

HAI702I — TDs

Ivan Lejeune

16 septembre 2025

Table des matières

TD1 — Espaces vectoriels	2
TD2 — Transformations linéaires	8

TD1 — Espaces vectoriels

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 1.1.

Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(1, 2, 2)$.

Solution. On rappelle les définitions importantes :

- Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$.
- Une base est orthonormale si ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.
- Une base est directe si le produit vectoriel du premier vecteur par le deuxième donne le troisième.

Commençons par choisir notre premier vecteur u . On veut u colinéaire à $(1, 2, 2)$ donc on a

$$u = \lambda(1, 2, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Ensuite on veut que u soit de norme 1 :

$$\begin{aligned} \|u\| = 1 &\iff \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2} = 1 \\ &\iff \sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1 \\ &\iff \lambda^2(1^2 + 2^2 + 2^2) = 1 \\ &\iff 9\lambda^2 = 1 \\ &\iff \lambda = \pm \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On prend $\lambda = \frac{1}{3}$, donc

$$u = \frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

Ensuite on veut choisir v . Il faut que v soit orthogonal à u :

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Si on note $v' = (x, y, z)$, on a :

$$\langle u, v' \rangle = 0 \iff \frac{1}{3}(1, 2, 2) \cdot (x, y, z) = 0 \iff \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) = 0 \iff x + 2y + 2z = 0.$$

Pour des questions de simplicité, on peut choisir $x = 0, y = 1$ et $z = -1$. Il faut ensuite normaliser v' pour obtenir v .

$$\|v'\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

On peut alors prendre $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$.

Enfin, pour w , on peut faire le produit vectoriel $u \wedge v$ pour être sûr que la base soit directe. Il y a plusieurs manières de faire le calcul, ici on utilise le déterminant :

$$w = u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}.$$

On trouve :

$$w = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, 1).$$

On a alors notre base orthonormale directe :

$$\mathcal{B} = (u, v, w) = \left(\frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, 1) \right).$$

On peut vérifier rapidement qu'on a bien :

- $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ et $\|w\| = 1$.
- $\langle u, v \rangle = 0$, $\langle u, w \rangle = 0$ et $\langle v, w \rangle = 0$.
- $u \wedge v = w$.

Exercice 1.2.

Pour quelles valeurs de a les vecteurs suivant sont-ils coplanaires ?

- $(1, 0, a)$,
- $(a, 1, 0)$,
- $(0, a, 1)$.

Solution. Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si la matrice formée par ces vecteurs a un déterminant nul. Ici on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^3.$$

On cherche donc les valeurs de a telles que :

$$1 + a^3 = 0 \iff a^3 = -1 \iff a = -1.$$

Il n'y a pas d'autres solutions réelles. On peut le vérifier en factorisant $a^3 + 1$:

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

où $a^2 - a + 1$ n'a pas de racines réelles.

Donc les vecteurs sont coplanaires si et seulement si $a = -1$.

Exercice 1.3.

Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation vectorielle d'inconnue x suivante :

$$u \wedge x = v$$

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors u et v sont orthogonaux. On supposera dans la suite que u et v sont orthogonaux.
2. Déterminer toutes les solutions colinéaires à $u \wedge v$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Déterminer les vecteurs solutions qui vérifient en outre $\langle x, w \rangle = a$.

Solution.

1. Si l'équation admet une solution alors par définition du produit vectoriel on a v orthogonal à u et x , donc en particulier v est orthogonal à u .

2. Une solution colinéaire à $u \wedge v$ s'écrit $x = \lambda(u \wedge v)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculons $u \wedge x$:

$$\begin{aligned} u \wedge x &= u \wedge (\lambda(u \wedge v)) \\ &= \langle u, v \rangle \lambda v - \langle u, \lambda u \rangle v \\ &= -\lambda \langle u, u \rangle v \\ &= -\lambda \|u\|^2 v \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} -\lambda \|u\|^2 v &= v \\ \iff -\lambda \|u\|^2 &= 1 \\ \iff \lambda &= -\frac{1}{\|u\|^2}. \end{aligned}$$

La solution colinéaire à $u \wedge v$ est donc :

$$x = -\frac{1}{\|u\|^2} (u \wedge v).$$

3. Une solution de l'équation $u \wedge x = v$ se situe sur le plan formé par u et $u \wedge v$. On va donc chercher une solution sous la forme :

$$x = \alpha u + \beta(u \wedge v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} u \wedge x &= u \wedge (\alpha u + \beta(u \wedge v)) \\ &= \alpha(u \wedge u) + \beta(u \wedge (u \wedge v)) \\ &= 0 + \beta(\langle u, v \rangle u - \langle u, u \rangle v) \\ &= -\beta \|u\|^2 v. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} -\beta \|u\|^2 v &= v \\ \iff -\beta \|u\|^2 &= 1 \\ \iff \beta &= -\frac{1}{\|u\|^2}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x = \alpha u - \frac{1}{\|u\|^2} (u \wedge v) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Non traité.

Exercice 1.4. *

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal. On note \mathcal{D} la droite passant par le point $A = (1, 3, -2)$ et de vecteur directeur $u = (2, 1, 0)$, \mathcal{P} le plan d'équation $2x - 3y + 5z = 7$ et M le point de coordonnées $(1, 2, 3)$.

1. Calculer la distance de M à la droite \mathcal{D} .
2. Calculer la distance de M au plan \mathcal{P} .

Indication : remarquer que le point $(1, 0, 1)$ appartient au plan \mathcal{P} .

Solution.

1. Il y a plusieurs manières de calculer la distance d'un point à une droite.

Première méthode : on cherche le point X de la droite \mathcal{D} tel que le segment MX soit

orthogonal à la droite. Le point X de la droite \mathcal{D} s'écrit :

$$X = A + \lambda u = (1, 3, -2) + \lambda(2, 1, 0) = (1 + 2\lambda, 3 + \lambda, -2).$$

On cherche λ tel que MX soit orthogonal à u , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \langle MX, u \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle X - M, u \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle (1 + 2\lambda - 1, 3 + \lambda - 2, -2 - 3), (2, 1, 0) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle (2\lambda, 1 + \lambda, -5), (2, 1, 0) \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\lambda + 1 + \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow 5\lambda + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$X = \left(1 - \frac{2}{5}, 3 - \frac{1}{5}, -2\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}, -2\right).$$

La distance cherchée est donc :

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{D}) &= \|MX\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - 2\right)^2 + (-2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 25} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 16 + 625}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{645}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{645}}{5}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode : on utilise la formule de la distance d'un point à une droite :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|AM \wedge u\|}{\|u\|}.$$

On a :

$$AM = M - A = (1 - 1, 2 - 3, 3 - (-2)) = (0, -1, 5).$$

Calculons le produit vectoriel :

$$AM \wedge u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5e_1 + 10e_2 + 2e_3.$$

On en déduit :

$$\|AM \wedge u\| = \sqrt{(-5)^2 + 10^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 100 + 4} = \sqrt{129}.$$

De plus :

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

On trouve donc :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{129}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{645}}{5}.$$

2. De même, il y a plusieurs manières de calculer la distance d'un point à un plan.

Première méthode : on cherche le point Y du plan \mathcal{P} tel que le segment MY soit orthogonal au plan. Le plan \mathcal{P} est orthogonal au vecteur normal $n = (2, -3, 5)$. Ainsi, Y s'écrit :

$$Y = M + \mu n = (1, 2, 3) + \mu(2, -3, 5) = (1 + 2\mu, 2 - 3\mu, 3 + 5\mu).$$

On cherche μ tel que Y appartienne au plan, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 2(1 + 2\mu) - 3(2 - 3\mu) + 5(3 + 5\mu) &= 7 \\ \iff 2 + 4\mu - 6 + 9\mu + 15 + 25\mu &= 7 \\ \iff 38\mu + 11 &= 7 \\ \iff 38\mu &= -4 \\ \iff \mu &= -\frac{2}{19}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} Y &= \left(1 - \frac{4}{19}, 2 + \frac{6}{19}, 3 - \frac{10}{19}\right) \\ &= \left(\frac{15}{19}, \frac{44}{19}, \frac{47}{19}\right). \end{aligned}$$

La distance cherchée est donc :

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) &= \|MY\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{15}{19} - 1\right)^2 + \left(\frac{44}{19} - 2\right)^2 + \left(\frac{47}{19} - 3\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{361} + \frac{36}{361} + \frac{100}{361}} \\ &= \sqrt{\frac{16 + 36 + 100}{361}} \\ &= \sqrt{\frac{152}{361}} \\ &= \frac{\sqrt{152}}{19}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode : on utilise la formule de la distance d'un point à un plan :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

où $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation du plan et $M = (x_0, y_0, z_0)$. Ici, $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ et

$d = -7$. On a :

$$\begin{aligned}d(M, \mathcal{P}) &= \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} \\&= \frac{|2 - 6 + 15 - 7|}{\sqrt{4 + 9 + 25}} \\&= \frac{|4|}{\sqrt{38}} \\&= \frac{4}{\sqrt{38}} = \frac{4\sqrt{38}}{38} = \frac{2\sqrt{38}}{19} = \frac{\sqrt{152}}{19}.\end{aligned}$$

La distance cherchée est donc :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{\sqrt{152}}{19}.$$

Exercice 1.5. ★

Déterminer la projection orthogonale Δ' de la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

dans le plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z = 1$.

Solution. Non traité.

Exercice 1.6. ★

Calculer l'équation de la sphère de centre $(1, 1, 1)$ et dont le plan tangent est $x + y + z = 2$.

Solution. Non traité.

TD2 — Transformations linéaires

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 2.1 Transformation de \mathbb{R}^2 .

Ecrire pour chaque application linéaire ci dessous la matrice (dans la base canonique) de :

1. la rotation d'angle θ et de centre $(0,0)$,
2. la projection sur la droite $\text{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,
3. la symétrie par rapport à la droite $\text{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Solution.

1. La matrice de la rotation d'angle θ et de centre $(0,0)$ est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de la projection sur la droite $\text{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est :

$$P = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice de la symétrie par rapport à la droite $\text{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est :

$$S = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 - a_2^2 & 2a_1 a_2 \\ 2a_1 a_2 & a_2^2 - a_1^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2.

Soit $a, b \in \mathbb{R}^3$. On note $a_{\perp b}$ le vecteur projeté de a sur le plan orthogonal à b .

1. Exprimer $a_{\perp b}$ en fonction de a et b .
2. Démontrer que $a_{\perp b} = \frac{(b \wedge a) \wedge b}{\|b\|^2}$.
3. Trouver une matrice $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ telle que $a_{\perp b} = Ma$. Est-elle inversible ?

Solution. Non traité.

Exercice 2.3 Inverser des matrices sans calculs.

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Solution.

1. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I_3 - A.$$

Donc $A^2 = 2I_3 - A$. Il en suit

$$\begin{aligned} A^2 = 2I_3 - A &\iff A^2 + A = 2I_3 \\ &\iff \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3 \\ &\iff A\left(\frac{1}{2}(A + I_3)\right) = I_3. \end{aligned}$$

Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3).$$

2. On calcule :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} A^3 - A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on en déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3).$$

3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice nilpotente. On cherche un inverse X de sorte que $(I_n - A)X = I_n$.
On remarque que dans le cadre des réels, l'inverse de $1 - x$ est $\frac{1}{1-x}$. Mais aussi :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

On pose alors Y un tel candidat :

$$Y = I_n + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^p A^k.$$

Où p est le plus petit entier tel que $A^p = 0$. Il suit alors :

$$\begin{aligned}
 (I_n - A)Y &= Y - AY \\
 &= \sum_{k=0}^p A^k - A \sum_{k=0}^p A^k \\
 &= \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=0}^p A^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=1}^{p+1} A^k \\
 &= \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=1}^p A^k - A^{p+1} \\
 &= I_n + \sum_{k=1}^p A^k - \sum_{k=1}^p A^k - 0 \\
 &= I_n.
 \end{aligned}$$

Notre candidat était bien choisi, donc $I_n - A$ est inversible et

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^p A^k.$$

Exercice 2.4 Déterminant d'une matrice triangulaire. ★

Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses entrées diagonales.

Solution. Non traité.

Exercice 2.5 Inverser des matrices avec calculs.

A l'aide du pivot de Gauss, dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Solution. Non traité.

Exercice 2.6 Décomposition d'une rotation. ★

On appelle cisaillement horizontal (x -shear) les transformations linéaires de \mathbb{R}^2 dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

On appelle cisaillement vertical (y -shear) les transformations linéaires de \mathbb{R}^2 dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme

$$V_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } y \in \mathbb{R}.$$

1. Représenter l'effet de ces transformations sur la base canonique.
2. Soit $R_{-\theta}$ la matrice de rotation d'angle $-\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer la décomposition suivante :

$$R_{-\theta} = H_{-\tan(\frac{\theta}{2})} V_{-\sin(\theta)} H_{\tan(\frac{\theta}{2})}.$$

Solution. Non traité.

Exercice 2.7. *

Soit A une matrice carrée à coefficients réels. Si A est inversible, est-ce que A^t est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Justifier.

Solution. Non traité.