Groupes et Anneaux II — TDs

Ivan Lejeune

30 janvier 2025

Table des matières

TD1 — qqch

Exercice 1.1.

1. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathscr{F}$ et $x \in \Omega$. Montrer que
$$\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$$
définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
2. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $[0,1]$ telle que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$
Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(I)$ finie et strictement positive. Montrer que
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$$
définit une probabilité sur $(I, \mathscr{B}(I))$.
4. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espace mesuré (pas forcément de probabilité) et $f : \Omega \to [0, \infty[$ une fonction mesurable telle que
$$\int_{\Omega} f(\omega)\, d\mu(\omega) = 1.$$
Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathscr{F} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \int_{\Omega} f(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)\, d\mu(\omega) \end{aligned}$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

Solution. test