Calcul différentiel — TDs

Ivan Lejeune

14 octobre 2024

Table des matières

TD1

Equations différentielles et Cauchy-Lipschitz

> **Exercice 1.1.** La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie l'équation différentielle
>
> $$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$
>
> où m, F, R sont des constantes. Calculer v.

[] On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

avec

$$y(x) = v(t), \quad a(x) = \frac{R}{m}, \quad b(x) = \frac{F}{m}, \quad x = t$$

Pour résoudre une équation de cette forme, on résout l'équation homogène puis on cherche une solution particulière.
▷ Résolvons l'équation homogène

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = 0$$

- Une primitive de la fonction $\frac{R}{m}$ est

  $$\frac{R}{m}t$$

- Les solutions de l'équation homogène sont donc

  $$v_h = \lambda e^{-\frac{R}{m}t}$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

▷ Trouvons une solution particulière à l'équation

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$

- Ici le second membre est une constante donc on cherche une solution évidente sous forme de constante.
  On voit que $v_p = \frac{F}{R}$ convient :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v &= \frac{F}{m} \\ 0 + \frac{R}{m} \times \frac{F}{R} &= \frac{F}{m} \\ \frac{F}{m} &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

▷ Les solutions de l'équation s'écrivent comme somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène, soit ici :

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = \lambda e^{-\frac{R}{m}t} + \frac{F}{R}$$

Exercice 1.2. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $x' - 2x = e^{2t}t^2$ avec $x(0) = 0$,
2. $x' - \frac{1}{1+t}x = 2t^2$ avec $x(0) = -3$,
3. $x' - (1+t)x = -2t - t^2$ avec $x(0) = 2$.

[]

1. ▷ Résolvons l'équation homogène

$$x' - 2x = e^{2t}t^2$$

- Une primitive de la fonction -2 est

$$-2t$$

- Les solutions de l'équation homogène sont donc

$$x_h = \lambda e^{2t}$$

  avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

▷ Trouvons une solution particulière à l'équation

$$x' - 2x = e^{2t}t^2$$

- Ici le second membre est de la forme polynome fois exponentielle donc on cherche une solution sous la forme

$$x_p = t\left(at^2 + bt + c\right)e^{2t}$$

  Ce facteur t est nécessaire car on a déjà une solution homogène de la forme e^{2t} et on ne veut pas de redondance. On intègre dans l'équation pour avoir

$$\begin{aligned} & x' - 2x = e^{2t}t^2 \\ \Longrightarrow\ & \left(3at^2 + 2bt + c\right)e^{2t} + 2\left(at^3 + bt^2 + ct\right)e^{2t} - 2\left(at^3 + bt^2 + ct\right)e^{2t} = e^{2t}t^2 \\ \Longrightarrow\ & \left(2at^3 + (3a + 2b)t^2 + (2b + c)t + 2c\right)e^{2t} = e^{2t}t^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$a = 0$$
$$b = \frac{1}{2}$$
$$c = 0$$

Donc la solution particulière est

$$x_p = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

▷ Les solutions de l'équation s'écrivent comme somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène, soit ici :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \lambda e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

2. 2e partie

Exercice 1.3. Résoudre les équations différentielles suivantes en en donnant toutes les solutions maximales :

1. $x' + x = \sin t$,
2. $x' = 3t^2 - \frac{x}{t}$.

Exercice 1.4. On considère le système linéaire d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' &= -5x + 8y - 4 \\ y' &= -4x + 7y + 3 \end{cases} \quad \text{avec les conditions initiales} \quad \begin{cases} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \tag{1}$$

1. Trouver les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice suivante :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Expliquer pourquoi résoudre (**??**) revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a' &= 3a + 10 \\ b' &= -b - 7 \end{cases} \quad \text{avec les conditions initiales} \quad \begin{cases} a(0) &= 2 \\ b(0) &= -1 \end{cases} \tag{2}$$

[] Il est possible d'arriver à un système différent, ce qui n'est pas grave du moment que les calculs sont corrects et que le résultat est un système découplé.

3. Trouver la solution du (**??**) puis du (**??**).

[]

1. ▷ Les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ sont les solutions de l'équation

caractéristique

$$\mathsf{det}(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 0$$
$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 8 \\ -4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -1$.

▷ Les vecteurs propres sont les solutions du système

$$\begin{cases} (-5-3)x + 8y & = 0 \\ -4x + (7-3)y & = 0 \end{cases}$$

On trouve alors les vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on peut écrire la matrice $\mathcal{A}$ sous forme diagonale

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{D}\mathcal{P}^-$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. ▷ On peut réécrire le système (**??**) sous la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On peut alors poser

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y \end{pmatrix}$$

On a alors

$$a' = x' + 2y'$$
$$b' = x' + y'$$

On a donc

$$a' = -5a + 8b - 4$$
$$b' = -4a + 7b + 3$$

qui est le système (**??**).

Comme

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P^{-1} X$$

on a

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc on a bien $a(0) = 2$ et $b(0) = -1$.

3. ▷ Résolvons le système (**??**)
   - Pour a, on a
   $$a(t) = ce^{3t} - \frac{10}{3}$$
   et avec la condition initiale $a(0) = 2$, on trouve $c = \frac{16}{3}$.
   - Pour b, on a
   $$b(t) = de^{-t} + 7$$
   et avec la condition initiale $b(0) = -1$, on trouve $d = 6$.
   - Les solutions du système (**??**) sont donc
   $$a(t) = \frac{16}{3}e^{3t} - \frac{10}{3}$$
   $$b(t) = 6e^{-t} + 7$$
   Ce qui, traduit pour x et y donne :
   $$x(t) = \frac{16}{3}e^{3t} - \frac{10}{3} + 12e^{-t} - 14 = \frac{16}{3}e^{3t} + 12e^{-t} - \frac{52}{3}$$
   $$y(t) = \frac{16}{3}e^{3t} - \frac{10}{3} + 6e^{-t} - 7 = \frac{16}{3}e^{3t} + 6e^{-t} - \frac{31}{3}$$

Exercice 1.5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose
$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\, dt$$

1. Montrer que φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
3. En intégrant par parties l'expression de $\varphi'(x)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par φ.
4. Calculer $\varphi(x)$.

Exercice 1.6. Calculer la solution maximale du problème de Cauchy suivant :
$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.7. Résoudre sur un intervalle à préciser le problème suivant :
$$\begin{cases} xx' = \frac{1}{2} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 1.8. On considère le **modèle de Gompertz**, utilisé en dynamique des populations, dans lequel l'évolution de la population $N(t)$ considérée est décrite par l'équation suivante :
$$N'(t) = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)$$

où r et $K > 0$ sont des constantes données. Donner une expression de la population en fonction de la population initiale $N(0) = N_0 > 0$. Que se passe-t-il quand $t \to \infty$?

[]

- Utilisons Cauchy-Lipschitz pour résoudre l'équation différentielle.
  ▷ On cherche $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

  Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$u : x \mapsto f(t,x) = rx\ln\left(\frac{K}{x}\right)$$

  Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe x_3 tel que

$$u'(x_3) = \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1}$$

  par le théorème des accroissements finis.
  Alors,

$$|u(x_2) - u(x_1)| = |u'(x_3)||x_2 - x_1|$$

  On prend u' continue sur $ffx_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon$. Soit

$$M = \sup_{x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} |u'(x)|$$

  Si $x_1, x_2 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, on a

$$\begin{aligned} |u(x_2) - u(x_1)| &= |u'(x_3)||x_2 - x_1| \\ &\leq M|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

  Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon = \frac{x_0}{2} > 0$ et $\lambda = \sup\limits_{[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} |u'|$.
  Soient t, x_1, x_2 tels que

$$\sup\{|t - t_0|, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|\} < \varepsilon$$

  On a $x_1, x_2 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ donc, par le T.A.F.

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |u(x_1) - u(x_2)| \leq \lambda|x_1 - x_2|$$

  f est continue et localement Lipschitzienne en espace donc il existe une unique solution maximale

Exercice 1.9.