Topologie — TDs

Ivan Lejeune

5 février 2025

Table des matières

TD0

Exercice 0.1 Distance discrète. Soit X un ensemble et δ la distance discrète sur cet ensemble.

1. Vérifier que δ est bien une distance sur X.
2. Déterminer les boules ouvertes et fermées de (X, δ). Puis, déterminer la topologie T_δ associée à δ.

Solution. Commençons par rappeler la définition de la distance discrète :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1. Vérifions les quatres propriétés d'une distance :
   (i) Positivité : $\forall x, y \in X, \delta(x, y) \geq 0$, vrai par définition.
   (ii) Séparation : $\forall x, y \in X, \delta(x, y) = 0 \iff x = y$, vrai par définition.
   (iii) Symétrie : $\forall x, y \in X, \delta(x, y) = \delta(y, x)$, vrai par définition.
   (iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in X, \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$. Si $x = y$, alors $\delta(x, y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon, $z \neq x$ et $z \neq y$, donc $\delta(x, z) = \delta(z, y) = 1$. L'inégalité est donc vérifiée.
2. Rappelons que la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$ pour une distance d est

$$\mathsf{B}\,(x, r[= \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

   Ici on a plusieurs cas qui se présentent :
   - Si $r \leq 1$, alors $\mathsf{B}\,(x, r[= \{y \in X \mid \delta(x, y) < r\} = \{x\}$.
   - Si $r > 1$, alors $\mathsf{B}\,(x, r[= \{y \in X \mid \delta(x, y) < r\} = X$.

   Pour les boules fermées on a

$$\mathsf{B}\,(x, r] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

   Plusieurs cas qui se présentent :
   - Si $r < 1$, alors $\mathsf{B}\,(x, r[= \{y \in X \mid \delta(x, y) \leq r\} = \{x\}$.
   - Si $r \geq 1$, alors $\mathsf{B}\,(x, r[= \{y \in X \mid \delta(x, y) \leq r\} = X$.

Exercice 0.2 Distance et normes. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ une norme sur E. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} d : \ & E \times E \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto \|y - x\| \end{aligned}$$

définit une distance sur E.

Solution. Vérifions les quatres propriétés d'une distance :

(i) Positivité : $\forall x, y \in E, d(x, y) = \|y - x\| \geq 0$ car la norme est positive.
(ii) Séparation : $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff \|y - x\| = 0 \iff y - x = 0 \iff y = x$.
(iii) Symétrie : $\forall x, y \in E, d(x, y) = \|y - x\| = \|x - y\| = d(y, x)$.
(iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E, d(x, y) = \|y - x\| \leq \|y - z\| + \|z - x\| = d(x, z) + d(z, y)$ par l'inégalité triangulaire de la norme.

Exercice 0.3 Normes sur $\mathbb{R}^n$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les fonctions suivantes définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$:

$$N_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad\qquad N_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \max_{1 \le i \le n} (|x_i|).$$

Dessiner leurs boules unités dans le cas $n = 2$.

Solution. Rappelons les propriétés d'une norme :

(i) Positivité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) \geq 0$, vrai car la somme des valeurs absolues est positive.

(ii) Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$.

(iii) Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| N(x)$.

(iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N(x+y) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = N(x) + N(y)$.

Vérifions maintenant que N_1 est une norme :

(i) Positivité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$.

(ii) Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_1(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$.

(iii) Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_1(\lambda x) = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| N_1(x)$.

(iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N_1(x+y) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = N_1(x) + N_1(y)$.

Vérifions maintenant que N_∞ est une norme :

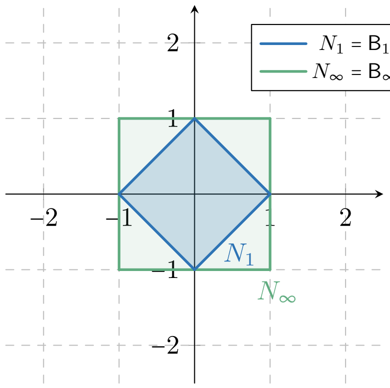
(i) Positivité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_\infty(x) = \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) \geq 0$.

(ii) Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_\infty(x) = 0 \iff \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$.

(iii) Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_\infty(\lambda x) = \max_{1 \le i \le n} (|\lambda x_i|) = |\lambda| \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) = |\lambda| N_\infty(x)$.

(iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N_\infty(x+y) = \max_{1 \le i \le n} (|x_i + y_i|) \leq \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) + \max_{1 \le i \le n} (|y_i|) = N_\infty(x) + N_\infty(y)$.

Voici leurs boules unités dans le cas $n = 2$:



Exercice 0.4 Distance Fly Emirates. Soit (X, d) un espace métrique et ω un point fixé de X (Dubaï). On définit la fonction suivante :

$$D : X \times X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ d(x, \omega) + d(\omega, y) & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1. Montrer que D définit une distance sur X.
2. On suppose que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$ et $\omega = (0, 0)$. Pour $a \in X$, dessiner les boules ouvertes centrées en a pour la distance D.
3. Montrer que si $x \neq \omega$, le singleton $\{x\}$ est ouvert pour la distance D.

Solution. test