

# Théorie des probabilités — Cours

Ivan Lejeune

21 novembre 2024

## Table des matières

Chapitre 1 — Bases de la théorie des probabilités . . . . .	2
1 Espaces probabilisés . . . . .	2
1.1 Probabilité . . . . .	2
1.4 Exemples d'espaces probabilisés . . . . .	3
2 Variables aléatoires . . . . .	3
2.1 Loi d'une variable aléatoire . . . . .	3
2.8 Lois usuelles . . . . .	5
3 Moments d'une variable aléatoire . . . . .	7
3.1 Espérance . . . . .	7
3.5 Moments d'ordre $p$ . . . . .	9
3.9 Moments de lois usuelles . . . . .	10
4 Fonctions associées à une variable aléatoire . . . . .	10
4.1 Fonction de répartition . . . . .	10
4.3 Fonction caractéristique . . . . .	12
4.5 Fonction génératrice . . . . .	13
Chapitre 2 — Indépendance . . . . .	15
1 Indépendances d'événements . . . . .	15
1.1 Conditionnement . . . . .	15
1.2 Quelques formules . . . . .	15
2 Indépendance de variables aléatoires . . . . .	17
2.2 Critères d'indépendance . . . . .	18
Cas discret . . . . .	18
Avec les fonctions de répartition . . . . .	19
Avec les fonctions caractéristiques . . . . .	19
Cas des variables aléatoires à densité . . . . .	19
3 Résultats asymptotiques. . . . .	19
3.1 Lemme de Borel-Cantelli . . . . .	19
3.2 Loi du 0 – 1 de Kolmogorov . . . . .	22
Chapitre 3 — Loi des grands nombres . . . . .	24
1 Différents modes de convergence. . . . .	24
1.1 Convergences presque sûre et probabilité . . . . .	24
1.4 Convergence dans $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . . . . .	26
2 Loi forte des grands nombres . . . . .	27
2.1 Le résultat . . . . .	28
2.2 Applications . . . . .	29
Marche aléatoire non centrée . . . . .	29
Approximation d'intégrales. . . . .	30

# Chapitre 1 — Bases de la théorie des probabilités

## 1 Espaces probabilisés

### 1.1 Probabilité

**Définition 1.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable. Une **mesure** sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est une application

$$\begin{aligned}\mu: \mathcal{F} &\rightarrow [0, +\infty] \\ A &\mapsto \mu(A)\end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\mu$  est  $\sigma$ -additive, c'est-à-dire que pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments 2 à 2 disjoints de  $\mathcal{F}$ , on a

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

On dit alors que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  est un **espace mesuré**.

Si de plus  $\mu(\Omega) = 1$ , on dit que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  est un **espace probabilisé** et  $\mu$  est une **probabilité**.

On notera alors  $\mu = \mathbb{P}$ .

**Remarque.** Comme  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ , une mesure de probabilité est une mesure dans  $[0, 1]$ . Un événement  $A$  est dit **presque sûr** si  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

#### Exemples 1.3.

1. Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable et  $\omega$  un élément fixé dans  $\Omega$ . La mesure (ou masse) de Dirac en  $\omega$  est la mesure définie pour tout  $A \in \mathcal{F}$  par

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_A(\omega)$$

On vérifie facilement que c'est bien une probabilité.

2. Sur le segment  $[0, 1]$  muni de sa tribu borélienne, la mesure de Lebesgue est une probabilité.
3. Si  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  est un espace mesuré avec  $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ , alors on obtient une probabilité en considérant la mesure

$$\mathbb{P} = \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\Omega)}$$

**Interprétation.** Un espace probabilisé est donc un cas particulier d'espace mesuré pour lequel la masse totale de la mesure est égale à 1. En fait, le point de vue diffère de la théorie de l'intégration : dans le cadre de la théorie des probabilités, on cherche à fournir un modèle mathématique pour une "expérience aléatoire".

- L'ensemble  $\Omega$  est appelé **univers** : il représente l'ensemble de toutes les éventualités possibles, toutes les déterminations du hasard dans l'expérience considérée. Les éléments  $\omega$  de  $\Omega$ , parfois appelés **événements élémentaires**, correspondent donc aux issues possibles de l'expérience aléatoire.
- La tribu  $\mathcal{F}$  correspond à l'ensemble des **événements** : ce sont les parties de  $\Omega$  dont on peut évaluer la probabilité. Il faut voir un événement  $A$  de  $\mathcal{F}$  comme un sous-ensemble de  $\Omega$  contenant toutes les éventualités  $\omega$  pour lesquelles une certaine propriété est vérifiée.
- On associe à chaque événement  $A \in \mathcal{F}$  un réel  $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$  qui donne la plausibilité que le résultat de l'expérience soit dans  $A$ .

## 1.4 Exemples d'espaces probabilisés

Suivent quelques exemples classiques d'espaces probabilisés.

**Exemples 1.5.** cours a completer

## 2 Variables aléatoires

### 2.1 Loi d'une variable aléatoire

**Définition 2.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Une **variable aléatoire** est une application

$$X: \Omega \rightarrow E$$

mesurable. C'est-à-dire

$$\forall A \in \mathcal{E}, X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$$

Si  $E = \mathbb{R}$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on parle de **variable aléatoire réelle**.

Si  $E = \mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , on parle de **variable aléatoire vectorielle**.

**Exemples 2.3.**

▷ Lancer de deux dés.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés équilibrés. Alors

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).$$

On s'intéresse à la somme des résultats obtenus et on définit

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \{2, \dots, 12\} \\ (i, j) &\mapsto i + j \end{aligned}$$

On munit l'ensemble d'arrivée de la tribu pleine.

$X$  est une variable aléatoire car l'espace de départ est muni de la tribu pleine.

▷ Infinité de lancers d'un dé.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré une infinité de fois. Alors

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}^*} = \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \omega_n \in \{1, \dots, 6\}\}$$

On considère la tribu  $\mathcal{F}$  la plus petite tribu contenant les  $A_{x_1, \dots, x_k}$ . On s'intéresse au nombre de lancers jusqu'à l'apparition du premier 6. On définit

$$\begin{aligned} Y: \Omega &\rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega_n = 6\} \end{aligned}$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ . On munit l'ensemble d'arrivée de la tribu pleine.

Pour  $k \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{k\}) &= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \omega_1 \neq 6, \dots, \omega_{k-1} \neq 6, \omega_k = 6\} \\ &= \bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_{k-1}, 6} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} Y^{-1}(\{+\infty\}) &= \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \omega_n \neq 6\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_k} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  est dénombrable, on en déduit que  $Y$  est une variable aléatoire.

▷ Bouteille à la mer.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à observer la position d'une bouteille à la mer. Alors

$$\Omega = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^2)$$

On considère la tribu  $\mathcal{F}$  la plus petite tribu rendant mesurables les applications coordonnées

$$\begin{aligned} f_t: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto \omega(t) \end{aligned}$$

On s'intéresse à la position de la bouteille au temps  $t = 1$ . On définit

$$\begin{aligned} Z: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto \omega(1) \end{aligned}$$

Alors, par construction de la tribu  $\mathcal{F}$ , on a que  $Z$  est une variable aléatoire.

**Définition 2.4.** Soit  $X$  une variable aléatoire de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  dans  $(E, \mathcal{E})$ . La **loi** de  $X$  est la mesure image de  $X$  par  $\mathbb{P}$ , définie par

$$\forall A \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$$

### Exemples 2.5.

▷ Infinité de lancers d'un dé.

On considère

$$\begin{aligned} Y: \Omega = \{1, \dots, 6\}^{\mathbb{N}^*} &\rightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*} &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid \omega_n = 6\} \end{aligned}$$

La loi  $\mathbb{P}_Y$  de  $Y$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y(\{k\}) &= \mathbb{P}(Y^{-1}(\{k\})) \\ &= \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_1, \dots, x_{k-1} \in \{1, \dots, 5\}} A_{x_1, \dots, x_{k-1}, 6}\right) \\ &= \sum_{x_1, \dots, x_{k-1}} \underbrace{\mathbb{P}(A_{x_1, \dots, x_{k-1}, 6})}_{= \frac{1}{6^k}} \\ &= \frac{5^{k-1}}{6^k} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a vu à la fin de la section précédente que la probabilité de ne jamais obtenir de 6 est nulle :

$$\mathbb{P}_Y(\{+\infty\}) = \mathbb{P}(Y^{-1}(\{+\infty\})) = \mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$$

On en déduit que la loi de  $Y$  est

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} \delta_k$$

Cette loi est appelée **loi géométrique** de paramètre  $\frac{5}{6}$ .

**Définition 2.6 Variable aléatoire discrète.** Une variable aléatoire  $X$  est dite **discrète** si  $X$  est à valeurs dans un ensemble  $E$  au plus dénombrable. On prend alors  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$  et si  $A \in \mathcal{E}$ , on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in \bigcup_{x \in A} \{x\}) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

La loi  $\mathbb{P}_X$  de  $X$  est alors entièrement déterminée par les quantités  $p_x = \mathbb{P}(X = x)$  pour tout  $x \in E$  :

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$$

**Définition 2.7 Variable aléatoire à densité.** Une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  est dite **à densité** par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_d$  si il existe une fonction mesurable

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty[$$

telle que  $\mathbb{P}_X = f \lambda_d$  :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x) d\lambda_d(x)$$

Il faut que  $f$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x) = 1$$

Par exemple, si  $d = 1$ , on a

$$\mathbb{P}_X([a, b]) = \int_a^b f(x) d\lambda_1(x)$$

On notera souvent  $f_X = f$  et on appelle cette fonction la **densité** de  $X$ .

## 2.8 Lois usuelles

▷ Lois discrètes :

Loi uniforme sur un ensemble fini  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Soit  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble fini.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme sur  $E$ , notée  $X \sim \mathcal{U}(E)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\text{card}(A)}{n}$$

▷ Loi de Bernoulli.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ , notée  $X \sim \mathcal{B}(p)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

▷ Loi binomiale.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ , notée  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

cela correspond au nombre de succès dans  $n$  répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre  $p$  (de manière indépendante).

▷ Loi géométrique.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1]$ , notée  $X \sim \mathcal{G}(p)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \delta_k$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

cela correspond au nombre de répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre  $p$  avant le premier succès.

▷ Loi de Poisson.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\theta > 0$ , notée  $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \delta_k$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

cela correspond au nombre d'événements rares dans un intervalle de temps donné.

▷ Lois à densité sur  $\mathbb{R}^d$  :

Loi uniforme sur un ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , telle que  $0 < \lambda_d(A) < +\infty$ . Une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme sur  $A$ , notée  $X \sim \mathcal{U}(A)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A$$

c'est-à-dire  $\mathbb{P}_X$  admet la densité constante  $\frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A$ . Autrement dit, si  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , on a

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B \frac{1}{\lambda_d(A)} \mathbb{1}_A(x) d\lambda_d(x) = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(A)}$$

dans le cas  $d = 1$  et  $A = [a, b]$ , la densité est  $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}$ .

▷ Loi exponentielle.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\theta > 0$ , notée  $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = \theta e^{-\theta x} \lambda_1 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$$

c'est-à-dire  $\mathbb{P}_X$  admet la densité  $f_X(x) \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_1$ . Autrement dit, si  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) d\lambda_1(x)$$

dans le cas  $d = 1$ . Cette loi vérifie la propriété de l'absence de mémoire, c'est-à-dire

$$\forall s, t \geq 0, \mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

▷ Loi normale ou gaussienne.

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ , notée  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , si sa loi est

$$\mathbb{P}_X = f_X \lambda_1$$

où  $f_X$  est la densité de la loi normale, donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Autrement dit, si  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on a

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\lambda_1(x)$$

remarque, la loi  $\mathcal{N}(\cdot)$ , c'est-à-dire avec la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

est appelée loi normale standard.

### 3 Moments d'une variable aléatoire

On considère dans la suite  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé

#### 3.1 Espérance

**Définition 3.2.** Soit  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle. On appelle **espérance** de  $X$  la quantité

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

qui est bien définie si  $X$  est positive ou si  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

On définit de même l'espérance d'une variable aléatoire  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $X = (X_1, \dots, X_d)$  est un vecteur aléatoire, alors on pose

$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$$

si  $\mathbb{E}[X_i]$  existe pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

**Remarque.**

1. On interprète  $\mathbb{E}[X]$  comme la valeur moyenne de  $X$ .
2. Si  $\mathbb{E}[X] = 0$ , on dit que  $X$  est **centrée**.
3. Si  $X = \mathbb{1}_A$ , alors  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}(A)$ .
4. On omettra le cas où  $X$  est positive et  $\mathbb{E}[X] = +\infty$ .

**Proposition.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires admettant une espérance et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

De plus, si  $X \geq 0$ , alors  $\mathbb{E}[X] \geq 0$  avec  $\mathbb{E}[X] = 0$  si et seulement si  $X = 0$ -p.p.

**Proposition.** Soit  $X: \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ . Soit  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable positive. Alors,  $h \circ X$  est une variable aléatoire et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X)] &= \int_{\Omega} h(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_E h(x) d\mathbb{P}_X(x) \end{aligned}$$

Si  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$  et mesurable (pas forcément positive), alors  $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mathbb{P}_X)$  si et seulement si  $h \circ X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et l'égalité précédente reste vraie.

*Démonstration.* Vue en théorie de la mesure.  
On vérifie l'égalité :

- pour les fonctions indicatrices,
- pour les fonctions étagées,
- pour les fonctions positives,
- pour les fonctions intégrables

□

**Remarque.** En particulier, si  $E = \mathbb{R}$  et  $h = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ , on obtient

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x)$$

à condition que cette quantité existe.

**Exemples 3.3.** Loi de Bernoulli

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X &= (1-p)\delta_0 + p\delta_1 \\ \mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x d((1-p)\delta_0 + p\delta_1)(x) \\ &= (1-p) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x d\delta_0(x)}_{=0} + p \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x d\delta_1(x)}_{=1} \\ &= p\end{aligned}$$

Si  $X$  suit une loi discrète

$$\mathbb{P}_X = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}$$

alors son espérance vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x d\delta_{x_k}}_{=x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k\end{aligned}$$

**Proposition.** Soit  $X: \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire. La loi de  $X$  est caractérisée par les quantités  $\mathbb{E}[h(X)]$  où  $h: E \rightarrow \mathbb{R}$  décrit l'ensemble des fonctions mesurables bornées. C'est-à-dire, si  $X$  et  $X'$  sont deux variables aléatoires vérifiant

$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(X')]$$

pour toute fonction  $h$  mesurable bornée, alors  $X$  et  $X'$  ont la même loi.

*Démonstration.* Soient  $X$  et  $X'$  telles que  $\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(X')]$  pour toute fonction  $h$  mesurable bornée.

Soit  $A \in \mathcal{E}$ . On pose  $h = \mathbb{1}_A$  et alors

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(X')] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X')] = \mathbb{P}(X' \in A)$$

Donc  $X$  et  $X'$  ont la même loi. □

**Exemples 3.4.** On considère une variable aléatoire  $X$  de loi uniforme sur  $]0, 1[$  et on pose  $Y = -\ln(X)$ . Déterminons la loi de  $Y$ .

Soit  $h$  une fonction mesurable bornée. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(Y)] &= \mathbb{E}[h(-\ln(X))] \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(-\ln(x)) d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(-\ln(x)) \underbrace{\mathbb{1}_{]0,1[}(x) d\lambda_1(x)}_{=\mathbb{P}_X} \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(y) \underbrace{\mathbb{1}_{]0,\infty[}(y) e^{-y} d\lambda_1(y)}_{=\mathbb{P}_X} \quad \text{avec } y = -\ln(x)\end{aligned}$$



D'après la proposition précédente, la loi de  $Y$  est

$$\mathbb{1}_{]0, \infty[}(y) e^{-y} \lambda_1(y)$$

c'est-à-dire que  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre 1.

### 3.5 Moments d'ordre $p$

Pour  $p \in [1, \infty[$ , on définit l'espace  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  comme l'ensemble des variables aléatoires vérifiant

$$\|X\|_p = \left( \int_{\Omega} |X(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

On a bien que  $\|\cdot\|_p$  est une norme qui rend  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  complet (toute suite de Cauchy converge). Dans le cas  $p = \infty$ , on pose

$$\|X\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|X\|_p$$

Donc  $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est l'ensemble des variables aléatoires bornées.

**Définition 3.6.** Soit  $p \in [1, \infty[$  et  $X$  une variable aléatoire dans  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Le **moment d'ordre  $p$**  de  $X$  est

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_{\Omega} X(\omega)^p d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x^p d\mathbb{P}_X(x)$$

**Remarque.**

1. Le moment d'ordre 1 correspond à l'espérance.
2. Si  $p \leq q$  alors  $\mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$   
En particulier, si  $X$  admet un moment d'ordre  $q$  alors  $X$  admet un moment d'ordre  $p$  pour tout  $p \leq q$

**Proposition.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle positive et  $p \in [1, \infty[$ . Alors, pour tout  $t > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X^p]}{t^p}$$

Cette inégalité permet de contrôler le comportement à l'infini de  $X$ .

*Démonstration.* On part de l'inégalité

$$t^p \mathbb{1}_{\{X \geq t\}} \leq X^p$$

On applique l'espérance

$$\begin{aligned} t^p \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X \geq t\}}] &\leq \mathbb{E}[X^p] \\ \mathbb{P}(X \geq t) &\leq \frac{\mathbb{E}[X^p]}{t^p} \end{aligned}$$

□

Le cas  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  :

On rappelle que  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est muni d'un produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY] = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

La norme associée est

$$\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\int_{\Omega} X(\omega)^2 d\mathbb{P}(\omega)}$$

**Définition 3.7.** La **variance** d'une variable aléatoire réelle  $X$  est le moment d'ordre 2 de  $X - \mathbb{E}[X]$ , soit

$$\text{Var}(X) = \|X - \mathbb{E}[X]\|_2^2 = \int_{\Omega} (X(\omega) - \mathbb{E}[X])^2 d\mathbb{P}(\omega),$$

qui est bien définie si  $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

On définit **l'écart-type** par

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \|X - \mathbb{E}[X]\|_2$$

**Remarque.**

1. En développant le carré dans la définition de la variance, on obtient

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

2. On a  $\text{Var}(X) = 0$  si et seulement si  $X$  est constante.

**Proposition.** Soit  $X$  une variable aléatoire dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors, pour tout  $t > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}$$

**Définition 3.8.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On définit la **covariance** de  $X$  et  $Y$  par

$$\text{COV}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \langle X - \mathbb{E}[X], Y - \mathbb{E}[Y] \rangle$$

où on rappelle que

$$\langle U, V \rangle = \mathbb{E}[UV] = \int_{\Omega} U(\omega)V(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Par les propriétés du produit scalaire dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , on en déduit que la covariance est symétrique, bilinéaire et positive :

$$\text{COV}(X, X) = \text{Var}(X) \geq 0$$

Par ailleurs, on a aussi la relation de Pythagore :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{COV}(X, Y)$$

### 3.9 Moments de lois usuelles

Sous forme de tableau :

Loi	Espérance	Variance
$\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(p)$	$p$	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$np$	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\theta)$	$\theta$	$\theta$
$\mathcal{U}([a, b])$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\theta)$	$\frac{1}{\theta}$	$\frac{1}{\theta^2}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$

## 4 Fonctions associées à une variable aléatoire

### 4.1 Fonction de répartition

**Définition 4.2.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. La **fonction de répartition** de  $X$  est la fonction

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$$

**Exemple.** Si  $X$  est une variable réelle de densité  $f_X$  par rapport à la mesure de Lebesgue ( $\mathbb{P}_X = f_X \lambda_1$ ), alors

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A f_X(t) d\lambda_1(t)$$

Donc, la fonction de répartition de  $X$  est donnée par

$$F_X(t) = \mathbb{P}_X([-\infty, t]) = \int_{-\infty}^t f_X(u) d\lambda_1(u)$$

Par exemple, si  $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ , c'est-à-dire

$$f_X(t) = \theta e^{-\theta t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

alors

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^t \theta e^{-\theta u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) d\lambda_1(u) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ [-e^{-\theta u}]_0^t & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\ &= (1 - e^{-\theta t}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \end{aligned}$$

De manière générale, l'égalité  $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(u) d\lambda_1(u)$  assure que  $F_X$  est dérivable  $\lambda_1$ -p.p, avec  $F'_X(t) = f_X(t)$  pour  $\lambda_1$ -presque tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemple.** On considère  $X \sim \mathcal{B}(p)$  et  $\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ . Alors, la fonction de répartition de  $X$  est donnée par

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}_X([-\infty, t]) \\ &= (1-p)\delta_0([-\infty, t]) + p\delta_1([-\infty, t]) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Plus généralement, si  $X$  est une variable aléatoire discrète de loi  $\mathbb{P}_X = \sum_{k \in E} p_k \delta_{x_k}$ , avec les  $x_k$  ordonnés, alors

$$F_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta_{x_k}([-\infty, t]) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbb{1}_{[x_k, +\infty[}(t)$$

**Proposition.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de répartition  $F_X$ . Alors

1.  $F_X$  est croissante, continue à droite et admet des limites à gauche (càdlàg)
2. Les limites de  $F_X$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  sont

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$$

3. En posant

$$F_X(t-) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} F_X(t - \varepsilon)$$

On a

$$F_X(t-) = \mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

et donc

$$\mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - F_X(t-)$$

*Démonstration.* Admise (ou a faire en exercice)

□

**Proposition.** La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  caractérise sa loi. C'est à dire que deux variables aléatoires ayant la même fonction de répartition ont la même loi.

*Démonstration.* Si  $F_X = F_Y$  alors les mesures de probabilités  $\mathbb{P}_X$  et  $\mathbb{P}_Y$  associées à  $X$  et  $Y$  coïncident sur les ensembles de la forme  $[-\infty, t]$ . Ces ensembles engendrent la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$  et sont stables par intersection finie, donc le lemme de classes monotones assure que  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ .  $\square$

### 4.3 Fonction caractéristique

**Définition 4.4.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. La **fonction caractéristique** de  $X$  est la fonction

$$\begin{aligned}\varphi_X: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega)\end{aligned}$$

**Remarque.**

1. La fonction caractéristique est bien définie car

$$\int_{\Omega} |e^{itX(\omega)}| d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} d\mathbb{P}(\omega) = 1$$

2. La fonction caractéristique correspond à un signe près à la transformée de Fourier de la variable aléatoire  $X$ .

**Exemple.**

- Soit  $X \sim \mathcal{B}(p)$ . Alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = (1-p)e^{it0} + pe^{it1} = 1-p+pe^{it}$$

- Soit  $X$  une variable aléatoire discrète de loi  $\mathbb{P}_X = \sum_{k \in E} p_k \delta_{x_k}$ . Alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k \in E} p_k e^{itx_k}$$

- Soit  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ . Alors

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) d\lambda_1(x) \\ &= \left[ \frac{e^{itx}}{it} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \quad \text{si } t \neq 0\end{aligned}$$

et pour  $t = 0$ , on a

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}[e^{i0X}] = \mathbb{E}[1] = 1$$

- Soit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Alors

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\lambda_1(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

cf. TD4 pour le calcul de l'intégrale.

**Proposition.** Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Si  $X$  admet un moment d'ordre  $p \in \mathbb{N}$ , alors

la fonction caractéristique  $\varphi_X$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et

$$\mathbb{E}[X^p] = (-i)^p \varphi_X^{(p)}(0)$$

*Démonstration.* La fonction  $g : (t, \omega) \mapsto e^{itX(\omega)}$  est intégrable par rapport à  $\omega$ , dérivable par rapport à  $t$  et vérifie

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, \omega) \right| = |iX(\omega)e^{itX(\omega)}| = |X(\omega)|$$

Donc si  $X$  admet un moment d'ordre 1, alors

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, \omega) \right| = |X(\omega)|$$

qji est intégrable, donc le théorème de dérivation sous le signe intégral assure que

$$\varphi'_X(t) = \int_{\Omega} iX(\omega)e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega)$$

en particulier, en  $t = 0$ , on a

$$\varphi'_X(0) = i\mathbb{E}[X]$$

On raisonne ensuite par récurrence sur  $p$  pour les autres moments.  $\square$

**Théorème.** La fonction caractéristique  $\varphi_X$  caractérise la loi de  $X$ . C'est-à-dire que si  $\varphi_X = \varphi_Y$  alors  $X$  et  $Y$  ont la même loi.

*Démonstration.* Admise, elle est basée sur l'injectivité de la transformée de Fourier de mesures.  $\square$

## 4.5 Fonction génératrice

On considère ici des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

**Définition 4.6.** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . La **fonction génératrice** de  $X$  est la série entière

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) z^n$$

Comme  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ , on en déduit que le rayon de convergence de cette série entière est au moins 1, donc  $G_X$  est définie sur  $[-1, 1]$  et continue sur  $[-1, 1]$ . Par ailleurs,  $G_X$  est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $] -1, 1[$  avec

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Donc  $G_X$  caractérise la loi de  $X$ .

En dérivant  $G_X$  terme à terme, on obtient

$$G'_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X = n) z^{n-1} = \mathbb{E}[X z^{X-1}]$$

On prend une suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui croît vers 1. Alors, la suite des fonctions  $(X z_k^{X-1})_k$  est croissante, positive et donc par le théorème de convergence monotone, on a

$$\mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow \infty} X z_k^{X-1}\right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\mathbb{E}[X z_k^{X-1}]}_{G'_X(z_k)}$$

d'où

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z < 1}} G'_X(z)$$

On peut noter  $G'_X(1-) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z < 1}} G'_X(z)$ .

Bref, si  $X$  admet un moment d'ordre 1, alors  $G'_X(1-) = \mathbb{E}[X]$ .

Plus généralement, on peut montrer que

$$G_X^{(k)}(1-) = \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)]$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Cela permet de déterminer les moments de  $X$ .

**Exemple.**  $\triangleright$  Soit  $X \sim \mathcal{B}(p)$ . Alors

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = (1-p)z^0 + pz^1 = 1-p+pz$$

et donc

$$G'_X(z) = p$$

donc

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = p$$

$\triangleright$  Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Alors

$$\begin{aligned} G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k \\ &= (pz + 1 - p)^n \end{aligned}$$

donc

$$G'_X(z) = np(pz + 1 - p)^{n-1}$$

et donc

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np$$

$\triangleright$  Soit  $X \sim \mathcal{G}(p)$ . Alors

$$\begin{aligned} G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} z^k \\ &= zp \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} z^{k-1} \\ &= \frac{zp}{1 - (1-p)z} \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) \rightarrow \text{exercice}$$

$\triangleright$  Soit  $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ . Alors

$$\begin{aligned} G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} z^k \\ &= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta z)^k}{k!} \\ &= e^{-\theta} e^{\theta z} \\ &= e^{\theta(z-1)} \end{aligned}$$

donc

$$G'_X(z) = \theta e^{\theta(z-1)}$$

et donc

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \theta$$

## Chapitre 2 — Indépendance

On considère ici  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

### 1 Indépendances d'événements

#### 1.1 Conditionnement

Si  $A \in \mathcal{F}$  est un événement tel que  $\mathbb{P}(A) > 0$ , alors la **probabilité conditionnelle de  $B \in \mathcal{F}$  sachant  $A$**  est définie par

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

alors, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) \end{aligned}$$

est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Intuitivement, l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_A)$  correspond à une expérience aléatoire où l'on sait a priori que l'événement  $A$  est vérifié.

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements de probabilité strictement positive, alors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{formule de Bayes.}$$

#### 1.2 Quelques formules

Une partition  $(A_i)_{i \in I}$  avec  $I \subset \mathbb{N}$  formée d'événements  $A_i$  est une famille d'événements vérifiant

- $\forall i, j \in I, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ .

Dans ce cas, on a la **formule des probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B|A_i).$$

pour tout événement  $B \in \mathcal{F}$  et  $\mathbb{P}(A_i) > 0$  pour tout  $i \in I$ .

*Cas particulier* : avec la partition  $(A, \bar{A})$ , on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C) \mathbb{P}(B|A^C).$$

où  $A^C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$  est le complémentaire de  $A$ .

On peut alors étendre la formule de Bayes à une partition  $(A_i)_{i \in I}$  de  $\Omega$  :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j \in I} \mathbb{P}(B|A_j) \mathbb{P}(A_j)}.$$

*Cas particulier* : avec la partition  $(A, \bar{A})$ , on a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^C) \mathbb{P}(B|A^C)}.$$

**Exemple.** On se place dans la cas d'une maladie qui touche une personne sur 100. Si une personne est malade (noté  $M$ ), alors le test est positif dans 99% des cas. Si une personne n'est pas malade (noté  $M^C$ ), alors le test est positif dans 1% des cas.

Notons  $P$  l'événement "le test est positif". Alors, si un test est positif, la probabilité que la

personne soit malade est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|P) &= \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|M^C)\mathbb{P}(M^C)} \\ &= \frac{0.99 \times 0.01}{0.99 \times 0.01 + 0.01 \times 0.99} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Définition 1.3.** Deux événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

**Exemple.** On lance 2 dés. On a alors

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P} = \text{probabilité uniforme}.$$

On considère les événements

$$A = \{6\} \times \{1, \dots, 6\}, \quad B = \{1, \dots, 6\} \times \{6\}.$$

Alors,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6},$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{6\} \times \{6\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Donc  $A$  et  $B$  sont indépendants

**Définition 1.4.** Des événements  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  sont **indépendants** si

$$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Plus généralement, une famille d'événements  $(A_i)_{i \in I}$  est indépendante si toute sous-famille finie est constituée d'événements indépendants.

**Exemple.** On lance 2 dés. On considère les événements

$A$  = le premier dé est pair,  
 $B$  = le deuxième dé est pair,  
 $C$  = la somme des dés est paire.



Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(B) &= \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(C) &= \frac{1}{2}, \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$

Donc les événements  $A$  et  $B$ ,  $A$  et  $C$ ,  $B$  et  $C$  sont indépendants respectivement. Par ailleurs, on a

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

Donc les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas indépendants.

**Remarque.** L'indépendance d'événements  $A_1, \dots, A_n$  implique l'indépendance de  $A_1^c, A_2, \dots, A_n$  (et de même en passant au complémentaire sur d'autres indices). En particulier, si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $B^c$  sont indépendants.

## 2 Indépendance de variables aléatoires

**Définition 2.1.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires à valeurs dans  $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ . On dit que ces variables aléatoires sont **indépendantes** si pour tout  $B_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}_n$ , les événements  $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  sont indépendants :

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Cette égalité se réécrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in B_1 \times \dots \times B_n) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i) \\ \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(B_1 \times \dots \times B_n) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{X_i}(B_i).\end{aligned}$$

Cela signifie que

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}.$$

Plus généralement, une famille de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in I}$  est indépendante si toute sous-famille finie l'est.

**Proposition.** Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires à valeurs dans  $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes.
2. Pour toutes fonctions  $h_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, h_n : E_n \rightarrow \mathbb{R}$  positives ou intégrables pour  $(\mathcal{L}^1(E_k, \mathcal{E}_k, \mathbb{P}_{X_k}))$ , on a

$$\mathbb{E}[h_1(X_1) \cdots h_n(X_n)] = \mathbb{E}[h_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[h_n(X_n)].$$

*Démonstration.*  $\triangleright$  On montre que 1. implique 2.

On considère le vecteur aléatoire

$$X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n, \\ \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h_1(X_1) \cdots h_n(X_n)] &= \int_{\Omega} h_1(X_1(\omega)) \cdots h_n(X_n(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ &\stackrel{\text{formule de transfert}}{=} \int_{E_1 \times \dots \times E_n} h_1(x_1) \cdots h_n(x_n) d\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{E_1 \times \dots \times E_n} h_1(x_1) \cdots h_n(x_n) d(\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n})(x_1, \dots, x_n) \\ &\stackrel{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_{E_n} \int_{E_{n-1}} \cdots \int_{E_1} h_1(x_1) \cdots h_n(x_n) d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \cdots d\mathbb{P}_{X_n}(x_n) \\ &= \int_{E_1} h_1(x_1) d\mathbb{P}_{X_1}(x_1) \cdots \int_{E_n} h_n(x_n) d\mathbb{P}_{X_n}(x_n) \\ &= \mathbb{E}[h_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[h_n(X_n)]. \end{aligned}$$

▷ On montre que 2. implique 1.

Soit  $A_1 \in \mathcal{C}_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}_n$ . On pose  $h_i = \mathbb{1}_{A_i}(x_i)$ . Alors

$$\mathbb{E}[h_1(X_1) \cdots h_n(X_n)] = \mathbb{E}[h_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[h_n(X_n)]$$

se réécrit

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}(X_1) \cdots \mathbb{1}_{A_n}(X_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}(X_1)] \cdots \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n}(X_n)]$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n).$$

□

**Exemple.** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables aléatoires intégrables et indépendantes, alors

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2].$$

En particulier,

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] = 0.$$

et donc

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2 \text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2).$$

**Exemple.** Soit  $t \in \mathbb{R}$  fixé et  $X_1, X_2$  deux variables aléatoires réelles indépendantes. Avec  $h_j(x_j) = e^{itx_j}, j = 1, 2$ , on obtient

$$\mathbb{E}[e^{itX_1} e^{itX_2}] = \mathbb{E}[e^{itX_1}] \mathbb{E}[e^{itX_2}].$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t).$$

## 2.2 Critères d'indépendance

### Cas discret

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans des espaces discrets  $E$  et  $F$ . Elles sont indépendantes si et seulement si

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$$

pour tout  $x \in E$  et  $y \in F$ .

En effet, si  $A \subset E$  et  $B \subset F$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \mathbb{P}(X \in \cup_{x \in A} \{x\}, Y \in \cup_{y \in B} \{y\}) \\ &= \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \end{aligned}$$

### Avec les fonctions de répartition

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs réelles. Elles sont indépendantes si et seulement si pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y).$$

c'est-à-dire

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

### Avec les fonctions caractéristiques

Soient  $X_1, X_2$  deux variables aléatoires à valeurs réelles. Elles sont indépendantes si et seulement si

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{it_1 X_1} e^{it_2 X_2}] &= \mathbb{E}[e^{it_1 X_1}] \mathbb{E}[e^{it_2 X_2}] \\ \mathbb{E}[e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2)}] &= \mathbb{E}[e^{it_1 X_1}] \mathbb{E}[e^{it_2 X_2}].\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{(X_1+X_2)}(t_1 + t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2).$$

### Cas des variables aléatoires à densité

Soit  $(X_1, X_2)$  un vecteur aléatoire de densité  $f_{(X_1, X_2)}$  par rapport à  $\lambda_2$  (mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ ). On suppose que

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

avec  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  positive et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(x) d\lambda_1(x) = 1.$$

Alors les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes de densité respectives  $f_1$  et  $f_2$ .

**Exemple.** Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire de densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Alors,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

donc les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi normale centrée réduite.

## 3 Résultats asymptotiques

### 3.1 Lemme de Borel-Cantelli

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements et  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , alors on pose

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_k, \text{ pour une infinité de } k\}.$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_k, \text{ pour tout } k \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

On remarque que

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c.$$

et

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c.$$

**Proposition.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements, alors

1. Si  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ , alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

ou de manière équivalente

$$\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \text{ est fini, } \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

2. Si  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$  et les événements  $A_n$  sont indépendants, alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

ou de manière équivalente

$$\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \text{ est infini, } \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

**Remarque.** L'indépendance est nécessaire. Prendre  $A_n = A$  avec  $\mathbb{P}(A) \in ]0, 1[$ . Alors  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A) = \infty$  et  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mathbb{P}(A) \neq 1$ .

*Démonstration.*  $\triangleright$  On montre 1.

On pose  $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . Comme les  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont décroissants, on a

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n) = 0.$$

$\triangleright$  On montre 2.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c}] \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{\bigcap_{k=n}^N A_k^c}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \mathbf{1}_{A_k^c}\right] \end{aligned}$$

Par théorème de convergence dominée (par 1), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \prod_{k=n}^N \mathbb{1}_{A_k^c} \right] \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bigcap_{k=n}^N A_k^c \right) \\
\text{par indep des } A_k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k^c) \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N e^{-\mathbb{P}(A_k)} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k)} \\
&= e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On conclut en écrivant

$$\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_k^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) = 0$$

□

**Exemple.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires avec  $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ .

On considère les événements  $A_n = \{X_n = 1\}$ .

de sorte que  $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(A_n)$ .

Borel-Cantelli donne alors

1. Si  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty$  alors la suite  $(X_n)$  prend la valeur 1 un nombre fini de fois,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement.
2. Si  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$  et que les  $(X_n)$  sont indépendantes, alors la suite  $(X_n)$  prend une infinité de fois la valeur 1,  $\mathbb{P}$ -presque sûrement.

**Exemple.** On observe les motifs dans une suite indépendante et identiquement distribuée.

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ .

Soit  $n \geq 1$  fixé. Soit  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une suite déterministe fixée dans  $\{0, 1\}^n$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on définit

$$B_k(\varepsilon) = \left\{ (x_i)_{i \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \mid x_{k+1} = \varepsilon_1, \dots, x_{k+n} = \varepsilon_n \right\}.$$

On considère alors l'événement

$$A_k(\varepsilon) = \left\{ (X_i)_{i \geq 1} \in B_k(\varepsilon) \right\} = \left\{ X_{k+i-1} = \varepsilon_1, \dots, X_{k+n} = \varepsilon_n \right\}.$$

l'événement  $A_k(\varepsilon)$  est réalisé si  $X_{k+1}$  prend la valeur  $\varepsilon_1$ ,  $X_{k+2}$  prend la valeur  $\varepsilon_2$  et ainsi de suite avec  $X_{k+n}$  qui prend la valeur  $\varepsilon_n$ . On pose

$$A(\varepsilon) = \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k(\varepsilon)$$

qui correspond à l'événement "le motif  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  apparaît une infinité de fois dans la suite  $(X_k)_{k \geq 1}$ ".

Les événements  $(A_k(\varepsilon))_{k \geq 0}$  ne sont pas indépendants :

$$\begin{aligned}
A_0(\varepsilon) &= \{X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n\}, \\
A_1(\varepsilon) &= \{X_2 = \varepsilon_1, \dots, X_{n+1} = \varepsilon_n\}. A_2(\varepsilon) = \{X_3 = \varepsilon_1, \dots, X_{n+2} = \varepsilon_n\}.
\end{aligned}$$

les événements  $(A_{k \times n}(\varepsilon))_{k \in \mathbb{N}}$  sont indépendants

$$\begin{aligned} A_{0 \times n}(\varepsilon) &= \{X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n\}, \\ A_{1 \times n}(\varepsilon) &= \{X_{n+1} = \varepsilon_1, \dots, X_{2n} = \varepsilon_n\}. A_{2 \times n}(\varepsilon) = \{X_{2n+1} = \varepsilon_1, \dots, X_{3n} = \varepsilon_n\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{k \times n}(\varepsilon)) &= \mathbb{P}(X_{k \times n+1} = \varepsilon_1, \dots, X_{(k+1) \times n} = \varepsilon_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{k \times n+1} = \varepsilon_1) \cdots \mathbb{P}(X_{(k+1) \times n} = \varepsilon_n) \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série DIVERGENTE (car on somme sur  $k$ ).

Par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_{k \times n}(\varepsilon)) = 1.$$

Il en suit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A(\varepsilon)) &= \mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k(\varepsilon)) \\ &= \mathbb{P}(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_{k \times n}(\varepsilon)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc si on tape au hasard sur un clavier binaire, on fera apparaitre n'importe quel texte une infinité de fois avec probabilité 1.

### 3.2 Loi du 0 – 1 de Kolmogorov

Soit  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  des sous-tribus de  $\mathcal{F}$ . On pose

$$\overline{\mathcal{F}_n} = \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \dots).$$

la tribu engendrée par les  $\mathcal{F}_k, k \geq n$ .

On définit alors la tribu asymptotique (ou de queue) par

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\mathcal{F}_n}.$$

**Exemple.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires et  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n) = \{X_n^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ . Montrons que l'événement " $X_n$  converge" est dans  $\mathcal{F}_\infty$ . L'événement " $X_n$  converge" est réalisé si et seulement si l'événement " $(X_n)_{n \geq k}$  converge" est réalisé pour tout  $k \geq 1$ . Bref,

$$\{(X_n)_{n \geq 1} \text{ converge}\} = \{(X_n)_{n \geq k} \text{ converge}\} \in \overline{\mathcal{F}_k}.$$

car  $(X_n)_{n \geq k}$  ne dépend que de  $X_k, X_{k+1}, \dots$

Ceci est vrai pour tout  $k$  donc

$$\{(X_n)_{n \geq 1} \text{ converge}\} \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\mathcal{F}_k} = \mathcal{F}_\infty.$$

**Proposition.** Si les tribus  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  sont indépendantes (un événement d'une tribu est indépendant de tout événement d'une autre tribu), alors la tribu asymptotique  $\mathcal{F}_\infty$  ne contient que des événements de probabilité 0 ou 1 :

$$\forall A \in \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}.$$

**Exemple.** Dans l'exemple précédent, on a donc

$$\mathbb{P}((X_n)_{n \geq 1} \text{ converge}) \in \{0, 1\}.$$

■ Donc soit la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement, soit elle diverge presque sûrement.

## Chapitre 3 — Loi des grands nombres

Dans tout ce chapitre, on considère  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles (ou complexes) définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et une variable aléatoire  $X$  réelle (ou complexe).

### 1 Différents modes de convergence

#### 1.1 Convergences presque sûre et probabilité

**Définition 1.2.** On dit que  $X_n$  converge **presque sûrement** vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ , si

$$\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

**Remarque.**

1. Cela correspond à la convergence presque partout pour la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ .
2. Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$  et si  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, alors  $h(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} h(X)$ . En particulier, si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$  et  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} Y$ , alors

$$aX_n + bY_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} aX + bY, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

et

$$X_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} XY.$$

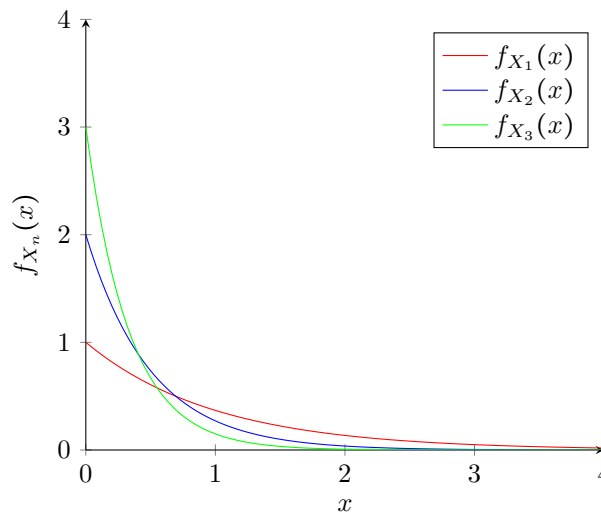
**Définition 1.3.** On dit que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge **en probabilité** vers  $X$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

On note alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ .

Cela signifie que la probabilité que  $X_n$  s'écarte de  $X$  d'un écart supérieur à  $\varepsilon$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exemple.**  $\triangleright$  On considère  $X_n \sim \mathcal{E}(n)$





Regardons  $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon)$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} ne^{-nx} dx \\ &= [-e^{-nx}]_{\varepsilon}^{+\infty} \\ &= e^{-n\varepsilon}.\end{aligned}$$

Donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ .

On peut montrer que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$  (en TD).

**Proposition.** Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ , alors  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On a

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon}}_{f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{0\text{-p.p.}}}]$$

Comme  $|f_n| \leq 1$  qui est intégrable, le théorème de convergence dominée donne

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon}] = 0.$$

□

**Exemple.** On considère  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires de loi

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ .

Supposons que les  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont indépendantes. Les événements  $A_n = \{X_n = n\}$  sont indépendants et vérifient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Donc par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

Donc avec probabilité 1,  $X_n$  prend la valeur  $n$  une infinité de fois. Donc avec probabilité 1,  $(X_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas vers 0. Donc  $(X_n)_{n \geq 1}$  ne converge pas presque sûrement.

**Proposition.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On suppose que les  $X_n$  sont indépendantes et identiquement distribuées (c'est-à-dire de même loi, i.i.d. en abrégé).

On note  $\mu$  leur espérance :  $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Alors

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

On appelle  $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$  la **moyenne empirique**

*Démonstration.*

▷ On calcule d'abord l'espérance de  $\overline{X_n}$  :

$$\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \frac{\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]}{n} = \mu.$$

▷ On calcule ensuite la variance de  $\overline{X_n}$  :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\overline{X_n}) &= \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{\text{Var}(X_1)}{n} \end{aligned}$$

▷ On applique ensuite l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mathbb{E}[\overline{X_n}]| \geq \varepsilon) \\ &\stackrel{\text{B-T}}{\leq} \frac{\text{Var}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{\text{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Donc  $\overline{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu$ . □

**Exemple.** Si les  $X_n$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} p.$$

## 1.4 Convergence dans $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

**Définition 1.5.** Soit  $p \in [1, +\infty]$ . On dit que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $X$  dans  $\mathcal{L}^p$ , notée  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} X$ , si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Remarque.**

1. On rappelle que  $\mathcal{L}^p$  est un espace vectoriel muni de la norme

$$\|\cdot\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\Omega} |X(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Les espaces  $\mathcal{L}^p$  sont décroissants pour l'inclusion : si  $p \leq q$ , alors  $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$  avec l'inégalité  $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$ . Donc la convergence dans  $\mathcal{L}^q$  implique la convergence dans  $\mathcal{L}^p$  pour  $p \leq q$ .

**Proposition.** Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} X$ , alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . On a

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ . □

**Exemple.** On se fixe  $p \in [1, +\infty[$  et on modifie l'exemple précédent en définissant la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  via

$$\mathbb{P}(X_n = n^{\frac{1}{p}}) = \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ .

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|^p] &= \left(n^{\frac{1}{p}}\right)^p \times \frac{1}{n} + 0^p \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc  $X_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} 0$ .

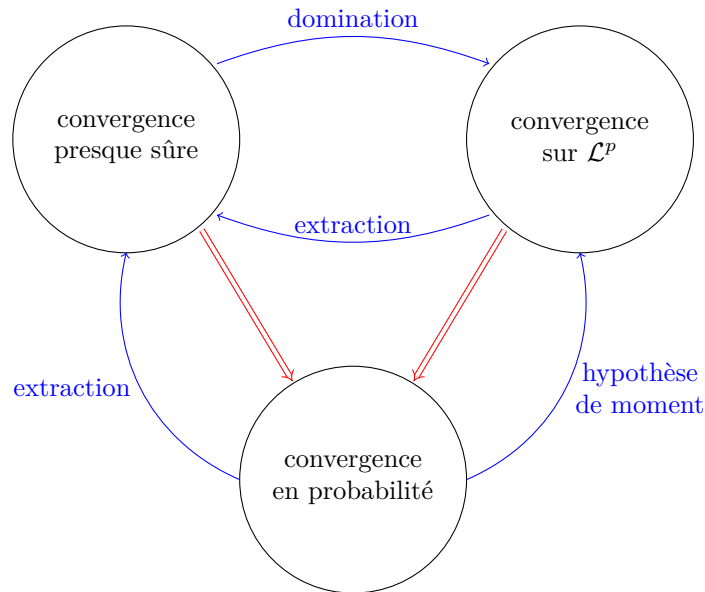
Cependant, si  $q < p$ , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|^q] &= n^{\frac{q}{p}} \times \frac{1}{n} + 0^q \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= n^{\frac{q}{p}-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^q} 0$  pour  $q < p$ .

**Remarque.**

1. Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} X$ , alors il existe une suite extraite  $(n_k)_{k \geq 1}$  telle que  $X_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ .
2. Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$  et si  $|X_n| \leq Y \in \mathcal{L}^p$ , alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} X$  (par convergence dominée).
3. Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$  alors il existe une suite extraite  $(n_k)_{k \geq 1}$  telle que  $X_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X$ .
4. Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$  et s'il existe  $M > 0$  tel que  $\mathbb{E}[|X_n|^p] \leq M$ , alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^q} X$  pour  $q \in [1, p[$ .



## 2 Loi forte des grands nombres

## 2.1 Le résultat

**Théorème.** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. dans  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Alors

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1].$$

**Remarque.**

1. Si les  $X_n$  sont des variables aléatoires positives d'espérance infinie ( $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$ ), alors le théorème reste vrai au sens suivant :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} +\infty.$$

2. La convergence est également vérifiée dans  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^p} \mathbb{E}[X_1].$$

*Démonstration.*

▷ Posons  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  et  $S_0 = 0$ .

Considérons  $a \geq \mathbb{E}[X_1]$

▷ Idée : on va montrer que

$$S_n - na \leq M < +\infty \quad \text{p.s.}$$

pour un certain  $M$ . Si c'est vrai, alors

$$\frac{S_n}{n} \leq a + \frac{M}{n} \quad \text{p.s.}$$

et donc

$$\left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \right) \leq a \quad \text{p.s.}$$

et on conclut en faisant tendre  $a$  vers  $\mathbb{E}[X_1]$ .

▷ On pose

$$M_n = \max_{k=0, \dots, n} (S_k - ka) = \max(0, X_1 - a, X_1 - a + X_2 - a, \dots, (X_1 - a) + \dots + (X_n - a)).$$

La suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  est positive et croissante, donc elle converge presque sûrement vers

$$M = \sup_{n \geq 0} (S_n - na) \in [0, +\infty].$$

▷ Étape 1 : montrons que  $\mathbb{P}(M = \infty) \in \{0, 1\}$

Pour  $k \geq 1$ , on écrit

$$\begin{aligned} \{M = \infty\} &= \left\{ \sup_{n \geq 0} (X_1 + \dots + X_n - na) = +\infty \right\} \\ &= \left\{ \sup_{n \geq k} (X_k + \dots + X_n - na) = +\infty \right\} \end{aligned}$$

Ce dernier événement dépend uniquement de  $X_k, X_{k+1}, \dots$ . Donc il appartient à  $\overline{\mathcal{F}_k} \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$ . Ceci étant vrai pour tout  $k \geq 1$ , on en déduit que

$$\{M = \infty\} \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{\mathcal{F}_k} = \mathcal{F}_\infty.$$

Les  $X_n$  étant indépendantes, la loi du 0-1 de Kolmogorov assure que  $\mathbb{P}(M = \infty) \in \{0, 1\}$ .

▷ Étape 2 : montrons que  $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$

On pose  $S'_n = X_2 + \dots + X_{n+1}$ ,  $n \geq 1$  et  $S'_0 = 0$ . Alors

$$M'_n = \max_{k=0, \dots, n} (S'_k - ka) = \max(0, X_2 - a, X_2 - a + X_3 - a, \dots, (X_2 - a) + \dots + (X_{n+1} - a)).$$

On obtient la relation

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \max(0, M'_n + (X_1 - a)) \\ &= M'_n - \min(a - X_1, M'_n). \end{aligned}$$

Comme avant, la suite  $(M'_n)_{n \geq 0}$  est croissante positive donc converge vers  $M' = \sup_{n \geq 0} (M'_n - na) \in [0, +\infty]$ .

Comme les variables aléatoires  $X_n$  sont i.i.d., on en déduit que  $(S_n)_{n \geq 0}$  et  $(S'_n)_{n \geq 0}$  ont même loi. De même,  $M_n$  et  $M'_n$  ont même loi et  $M$  et  $M'$  ont même loi. Alors

$$\mathbb{E}[\min(a - X_1, M'_n)] = \underbrace{\mathbb{E}[M'_n] - \mathbb{E}[M_{n+1}]}_{\mathbb{E}[M_n]} \leq 0$$

Or, la suite  $Y_n = \min(a - X_1, M'_n)$  converge vers  $Y = \min(a - X_1, M')$  et vérifie  $|Y_n| \leq |a - X_1|$  qui est intégrable.

On en déduit que

$$\mathbb{E}[\min(a - X_1, M')] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\min(a - X_1, M'_n)] \leq 0.$$

Si on suppose que  $\mathbb{P}(M = \infty) = 1$ , alors  $\mathbb{P}(M' = \infty) = 1$  (de même loi) et donc  $\mathbb{E}[\min(a - X_1, M')] = \mathbb{E}[a - X_1]$ , ce qui donne  $a \leq \mathbb{E}[X_1]$ , ce qui est exclu. Donc  $\mathbb{P}(M = \infty) = 0$ , c'est-à-dire que  $M$  est fini presque sûrement.

▷ Étape 3 : Conclusion

Comme  $M = \sup_{n \geq 0} (S_n - na)$ , on obtient pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} S_n - na &\leq M \\ \frac{S_n}{n} &\leq a + \frac{M}{n} \end{aligned}$$

Par suite, comme  $M$  est fini p.s., on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq a\right) = 1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq \mathbb{E}[X_1]\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{a > \mathbb{E}[X_1] \\ a \in \mathbb{Q}}} \left\{\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq a\right\}\right) \\ \text{décroissance monotone} &= \lim_{\substack{a \searrow \mathbb{E}[X_1] \\ a \in \mathbb{Q}}} \mathbb{P}\left(\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}\right) \leq a\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En faisant de même avec  $-X_n$ , on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}\right) \geq \mathbb{E}[X_1]\right) = 1.$$

Ceci prouve que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1]\right) = 1.$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1]\right) = 1.$$

□

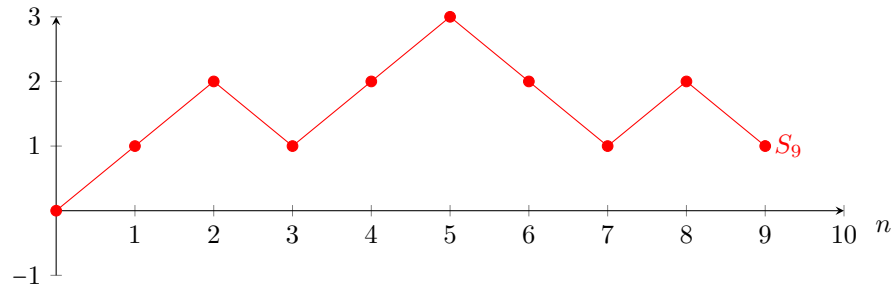
## 2.2 Applications

### Marche aléatoire non centrée

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelle i.i.d. intégrables. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . On appelle souvent  $(S_n)_{n \geq 1}$  une **marche aléatoire**.

**Exemple.** On considère  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. comme suit :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$



Dans le cas général, supposons que  $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$ . La loi forte des grands nombres donne alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1]$$

donc

$$\left| \frac{S_n}{n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} +\infty, \quad \left( \mathbb{P} \left( |S_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \right) = 1 \right).$$

### Approximation d'intégrales

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable. On souhaite calculer

$$\int_0^1 f(x) d\lambda_1(x).$$

Souvent, on ne sait pas faire donc on cherche une valeur approchée. Soient  $U_1, \dots, U_n$  des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Alors, les variables aléatoires  $f(U_1), \dots, f(U_n)$  sont i.i.d. et intégrables donc la loi forte des grands nombres donne

$$\frac{f(U_1) + \dots + f(U_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[f(U_1)] = \int_0^1 f(x) d\lambda_1(x).$$

▷ Avantages de la méthode : aucune hypothèse de régularité sur  $f$  et extensible au cas  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (en considérant  $U_1, \dots, U_n$  uniformes sur  $[0, 1]^d$ ).

▷ Inconvénient : convergence lente (en  $\sqrt{n}$ ).

Cette méthode est appelée **méthode de Monte-Carlo**.