HAI711I — TDs

Ivan Lejeune

10 octobre 2025

Table des matières

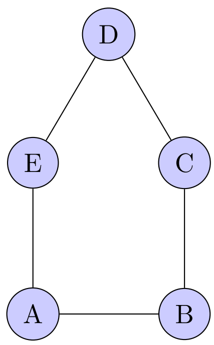
TD1 — Généralités

Exercice 1 Soirée chez Ramsey.
On considère un ensemble de six personnes. Montrer que au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou que au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux. Est-ce vrai pour un ensemble de cinq personnes ?

Solution.
Soit $G = (V, E)$ un graphe à six sommets. On veut montrer que G contient K_3 ou $\overline{K_3}$.
Considérons $x \in V$ un sommet de G et procédons par disjonction de cas en fonction du degré de x :

- Si $\deg(x) \geq 3$, on note s_1, s_2, s_3 trois voisins de x. Si $(s_1, s_2) \in E$ alors x, s_1, s_2 forment K_3.
  De manière similaire, si $(s_1, s_3) \in E$ ou $(s_2, s_3) \in E$ alors K_3 est formé. Si il n'existe pas d'arête entre s_1, s_2, s_3 alors $\overline{K_3}$ est formé.
  Ainsi, si $\deg(x) \geq 3$ alors G contient K_3 ou $\overline{K_3}$.
- Si $\deg(x) \leq 2$, on note $s_1, s_2, s_3 \in V$ trois sommets de G qui ne sont pas voisins de x. Si $(s_1, s_2) \notin E$ alors x, s_1, s_2 forment $\overline{K_3}$.
  De manière similaire, si $(s_1, s_3) \notin E$ ou $(s_2, s_3) \notin E$ alors $\overline{K_3}$ est formé. Si il existe une arête entre chacun des sommets s_1, s_2, s_3 alors K_3 est formé.
  Ainsi, si $\deg(x) \leq 2$ alors G contient K_3 ou $\overline{K_3}$.

Donc pour un ensemble de six personnes, au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux.
Pour un ensemble de cinq personnes, le graphe G à cinq sommets ci-dessous ne contient ni K_3 ni $\overline{K_3}$:



Exercice 2 Hyperparcours.
Soit d un entier positif non nul. L'hypercube Q_d est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des d-uplets $x_1, \ldots, x_d$ de 0 et de 1, deux d-uplets étant adjacents s'ils diffèrent sur une seule entrée.

1. Dessiner Q_d pour $d = 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer un parcours en largeur de Q_3 de racine 000. En cas de choix entre plusieurs sommets pour entrer dans la file, on choisira celui de valeur (en binaire) minimale.
3. Effectuer de même un parcours en profondeur de Q_3. Cette fois, il n'y a pas de consigne en cas de choix, mais on essayera d'obtenir un arbre de parcours qui ne soit pas un chemin.

Solution.

1. On a les hypercubes suivants :

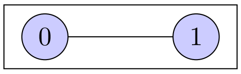


FIGURE 1 – Hypercube Q_1

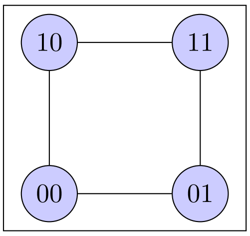


FIGURE 2 – Hypercube Q_2

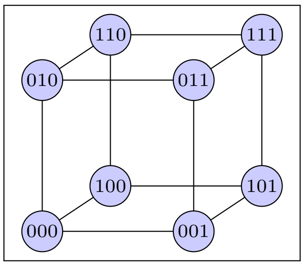


FIGURE 3 – Hypercube Q_3

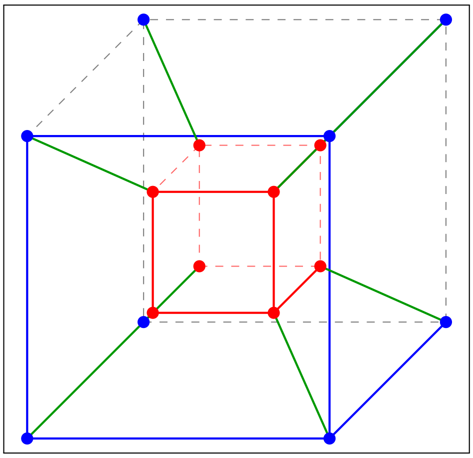


FIGURE 4 – Hypercube Q_4
Noeuds non précisés pour la clareté

2. On peut effectuer le parcours suivant :

$$000 \to 001 \to 101 \to 100 \to 110 \to 010 \to 011 \to 111$$

ce qui se représente visuellement comme suit :

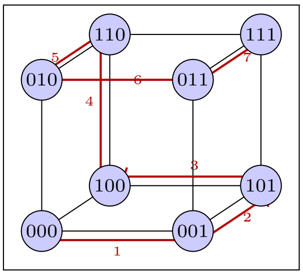


FIGURE 5 – Hypercube Q_3

Exercice 3 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 4 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 5 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 6 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 7 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 8 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 9 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 10 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 11 Convexité.

Solution.
A remplir

TD2 — Couplages

Exercice 1 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 2 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 3 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 4 Jeu de Slither.
Le *jeu de Slither* se joue sur un graphe connexe, noté G. Chaque joueur choisit à son tour un sommet v_i non précédemment choisi. La suite $v_0, v_1, \dots$ doit former un chemin, c'est-à-dire que tout pour tout $i = 1, 2, \dots$, v_i doit être choisi comme adjacent à v_{i-1}. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.
Montrer que si G admet un couplage parfait alors le second joueur a une stratégie gagnante.
Montrer que si G n'admet pas un couplage parfait alors le premier joueur a une stratégie gagnante

Solution.
A remplir

Exercice 5 Tous d'un coup.
Soit $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti de bipartition (X, Y) avec $\Delta(G) \geq 1$.

1. Montrer que G admet un couplage couvrant tous les sommets de X de degré $\Delta(G)$.
2. Montrer que G admet un couplage couvrant tous les sommets de G de degré $\Delta(G)$.
3. En déduire qu'il est possible de partitionner les arêtes de G en $\Delta(G)$ couplages.

Solution.

1. On note $k = \Delta(G)$. Soit $S \subseteq X_\Delta$. On note $Z = N_G(S)$. On va compter e le nombre d'aretes entre S et Z :
$$e = \sum_{s \in S} \deg(s) = k \cdot |S|$$
Par ailleurs, comme toute arete comptée est incidente à un sommet z, on a :
$$e \leq \sum_{z \in Z} \deg(z) = k \cdot |Z|$$
Donc $k \cdot |S| \leq k \cdot |Z|$ d'où $|S| \leq |Z| = |N_G(S)|$. Par le théorème de Hall, G admet un couplage qui sature X_Δ.
2. Par la question précédente il existe un couplage M_X saturant X_Δ. De même, il existe un couplage M_Y saturant Y_Δ. On va extraire de $M_X \cup M_Y$ un couplage M saturant $X_\Delta \cup Y_\Delta$. On construit M en regardant chaque composante connexe de $M_X \cup M_Y$.
Soit C une composante connexe de $(V, M_X \cup M_Y)$ (C est soit un chemin soit un cycle).

- Si C est un cycle alors on choisit $M = M_X$ ou $M = M_Y$ (les deux conviennent) et on continue à saturer les sommets de C
- Si C est un chemin on peut supposer que sa première arête est dans M_X. On note $C = x_1 x_2 \dots x_k$. On a trois cas :
  (a) Si $x_1 \in Y_\Delta$, c'est impossible car x_1 doit être incident à une arête de M_Y,
  (b) Si $x_1 \in Y \setminus Y_\Delta$, on prend $M = M_Y$,
  (c) Si $x_1 \in X_\Delta$ on prend $M = M_X$.

Exercice 6 Famille couvrante de cycles dans les graphes $2k$-réguliers.
Un 2-*factor* d'un graphe G

Solution.
A remplir

Exercice 7 Convexité.

Solution.

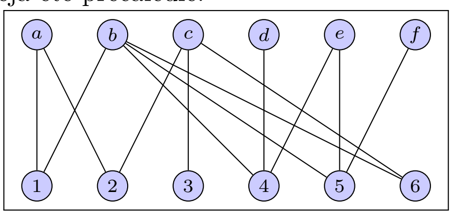
1. On construit le graphe biparti $((X,Y),E)$ avec $Y = A$ et $X = \{1,\dots,p\}$. On relie $a \in A$ à i si $a \in A_i$. Un SDR correspond à un couplage saturant X.
   C'est exactement le théorème de Hall.
2. Dans le cas où il y a p-candidats potentiels pour p ensembles, chaque élément sera un représentant.
3.

Exercice 8 Subtil SAT.

Solution.

1. Soit F une formule 3-SAT. Pour $i = 1 \dots s$ nombre de variables, si x_i apparaît l_i fois, on crée l_i variables $x_i^1, \dots, x_i^{l_i}$ dans F, on remplace la j-eme occurence de x_i par x_i^j.
   On ajoute les clauses
   $$\left(\neg x_i^1 \vee x_i^2\right) \wedge \left(\neg x_i^2 \vee x_i^3\right) \wedge \dots \wedge \left(\neg x_i^{l_i} \vee x_i^1\right).$$
   Elles sont toutes de taille ≤ 2 et maintenant toutes les variables x_i^j ont la même valeur.
   On obtient une formule équivalente à F, où les clauses sont de taille ≤ 3 et les variables apparaissent 3 fois.

Exercice 9 Algo de couplace max — Partie 1.
Dans le graphe biparti suivant, appliquer l'algo de calcul d'un couplage maximum, en sachant que le couplage $\{1b, 2c\}$ a déjà été précalculé.

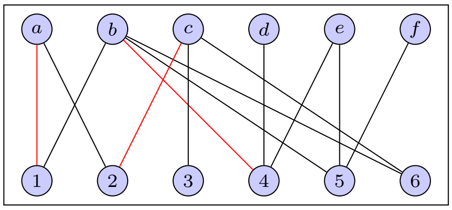


Solution.
On commence par a non saturé et on fait l'arbre de couplage.

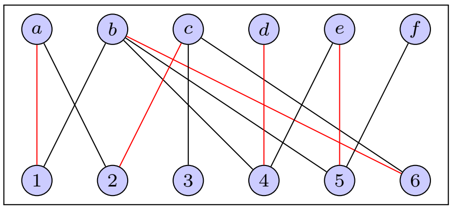
- On trouve $1, 2$ à partir de a,

- puis on trouve b, c et on barre les chemins reliés,
- on trouve 4 à partir de b, il est non saturé donc $a1b4$ est augmentant.
- On augmente $|M|$ et on recommence.

- Je choisis e non saturé,
- 5 est non saturé donc $e5$ est augmentant.
- On augmente $|M|$ et on recommence.

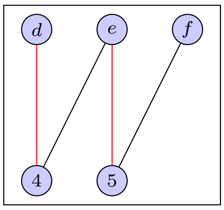


- Je choisis d non saturé,
- 6 est non saturé donc $d4b6$ est augmentant.
- On augmente $|M|$ et on recommence.



- On calcule un arbre de couplage enraciné en 3,
- Il est complet, on peut le retirer du graphe

A la fin, il reste :



Exercice 10 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 11 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 12 Convexité.

Solution.

A remplir

Exercice 13 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 14 Convexité.

Solution.
A remplir