Topologie des espaces métriques — Cours

Ivan Lejeune

5 février 2025

Table des matières

Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique) . . . 2
1 Espaces métriques . . . 2
2 Ouverts d'un espace métrique . . . 3
3 Constructions de topologies . . . 5
3.1 Topologie induite . . . 5

Chapitre 1 — Topologie (d'un espace métrique)

1 Espaces métriques

Soit X un ensemble.

Définition 1.1. On appellle une **distance** (ou métrique) sur X une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y, z \in X$,

(i) la distance est *positive* :
$$d(x,y) \geq 0$$

(ii) la distance possède la *séparation* :
$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

(iii) la distance est *symétrique* :
$$d(x,y) = d(y,x)$$

(iv) la distance vérifie l'*inégalité triangulaire* :
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Exemple. Un exemple classique de distance est la **distance euclidienne** sur $\mathbb{R}^n$:
$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Définition 1.2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) la norme possède la *séparation* :
$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$

(ii) la norme est *homogène* :
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$

(iii) la norme vérifie l'*inégalité triangulaire* :
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Exercice $\star$.
Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, alors la fonction
$$d(x,y) = \|x - y\|$$
est une distance sur E.

Exemple. Un exemple classique est $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Exercice $\star$.
Soit X et $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ telle que
$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que δ est une distance sur X appelée **distance discrète**.

Remarque. Si on considère $\mathbb{R}$ muni de δ alors δ n'est pas une norme.

2 Ouverts d'un espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 2.1. Pour $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X$, on note

$$\mathsf{B}(x_0, \varepsilon[= \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

la **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon ε.

Définition 2.2. Une partie $U \subset X$ est dite **ouverte** si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathsf{B}(x, \varepsilon[\subset U$.

Exemple.

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne, on a

$$\mathsf{B}(x_0, \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

  qui est l'intervalle ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
- Un contre-exemple est l'intervalle $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas ouvert.

Définition 2.3. On note $\mathcal{T}_d = \{$**ouverts de** $X\}$

Proposition. On a les propriétés suivantes :

(i) $X \in \mathcal{T}_d$ et $\varnothing \in \mathcal{T}_d$,

(ii) Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est une famille de $\mathcal{T}_d$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$,

(iii) Si $\{U_i\}_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ est une famille finie de $\mathcal{T}_d$, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$.

Démonstration.

(i) Par convention de logique, on a $\varnothing \in \mathcal{T}_d$. Soit $x \in X$, alors $\mathsf{B}(x, 1[\subset X$, donc $X \in \mathcal{T}_d$.

(ii) Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Comme $U_i \in \mathcal{T}_d$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathsf{B}(x, \varepsilon[\subset U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

(iii) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $x \in U_i$. Comme $U_i \in \mathcal{T}_d$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $\mathsf{B}(x, \varepsilon_i[\subset U_i$. Posons $\varepsilon = \min_{i=1}^n \varepsilon_i$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathsf{B}(x, \varepsilon[\subset U_i$. Donc $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_d$.

$\square$

Définition 2.4. Soit X un ensemble (pas forcément métrique). On dit que $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(x)$ est une **topologie** sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) $X \in \mathcal{T}$ et $\varnothing \in \mathcal{T}$,

(ii) Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est une famille de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,

(iii) Si $\{U_i\}_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ est une famille finie de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés **ouverts** de X. On dit alors que $(X, \mathcal{T})$ est un **espace topologique**.

Exemple. Soit X un ensemble. On a les exemples suivants :

(a) Si (X, d) est un espace métrique, alors $\mathcal{T}_d$ est une topologie sur X.

(b) $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ est une topologie sur X.

(c) $\mathcal{T} = \mathscr{P}(X) = \mathcal{T}_\delta$ est une topologie sur X où δ est la distance discrète.

(d) Si $X = \{a, b\}$, alors $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$ est une topologie sur X.

Définition 2.5. Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est **continue** si pour tout ouvert $V \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Définition 2.6. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est **fermé** si $X \smallsetminus A$ est ouvert.

Remarque. Un ensemble $A \subset X$ peut être ouvert et fermé en même temps.

Exemple. Si on se place dans $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne, alors l'intervalle $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Proposition de relation avec la continuité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.
Une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pour tout $x_0 \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Démonstration. On commence par énoncer et démontrer un lemme qui nous sera utile :

Lemme. Soit (X, d) un espace métrique. Une boule ouverte sur X est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_d$.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. On a $\mathsf{B}(x_0, \varepsilon[\in \mathcal{T}_d$ par définition de la topologie.
Soit $x \in \mathsf{B}(x_0, \varepsilon[$, alors $d(x, x_0) < \varepsilon$. Posons $\delta = \varepsilon - d(x, x_0)$, alors $\delta > 0$.
Soit $y \in \mathsf{B}(x, \delta[$, alors $d(y, x) < \delta$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) \\ &< \delta + d(x, x_0) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $y \in \mathsf{B}(x_0, \varepsilon[$, donc $\mathsf{B}(x, \delta[\subset \mathsf{B}(x_0, \varepsilon[$. □

Revenons à la preuve de la proposition.
▷ Sens direct :
Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que $B = \mathsf{B}(f(x_0), \varepsilon[$ est un ouvert de Y, donc $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X.
On sait que $x_0 \in f^{-1}(B)$, ouvert par hypothèse. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathsf{B}(x_0, \delta[\subset f^{-1}(B)$$

Donc pour tout $x \in X$,

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

▷ Sens réciproque :
Soit $V \in \mathcal{T}_Y$, alors V est un ouvert de Y. Soit $x_0 \in f^{-1}(V)$, alors $f(x_0) \in V$. Comme V est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathsf{B}(f(x_0), \varepsilon[\subset V$.
Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Donc $\mathsf{B}(x_0, \delta[\subset f^{-1}(V)$, donc $f^{-1}(V)$ est ouvert. □

Remarque. Si f est une fonction bijective et continue, sa réciproque f^{-1} n'est pas forcément continue.

Définition 2.7. On dit que f est un **homéomorphisme** si f est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

Remarque. Une fonction continue et bijective n'est pas forcément un homéomorphisme.

Définition 2.8. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ une application bijective.
On dit que f est une **isométrie** si

$$\forall x, y \in X, \quad d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

Exercice. Montrer les propriétés suivantes :

(i) Si f est une isométrie, alors f est un homéomorphisme.

(ii) Si f (non bijective) a la propriété suivante :

$$\forall x, y \in X, \quad d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

alors f est injective.

Définition 2.9. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ une application et $\alpha > 0$.
On dit que f est **α-Hölderienne** si pour tout $x, y \in X$,

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)^{\alpha}$$

avec $K > 0$.

Exercice $\star$. Montrer que si f est α-Hölderienne, alors f est continue.

Remarque. Si $\alpha = 1$, on dit que f est **Lipschitzienne**.

3 Constructions de topologies

Dans la suite on se donnera deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

3.1 Topologie induite

Définition 3.2. Soit $A \subset X$. On appelle **topologie induite** sur A (par X) la topologie

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}_X\}$$

Proposition. $\mathcal{T}_A$ est une topologie sur A.

Démonstration. On a

(i) $A \cap X = A \in \mathcal{T}_A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing \in \mathcal{T}_A$,

(ii) Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{T}_A$, alors

$$\bigcup_{i \in I} U_i = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \in \mathcal{T}_A$$

(iii) Soit $\{U_i\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille finie de $\mathcal{T}_A$, alors

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \in \mathcal{T}_A$$

□

Proposition. Soit $A \subset X$ et $f : X \to Y$ une application continue. Alors $f_{|A} : A \to Y$ est continue.

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{T}_Y$. On a

$$f_{|A}^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$$

ouvert de A, donc $f_{|A}$ est continue. □

Exercice. Soit $A \subset X, f : X \to Y$ et

$$\begin{aligned} i : A &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(a) Montrer que i est continue.

(b) En déduire que $f_{|A}$ est continue.