

# Topologie des espaces métriques — Cours

Ivan Lejeune

31 janvier 2025

## Table des matières

Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique) . . . . .	2
1    Espaces métriques . . . . .	2
2    Ouverts d'un espace métrique. . . . .	3
3    Constructions de topologies . . . . .	5
3.1    Topologie induite . . . . .	5

# Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique)

## 1 Espaces métriques

Soit  $X$  un ensemble.

**Définition 1.1.** On appelle une **distance** (ou *métrique*) sur  $X$  une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x, y, z \in X$ ,

(i) la distance est *positive* :

$$d(x, y) \geq 0$$

(ii) la distance possède la *séparation* :

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

(iii) la distance est *symétrique* :

$$d(x, y) = d(y, x)$$

(iv) la distance vérifie l'*inégalité triangulaire* :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

**Exemple.** Un exemple classique de distance est la **distance euclidienne** sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

**Définition 1.2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **norme** sur  $E$  une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

(i) la norme possède la *séparation* :

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(ii) la norme est *homogène* :

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

(iii) la norme vérifie l'*inégalité triangulaire* :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**Exercice \*.**

Montrer que si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ , alors la fonction

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur  $E$ .

**Exemple.** Un exemple classique est  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .

**Exercice \*.**

Soit  $X$  et  $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $\delta$  est une distance sur  $X$  appelée **distance discrète**.

**Remarque.** Si on considère  $\mathbb{R}$  muni de  $\delta$  alors  $\delta$  n'est pas une norme.

## 2 Ouverts d'un espace métrique

Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

**Définition 2.1.** Pour  $\varepsilon > 0$  et  $x_0 \in X$ , on note

$$B(x_0, \varepsilon[ = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

la **boule ouverte** de centre  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$ .

**Définition 2.2.** Une partie  $U \subset X$  est dite **ouverte** si et seulement si pour tout  $x \in U$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon[ \subset U$ .

**Exemple.**

- Dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme euclidienne, on a

$$B(x_0, \varepsilon[ = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

qui est l'intervalle ouvert  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ .

- Un contre-exemple est l'intervalle  $[0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  qui n'est pas ouvert.

**Définition 2.3.** On note  $\mathcal{T}_d = \{\text{ouverts de } X\}$

**Proposition.** On a les propriétés suivantes :

- (i)  $X \in \mathcal{T}_d$  et  $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ ,
- (ii) Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  est une famille de  $\mathcal{T}_d$ , alors  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ ,
- (iii) Si  $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  est une famille finie de  $\mathcal{T}_d$ , alors  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$ .

*Démonstration.*

- (i) Par convention de logique, on a  $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ . Soit  $x \in X$ , alors  $B(x, 1[ \subset X$ , donc  $X \in \mathcal{T}_d$ .
- (ii) Soit  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ , alors il existe  $i \in I$  tel que  $x \in U_i$ . Comme  $U_i \in \mathcal{T}_d$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon[ \subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Donc  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$ .
- (iii) Soit  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ , alors pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $x \in U_i$ . Comme  $U_i \in \mathcal{T}_d$ , il existe  $\varepsilon_i > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon_i[ \subset U_i$ . Posons  $\varepsilon = \min_{i=1}^n \varepsilon_i$ , alors pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $B(x, \varepsilon[ \subset U_i$ . Donc  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$ .

□

**Définition 2.4.** Soit  $X$  un ensemble (pas forcément métrique). On dit que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  est une **topologie** sur  $X$  si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $X \in \mathcal{T}$  et  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,
- (ii) Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  est une famille de  $\mathcal{T}$ , alors  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ ,
- (iii) Si  $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  est une famille finie de  $\mathcal{T}$ , alors  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ .

Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont appelés **ouverts** de  $X$ . On dit alors que  $(X, \mathcal{T})$  est un **espace topologique**.

**Exemple.** Soit  $X$  un ensemble. On a les exemples suivants :

- (a) Si  $(X, d)$  est un espace métrique, alors  $\mathcal{T}_d$  est une topologie sur  $X$ .
- (b)  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  est une topologie sur  $X$ .
- (c)  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X) = \mathcal{T}_\delta$  est une topologie sur  $X$  où  $\delta$  est la distance discrète.

(d) Si  $X = \{a, b\}$ , alors  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$  est une topologie sur  $X$ .

**Définition 2.5.** Soit  $(X, \mathcal{T}_X)$  et  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. On dit que  $f$  est **continue** si pour tout ouvert  $V \in \mathcal{T}_Y$ ,  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ .

**Définition 2.6.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. On dit que  $A \subset X$  est **fermé** si  $X \setminus A$  est ouvert.

**Remarque.** Un ensemble  $A \subset X$  peut être ouvert et fermé en même temps.

**Exemple.** Si on se place dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme euclidienne, alors l'intervalle  $[0, 1[$  n'est ni ouvert ni fermé.

**Proposition de relation avec la continuité de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .**

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques.

Une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si pour tout  $x_0 \in X$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

*Démonstration.* On commence par énoncer et démontrer un lemme qui nous sera utile :

**Lemme.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une boule ouverte sur  $X$  est un ouvert pour la topologie  $\mathcal{T}_d$ .

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in X$  et  $\varepsilon > 0$ . On a  $B(x_0, \varepsilon) \in \mathcal{T}_d$  par définition de la topologie.

Soit  $x \in B(x_0, \varepsilon)$ , alors  $d(x, x_0) < \varepsilon$ . Posons  $\delta = \varepsilon - d(x, x_0)$ , alors  $\delta > 0$ .

Soit  $y \in B(x, \delta)$ , alors  $d(y, x) < \delta$ . Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) \\ &< \delta + d(x, x_0) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $y \in B(x_0, \varepsilon)$ , donc  $B(x, \delta) \subset B(x_0, \varepsilon)$ . □

---

Revenons à la preuve de la proposition.

▷ Sens direct :

Soit  $x_0 \in X$  et  $\varepsilon > 0$ . Montrons que  $B = B(f(x_0), \varepsilon)$  est un ouvert de  $Y$ , donc  $f^{-1}(B)$  est un ouvert de  $X$ .

On sait que  $x_0 \in f^{-1}(B)$ , ouvert par hypothèse. Alors, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B)$$

Donc pour tout  $x \in X$ ,

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

▷ Sens réciproque :

Soit  $V \in \mathcal{T}_Y$ , alors  $V$  est un ouvert de  $Y$ . Soit  $x_0 \in f^{-1}(V)$ , alors  $f(x_0) \in V$ . Comme  $V$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$ .

Par hypothèse, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Donc  $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V)$ , donc  $f^{-1}(V)$  est ouvert. □

**Remarque.** Si  $f$  est une fonction bijective et continue, sa réciproque  $f^{-1}$  n'est pas forcément continue.

**Définition 2.7.** On dit que  $f$  est un **homéomorphisme** si  $f$  est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

**Remarque.** Une fonction continue et bijective n'est pas forcément un homéomorphisme.

**Définition 2.8.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application bijective.

On dit que  $f$  est une **isométrie** si

$$\forall x, y \in X, \quad d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

**Exercice.** Montrer les propriétés suivantes :

- (i) Si  $f$  est une isométrie, alors  $f$  est un homéomorphisme.
- (ii) Si  $f$  (non bijective) a la propriété suivante :

$$\forall x, y \in X, \quad d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

alors  $f$  est injective.

**Définition 2.9.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\alpha > 0$ .

On dit que  $f$  est  **$\alpha$ -Hölderienne** si pour tout  $x, y \in X$ ,

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)^\alpha$$

avec  $K > 0$ .

**Exercice \***. Montrer que si  $f$  est  $\alpha$ -Hölderienne, alors  $f$  est continue.

**Remarque.** Si  $\alpha = 1$ , on dit que  $f$  est **Lipschitzienne**.

### 3 Constructions de topologies

Dans la suite on se donnera deux espaces topologiques  $(X, \mathcal{T}_X)$  et  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ .

#### 3.1 Topologie induite

**Définition 3.2.** Soit  $A \subset X$ . On appelle **topologie induite** sur  $A$  (par  $X$ ) la topologie

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}_X\}$$

**Proposition.**  $\mathcal{T}_A$  est une topologie sur  $A$ .

*Démonstration.* On a

- (i)  $A \cap X = A \in \mathcal{T}_A$  et  $A \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}_A$ ,
- (ii) Soit  $\{U_i\}_{i \in I}$  une famille de  $\mathcal{T}_A$ , alors

$$\bigcup_{i \in I} U_i = A \cap \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \in \mathcal{T}_A$$

(iii) Soit  $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  une famille finie de  $\mathcal{T}_A$ , alors

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = A \cap \left( \bigcap_{i=1}^n U_i \right) \in \mathcal{T}_A$$

□

**Proposition.** Soit  $A \subset X$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue.  
Alors  $f|_A : A \rightarrow Y$  est continue.

*Démonstration.* Soit  $U \in \mathcal{T}_Y$ . On a

$$f|_A^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$$

ouvert de  $A$ , donc  $f|_A$  est continue.

□

**Exercice.** Soit  $A \subset X$ ,  $f : X \rightarrow Y$  et

$$i : A \rightarrow X$$

$$x \mapsto x$$

- (a) Montrer que  $i$  est continue.
- (b) En déduire que  $f|_A$  est continue.