HAI820I Recherche Opérationnelle II — DM

Ivan Lejeune

4 février 2026

Table des matières

1 Partie théorique

1.1 Polyèdre entier

Exercice 1 Représentation et facettes.
Soit P_ε le polyèdre défini par les inégalités linéaires suivantes :

$$(P_\varepsilon) = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2-\varepsilon)x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

1. Illustrer le polyèdre P_ε et les inégalités dans le plan pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$.
2. Soient $\varepsilon = 3$ et le polyèdre entier $P_I = \mathsf{conv}(P_3 \cap \mathbb{Z}^2)$. Dessiner P_I et donner une représentation (extérieure) minimale de P_I.

Solution.

1. Pour $\varepsilon = -1$, le problème P_ε devient le suivant :

$$P_\varepsilon = P_{-1} = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

On peut représenter ce problème dans le plan comme suit :

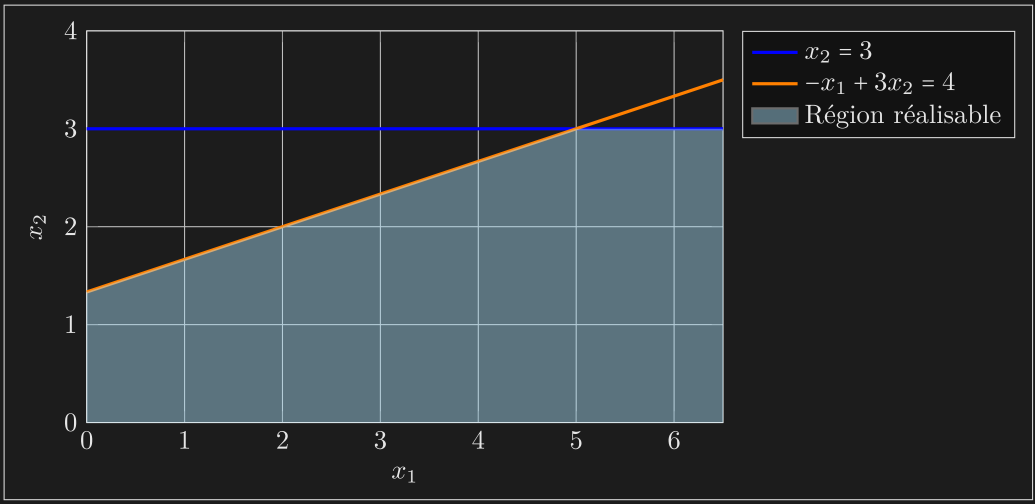

FIGURE 1 – Représentation du problème P_ε dans $\mathbb{R}^2$ pour $\varepsilon = -1$

Quelques remarques par rapport à la figure :

- Tout d'abord on peut remarquer que l'ensemble des points dans le polyèdre est non borné en x_1.
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0,0), (0,4/3), (5,3), (6.5,3), (6.5,0)$$

Regardons maintenant le cas $\varepsilon = 1$. Le problème P_ε devient le suivant :

$$P_\varepsilon = P_1 = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

On peut représenter ce problème dans le plan comme suit :

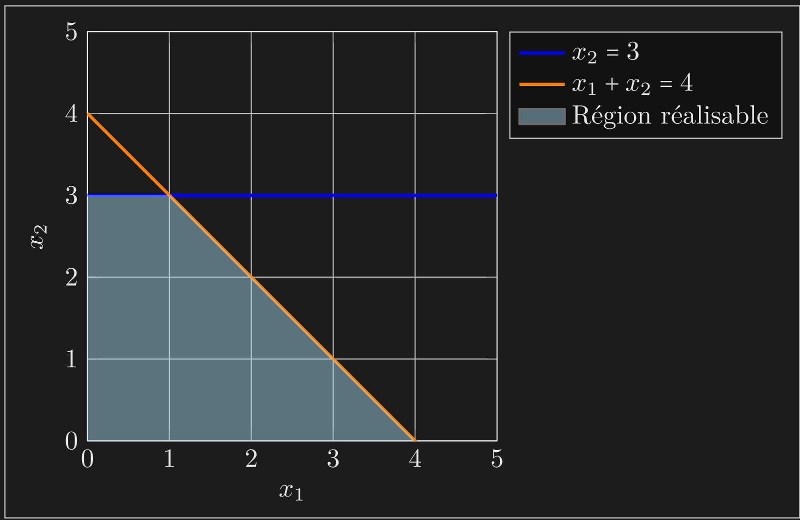

Figure 2 – Représentation du problème P_ε dans $\mathbb{R}^2$ pour $\varepsilon = 1$

Quelques remarques par rapport à la figure :

- Tout d'abord on peut remarquer que l'ensemble des points dans le polyèdre est complètement borné cette fois-ci. Contrairement au cas $\varepsilon = -1$, on ne peut pas choisir n'importe quelle valeur pour x_1.
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0,0),(0,3),(1,3),(4,0)$$

- Ces deux problèmes, même s'ils viennent tous deux de P_ε ont des représentations dans l'espace bien différentes, cela est notamment dû à l'impact qu'a le choix de ε sur le signe des variables x_1 et x_2 dans la seconde contrainte. C'est ce qui décide « l'angle de la pente » de cette contrainte et qui permet donc de borner ou non le polyèdre.

2. On fixe désormais $\varepsilon = 3$. On commence par représenter le problème P_3 dans l'espace comme suit :

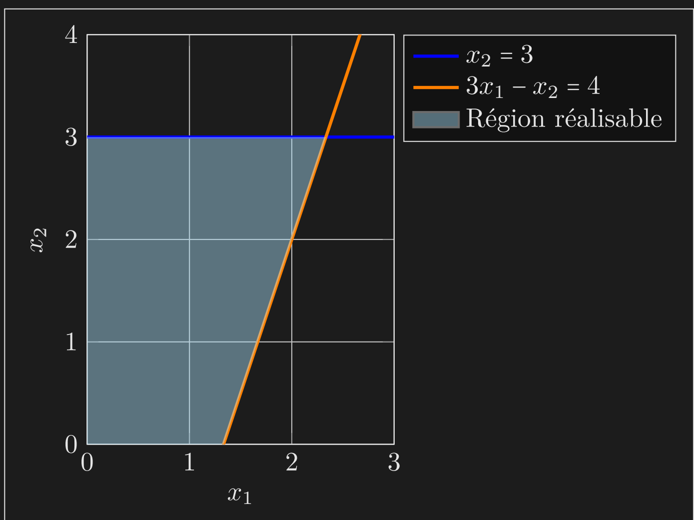

Figure 3 – Représentation du problème P_ε dans $\mathbb{R}^2$ pour $\varepsilon = 3$

Ensuite, on veut contraindre cet ensemble de points pour se retrouver uniquement avec des valeurs entières. Cela donne le graphe suivant :

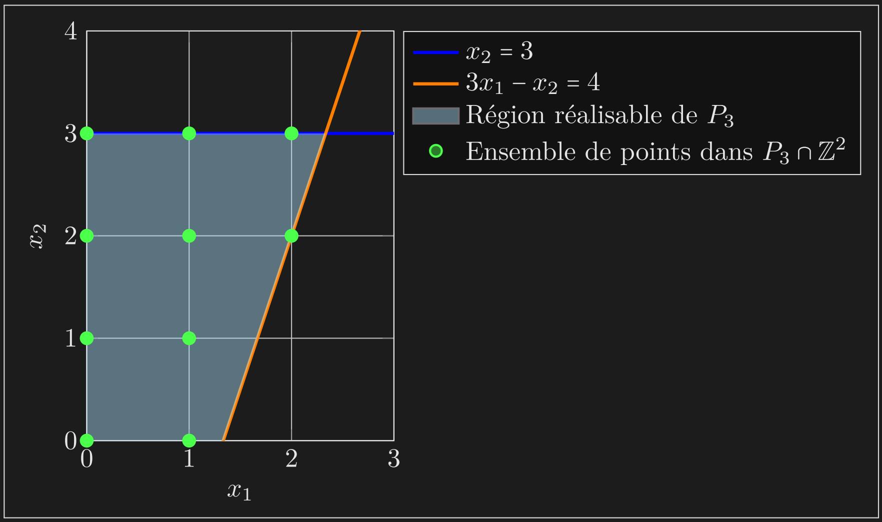

FIGURE 4 – Représentation de l'ensemble de points $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

On veut maintenant trouver l'enveloppe convexe de cet ensemble de points ce qui donne le graphe suivant :

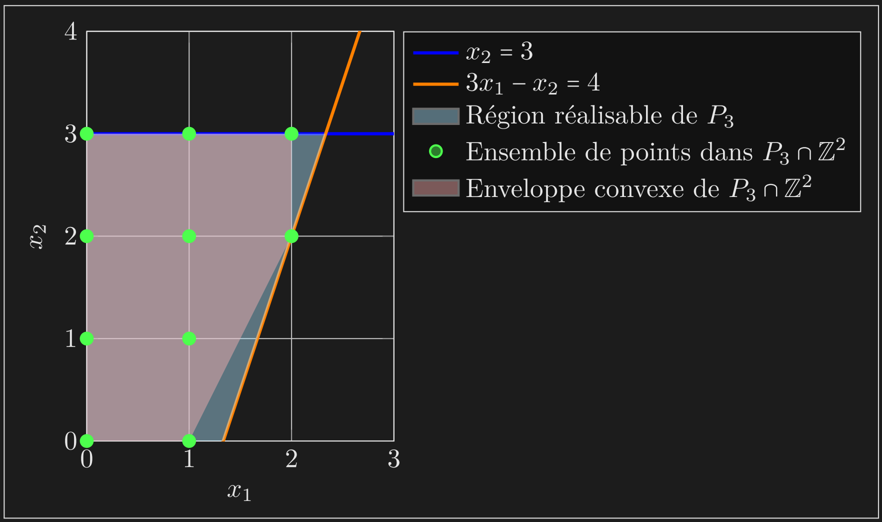

FIGURE 5 – Représentation de l'enveloppe convexe de $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

Enfin, on peut nettoyer un peu la figure pour voir plus clairement l'enveloppe convexe :

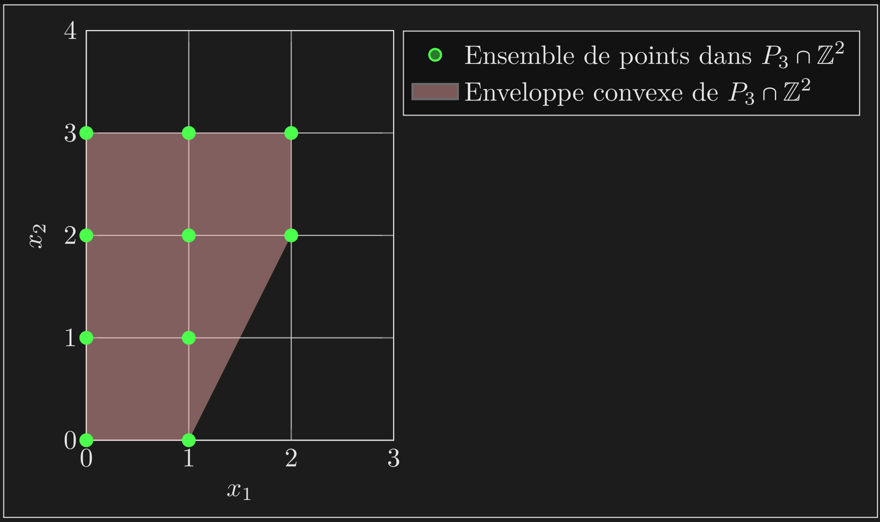

Figure 6 – Représentation de l'enveloppe convexe de $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ nettoyée

On voit alors que ce polyèdre P_I est clairement défini par les trois contraintes suivantes :

$$(P_I) = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0, \ \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

ce qui donne le graphe suivant :

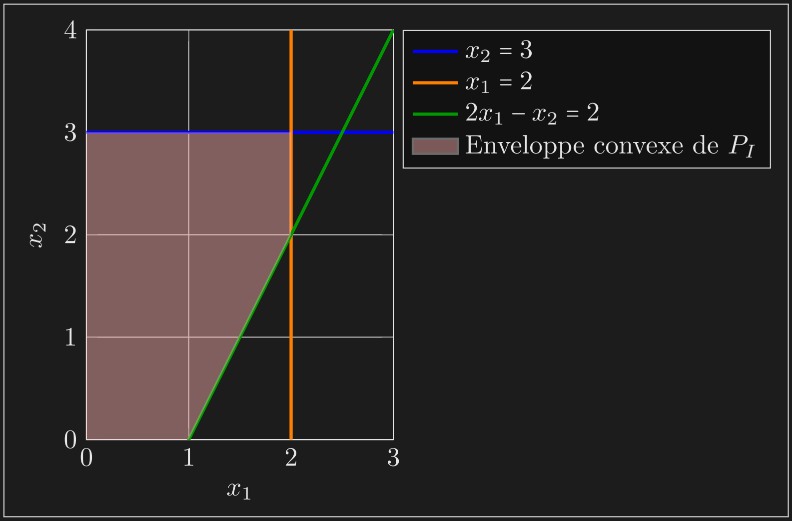

Figure 7 – Représentation du polyèdre P_I dans $\mathbb{R}^2$

Quelques remarques sur P_I :

- Comme pour le cas $\varepsilon = 1$, l'ensemble des points du polyèdre est borné. Plus fort que ca, les différents points du polyèdre sont bornés par des points entiers.
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0,0), (0,3), (2,3), (2,2), (1,0)$$

- Tous les points extrêmes de P_I sont entiers.
- Le polyèdre P_I est entièrement défini par 3 inégalités.

1.2 Optimisation combinatoire

Exercice 2 Bornes géométriques pour le problème du Voyageur de Commerce.
On considère le problème du VOYAGEUR DE COMMERCE sur un graphe complet non-orienté formé de n villes. On note E l'ensemble des arêtes, formé des $n(n-1)/2$ parties $\{i,j\}$ de deux éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$. On note d_{ij} la distance de la ville i à la ville j. On rappelle qu'à un tour, on associe un vecteur $x \in \mathbb{R}^E$ tel que $x_{ij} = 1$ si l'arête i,j appartient au tour et $x_{ij} = 0$ sinon. On considère le problème linéaire P_1 (sans contraintes d'intégrité) suivant :

$$(P_1) = \begin{cases} \min \sum_{\{i,j\}\in E} d_{ij}x_{ij}, \;\; x \in \mathbb{R}^E \\ \sum_{j:\{i,j\}\in E} x_{ij} = 2, \;\; \forall i \in \{1,\dots,n\} \\ x_{ij} \geq 0, \;\; \forall\{i,j\} \in E \end{cases}$$

Solution.

Exercice 3.

Solution.

1.3 Comparaison de méthodes

Exercice 4.

Solution.

Exercice 5.

Solution.

Exercice 6.

Solution.

2 Partie pratique

2.1 Comparaison de formulations pour le problème du voyageur de commerce

Exercice 7.

Solution.

2.2 Sur le problème du sac à dos

Exercice 8.

Solution.