HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

19 janvier 2026

Table des matières

1 Convexité : ensembles et fonctions

Exercice 1 Convexité.

1. Soit une famille (éventuellement infinie) d'inégalités linéaires $a_i^T x \leq b_i, i \in I$. Soit C son ensemble de solutions. Montrer que C est convexe.
2. Montrer que la boule fermée $\mathsf{B}(a, r)$ est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit W l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de S. Montrer que W est convexe.
4. Soit C un convexe. Montrer que
$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C$$
est convexe.
5. Une matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times n$ est bistochastique si elle satisfait
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, a_{ij} \geq 0.$$
Une matrice de permutation P est une matrice bistochastique à valeurs entières, c'est-à-dire que dans chaque ligne de P il y a un et un seul élément égal à 1, et les autres sont nuls. De même pour chaque colonne.
   (a) Montrer que pour toute matrice bistochastique A, il existe une matrice de permutation P de même dimension telle que $p_{ij} = 0$ si $a_{ij} = 0$.
   (b) Est-ce qu'une combinaison convexe de matrices de permutation est une matrice bistochastique ?
   (c) Montrer que toute matrice bistochastique A est une combinaison convexe de matrices de permutation.
   (d) Trouver la combinaison convexe pour la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0 & 0.48 \\ 0.02 & 0.15 & 0.67 & 0.16 \\ 0.46 & 0.02 & 0.16 & 0.36 \\ 0.37 & 0.46 & 0.17 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Soient maintenant C_1 et C_2 deux convexes disjoints et
$$D_1 = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C_1, \quad i = 1, 2.$$
Montrer que l'un des deux convexes $C_1 \cap D_2$ ou $C_2 \cap D_1$ est vide.

Solution. A remplir