Mesure et intégration — TDs

Ivan Lejeune

24 janvier 2025

Table des matières

TD1

Rappels

Exercice 1.1. Déterminer les ensembles suivants :

1. Sur les intersections monotones décroissantes :

$$I_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \tfrac{1}{n}\right], \qquad I_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \tfrac{1}{n}\right[, \qquad I_3 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \tfrac{1}{n}\right], \qquad I_4 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \tfrac{1}{n}\right[,$$
$$J_1 = \left]0, \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n}\right], \quad J_2 = \left]0, \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n}\right[, \quad J_3 = \left[0, \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n}\right], \quad J_4 = \left[0, \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n}\right[.$$

2. Sur les unions monotones croissantes :

$$U_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, 1-\tfrac{1}{n}\right], \qquad U_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, 1-\tfrac{1}{n}\right[, \qquad U_3 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1-\tfrac{1}{n}\right], \qquad U_4 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1-\tfrac{1}{n}\right[,$$
$$V_1 = \left]0, \lim_{n\to+\infty} 1-\tfrac{1}{n}\right], \quad V_2 = \left]0, \lim_{n\to+\infty} 1-\tfrac{1}{n}\right[, \quad V_3 = \left[0, \lim_{n\to+\infty} 1-\tfrac{1}{n}\right], \quad V_4 = \left[0, \lim_{n\to+\infty} 1-\tfrac{1}{n}\right[.$$

Solution.

1. Sur les intersections, on remarque que l'enjeu se joue sur le fait d'exclure une des bornes limites, comme dans J_4.

$$\begin{aligned} I_1 &= \varnothing = J_1, & I_2 &= \varnothing = J_2, \\ I_3 &= \{0\} = J_3, & I_4 &= \{0\} \neq J_1 = \varnothing. \end{aligned}$$

2. Sur les unions, l'enjeu se joue sur le fait d'inclure une borne limite, comme dans V_1 et V_3.

$$\begin{aligned} U_1 &=]0,1[\neq V_1 =]0,1], & U_2 &=]0,1[= V_2, \\ U_3 &= [0,1[\neq V_3 = [0,1], & U_4 &= [0,1[= V_4. \end{aligned}$$

Une manière détaillée de rédiger une réponse serait la suivante pour I_1 :
Montrons que $I_1 = \varnothing$:

- Prenons $x < 0$. Il n'est pas dans $]0,1]$ donc $x \notin I_1$.
- Prenons $x = 0$. Il n'est pas dans $]0,1]$ donc $x \notin I_1$.
- Prenons $x > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0} < x$. Alors $x \notin I_1$.

On a traité tous les cas, donc $I_1 = \varnothing$.
Pour les cas avec une limite c'est encore plus facile :
Montrons que $J_1 = \varnothing$: On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $J_1 =$ "$]0,0]$" $= \varnothing$.

Exercice 1.2. Soit X un ensemble et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{P}(X)$ indexée par un ensemble I quelconque (fini ou infini, dénombrable ou non). Montrer les assertions suivantes :

1. Pour tout $A, B \in \mathscr{P}(X)$, on a $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
2. Distributivités : pour tout $B \in \mathscr{P}(X)$,

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B).$$

Solution.

1. Commençons par montrer le sens direct.
   On suppose $A \subset B$ et on veut montrer $B^c \subset A^c$.
   Soit $x \in B^c$. Si $x \in A$ alors par hypothèse, $x \in B$ ce qui est absurde. Alors, $x \in A^c$.
   Montrons maintenant le sens indirect.

On suppose $B^c \subset A^c$ et on veut montrer $A \subset B$.
Soit $x \in A$. Si $x \in B^c$ alors par hypothèse, $x \in A^c$ ce qui est absurde. Alors, $x \in B^{cc} = B$.
On a donc démontré que pour tout $A, B \in \mathscr{P}(X)$, on a $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

2. Commençons par montrer la distributivité de l'intersection sur l'union :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B &\iff x \in B \text{ et } x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\ &\iff x \in B \text{ et } \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0} \\ &\iff \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0} \cap B \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B) \end{aligned}$$

> **Remarque.** Utiliser les lois de De Morgan est fortement conseillé dans la manipulation d'ensembles et d'opérations d'ensembles une fois qu'on a obtenu un résultat. On utilisera la loi sur le complémentaire pour la deuxième partie qui suit.

Montrons maintenant l'autre égalité :

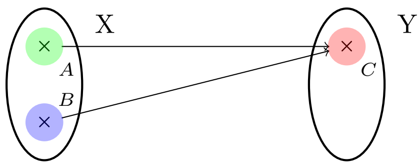
$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B &\iff \forall i \in I, x \in A_i \\ &\iff \forall i \in I, x \in A_i \cup B \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B) \end{aligned}$$

Exercice 1.3 Images et images réciproques d'ensembles. Soient X et Y deux ensembles, et soit $f : X \to Y$ une application. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pour chacune d'entre elles, donner une preuve ou un contre-exemple :

1. Image directe : soit $A, B \in \mathscr{P}(X)$,
   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   (b) $f(A^c) = f(A)^c$.
2. Image réciproque : soit $C, D \in \mathscr{P}(Y)$,
   (a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
   (b) $f^{-1}(C^c) = f^{-1}(C)^c$.

Solution.

1. Les images directes sont ce qui peut poser problème dans la conservation de propriétés.
   (a) Commençons par montrer $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$:
   Si $f(A \cup B) = \varnothing$, cela est trivial. Sinon, on prend $y \in f(A \cup B)$. Il existe donc $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$.
   Alors $x \in A$ ou $x \in B$ et donc $y \in f(A) \cup f(B)$.
   Montrons maintenant que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$:



   En regardant le schéma ci-dessus il est clair que $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$. En revanche, $f(A) \cap f(B) = C \cap C = C \neq \varnothing$.
   (b) Schéma explicatif :

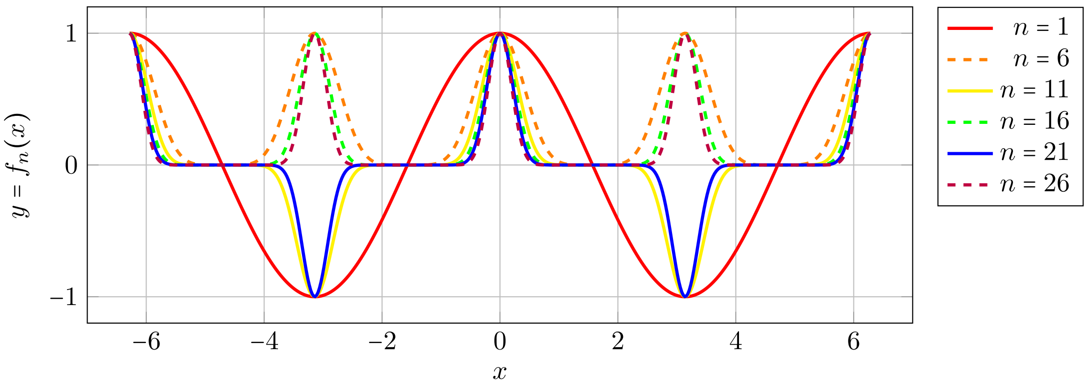
On voit encore une fois clairement que $f(A^{\mathsf{c}}) = f(\varnothing) = \varnothing$. Par contre, $f(A)^{\mathsf{c}} = B^{\mathsf{c}} = C \neq \varnothing$.

2. Les images réciproques sont les bons objets pour ce genre d'opérations, tout est conservé.
   (a) Vrai, preuve facile.
   (b) Vrai, preuve facile.

Remarque. Une suite réelle admet *toujours* une limite supérieure et une limite inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si ces deux quantités sont finies et égales alors elle est convergente.

Exercice 1.4 Limites supérieures et inférieures de suites et fonctions.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_n = \left(\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) e^n$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction *partie entière*. Calculer $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.
2. Calculer $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = \cos^n(x)$.



Solution.

1. Commençons par réécrire x_n en regardant ses premiers termes :

$$\begin{aligned} &x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{e}{2} \\ &x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{e^3}{2} \\ &x_4 = 0, \quad \cdots \end{aligned}$$

On remarque que la suite n'est qu'un mélange d'une suite nulle et une suite exponentielle simple.
On peut alors calculer ses limites :

$$\underline{\lim} x_n = \sup \left\{ \inf_{k>n} x_k \right\} = \sup \{0, 0, 0, \dots\} = 0$$

Pour l'autre limite c'est similaire, comme e^n est croissante non bornée, on a :

$$\overline{\lim} x_n = \inf \left\{ \sup_{k>n} x_k \right\} = \inf \{+\infty, +\infty, +\infty, \dots\} = +\infty$$

2. Comme pour la fonction d'avant, on lit ce qui se passe en fonction de n sur le graphe. On voit alors qu'on a 3 cas :
   - Quand x n'est pas multiple de π, il tend naturellement vers 0.
   - Quand x est multiple de 2π, il vaut toujours 1.
   - Le restant du temps il oscille entre 1 et -1 en fonction de la parité de n. On peut en déduire la suite.

   Les objets recherchés sont des fonctions :

$$\overline{\lim} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{\pi\mathbb{Z}}$$

   La fonction inf se trouve de la même manière, il faut regarder les infs pour chaque cas de x :

$$\underline{\lim} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} = 2 \times \mathbb{1}_{2\pi\mathbb{Z}} - \mathbb{1}_{\pi\mathbb{Z}}$$

Remarque. Il existe un moyen simple de relier "ensembles" et "fonctions" : les fonctions indicatrices (ou fonction caractéristique). Ce sont des fonctions à valeurs réelles qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1. On les retrouve aussi en théorie de probabilités avec les variables aléatoires de Bernoulli.

Exercice 1.5 Fonctions indicatrices. Soit X un ensemble et $A \in \mathscr{P}(X)$. La fonction indicatrice de A est l'application $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Exprimer $\mathbb{1}_{A^c}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\mathscr{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents.

Solution.

1.
   - Soit $x \in X$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A^c} &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= 1 - \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= 1 - \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

   - Montrons que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\cap B}(x) &= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \cap B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \text{ et } x \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \times \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \end{aligned}$$

- On utilise les lois de De Morgan pour simplifier les calculs :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_{((A\cup B)^{C})^{C}} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{(A\cup B)^c} \\
&= 1 - \mathbb{1}_{A^c\cap B^c} \\
&= 1 - (1-\mathbb{1}_A)(1-\mathbb{1}_B) \\
&= 1 - (1-\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B) \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B
\end{aligned}$$

2. Montrons qu'il existe une bijection entre $\mathscr{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$. On pose :

$$\begin{aligned}
f \colon \mathscr{P}(X) &\to \{0,1\}^X \\
E &\mapsto \mathbb{1}_E \\
g \colon \{0,1\}^X &\to \mathscr{P}(X) \\
a &\mapsto \{x \in X, a(x) = 1\} = a^{-1}(\{1\})
\end{aligned}$$

On veut montrer que $g\circ f = f \circ g = \mathsf{Id}$ dans leurs ensembles respectifs.
Soit $E \in \mathscr{P}(X)$.

$$\begin{aligned}
g\circ f(E) &= g(\mathbb{1}_E) \\
&= \{x\in X, \mathbb{1}_E(x) = 1\} \\
&= E
\end{aligned}$$

Réciproquement, on prend $a \colon X \to \{0,1\}$. On a

$$\begin{aligned}
f\circ g(a) &= f\,\underbrace{(\{x\in X, a(x) = 1\})}_{=I} \\
&= \mathbb{1}_I
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\forall x \in X,\ &\text{si } a(x) = 1, x\in I \text{ donc } \mathbb{1}_I(x) = 1. \\
&\text{si } a(x) = 0, x \notin I \text{ donc } \mathbb{1}_I(x) = 0.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a $a = \mathbb{1}_I$ et $f\circ g(a) = a$.
Comme on a f bijective, les ensembles $\mathscr{P}(X)$ et $0,1^X$ sont équipotents.

Remarque. Les notions de limites supérieures et limites inférieures peuvent être étendues aux ensembles via les indicatrices. C'est en théorie des probabilités que ces définitions seront particulièrement utiles. Attention aux notations ici, on utilise les mêmes notations pour les limites de suites d'objets différents (réels, fonctions, ensembles...).

Exercice 1.6. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$. Montrer qu'il existe deux parties $B, C \in \mathscr{P}(X)$ telles que $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_B$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_C$. Exprimer B et C en fonction des parties A_n. Interpréter les ensembles B et C.

Solution.

- Pour montrer qu'il existe $C \subset X$ tel que $\overline{\lim} f_n = \mathbb{1}_B$, il suffit de montrer que la fonction $\overline{\lim} f_n$ (définie sur X) prend ses valeurs dans $\{0,1\}$. C sera alors l'ensemble de niveau 1 de $\overline{\lim} f_n$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Alors
$$\overline{\lim} u_n = \underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{\sup_{k\geq n}\{u_n\}\right\}}_{\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}}_{\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$$
Comme $\forall x \in X$ on a $\left(\overline{\lim} f_n\right)(x) = \overline{\lim}\left(f_n(x)\right)$, on a $\overline{\lim} f_n = \mathbb{1}_C$.
- De même, $\underline{\lim} f_n = \mathbb{1}_B$ avec $B \subset X$.

Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 1.7. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Montrer les assertions suivantes :

1. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcup_{i\in I}(A_i \setminus B)$ et $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcap_{i\in I}(A_i \setminus B)$.
2. $B \setminus \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \setminus A_i)$ et $B \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

Exercice 1.8. Soient X, Y et Z des ensembles, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer les assertions suivantes :

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. f est injective si et seulement si il existe une application $h : Y \to X$ telle que $h \circ f = \mathrm{Id}_X$.
4. f est surjective si et seulement si il existe une application $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$.

Exercice 1.9. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties fixées. On considère l'application $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par
$$\varphi(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. Calculer $\varphi(\varnothing)$ et $\varphi(E \setminus (A \cup B))$. À quelle condition sur A et B l'application φ est-elle injective ?
2. Déterminer $\varphi^{-1}\left(\{(\varnothing, B)\}\right)$. À quelle condition sur A et B l'application φ est-elle surjective ?
3. À quelle condition sur A et B l'application φ est-elle bijective ?

Solution. Dans ce qui suit, l'objectif est de comprendre l'impact qu'ont certaines propriétés sur les fonctions entre ensembles :

1. On voit rapidement qu'on a
$$\varphi(\varnothing) = \varnothing = \varphi(E \setminus (A \cup B))$$
Pour éviter d'avoir deux ensembles différents qui ont pour image l'ensemble vide, il faut que $A \cup B$ soit couvrant, soit que $A \cup B = E$.
2. Ici on a le même problème que précédemment, il faut une propriété importante pour s'assurer que φ soit surjective : $A \cap B = \varnothing$
3. Une application bijective est injective et surjective, donc ici il faut :
$$A \sqcup B = E \quad \text{soit que } A \cup B = E,\ \text{et } A \cap B = \varnothing$$

Exercice 1.10. Soit X un ensemble non vide. Pour deux parties $A, B \in \mathscr{P}(X)$, la différence symétrique de A et B est définie par

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Montrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Exprimer $\mathbb{1}_{A \triangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\triangle$ est associative sur $\mathscr{P}(X)$.
3. Montrer qu'il existe une unique partie $E \in \mathscr{P}(X)$ telle que, pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on ait $A \triangle E = E \triangle A = A$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$ il existe un unique $A' \in \mathscr{P}(X)$ tel que $A \triangle A' = A' \triangle A = E$.

Exercice 1.11. On note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels et $\mathbb{Q}_n[X]$ l'ensemble de ceux qui sont de degré au plus n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable. En déduire que $\mathbb{Q}[X]$ est aussi dénombrable.
2. Les nombres algébriques sont les nombres complexes qui sont racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

TD2

Exercice 2.1 Tribu engendrée par les singletons. Soit X un ensemble. On considère la collection de parties de X suivante :

$$\mathscr{D} = \{A \subset X \mid A \text{ dénombrable, ou } A^c \text{ dénombrable}\} \subset \mathscr{P}(X).$$

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une tribu sur X.
2. On note $\mathscr{C} = \left\{\{x\} \mid x \in X\right\} \subset \mathscr{P}(X)$ la classe des singletons (*i.e.* des parties à un seul élément). Comparer $\mathscr{D}$ et $\sigma(\mathscr{C})$.
3. Sur $\mathbb{N}$, quelle est la tribu engendrée par les singletons ?

Solution.

1. Montrons que $\mathscr{D}$ vérifie les axiomes d'une tribu.
   - On vérifie que $X \in \mathscr{D}$.
     On a $X^\mathsf{c} = \varnothing$ qui est dénombrable (et même fini) donc par définition de $\mathscr{D}$, on a $X \in \mathscr{D}$.
   - On vérifie que $\forall A \in \mathscr{D}, A^\mathsf{c} \in \mathscr{D}$.
     Soit $A \in \mathscr{D}$. Si A est dénombrable alors $A^\mathsf{c} \in \mathscr{D}$ car $(A^\mathsf{c})^\mathsf{c} = A \in \mathscr{D}$.
   - On vérifie que toute union dénombrable d'éléments de $\mathscr{D}$ est dans $\mathscr{D}$.
     Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'éléments de $\mathscr{D}$.
     — Si $\forall i \le n, A_i$ dénombrable, alors $\bigcup_n A_n$ est dénombrable et donc dans $\mathscr{D}$.
     — Sinon, il existe $i_0 \le n$ tel que A_{i_0} n'est pas dénombrable. Comme on a la stabilité par complémentaire, vérifier que $\bigcup_n A_n$ est dans $\mathscr{D}$ revient à vérifier que $\bigcap_n {A_n}^\mathsf{c}$.

     Comme $A_{i_0} \in \mathscr{D}$ n'est pas dénombrable, on a forcément $(A_{i_0})^\mathsf{c}$ dénombrable par construction de $\mathscr{D}$.
     Alors, toute intersection avec un ensemble dénombrable est au plus dénombrable, et donc $\bigcap_n {A_n}^\mathsf{c} \in \mathscr{D}$ et par stabilité du complémentaire, on a bien $\bigcup_n A_n \in \mathscr{D}$.

   On a montré que $\mathscr{D}$ vérifie tous les axiomes d'une tribu et donc $\mathscr{D}$ est une tribu sur X.
2. On étudie la relation entre $\mathscr{D}$ et $\sigma(\mathscr{C})$.
   Commençons par vérifier que $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$.
   Trivialement, on a $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ car tous les singletons sont dénombrables. Ainsi, d'après la *remarque 2.1.3 page 14 du cours*, on a $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$.
   Vérifions maintenant que $\mathscr{D} \subset \sigma(\mathscr{C})$
   Soit $A \in \mathscr{D}$.

   - Si A est dénombrable, alors il peut s'écrire comme union dénombrable de ses singletons, et donc $A \in \sigma(\mathscr{C})$.
   - Si A n'est pas dénombrable, alors A^c l'est et par le point au dessus, $A^\mathsf{c} \in \sigma(\mathscr{C})$. Comme $\sigma(\mathscr{C})$ est une tribu, $A^{\mathsf{cc}} = A \in \sigma(\mathscr{C})$.

   On a donc bien $\mathscr{D} \subset \sigma(\mathscr{C})$.
   En conclusion, on a $\mathscr{D} = \sigma(\mathscr{D})$.

Remarque. Noter que dans l'exercice suivant, l'ensemble X n'est pas nécessairement borélien...

Exercice 2.2 Tribu induite. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$, on note

$$\mathscr{A}_X = \left\{X \cap B \;\middle|\; B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

1. Montrer que $\mathscr{A}_X$ est une tribu sur X. On l'appelle la tribu induite ou tribu trace sur X par $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque : si $A \subset X$, attention à ne pas confondre son complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ (noté A^c) et son complémentaire dans X qu'on notera $X \setminus A$.

2. On note $\mathscr{O}_X = \left\{X \cap U \;\middle|\; U \in \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}\right\}$ la classe des ouverts induits de X, et $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{O}_X)$ la tribu borélienne de X. Montrer que $\mathscr{A}_X = \mathscr{B}(X)$.
   Indication : on pourra s'intéresser à l'injection $i : X \to \mathbb{R}^n$ définie par $i(x) = x$.

Solution.

1. Commençons par vérifier les axiomes d'une tribu :
   - Comme $X = X \cap \mathbb{R}^n$, on a bien $X \in \mathscr{A}_X$.
   - Montrons que si $A \in \mathscr{A}_X$ alors $X \setminus A \in \mathscr{A}_X$. Comme $A \in \mathscr{A}_X$, il existe B tel que $A = B \cap X$.
     Alors $B^c \cap X = A^c$. Or $B^c \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Donc A_X est stable par complémentaire.
   - On vérifie que cela marche pour une union dénombrable

Exercice 2.3 Tribus engendrées par les partitions finies. Soit $(X, \mathscr{F})$ un espace mesurable. Déterminer les fonctions de $X \to \mathbb{R}$ qui sont mesurables lorsque

1. $\mathscr{F} = \{\varnothing, X\}$.
2. $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$
3. $\mathscr{F} = \left\{\bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; I \subset \{1, \ldots, n\}\right\}$ avec $(A_1, \ldots, A_n)$ une partition finie de X. (On montrera que $\mathscr{F}$ est une tribu et on se contentera d'un critère suffisant de mesurabilité).

Solution.

1. Comme f est une application, il existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que
$$f^{-1}(\alpha_0) = x \iff f(x) = \alpha_0, \quad \forall x \in X.$$
   et f est constante.
2. Si $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$, alors toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable car
$$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(B) \in \mathscr{P}(X) = \mathscr{F}.$$
   Ainsi l'ensemble des applications mesurables est l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{R}$.
3. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de X et on pose $\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \mathscr{F}$.
   Commençons par montrer que $\mathscr{F}$ est une tribu sur X.
   - On a $X = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{F}$.
   - On a
$$\{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\}^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C = \bigcup_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ J \cap I = \varnothing}} \left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \in \mathscr{F}.$$
   - Soit $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{F}$. On a
$$\begin{aligned}\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i \in I_j} A_i\right) \\ &= \left(\bigcup_{i \in (\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j)} A_i\right) \in \mathscr{F}.\end{aligned}$$

Remarque. On a vu en cours que la mesurabilité est compatible avec les opérations usuelles, les passages à la limite, *etc.*. .

Exercice 2.4. Monter que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont boréliennes :

1. $g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\cos(xe^n))$,
2. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \cos(x) & \text{sinon} \end{cases}$
3. $h(x) = \limsup_{n\to\infty} \arctan\big(f(x^n) + n^3x^7\big)$

Solution.

1. g est une composée de fonctions continues, et est donc borélienne.
2. On peut réécrire f comme
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \cos(x) & \text{sinon} \end{cases} = e^x \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) + \cos(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}}(x).$$
Comme $\mathbb{Q}$ est mesurable (car union dénombrable d'éléments de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$) et $\mathbb{Q}^C$ est mesurable (car complémentaire d'un ensemble mesurable), on a que f est mesurable car somme de fonctions mesurables.
3. Composée de fonctions boréliennes donc borélienne.

Remarque. La mesurabilité est aussi compatible avec la troncature, l'extension ou la décomposition en forme polaire.

Exercice 2.5 Troncature. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurables. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la fonction $f_a : X \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ a & \text{si } f(x) > a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$
est mesurable.

Solution. Première solution :
On considère les ensembles suivants :
$$A_+ = f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathscr{A},$$
$$A = f^{-1}([-a, a]) \in \mathscr{A},$$
$$A_- = f^{-1}(]-\infty, -a[) \in \mathscr{A}.$$
On peut alors écrire f_a comme
$$f_a(x) = a\mathbb{1}_{A_+}(x) - a\mathbb{1}_{A_-}(x) + f(x)\mathbb{1}_A(x).$$
Comme A_+, A et A_- sont mesurables, on a que f_a est mesurable.
Deuxième solution :
Soit $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et on note $B_a = B \cap]-a, a[$. Alors :

- Si $a, -a \notin B$ alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B_a)$.
- Si $a \in B$ et $-a \notin B$ alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B_a) \cup f^{-1}(\{a\})$.
- Si $a \notin B$ et $-a \in B$ alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B_a) \cup f^{-1}(\{-a\})$.
- Si $a, -a \in B$ alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B_a) \cup f^{-1}(\{-a, a\})$.

Dans tous les cas, on a les $f^{-1}(B) \cup \cdots$ qui sont dans $\mathscr{A}$ et donc f_a est mesurable.

Exercice 2.6.

1. On suppose que $X \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonctions borélienne. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est borélienne.
2. Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ borélienne. Montrer que $|h|$ est borélienne et qu'il existe $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ borélienne telle que $|\alpha(x)| = 1$ et $h(x) = |h(x)|\alpha(x)$ pour tout $x \in X$.

Solution.

1. On ne peut pas juste écrire $g(x) = f(x)\mathbb{1}_X(x)$ car $f(x)$ n'est tout simplement pas définie pour $x \notin X$. On doit donc faire autrement, c'est à dire passer par la méthode piétonne ; 2 cas se présentent :
   - Si $0 \notin B$, on a $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.
   - Si $0 \in B$, on a $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup g^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(B) \cup X^C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

   Donc g est borélienne.
2. L'application $|\cdot|$ est continue et donc borélienne. Ainsi, l'application

   $$x \overset{h}{\mapsto} h(x) \overset{|\cdot|}{\mapsto} |h(x)|$$

   qui est $|h|$ est mesurable par composition.
   Montrons que si h est mesurable alors sa forme polaire est mesurable.
   On a

   $$\alpha(x) = \frac{h(x) + \mathbb{1}_E(x)}{|h(x)| + \mathbb{1}_E(x)}$$

   avec

   $$E = \{x \in X \mid h(x) = 0\} = h^{-1}(\{0\}) \in \mathscr{A}$$

   De plus,

   $$\mathbb{1}_E : X \to \{0, 1\}$$

   est mesurable. Enfin, par composée de fonctions mesurables, on a bien ce qu'on voulait.

Exercice 2.7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si f est croissante, montrer que f est borélienne.
2. Si f est dérivable, montrer que f' est borélienne.

Solution.

1. Il suffit de considérer $B =]b, +\infty[$ et alors $f^{-1}(B)$ est un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ et donc borélien.
   L'image réciproque des demi-droites de la forme de B sont bien des demi-droites de la forme de $f^{-1}(B)$ et donc boréliennes.
2. Il faut trouver (g_n) une suite de fonctions boréliennes telles que g_n converge simplement vers f'. Soit (g_n) la suite suivante :

   $$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

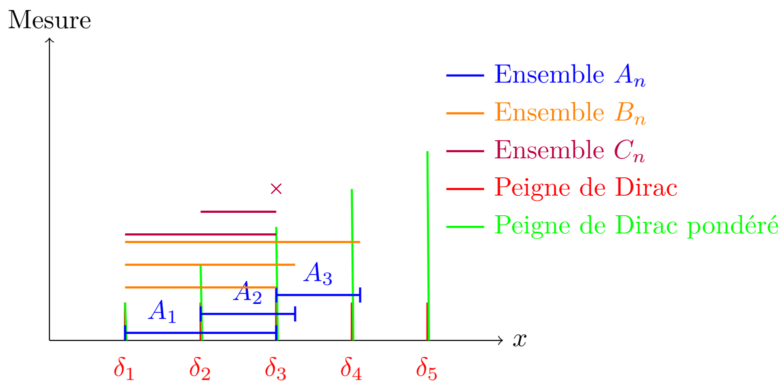
   On a bien g_n mesurable car f mesurable, $x + \frac{1}{n}$ mesurable et donc g est une composée de fonctions mesurables.
   De plus, on a $f'(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Donc f' est borélienne.

Mesures

Exercice 2.8. Sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, on considère λ la mesure de Lebesgue, $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$ et $\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\delta_k$. Pour chacune de ces mesures, calculer les mesures des ensembles suivants :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [n, n+1+\frac{1}{n^2}]$, $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et $C_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$;
2. $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$ et $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$

Solution. On peut commencer par visualiser ces différents ensembles sur un dessin pour mieux comprendre ce qui se passe :



A partir du dessin, on peut facilement expliciter B_n et C_n pour déterminer que les mesures sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= 2 & \nu(A_n) &= 2n+1 & \lambda(A_n) &= 1+\frac{1}{n} \\ \mu(B_n) &= n+1 & \nu(B_n) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} & \lambda(B_n) &= n+\frac{1}{n} \\ \mu(C_n) &= 0 & \nu(C_n) &= 0 & \lambda(C_n) &= 0 \end{aligned}$$

Il est donc clair que pour n suffisament grand (pour se débarasser des cas particuliers), C_n tend vers le vide et B_n vers tout $\mathbb{N}$.
On pourrait expliciter les cas pour $n \leq 3$ mais cela a peu d'impact sur les résultats.

Exercice 2.9 Mesure image.
Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ des espaces mesurables et $F : X \to Y$ une application mesurable.
Si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$, on note $F_*\mu : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ la mesure image de μ par F.

1. Pour $a \in X$, déterminer $F_*\delta_a$.
2. On dit qu'une application $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ préserve la mesure χ si $G_*\chi = \chi$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{N}$. À quelle condition l'application G préserve-t-elle la mesure δ_a ?
   (b) À quelle condition l'application G préserve-t-elle la mesure de comptage ?

Exercice 2.10. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, μ une mesure de probabilité sur $(X, \mathscr{A})$, et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) = 1$.

1. Montrer que $\mu(\bigcap_{\in\mathbb{N}} A_n) = 1$. Interpréter en passant au complémentaire.
2. Le résultat est-il encore vrai si on a $\mu(X) = +\infty$?

Exercice 2.11 Lois conditionnelles. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour toute évènement $A \in \mathscr{F}$ de probabilité non nulle, on considère l'application $\mathbb{P}(\cdot|A) : \mathscr{F} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\cdot|A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
2. Pour tous évènements $A, B \in \mathscr{F}$ de probabilités non nulles, exprimer $\mathbb{P}(A|B)$ en fonction

de $\mathbb{P}(B|A)$, et en déduire la formule de Bayes.

Solution.

1. Pour montrer que $\mathbb{P}(\cdot|A)$ est une probabilité, il suffit de vérifier les axiomes d'une probabilité :
   - On a $\mathbb{P}(\varnothing|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\varnothing)}{\mathbb{P}(A)} = 0$.
   - Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements disjoints. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sqcup_{n\in\mathbb{N}}B_n|A\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(A\cap\left(\sqcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\right)\right)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\sqcup_{n\in\mathbb{N}}(A\cap B_n)\right)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\mathbb{P}(A\cap B_n)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(B_n|A).\end{aligned}$$

   - On a $\mathbb{P}(\Omega|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B|A^C)\mathbb{P}(A^C)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B|A^C)(1-\mathbb{P}(A))}.\end{aligned}$$

   En posant $C = A^C$, on obtient la formule de Bayes.

Exercice 2.12 Fonctions de répartition. Soit $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $F_X(t) = \mathbb{P}(X\le t)$.

1. Exprimer F_X à l'aide de la loi $\mathbb{P}_X$ de X. Que peut-on dire de la monotonie de F_X ? Déterminer $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)$ et $\lim_{t\to+\infty}F_X(t)$
2. Montrer F_X est continue à droite : pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a $\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}}F_X(t) = F_X(a)$.
3. Montrer que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall a\in\mathbb{R}\quad \mathbb{P}(X=a)=0$.

Solution.

1. On a

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X\le t) = \mathbb{P}_X(]-\infty,t]).$$

   La fonction F_X est croissante car $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité. On a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}F_X(t) &= \lim_{t\to-\infty}\mathbb{P}_X(]-\infty,t])\\ &= \mathbb{P}_X(\varnothing) = 0,\\ \lim_{t\to+\infty}F_X(t) &= \lim_{t\to+\infty}\mathbb{P}_X(]-\infty,t])\\ &= \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1.\end{aligned}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} F_X(t) &= \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \mathbb{P}_X(]-\infty, t]) \\ &= \mathbb{P}_X(]-\infty, a]) \\ &= F_X(a).\end{aligned}$$

   Pour rentrer la limite à droite, on utilise la continuité de la mesure de probabilité. Il est aussi possible d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite décroissante.

   Alors, par la proposition 2.24, on peut ecrire cet intervalle comme une intersection dénombrable d'intervalles ouverts.

   Comme F_X est croissante et bornée, on a bien la limite à gauche.

3. Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$F_X(a) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a]) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a[) = \mathbb{P}(X < a).$$

   Donc $\mathbb{P}(X = a) = 0$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$F_X(a) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a]) = \mathbb{P}_X(]-\infty, a[) = \mathbb{P}(X < a).$$

   Donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

   On peut en retenir que F_X est continue ssi il n'y a pas de masses de Dirac dans la loi de X.

Remarque. La mesure de Lebesgue est invariante par translation. Réciproquement, cela permet de la caractériser.

Exercice 2.13 Invariance par translation de la mesure de Lebesgue. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$.

1. Montrer que $A + a \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
2. pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on note $\mu(A) = \lambda_1(A + a)$, où λ_1 est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'application μ ainsi définie est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
3. Déduire de ce qui précède que la mesure de Lebesgue est invariante par translation : pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda_1(A + a) = \lambda_1(A)$.

Solution.

1. Montrons que la famille des boréliens est stable par translation. Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On pose

$$\begin{aligned}\tau_a \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x + a\end{aligned}$$

   Alors, on a

$$\tau_a(A) = A + a = \tau_{-a}^{-1}(A).$$

   Enfin,

$$\tau_a^{-1}(A + a) = A$$

   Si A est borélien, alors $A + a$ est borélien. Réciproquement, si $A + a$ est borélien, alors A est borélien. Donc la famille des boréliens est stable par translation.

2. Montrons que μ est une mesure. On utilise τ_{-a} pour montrer que μ est une mesure.

   On a alors

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ \mu(A) = (\tau_{-a})_* \lambda_1(A) = \lambda_1(A + a).$$

   Donc μ est une mesure.

3. Il suffit de montrer que μ et λ_1 coïncident sur les intervalles. Soit $I =]c, d[$ un intervalle.

On a
$$\begin{aligned}\mu(I) &= \mu(]c,d[)\\ &= \lambda_1(]c,d[+a)\\ &= \lambda_1(]c+a,d+a[)\\ &= d+a-(c+a)\\ &= d-c\\ &= \lambda_1(]c,d[)\\ &= \lambda_1(I).\end{aligned}$$
Alors μ et λ_1 coïncident sur les intervalles.
Comme λ_1 est invariante par translation, on a $\mu = \lambda_1$.

Exercice 2.14 Caractérisation de la mesure de Lebesgue. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on note $I + a = \{x + a \mid x \in I\}$.
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\mu([0,1[) = 1$;
- Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mu(I + a) = \mu(I)$.

Le but est de montrer que μ est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *On dit que la mesure μ est diffuse.*
2. Montrer que $\mu([0,x[) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On pourra commencer par le montrer pour tout rationnel $x \in \mathbb{Q}_+^*$.*
3. En déduire que $\mu = \lambda_1$.

Solution.

1. On a $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[$. Donc $\mu(\{0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[\right) = 0$. Donc $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (à détailler).
   On écrira, pour $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right[$,
   $$\mu(\{0\}) = \mu\left(\bigcap_n^\infty I_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(I_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
   Comme on a $\forall x \in \mathbb{R}$
   $$\mu(\{x\}) = \mu(\{0\} + x) = \mu(\{0\}) = 0,$$
   on en déduit que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{k}{n}$. On écrit alors
   $$\begin{aligned}\mu([0,x[) &= \mu\left(\left[0, \frac{k}{n}\right[\right)\\ &= \mu\left(\bigsqcup_{i=0}^{n-1} \left[0, \frac{1}{n}\right[+ \frac{i}{n}\right)\\ &= \frac{k}{n}.\end{aligned}$$
   On a montré que $\mu([0,x[) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^*$.
   On prend maintenant $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{Q}_+^*$ telle que $x_n \to x$.

Alors

$$\begin{aligned}
\mu([0,x[) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}[0,x_n[\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\mu([0,x_n[)\\
&= \lim_{n\to\infty}x_n\\
&= x.
\end{aligned}$$

Dans le cas pratique, cette suite correspond aux troncatures du développement décimal de x.

On a montré que $\mu([0,x[) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3. On conclut avec l'invariance par translation :

   Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

   - Si $a = b$, voir question 1.
   - Si $a < b$, $\mu(]a,b[) = \mu(]0,b-a[) = b-a$.
   - Si $a > b$, $\mu(]a,b[) = \mu(]b,a[) = a-b$.

   On a montré que μ coïncide avec l'unique mesure qui satisfait les deux propriétés initiales. Donc $\mu = \lambda_1$.

2.1 Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 2.15. Soit $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ et soit $\mathscr{C} = \big\{\{1\},\{2,4\},\{2,5\}\big\} \subset \mathscr{P}(X)$. Déterminer $\sigma(\mathscr{C})$.

Exercice 2.16 Tribu image réciproque. Soit X un ensemble, $(Y,\mathscr{B})$ un espace mesuré, et $f : X \to Y$ un application. On note

$$f^{-1}(\mathscr{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}\}.$$

1. Montrer que $f^{-1}(\mathscr{B})$ est une tribu sur X.
2. On suppose que $\mathscr{A}$ est une tribu sur X. Montrer que f est $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-mesurable si et seulement si $f^*(\mathscr{B}) \subset \mathscr{A}$.

Exercice 2.17. Soit λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, δ_0 la mesure de Dirac en 0, et $\mu = \lambda_1 + \delta_0$.

1. Calculer $\mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n)$, où $A_n = \left[0,\frac{1}{n}\right[$;
2. Calculer $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n)$, où $A_n = \left[\frac{1}{n},1\right[$;
3. Calculer $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n)$, où $A_n = \left[-\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right[$;
4. Calculer $\mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n)$, où $A_n = \left[-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$.

Exercice 2.18. Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\lambda_n(A) = 0$. Montrer que A est d'intérieur vide.

Exercice 2.19 Extrait d'un sujet d'examen.. Soit $(X,\mathscr{A})$ un espace mesurable, où $\mathscr{A}$ est une tribu qui contient les singletons. Dans ce qui suit, toutes les mesures considérées sont des mesures sur $(X,\mathscr{A})$.

On dit qu'une mesure μ est *diffuse* si elle vérifie $\forall x \in X \quad \mu(\{x\}) = 0$.

On dit qu'une mesure μ est *discrète* s'il existe une partie dénombrable $D \subset X$ telle que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer qu'une mesure μ est diffuse si et seulement si, pour toute partie dénombrable $A \subset X$ on a $\mu(A) = 0$.
2. Soit μ une mesure discrète, et soit $D \subset X$ dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$. Montrer qu'il existe des réels positifs $(\alpha_a)_{a\in D}$ tels que $\mu = \sum_{a\in D}\alpha_a\delta_a$.

3. Soit μ une mesure finie, et soit $D = \{x \in X \mid \mu(\{x\}) > 0\}$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $E_n = \{x \in X \mid \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\}$. Montrer que E_n est une partie finie de X pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que D est dénombrable.
   (b) Pour tout $A \in \mathscr{A}$ on note $\nu(A) = \mu(A \cap D^c)$. Montrer que ν est une mesure diffuse.
   (c) Montrer que μ est la somme d'une mesure diffuse et d'une mesure discrète.
4. Montrer que le résultat de la question 3. (c) est encore vrai si la mesure μ est σ-finie.

Exercice 2.20 Un exemple de partie non mesurable. On considère la relation d'équivalence sur $[0,1]$ définie par

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

On peut donc écrire $[0,1]$ comme l'union disjointe de ses classes d'équivalences : $[0,1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$.

Pour tout $i \in I$ on se donne un élément $x_i \in C_i$ et on considère $A = \{x_i \mid i \in I\}$. Par ailleurs, pour tout $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, on note $A_q = A + q$.

1. Montrer que $A_q \cap A_r = \varnothing$ si $q \neq r$.
2. Montrer que $[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_q \subset [-1,2]$.
3. En supposant que A est borélien, exprimer $\lambda_1(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_q)$ en fonction de $\lambda_1(A)$. Conclure.

TD3

Intégrale par rapport à une mesure

Exercice 3.1. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les affirmations suivantes :

1. Si $f = a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathscr{A}$, alors $\int_X f\, d\mu = a\mu(A) + b\mu(B)$.
2. Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable et $\mu\left(f^{-1}(\{+\infty\})\right) = 0$, alors $\int_X f\, d\mu < +\infty$.
3. Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On a
$$\int_X f\, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

Solution.

1. FAUX en général (prendre $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$ pour la mesure de Lebesgue).
2. FAUX en général (prendre une constante pour la mesure de Lebesgue).
3. FAUX en général (prendre une fonction impaire pour la mesure de Lebesgue).

Exercice 3.2. Mesures à densité. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on note

$$\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A \varphi\, d\mu.$$

La fonction φ est appelée la **fonction densité**.

1. Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$.
2. Donner des exemples de mesures à densité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ et sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \chi)$.
3. On souhaite déterminer quelle est l'intégrale d'une fonction pour la mesure ν.
   (a) Pour toute fonction mesurable positive $f : X \to [0, +\infty]$, montrer qu'on a
   $$\int_X f\, d\nu = \int_X f\varphi\, d\mu.$$
   Aide : on commencera par le montrer pour les fonctions étagées positives.
   (b) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1(X, \nu)$ si et seulement si $f\varphi \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$. Lorsque c'est le cas, montrer que
   $$\int_X f\, d\nu = \int_X f\varphi\, d\mu.$$

Solution.

1. Soit A_n une suite d'éléments de $\mathscr{A}$. On a
$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= \int_X \mathbb{1}_{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \varphi\, d\mu \\
&= \int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right) \varphi\, d\mu \\
&= \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi \mathbb{1}_{A_n})\, d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X (\varphi \mathbb{1}_{A_n})\, d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n).
\end{aligned}$$
On en déduit que ν est une mesure.

2. Beaucoup de solutions, par exemple celles de probabilités.
3.
   (a) Soit $f\colon X \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable.
      - Si f est une fonction étagée, alors

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et $A_i \in \mathscr{A}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\nu &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}\,d\nu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i}\varphi\,d\mu \\ &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}\varphi\,d\mu \quad \text{(somme finie)} \\ &= \int_X f\varphi\,d\mu.\end{aligned}$$

      - Si f est une fonction mesurable positive, alors il existe une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f. On a alors

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\nu &= \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\nu \\ &\overset{TCM}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\nu \\ &\overset{(a)}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\varphi\,d\mu \\ &\overset{TCM}{=} \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\varphi\,d\mu \\ &= \int_X f\varphi\,d\mu.\end{aligned}$$

   On a donc montré que pour toute fonction mesurable positive $f\colon X \to [0,+\infty]$,

$$\int_X f\,d\nu = \int_X f\varphi\,d\mu.$$

   (b) Soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
   On a $f \in \mathscr{L}^1(X,\nu)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}\int_X |f|\,d\nu < +\infty &\iff \int_X |f|\varphi\,d\mu < +\infty \\ &\iff \int_X |f\varphi|\,d\mu < +\infty \\ &\iff f\varphi \in \mathscr{L}^1(X,\mu).\end{aligned}$$

   On a donc montré que $f \in \mathscr{L}^1(X,\nu)$ si et seulement si $f\varphi \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$.

On pose $f = f_+ - f_-$ avec $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_X f\, d\nu &= \int_X f_+ - f_-\, d\nu \\
&= \underbrace{\int_X f_+\, d\nu}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\int_X f_-\, d\nu}_{\in \mathbb{R}} \\
&= \int_X f_+ \varphi\, d\mu - \int_X f_- \varphi\, d\mu \\
&= \int_X (f_+\varphi - f_-\varphi)\, d\mu \\
&= \int_X f\varphi\, d\mu.
\end{aligned}$$

Théorèmes limites

Exercice 3.3. Soit $X, \mathscr{A}, \mu$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On note $A = f^{-1}([0,1])$, $B = f^{-1}(\{1\})$ et $C = f^{-1}(]1, +\infty[)$.

1. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B\cup C} f^n\, d\mu.$$
2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_A f^n\, d\mu$ converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si
$$\frac{\mathbb{1}_A}{1-f} \in \mathscr{L}^1(X).$$
3. On suppose que $f \in \mathscr{L}^1(X)$, déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A\sqcup B} f^n\, d\mu.$$

Solution.

1. On a
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{B\cup C} f^n\, d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_B f^n\, d\mu + \int_C f^n\, d\mu \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_B f^n\, d\mu + \lim_{n\to+\infty} \int_C f^n\, d\mu \\
&= \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_B f^n\, d\mu}_{(1)} + \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_C f^n\, d\mu}_{(2)}
\end{aligned}$$

   On procède pour chacun des termes.

   - Pour le premier terme, on a
   $$(1) = \lim_{n\to+\infty} \int_B f^n\, d\mu = \mu(B)$$
   - Pour le second terme, on fait une disjonction de cas.
     - Si $\mu(C) = 0$, alors $(2) = 0$ car $f \leq 1$ μ-p.p.
     - Si $\mu(C) > 0$, alors on a
     $$\int_C f^n\, d\mu = \int_X \mathbb{1}_C f^n\, d\mu.$$
     On pose alors $g_n(x) = f^n(x)\mathbb{1}_C(x)$ une suite croissante de fonctions mesurables car C est l'image réciproque par f, qui est mesurable. On peut alors appliquer

le théorème de convergence monotone pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_C f^n\,d\mu = \int_C \limsup_{n\to+\infty} f^n\,d\mu$$

Comme le contenu de l'intégrale vaut $+\infty \times \mathbb{1}_C$, on a l'intégrale qui vaut $+\infty$.

En résumé, on a

$$(1)+(2) = \begin{cases} \mu(B) & \text{si } \mu(C) = 0 \\ +\infty & \text{si } \mu(C) > 0 \end{cases}$$

2. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_A f^n\,d\mu \text{ converge}$$

si et seulement si

$$\int_A \sum_{n\in\mathbb{N}} f^n\,d\mu < +\infty$$

si et seulement si

$$\int_A \frac{1}{1-f}\,d\mu < +\infty \text{ car } f^n \text{ est une suite géométrique}$$

si et seulement si

$$\int_X \frac{\mathbb{1}_A}{1-f}\,d\mu < +\infty$$

si et seulement si

$$\frac{\mathbb{1}_A}{1-f} \in \mathscr{L}^1(X).$$

3. On a déjà

$$\int_{A\sqcup B} f^n\,d\mu = \underbrace{\int_A f^n\,d\mu}_{(1)} + \underbrace{\int_B f^n\,d\mu}_{(2)}$$

et on a déjà montré au point précédent que

$$(2) = \mu(B)$$

Pour (1), on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f^n \mathbb{1}_A\,d\mu.$$

On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f^n \mathbb{1}_A| \leq f \in \mathscr{L}^1(X)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f^n \mathbb{1}_A = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f^n \mathbb{1}_A\,d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f^n \mathbb{1}_A\,d\mu = \int_X 0\,d\mu = 0.$$

On en déduit que

$$(1) = 0.$$

Finalement, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A\sqcup B} f^n\,d\mu = 0 + \mu(B) = \mu(B).$$

Exercice 3.4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x)\, d\lambda_1(x).$$

Solution. On voit tout de suite que le théorème de convergence dominée convient parfaitement. Alors

$$|f(x)\cos^n(\pi x)| \leq \underbrace{|f(x)|}_{\in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \cos^n(\pi x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

et comme $\lambda_1(\mathbb{Z}) = 0$, on a

$$\cos^n(\pi x) \underset{n\to+\infty}{\overset{CS}{\to}} 0 \quad \lambda_1\text{-p.p.}$$

Alors d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos^n(\pi x)\, d\lambda_1(x) = 0.$$

Exercice 3.5. Soit f une fonction intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \lambda_1)$.

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[x,+\infty[} f\, d\lambda_1(x) = 0.$$
2. On suppose que f est décroissante. En déduire que f est positive et montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \leq \frac{C}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
3. Montrer que le résultat est faux si on suppose seulement que f est positive

Solution.

1. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers $+\infty$ et on pose $f_n = \mathbb{1}_{[x_n,+\infty[} f$.
   ▷ On a la limite des f_n qui vaut $\mathbb{1}_{\varnothing} f = 0$
   ▷ Les f_n sont majorées par $|f|$ qui est intégrable.
   On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[x_n,+\infty[} f\, d\lambda_1(x) = 0.$$
2. On suppose que f est décroissante. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) = \eta \leq 0$. Alors pour tout $x \geq x_0$,
$$f(x) \leq \eta$$
   et
$$|f(x)| = -f(x) \geq -\eta > 0$$
   alors
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} |f|\, d\lambda_1 &\geq \int_{[x_0,+\infty[} |f(x)|\, d\lambda_1(x)\\ &\geq \int_{[x_0,+\infty[} -\eta\, d\lambda_1(x)\\ &= -\eta\lambda_1([x_0,+\infty[)\\ &= +\infty\end{aligned}$$
   Comme f est intégrable, on a forcément $f \geq 0$.

On pose maintenant $x = \lambda_1([0,x]) = \int_{[0,x]} 1\, d\lambda_1$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\mathbb{1}_{[0,x[}\, d\lambda_1 &\geq \int f(x)\mathbb{1}_{[0,x[}\, d\lambda_1 \\ &\geq f(x)\int \mathbb{1}_{[0,x[}\, d\lambda_1 \\ &\geq f(x)x\end{aligned}$$

Enfin on a

$$\frac{\overbrace{\int_{\mathbb{R}_+} f\, d\lambda_1}^{\in\mathbb{R}}}{x} \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

3. Il suffit de considérer des fonctions type bosse qui se déplacent, par exemple

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]}$$

Exercice 3.6. On considère $[-1,1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1. Pour tout $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f_n(t) = n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]}(t).$$

1. Calculer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la limite de la suite $\left(\int_{[-1,1]} f_n\, d\lambda_1\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de convergence monotone et de convergence dominée.
2. Soit $\varphi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,1]} f_n\varphi\, d\lambda_1(t) = \varphi(0).$$

Solution.

1. On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Alors la suite converge simplement vers $+\infty \times \mathbb{1}_{\{0\}}$.
On a

$$\int_{[-1,1]} f_n\, d\lambda_1 = n\lambda_1\left(\left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]\right) = 1 \neq 0 = \int_{[-1,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\lambda_1$$

Donc on voit bien que la suite converge vers 0 mais l'intégrale reste toujours distante de 0 de 1 (il faut comprendre la suite des f_n comme une suite de mesures et observer leur densité).
Ici, le théorème de convergence dominée ne s'applique pas. Le meilleur majorant des f_n qui est uniforme est $+\infty$ qui n'est pas $\mathscr{L}^1$.
Le théorème de convergence monotone ne s'applique pas car les f_n ne sont pas croissantes.
2. Soit $\varphi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,1]} f_n\varphi\, d\lambda_1(t) = \varphi(0).$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{[-1,1]} f_n\varphi\,d\lambda_1(t) &= n\int_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}\varphi(t)\,d\lambda_1(t)\\ &= n\int_{[-\frac{1}{2n}],\frac{1}{2n}}(\varphi(t)-\varphi(0))+\varphi(0)\,d\lambda_1(t)\\ &= n\int_{[-\frac{1}{2n}],\frac{1}{2n}}(\varphi(t)-\varphi(0))\,d\lambda_1(t)+n\int_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}\varphi(0)\,d\lambda_1(t) \qquad (1)\\ &= \underbrace{n\int_{[-\frac{1}{2n}],\frac{1}{2n}}(\varphi(t)-\varphi(0))\,d\lambda_1(t)}_{(*)}+\varphi(0)\end{aligned}$$

Il s'agit alors de montrer que $(*)$ tend vers 0.
Or, φ est continue sur un fermé borné et donc est bornée. On a alors

$$\begin{aligned}(1) &\leq n\int_{[-\frac{1}{2n}],\frac{1}{2n}}\sup_{t\in[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}|\varphi(t)-\varphi(0)|\,d\lambda_1(t)\\ &\leq \sup_{t\in[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}|\varphi(t)-\varphi(0)|\\ &= 0\end{aligned}$$

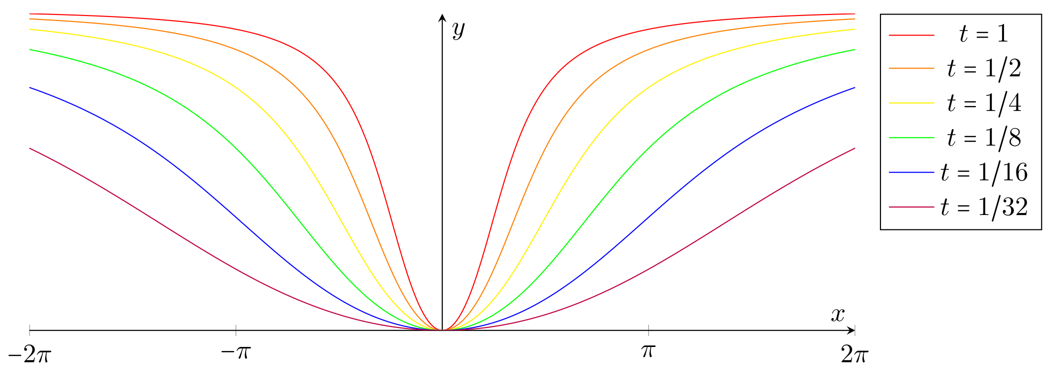
car φ est continue. En résumé, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[-1,1]} f_n\varphi\,d\lambda_1(t)=\varphi(0).$$

On peut voir ça comme une formalisation de la convergence de φ sur δ_0.

Exercice 3.7. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $t\geq 0$, on note

$$F(t)=\int_{\mathbb{R}}\arctan(x^2t)\,d\mu(x).$$



1. Montrer que F est bien définie et déterminer $\lim_{t\to+\infty}F(t)$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer F' sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre. (Indication : montrer que F est dérivable sur tout intervalle de la forme $]a,+\infty[$ avec $a>0$.)
4. Donner une condition suffisante pour que la fonction F soit dérivable en 0. Que vaut alors $F'(0)$?

Solution.

1. On remarque que la mesure est finie et donc les fonctions constantes sont intégrables. On

a alors
$$\left|\arctan(x^2t)\right| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall t \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
et alors
$$|F(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\arctan(x^2t)\right| d\mu(x) \leq \frac{\pi}{2}\mu(\mathbb{R}) = C \in \mathbb{R}$$
et donc F est bien définie.

On considère $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui converge vers $+\infty$. On regarde alors la limite de $F(t_n)$ et on utilise le théorème de convergence dominée.

On vérifie les hypothèses en remarquant que la limite simple vaut $\frac{\pi}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$.

Pour la domination on a déjà trouvé la fonction constante $\frac{\pi}{2}$ qui majore les $F(t_n)$ et qui est intégrable.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir
$$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi}{2}\, d\mu(x) = \frac{\pi}{2}\mu(\mathbb{R}^*).$$

2. Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et puis sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, on a
   $$\left|\arctan(x^2t)\right| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$
   à x fixé,
   $$t \mapsto \arctan(x^2t)$$
   est C^∞ et donc continue.
   Pour l'argument de domination, on a la majoration et par le théorème de continuité sous le signe intégrale, on a F continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Enfin, pour $t = 0$, on regarde la limite à droite. ▷ Le même argument de domination nous donne que
   $$\lim_{n\to+\infty} \arctan xt_n = \arctan(0) = 0$$
   et donc
   $$F(0) = \int 0 = 0$$
   et donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $a > 0$. On prend $t \in \,]a, +\infty[$ et on étudie la dérivabilité de F en a.
   ▷ Si $t \geq a$ fixé, on a
   $$x \mapsto \arctan(x^2t) \leq \frac{\pi}{2} \in \mathscr{L}^1(\mu)$$
   ▷ Si $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a
   $$t \mapsto \arctan(x^2t)$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
   ▷ On peut donc appliquer la domination :
   $$\left|\frac{\partial}{\partial t}\arctan(x^2t)\right| = \left|x^2\frac{1}{1+x^4t^2}\right| \leq M \in \mathbb{R}$$
   On voit tout de suite l'importance de $t > a$. Si $t = 0$, on devrait majorer x^2, ce qui est absurde.
   Or
   $$M = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^2\frac{1}{1+x^4a^2}\right| < +\infty$$
   car c'est une fonction continue qui s'annule en $+\infty$ et qui tend vers 0 en 0.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour obtenir que F est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1 + x^4 t^2} \, d\mu(x) \tag{2}$$

Comme (2) est vérifiée pour tout $t \in]a, +\infty[$ avec $a > 0$, on en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Si on suppose que $\int x^2 \, d\mu(x) < +\infty$, alors $F'(0)$ est bien définie et vaut

$$F'(0) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu(x)$$

Exercice 3.8. A remplir

Exercice 3.9. Montrer qu'il existe une partie mesurable $A \in \mathscr{A}$ telle que $f = \mathbb{1}_A$ presque partout.

Solution. Rapide à faire, on fait passer f de l'autre coté, on factorise et on utilise que f vaut 0 ou 1 presque partout, soit par image reciproque, f vaut $\mathbb{1}_A$ presque partout.

TD4

Exercice 4.1. exo 6.

Solution.

1. Rapide à faire. On veut appliquer TCD donc on vérifie les hypothèses :
   - On a une convergence simple de la fraaction vers $\frac{1}{k^2}$
   - On a domination de la valeur absolue par $\frac{1}{k^2}$ qui est sommable.

   On applique alors le théorème de convergence dominée pour conclure.
2. On verifie encore les hypothèses :
   - On a une convergence simple de la fraction vers 0.
   - On a domination de la valeur absolue par $\frac{1}{k^2}$ qui est

   On applique alors le théorème de convergence dominée pour conclure.

Exercice 4.2. exo 9.

Solution.