Théorie des probabilités — Cours

Ivan Lejeune

28 novembre 2024

Table des matières

Chapitre 1 — Bases de la théorie des probabilités

1 Espaces probabilisés

1.1 Probabilité

Définition 1.2. Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Une **mesure** sur $(\Omega, \mathscr{F})$ est une application

$$\begin{aligned} \mu \colon \mathscr{F} &\to [0, +\infty] \\ A &\mapsto \mu(A) \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. μ est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$, on a
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un **espace mesuré**.
Si de plus $\mu(\Omega) = 1$, on dit que $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un **espace probabilisé** et μ est une **probabilité**.
On notera alors $\mu = \mathbb{P}$.

Remarque. Comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, une mesure de probabilité est une mesure dans $[0, 1]$. Un événement A est dit **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exemples 1.3.

1. Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace mesurable et ω un élément fixé dans Ω. La mesure (ou masse) de Dirac en ω est la mesure définie pour tout $A \in \mathscr{F}$ par
$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_A(\omega)$$
On vérifie facilement que c'est bien une probabilité.
2. Sur le segment $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne, la mesure de Lebesgue est une probabilité.
3. Si $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un espace mesuré avec $0 < \mu(\Omega) < +\infty$, alors on obtient une probabilité en considérant la mesure
$$\mathbb{P} = \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\Omega)}$$

Interprétation. Un espace probabilisé est donc un cas particulier d'espace mesuré pour lequel la masse totale de la mesure est égale à 1. En fait, le point de vue diffère de la théorie de l'intégration : dans le cadre de la théorie des probabilités, on cherche à fournir un modèle mathématique pour une "expérience aléatoire".

- L'ensemble Ω est appelé **univers** : il représente l'ensemble de toutes les éventualiés possibles, toutes les déterminations du hasard dans l'expérience considérée. Les éléments ω de Ω, parfois appelés **événements élémentaires**, correspondent donc aux issues possibles de l'expérience aléatoire.
- La tribu $\mathscr{F}$ correspond à l'ensemble des **événements** : ce sont les parties de Ω dont on peut évaluer la probabilité. Il faut voir un événement A de $\mathscr{F}$ comme un sous-ensemble de Ω contenant toutes les éventualités ω pour lesquelles une certaine propriété est vérifiée.
- On associe à chaque événement $A \in \mathscr{F}$ un réel $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ qui donne la plausibilité que le résultat de l'expérience soit dans A.

1.4 Exemples d'espaces probabilisés

Suivent quelques exemples classiques d'espaces probabilisés.

Exemples 1.5. cours a completer

2 Variables aléatoires

2.1 Loi d'une variable aléatoire

Définition 2.2. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Une **variable aléatoire** est une application

$$X : \Omega \to E$$

mesurable. C'est-à-dire

$$\forall A \in \mathscr{E}, X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathscr{F}$$

Si $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on parle de **variable aléatoire réelle**.
Si $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathscr{E} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on parle de **variable aléatoire vectorielle**.

Exemples 2.3.
▷ Lancer de deux dés.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés équilibrés. Alors

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2, \quad \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega).$$

On s'intéresse à la somme des résultats obtenus et on définit

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \{2, \dots, 12\} \\ (i, j) &\mapsto i + j \end{aligned}$$

On munit l'ensemble d'arrivée de la tribu pleine.
X est une variable aléatoire car l'espace de départ est muni de la tribu pleine.
▷ Infinité de lancers d'un dé.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré une infinité de fois. Alors

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}^*} = \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \omega_n \in \{1, \dots, 6\}\}$$

On considère la tribu $\mathscr{F}$ la plus petite tribu contenant les $A_{x_1, \dots, x_k}$. On s'intéresse au nombre de lancers jusqu'à l'apparition du premier 6. On définit

$$\begin{aligned} Y : \Omega &\to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega_n = 6\} \end{aligned}$$

avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$. On munit l'ensemble d'arrivée de la tribu pleine.
Pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{k\}) &= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \omega_1 \neq 6, \dots, \omega_{k-1} \neq 6, \omega_k = 6\} \\ &= \bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_{k-1}, 6} \in \mathscr{F} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{+\infty\}) &= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \omega_n \neq 6\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_k} \in \mathscr{F} \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est dénombrable, on en déduit que Y est une variable aléatoire.

▷ Bouteille à la mer.
On considère l'expérience aléatoire qui consiste à observer la position d'une bouteille à la mer. Alors
$$\Omega = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}^2)$$
On considère la tribu $\mathscr{F}$ la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées
$$\begin{aligned} f_t : \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto \omega(t) \end{aligned}$$
On s'intéresse à la position de la bouteille au temps $t = 1$. On définit
$$\begin{aligned} Z : \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto \omega(1) \end{aligned}$$
Alors, par construction de la tribu $\mathscr{F}$, on a que Z est une variable aléatoire.

Définition 2.4. Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dans $(E, \mathscr{E})$. La **loi** de X est la mesure image de X par $\mathbb{P}$, définie par
$$\forall A \in \mathscr{E}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$$

Exemples 2.5.
▷ Infinité de lancers d'un dé.
On considère
$$\begin{aligned} Y : \Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}^*} &\to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega_n = 6\} \end{aligned}$$
La loi $\mathbb{P}_Y$ de Y est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y(\{k\}) &= \mathbb{P}(Y^{-1}(\{k\})) \\ &= \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_{k-1}, 6} \right) \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_{k-1}} \underbrace{\mathbb{P}(A_{x_1, \dots, x_{k-1}, 6})}_{= \frac{1}{6^k}} \\ &= \frac{5^{k-1}}{6^k} \qquad = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \end{aligned}$$
Par ailleurs, on a vu à la fin de la section précédente que la probabilité de ne jamais obtenir de 6 est nulle :
$$\mathbb{P}_Y(\{+\infty\}) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\{+\infty\})) = \mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$$
On en déduit que la loi de Y est
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \delta_k$$
Cette loi est appelée **loi géométrique** de paramètre $\frac{5}{6}$.

Définition 2.6 Variable aléatoire discrète. Une variable aléatoire X est dite **discrète** si X est à valeurs dans un ensemble E au plus dénombrable. On prend alors $\mathscr{E} = \mathscr{P}(E)$ et si $A \in \mathscr{E}$, on a
$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in \cup_{x \in A} \{x\}) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

La loi $\mathbb{P}_X$ de X est alors entièrement déterminée par les quantités $p_x = \mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E$:

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$$

Définition 2.7 Variable aléatoire à densité. Une variable aléatoire X à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ est dite **à densité** par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d si il existe une fonction mesurable

$$f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$$

telle que $\mathbb{P}_X = f\lambda_d$:

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x)\, d\lambda_d(x)$$

Il faut que f vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\lambda_d(x) = 1$$

Par exemple, si $d = 1$, on a

$$\mathbb{P}_X([a, b]) = \int_a^b f(x)\, d\lambda_1(x)$$

On notera souvent $f_X = f$ et on appelle cette fonction la **densité** de X.

2.8 Lois usuelles

▷ Lois discrètes :
Loi uniforme sur un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$.
Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini.
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur E, notée $X \sim \mathcal{U}(E)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{n}$$

▷ Loi de Bernoulli.
Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $X \sim \mathcal{B}(p)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1 - p)\delta_0$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

▷ Loi binomiale.
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, notée $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \delta_k$$

cela correspond au nombre de succès dans n répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre p (de manière indépendante).
▷ Loi géométrique.
Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$, notée $X \sim \mathcal{G}(p)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - p)^{k-1} \delta_k$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

cela correspond au nombre de répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre p avant le premier succès.
▷ Loi de Poisson.
Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$, notée $X \sim \mathcal{P}(\theta)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \delta_k$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

cela correspond au nombre d'événements rares dans un intervalle de temps donné.
▷ Lois à densité sur $\mathbb{R}^d$:
Loi uniforme sur un ensemble A de $\mathbb{R}^d$.
Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, telle que $0 < \lambda_d(A) < +\infty$. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur A, notée $X \sim \mathcal{U}(A)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}_X$ admet la densité constante $\frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A$. Autrement dit, si $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B \frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A(x)\, d\lambda_d(x) = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(A)}$$

dans le cas $d = 1$ et $A = [a, b]$, la densité est $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}$.
▷ Loi exponentielle.
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, notée $X \sim \mathcal{E}(\theta)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \theta e^{-\theta x} \lambda_1 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}_X$ admet la densité $f_X(x)\theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1. Autrement dit, si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, d\lambda_1(x)$$

dans le cas $d = 1$. Cette loi vérifie la propriété de l'absence de mémoire, c'est-à-dire

$$\forall s, t \geq 0, \mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

▷ Loi normale ou gaussienne.
Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, notée $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = f_X \lambda_1$$

où f_X est la densité de la loi normale, donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Autrement dit, si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, d\lambda_1(x)$$

remarque, la loi $\mathcal{N}(,)$, c'est-à-dire avec la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

est appelée loi normale standard.

3 Moments d'une variable aléatoire

On considère dans la suite $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

3.1 Espérance

Définition 3.2. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On appelle **espérance** de X la quantité

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

qui est bien définie si X est positive ou si $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.
On définit de même l'espérance d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{C}$. Sk $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur aléatoire, alors on pose

$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$$

si $\mathbb{E}[X_i]$ existe pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Remarque.

1. On interprète $\mathbb{E}[X]$ comme la valeur moyenne de X.
2. Si $\mathbb{E}[X] = 0$, on dit que X est **centrée**.
3. Si $X = \mathbb{1}_A$, alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(A)$.
4. On omettra le cas où X est positive et $\mathbb{E}[X] = +\infty$.

Proposition. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

De plus, si $X > 0$, alors $\mathbb{E}[X] \geq 0$ avec $\mathbb{E}[X] = 0$ si et seulement si $X = 0$-$\mathbb{P}$-p.p.

Proposition. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable$(E, \mathscr{E})$.
Soit $h : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive.
Alors, $h \circ X$ est une variable aléatoire et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X)] &= \int_\Omega h(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_E h(x)\, d\mathbb{P}_X(x)\end{aligned}$$

Si $h : E \to \mathbb{R}$ et mesurable (pas forcément positive), alors $h \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mathbb{P}_X)$ si et seulement si $h \circ X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et l'égalité précédente reste vraie.

Démonstration. Vue en théorie de la mesure.
On vérifie l'égalité :

- pour les fonctions indicatrices,
- pour les fonctions étagées,
- pour les fonctions positives,
- pour les fonctions intégrables

□

Remarque. En particulier, si $E = \mathbb{R}$ et $h = \mathsf{Id}_\mathbb{R}$, on obtient

$$\mathbb{E}[X] = \int_\mathbb{R} x\, d\mathbb{P}_X(x)$$

à condition que cette quantité existe.

Exemples 3.3. Loi de Bernoulli

$$\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} x\, d\left((1-p)\delta_0 + p\delta_1\right)(x) \\
&= (1-p)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_0(x)}_{=0} + p\underbrace{\int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_1(x)}_{=1} \\
&= p
\end{aligned}$$

Si X suit une loi discrète

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{i_k}$$

alors son espérance vaut

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}_X \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_{x_k}}_{=x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k
\end{aligned}$$

Proposition. Soit $X\colon \Omega \to E$ une variable aléatoire. La loi de X est caractérisée par les quantités $\mathbb{E}[h(X)]$ où $h\colon E \to \mathbb{R}$ décrit l'ensemble des fonctions mesurables bornées.
C'est-à-dire, si X et X' sont deux variables aléatoires vérifiant

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(X')]$$

pour toute fonction h mesurable bornée, alors X et X' ont la même loi.

Démonstration. Soient X et X' telles que $\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(X')]$ pour toute fonction h mesurable bornée.
Soit $A \in \mathscr{E}$. On pose $h = \mathbb{1}_A$ et alors

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(X')] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X')] = \mathbb{P}(X' \in A)$$

Donc X et X' ont la même loi. □

Exemples 3.4. On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $]0,1[$ et on pose $Y = -\ln(X)$. Déterminons la loi de Y.
Soit h une fonction mesurable bornée. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(Y)] &= \mathbb{E}[h(-\ln(X))] \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(-\ln(x))\, d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(-\ln(x))\, \underbrace{\mathbb{1}_{]0,1[}(x)\, d\lambda_1(x)}_{=\mathbb{P}_X} \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(y)\, \underbrace{\mathbb{1}_{]0,\infty[}(y) e^{-y}\, d\lambda_1(y)}_{=\mathbb{P}_X} \qquad \text{avec } y = -\ln(x)
\end{aligned}$$

D'après la proposition précédente, la loi de Y est

$$\mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)e^{-y}\lambda_1(y)$$

c'est-à-dire que Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.

3.5 Moments d'ordre p

Pour $p \in [1, \infty[$, on définit l'espace $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ comment l'ensemble des variables aléatoires vérifiant

$$\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, d\mathbb{P}(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

On a bien que $\|\cdot\|_p$ est une norme qui rend $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ complet (toute suite de Cauchy converge). Dans le cas $p = \infty$, on pose

$$\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| = \lim_{p \to \infty} \|X\|_p$$

Donc $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est l'ensemble des variables aléatoires bornées.

Définition 3.6. Soit $p \in [1, \infty[$ et X une variable aléatoire dans $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Le **moment d'ordre p** de X est

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_\Omega X(\omega)^p \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} x^p \, d\mathbb{P}_X(x)$$

Remarque.

1. Le moment d'ordre 1 correspond à l'espérance.
2. Si $p \leq q$ alors $\mathscr{L}^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$
   En particulier, si X admet un moment d'ordre q alors X admet un moment d'ordre p pour tout $p \leq q$

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle positive et $p \in [1, \infty[$. Alors, pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X^p]}{t^p}$$

Cette inégalité permet de contrôler le comportement à l'infini de X.

Démonstration. On part de l'inégalité

$$t^p \mathbb{1}_{\{X \geq t\}} \leq X^p$$

On applique l'espérance

$$t^p \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}\right] \leq \mathbb{E}[X^p]$$
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X^p]}{t^p}$$

□

Le cas $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$:
On rappelle que $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est muni d'un produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY] = \int_\Omega X(\omega) Y(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$$

La norme associée est

$$\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\int_\Omega X(\omega)^2 \, d\mathbb{P}(\omega)}$$

Définition 3.7. La **variance** d'une variable aléatoire réelle X est le moment d'ordre 2 de $X - \mathbb{E}[X]$, soit

$$\mathsf{Var}(X) = \|X - \mathbb{E}[X]\|_2^2 = \int_\Omega (X(\omega) - \mathbb{E}[X])^2 \, d\mathbb{P}(\omega),$$

qui est bien définie si $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.
On définit **l'écart-type** par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathsf{Var}(X)} = \|X - \mathbb{E}[X]\|_2$$

Remarque.

1. En développant le carré dans la définition de la variance, on obtient
$$\mathsf{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$
2. On a $\mathsf{Var}(X) = 0$ si et seulement si X est constante.

Proposition. Soit X une variable aléatoire dans $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Alors, pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]|_2 \geq t\right) \leq \frac{\mathsf{Var}(X)}{t^2}$$

Définition 3.8. Soient X et Y deux variables aléatoires dans $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On définit la **covariance** de X et Y par

$$\mathrm{COV}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \langle X - \mathbb{E}[X], Y - \mathbb{E}[Y]\rangle$$

où on rappelle que

$$\langle U, V\rangle = \mathbb{E}[UV] = \int_\Omega U(\omega)V(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

Par les propriétés du produit scalaire dans $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on en déduit que la covariance est symétrique, bilinéaire et positive :

$$\mathrm{COV}(X, X) = \mathsf{Var}(X) \geq 0$$

Par ailleurs, on a aussi la relation de Pythagore :

$$\mathsf{Var}(X + Y) = \mathsf{Var}(X) + \mathsf{Var}(Y) + 2\mathrm{COV}(X, Y)$$

3.9 Moments de lois usuelles

Sous forme de tableau :

Loi	Espérance	Variance
$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\theta)$	θ	θ
$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\theta)$	$\frac{1}{\theta}$	$\frac{1}{\theta^2}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2

4 Fonctions associées à une variable aléatoire

4.1 Fonction de répartition

Définition 4.2. Soit X une variable aléatoire réelle. La **fonction de répartition** de X est la fonction

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$$

Exemple. Si X est une variable réelle de densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue ($\mathbb{P}_X = f_X\lambda_1$), alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(t)\,d\lambda_1(t)$$

Donc, la fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(t) = \mathbb{P}_X([-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,d\lambda_1(u)$$

Par exemple, si $X \sim \mathcal{E}(\theta)$, c'est-à-dire

$$f_X(t) = \theta e^{-\theta t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

alors

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} \theta e^{-\theta u}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\,d\lambda_1(u) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left[-e^{-\theta u}\right]_0^t & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\ &= \left(1 - e^{-\theta t}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \end{aligned}$$

De manière générale, l'égalité $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,d\lambda_1(u)$ assure que F_X est dérivable λ_1-p.p, avec $F_X'(t) = f_X(t)$ pour λ_1-presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Exemple. On considère $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$. Alors, la fonction de répartition de X est donnée par

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}_X([-\infty, t]) \\ &= (1-p)\delta_0([-\infty, t]) + p\delta_1([-\infty, t]) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Plus généralement, si X est une variable aléatoire discrète de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{k\in E} p_k\delta_{x_k}$, avec les x_k ordonnés, alors

$$F_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\delta_{x_k}([-\infty, t]) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\mathbb{1}_{[x_k, +\infty[}(t)$$

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X. Alors

1. F_X est croissante, continue à droite et admet des limites à gauche (càdlàg)
2. Les limites de F_X en $-\infty$ et $+\infty$ sont

$$\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$$

3. En posant

$$F_X(t-) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F_X(t-\varepsilon)$$

   On a

$$F_X(t-) = \mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

   et donc

$$\mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - F_X(t-)$$

Démonstration. Admise (ou a faire en exercice) □

Proposition. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X caractérise sa loi. C'est à dire que deux variables aléatoires ayant la même fonction de répartition ont la même loi.

Démonstration. Si $F_X = F_Y$ alors les mesures de probabilités $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ associées à X et Y coïncident sur les ensembles de la forme $[-\infty, t]$. Ces ensembles engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et sont stables par intersection finie, donc le lemme de classes monotones assure que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. ☐

4.3 Fonction caractéristique

Définition 4.4. Soit X une variable aléatoire réelle. La **fonction caractéristique** de X est la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_\Omega e^{itX(\omega)}\, d\mathbb{P}(\omega) \end{aligned}$$

Remarque.

1. La fonction caractéristique est bien définie car

$$\int_\Omega \left|e^{itX(\omega)}\right| d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega d\mathbb{P}(\omega) = 1$$

2. La fonction caractéristique correspond à un signe près à la transformée de Fourier de la variable aléatoire X.

Exemple.

- Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = (1-p)e^{it0} + pe^{it1} = 1 - p + pe^{it}$$

- Soit X une variable aléatoire discrète de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{k\in E} p_k \delta_{x_k}$. Alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \sum_{k\in E} p_k e^{itx_k}$$

- Soit $X \sim \mathcal{U}([a,b])$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\ &= \int_\mathbb{R} e^{itx} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\, d\lambda_1(x) \\ &= \left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_a^b \\ &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \quad \text{si } t \neq 0 \end{aligned}$$

et pour $t = 0$, on a

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}\left[e^{i0X}\right] = \mathbb{E}[1] = 1$$

- Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_\mathbb{R} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, d\lambda_1(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

cf. TD4 pour le calcul de l'intégrale.

Proposition. Soit X une variable aléatoire réelle. Si X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$, alors la fonction caractéristique φ_X est de classe $\mathscr{C}^p$ et

$$\mathbb{E}[X^p] = (-i)^p \varphi_X^{(p)}(0)$$

Démonstration. La fonction $g : (t, \omega) \mapsto e^{itX(\omega)}$ est intégrable par rapport à ω, dérivable par rapport à t et vérifie

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t, \omega)\right| = \left|iX(\omega)e^{itX(\omega)}\right| = |X(\omega)|$$

Donc si X admet un moment d'ordre 1, alors

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t, \omega)\right| = |X(\omega)|$$

qji est intégrable, donc le théorème de dérivation sous le signe intégral assure que

$$\varphi_X'(t) = \int_\Omega iX(\omega)e^{itX(\omega)}\, d\mathbb{P}(\omega)$$

en particulier, en $t = 0$, on a

$$\varphi_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$$

On raisonne ensuite par récurrence sur p pour les autres moments. □

Théorème. La fonction caractéristique φ_X caractérise la loi de X. C'est-à-dire que si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors X et Y ont la même loi.

Démonstration. Admise, elle est basée sur l'injectivié de la transformée de Fourier de mesures. □

4.5 Fonction génératrice

On considère ici des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 4.6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La **fonction génératrice** de X est la série entière

$$G_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) z^n$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, on en déduit que le rayon de convergence de cette série entière est au moins 1, donc G_X est définie sur $[-1, 1]$ et continue sur $[-1, 1]$. Par ailleurs, G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ avec

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Donc G_X caractérise la loi de X.
En dérivant G_X terme à terme, on obtient

$$G_X'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) z^{n-1} = \mathbb{E}\left[X z^{X-1}\right]$$

On prend une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui croit vers 1. Alors, la suite des fonctions $\left(X {z_k}^{X-1}\right)_k$ est croissante, positive et donc par le théorème de convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}\left[\lim_{k\to\infty} X {z_k}^{X-1}\right] = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[X {z_k}^{X-1}\right]}_{G_X'(z_k)}$$

d'où

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{\substack{z\to 1 \\ z<1}} G_X'(z)$$

On peut noter $G_X'(1-) = \lim_{\substack{z\to 1 \\ z<1}} G_X'(z)$.
Bref, si X admet un moment d'ordre 1, alors $G_X'(1-) = \mathbb{E}[X]$.

Plus généralement, on peut montrer que

$$G_X^{(k)}(1-) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)]$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela permet de déterminer les moments de X.

Exemple. ▷ Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors

$$G_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right] = (1-p)z^0 + pz^1 = 1 - p + pz$$

et donc

$$G_X'(z) = p$$

donc

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = p$$

▷ Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors

$$\begin{aligned} G_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right] &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k \\ &= (pz + 1 - p)^n \end{aligned}$$

donc

$$G_X'(z) = np(pz + 1 - p)^{n-1}$$

et donc

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = np$$

▷ Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Alors

$$\begin{aligned} G_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} z^k \\ &= zp \sum_{k=1}^{\infty} (1-p) z^{k-1} \\ &= \frac{zp}{1-(1-p)z} \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) \to \text{exercice}$$

▷ Soit $X \sim \mathcal{P}(\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} G_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} z^k \\ &= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta z)^k}{k!} \\ &= e^{-\theta} e^{\theta z} \\ &= e^{\theta(z-1)} \end{aligned}$$

donc

$$G_X'(z) = \theta e^{\theta(z-1)}$$

et donc

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \theta$$

Chapitre 2 — Indépendance

On considère ici $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1 Indépendances d'événements

1.1 Conditionnement

Si $A \in \mathscr{F}$ est un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, alors la **probabilité conditionnelle de $B \in \mathscr{F}$ sachant A** est définie par

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

alors, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A : \mathscr{F} &\to [0,1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Intuitivement, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_A)$ correspond à une expérience aléatoire où l'on sait a priori que l'événement A est vérifié.
Si A et B sont deux événements de probabilité strictement positive, alors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \qquad \text{formule de Bayes.}$$

1.2 Quelques formules

Une partition $(A_i)_{i \in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ formée d'événements A_i est une famille d'événements vérifiant

- $\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Dans ce cas, on a la **formule des probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

pour tout événement $B \in \mathscr{F}$ et $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$.
Cas particulier : avec la partition $(A, \overline{A})$, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B|A^C).$$

où $A^C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ est le complémentaire de A.
On peut alors étendre la formule de Bayes à une partition $(A_i)_{i \in I}$ de Ω :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}.$$

Cas particulier : avec la partition $(A, \overline{A})$, on a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B|A^C)}.$$

> **Exemple.** On se place dans la cas d'une maladie qui touche une personne sur 100. Si une personne est malade (noté M), alors le test est positif dans 99% des cas. Si une personne n'est pas malade (noté M^C), alors le test est positif dans 1% des cas.
> Notons P l'événement "le test est positif ». Alors, si un test est positif, la probabilité que la

personne soit malade est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|P) &= \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|M^C)\mathbb{P}(M^C)} \\ &= \frac{0.99 \times 0.01}{0.99 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Définition 1.3. Deux événements A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Exemple. On lance 2 dés. On a alors

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2, \quad \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P} = \text{probabilité uniforme}.$$

On considère les événements

$$A = \{6\} \times \{1, \dots, 6\}, \quad B = \{1, \dots, 6\} \times \{6\}.$$

Alors,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6},$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6\} \times \{6\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Donc A et B sont indépendants

Définition 1.4. Des événements $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{F}$ sont **indépendants** si

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \varnothing, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Plus généralement, une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est indépendante si toute sous-famille finie est constituée d'événements indépendants.

Exemple. On lance 2 dés. On considère les événements

$$\begin{aligned}A &= \text{le premier dé est pair}, \\ B &= \text{le deuxième dé est pair}, \\ C &= \text{la somme des dés est paire}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{4}, \\
\mathbb{P}(C) &= \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{4}, \\
\mathbb{P}(B \cap C) &= \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

Donc les événements A et B, A et C, B et C sont indépendants respectivement.
Par ailleurs, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

Donc les événements A, B et C ne sont pas indépendants.

Remarque. L'indépendance d'événements $A_1, \dots A_n$ implique l'indépendance de $A_1^c, A_2, \dots, A_n$ (et de même en passant au complémentaire sur d'autres indices). En particulier, si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont indépendants.

2 Indépendance de variables aléatoires

Définition 2.1. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $(E_1, \mathscr{E}_1), \dots, (E_n, \mathscr{E}_n)$. On dit que ces variables aléatoires sont **indépendantes** si pour tout $B_1 \in \mathscr{E}_1, \dots, B_n \in \mathscr{E}_n$, les événements $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ sont indépendants :

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Cetté égalité se réécrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in B_1 \times \cdots \times B_n) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i) \\
\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(B_1 \times \cdots \times B_n) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{X_i}(B_i).
\end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

Plus généralement, une famille de variables aléatoires $(X_i)_{i \in I}$ est indépendante si toute sous-famille finie l'est.

Proposition. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $(E_1, \mathscr{E}_1), \dots, (E_n, \mathscr{E}_n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.
2. Pour toutes fonctions $h_1 : E_1 \to \mathbb{R}, \dots, h_n : E_n \to \mathbb{R}$ positives ou intégrables pour $(\mathscr{L}^1(E_k, \mathscr{E}_k, \mathbb{P}_{X_k}))$, on a

$$\mathbb{E}[h_1(X_1) \cdots h_n(X_n)] = \mathbb{E}[h_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[h_n(X_n)].$$

Démonstration. ▷ On montre que 1. implique 2.

On considère le vecteur aléatoire

$$\begin{aligned} X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega &\to E_1 \times \cdots \times E_n, \\ \omega &\mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[h_1(X_1)\cdots h_n(X_n)\right] &= \int_\Omega h_1(X_1(\omega))\cdots h_n(X_n(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \\ &\overset{\text{formule de transfert}}{=} \int_{E_1\times\cdots\times E_n} h_1(x_1)\cdots h_n(x_n)\, d\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) \\ &= \int_{E_1\times\cdots\times E_n} h_1(x_1)\cdots h_n(x_n)\, d\left(\mathbb{P}_{X_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{P}_{X_n}\right)(x_1,\dots,x_n) \\ &\overset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_{E_n}\int_{E_{n-1}}\cdots\int_{E_1} h_1(x_1)\cdots h_n(x_n)\, d\mathbb{P}_{X_1}(x_1)\cdots d\mathbb{P}_{X_n}(x_n) \\ &= \int_{E_1} h_1(x_1)\, d\mathbb{P}_{X_1}(x_1)\cdots\int_{E_n} h_n(x_n)\, d\mathbb{P}_{X_n}(x_n) \\ &= \mathbb{E}[h_1(X_1)]\cdots\mathbb{E}[h_n(X_n)]. \end{aligned}$$

▷ On montre que 2. implique 1.
Soit $A_1 \in \mathscr{E}_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}_n$. On pose $h_i = \mathbb{1}_{A_i}(x_i)$. Alors

$$\mathbb{E}\left[h_1(X_1)\cdots h_n(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[h_1(X_1)\right]\cdots\mathbb{E}\left[h_n(X_n)\right]$$

se réécrit

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_1}(X_1)\cdots\mathbb{1}_{A_n}(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_1}(X_1)\right]\cdots\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_n}(X_n)\right]$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\cdots\mathbb{P}(X_n \in A_n).$$

□

Exemple. Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires intégrables et indépendantes, alors

$$\mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2].$$

En particulier,

$$\mathsf{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = 0.$$

et donc

$$\mathsf{Var}(X_1 + X_2) = \mathsf{Var}(X_1) + \mathsf{Var}(X_2) + 2\,\mathsf{Cov}(X_1, X_2) = \mathsf{Var}(X_1) + \mathsf{Var}(X_2).$$

Exemple. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes. Avec $h_j(x_j) = e^{itx_j}, j = 1, 2$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[e^{itX_1}e^{itX_2}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX_1}\right]\mathbb{E}\left[e^{itX_2}\right].$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t).$$

2.2 Critères d'indépendance

Cas discrèt

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des espaces discrets E et F. Elles sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

pour tout $x \in E$ et $y \in F$.
En effet, si $A \subset E$ et $B \subset F$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \mathbb{P}(X \in \cup_{x\in A}\{x\}, Y \in \cup_{y\in B}\{y\}) \\ &= \sum_{\substack{x\in A \\ y\in B}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \end{aligned}$$

Avec les fonctions de répartition

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles. Elles sont indépendantes si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

c'est-à-dire

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Avec les fonctions caractéristiques

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires à valeurs réelles. Elles sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{E}\left[e^{it_1X_1}e^{it_2X_2}\right] = \mathbb{E}\left[e^{it_1X_1}\right]\mathbb{E}\left[e^{it_2X_2}\right]$$
$$\mathbb{E}\left[e^{i(t_1X_1+t_2X_2)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{it_1X_1}\right]\mathbb{E}\left[e^{it_2X_2}\right].$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{(X_1+X_2)}(t_1 + t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2).$$

Cas des variables aléatoires à densité

Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X_1,X_2)}$ par rapport à λ_2 (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$). On suppose que

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

avec $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ positive et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\, d\lambda_1(x) = 1.$$

Alors les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes de densité respectives f_1 et f_2.

> **Exemple.** Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de densité
>
> $$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$
>
> Alors,
>
> $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$
>
> donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi normale centrée réduite.

3 Résultats asymptotiques

3.1 Lemme de Borel-Cantelli

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements et $A_n \in \mathscr{F}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors on pose

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_k, \text{pour une infinité de } k\}.$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_k, \text{pour tout } k \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

On remarque que

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c.$$

et

$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c.$$

Proposition. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements, alors

1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$
ou de manière équivalente
$$\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \text{ est fini, } \mathbb{P}\text{-p.s.}$$
2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et les événements A_n sont indépendants, alors
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$
ou de manière équivalente
$$\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \text{ est infini, } \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Remarque. L'indépendance est nécessaire. Prendre $A_n = A$ avec $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A) = \infty$ et $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(A) \neq 1$.

Démonstration. ▷ On montre 1.
On pose $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Comme les $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissants, on a
$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$$
et
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)\\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$
donc
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n) = 0.$$

▷ On montre 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c}\big]\\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{N\to\infty} \mathbb{1}_{\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathbb{1}_{A_k^c}\right]\end{aligned}$$

Par théorème de convergence dominée (par 1), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{k=n}^{N} \mathbb{1}_{A_k^c}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right) \\
\text{par indep des } A_k &= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k^c) \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} (1-\mathbb{P}(A_k)) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \prod_{k=n}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_k)} \\
&= \lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N}\mathbb{P}(A_k)} \\
&= e^{-\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_k)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On conclut en écrivant

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_k^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$$

□

Exemple. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires avec $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$.
On considère les événements $A_n = \{X_n = 1\}$.
de sorte que $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(A_n)$.
Borel-Cantelli donne alors

1. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty$ alors la suite (X_n) prend la valeur 1 un nombre fini de fois, $\mathbb{P}$-presque sûrement.
2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$ et que les (X_n) sont indépendantes, alors la suite (X_n) prend une infinité de fois la valeur 1, $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Exemple. On observe les motifs dans une suite indépendante et idéntiquement distribuée.
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
Soit $n \geq 1$ fixé. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une suite déterministe fixée dans $\{0,1\}^n$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$B_k(\varepsilon) = \left\{(x_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \mid x_{k+1} = \varepsilon_1, \dots, x_{k+n} = \varepsilon_n\right\}.$$

On considère alors l'événement

$$A_k(\varepsilon) = \left\{(X_i)_{i\geq 1} \in B_k(\varepsilon)\right\} = \{X_{k+i-1} = \varepsilon_1, \dots X_{k+n} = \varepsilon_n\}.$$

l'événement $A_k(\varepsilon)$ est réalisé si X_{k+1} prend la valeur ε_1, X_{k+2} prend la valeur ε_2 et ainsi de suite avec X_{k+n} qui prend la valeur ε_n. On pose

$$A(\varepsilon) = \limsup_{k\to\infty} A_k(\varepsilon)$$

qui correspond à l'événement "le motif $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ apparaît une infinité de fois dans la suite $(X_k)_{k\geq 1}$ ».
Les événements $(A_k(\varepsilon))_{k\geq 0}$ ne sont pas indépendants :

$$\begin{aligned}
&A_0(\varepsilon) = \{X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n\}, \\
&A_1(\varepsilon) = \{X_2 = \varepsilon_1, \dots, X_{n+1} = \varepsilon_n\}.A_2(\varepsilon) \quad = \{X_3 = \varepsilon_1, \dots, X_{n+2} = \varepsilon_n\}.
\end{aligned}$$

les événements $(A_{k\times n}(\varepsilon))_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendants

$$A_{0\times n}(\varepsilon) = \{X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n\},$$
$$A_{1\times n}(\varepsilon) = \{X_{n+1} = \varepsilon_1, \dots, X_{2n} = \varepsilon_n\}.A_{2\times n}(\varepsilon) \quad = \{X_{2n+1} = \varepsilon_1, \dots, X_{3n} = \varepsilon_n\}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{k\times n}(\varepsilon)) &= \mathbb{P}(X_{k\times n+1} = \varepsilon_1, \dots, X_{(k+1)\times n} = \varepsilon_n)\\ &= \mathbb{P}(X_{k\times n+1} = \varepsilon_1)\cdots\mathbb{P}(X_{(k+1)\times n} = \varepsilon_n)\\ &= \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série DIVERGENTE (car on somme sur k).
Par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} A_{k\times n}(\varepsilon)) = 1.$$

Il en suit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A(\varepsilon)) &= \mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} A_k(\varepsilon))\\ &= \mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} A_{k\times n}(\varepsilon))\\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc si on tape au hasard sur un clavier binaire, on fera apparaitre n'importe quel texte une infinité de fois avec probabilité 1.

3.2 Loi du $0-1$ de Kolmogorov

Soit $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \dots$ des sous-tribus de $\mathscr{F}$. On pose

$$\overline{\mathscr{F}_n} = \sigma(\mathscr{F}_n, \mathscr{F}_{n+1}, \dots).$$

la tribu engendrée par les $\mathscr{F}_k, k \geq n$.
On définit alors la tribu asymptotique (ou de queue) par

$$\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\mathscr{F}_n}.$$

Exemple. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires et $\mathscr{F}_n = \sigma(X_n) = \left\{X_n^{-1}(B), B \in \mathscr{B}\right\}$. Montrons que l'événement "X_n converge" est dans $\mathscr{F}_\infty$.
L'événement "X_n converge" est réalisé si et seulement si l'événement "$(X_n)_{n\geq k}$ converge" est réalisé pour tout $k \geq 1$. Bref,

$$\left\{(X_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right\} = \left\{(X_n)_{n\geq k} \text{ converge}\right\} \in \overline{\mathscr{F}_k}.$$

car $(X_n)_{n\geq k}$ ne dépend que de $X_k, X_{k+1}, \dots$.
Ceci est vrai pour tout k donc

$$\left\{(X_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right\} \in \bigcap_{k\geq 1} \overline{\mathscr{F}_k} = \mathscr{F}_\infty.$$

Proposition. Si les tribus $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \dots$ sont indépendantes (un événement d'une tribu est indépendant de tout événement d'une autre tribu), alors la tribu asymptotique $\mathscr{F}_\infty$ ne contient que des événements de probabilité 0 ou 1 :

$$\forall A \in \mathscr{F}_\infty, \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

Exemple. Dans l'exemple précédent, on a donc

$$\mathbb{P}\left((X_n)_{n\geq 1} \text{ converge}\right) \in \{0, 1\}.$$

> Donc soit la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement, soit elle diverge presque sûrement.

Chapitre 3 — Loi des grands nombres

Dans tout ce chapitre, on considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (ou complexes) définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X réelle (ou complexe).

1 Différents modes de convergence

1.1 Convergences presque sûre et probabilité

Définition 1.2. On dit que X_n converge **presque sûrement** vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, si

$$\mathbb{P}(X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Remarque.

1. Cela correspond à la convergence presque partout pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
2. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$ et si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $h(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} h(X)$. En particulier, si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} Y$, alors

$$aX_n + bY_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} aX + bY, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

et

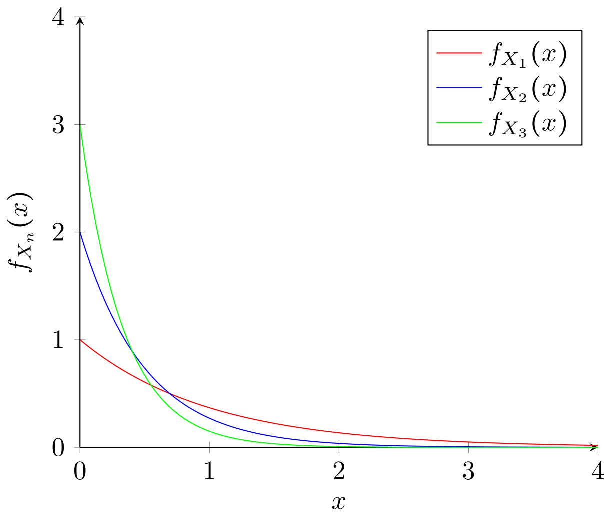
$$X_nY_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} XY.$$

Définition 1.3. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge **en probabilité** vers X si

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On note alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
Cela signifie que la probabilité que X_n s'écarte de X d'un écart supérieur à ε tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exemple. ▷ On considère $X_n \sim \mathcal{E}(n)$



Regardons $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) \\ &= \int_\varepsilon^{+\infty} ne^{-nx}\,dx \\ &= \left[-e^{-nx}\right]_\varepsilon^{+\infty} \\ &= e^{-n\varepsilon}.\end{aligned}$$

Donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
On peut montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$ (en TD).

Proposition. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon}}_{f_n \underset{n\to\infty}{\to} 0\text{-p.p.}}]$$

Comme $|f_n| \leq 1$ qui est intégrable, le théorème de convergence dominée donne

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon}] = 0.$$

□

Exemple. On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
Supposons que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Les événements $A_n = \{X_n = n\}$ sont indépendants et vérifient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Donc par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Donc avec probabilité 1, X_n prend la valeur n une infinité de fois. Donc avec probabilité 1, $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0. Donc $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas presque sûrement.

Proposition. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que les X_n sont indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire de même loi, i.i.d. en abrégé).
On note μ leur espérance : $\mu = \mathbb{E}[X_1]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

On appelle $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$ la **moyenne empirique**

Démonstration.
▷ On calcule d'abord l'espérance de $\overline{X_n}$:

$$\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \frac{\mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]}{n} = \mu.$$

▷ On calcule ensuite la variance de $\overline{X_n}$:

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(\overline{X_n}) &= \mathsf{Var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathsf{Var}(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{\mathsf{Var}(X_1)}{n}\end{aligned}$$

▷ On applique ensuite l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mathbb{E}[\overline{X_n}]| \geq \varepsilon) \\ &\overset{\text{B-T}}{\leq} \frac{\mathsf{Var}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\mathsf{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc $\overline{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$. □

Exemple. Si les X_n sont i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p.$$

1.4 Convergence dans $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

Définition 1.5. Soit $p \in [1, +\infty]$. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X dans $\mathcal{L}^p$, notée $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} X$, si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque.

1. On rappelle que $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel muni de la norme

$$\|\cdot\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, d\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Les espaces $\mathcal{L}^p$ sont décroissants pour l'inclusion : si $p \leq q$, alors $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$ avec l'inégalité $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$. Donc la convergence dans $\mathcal{L}^q$ implique la convergence dans $\mathcal{L}^p$ pour $p \leq q$.

Proposition. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} X$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$. □

Exemple. On se fixe $p \in [1, +\infty[$ et on modifie l'exemple précédent en définissant la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ via

$$\mathbb{P}(X_n = n^{\frac{1}{p}}) = \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n|^p] &= \left(n^{\frac{1}{p}}\right)^p \times \frac{1}{n} + 0^p \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

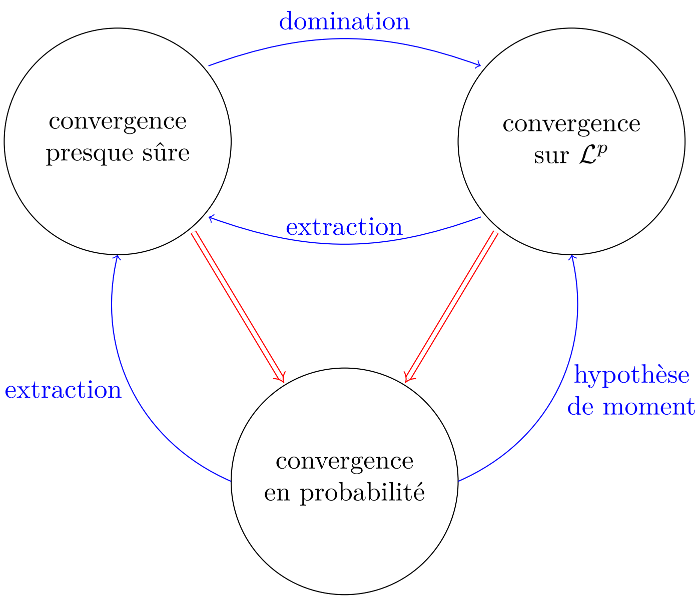
Donc $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}^p}{\not\longrightarrow}} 0$.
Cependant, si $q < p$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n|^q] &= n^{\frac{q}{p}} \times \frac{1}{n} + 0^q \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= n^{\frac{q}{p}-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} 0$ pour $q < p$.

Remarque.

1. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} X$, alors il existe une suite extraite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$.
2. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$ et si $|X_n| \leq Y \in \mathcal{L}^p$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} X$ (par convergence dominée).
3. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$ alors il existe une suite extraite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X$.
4. Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$ et s'il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{E}[|X_n|^p] \leq M$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^q} X$ pour $q \in [1, p[$.



2 Loi forte des grands nombres

2.1 Le résultat

Théorème. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Alors

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1].$$

Remarque.

1. Si les X_n sont des variables aléatoires positives d'espérance infinie ($\mathbb{E}[X_1] = +\infty$), alors le théorème reste vrai au sens suivant :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

2. La convergence est également vérifiée dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$:

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p} \mathbb{E}[X_1].$$

Démonstration.
▷ Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $S_0 = 0$.
Considérons $a \geq \mathbb{E}[X_1]$
▷ Idée : on va montrer que

$$S_n - na \leq M < +\infty \quad \text{p.s.}$$

pour un certain M. Si c'est vrai, alors

$$\frac{S_n}{n} \leq a + \frac{M}{n} \quad \text{p.s.}$$

et donc

$$\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq a \quad \text{p.s.}$$

et on conclut en faisant tendre a vers $\mathbb{E}[X_1]$.
▷ On pose

$$M_n = \max_{k=0,\ldots,n}(S_k - ka) = \max(0, X_1 - a, X_1 - a + X_2 - a, \ldots, (X_1 - a) + \cdots + (X_n - a)).$$

La suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est positive et croissante, donc elle converge presque sûrement vers

$$M = \sup_{n\geq 0}(S_n - na) \in [0, +\infty].$$

▷ Étape 1 : montrons que $\mathbb{P}(M = \infty) \in \{0, 1\}$
Pour $k \geq 1$, on écrit

$$\begin{aligned}\{M = \infty\} &= \left\{\sup_{n\geq 0}(X_1 + \cdots + X_n - na) = +\infty\right\}\\ &= \left\{\sup_{n\geq k}(X_k + \cdots + X_n - na) = +\infty\right\}\end{aligned}$$

Ce dernier événement dépend uniquement de $X_k, X_{k+1}, \ldots$. Donc il appartient à $\overline{\mathscr{F}_k}\sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)$.
Céci étant vrai pour tout $k \geq 1$, on en déduit que

$$\{M = \infty\} \in \bigcap_{k\geq 1} \overline{\mathscr{F}_k} = \mathscr{F}_\infty.$$

Les X_n étant indépendantes, la loi du 0–1 de Kolmogorov assure que $\mathbb{P}(M = \infty) \in \{0, 1\}$.
▷ Étape 2 : montrons que $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$
On pose $S'_n = X_2 + \cdots + X_{n+1}, n \geq 1$ et $S'_0 = 0$. Alors

$$M'_n = \max_{k=0,\ldots,n}(S'_k - ka) = \max(0, X_2 - a, X_2 - a + X_3 - a, \ldots, (X_2 - a) + \cdots + (X_{n+1} - a)).$$

On obtient la relation

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \max(0, M'_n + (X_1 - a)) \\ &= M'_n - \min(a - X_1, M'_n). \end{aligned}$$

Comme avant, la suite $(M'_n)_{n\geq 0}$ est croissante positive donc converge vers $M' = \sup_{n\geq 0}(M'_n - na) \in [0, +\infty]$.
Comme les variables aléatoires X_n sont i.i.d., on en déduit que $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(S'_n)_{n\geq 0}$ ont même loi. De même, M_n et M'_n ont même loi et M et M' ont même loi. Alors

$$\mathbb{E}[\min(a - X_1, M'_n)] = \underbrace{\mathbb{E}[M'_n]}_{\mathbb{E}[M_n]} - \mathbb{E}[M_{n+1}] \leq 0$$

Or, la suite $Y_n = \min(a - X_1, M'_n)$ converge vers $Y = \min(a - X_1, M')$ et vérifie $|Y_n| \leq |a - X_1|$ qui est intégrable.
On en deduit que

$$\mathbb{E}[\min(a - X_1, M')] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\min(a - X_1, M'_n)] \leq 0.$$

Si on suppose que $\mathbb{P}(M = \infty) = 1$, alors $\mathbb{P}(M' = \infty = 1)$ (de même loi) et donc $\mathbb{E}[\min(a - X_1, M')] = \mathbb{E}[a - X_1]$, ce qui donne $a \leq \mathbb{E}[X_1]$, ce qui est exclu. Donc $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$, c'est-à-dire que M est fini presque sûrement.
▷ Étape 3 : Conclusion
Comme $M = \sup_{n\geq 0}(S_n - na)$, on obtient pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_n - na &\leq M \\ \frac{S_n}{n} &\leq a + \frac{M}{n} \end{aligned}$$

Par suite, comme M est fini p.s., on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq a\right) = 1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq \mathbb{E}[X_1]\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{a > \mathbb{E}[X_1] \\ a\in\mathbb{Q}}} \left\{\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq a\right\}\right) \\ &\overset{\substack{\text{decroissance} \\ \text{monotone}}}{=} \lim_{\substack{a \searrow \mathbb{E}[X_1] \\ a\in\mathbb{Q}}} \mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq a\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En faisant de même avec $-X_n$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \geq \mathbb{E}[X_1]\right) = 1.$$

Ceci prouve que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1]\right) = 1.$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1]\right) = 1.$$

□

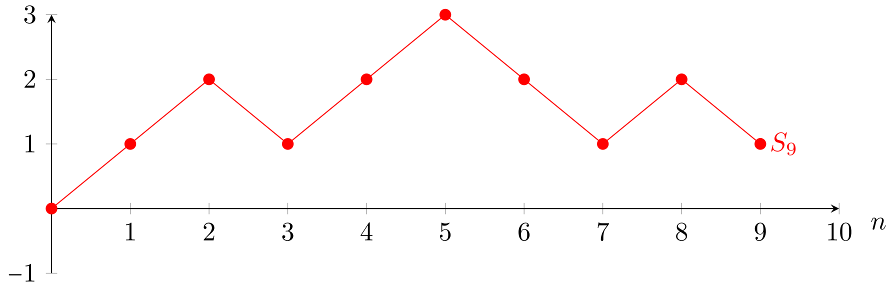
2.2 Applications

Marche aléatoire non centrée

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelle i.i.d. intégrables. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On appelle souvent $(S_n)_{n\geq 1}$ une **marche aléatoire**.

Exemple. On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. comme suit :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p \\ -1 & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$



Dans le cas général, supposons que $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$. La loi forte des grands nombres donne alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1]$$

donc

$$\left|\frac{S_n}{n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty, \qquad \left(\mathbb{P}\left(|S_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\right) = 1\right).$$

Approximation d'intégrales

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On souhaite calculer

$$\int_0^1 f(x)\, d\lambda_1(x).$$

Souvent, on ne sait pas faire donc on cherche une valeur approchée. Soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Alors, les variables aléatoires $f(U_1), \dots, f(U_n)$ sont i.i.d. et intégrables donc la loi forte des grands nombres donne

$$\frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[f(U_1)] = \int_0^1 f(x)\, d\lambda_1(x).$$

▷ Avantages de la méthode : aucune hypothèse de régularité sur f et extensible au cas $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (en considérant $U_1, \dots, U_n$ uniformes sur $[0,1]^d$).
▷ Inconvénient : convergence lente (en $\sqrt{n}$).
Cette méthode est appelée **méthode de Monte-Carlo**.

Chapitre 4 — Convergence en loi et théorème central limite

Contexte

On a vu que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles intégrables, alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1]$$

Question

Que dire de l'écart entre $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ et $\mathbb{E}[X_1]$?

1 Convergence en loi

Notation

Dans cette section, $C_b^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues bornées munies de la norme

$$\|h\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$$

1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1.2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ **converge en loi** vers X si pour tout $h \in C_b^0(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[h(X)]$$

On note alors

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$$

ou bien

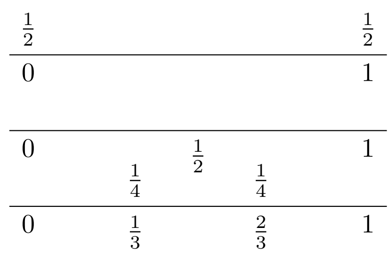
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$$

Remarque.

1. On peut étendre cette définition à des vecteurs aléatoires en prenant des fonctions $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continues bornées.
2. Cette notion de convergence ne fait intervenir que la loi des variables aléatoires considérées. Dans la limite, on peut donc remplacer X par n'importe quelle variable aléatoire Y de même loi.
   Si μ désigne la loi de X, on notera alors

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mu$$

Exemple. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$.



La loi de X_n est donnée par

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \quad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n$$

Soit $h \in C_b^0(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X_n)] &= \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 h(x)\,dx\end{aligned}$$

par convergence des sommes de Riemann. On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On a alors

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_0^1 h(x)\,dx$$

Donc pour tout $h \in C_b^0(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[h(X)]$$

et donc

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$$

Pkus simplement, on écrit

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{U}([0,1])$$

Exemple. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ avec $\sigma_n > 0$ et $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X_n)] &= \int_{\mathbb{R}} h(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\,dx \\ y = \frac{x}{\sigma_n} \quad &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{h(\sigma_n y)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{g_n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(0)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}\,dy\end{aligned}$$

Comme $|g_n(y)| \leq \|h\|_\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, on applique le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} h(0)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy = h(0)$$

Soit X de loi δ_n. On a montré que pour tout $h \in C_b^0(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[h(X)] = h(0)$$

donc

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$$

ce qu'on réécrit

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \delta_0$$

1.3 Deux cas particuliers

1.3.1 Loi sur $\mathbb{N}$

Proposition. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k)$$

Démonstration.

- Sens direct :
  Supposons que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $h \in C_b^0(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X_n)] &= \sum_{j=0}^{+\infty} h(j)\mathbb{P}(X_n = j) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[h(X)] \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} h(j)\mathbb{P}(X = j)\end{aligned}$$

  On prend alors h telle que $h(k) = 1$ et $h(j) = 0$ pour $j \neq k$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[h(X_n)] = \sum_{j=0}^{+\infty} h(j)\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X_n = k)$$

  et de même pour X, donc

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X = k)$$

- Réciproque vue plus tard.

□

Exemple. Approximation binomiale de la loi de Poisson. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta > 0$. Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ où $X \sim \mathcal{P}(\theta)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k (1-p_n)^n \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}\end{aligned}$$

Bref, on obtient

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta} = \mathbb{P}(X = k)$$

donc

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$$

ou encore

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\theta)$$