

# HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

9 septembre 2025

## Table des matières

TD1. . . . .	2
1.1 Convexité : ensembles et fonctions . . . . .	2

## TD1

### 1.1 Convexité : ensembles et fonctions

**Exercice 1.1 Convexité.** Exercice 1 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.2 Combinaison convexe.** Exercice 2 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.3 Ensembles convexe.** Montrer qu'étant donné un sous-ensemble convexe  $C$  et deux réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  alors on a

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C.$$

**Solution.** Commençons par montrer l'inclusion  $(\alpha + \beta)C \subset \alpha C + \beta C$ .  
Soit  $x \in (\alpha + \beta)C$ . Alors, il existe  $x_0 \in C$  tel que

$$x = (\alpha + \beta)x_0 = \alpha x_0 + \beta x_0.$$

Donc  $x \in \alpha C + \beta C$ .

Montrons maintenant l'inclusion  $\alpha C + \beta C \subset (\alpha + \beta)C$ .

Soit  $x \in \alpha C + \beta C$ . Alors, il existe  $x_1, x_2 \in C$  tels que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha + \beta) \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_2 \right).$$

**Exercice 1.4 Ensembles convexes.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  vérifiant la propriété de **demi-somme** suivante :

$$\forall x, y \in S, \quad \frac{x + y}{2} \in S.$$

1.  $S$  est-il convexe ?
2. Même question si on suppose que  $S$  est fermé.

**Solution.**

1. Non. Par exemple, le sous-ensemble  $S$  suivant :

$$S = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

vérifie la propriété de demi-somme mais n'est pas convexe, car par exemple  $\sqrt{2}/2 \in [0, 1] \notin S$ .

**Exercice 1.5 Ensembles convexes.** Exercice 2 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.6 Ensembles convexes.** Exercice 2 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.7 Fonction convexe.**

1. Est-ce qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe ?
2. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est convexe ?
3. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions convexes, est-ce que  $\max(f_1, f_2)$  est convexe ?

4. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x^2$  est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution.**

1. Oui. On pose  $g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x)$ . Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \sum_{i \in I} \alpha_i (\lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(y)) \\ &= \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y). \end{aligned}$$

2. Non. Par exemple,  $f_1(x) = x$  et  $f_2(x) = x^2$  sont convexes mais  $f_1(x)f_2(x) = x^3$  n'est pas convexe.

3. Oui. On pose  $g(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ . Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \max(f_1(\lambda x + (1 - \lambda)y), f_2(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \\ &\leq \max(\lambda f_1(x) + (1 - \lambda)f_1(y), \lambda f_2(x) + (1 - \lambda)f_2(y)) \\ &\leq \lambda \max(f_1(x), f_2(x)) + (1 - \lambda) \max(f_1(y), f_2(y)) \\ &= \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y). \end{aligned}$$

4. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy \\ &\leq \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 + \lambda(1 - \lambda)(x^2 + y^2) \\ &= \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

**Exercice 1.8 Optional title 2.** Exercice 2 content

**Solution.** Exercice solution