HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

11 septembre 2025

Table des matières

TD1

1.1 Convexité : ensembles et fonctions

Exercice 1.1 Convexité. Exercise 1 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.2 Combinaison convexe. Exercise 2 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.3 Ensembles convexe. Montrer qu'étant donné un sous-ensemble convexe C et deux réels positifs α et β alors on a

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C.$$

Solution. Commencons par montrer l'inclusion $(\alpha + \beta) C \subset \alpha C + \beta C$.
Soit $x \in (\alpha + \beta) C$. Alors, il existe $x_0 \in C$ tel que

$$x = (\alpha + \beta) x_0 = \alpha x_0 + \beta x_0.$$

Donc $x \in \alpha C + \beta C$.
Montrons maintenant l'inclusion $\alpha C + \beta C \subset (\alpha + \beta) C$.
Soit $x \in \alpha C + \beta C$. Alors, il existe $x_1, x_2 \in C$ tels que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_2 \right).$$

Exercice 1.4 Ensembles convexes. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété de **demi-somme** suivante :

$$\forall x, y \in S, \quad \frac{x + y}{2} \in S.$$

1. S est-il convexe ?
2. Même question si on suppose que S est fermé.

Solution.

1. Non. Par exemple, le sous-ensemble S suivant :

$$S = \left\{ x \in [0,1] \mid x = \sum_{i=I} \frac{1}{2^i} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

vérifie la propriété de demi-somme mais n'est pas convexe, car par exemple $\sqrt{2}/2 \in [0,1] \notin S$.

Exercice 1.5 Ensembles convexes. Exercise 2 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.6 Ensembles convexes. Exercise 2 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.7 Fonction convexe.

1. Est-ce qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe ?
2. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est convexe ?
3. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes, est-ce que $\max(f_1, f_2)$ est convexe ?

4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Oui. On pose $g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x)$. Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$

2. Non. Par exemple, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$ sont convexes mais $f_1(x) f_2(x) = x^3$ n'est pas convexe.
3. Oui. On pose $g(x) = \max\left(f_1(x), f_2(x)\right)$. Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max\left(f_1(\lambda x + (1-\lambda)y), f_2(\lambda x + (1-\lambda)y)\right) \\ &\leq \sim \max\left(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y), \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)\right) \\ &\leq \lambda \max\left(f_1(x), f_2(x)\right) + (1-\lambda) \max\left(f_1(y), f_2(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$

4. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &\leq \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2) \\ &= \lambda x^2 + (1-\lambda) y^2 \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Exercice 1.8 Optional title 2. Exercise 2 content

Solution. Exercice solution