UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HAX502X **Année 2023-2024**
Calcul différentiel et équations différentielles

Travaux Dirigés

1 Équations différentielles et Cauchy-Lipschitz

Exercice 1. La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m}$$

où m, F, R sont des constantes. Calculer v.

Exercice 2. Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $x' - 2x = e^{2t}t^2$ avec $x(0) = 0$.
2. $x' - \frac{1}{1+t}x = 2t^2$ avec $x(0) = -3$.
3. $x' - (1+t)x = -2t - t^2$ avec $x(0) = 2$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes en en donnant toutes les solutions maximales :

1. $x' + x = \sin t$,
2. $x' = 3t^2 - \frac{x}{t}$.

Exercice 4. On considère le système linéaire d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} x' & = & -5x & +8y & -4 \\ y' & = & -4x & +7y & +3 \end{array} \right. \tag{1}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

1. Trouver les vecteur propres et valeurs propres de la matrice
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$
2. Expliquer pourquoi résoudre (1) revient à résoudre le système
$$\left\{ \begin{array}{rcrr} a' & = & 3a & +10 \\ b' & = & -b & -7 \end{array} \right. \tag{2}$$
avec les conditions initiales $a(0) = 2$ et $b(0) = -1$. *(il est possible que vous n'obteniez pas exactement le même système, ce qui n'est pas grave du moment que vos calculs sont corrects et que vous arrivez à un système découplé).*
3. Trouver la solution de (2), puis celle de (1).

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt.$$

1. Montrer que φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ comme une intégrale à paramètre.
3. En intégrant par parties l'expression de $\varphi'(x)$, trouver un problème de Cauchy linéaire vérifié par φ.
4. Calculer $\varphi(x)$.

Exercice 6. Calculer la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre sur un intervalle à préciser

$$\begin{cases} xx' = \frac{1}{2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 8. On considère le *modèle de Gompertz*, utilisé en dynamique des populations, dans lequel l'évolution de la population $N(t)$ considérée est décrite par l'équation

$$N'(t) = rN(t) \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right),$$

où r et $K > 0$ sont des constantes données. Donner une expression de la population en fonction de la population initiale $N(0) = N_0 > 0$. Que se passe-t-il quand $t \to \infty$?

Exercice 9. Trouver la solution maximale des problèmes suivants

$$\begin{cases} x' = 3t^2x^2 \\ x(1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 3t^2x^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 10. Déterminer le domaine de définition des solutions maximales de l'équation $x' = x^2$.

Exercice 11. Déterminer les solutions maximales de l'*équation logistique* $x' = x(1-x)$ avec condition initiale $x(0) = x_0$. Sont-elles globales ? (On pourra faire une disjonction de cas selon la valeur de x_0.)

Exercice 12. Montrer que, pour tout $\alpha \geq 0$, la fonction

$$x_\alpha(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t < \alpha \\ (t-\alpha)^2 & \text{si } t \geq \alpha, \end{cases}$$

est solution globale d'un même problème de Cauchy. Pourquoi n'est ce pas en contradiction avec le Théorème de Cauchy-Lipschitz ?

2 Équations différentielles linéaires

Exercice 13. Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' &= 6x_1 - x_2 \\ x_3' &= -x_1 - 2x_2 - x_3. \end{cases}$$

Exercice 15. Résoudre les équations différentielles $X' = \mathcal{A}X$ pour les matrices $\mathcal{A}$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 (EDO linéaires à coefficients non constants en dimension 2)**.** On considère la matrice $\mathcal{A}(t)$, dépendant de la variable $t \in \mathbb{R}$ et donnée par

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B(t) = \int_0^t \mathcal{A}(s)ds$ puis $e^{B(t)}$.
2. Comparer $B'(t)e^{B(t)}$ et $(e^{B(t)})'$.
3. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ au problème de Cauchy
$$X' = \mathcal{A}(t)X, \quad X(0) = X_0.$$
4. A-t-on $\gamma(t) = e^{B(t)}X_0$? Comparer avec le cas des EDO linéaires en dimension 1.

Exercice 17. Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $x'' - 2x' - 3x = \cos t$ avec la condition initiale $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.
2. $x'' - 3x' + x = t$ avec la condition initiale $x(0) = 10$ et $x'(0) = -10$.

Exercice 18. La vitesse u d'un liquide à l'intérieur d'un capillaire dépend de la distance r à l'axe de ce capillaire suivant la formule

$$r\,\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = -kr$$

où k est une constante. Calculer $u(r)$ en fonction de r.

Exercice 19. On considère l'équation différentielle (sur $]0,+\infty[$)

$$t^2x'' + tx' - x = \frac{1}{t}.$$

En utilisant le changement de variable $t = e^u$, trouver la solution satisfaisant $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

Exercice 20. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ soient bornées.

Exercice 21. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 22. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x.$$

3 Études qualitatives

Exercice 23. Soit f une fonction continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et localement lipschitzienne par rapport à X. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

On suppose que f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^n$. Montrer alors que la solution maximale est globale, cad définie sur I tout entier (raisonner par l'absurde, utiliser la formulation intégrale, et conclure grâce au théorème d'explosion en temps fini).

Exercice 24. Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t^2+1} e^{-x^2 \sin^2 t} \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale, puis que celle ci est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (utiliser l'Exercice 23). Montrer que, lorsque $t \to +\infty$, $x(t)$ tend vers un réel l, et que $1 \leq l \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 25. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' & = & x(x-\theta)(1-x) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

où $0 < \theta < 1$ est fixé, et $0 \leq x_0 \leq 1$. Montrer que la solution du problème de Cauchy est globale, et déterminer son comportement quand $t \to \pm\infty$ suivant la valeur de x_0.

Exercice 26. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' & = & x(1-x^\alpha) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

où $\alpha > 1$ est fixé, et $0 \leq x_0 \leq 1$. Montrer que la solution du problème de Cauchy est globale, et déterminer son comportement quand $t \to \pm\infty$.

Exercice 27. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale x.
2. Montrer que x est une fonction impaire et de classe C^∞.
3. Etudier la monotonie et la convexité de x.
4. On suppose x définie sur $[0, +\infty[$. Montrer que $\frac{x'(t)}{1+x^2(t)} \geq 1$ pour tout $t \geq 1$. Montrer, en intégrant, que c'est impossible. En déduire que x est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variation de x.

Exercice 28. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \cos(tx) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale x.
2. En observant que
$$x(t) = x_0 + \int_0^t \cos(sx(s))ds$$
montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

Exercice 29. On prend $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on suppose que $\frac{1}{f} \in L^1(\mathbb{R})$, cad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(u)} du < +\infty.$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ donné montrer que la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

est définie sur $]-T_{min}, T_{max}[$ avec T_{min} et T_{max} deux réels positifs à préciser (en fonction de la non linéarité f et de la donnée initiale x_0).

Exercice 30 (Variation sur les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (la première variable représente le temps, mais U n'est pas nécessairement le produit d'un intervalle par un ouvert) et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe localement Lipschitzienne en espace. Soit $(t_0, x_0) \in U$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tels que
   (a) $\varphi(t_0) = X_0$,
   (b) $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$,
   (c) $\forall t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.
2. Soit J un autre intervalle ouvert contenant t_0 et $\psi : J \to \mathbb{R}^n$, dérivable, vérifiant les trois conditions de la question précédente. Montrer que $\varphi_{|I\cap J} = \psi_{|I\cap J}$ (on pourra considérer t_1, le plus grand $t \geq t_0$ dans $I \cap J$ tel que $\varphi(t) = \psi(t)$ et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz “usuel” au voisinage de ce point).
3. En déduire que le problème de Cauchy possède une unique solution maximale.

Exercice 31. On considère la fonction $(t, x) \mapsto \frac{1}{1+tx}$ définie sur l'ouvert

$$U = \{(t, x), tx \neq -1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. En utilisant l'exercice précédent, montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' & = \frac{1}{1+tx} \\ x(0) & = 0 \end{cases}$$

   possède une solution maximale unique x.
2. Montrer que cette solution x est impaire et croissante.
3. Montrer, en considérant $\int_0^t x'(s)ds$, que x est définie sur $\mathbb{R}$ entier.
4. Justifier l'existence d'une limite $l = \lim_{t\to+\infty} x(t)$, où $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
5. Montrer, en considérant $\int_0^t x'(s)ds$, que $l = +\infty$.

Exercice 32. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad tx' = t + x^2 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

1. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe une unique fonction x définie sur un intervalle $J =]\alpha, \beta[\subset]0, +\infty[$ contenant 1, solution maximale de l'équation différentielle (E) et vérifiant $x(1) = x_1$.
2. Montrer que,

$$\forall t \in [1, \beta[, \quad \frac{x'(t)}{1 + x(t)^2} \geq \frac{1}{t}.$$

   Montrer, en intégrant cette inégalité, que $\beta < +\infty$.
3. Etudier le comportement d'une solution maximale aux bornes de l'intervalle $]\alpha, \beta[$. On distinguera les possibilités $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

4 Différentiabilité et calculs

Exercice 33. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y.$$

1. Soit $u = (a,b)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Calculer, à l'aide de la définition, la dérivée directionnelle $\partial_u f(1,2)$ de f au point $(1,2)$ suivant u.
2. En déduire $df(1,2)$ la différentielle de f en $(1,2)$.
3. En déduire les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Exercice 34. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On se donne une direction unitaire $e = (\cos\theta, \sin\theta)$. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la dérivée directionnelle $\partial_e f(0,0)$ existe et la calculer. Montrer aussi que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 35. Sous certaines hypothèses sur $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on définit le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(a,b) \in U$ par l'équation

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Interpréter le plan tangent en terme de la différentielle de f en (a,b), puis calculer l'équation du plan tangent pour les fonctions f et points (a,b) suivants :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(a,b) = (3,4)$
2. $f(x,y) = x^3 - y^2$, $(a,b) = (2,3)$
3. $f(x,y) = ye^{x/y}$, $(a,b) = (1,1)$

Exercice 36. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle. Soit l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (U,V) &\mapsto {}^tUMV \end{aligned}$$

où les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont écrits en colonne. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est différentiable, et calculer $df(e_1,e_1)(e_2,e_2)$.

Exercice 37. Déterminer la jacobienne en tout point pour les fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\cos(y-x)$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(t) = (\cos t, \sin t, t)$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (xy, e^x \cos y)$.

Exercice 38. Pour une fonction $f = (f_1, \dots, f_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (un champ de vecteur) différentiable, on note $\operatorname{div}(f)$ sa *divergence*, définie par :

$$\operatorname{div}(f)(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x).$$

1. Montrer que si, pour tout x dans U, $f(x) = g(x)y$ avec $g : U \to \mathbb{R}$ différentiable et $y \in \mathbb{R}^n$, alors
$$\operatorname{div}(f) = (\nabla g) \cdot y$$
2. Si $g : U \to \mathbb{R}$ différentiable, montrer que
$$\operatorname{div}(gf) = (\nabla g) \cdot f + g \operatorname{div}(f)$$

Exercice 39. L'équation locale de Maxwell dit qu'un champ magnétique est à divergence nulle. Est-ce que les champs suivants peuvent être des champs magnétiques ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-y, x, x + y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-z, y, x)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 - y^2 - x, y - 2xy)$
4. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

Exercice 40. On donne $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, e^{2t}, t\right).$$

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f devient alors différentiable en 0. Que vaut $df(0)$?

Exercice 41. Pour les quatre fonctions f, g ,h, u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

1. En quels points la fonction est elle continue ?
2. Calculer les dérivées partielles aux points où elles existent.
3. En quels points la fonction admet elle des dérivées directionnelles suivant tout vecteur ?
4. En quels points la fonction est-elle différentiable ?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour u, on pourra considérer la restriction de u à la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 42. On donne $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que f est différentiable en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $df(A)$.

Exercice 43. Soit f une fonction dérivable, et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction de deux variables définie par $u(x,t) = f(x - ct)$ vérifie l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

Exercice 44. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit des fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x,y) = f(y,x), \quad h(x) = f(x,-x).$$

Montrer que g et h sont différentiables, et déterminer leurs différentielles en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 45. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|_2},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne. Montrer que f est différentiable, et déterminer sa différentielle.

Exercice 46 (Fonction convexe)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est convexe si

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall (x,y) \in U^2, \forall \lambda \in [0,1].$$

Montrer que, si f est différentiable sur U, alors elle est convexe si et seulement si elle vérifie $f(y) - f(x) \geq df(x)(y-x)$ pour tout $(x,y) \in U^2$. (Faire des dessins !)

Exercice 47. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une application $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}^p$ est *positivement homogène de degré* λ si

$$g(tx) = t^\lambda g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ tout } t > 0.$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en 0, telle que $f_{|\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ est positivement homogène de degré 1. Montrer que $f(0) = 0$, puis que f est linéaire.
2. Une norme sur $\mathbb{R}^n$, vue comme application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, peut-elle être différentiable à l'origine ?

Exercice 48. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que f est positivement homogène de degré $\lambda > 0$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad df(x)(x) = \lambda f(x).$$

Exercice 49. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit a et b deux points de U tels que le segment $[a,b]$ (rappeler ce que c'est !) est inclus dans U. Montrer l'égalité des accroissements finis :

$$\exists c \in]a,b[, \ f(b) - f(a) = df(c)(b-a).$$

5 Différentielles supérieures

Exercice 50. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = (x^4 + y^2 + z^3, e^x \sin(yz)).$$

Justifier que f est deux fois différentiable, et calculer

$$d^2 f(0,\pi,1)\big((1,2,1),(0,1,0)\big).$$

Exercice 51. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois différentiables sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x,y) = f(x)\cos(g(y))$. Exprimer la matrice hessienne de h en fonction des dérivées successives de f et g.

Exercice 52. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 \sin(y) + y^2 \sin(x).$$

Calculer $d^3 f(x,y)\big(u,v,w\big)$ en fonction de $(x,y), u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 53. On donne $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t,x) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

vérifie l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0,\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 54 (Le Laplacien)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit le "Laplacien de f" par :

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x).$$

On dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$.

1. Relier $\Delta f(x)$ à la matrice hessienne de f.
2. Vérifier que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$.
3. Montrer que, si f est harmonique, alors $\operatorname{div}(f \nabla f) = \|\nabla f\|^2$.

Exercice 55 (Laplacien en polaire)**.** On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On définit $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(r,\theta) = f \circ \varphi(r,\theta).$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, en fonction de celles de f, et montrer que

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta),$$

soit encore $\Delta f(x,y) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)$.

6 IAF et applications

Exercice 56. Trouver les $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

On pourra "passer en polaire".

Exercice 57. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 + 2y^4.$$

Pour cela on pourra, pour un (x_0, y_0) fixé, considérer la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f(tx_0, ty_0).$$

Exercice 58. Trouver les $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On pourra poser $F(u,v) = f(u+v, u-v)$.

Exercice 59. Montrer que les deux fonctions f et g suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Exercice 60. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin(x+y)}{2}, \frac{\cos(x-y)}{2} \right).$$

Montrer que, si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\| \cdot \|_2$, f est λ-contractante. En déduire qu'il existe un unique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

Que se serait-il passé si on avait choisi la norme $\| \cdot \|_\infty$ ou la norme $\| \cdot \|_1$?

Exercice 61 (Longueur d'une courbe)**.** On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\| \cdot \|$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1. Une subdivision σ de $[0,1]$ est la donnée de $k+1$ réels $t_0, t_1, \ldots, t_k$ ($k \geq 1$) tels que

$$t_0 = 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = 1.$$

On écrit $\sigma = (t_0, \ldots, t_k)$. A une telle subdivision est associée une ligne brisée dans $\mathbb{R}^n$, dont la longueur est

$$L(\sigma) := \sum_{i=0}^{k-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

On appelle longueur de γ le nombre $L := \sup L(\sigma)$, où la borne supérieure est prise sur l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[0,1]$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Quelle est la longueur de la courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\gamma(t) = (1-t)x + ty$?
2. Montrer que toute courbe de classe C^1 est de longueur finie. Montrer qu'un segment de droite est le plus court chemin pour aller d'un point de $\mathbb{R}^n$ à un autre.
3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un $r > 0$ tel que,
$$\forall (s,t) \in [0,1]^2, |t-s| \leq r \Longrightarrow \|\gamma(t) - \gamma(s) - (t-s)\gamma'(s)\| \leq \epsilon |t-s|.$$
4. En déduire que $L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$.

Exercice 62. Montrer que si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée de classe C^1 vérifiant $\gamma([0,1]) \subset U$, alors sa longueur $L(\gamma)$ vérifie
$$\|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\| \leq L(\gamma) \sup_{t \in [0,1]} ||| \, df_{\gamma(t)} \, ||| \, .$$

7 Schwarz, Taylor-Young et extrema

Exercice 63. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existent, et les calculer.
2. Les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent-elles ? Qu'observe-t-on ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 64. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les extrema locaux et globaux.

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
3. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
4. $f(x,y,z) = (x+y)e^{x+y-z^2}$ définie sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 65. On donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. On définit maintenant
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$
Faire un dessin. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur C. Les déterminer.

Exercice 66.

1. Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atteint des maxima locaux en deux points distincts, alors elle atteint également un minimum local en au moins un point.
2. Étudier les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = -(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 67.

1. Montrer que si une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en un unique point, alors cet extremum est nécessairement un extremum global.
2. Etudier les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ sur $\mathbb{R}^2$. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 68.

1. Trouver un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable à l'origine, telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0) = 0$, et admettant un minimum local non strict en 0.
2. Même question mais avec, cette fois, un minimum local strict en 0.
3. Même question mais avec, cette fois, pas d'extremum local en 0.

Exercice 69 (Fonctions convexes deux fois différentiables)**.** Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$, la matrice hessienne de f en x est une matrice symétrique réelle positive.

Exercice 70. Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^T Ax + b^T x + c.$$

Montrer que f est convexe si et seulement si A est positive.

Exercice 71. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable sur U. Montrer qu'un point critique de f est nécessairement un minimum global.

Exercice 72 (Droite des moindres carrés)**.** Soit n un entier supérieur ou égal à deux. On considère n points distincts de $\mathbb{R}^2$, notés (x_i, y_i) pour $1 \leq i \leq n$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

1. Montrer que f n'admet qu'un seul point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\hat{b}$ en fonction de $\hat{a}$.
2. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 73 (principe du maximum)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $B = B(0,1)$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, de centre 0 et de rayon 1, pour la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

1. On suppose dans cette question que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in B$. On veut montrer que
$$f(x) < \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$
Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un $x \in B$ pour lequel $f(x) \geq \max_{\|y\|=1} f(y)$.
   (a) Montrer que f admet un maximum local en un point $x_0 \in B$.
   (b) En déduire une contradiction en utilisant la propriété suivante : si une matrice symétrique définit une forme quadratique négative, alors la trace de cette matrice est négative ou nulle.
   (c) Question supplémentaire : démontrer la propriété utilisée dans la question précédente, en utilisant le fait que toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée (autrement dit : pour toute matrice symétrique A, il existe une matrice orthogonale P telle que PAP^{-1} soit diagonale).
2. On suppose maintenant que $\Delta f(x) = 0$ pour tout $x \in B$ (on dit que f est *harmonique* sur B). On veut montrer que
$$\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y), \quad \forall x \in B.$$
   (a) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon\|x\|^2$. Appliquer la question précédente et faire tendre ε vers 0 pour montrer l'inégalité "de droite".
   (b) Comment montrer l'autre inégalité ?

8 Théorèmes d'inversion locale et globale

Exercice 74. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^3 - 2xy^2, x+y)$ est-elle un difféomorphisme local en $a = (1,-1)$? Si oui, écrire la différentielle de son inverse local au point $b = f(a)$?

Exercice 75. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Décrire ω l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image ?
3. Pour tout point a de ω, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$, et trouver un voisinage ouvert U de a tel que $f_{|U}$ soit un difféomorphisme sur son image.

Exercice 76. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $f'(0) \neq 0$.

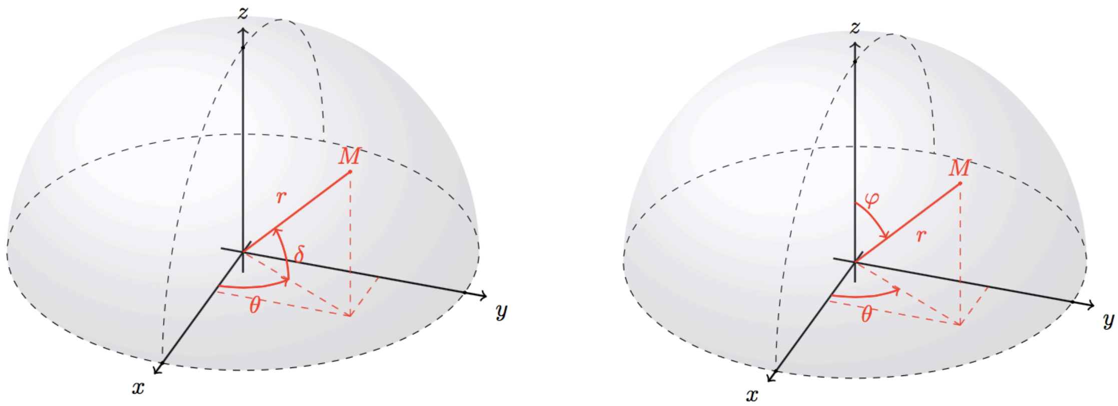

FIGURE 1 – Coordonnées sphériques. A gauche la convention (r, θ, δ) rayon-longitude-latitude comme dans l'Exercice 78. A droite la convention (r, θ, φ) rayon-longitude-colatitude.

2. Si n est un entier non nul, montrer que
$$f'\left(\frac{1}{2n}\right) f'\left(\frac{1}{2n+1}\right) < 0,$$
et en déduire que f n'est injective sur aucun intervalle contenant 0, aussi petit soit-il.
3. Commentaires ?

Exercice 77 (Coordonnées polaires)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par
$$f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta).$$

1. Décrire ω l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Pour tout point a de ω, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$.
3. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image ?
4. Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[\times\{0\})$.

Exercice 78 (Coordonnées sphériques)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(r, \theta, \delta) = (r \cos\theta \cos\delta, r \sin\theta \cos\delta, r \sin\delta).$$

1. Décrire ω l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ autour desquels f est un difféomorphisme local.
2. Pour tout point a de ω, écrire la différentielle de l'inverse local de f au point $f(a)$.
3. Est ce que f restreinte à ω est un difféomorphisme sur son image ?
4. Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})$.

Exercice 79 (Fonction “propre”)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est *propre* si l’image réciproque de tout compact de $\mathbb{R}^p$ par f est compacte dans $\mathbb{R}^n$.

1. Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont elles propres ? $x \mapsto 0$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto x^2$. Quid de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$?
2. Montrer qu’une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue est propre si et seulement si $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$.
3. Si f est propre et continue, montrer que f est *fermée* (i.e. l’image d’un fermé est fermée). On pourra montrer que, si F est fermé dans $\mathbb{R}^p$, alors $f(F)$ est séquentiellement fermé.
4. On suppose que f est injective, propre, de classe C^1, et est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^p$ (en particulier, $n = p$). Montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

Exercice 80. Pour a et b réels, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + a\sin y, y + b\sin x).$$

1. Pour quelles valeurs de (a, b) f est-elle un difféomorphisme local en tout point ?
2. Montrer alors que f est injective.
3. Montrer alors que f est propre (cf Exercice 79).
4. Montrer alors que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 81. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et s’il existe $k > 0$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > k$, alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui même (on pourra, par exemple, montrer que f est propre). Montrer que ce résultat est faux avec $k = 0$.

Exercice 82. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, telle que

$$\|f(y) - f(x)\| \geq k\|y - x\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

pour une certaine constante $k > 0$ (on dit que f est k-dilatante). On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui- même.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que l’image $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple en montrant qu’elle est séquentiellement fermée).
3. Montrer que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et en déduire que l’image $f(\mathbb{R}^n)$ est ouverte dans $\mathbb{R}^n$.
4. Conclure.

Exercice 83.

1. Montrer que l’application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^2$ est de classe C^1, et déterminer sa différentielle en tout point (où faire appel à un TD précédent).
2. Montrer que toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de la matrice identité “admet une racine carrée”.

9 Théorème des fonctions implicites

Exercice 84. Énoncer et démontrer le théorème des fonctions implicites pour les fonctions $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à partir du théorème d'inversion locale.

Exercice 85. Soit C la courbe, de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$x^4 + y^3 - y^2 + x - y = 0.$$

1. Montrer que, au voisinage du point $(0, 0)$, l'ordonnée y d'un point de C est définie implicitement comme une fonction, de classe C^∞, de x. On note φ une telle fonction.
2. Calculer les dérivées première et seconde de φ en 0.
3. Donner l'allure de la courbe C au voisinage du point $(0, 0)$.

Exercice 86. Soit C la courbe, de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation

$$x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0.$$

Vérifier que $a = (1, 1)$ est sur C. Trouver la tangente à C en a. Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en a.

Exercice 87. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 2\cos^2 x + xy - e^y.$$

1. Trouver y_0 tel que $f(0, y_0) = 0$.
2. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0, et un voisinage V de $(0, y_0)$ contenu dans $I \times]0, +\infty[$ tel que, pour tout x dans I, il existe un unique y avec $(x, y) \in V$ et $f(x, y) = 0$. On note $\varphi(x)$ cet y.
3. Montrer que la fonction $x \in I \mapsto \varphi(x) \in]0, +\infty[$ est de classe C^1.
4. Montrer que $\varphi'(0) = \frac{\ln 2}{2}$.
5. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a

$$\varphi'(x)(e^{\varphi(x)} - x) = \varphi(x) - 4\sin x \cos x.$$

Exercice 88 (Un point double)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$x^3 + xy + y^2 e^{x+y} = 0.$$

Montrer qu'il existe deux fonctions distinctes φ_1 et φ_2 de classe C^1 sur un voisinage ouvert I de 0 telles que, pour $i = 1$ et $i = 2$, $f(x, \varphi_i(x)) = 0$ pour tout $x \in I$ (on pourra poser $y = xz$ et "impliciter autour de deux z bien choisis"). Préciser l'allure du graphe de φ_i autour de $(0, 0)$. Vérifier que c'est cohérent avec la Figure 2.

Exercice 89. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

On note C la courbe, de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$.

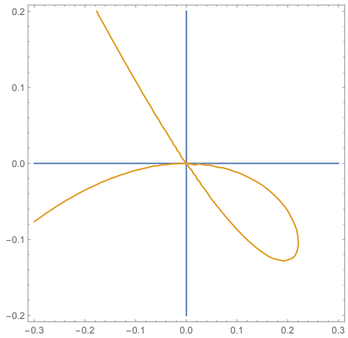

Figure 2 – Le point double de l'Exercice 88.

1. Vérifier que le point $a = (1, 1, 1) \in C$.
2. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 1, une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, et un voisinage V de $(1, 1, 1)$ tels que : $(x, y, z) \in C \cap V$ si et seulement si $(y, z) = \varphi(x)$.
3. Déterminer la tangente à C en a.

Exercice 90. Soit C la courbe, de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \qquad \text{et} \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 36.$$

Montrer que $(1, 2, 3) \in C$. Montrer que, dans un voisinage de ce point, les points de C peuvent s'écrire $(y, z) = \varphi(x)$ où φ est de classe C^1. Préciser la tangente en chaque point.

Exercice 91. Montrer que l'équation $z^3 + 2z + e^z - x - y^2 = \cos(x - y + z)$ définit implicitement z comme fonction C^1 de x et y au voisinage du point $(0, 0, 0)$. Calculer les dérivées partielles de z à l'ordre 2 en 0.

Exercice 92. Montrer que

$$\forall n \geq 0, \exists! u_n \in \mathbb{R}, u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

Montrer que $0 < u_n < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Utiliser le Théorème des fonctions implicites pour obtenir

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + \frac{f}{n^5} + \frac{g}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right), \qquad \text{quand } n \to +\infty,$$

avec des réels a, b, c, d, e, f, g à déterminer.

10 Champs de vecteurs

Exercice 93. Le *modèle SIR* est un modèle épidémiologique simple, où une population constante de T individus est répartie en trois groupes : les S individus sains, les I individus infectés et les R individus rétablis. L'évolution de la répartition dans le temps est régie par le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} S' & = & -\beta IS \\ I' & = & \beta IS - \gamma I \\ R' & = & \gamma I \end{array}\right.$$

où β et γ sont des paramètres strictement positifs. Il suffit d'étudier le système réduit à I et S (le justifier).

1. Déterminer les points d'équilibre.
2. Déterminer explicitement les trajectoires lorsque $S = 0$.
3. Déterminer, pour une donnée initiale $(S_0, I_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, le comportement qualitatif de la trajectoire.

Exercice 94. Le *tourbillon de Rankine* est un modèle mathématique simple de tourbillon dans lequel le champ de vitesse $v = (x', y')$ d'un fluide est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y/(x^2+y^2) \\ y' & = & x/(x^2+y^2) \end{array}\right.$$

pour $x^2 + y^2 \geq 1$, et

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y \\ y' & = & x \end{array}\right.$$

pour $x^2 + y^2 \leq 1$.

1. Montrer que le système vérifie les hypothèses du Théorème de Cauchy-Lipschitz.
2. Dériver $x(t)^2 + y(t)^2$ pour $(x(t), y(t))$ solution du système. En déduire que toutes les solutions maximales au système sont globales.
3. Utiliser des coordonnées polaires pour résoudre le système. Quelles sont les orbites ?

Exercice 95. Soit A une matrice 3×3 réelle telle que $\det(A) = 0$. Montrer que toute solution de l'équation $x' = Ax$ est contenue dans un plan affine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 96. On considère le système différentiel proies-prédateurs

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax - cxy \\ y' & = & -by + dxy \end{array}\right.$$

dans l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, où a, b, c et d sont des réels strictement positifs.

1. Quels sont les solutions constantes au système ?

2. Trouver une fonction $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme $I(x, y) = f(x) + g(y)$ telle que pour toute solution $t \mapsto (x(t), y(t))$ au système, $I(x(t), y(t))$ est constante.
3. En déduire que les solutions maximales sont globales (sinon, essayer avec une autre fonction I qui répond à la question précédente).
4. ** Montrer que les solutions maximales sont périodiques.

Exercice 97. On considère l'équation différentielle du second ordre (dite du pendule simple)

$$x'' = -k \sin x$$

avec $k > 0$.

1. Transformer cette équation en une équation différentielle du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$.
2. Quels sont les solutions constantes ?
3. Trouver une fonction $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour toute solution $x(t)$ à l'équation du pendule, $I(x(t), x'(t))$ est constante. (On cherchera I de la forme $f(x)+g(x')$).
4. En déduire que les solutions maximales sont globales.
5. ** Déterminer sous quelles conditions initiales les solutions maximales sont périodiques, déterminer leur période et tracer les courbes $(x(t), x'(t))$ données par les solutions.

Exercice 98. On considère l'équation du pendule avec frottement

$$x'' = -k \sin x - ax'$$

avec $a > 0$ et $k > 0$.

1. Transformer cette équation en une équation différentielle autonome du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$.
2. ** Trouver une fonction de Lyapunov pour le champ de vecteur associé (en s'inspirant de l'exo précédent).
3. En déduire que le champ est complet, et trouver les points d'équilibres asymptotiquement stables.

Exercice 99. Caractériser les matrices A pour lesquelles l'origine est un point d'équilibre stable (resp. asymptotiquement stable) du champ de vecteur $F : x \mapsto Ax$.

Exercice 100. Soit A une matrice dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives. Montrer que la fonction

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}\|^2 dt$$

est une fonction de Lyapunov pour le champ de vecteur $x \mapsto Ax$.