HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

23 septembre 2025

Table des matières

1 Convexité : ensembles et fonctions 2
2 Divers formulations 5

1 Convexité : ensembles et fonctions

Exercice 1 Convexité.

1. Soit une famille (éventuellement infinie) d'inégalités linéaires $a_i^T x \le b_i, i \in I$. Soit C son ensemble de solutions. Montrer que C est convexe.
2. Montrer que la boule fermée $\mathsf{B}(a,r)$ est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit W l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de S. Montrer que W est convexe.
4. Soit C un convexe. Montrer que
$$\bigcup_{0\le\lambda\le1} \lambda C$$
est convexe.
5. Une matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times n$ est bistochastique si elle satisfait
$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1,$$
$$\forall j \in \{1,\dots,n\}, \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1,$$
$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, a_{ij} \ge 0.$$
Une matrice de permutation P est une matrice bistochastique à valeurs entières, c'est-à-dire que dans chaque ligne de P il y a un et un seul élément égal à 1, et les autres sont nuls. De même pour chaque colonne.
   (a) Montrer que pour toute matrice bistochastique A, il existe une matrice de permutation P de même dimension telle que $p_{ij} = 0$ si $a_{ij} = 0$.
   (b) Est-ce qu'une combinaison convexe de matrices de permutation est une matrice bistochastique ?
   (c) Montrer que toute matrice bistochastique A est une combinaison convexe de matrices de permutation.
   (d) Trouver la combinaison convexe pour la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0 & 0.48 \\ 0.02 & 0.15 & 0.67 & 0.16 \\ 0.46 & 0.02 & 0.16 & 0.36 \\ 0.37 & 0.46 & 0.17 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Soient maintenant C_1 et C_2 deux convexes disjoints et
$$D_1 = \bigcup_{0\le\lambda\le1} \lambda C_1, \quad i = 1,2.$$
Montrer que l'un des deux convexes $C_1 \cap D_2$ ou $C_2 \cap D_1$ est vide.

Solution. A remplir

Exercice 2 Combinaison convexe.

1. Rappeler la définition d'une combinaison convexe.
2. Est-ce que le point A de coordonnées $(1,1,1)$ est une combinaison convexe des points $(2,2,0), (0,0,3), (0,0,0)$?
3. Déterminer si le point de coordonnées $(0,7)$ est une combinaison convexe des points $(3,6), (-6,9), (2,1), (-1,1)$.
4. Déterminer graphiquement si le point de coordonnées $(1,2)$ est une combinaison convexe

des points $(1,1)$ et $(2,-1)$.

Solution. Exercice solution

Exercice 3 Ensembles convexe.
Montrer qu'étant donné un sous-ensemble convexe C et deux réels positifs α et β alors on a

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C.$$

Solution. Commencons par montrer l'inclusion $(\alpha + \beta)C \subset \alpha C + \beta C$.
Soit $x \in (\alpha + \beta)C$. Alors, il existe $x_0 \in C$ tel que

$$x = (\alpha + \beta)x_0 = \alpha x_0 + \beta x_0.$$

Donc $x \in \alpha C + \beta C$.
Montrons maintenant l'inclusion $\alpha C + \beta C \subset (\alpha + \beta)C$.
Soit $x \in \alpha C + \beta C$. Alors, il existe $x_1, x_2 \in C$ tels que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}x_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta}x_2\right).$$

Exercice 4 Ensembles convexes.
Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété de **demi-somme** suivante :

$$\forall x, y \in S, \quad \frac{x + y}{2} \in S.$$

1. S est-il convexe ?
2. Même question si on suppose que S est fermé.

Solution.

1. Non. Par exemple, le sous-ensemble S suivant :

$$S = \left\{x \in [0,1] \mid x = \sum_{i=I} \frac{1}{2^i}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

vérifie la propriété de demi-somme mais n'est pas convexe, car par exemple $\sqrt{2}/2 \in [0,1] \notin S$.

Exercice 5 Ensembles convexes.
Lesquels de ces ensembles sont convexes ?

1. $S = \left\{(x_1, x_2) \mid 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 12\right\}$,
2. $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 3, x_1 \leq 5\}$.

Solution. A remplir

Exercice 6 Ensembles convexes.

1. Soit C un convexe. Montrer que $x \in C$ est un point extrême de C si et seulement si $C \setminus \{x\}$ est convexe.
2. A-t-on une caractérisation similaire pour une face de C ?
3. On considère dans $\mathbb{R}^n$ les deux boules suivantes :
   - $\mathrm{B}_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq 1\}$
   - $\mathrm{B}_\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 1\}$

Quels sont les points extrêmes de B_1 et B_∞ ?

Solution.

1. Commencons par le sens direct :
Soit $x \in C$ un point extrême de C. Montrons que $C \setminus \{x\}$ est convexe.
Soit $y, z \in C \setminus \{x\}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors
$$\lambda y + (1-\lambda) z \in C.$$
car C est convexe. Supposons par l'absurde que $\lambda y + (1-\lambda)z = x$. Alors x est une combinaison convexe de y et z avec $\lambda \in [0,1]$. Cela contredit le fait que x est un point extrême de C. Donc la combinaison convexe $\lambda y + (1-\lambda)z$ est dans $C \setminus \{x\}$. Donc $C \setminus \{x\}$ est convexe.
Montrons maintenant le sens réciproque :
Soit $x \in C$ tel que $C \setminus \{x\}$ est convexe. Montrons que x est un point extrême de C.
Supposons par l'absurde que x n'est pas un point extrême de C. Alors, il existe $y, z \in C$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que
$$x = \lambda y + (1-\lambda) z.$$
Comme $y, z \in C$ et x est une combinaison convexe de y et z, on a forcément $y \neq x$ et $z \neq x$. Donc $y, z \in C \setminus \{x\}$. Comme $C \setminus \{x\}$ est convexe, on a
$$x = \lambda y + (1-\lambda) z \in C \setminus \{x\}.$$
C'est une contradiction. Donc x est un point extrême de C.

Exercice 7 Fonction convexe.

1. Est-ce qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe ?
2. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est convexe ?
3. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes, est-ce que $\max(f_1, f_2)$ est convexe ?
4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Oui. On pose $g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x)$. Alors
$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda) y) &= \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\lambda x + (1-\lambda) y) \\ &\leq \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$
2. Non. Par exemple, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$ sont convexes mais $f_1(x) f_2(x) = x^3$ n'est pas convexe.
3. Oui. On pose $g(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$. Alors
$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda) y) &= \max\left(f_1(\lambda x + (1-\lambda) y), f_2(\lambda x + (1-\lambda) y)\right) \\ &\leq \max\left(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y), \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)\right) \\ &\leq \lambda \max\left(f_1(x), f_2(x)\right) + (1-\lambda) \max\left(f_1(y), f_2(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$

4. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\
&= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \\
&\iff \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy - \lambda x^2 - (1-\lambda)y^2 \leq 0 \\
&\iff \lambda(1-\lambda)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}x^2 + \frac{1-\lambda}{\lambda}y^2 + 2xy - \frac{x^2}{1-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda}\right) \leq 0 \\
&\iff \lambda(1-\lambda)\left(-(x-y)^2\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Or tous les termes sont positifs sauf le dernier. Donc l'inégalité est vérifiée.

Exercice 8 Fonction convexe.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Prouver que f est convexe.
Indication : Montrer par récurrence que sur $|\geq|2$, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall p \in \{0,1,\ldots,2^n\}, \quad f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Solution. A remplir

2 Divers formulations

Exercice 9 Reformulation en programme linéaire.
Reformuler les problèmes suivants sous forme de programme linéaire.

1. $$\begin{cases} \min z = 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Soit un ensemble d'inégalités linéaires

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m, a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}.$$

Formuler un modèle (uniquement des contraintes sans fonction objectif) pour lequel un point $x \in \mathbb{N}^n$ satisfait au moins k des m contraintes ($k \leq m$) entiers de plus satisfaite

$$0 \leq x_j \leq M, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Solution. A remplir

Exercice 10 Linéarisation de fonctions non linéaires. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 11. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 12 Forme standard et forme canonique.
Dans cet exercice vous devez mettre les programmes suivants sous forme standard et donner également la forme matricielle.

1.
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

3. Réécrire le programme précédent dans le cas où la fonction objectif est la minimisation.
4.
$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Solution.

1. La forme standard est
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

   La forme matricielle est
$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

2. La forme standard est
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 + 0 \cdot x_3 - M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 80 & 60 & 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

3. La forme standard est

$$\begin{cases} \min z = -80x_1 - 60x_2 + 0 \cdot x_3 + M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \min z = \begin{pmatrix} -80 & -60 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

4. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot (x_6 + x_7 + x_8) \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & M & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 13.
Nous considérons les programmes linéaires avec des variables $x_1 \in \{0, u_j\}$. Montrer que nous pouvons nous ramener à un programme linéaire en nombres entiers. Appliquez-le au problème suivant :

$$\begin{cases} \max z = 18x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 150 \\ x_1 \in \{0, 60\} \\ x_2 \in \{0, 30\} \\ x_3 \in \{0, 20\}. \end{cases}$$

Solution. On remplace chaque variable x_j par une variable y_j telle que $x_j = u_j y_j$ et $y_j \in \{0, 1\}$. Le programme devient

$$\begin{cases} \max z = 18 \cdot 60y_1 + 3 \cdot 30y_2 + 9 \cdot 20y_3 \\ 2 \cdot 60y_1 + 30y_2 + 7 \cdot 20y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Cela revient à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \max z = 1080y_1 + 90y_2 + 180y_3 \\ 120y_1 + 30y_2 + 140y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Exercice 14 Points extrêmes.
On considère le polyèdre S de $\mathbb{R}^3$ défini par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

1. Le point $x* = (1, 1, 1, 1, 0)$ est-il un point extrême ? Pourquoi ?

2. Les points suivants sont-ils des points extrêmes ? Dégénérés ?
   - $x_1 = (0, -1, 2, 4, 0)$,
   - $x_2 = (0.5, 0, 1.5, 2.5, 0)$,
   - $x_3 = (2, 3, 0, -2, 0)$,
   - $x_4 = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$.

Solution.

1. On commence par vérifier que $x*$ respecte les contraintes :
   On constate qu'il vérifie bien les contraintes, mais on sait qu'il n'y a que 3 variables en base. Or, $x*$ en a 4 de non nulles. Donc, $x*$ n'est pas un point extrême.
2. On commence par vérifier que les points respectent les contraintes :
   - x_1 ne respecte pas les contraintes car $x_2 < 0$.
   - x_2 respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc, x_2 est un point extrême non dégénéré.
   - x_3 ne respecte pas les contraintes car $x_4 < 0$.
   - x_4 respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc, x_4 est un point extrême non dégénéré.

   On rappelle qu'un point est dégénéré s'il a plus de m variables nulles où m est le nombre de variables originelles.

Exercice 15 Points extrêmes et solutions.
Soit le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ -1, 0, 0 \\ 0, -1, 0 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6, 1, 0, 0 \end{pmatrix}.$$

On supposera que le polyèdre est borné.

Solution. Pour trouver les points extrêmes, on cherche à résoudre tous les arrangements possibles de 3 contraintes parmi les 4. On énumère les lignes qu'on choisit comme contraintes comme suit et on les résout dans l'ordre :

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4).$$

- Pour (1,2,3), on résout :
  $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 = 1 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$
  et on trouve $x_1 = (-1, 0, \frac{4}{3})$.
- Pour (1,2,4), on trouve $x_2 = (-1, \frac{8}{3}, 6)$,
- Pour (1,3,4), on trouve $x_3 = (3, 0, 0)$,
- Pour (2,3,4), on trouve $x_4 = (-1, 0, 0)$.

Les points extrêmes sont donc x_1, x_2, x_3 et x_4. Si on rajoute la contrainte $x_i \geq 0$, on a seulement x_3 qui reste.

Exercice 16 Points extrêmes.

Soit C le polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^2$ décrit à l'aide des inégalités suivantes :

$$\mathcal{P}_y = \begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

1. Ecrire C sous la forme standard.
2. Quels sont les points extrêmes de C ?

Solution.

1. On introduit les variables d'écart x_3, x_4, x_5 pour obtenir la forme standard :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

2. On écrit le problème matriciellement :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On choisit ensuite 3 contraintes parmi les 5 et on résout les systèmes linéaires associés :
- Pour (3,4,5), on trouve $x_1 = (0, 0, 4, 2, 3)$,
- Pour (1,2,3), on trouve $x_2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, 0, 0)$,

et ainsi de suite.

Exercice 17. Soient : $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ et $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : Ax - y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$.

1. Montrer que si x est un point extreme de P, alors $x, Ax - b$ est un point extrême de Q.
2. Montrer que si (x, y) est un point extrême de Q, alors x est un point extrême de P.

Solution.

1. Supposons que x est un point extrême de P. Montrons que $(x, Ax-b)$ est un point extrême de Q.
   Si $(x, Ax - b)$ n'est pas un point extrême de Q, alors il existe $x_1, x_2 \in Q$ tels que

$$(x, Ax - b) = \frac{x_1, y_1 + x_2, y_2}{2}$$

   De plus

$$\begin{cases} Ax_1 - y_1 = b \implies & Ax_1 \geq b \\ Ax_2 - y_2 = b \implies & Ax_2 \geq b \end{cases}$$

   Donc $x_1, x_2 \in P$ et donc $x = \frac{x_1+x_2}{2} \in P$. Cela contredit le fait que x est un point extrême de P. Donc $(x, Ax - b)$ est un point extrême de Q.
2. Supposons que x n'est pas un point extreme de P. Alors il existe $x_1, x_2 \in P$ tels que $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
y &= Ax - b \\
&= A\frac{x_1}{2} + A\frac{x_2}{2} - b \\
&= A\frac{x_1}{2} + A\frac{x_2}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \\
&= \frac{1}{2}(Ax_1 - b) + \frac{1}{2}(Ax_2 - b) \\
&= \frac{y_1 + y_2}{2}
\end{aligned}$$

d'où

$$(x, y) = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2)$$

et donc (x, y) n'est pas un point extrême de Q.

Exercice 18. A remplir

Solution. A remplir