Théorie des probabilités — TDs

Ivan Lejeune

13 novembre 2024

Table des matières

TD1 — Espaces probabilisés

Exercice 1.1.

1. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et $x \in \Omega$. Montrer que
$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$$
définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
2. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $[0,1]$ telle que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$
Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(I)$ finie et strictement positive. Montrer que
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$
définit une probabilité sur $(I, \mathscr{B}(I))$.
4. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré (pas forcément de probabilité) et $f : \Omega \to [0, \infty[$ une fonction mesurable telle que
$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) = 1.$$
Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathscr{F} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)\, d\mu(\omega) \end{aligned}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

Solution.

1. Commençons par montrer que
$$\delta_x(A)$$
est une mesure, puis que c'est une probabilité.
   - ▷ Pour faire un rappel, vérifions les propriétés d'une mesure :
     - — On a bien $\delta_x(\varnothing) = 0$ pour tout $x \in \Omega$
     - — On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$. Alors
$$\begin{aligned} \delta_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{1}_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_x A_n \end{aligned}$$

     Ainsi, $\delta_x(A)$ est bien une mesure.

- ▷ Comme $x \in \Omega$, on a toujours $\delta_x(\Omega) = 1$.

Ainsi, comme δ_x est une mesure et $\delta_x(\Omega) = 1$, on a bien que δ_x est une probabilité.

2. On considère
$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$
Vérifions les hypothèses d'une probabilité :
   - ▷ On a
$$\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\mathbb{P}_n(\varnothing)}_{=0} = 0$$
   - ▷ On considère $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints. Alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n(A_k)}_{=\mathbb{P}(A_k)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\end{aligned}$$
     On rappelle qu'on peut intervertir les deux sommes car tous les éléments sont positifs
   - ▷ Enfin, on a
$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\mathbb{P}_n(\Omega)}_{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

3. On considère
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$
Comme λ est une mesure et $\frac{1}{\lambda(I)} \geq 0$, on a bien que $\mathbb{P}$ est une mesure. Montrons maintenant que c'est une probabilité :
▷ Comme
$$\mathbb{P}(I) = \frac{\lambda(I)}{\lambda(I)} = 1$$
on a bien que $\mathbb{P}$ est une probabilité.

4. On considère
$$\mathbb{P}(A) = \int_{\Omega} f(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_A f(\omega)\, d\mu(\omega)$$
On vérifie les hypothèses :
   - ▷ On a
$$\mathbb{P}(\varnothing) = \int_{\Omega} f(\omega) \mathbb{1}_{\varnothing}(\omega)\, d\mu(\omega) = 0$$
   - ▷ On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles 2 à 2 disjoints de $\mathscr{F}$. Alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \int_{\Omega} f(\omega) \mathbb{1}_{\cup_{n=0}^{\infty} A_n}(\omega)\, d\mu(\omega)\\ &= \int_{\Omega} f(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\, d\mu(\omega)\end{aligned}$$

Comme on a la positivité et la somme est finie, on peut appliquer le théorème de convergence monotone pour intervertir somme et integrale. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \int_\Omega f(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega f(\omega) \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

▷ On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= \int_\Omega f(\omega)\, \underbrace{\mathbb{1}_\Omega(\omega)}_{=1}\, d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) \\ &= 1\end{aligned}$$

On a donc montré que $\mathbb{P}$ est une probabilité

Exercice 1.2. On considère la mesure $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{oo0,2}(x)\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
On peut imaginer que cette mesure représente le temps d'attente à un carrefour composé de trois feux piétons (rouge, vert), chaque feu restant au vert pendant une minute.

1. Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.
2. Calculer $\mathbb{P}([a,b])$ pour tout intervalle $0 \leq a < b \leq 2$.
3. Déterminer

$$\int_\mathbb{R} x\, d\mathbb{P}(x), \qquad \text{puis} \qquad \int_\mathbb{R} x^2\, d\mathbb{P}(x).$$

Solution. On rappelle que

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\lambda$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{3}\delta_0(A) + \frac{1}{3}\int_A \mathbb{1}_{]0,2[}(x)\, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{3}\delta_0(A) + \frac{1}{3}\lambda\left(]0,2[\cap A\right)\end{aligned}$$

1. On vérifie que c'est une probabilité :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\mathbb{P}_1 + \frac{2}{3}\mathbb{P}_2$$

avec $\mathbb{P}_1 = \delta_0$ et $\mathbb{P}_2 = \frac{1}{2}\lambda\left(]0,2[\cap \cdot\right)$.
L'exercice 1 assure que $\mathbb{P}$ est une probabilité

2. On a

$$\mathbb{P}_1\left([a,b]\right) = \delta_0\left([a,b]\right) = \mathbb{1}_{\{0\}}(a)$$

et

$$\mathbb{P}_2\left([a,b]\right) = \frac{1}{2}\lambda\left(]0,2[\cap [a,b]\right) = \frac{b-a}{2}$$

Alors
$$\mathbb{P}([a,b]) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\{0\}}(a) = \frac{1}{3}(b-a)$$

3. On a
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x\, d\mathbb{P}(x) &= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x\, d\delta_0(x) + \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\, d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$
Il suit
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mathbb{P}(x) &= \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\delta_0(x) + \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} x^2\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\, d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{3}\times 0^2 + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

Exercice 1.3. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soient A et B deux événements.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A\cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}.$$
   (b) On considère le lancer d'un dé équilibré. Proposer un exemple d'événements A et B (d'intersection non vide) pour lequel l'inégalité de gauche est une égalité. Même question pour l'inégalité de droite.
2. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des n événements, alors
$$\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1) \leq \mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n) \leq \min_{1\leq i\leq n}\mathbb{P}(A_i).$$

Solution.

1. On a
   (a) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) \leq 1$ et $A\cap B\subset A$, $\quad A\cap B\subset B$, on en déduit facilement les inégalités.
   (b) On peut considérer
   $$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{3,4,5,6\}$$
   Alors
   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{6}{6} \quad = \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6} \quad = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(A\cap B)$$
   Pour la deuxième partie, on peut considérer
   $$A = \{1\}, \quad B = \{1,2\}$$
   Alors
   $$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) \quad = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{6} \quad = \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$$
2. On fait une preuve par récurrence :

- ▷ Hypothèse :

$$\mathbb{P}(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1) \leq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i)$$

l'initialisation est montrée à l'exercice 1.

- ▷ Hérédité :

On suppose $\mathbb{P}(n)$ vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, prouvons $\mathbb{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}) \\ &\geq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - 1 \\ &\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) - n\end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &\leq \min\left(\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}), \mathbb{P}(A_n)\right) \\ &\leq \min\left(\min \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\right) \cdots \\ &\leq \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathbb{P}(A_i)\end{aligned}$$

TD2 — Variables aléatoires

Exercice 2.1. On tire deux fois avec remise dans une urne contenant trois boules numérotées $1, 2, 3$. On désigne par X la somme des résultats obtenus. Montrer que X est une variable aléatoire discrète entre un espace probabilisé et un espace mesurable à déterminer. Donner la loi de X.

Solution. On veut montrer que X est une application mesurable de Ω dans E. Déterminons d'abord l'espace de départ $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.
▷ L'espace de départ correspond à l'ensemble des résultats possibles pour chaque boule tirée, donc

$$\Omega = \{1, 2, 3\}^2$$

qu'on munit de la tribu pleine.
▷ L'espace d'arrivée correspond aux résultats étudiés, soit ici

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

qu'on munit aussi de la tribu pleine.
▷ Alors, on a

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to E \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

▷ La loi de X est donc une probabilité uniforme sur E, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}_X(a) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{si } a \in \{2, 6\} \\ \frac{2}{9} & \text{si } a \in \{3, 5\} \\ \frac{1}{3} & \text{si } a \in \{4\} \end{cases}$$

avec a un singleton de E. Alors

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{9}\delta_2 + \frac{2}{9}\delta_3 + \frac{1}{3}\delta_4 + \frac{2}{9}\delta_5 + \frac{1}{9}\delta_6$$

Exercice 2.2. On suppose que la basketteuse française Marine Johannés a une probabilité 0.8 de marquer un lancer franc.

1. Lors d'un entraînement, elle tente une série de 10 lancers francs. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de paniers marqués.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Déterminer la probabilité que Marine Johannés marque huit paniers ou plus.
   (c) Donner l'espérance et la variance de X.
2. Lors d'un autre entraînement, Marine Johannés décide de tirer jusqu'à ce qu'elle inscrive un panier. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.
   (a) Donner la loi de Y.
   (b) Déterminer la probabilité que Marine Johannés ait besoin de strictement plus de 3 essais pour marquer son premier panier.
   (c) Donner l'espérance et la variance de Y.

Solution.

1. Marine Johannés fait 10 lancers avec une probabilité de réussite de 0.8.
   (a) La loi de X est donnée par $\mathcal{B}(10, 0.8)$. Alors

$$\mathbb{P}_X(k) = \binom{n}{k} * p^k * 1 - p^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

(b) La probabilité de marquer 8 paniers ou plus vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 8) &= \mathbb{P}_X(8) + \mathbb{P}_X(9) + \mathbb{P}_X(10) \\ &= \binom{10}{8} * 0.8^8 * 0.2^2 + \binom{10}{9} * 0.8^9 * 0.2 + \binom{10}{10} * 0.8^{10} * 0.2^0 \\ &= 0.6778 \simeq 68\%\end{aligned}$$

(c) L'espérance et la variance de X sont respectivement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= n * p = 10 * 0.8 = 8 \\ \mathbb{V}(X) &= n * p * (1-p) = 10 * 0.8 * 0.2 = 1.6\end{aligned}$$

2. On considère la variable aléatoire Y donnant le nombre d'essais nécessaires pour marquer un panier.
   (a) La loi de Y est donnée par
   $$\mathbb{P}_Y(n) = 0.8 * 0.2^{n-1}$$
   et donc $Y \sim \mathcal{G}(0.8)$.
   (b) La probabilité que Marine Johannés ait besoin de strictement plus de 3 essais pour marquer son premier panier est équivalente à la probabilité qu'elle ne marque pas son premier panier en 1, 2 ou 3 essais, soit
   $$1 - \left(0.8 + 0.8 * 0.2 + 0.8 * 0.2^2\right) = 0.008$$
   (c) L'espérance et la variance de Y sont respectivement
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p} = \frac{1}{0.8} = 1.25 \\ \mathbb{V}(Y) &= \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.2}{0.8^2} \simeq 0.31\end{aligned}$$

Exercice 2.3. On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes. On considère la variable aléatoire $X = (X_1, X_2)$ où X_1 donne le nombre de cartes rouges tirées et X_2 le nombre de cartes noires.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de X

Solution.

1. La variable aléatoire X prend les valeurs dans
   $$\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$$
   car on tire deux cartes et qu'il n'y a que deux couleurs.
2. La loi de X est donnée par
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(0,2) &= \frac{26}{52} * \frac{25}{51} = \frac{25}{102} \\ \mathbb{P}_X(1,1) &= \frac{26}{52} * \frac{26}{51} + \frac{26}{52} * \frac{26}{51} = \frac{52}{102} \\ \mathbb{P}_X(2,0) &= \frac{26}{52} * \frac{25}{51} = \frac{25}{102}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > t) &= \int_t^\infty f_X(u)\, d\lambda_1(u) \\
&= \int_t^\infty \theta e^{-\theta u}\, d\lambda_1(u) \\
&= \left[-e^{-\theta u}\right]_t^\infty \\
&= e^{-\theta t}
\end{aligned}
$$

TD3 — Moments d'une variable aléatoire

Exercice 3.1. Soit X une variable aléatoire discrète de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta_{x_k}$, avec x_k une suite de réels et p_k des réels positifs qui somment à 1.

1. Détermnier, sous réserve d'existence, la valeur de $\mathbb{E}[X^p]$ pour tout entier naturel p.
2. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ pour X suivant respectivement les lois suivantes :
   - loi de Bernoulli,
   - loi binomiale,
   - loi de Poisson.

Solution.

1. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^p] &= \int_{\mathbb{R}} x^p \, d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^p \, d\delta_{x_k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k^p p_k\end{aligned}$$
Cette quantité existe si $\mathbb{E}\big[|X|^p\big] < \infty$, c'est-à-dire si $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p p_k < \infty$.
2. On applique la formule précédente pour les lois suivantes :
   - loi de Bernoulli : $X \sim \mathcal{B}(1, p)$, on a
   $$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad p_0 = 1 - p, \quad p_1 = p$$
   alors
   $$\mathbb{E}[X] = 0 * (1-p) + 1 * p = p$$
   - loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, on a
   $$x_k = k, \quad p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
   alors
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ {}_{k=j+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j-1} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} \\ &= np\end{aligned}$$
   - loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, on a
   $$x_k = k, \quad p_k = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \\
&= e^{-\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{(k-1)!} \\
{\scriptstyle k=j+1} &= e^{-\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^{j+1}}{j!} \\
&= e^{-\theta} \theta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!} \\
&= e^{-\theta} \theta e^{\theta} \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Exercice 3.2.

1. Calculer les moments à tout ordre d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra commencer par le cas $\lambda = 1$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle positive. À l'aide du théorème de Fubini, montrer que pour tout entier k,
$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = \int_0^{\infty} t^{k-1} \mathbb{P}(X > t) \, d\lambda_1(t)$$
3. En déduire la relation $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour tout entier $k \geq 1$, où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler :
$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt, \quad x > 0$$

Solution.

1. On a
$$\mathbb{P}_X = f_X \, d\lambda_1, \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

▷ Cas $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^p] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) \, d\lambda_1(x) \\
&= \int_0^{\infty} x e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= [-x e^{-x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

▷ Formule de récurrence :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^p] &= \int_{\mathbb{R}} x^p e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= [-x^p e^{-x}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \, d\lambda_1(x) \\
&= 0 + p \mathbb{E}\left[X^{p-1}\right]
\end{aligned}$$

Donc par récurrence, on a $\mathbb{E}[X^p] = p!$.

▷ Cas général avec $\lambda > 0$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y^p] &= \int_0^{\infty} x^p \lambda e^{-\lambda x} \, d\lambda_1(x) \\
{\scriptstyle y=\lambda x} &= \int_0^{\infty} \frac{y^p}{\lambda^p} e^{-y} \, d\lambda_1(y) \\
&= \frac{p!}{\lambda^p}
\end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}
k\int_0^\infty t^{k-1}\mathbb{P}(X>t)\,dt &= k\int_0^\infty t^{k-1}\int_\Omega \mathbb{1}_{X(\omega)>t}\,d\mathbb{P}(\omega)\,dt \\
&= k\int_0^\infty \int_\Omega t^{k-1}\mathbb{1}_{X(\omega)>t}\,d\mathbb{P}(\omega)\,dt
\end{aligned}$$

où le terme à intégrer est

$$(\omega,t)\mapsto t^{k-1}\mathbb{1}_{X(\omega)>t}$$

qui est mesurable et positif, donc on peut inverser l'ordre d'intégration par Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
k\int_\Omega\left(\int_0^\infty t^{k-1}\mathbb{1}_{X(\omega)>t}\,dt\right)d\mathbb{P}(\omega) &= k\int_\Omega\left(\int_0^{X(\omega)} t^{k-1}\,dt\right)d\mathbb{P}(\omega) \\
&= k\int_\Omega\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^{X(\omega)} d\mathbb{P}(\omega) \\
&= k\int_\Omega \frac{X(\omega)^k}{k}\,d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_\Omega X(\omega)^k\,d\mathbb{P}(\omega) \\
&= E\left[X^k\right]
\end{aligned}$$

3. On considère $X\sim\mathcal{E}(1)$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{E}\left[X^k\right] = k\int_0^\infty t^{k-1}\mathbb{P}(X>t)\,dt$$

Or ici, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X>t) &= \int_t^\infty e^{-u}\,du \\
&= \left[-e^{-u}\right]_t^\infty \\
&= e^{-t}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^k\right] &= \int_0^\infty t^{k-1}e^{-t}\,dt \\
&= k\Gamma(k)
\end{aligned}$$

Donc $\Gamma(k)=(k-1)!$.

Exercice 3.3. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Comparer la probabilité

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu|\geq c\sigma\right)$$

donnée dans la table avec les majorations obtenues par les inégalités de Bienaymé-Tchebychev pour

$$c=0.5,\quad c=1,\quad c=1.5,\quad c=2,\quad c=2.5$$

Solution. On pose $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$, alors $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|X-\mu|\geq c\sigma\right) &= \mathbb{P}\left(|Y|\geq c\right) \\
&= 2\mathbb{P}(Y\geq c) \quad = 2(1-\mathbb{P}(Y\leq c)) = 2(1-\Phi(c))
\end{aligned}$$

avec

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$

On rappelle par exemple que $\Phi(1.36)=0.9131$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq c\sigma\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2\sigma^2} = \frac{1}{c^2}$$

Les résultats sont alors les suivants :

c	$\mathbb{P}\left(\lvert X-\mu\rvert \geq c\sigma\right)$	$\frac{1}{c^2}$
0.5	0.617	4
1	0.3174	1
1.5	0.1336	0.4444
2	0.0456	0.25
2.5	0.0124	0.16

TD4 — Fonctions associées à une variable aléatoire

Exercice 4.1. Rappeler la définitions de la fonctions caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X et calculer φ_X pour les lois suivantes :

1. X suit une loi uniforme sur $[a,b]$,
2. X suit une loi exponentielle de paramètre λ,
3. X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$,
4. X suit une loi normale centrée réduite. On pourra dériver (en justifiant) la fonction caractéristique φ_X puis, après intégration par parties, en déduire que φ_X est solution d'une équation différentielle que l'on pourra résoudre.

Solution. On rappelle dans le cas général que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est définie par

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

1. On a

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{f_X(x)\,d\lambda_1(x)}_{d\mathbb{P}_X(x)} \\
&= \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a}\,d\lambda_1(x) \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_a^b \\
&= \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}
\end{aligned}$$

2. On a

$$f_X(t) = \theta e^{-\theta t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{f_X(x)\, d\lambda_1(x)}_{d\mathbb{P}_X(x)} \\
&= \int_0^{+\infty} e^{itx}\theta e^{-\theta x}\, d\lambda_1(x) \\
&= \theta\left[\frac{e^{(it-\theta)x}}{it-\theta}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\theta}{\theta - it}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}\delta_n$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}\delta_n(x)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\delta_n(x)}_{e^{itn}} \\
&= e^{it}p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}e^{it(n-1)} \\
&= \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}
\end{aligned}$$

4. On a

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

alors

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{h(t,x)} d(x)
\end{aligned}$$

▷ À t fixé, on a $x \mapsto h(t,x)$ intégrable par rapport à λ_1.
▷ À x fixé, on a $t \mapsto h(t,x)$ dérivable par rapport à t
▷ On dérive par rapport à t

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\right| &= \left|ixe^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right| \\
&= \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(t) &= \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\
&= \left|-ie^{itx}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} -i\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}ite^{itx}\,dx \\
&= -t\varphi_X(t)
\end{aligned}$$

Cette équation différentielle a pour solution

$$\varphi_X(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

Comme $\varphi_X(0) = 1$, on trouve

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Exercice 4.2. Soit $X \simeq \mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer la fonction de répartition de $-X$ en fonction de celle de X. Qu'en déduit-on ?
2. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, puis calculer $\mathbb{E}[Y]$.
3. Reprendre la questions précédente avec $Z = \exp X$.

Solution.

1. On prend $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
F_{-X}(t) &= \mathbb{P}(-X \le t) = \mathbb{P}(X \ge -t) \\
\mathbb{P}(X \in [-t,+\infty[) &= \int_{-t}^{+\infty} f_X(x)\,dx \\
x = -u &= \int_{t}^{-\infty} f_X(-u) - du \\
f_X \text{ est paire} &= \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du \\
&= \mathbb{P}(X \le t) = F_X(t)
\end{aligned}$$

Donc X et $-X$ ont la même fonction de répartition et donc la même loi.

2. On sait que $Y = X^2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Donc

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t) = 0, \quad \text{si } t < 0$$

Dans le cas où $t \ge 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \le t) &= \mathbb{P}(X^2 \le t) = \mathbb{P}(|X| \le \sqrt{t}) \\
&= \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) \\
&= 2\mathbb{P}(0 \le X \le \sqrt{t}) \\
&= 2\int_0^{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx - \underbrace{2\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx}_{1} \\
&= 2F_X(\sqrt{t}) - 1
\end{aligned}$$

Il suit

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2F_X(\sqrt{t}) - 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et donc F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$F'_Y(t) = \frac{F'_X(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

et donc Y a pour densité

$$f_Y(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

On a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} y \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}}\, dy$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] = E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

car on a la variance de X est égale à 1.

3. On sait que $Z = \exp X$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$$F_Z(t) = 0, \quad \text{si } t < 0$$

Dans le cas où $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\exp X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t) \\ &= F_X(\ln t) \end{aligned}$$

Donc F_Z est dérivale sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} F'_Z(t) &= \frac{F'_X(\ln t)}{t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) \\ &= \frac{e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}}}{t\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) \\ &= f_Z(t) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[e^X\right] &= \int_{\mathbb{R}} e^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \\ &= \sqrt{e} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

Exercice 4.3. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice

$$G_X(s) = \alpha(3 + 2s^2)^3, \quad s \in [0, 1]$$

1. Déterminer la valeur de α.
2. Déterminer la loi de X.

3. À partir de G_X, donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

Solution. On rappelle

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{P}(X = n)$$

1. On a $G_X(1) = 1$ donne $\alpha = \frac{1}{125}$.
2. On a

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \frac{1}{125}(3+2s^2)^3 \\ &= \frac{1}{125}\left(27 + 3\times 3^2 \times 2s^2 + 3\times 3\times (2s^2)^2 + 2^3 s^6\right) \\ &= \frac{27}{125} + \frac{54}{125}s^2 + \frac{36}{125}s^4 + \frac{8}{125}s^6 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{P}(X = n) \\ &= \mathbb{P}(X=0) + s^2\mathbb{P}(X=2) + s^4\mathbb{P}(X=4) + s^6\mathbb{P}(X=6) \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière d'un polynôme, la loi de X est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=0) &= \frac{27}{125} \\ \mathbb{P}(X=2) &= \frac{54}{125} \\ \mathbb{P}(X=4) &= \frac{36}{125} \\ \mathbb{P}(X=6) &= \frac{8}{125} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{E}\left[s^X\right] \\ G_X'(s) &= \mathbb{E}\left[X s^{X-1}\right] \end{aligned}$$

donc $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$.