

HAI802I Algorithmique Avancée — TDs

Ivan Lejeune

23 janvier 2026

Table des matières

1	Complexité	3
1.1	Quelques preuves en complexité des problèmes	3
1.2	Quelques problèmes dans les graphes	3
1.3	La classe de complexité $coNP$	4
1.4	Rappels en complexité	4
2	Algorithmes d'approximation	5
2.1	La classe Log-APX	5
2.2	La classe APX	5
2.3	Mesure différentielle	6
2.4	Construction d'un FPTAS	7
2.5	Polynomial-Time Asymptotic Scheme : PTAS	7
2.6	Points extrêmes	7
2.7	FPTAS et programmation dynamique	7
2.8	Schéma primal-dual	7
3	Inapproximabilité ou seuil d'approximation	9
3.1	Seuil d'approximation	9
3.2	Utilisation du principe Gap-réduction	9
4	Méthodes exactes	10
4.1	Programmation dynamique	10
4.2	Arbres de branchement	10
5	Réductions divers	11
5.1	L -réduction	11
6	Quelques problèmes d'ordonnancement	12
6.1	Ordonnancement sur un processeur	12
6.2	Ordonnancement sur m processeurs	12
7	Algorithmes randomisés	13
7.1	Sur le problème MAXIMUM SATISFAISABILITÉ	13
7.2	Sur le problème COUVERTURE D'ENSEMBLES PONDÉRÉS	13
8	Bornes inférieures et ETH	14

Liste des Algorithmes

1	3-SAT	3
2	HALF 3-SAT	3
3	\neg 3-SAT	3
4	NON EGAL SATISFAISABILITÉ (NAESAT)	3

1 Complexité

1.1 Quelques preuves en complexité des problèmes

Exercice 1 Quelques preuves de NP-complétude autour de 3-SAT.

Algorithme 1 – 3-SAT

Input: Une formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en 3-CNF

Question: Existe-t-il une affectation des variables (x_1, \dots, x_n) satisfaisant φ ?

Algorithme 2 – HALF 3-SAT

Input: Une formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en 3-CNF

Question: Existe-t-il une affectation des variables (x_1, \dots, x_n) satisfaisant φ à 50% ?

Algorithme 3 – \neg 3-SAT

Input: Une formule $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en 3-CNF

Question: Existe-t-il une affectation des variables (x_1, \dots, x_n) qui ne satisfait pas φ ?

1. Montrer que \neg 3-SAT appartient à la classe P .
2. Montrer que HALF 3-SAT est NP-complet. Que dire du problème HALF 3-SAT dans le cas où le nombre de clauses satisfaites est au moins de 50% ?

Solution.

Exercice 2 Autour de Satisfaisabilité.

Algorithme 4 – NON EGAL SATISFAISABILITÉ (NAESAT)

Input: Und vofmuld onjonctive φ sur n variables et m clauses

Question: Existe-t-il une affectation de valeurs de vérité aux variables qui satisfasse φ tel que chaque clause a un littéral vrai et un littéral faux ?

Montrer que textscNon Egal Satisfaisabilité est \mathcal{NP} -complet. La preuve se fera à partir de SATISFAISABILITÉ.

Solution.

1.2 Quelques problèmes dans les graphes

Exercice 3 title.

Solution.

Exercice 4 title.

Solution.

 Exercice 5 title.

 Solution.

 Exercice 6 title.

 Solution.

 Exercice 7 title.

 Solution.

 Exercice 8 title.

 Solution.

1.3 La classe de complexité coNP

 Exercice 9 title.

 Solution.

 Exercice 10 title.

 Solution.

 Exercice 11 title.

 Solution.

1.4 Rappels en complexité

 Exercice 12 title.

 Solution.

2 Algorithmes d'approximation

2.1 La classe Log-APX

 Exercice 13 title.

 Solution.

2.2 La classe APX

 Exercice 14 title.

 Solution.

 Exercice 15 title.

 Solution.

 Exercice 16 title.

 Solution.

 Exercice 17 title.

 Solution.

 Exercice 18 title.

 Solution.

 Exercice 19 title.

 Solution.

 Exercice 20 title.

 Solution.

 Exercice 21 title.

 Solution.

 Exercice 22 title.

 **Solution.**

 **Exercice 23 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 24 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 25 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 26 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 27 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 28 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 29 title.**

 **Solution.**

2.3 Mesure différentielle

 **Exercice 30 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 31 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 32 title.**

 **Solution.**

2.4 Construction d'un FPTAS

 **Exercice 33 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 34 title.**

 **Solution.**

2.5 Polynomial-Time Asymptotic Scheme : PTAS

 **Exercice 35 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 36 title.**

 **Solution.**

2.6 Points extrêmes

 **Exercice 37 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 38 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 39 title.**

 **Solution.**

2.7 FPTAS et programmation dynamique

 **Exercice 40 title.**

 **Solution.**

2.8 Schéma primal-dual

Exercice 41 title.

Solution.

3 Inapproximabilité ou seuil d'approximation

3.1 Seuil d'approximation

 Exercice 42 title.

 Solution.

 Exercice 43 title.

 Solution.

 Exercice 44 title.

 Solution.

3.2 Utilisation du principe Gap-réduction

 Exercice 45 title.

 Solution.

 Exercice 46 title.

 Solution.

 Exercice 47 title.

 Solution.

 Exercice 48 title.

 Solution.

 Exercice 49 title.

 Solution.

4 Méthodes exactes

4.1 Programmation dynamique

Exercice 50 title.

Solution.

Exercice 51 title.

Solution.

4.2 Arbres de branchement

Exercice 52 title.

Solution.

Exercice 53 title.

Solution.

Exercice 54 title.

Solution.

Exercice 55 title.

Solution.

5 Réductions divers

5.1 *L*-réduction

 Exercice 56 title.

 Solution.

 Exercice 57 title.

 Solution.

6 Quelques problèmes d'ordonnancement

6.1 Ordonnancement sur un processeur

 Exercice 58 title.

 Solution.

6.2 Ordonnancement sur m processeurs

 Exercice 59 title.

 Solution.

 Exercice 60 title.

 Solution.

 Exercice 61 title.

 Solution.

 Exercice 62 title.

 Solution.

7 Algorithmes randomisés

7.1 Sur le problème Maximum Satisfaisabilité

 Exercice 63 title.

 Solution.

7.2 Sur le problème Couverture d'ensembles pondérés

 Exercice 64 title.

 Solution.

 Exercice 65 title.

 Solution.

 Exercice 66 title.

 Solution.

 Exercice 67 title.

 Solution.

 Exercice 68 title.

 Solution.

8 Bornes inférieures et ETH

 Exercice 69 title.

 Solution.

 Exercice 70 title.

 Solution.

 Exercice 71 title.

 Solution.