Théorie des probabilités — TDs

Ivan Lejeune

4 décembre 2024

Table des matières

TD1 — Espaces probabilisés

Exercice 1.1.

1. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et $x \in \Omega$. Montrer que
$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$$
définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
2. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $[0,1]$ telle que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$
Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(I)$ finie et strictement positive. Montrer que
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$
définit une probabilité sur $(I, \mathscr{B}(I))$.
4. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré (pas forcément de probabilité) et $f : \Omega \to [0, \infty[$ une fonction mesurable telle que
$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) = 1.$$
Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathscr{F} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)\, d\mu(\omega) \end{aligned}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

Solution.

1. Commençons par montrer que
$$\delta_x(A)$$
est une mesure, puis que c'est une probabilité.
   - ▷ Pour faire un rappel, vérifions les propriétés d'une mesure :
     - — On a bien $\delta_x(\varnothing) = 0$ pour tout $x \in \Omega$
     - — On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$. Alors
$$\begin{aligned} \delta_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{1}_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_x A_n \end{aligned}$$

     Ainsi, $\delta_x(A)$ est bien une mesure.

- ▷ Comme $x \in \Omega$, on a toujours $\delta_x(\Omega) = 1$.

   Ainsi, comme δ_x est une mesure et $\delta_x(\Omega) = 1$, on a bien que δ_x est une probabilité.

2. On considère

$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$

   Vérifions les hypothèses d'une probabilité :

   - ▷ On a

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\mathbb{P}_n(\varnothing)}_{=0} = 0$$

   - ▷ On considère $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n(A_k)}_{=\mathbb{P}(A_k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)
\end{aligned}$$

     On rappelle qu'on peut intervertir les deux sommes car tous les éléments sont positifs

   - ▷ Enfin, on a

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\mathbb{P}_n(\Omega)}_{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

3. On considère

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$

   Comme λ est une mesure et $\frac{1}{\lambda(I)} \geq 0$, on a bien que $\mathbb{P}$ est une mesure. Montrons maintenant que c'est une probabilité :

   ▷ Comme

$$\mathbb{P}(I) = \frac{\lambda(I)}{\lambda(I)} = 1$$

   on a bien que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

4. On considère

$$\mathbb{P}(A) = \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_A f(\omega)\, d\mu(\omega)$$

   On vérifie les hypothèses :

   - ▷ On a

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_\varnothing(\omega)\, d\mu(\omega) = 0$$

   - ▷ On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_{\cup_{n=0}^{\infty} A_n}(\omega)\, d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega f(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\, d\mu(\omega)
\end{aligned}$$

Comme on a la positivité et la somme est finie, on peut appliquer le théorème de convergence monotone pour intervertir somme et integrale. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\Omega} f(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} f(\omega) \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

▷ On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= \int_{\Omega} f(\omega)\, \underbrace{\mathbb{1}_{\Omega}(\omega)}_{=1}\, d\mu(\omega) \\ &= \int_{\Omega} f(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= 1\end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathbb{P}$ est une probabilité

Exercice 1.2. On considère la mesure $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{oo0,2}(x)\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
On peut imaginer que cette mesure représente le temps d'attente à un carrefour composé de trois feux piétons (rouge, vert), chaque feu restant au vert pendant une minute.

1. Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
2. Calculer $\mathbb{P}([a,b])$ pour tout intervalle $0 \leq a < b \leq 2$.
3. Déterminer
$$\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}(x), \qquad \text{puis} \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mathbb{P}(x).$$

Solution. On rappelle que

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\lambda$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{3}\delta_0(A) + \frac{1}{3}\int_A \mathbb{1}_{]0,2[}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{3}\delta_0(A) + \frac{1}{3}\lambda\left(]0,2[\cap A\right)\end{aligned}$$

1. On vérifie que c'est une probabilité :
$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\mathbb{P}_1 + \frac{2}{3}\mathbb{P}_2$$
avec $\mathbb{P}_1 = \delta_0$ et $\mathbb{P}_2 = \frac{1}{2}\lambda\left(]0,2[\cap \cdot\right)$.
L'exercice 1 assure que $\mathbb{P}$ est une probabilité
2. On a
$$\mathbb{P}_1\left([a,b]\right) = \delta_0\left([a,b]\right) = \mathbb{1}_{\{0\}}(a)$$
et
$$\mathbb{P}_2\left([a,b]\right) = \frac{1}{2}\lambda\left(]0,2[\cap [a,b]\right) = \frac{b-a}{2}$$

Alors

$$\mathbb{P}([a,b]) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\{0\}}(a) = \frac{1}{3}(b-a)$$

3. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}(x) &= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_0(x) + \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\, d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mathbb{P}(x) &= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\delta_0(x) + \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x^2\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\, d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{3}\times 0^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

Exercice 1.3. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soient A et B deux événements.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \le \mathbb{P}(A \cap B) \le \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}.$$
   (b) On considère le lancer d'un dé équilibré. Proposer un exemple d'événements A et B (d'intersection non vide) pour lequel l'inégalité de gauche est une égalité. Même question pour l'inégalité de droite.
2. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des n événements, alors
$$\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1) \le \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \le \min_{1\le i\le n} \mathbb{P}(A_i).$$

Solution.

1. On a
   (a) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \le 1$ et $A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$, on en déduit facilement les inégalités.
   (b) On peut considérer
   $$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{3,4,5,6\}$$
   Alors
   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{6}{6} = \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(A \cap B)$$
   Pour la deuxième partie, on peut considérer
   $$A = \{1\}, \quad B = \{1,2\}$$
   Alors
   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6} \le \frac{1}{6} = \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$$
2. On fait une preuve par récurrence :

- ▷ Hypothèse :

$$\mathbb{P}(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) \leq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i)$$

l'initialisation est montrée à l'exercice 1.

- ▷ Hérédité :

On suppose $\mathbb{P}(n)$ vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, prouvons $\mathbb{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}) \\ &\geq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1 \\ &\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) - n \end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &\leq \min\left(\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}), \mathbb{P}(A_n)\right) \\ &\leq \min\left(\min \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\right) \cdots \\ &\leq \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_i) \end{aligned}$$

TD2 — Variables aléatoires

Exercice 2.1. On tire deux fois avec remise dans une urne contenant trois boules numérotées $1, 2, 3$. On désigne par X la somme des résultats obtenus. Montrer que X est une variable aléatoire discrète entre un espace probabilisé et un espace mesurable à déterminer. Donner la loi de X.

Solution. On veut montrer que X est une application mesurable de Ω dans E. Déterminons d'abord l'espace de départ $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.
▷ L'espace de départ correspond à l'ensemble des résultats possibles pour chaque boule tirée, donc

$$\Omega = \{1, 2, 3\}^2$$

qu'on munit de la tribu pleine.
▷ L'espace d'arrivée correspond aux résultats étudiés, soit ici

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

qu'on munit aussi de la tribu pleine.
▷ Alors, on a

$$X : \Omega \to E$$
$$(a, b) \mapsto a + b$$

▷ La loi de X est donc une probabilité uniforme sur E, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_X(a) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{si } a \in \{2, 6\} \\ \frac{2}{9} & \text{si } a \in \{3, 5\} \\ \frac{1}{3} & \text{si } a \in \{4\} \end{cases}$$

avec a un singleton de E. Alors

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{9}\delta_2 + \frac{2}{9}\delta_3 + \frac{1}{3}\delta_4 + \frac{2}{9}\delta_5 + \frac{1}{9}\delta_6$$

Exercice 2.2. On suppose que la basketteuse française Marine Johannés a une probabilité 0.8 de marquer un lancer franc.

1. Lors d'un entraînement, elle tente une série de 10 lancers francs. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de paniers marqués.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Déterminer la probabilité que Marine Johannés marque huit paniers ou plus.
   (c) Donner l'espérance et la variance de X.
2. Lors d'un autre entraînement, Marine Johannés décide de tirer jusqu'à ce qu'elle inscrive un panier. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.
   (a) Donner la loi de Y.
   (b) Déterminer la probabilité que Marine Johannés ait besoin de strictement plus de 3 essais pour marquer son premier panier.
   (c) Donner l'espérance et la variance de Y.

Solution.

1. Marine Johannés fait 10 lancers avec une probabilité de réussite de 0.8.
   (a) La loi de X est donnée par $\mathcal{B}(10, 0.8)$. Alors

$$\mathbb{P}_X(k) = \binom{n}{k} * p^k * 1 - p^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

(b) La probabilité de marquer 8 paniers ou plus vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 8) &= \mathbb{P}_X(8) + \mathbb{P}_X(9) + \mathbb{P}_X(10)\\ &= \binom{10}{8} * 0.8^8 * 0.2^2 + \binom{10}{9} * 0.8^9 * 0.2 + \binom{10}{10} * 0.8^{10} * 0.2^0\\ &= 0.6778 \simeq 68\%\end{aligned}$$

(c) L'espérance et la variance de X sont respectivement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= n * p = 10 * 0.8 = 8\\ \mathbb{V}(X) &= n * p * (1-p) = 10 * 0.8 * 0.2 = 1.6\end{aligned}$$

2. On considère la variable aléatoire Y donnant le nombre d'essais nécessaires pour marquer un panier.

   (a) La loi de Y est donnée par

   $$\mathbb{P}_Y(n) = 0.8 * 0.2^{n-1}$$

   et donc $Y \sim \mathcal{G}(0.8)$.

   (b) La probabilité que Marine Johannés ait besoin de strictement plus de 3 essais pour marquer son premier panier est équivalente à la probabilité qu'elle ne marque pas son premier panier en 1, 2 ou 3 essais, soit

   $$1 - \left(0.8 + 0.8 * 0.2 + 0.8 * 0.2^2\right) = 0.008$$

   (c) L'espérance et la variance de Y sont respectivement

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p} = \frac{1}{0.8} = 1.25\\ \mathbb{V}(Y) &= \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.2}{0.8^2} \simeq 0.31\end{aligned}$$

Exercice 2.3. On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes. On considère la variable aléatoire $X = (X_1, X_2)$ où X_1 donne le nombre de cartes rouges tirées et X_2 le nombre de cartes noires.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de X

Solution.

1. La variable aléatoire X prend les valeurs dans

   $$\{(0,2), (1,1), (2,0)\}$$

   car on tire deux cartes et qu'il n'y a que deux couleurs.
2. La loi de X est donnée par

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(0,2) &= \frac{26}{52} * \frac{25}{51} = \frac{25}{102}\\ \mathbb{P}_X(1,1) &= \frac{26}{52} * \frac{26}{51} + \frac{26}{52} * \frac{26}{51} = \frac{52}{102}\\ \mathbb{P}_X(2,0) &= \frac{26}{52} * \frac{25}{51} = \frac{25}{102}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t) &= \int_t^{\infty} f_X(u)\, d\lambda_1(u) \\ &= \int_t^{\infty} \theta e^{-\theta u}\, d\lambda_1(u) \\ &= \left[-e^{-\theta u}\right]_t^{\infty} \\ &= e^{-\theta t}\end{aligned}$$

TD3 — Moments d'une variable aléatoire

Exercice 3.1. Soit X une variable aléatoire discrète de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta_{x_k}$, avec x_k une suite de réels et p_k des réels positifs qui somment à 1.

1. Détermnier, sous réserve d'existence, la valeur de $\mathbb{E}[X^p]$ pour tout entier naturel p.
2. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ pour X suivant respectivement les lois suivantes :
   - loi de Bernoulli,
   - loi binomiale,
   - loi de Poisson.

Solution.

1. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^p] &= \int_{\mathbb{R}} x^p \, d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^p \, d\delta_{x_k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k^p p_k\end{aligned}$$
Cette quantité existe si $\mathbb{E}\big[|X|^p\big] < \infty$, c'est-à-dire si $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p p_k < \infty$.
2. On applique la formule précédente pour les lois suivantes :
   - loi de Bernoulli : $X \sim \mathcal{B}(1, p)$, on a
$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad p_0 = 1 - p, \quad p_1 = p$$
alors
$$\mathbb{E}[X] = 0 * (1 - p) + 1 * p = p$$
   - loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, on a
$$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$
alors
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ k = j + 1 &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j-1} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} \\ &= np\end{aligned}$$
   - loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a
$$x_k = k, \quad p_k = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \\
&= e^{-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{(k-1)!} \\
k = j+1 \quad &= e^{-\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^{j+1}}{j!} \\
&= e^{-\theta} \theta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!} \\
&= e^{-\theta} \theta e^{\theta} \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Exercice 3.2.

1. Calculer les moments à tout ordre d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra commencer par le cas $\lambda = 1$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle positive. À l'aide du théorème de Fubini, montrer que pour tout entier k,
$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \int_0^{\infty} t^{k-1} \mathbb{P}(X > t) \, d\lambda_1(t)$$
3. En déduire la relation $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour tout entier $k \geq 1$, où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler :
$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt, \quad x > 0$$

Solution.

1. On a
$$\mathbb{P}_X = f_X \, d\lambda_1, \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$
▷ Cas $\lambda = 1$:
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^p] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, d\lambda_1(x) \\
&= \int_0^{\infty} x e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= [-x e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$
▷ Formule de récurrence :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^p] &= \int_{\mathbb{R}} x^p e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= [-x^p e^{-x}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= 0 + p \mathbb{E}\left[X^{p-1}\right]
\end{aligned}$$
Donc par récurrence, on a $\mathbb{E}[X^p] = p!$.
▷ Cas général avec $\lambda > 0$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^p] &= \int_0^{\infty} x^p \lambda e^{-\lambda x} \, d\lambda_1(x) \\
y = \lambda x \quad &= \int_0^{\infty} \frac{y^p}{\lambda^p} e^{-y} \, d\lambda_1(y) \\
&= \frac{p!}{\lambda^p}
\end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} k\int_0^{\infty} t^{k-1}\mathbb{P}(X>t)\,dt &= k\int_0^{\infty} t^{k-1}\int_{\Omega} \mathbb{1}_{X(\omega)>t}\,d\mathbb{P}(\omega)\,dt \\ &= k\int_0^{\infty}\int_{\Omega} t^{k-1}\mathbb{1}_{X(\omega)>t}\,d\mathbb{P}(\omega)\,dt \end{aligned}$$

où le terme à intégrer est

$$(\omega,t)\mapsto t^{k-1}\mathbb{1}_{X(\omega)>t}$$

qui est mesurable et positif, donc on peut inverser l'ordre d'intégration par Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} k\int_{\Omega}\left(\int_0^{\infty} t^{k-1}\mathbb{1}_{X(\omega)>t}\,dt\right)d\mathbb{P}(\omega) &= k\int_{\Omega}\left(\int_0^{X(\omega)} t^{k-1}\,dt\right)d\mathbb{P}(\omega) \\ &= k\int_{\Omega}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^{X(\omega)}d\mathbb{P}(\omega) \\ &= k\int_{\Omega}\frac{X(\omega)^k}{k}\,d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} X(\omega)^k\,d\mathbb{P}(\omega) \\ &= E\left[X^k\right] \end{aligned}$$

3. On considère $X\sim\mathcal{E}(1)$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = k\int_0^{\infty} t^{k-1}\mathbb{P}(X>t)\,dt$$

Or ici, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X>t) &= \int_t^{\infty} e^{-u}\,du \\ &= \left[-e^{-u}\right]_t^{\infty} \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^k\right] &= \int_0^{\infty} t^{k-1}e^{-t}\,dt \\ &= k\Gamma(k) \end{aligned}$$

Donc $\Gamma(k)=(k-1)!$.

Exercice 3.3. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Comparer la probabilité

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu|\geq c\sigma\right)$$

donnée dans la table avec les majorations obtenues par les inégalités de Bienaymé-Tchebychev pour

$$c=0.5,\quad c=1,\quad c=1.5,\quad c=2,\quad c=2.5$$

Solution. On pose $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$, alors $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|X-\mu|\geq c\sigma\right) &= \mathbb{P}\left(|Y|\geq c\right) \\ &= 2\mathbb{P}(Y\geq c) \quad = 2(1-\mathbb{P}(Y\leq c)) = 2(1-\Phi(c)) \end{aligned}$$

avec

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$

On rappelle par exemple que $\Phi(1.36)=0.9131$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq c\sigma\right) \leq \frac{\mathsf{Var}(X)}{c^2\sigma^2} = \frac{1}{c^2}$$

Les résultats sont alors les suivants :

c	$\mathbb{P}\left(\lvert X-\mu\rvert \geq c\sigma\right)$	$\frac{1}{c^2}$
0.5	0.617	4
1	0.3174	1
1.5	0.1336	0.4444
2	0.0456	0.25
2.5	0.0124	0.16

TD4 — Fonctions associées à une variable aléatoire

Exercice 4.1. Rappeler la définitions de la fonctions caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X et calculer φ_X pour les lois suivantes :

1. X suit une loi uniforme sur $[a, b]$,
2. X suit une loi exponentielle de paramètre λ,
3. X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$,
4. X suit une loi normale centrée réduite. On pourra dériver (en justifiant) la fonction caractéristique φ_X puis, après intégration par parties, en déduire que φ_X est solution d'une équation différentielle que l'on pourra résoudre.

Solution. On rappelle dans le cas général que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. On a

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{f_X(x)\, d\lambda_1(x)}_{d\mathbb{P}_X(x)} \\
&= \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a}\, d\lambda_1(x) \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_a^b \\
&= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}
\end{aligned}$$

2. On a

$$f_X(t) = \theta e^{-\theta t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{f_X(x)\, d\lambda_1(x)}_{d\mathbb{P}_X(x)} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{itx}\theta e^{-\theta x}\, d\lambda_1(x) \\
&= \theta\left[\frac{e^{(it-\theta)x}}{it-\theta}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\theta}{\theta - it}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}\delta_n$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}\delta_n(x)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\delta_n(x)}_{e^{itn}} \\
&= e^{it} p \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} e^{it(n-1)} \\
&= \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}
\end{aligned}$$

4. On a

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{h(t,x)}\, d(x)
\end{aligned}$$

▷ À t fixé, on a $x \mapsto h(t,x)$ intégrable par rapport à λ_1.
▷ À x fixé, on a $t \mapsto h(t,x)$ dérivable par rapport à t
▷ On dérive par rapport à t

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\right| &= \left|ixe^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right| \\
&= \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(t) &= \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \\
&= \left|-ie^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} -i\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} ite^{itx}\, dx \\
&= -t\varphi_X(t)
\end{aligned}$$

Cette équation différentielle a pour solution

$$\varphi_X(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

Comme $\varphi_X(0) = 1$, on trouve

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Exercice 4.2. Soit $X \simeq \mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer la fonction de répartition de $-X$ en fonction de celle de X. Qu'en déduit-on ?

2. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, puis calculer $\mathbb{E}[Y]$.
3. Reprendre la questions précédente avec $Z = \exp X$.

Solution.

1. On prend $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
F_{-X}(t) &= \mathbb{P}(-X \le t) = \mathbb{P}(X \ge -t) \\
\mathbb{P}(X \in [-t, +\infty[) &= \int_{-t}^{+\infty} f_X(x)\,dx \\
{\scriptstyle x=-u} &= \int_t^{-\infty} f_X(-u) - du \\
{\scriptstyle f_X \text{ est paire}} &= \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du \\
&= \mathbb{P}(X \le t) = F_X(t)
\end{aligned}$$

Donc X et $-X$ ont la même fonction de répartition et donc la même loi.

2. On sait que $Y = X^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Donc

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = 0, \quad \text{si } t < 0$$

Dans le cas où $t \ge 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \le t) &= \mathbb{P}(X^2 \le t) = \mathbb{P}(|X| \le \sqrt{t}) \\
&= \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) \\
&= 2\mathbb{P}(0 \le X \le \sqrt{t}) \\
&= 2\int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx - \underbrace{2\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx}_{1} \\
&= 2F_X(\sqrt{t}) - 1
\end{aligned}$$

Il suit

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2F_X(\sqrt{t}) - 1 & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$$

et donc F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$F_Y'(t) = \frac{F_X'(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

et donc Y a pour densité

$$f_Y(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

On a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} y \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}}\,dy$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] = E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

car on a la variance de X est égale à 1.

3. On sait que $Z = \exp X$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$$F_Z(t) = 0, \quad \text{si } t < 0$$

Dans le cas où $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\exp X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t) \\ &= F_X(\ln t) \end{aligned}$$

Donc F_Z est dérivale sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} F'_Z(t) &= \frac{F'_X(\ln t)}{t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) \\ &= \frac{e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}}}{t\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) \\ &= f_Z(t) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[e^X\right] &= \int_{\mathbb{R}} e^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dx \\ &= \sqrt{e} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}}{\sqrt{2\pi}} \, dx \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

Exercice 4.3. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice

$$G_X(s) = \alpha(3 + 2s^2)^3, \quad s \in [0, 1]$$

1. Déterminer la valeur de α.
2. Déterminer la loi de X.
3. À partir de G_X, donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

Solution. On rappelle

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{P}(X = n)$$

1. On a $G_X(1) = 1$ donne $\alpha = \frac{1}{125}$.
2. On a

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \frac{1}{125}(3 + 2s^2)^3 \\ &= \frac{1}{125}\left(27 + 3 \times 3^2 \times 2s^2 + 3 \times 3 \times (2s^2)^2 + 2^3 s^6\right) \\ &= \frac{27}{125} + \frac{54}{125}s^2 + \frac{36}{125}s^4 + \frac{8}{125}s^6 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}G_X(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{P}(X = n) \\ &= \mathbb{P}(X = 0) + s^2\mathbb{P}(X = 2) + s^4\mathbb{P}(X = 4) + s^6\mathbb{P}(X = 6)\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière d'un polynôme, la loi de X est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{27}{125} \\ \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{54}{125} \\ \mathbb{P}(X = 4) &= \frac{36}{125} \\ \mathbb{P}(X = 6) &= \frac{8}{125}\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}G_X(s) &= \mathbb{E}\left[s^X\right] \\ G_X'(s) &= \mathbb{E}\left[Xs^{X-1}\right]\end{aligned}$$

donc $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$.

TD5 — Calcul de lois

Exercice 5.1. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. On pose

$$Y = \lfloor X \rfloor + 1$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x. Déterminer la loi de Y.

Solution. ▷ On peut remarquer que Y est une variable aléatoire discrète prenant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
▷ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On veut déterminer $\mathbb{P}(Y = k)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = k) \\
&= \mathbb{P}(k - 1 \leq X < k) \\
&= \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \left| -e^{-\lambda x} \right|_{k-1}^{k} \\
&= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\
&= e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) \\
&= \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}(1 - e^{-\lambda})
\end{aligned}$$

▷ On reconnait alors la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$. Ainsi, $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

Exercice 5.2.

1. Déterminer la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli, de la loi binomiale et de la loi de Poisson. Rappeler également (sans calcul) la fonction caractéristique de la loi normale.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$$

3.
   (a) On considère deux variables aléatoires $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, 1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, 2, \sigma_2^2)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) Montrer que la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   (c) Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Solution.

1. Les fonctions caractéristiques sont
   - Pour $X \sim \mathcal{B}(p)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= p \\
\mathbb{P}(X = 0) &= 1 - p \\
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\
&= \int_\Omega e^{itX(\omega)} \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum_{k=0}^{1} e^{itk} \mathbb{P}(X = k) \\
&= e^{it}\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0) \\
&= e^{it} p + 1 - p
\end{aligned}$$

- Pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ \varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\ &= \int_\Omega e^{itX(\omega)} \mathbb{P}(d\omega) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pe^{it} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

- Pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ \varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{e^{it}\lambda} \\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

- Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{it(\mu+\sigma Y)}\right] \\ &= e^{it\mu} \mathbb{E}\left[e^{it\sigma Y}\right] \\ &= e^{it\mu} \varphi_Y(\sigma t) \\ &= e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\end{aligned}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{it(X+Y)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{itX} e^{itY}\right] \\ \text{par indep de } X, Y &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \mathbb{E}\left[e^{itY}\right] \\ &= \varphi_X(t) \varphi_Y(t)\end{aligned}$$

3.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+X_2}(t) &= \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t) \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} e^{it\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} \\ &= e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{1}{2}(t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2))}\end{aligned}$$

Donc, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

(b) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On a

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) &= \varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)\\ &= (pe^{it}+1-p)\times\cdots\times(pe^{it}+1-p)\\ &= (pe^{it}+1-p)^n\end{aligned}$$

Donc, $X_1+\cdots+X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

(c) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. On a

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)\\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\mu(e^{it}-1)}\\ &= e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

Donc, $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Exercice 5.3. On considère deux variables aléatoires indépendantes $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ avec $\sigma > 0$.

1. On pose $T = X^2$. Calculer $\mathbb{E}[h(t)]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire la loi de T.
   On pourra varifier qu'on retrouve bien le résultat de l'exercice 2 du TD 4.
2. On pose $U = \mathbb{1}_{\{X\geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{X<0\}}$. Déterminer la loi de U.
3. Montrer que $Z = UY$ suit une loi normale de paramètres à déterminer.
4. Déterminer la loi de $Y + Z$.

Solution.

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(t)] &= \mathbb{E}\big[h(X^2)\big]\\ \overset{g(t)=t^2}{} &= \mathbb{E}[(h\circ g)(X)]\\ &= \int_{\mathbb{R}} (h\circ g)(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x^2)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\\ &= 2\int_0^{+\infty} h(x^2)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\\ \overset{t=x^2}{} &= 2\int_0^{+\infty} h(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,d\frac{t}{2\sqrt{t}}\\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\,dt\end{aligned}$$

   Donc T est une variable aléatoire à densité donnée par

$$f_T(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

2. On a

$$U = \begin{cases}1 & \text{si } X \geq 0\\ -1 & \text{si } X < 0\end{cases}$$

Donc, U est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs -1 et 1 avec

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=1) &= \mathbb{P}(X \geq 0)\\ &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}(U=-1) &= \mathbb{P}(X<0)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc, $U \sim \mathcal{B}\left[\frac{1}{2}\right]$. Une variante de Bernoulli appelée *Rademacher*.

3. Montrons que $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq x) &= \mathbb{P}(UY \leq x)\\ &= \mathbb{P}(UY \leq x \mid U=1)\mathbb{P}(U=1) + \mathbb{P}(UY \leq x \mid U=-1)\mathbb{P}(U=-1)\\ \text{par indep de } U &= \mathbb{P}(Y \leq x) \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}(-Y \leq x) \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(Y \leq x) + \mathbb{P}(Y \geq -x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(Y \leq x) + \mathbb{P}(Y \leq x)\right)\\ &= \mathbb{P}(Y \leq x)\end{aligned}$$

Donc $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

4. Y et Z étant indépendantes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{it(Y+Z)}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{itY}e^{itZ}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[e^{itY}\right]\mathbb{E}\left[e^{itZ}\right]\\ &= e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\\ &= e^{-\sigma^2 t^2}\end{aligned}$$

Donc, $Y+Z \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$.

TD6 — Conditionnement et indépendance

Exercice 6.1. On souhaite transmettre un message d'un point à un autre à travers des canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs : 0 ou 1. Au passage de chaque canal, le message a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être bruité, c'est-à-dire d'être transformé en son contraire et $1-p$ d'être transmis fidèlement. Les canaux de transmission sont indépendants les uns des autres.

1. On considère l'événement A_n : « après le canal n, le message est identique au message initial », et on note p_n sa probabilité. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de p. Que vaut p_1 ?
2. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par $x_n = p_n - \frac{1}{2}$. Vérifier que cette suite est géométrique. En déduire une expression pour p_n.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Solution.

1. On utilise la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid \overline{A_n})\mathbb{P}(\overline{A_n}) \\ &= (1-p)p_n + p(1-p_n) \\ &= p_n(1-2p) + p \end{aligned}$$
2. On pose $x_n = p_n - \frac{1}{2}$. Alors
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= p_n(1-2p) + p - \frac{1}{2} \\ &= x_n(1-2p) \end{aligned}$$
La suite (x_n) est donc géométrique de raison $1-2p$ et de premier terme $x_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - p$. On a donc
$$x_n = x_1(1-2p)^{n-1} = \frac{1}{2}(1-2p)^n$$
et
$$p_n = x_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n$$
3. Il y a plusieurs cas à considérer :
   - ▷ Cas 1 : $p \in]0,1[$. Alors
   $$|1-2p| < 1$$
   donc
   $$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$$
   On a perdu toute l'information du message initial.
   - ▷ Cas 2 : $p = 0$. Alors
   $$p_n = 1$$
   pour tout n, donc après chaque canal, on conserve le message initial.
   - ▷ Cas 3 : $p = 1$. Alors
   $$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 6.2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.

1. Rappeler la loi du couple (X, Y).
2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X > t)$, pour tout réel t. En déduire la fonction de répartition puis la loi de $Z = \min(X, Y)$.
4. Soit $t \geq 0$. Montrer que les événements $\{X \leq Y\}$ et $\{Z > t\}$ sont indépendants.

Solution.

1. Soient $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \\
\text{par indep} &= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) \\
&= \int_A \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, dx \int_B \mu e^{-\mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\, dy \\
&= \int_{A \times B} \underbrace{\lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}(x,y)}_{f_{(X,Y)}(x,y)}\, dx\, dy
\end{aligned}$$

Donc (X, Y) est un vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}$$

et

$$d\mathbb{P}_{(X,Y)} = f_{(X,Y)}(x,y)\, d\lambda_2$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq Y) &= \mathbb{P}\left((X,Y) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}\right) \\
&= \int_{\substack{x \leq y \\ x \leq y}} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{0 \leq x \leq y} \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}\, dx\, dy \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^y \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}\, dx\, dy \\
&= \int_0^{+\infty} \left[-e^{-\lambda x - \mu y}\right]_0^y\, dy \\
&= \vdots \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > t) &= \int_t^{+\infty} f_X(x)\, dx \\
&= \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, dx \\
&= \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

La fonction de répartition de X est donc

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et
$$
\begin{aligned}
F_Z(t) &= \mathbb{P}(\min(X,Y) \leq t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) \\
\text{par indep} &= 1 - \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$
donc, par unicité de la fonction de répartition, Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

4. On a
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq Y, Z > t) &= \mathbb{P}(X \leq Y, \min(X,Y) > t) \\
&= \mathbb{P}(X \leq Y, X > t, Y > t) \\
&= \mathbb{P}(X \leq Y, X > t)
\end{aligned}
$$
On pose $D_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t < x \leq y\right\}$. Alors
$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}((X,Y) \in D_t) &= \int_{D_t} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_t^{+\infty} \left(\int_x^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\right) dx \\
&= \int_t^{+\infty} \left(\int_x^{\infty} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y}\,dy\right) dx \\
&= \vdots \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \times e^{-\lambda+\mu t} && = \mathbb{P}(X \leq Y)\mathbb{P}(Z > t)
\end{aligned}
$$
donc les événements $\{X \leq Y\}$ et $\{Z > t\}$ sont indépendants.

TD7 — Lemme de Borel-Cantelli et loi du 0–1

Exercice 7.1. On considère l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la mesure de Lebesgue et on pose $A_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Expliciter l'événement
$$\limsup_{n\to\infty} A_n.$$
2. Calculer
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
Commenter.

Solution.

1. On a
$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \\
&= \bigcap_{n\geq 1} \bigcup k \geq n \left]0, \frac{1}{k}\right] \\
&= \bigcap_{n\geq 1}]0, frac1n] \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$
2. On a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$
et
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
Les A_n ne sont pas indépendants :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) &= \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 7.2. On lance une infinite de fois une pièce de monnaie équilibrée et on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'avec probabilité 1, on obtiendra une infinité de fois k Pile consécutifs.

Solution. ▷ On considère les événements suivants :

- A_1 = « on n'obtient que des Pile entre 1 et k »,
- A_2 = « on n'obtient que des Pile entre $k+1$ et $2k$ »,
- A_3 = « on n'obtient que des Pile entre $2k+1$ et $3k$ »,
- A_n = « on n'obtient que des Pile entre $(n-1)k+1$ et nk ».

Les événements $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants et
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \infty$$
Donc Borel-Cantelli assure que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$$

Exercice 7.3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1), \quad p \in]0,1[$$

On pose $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Enfin, on considère l'événement $A_n = \{S_n = 0\}$.

1. Déterminer la probabilité de A_n. On pourra distinguer suivant la parité de n.
2. A l'aide de la formule de Stirling, déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(A_{2n})$.
3. On pose $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Que représente cet événement ? Déterminer $\mathbb{P}(A)$ dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$.
4. On suppose maintenant que $p = \frac{1}{2}$. On va montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
   (a) Expliquer pourquoi le lemme de Borel-Cantelli ne s'applique pas.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \geq 1$, les vecteurs aléatoires $(X_{k+1}, \ldots, X_{k+n})$ et $X_1, \ldots, X_n$ ont la même loi.
   (c) On rappelle que $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Montrer que

   $$A^c = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{S_k = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, S_{n+k} \neq 0\}$$

   et que cette union est formée d'événements disjoints.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Solution.

1. Si n est impair, alors $\mathbb{P}(A_n) = 0$.
   Si $n = 2k$ est pair, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{2k}) &= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\\ &= \underbrace{\binom{2k}{k}}_{\substack{\text{nb de}\\ \text{chemins}}} \underbrace{p^k}_{\text{ch } \nearrow} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{ch } \searrow}\end{aligned}$$

2. On veut montrer que

$$n! \sim n \to \infty \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

   Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{2n}) &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n (1-p)^n\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{4\pi n}\frac{(e^n)^2}{(n^n)^2\sqrt{2\pi n}^2} p^n (1-p)^n\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4^n p^n (1-p)^n}{\sqrt{\pi n}}\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}\end{aligned}$$

3. On considère

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \text{ on repasse une infinité de fois par 0}$$

   alors, comme $p \neq \frac{1}{2}$, la série des $\mathbb{P}(A_n)$ converge par le critère de D'Alembert et donc

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

   Si $p = \frac{1}{2}$, alors

(a) on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$$

mais les A_n ne sont pas indépendants donc Borel-Cantelli ne s'applique pas.

(b) On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_n) \in B_1 \times \cdots B_n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\right) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((X_{k+1}, \dots, X_{k+n}) \in B_1 \times \cdots B_n\right) \\
\text{indep } &= \mathbb{P}(X_{k+1} \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_{k+n} \in B_n) \\
\text{mm loi } &= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n)
\end{aligned}$$

Donc $(X_1, \dots, X_n)$ et $(X_{k+1}, \dots, X_{k+n})$ ont la même loi

(c) On a

$$\begin{aligned}
A^c &= \left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k\right)^c \\
&= \bigcup_{n \geq 0} \bigcap k \geq n {A_k}^c \\
&= \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k=0}^{\infty} {A_{k+n}}^c \\
&= \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k=0}^{\infty} \{S_{n+k} \neq 0\} \\
&\iff \begin{array}{c}\text{il existe un pas de temps à partir} \\ \text{duquel on ne repasse plus par 0}\end{array} \\
&= \bigcup_{n=0}^{\infty} \underbrace{\{S_n = 0, \forall k \geq 1, S_{k+n} \neq 0\}}_{B_n}
\end{aligned}$$

Alors

$$B_n = \{X_1 + \cdots + X_n = 0 \text{ et } \forall k \geq 1, X_{n+1} + \cdots X_{n+k} \neq 0\}$$

Si $n' > n$, alors dans B_n on a $S_{n'} \neq 0$ (car $n' > n$) et dans B_n' on a $S_{n'} = 0$.

(d) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0, \forall k \geq 1, X_{n+1} + \cdots X_{n+k} \neq 0) \\
\text{indep des } 1 \dots n, n+1 \dots n+k &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(\forall k \geq 1, X_{n+1} + \cdots + X_{n+k} \neq 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(\forall k \geq 1, X_1 + \cdots X_k \neq 0)
\end{aligned}$$

Bref, on a montré que

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\forall k \geq 1, S_k \neq 0) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S_n = 0)}_{\mathbb{P}(A_n)}}_{=\infty}$$

Nécessairement, comme $\mathbb{P}(A^c) \in [0, 1]$, on obtient $\mathbb{P}(A^c) = 0$ et donc $\mathbb{P}(A) = 1$.

TD8 — Convergence de variables aléatoires

Exercice 8.1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi donnée par

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0. Y a-t-il convergence dans $\mathscr{L}^p$?
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. On considère l'événement $A_n = \{X_n = n\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$$

puis en déduire que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\right) = 1$$

Solution.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geq \varepsilon$. Alors

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = n) + \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

mais

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_n|^p) &= |n|^p \frac{1}{2n} + |-n|^p \frac{1}{2n} + 0^p \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= n^{p-1} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \quad \text{pour } p \geq 1\end{aligned}$$

donc $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans $\mathscr{L}^p$.

2. Les événements $(A_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants et

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n}$$

qui est le terme général d'une série divergente. Donc Borel-Cantelli assure que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$$

De plus,

$$\begin{aligned}1 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\forall n \geq 1, \exists k \geq n, X_k = k\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\forall n \geq 1, \sup_{k\geq n} X_k \geq n\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n\to\infty} X_n\right) = +\infty\right)\end{aligned}$$

donc

$$\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = +\infty \text{ p.s.}$$

et $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas p.s..

Exercice 8.2.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Montrer que (X_n) converge vers 0 presque sûrement si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)$$
est convergente.
2. On suppose maintenant que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n.
   (a) Montrer que la suite (X_n) converge vers 0 en probabilité si et seulement si $p_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
   (b) Montrer que la suite (X_n) converge vers 0 dans $\mathscr{L}^p$ si et seulement si $p_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
   (c) On suppose que les X_n sont indépendantes. Montrer que la suite (X_n) converge vers 0 presque sûrement si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ converge.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $X_n \sim \mathcal{E}(n)$. Montrer que la suite (X_n) converge vers 0 presque sûrement. Y a-t-il convergence dans $\mathscr{L}^p$?

Solution.

1. Montrons que
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$$
   ▷ Sens direct :
   On rappelle que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$ si et seulement si
$$\mathbb{P}\left(\forall \varepsilon > 0, \exists k \geq 1, \forall n \geq k, |X_n| < \varepsilon\right) = 1.$$
   On pose
$$B_\varepsilon = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} \{|X_n| < \varepsilon\}$$
   où
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon>0} B_\varepsilon\right) = 1.$$
   Soit $\varepsilon > 0$. Alors
$$\bigcap_{\alpha>0} B_\alpha \subset B_\varepsilon$$
   donc
$$\mathbb{P}(B_\varepsilon) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{\alpha>0} B_\alpha\right) = 1$$
   Ainsi,
$$\mathbb{P}(B_\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \{|X_n| < \varepsilon\}\right) = 1$$
   d'où
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$
   Par Borel-Cantelli, on a donc
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty$$

▷ Sens réciproque :
Par Borel-Cantelli, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$
$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\{|X_n| < \varepsilon\}\right) = 1$$

Remarque. Si $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

De même, si $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 1$$

Ainsi, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}}\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k}\{|X_n| < \varepsilon\}\right) = 1$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists k \geq 1, \forall n \geq k, |X_n| < \varepsilon) = 1$$

et alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1$$

donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.

2. On a $X_n \sim \mathscr{B}(p_n)$.
   (a) On montre dans les deux sens
      ▷ Soit $\varepsilon > 0$, alors

      $$\mathbb{P}\left(|X| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$$

      dinc si $p_n \to 0$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

      ▷ Réciproquement, si $X \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, alors

      $$\mathbb{P}\left(|X_n| \geq 1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\varepsilon = 1)$$

      et donc $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) On a

   $$\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] = 0^p \times (1 - p_n) + 1^p \times p_n$$
   $$= p_n$$

   Donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} 0$ si et seulement si $p_n \longrightarrow 0$
   (c) On a

   $$\mathbb{P}\left(|X_n| \geq \varepsilon\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Donc d'après la question 2, on a $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$

3. On rappelle que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ par le cours.
   Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|X_n| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(X_n \geq \varepsilon\right) \\
&= \int_\varepsilon^\infty ne^{-nt}\,dt \\
&= \left[-e^{-nt}\right]_\varepsilon^\infty \\
&= e^{-\varepsilon}
\end{aligned}$$

   Comme $\sum_{n=1}^\infty e^{-n\varepsilon} < \infty$, on en déduit que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$.

TD9 — Loi des grands nombres

Exercice 9.1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la suite de terme général

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k e^{X_k}$$

converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.

Solution. Les variables aléatoires $Z_k = X_k e^{X_k}$ sont i.i.d. car les X_k le sont.
Par ailleurs, les Z_k sont intégrables car

$$x \mapsto |x|e^{|x|}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

est intégrable en $\pm\infty$. D'après la loi des grands nombres, on a

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[Z_1]$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_1] &= \mathbb{E}[X_1 e^{X_1}] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\
\overset{t=x-1}{} &= \sqrt{e}\int_{-\infty}^{+\infty} (t+1)\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt \\
&= \sqrt{e}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt}_{\mathbb{E}[X_1]=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt}_{1}\right) \\
&= \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

Exercice 9.2. On considère une suite de lancers d'un dé équilibré et on désigne par X_k le résultat du k-ième lancer.

1. On note Y_n la variable aléatoire donnant le plus grand résultat observé au cours des n premiers lancers. Etudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.
2. On note N_n la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors des n premiers lancers. Etudier la convergence de la suite $(N_n/n)_{n\geq 1}$.

Solution.

1. On a Y_n une suite croissante majorée par 6. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \neq 6) &= \mathbb{P}(\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \neq 6) \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^n
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 6) &= \mathbb{P}(\exists n_0 \in \mathbb{N}, Y_{n_0} = 6)\\ &= 1 - \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \neq 6)\\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \neq 6)\\ &= 1.\end{aligned}$$

car (Y_n) est a valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6\}$ et croissante.

2. On a

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k=6} \sim \mathcal{B}(n, 1/6)$$

Les variables aléatoires $\mathbb{1}_{X_k=6}$ sont i.i.d. et intégrables (car bornées) donc la loi forte des grands nombres assure que

$$\frac{N_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k=6} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_1=6}] = \frac{1}{6}.$$

Exercice 9.3. On suppose que le sexe d'un nouveau-né est équiréparti entre fille et garçon. Un pays propose la politique de natalité suivante : tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir une fille.

1. Soit X le nombre d'enfants d'un couple pris au hasard dans la population. Donner la loi de la variable aléatoire X et son espérance.
2. On considère une génération en âge de procréer constituée de n couples. On note $X_1, \dots, X_n$ le nombre d'enfants respectifs de chaque couple. On désigne par P_n la variable aléatoire donnant la proportion de filles issues de cette génération. Exprimer P_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$, puis déterminer la limite de P_n quand n tend vers l'infini. La politique de natalité du pays a-t-elle un effet ?

Solution.

1. On répète une expérience de Bernoulli de paramètre $1/2$ de manière indépendante jusqu'à obtenir un succès. Le nombre d'enfants X suit alors une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
   - ▷ X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$,
   - ▷ $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$,
   - ▷ $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^k} = 2$.
2. On a

$$\begin{aligned}P_n &= \frac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre total d'enfants}}\\ &= \frac{n}{X_1 + \cdots + X_n}\end{aligned}$$

Les X_k sont i.i.d. et intégrables donc la loi forte des grands nombres assure que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1] = 2$$

et donc

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{2}.$$

Exercice 9.4 Pour aller plus loin.
On considère une suite i.i.d. $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour toute variable aléatoire positive Y,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq t)\, dt.$$

puis en déduire que

$$\mathbb{E}[|X_1|] \le 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \ge n).$$

2. En déduire que si X_1 n'est pas intégrable, alors la suite $(S_n/n)_{n\ge1}$ diverge presque sûrement.

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y \ge t)\, dt &= \int_0^{+\infty} \left(\int_\Omega \mathbb{1}_{Y(\omega)\ge t} \mathbb{P}(d\omega) \right) dt \\
\text{Fubini} &= \int_\Omega \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{Y(\omega)\ge t}\, dt \right) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^{Y(\omega)} 1\, dt \right) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_1|] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| \ge t)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| \ge t) \mathbb{1}_{n\le t<n+1}\, dt \\
&\le \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| \ge n) \mathbb{1}_{n\le t<n+1}\, dt \\
\text{TCM/Fubini} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| \ge n) \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{n\le t<n+1}\, dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_1| \ge n) \\
&\le 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \ge n).
\end{aligned}$$

en résumé, on a montré que

$$\mathbb{E}[|X_1|] \le 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \ge n).$$