Topologie — TDs

Iv	<i>y</i> an	Leje	eune
31	ian	vier	2025

Table des	m	at	tiè	ère	es													
TD0 .																		2

TD0

Exercice 0.1 Distance discrète. Soit X un ensemble et δ la distance discrète sur cet ensemble.

- 1. Vérifier que δ est bien une distance sur X.
- 2. Déterminer les boules ouvertes et fermées de (X, δ) . Puis, déterminer la topologie T_{δ} associée à δ .

Solution. Commençons par rappeler la définition de la distance discrète :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

- 1. Vérifions les quatres propriétés d'une distance :
 - (i) Positivité: $\forall x, y \in X, \delta(x, y) \ge 0$, vrai par définition.
 - (ii) Séparation : $\forall x, y \in X, \delta(x, y) = 0 \iff x = y$, vrai par définition.
 - (iii) Symétrie : $\forall x, y \in X, \delta(x, y) = \delta(y, x)$, vrai par définition.
 - (iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in X, \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$. Si x = y, alors $\delta(x, y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon, $z \neq x$ et $z \neq y$, donc $\delta(x, z) = \delta(z, y) = 1$. L'inégalité est donc vérifiée.
- 2. Rappelons que la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon r > 0 pour une distance d est

$$\mathsf{B}(x,r[=\{y\in X\mid d(x,y)< r\}.$$

Ici on a plusieurs cas qui se présentent :

- Si $r \le 1$, alors B $(x, r) = \{y \in X \mid \delta(x, y) < r\} = \{x\}$.
- Si r > 1, alors $B(x, r[= \{ y \in X \mid \delta(x, y) < r \} = X.$

Pour les boules fermées on a

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \le r\}.$$

Plusieurs cas qui se présentent :

- Si r < 1, alors $B(x, r[= \{y \in X \mid \delta(x, y) \le r\} = \{x\}.$
- Si $r \ge 1$, alors $B(x, r[= \{ y \in X \mid \delta(x, y) \le r \} = X.$

Exercice 0.2 Distance et normes. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) et $\|\cdot\|$ une norme sur E. Montrer que la fonction

$$d: E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \|y - x\|$$

définit une distance sur E.

Solution. Vérifions les quatres propriétés d'une distance :

- (i) Positivité : $\forall x, y \in E, d(x, y) = ||y x|| \ge 0$ car la norme est positive.
- (ii) Séparation : $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff ||y x|| = 0 \iff y x = 0 \iff y = x$.
- (iii) Symétrie : $\forall x, y \in E, d(x, y) = ||y x|| = ||x y|| = d(y, x)$.
- (iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E, d(x, y) = ||y x|| \le ||y z|| + ||z x|| = d(x, z) + d(z, y)$ par l'inégalité triangulaire de la norme.

Exercice 0.3 Normes sur \mathbb{R}^n . Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n . Montrer que les fonctions

suivantes définissent des normes sur \mathbb{R}^n :

$$N_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
 $x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|,$ et $N_\infty: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \max_{1 \le i \le n} (|x_i|).$

Dessiner leurs boules unités dans le cas n = 2.

Solution. Rappelons les propriétés d'une norme :

- (i) Positivité: $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) \ge 0$, vrai car la somme des valeurs absolues est positive.
- (ii) Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$.
- (iii) Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| N(x)$.
- (iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $N(x+y) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = N(x) + N(y)$.

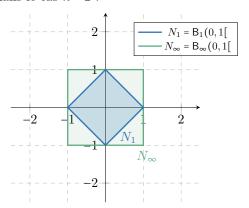
Vérifions maintenant que N_1 est une norme :

- (i) Positivité: $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \ge 0.$
- (ii) Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_1(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$.
- (iii) Homogénéité : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_1(\lambda x) = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| N_1(x)$.
- (iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $N_1(x+y) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| = N_1(x) + N_1(y)$.

Vérifions maintenant que N_{∞} est une norme :

- (i) Positivité: $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_{\infty}(x) = \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) \ge 0.$
- (ii) Séparation : $\forall x \in \mathbb{R}^n, N_{\infty}(x) = 0 \iff \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$.
- (iii) Homogénéité: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_{\infty}(\lambda x) = \max_{1 \le i \le n} (|\lambda x_i|) = |\lambda| \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) = |\lambda| N_{\infty}(x).$
- (iv) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N_{\infty}(x+y) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i + y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) + \max_{1 \leq i \leq n} (|y_i|) = N_{\infty}(x) + N_{\infty}(y).$

Voici leurs boules unités dans le cas n=2 :



Exercice 0.4 Distance Fly Emirates. Soit (X,d) un espace métrique et ω un point fixé de X (Dubaï). On définit la fonction suivante :

$$D: X \times X \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ d(x,\omega) + d(\omega,y) & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

- 1. Montrer que D définit une distance sur X.
- 2. On suppose que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$ et $\omega = (0, 0)$. Pour $a \in X$, dessiner les boules ouvertes centrées en a pour la distance D.
- 3. Montrer que si $x \neq \omega$, le singleton $\{x\}$ est ouvert pour la distance D.

Solution. test