

# HAI820I Recherche Opérationnelle II — DM

Ivan Lejeune

4 février 2026

## Table des matières

1	Partie théorique . . . . .	2
1.1	Polyèdre entier . . . . .	2
1.2	Optimisation combinatoire . . . . .	6
1.3	Comparaison de méthodes . . . . .	6
2	Partie pratique . . . . .	7
2.1	Comparaison de formulations pour le problème du voyageur de commerce . .	7
2.2	Sur le problème du sac à dos . . . . .	7

# 1 Partie théorique

## 1.1 Polyèdre entier

### Exercice 1 Représentation et facettes.

Soit  $P_\varepsilon$  le polyèdre défini par les inégalités linéaires suivantes :

$$(P_\varepsilon) = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2 - \varepsilon)x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. Illustrer le polyèdre  $P_\varepsilon$  et les inégalités dans le plan pour  $\varepsilon = 1$  et  $\varepsilon = -1$ .
2. Soient  $\varepsilon = 3$  et le polyèdre entier  $P_I = \text{conv}(P_3 \cap \mathbb{Z}^2)$ . Dessiner  $P_I$  et donner une représentation (extérieure) minimale de  $P_I$ .

### Solution.

1. Pour  $\varepsilon = -1$ , le problème  $P_\varepsilon$  devient le suivant :

$$P_\varepsilon = P_{-1} = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

On peut représenter ce problème dans le plan comme suit :

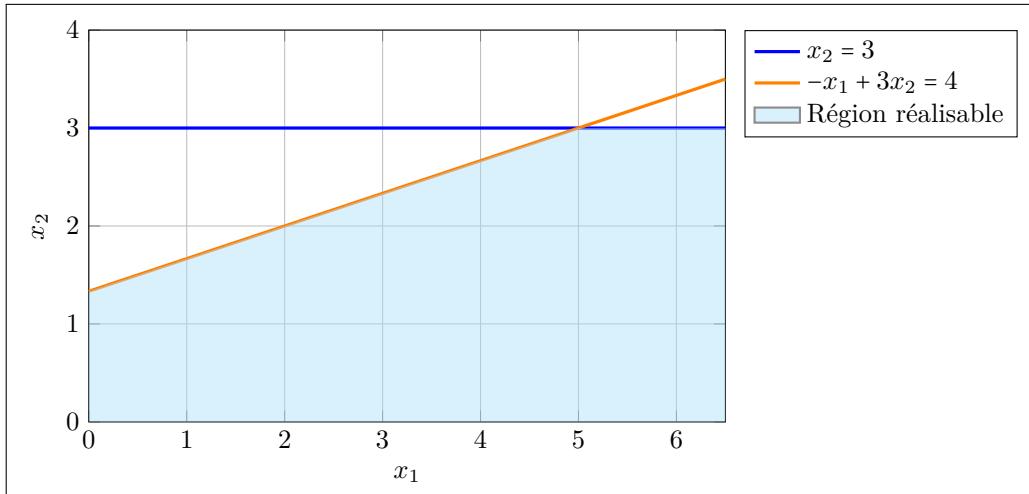


FIGURE 1 – Représentation du problème  $P_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\varepsilon = -1$

Quelques remarques par rapport à la figure :

- Tout d'abord on peut remarquer que l'ensemble des points dans le polyèdre est non borné en  $x_1$ .
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0, 0), (0, 4/3), (5, 3), (6.5, 3), (6.5, 0)$$

Regardons maintenant le cas  $\varepsilon = 1$ . Le problème  $P_\varepsilon$  devient le suivant :

$$P_\varepsilon = P_1 = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

On peut représenter ce problème dans le plan comme suit :



FIGURE 2 – Représentation du problème  $P_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\varepsilon = 1$

Quelques remarques par rapport à la figure :

- Tout d'abord on peut remarquer que l'ensemble des points dans le polyèdre est complètement borné cette fois-ci. Contrairement au cas  $\varepsilon = -1$ , on ne peut pas choisir n'importe quelle valeur pour  $x_1$ .
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0,0), (0,3), (1,3), (4,0)$$

- Ces deux problèmes, même s'ils viennent tous deux de  $P_\varepsilon$  ont des représentations dans l'espace bien différentes, cela est notamment dû à l'impact qu'a le choix de  $\varepsilon$  sur le signe des variables  $x_1$  et  $x_2$  dans la seconde contrainte. C'est ce qui décide « l'angle de la pente » de cette contrainte et qui permet donc de borner ou non le polyèdre.

2. On fixe désormais  $\varepsilon = 3$ . On commence par représenter le problème  $P_3$  dans l'espace comme suit :



FIGURE 3 – Représentation du problème  $P_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\varepsilon = 3$

Ensuite, on veut contraindre cet ensemble de points pour se retrouver uniquement avec des valeurs entières. Cela donne le graphe suivant :

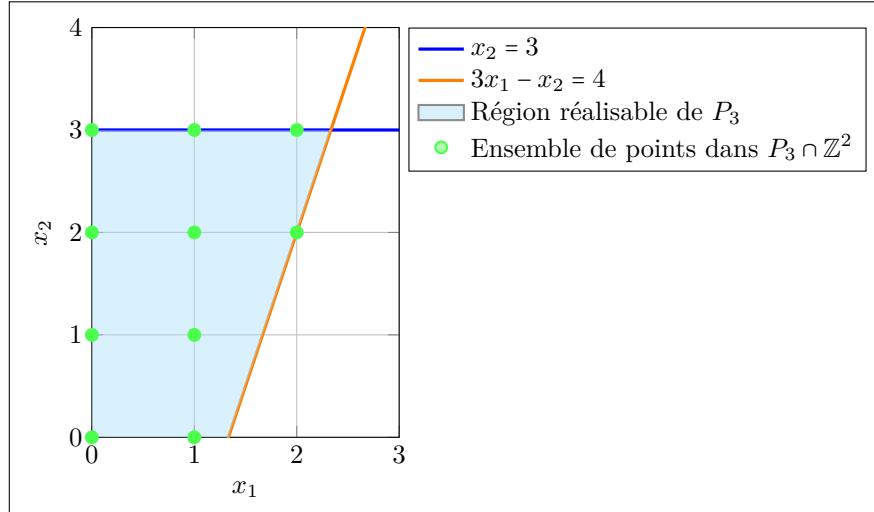


FIGURE 4 – Représentation de l'ensemble de points  $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$

On veut maintenant trouver l'enveloppe convexe de cet ensemble de points ce qui donne le graphe suivant :

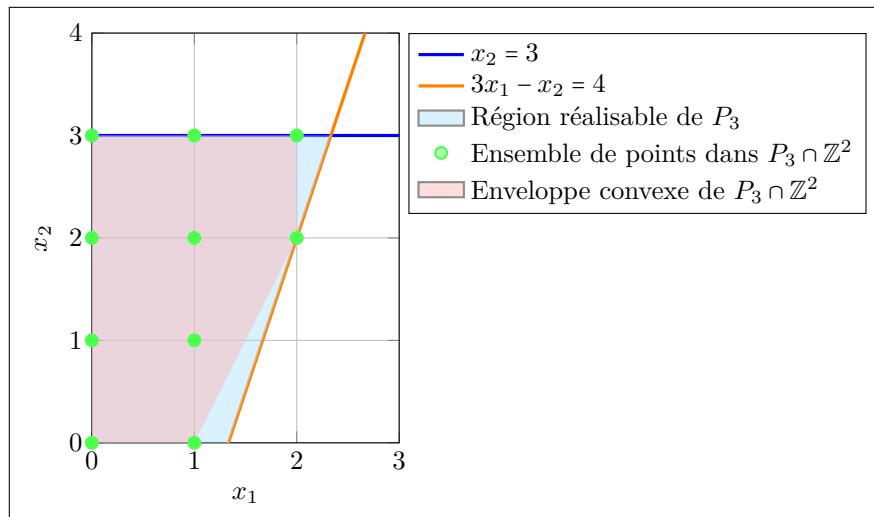


FIGURE 5 – Représentation de l'enveloppe convexe de  $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$

Enfin, on peut nettoyer un peu la figure pour voir plus clairement l'enveloppe convexe :

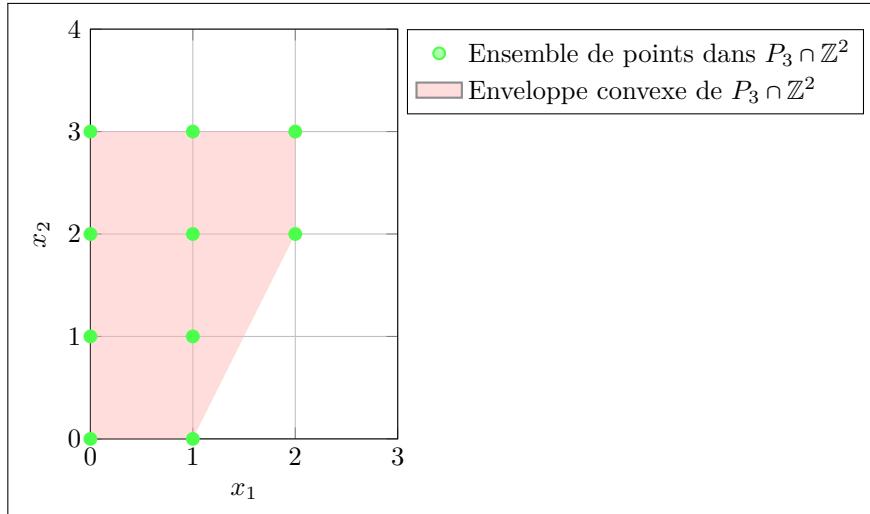


FIGURE 6 – Représentation de l'enveloppe convexe de  $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  nettoyée

On voit alors que ce polyèdre  $P_I$  est clairement défini par les trois contraintes suivantes :

$$(P_I) = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

ce qui donne le graphe suivant :

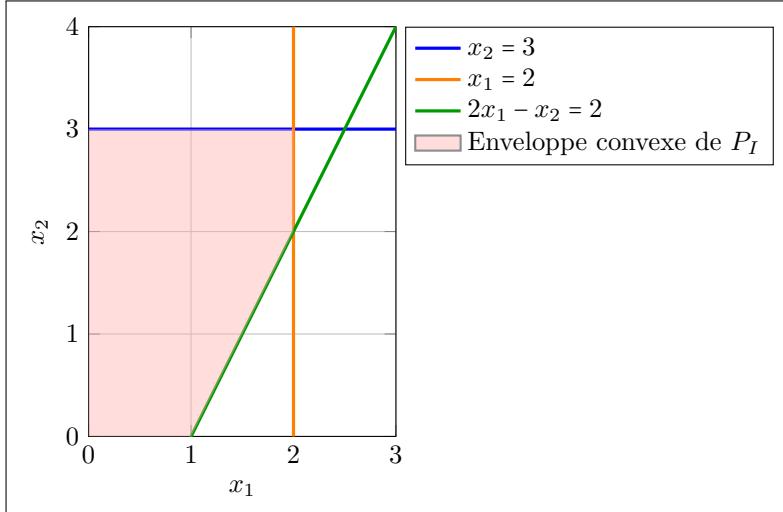


FIGURE 7 – Représentation du polyèdre  $P_I$  dans  $\mathbb{R}^2$

Quelques remarques sur  $P_I$  :

- Comme pour le cas  $\varepsilon = 1$ , l'ensemble des points du polyèdre est borné. Plus fort que ça, les différents points du polyèdre sont bornés par des points entiers.
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0,0), (0,3), (2,3), (2,2), (1,0)$$

- Tous les points extrêmes de  $P_I$  sont entiers.
- Le polyèdre  $P_I$  est entièrement défini par 3 inégalités.

## 1.2 Optimisation combinatoire

### Exercice 2 Bornes géométriques pour le problème du Voyageur de Commerce.

On considère le problème du VOYAGEUR DE COMMERCE sur un graphe complet non-orienté formé de  $n$  villes. On note  $E$  l'ensemble des arêtes, formé des  $n(n - 1)/2$  parties  $\{i, j\}$  de deux éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ . On note  $d_{ij}$  la distance de la ville  $i$  à la ville  $j$ . On rappelle qu'à un tour, on associe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^E$  tel que  $x_{ij} = 1$  si l'arête  $i, j$  appartient au tour et  $x_{ij} = 0$  sinon. On considère le problème linéaire  $P_1$  (sans contraintes d'intégrité) suivant :

$$(P_1) = \begin{cases} \min \sum_{\{i,j\} \in E} d_{ij} x_{ij}, & x \in \mathbb{R}^E \\ \sum_{j:\{i,j\} \in E} x_{ij} = 2, & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ x_{ij} \geq 0, & \forall \{i,j\} \in E \end{cases}$$

**Solution.**

### Exercice 3.

**Solution.**

## 1.3 Comparaison de méthodes

### Exercice 4.

**Solution.**

### Exercice 5.

**Solution.**

### Exercice 6.

**Solution.**

## 2 Partie pratique

### 2.1 Comparaison de formulations pour le problème du voyageur de commerce

**Exercice 7.**

**Solution.**

### 2.2 Sur le problème du sac à dos

**Exercice 8.**

**Solution.**