ isomorphisme.

Exercice 1.2. On a
$$\mathbb{R}^\times = G \circlearrowright X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
par multiplication par scalaire. Trouver une bijection

$$X/G = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Solution. On considère l'application
$$f : X \to S^1$$
$$z \mapsto \frac{z^2}{|z^2|}.$$
Elle est surjective car $e^{i\theta} = f(e^{i\theta/2})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
Elle est injective car
$$f(x) = f(y) \iff [x] = [y] \in X/G.$$
et
$$\frac{x^2}{|x^2|} = \frac{y^2}{|y^2|} \iff \frac{x}{|x|} = \pm\frac{y}{|y|}$$
$$\iff [x] = [y].$$
Grâce à la propriété universelle des quotients,
$$\exists! \overline{f} : X/G \to S^1$$
$$[z] \mapsto \frac{z^2}{|z^2|}.$$
qui est en plus surjective et injective, donc bijective.

Exercice 1.3.

Solution. On a $\mathbb{R}^\times \circlearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par multiplication par scalaire. On a
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$
$$(x, y) \mapsto [x : y]$$
qui est surjective. On a donc
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$
$$[x : y] \mapsto [x^2 : y^2]$$
qui est bien définie et bijective.