Groupes et Anneaux II — TDs

Ivan Lejeune

5 février 2025

Table des matières

TD1 — temp, rajouter contenu precedent 2

TD1 — temp, rajouter contenu precedent

Exercice 1.1.

Solution. On a $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \circlearrowleft \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$.
On rappelle que $\mathbb{F}_p \coloneqq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et

$$\begin{aligned} |\mathsf{GL}_n(\mathbb{F}_p)| &= \prod_{k=0}^{n-1}(p^n - p^k) \\ \implies |\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)| &= (2^2 - 2^0)(2^2 - 2^1) = 6. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2) = \{[e_1], [e_2], [e_1 + e_2]\} \simeq \mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}.$$

On peut alors trouver un morphisme de groupe

$$\rho : \mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to \mathfrak{S}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)} \simeq \mathfrak{S}_3$$

On sait aussi que

$$\begin{aligned} A \in \mathsf{Ker}(\rho) &\implies \begin{cases} A[e_1] = [e_1] \\ A[e_2] = [e_2] \\ A[e_1 + e_2] = [e_1 + e_2] \end{cases} \\ &\implies A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{F}_2^\times$. Donc $A = \mathsf{Id}_2$.
Donc ρ est fidèle (injective) et comme

$$|\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)| = 6,$$

on a ρ isomorphisme.
On a $\mathscr{D}_3 \circlearrowleft \mu_3 = \{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ où $\zeta = e^{2i\pi/3}$. Alors

$$\rho : \mathscr{D}_3 \to \mathfrak{S}_{\mu_3} \simeq \mathfrak{S}_3.$$

Observons ce qui arrive quand on agit sur μ_3. On a

$$R^i S^j \cdot \zeta^k = \begin{cases} \zeta^{i+k} & \text{si } j = 0 \\ \zeta^{i-k} & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

On remarque alors que

$$R^i S^j \in \mathsf{Ker}(\rho) \implies i = 0 \text{ et } j = 0$$

pour $0 \le i \le n-1, 0 \le j \le 1$. Donc $\mathsf{Ker}(\rho) = \{e\}$ et ρ est fidèle.
Comme $|\mathscr{D}_3| = 6$, on a ρ isomorphisme.

Exercice 1.2. On a

$$\mathbb{R}^\times = G \circlearrowleft X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

par multiplication par scalaire. Trouver une bijection

$$X/G = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Solution. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : X &\to S^1 \\ z &\mapsto \frac{z^2}{|z^2|}. \end{aligned}$$

Elle est surjective car $e^{i\theta} = f(e^{i\theta/2})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
Elle est injective car

$$f(x) = f(y) \iff [x] = [y] \in X/G.$$

et

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{|x^2|} = \frac{y^2}{|y^2|} &\iff \frac{x}{|x|} = \pm\frac{y}{|y|} \\ &\iff [x] = [y]. \end{aligned}$$

Grâce à la propriété universelle des quotients,

$$\begin{aligned} \exists!\overline{f} : X/G &\to S^1 \\ [z] &\mapsto \frac{z^2}{|z^2|}. \end{aligned}$$

qui est en plus surjective et injective, donc bijective.

Exercice 1.3.

(i) Trouver une bijection de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$. (Bonus : trouver une bijection $\mathbb{R}$-équivalente.)

(ii) Trouver une bijection de $O_n(\mathbb{R})/i(O_{n-1}(\mathbb{R})) \to S^{n-1}$.

Solution.

(i) On considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} \times S^1 &\to S^1 \\ (\lambda, z) &\mapsto e^{2i\pi\lambda}z. \end{aligned}$$

C'est bien une action de $\mathbb{R}$ sur S^1. De plus, comme

$$e^{\theta i} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot 1,$$

α est transitive et donc $S^1 = G \cdot 1$.
Aussi,

$$\begin{aligned} G_1 &= \{g \in G \mid g \cdot 1 = 1\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{R} \mid e^{2i\pi\lambda} = 1\right\} \\ &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\to S^1 \\ [\lambda] &\mapsto e^{2i\pi\lambda} \end{aligned}$$

est une bijection.

(ii) Dans l'exercice 2 on a vu que

$$O_n(\mathbb{R}) = G \circlearrowright X = S^{n-1}.$$

transitivement et on a calculé par $x = e_1 \in S^{n-1}$

$$G_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \middle| D \in O_{n-1}(\mathbb{R}) \right\}.$$

donc on obtient « gratuitement » une bijection G-équivalente

$$\overline{\alpha}_x : O_n(\mathbb{R})/i(O_{n-1}(\mathbb{R})) \to S^{n-1}.$$