Course Name — Cours

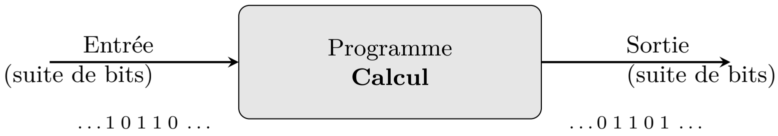
Ivan Lejeune

12 octobre 2025

Table des matières

Chapitre 1 — Calculabilité

On s'intéresse dans ce cours au système de boite noire.
On attend une entrée, des calculs sont effectués, et on a une sortie.



Nos entrées et sorties correspondent à des suites de bits, on est dans le cadre discret.
On utilisera les symboles suivants :

- L'alphabet : $\Sigma = \{0, 1\}$,
- L'ensemble des mots : Σ^*,

On utilisera notamment les entiers à la place des mots. Pour ce faire, on veut une bijection entre Σ^* et $\mathbb{N}$. Problème ? La fonction classique

$$x_1 x_2 \dots x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i 2^{i-1}$$

n'est pas une bijection car le mot 00101 et le mot 101 donnent le même entier.
On utilisera donc la méthode suivante :
Soit $x_1, \dots, x_n$ notre suite de bits. Pour la convertir en entier, on commence par ajouter un 1 au début. Donc la chaîne de bits $x_1 \dots x_n$ devient $1x_1 \dots x_n$ mais problème, on ne peut pas coder le mot vide. Pour régler ce problème, on fait moins 1. Donc la chaîne de bits $x_1 \dots x_n$ devient $1x_1 \dots x_n$ et on fait moins 1, et voilà on a une bijection entre Σ^* et $\mathbb{N}$.
Elle ressemble à ceci :

$$x_1 x_2 \dots x_n \in \Sigma^* \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i 2^i - 1 \in \mathbb{N}$$

Pour appliquer un programme à une entrée on utilisera la notation non conventionnelle suivante :

$$[a \mid x]$$

qui représente l'exécution du programme a sur l'entrée x.
On a alors deux possibilités :

- Soit le programme s'arrête, et on note alors $[a \mid x] \downarrow$ si le programme a sur l'entrée x s'arrête. On dit que ça converge.
- Soit le programme ne s'arrête pas, et on note alors $[a \mid x] \uparrow$ si le programme a sur l'entrée x ne s'arrête pas. On dit que ça diverge.
- On note alors $[a \mid x] = y$ si le programme a sur l'entrée x s'arrête et donne la sortie y.

Il existe deux autres notations conventionnelles :

- $\varphi_a(x) = y$ si $[a \mid x] = y$ (standard historique américain),
- $U(a, x) = y$ si $[a \mid x] = y$ (standard historique russe).

On pourra aussi utiliser $[a \mid \cdot]$ pour désigner la fonction **partielle** suivante :

$$\begin{aligned} [a \mid \cdot] : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto \begin{cases} [a \mid x] & \text{si } [a \mid x] \downarrow, \\ \text{non défini} & \text{si } [a \mid x] \uparrow. \end{cases} \end{aligned}$$

> **Définition 1.1.** Une fonction est **calculable** (ou récursive) si il existe un programme qui la calcule.

On travaillera dans l'intégralité de ce cours (ou du moins ce chapitre) sur les entiers. On pourra donc dire $\exists a$ sans préciser que a est un entier.

Définition 1.2. La **fonction caractéristique** d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est la fonction

$$\chi_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.3. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est **décidable** (ou **récursif**) si sa fonction caractéristique χ_A est calculable.

Définition 1.4. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est **énumérable** (ou **récursivement énumérable**) si il est le domaine d'une fonction calculable.
D'autres mots pour dire la même chose :

- récursivement énumérable,
- calculatoirement énumérable,
- semi-décidable (à ne pas utiliser).

Définition 1.5. Le **domaine** d'une fonction a est l'ensemble

$$\mathrm{dom}(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid [a \mid x] \downarrow\}$$

Théorème de Post. Soit $E \subseteq \mathbb{N}$. Si E et $\overline{E}$ sont énumérables, alors E est décidable (où $\overline{E} = \mathbb{N} \setminus E$ est le complémentaire de E dans $\mathbb{N}$)

Démonstration. Soit $E \subseteq \mathbb{N}$ tel que E et $\overline{E}$ sont énumérables. Donc il existe des programmes a et b tels que $\mathrm{dom}[a \mid \cdot] = E$ et $\mathrm{dom}[b \mid \cdot] = \overline{E}$. On veut construire un programme c qui décide E. On utilise la fonction Step de la manière suivante :

$$\mathrm{Step}\langle a, x, t\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ n'a pas terminé après } t \text{ étapes sur l'entrée } x, \\ 1 + [a \mid x] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite, on utilise la fonction Step pour construire le programme c qui décide E :

$$\begin{aligned} c : x \mapsto\ & t \leftarrow 0 \\ & \text{tant que } \mathrm{Step}\langle a, x, t\rangle = 0 \text{ et } \mathrm{Step}\langle b, x, t\rangle = 0 \\ & \quad t \leftarrow t + 1 \\ & \text{si } \mathrm{Step}\langle a, x, t\rangle \neq 0 \text{ alors return } 1 \\ & \text{sinon return } 0 \end{aligned}$$

Donc E est décidable. □