

# TD CAPES / Remise à niveau M1

Ivan Lejeune

27 août 2025

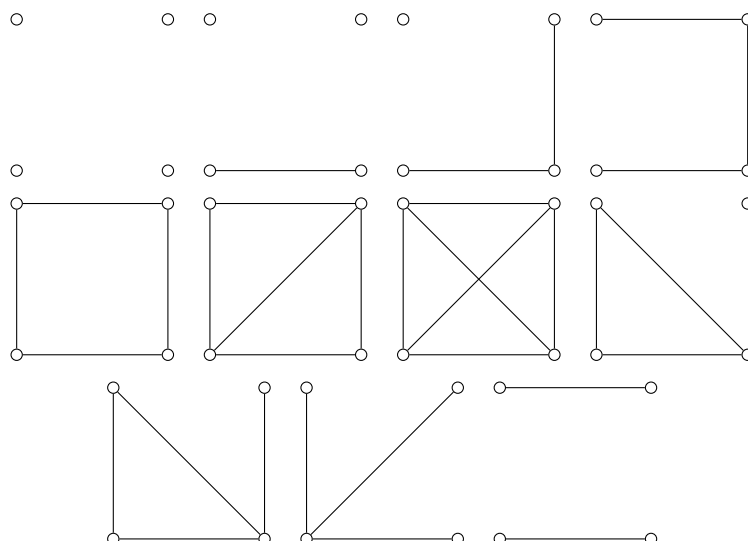
## Table des matières

TD1 — Graphes . . . . .	2
-------------------------	---

## TD1 — Graphes

**Exercice 1.1.** Combien y-a-t'il de graphes simples non isomorphes avec 4 sommets ? Dessiner chacun de ces graphes.

**Solution.** Il y a exactement 11 graphes simples non isomorphes avec 4 sommets, les voici :



**Exercice 1.2.** Calculez les paramètres  $n$  (nombre de sommets),  $m$  (nombre d'arcs ou d'arêtes),  $\delta$  (degré min),  $\Delta$  (degré max) et  $D$  (diamètre) des graphes suivants :

1.  $B_d$  (les arbres binomiaux de dimension  $d$ ),
2.  $C_n$  (cycle à  $n$  sommets),
3.  $K_n$  (graphe complet à  $n$  sommets),
4.  $GR_{p \times q}$  (grille  $p \times q$ ),
5.  $TR_{p \times q}$  (tore  $p \times q$ ),
6.  $H_d$  (hypercube de dimension  $d$ ).

Dessinez les graphes suivants :

1.  $B_3$
2.  $K_5$
3.  $GR_{4 \times 4}$
4.  $TR_{4 \times 4}$
5.  $H_2$
6.  $H_3$
7.  $H_4$

**Rappel.** Le **diamètre**  $D$  d'un graphe est la plus grande des plus courtes distances entre deux sommets quelconques.

Par exemple, dans un arbre, le diamètre est la longueur du chemin le plus long entre deux feuilles.

**Solution.** Les paramètres des graphes sont les suivants :

Graphe	$n$	$m$	$\delta$	$\Delta$	$D$
$B_d$	$2^d$	$2^d - 1$	1	3	$d$
$C_n$	$n$	$n$	2	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$K_n$	$n$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n-1$	$n-1$	1
$GR_{p \times q}$	$pq$	$2pq - p - q$	2	4	$p+q-2$
$TR_{p \times q}$	$pq$	$2pq$	4	4	$\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$
$H_d$	$2^d$	$d \cdot 2^{d-1}$	$d$	$d$	$d$

Leur représentation graphique est la suivante :

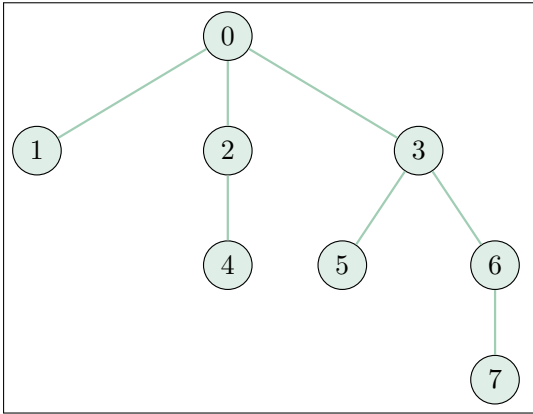


FIGURE 1 –  $B_3$

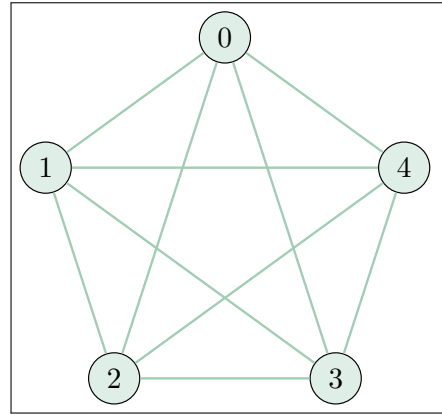


FIGURE 2 –  $K_5$

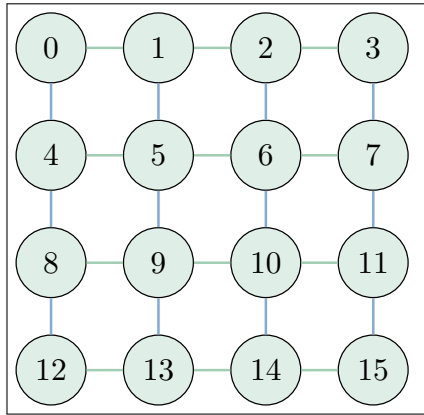


FIGURE 3 –  $GR_{4 \times 4}$

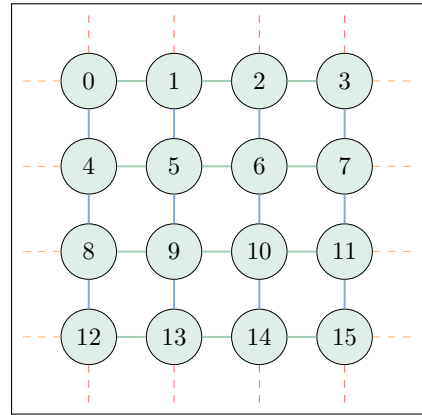


FIGURE 4 –  $TR_{4 \times 4}$

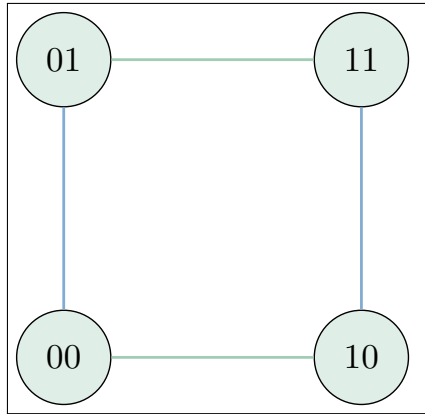


FIGURE 5 –  $H_2$

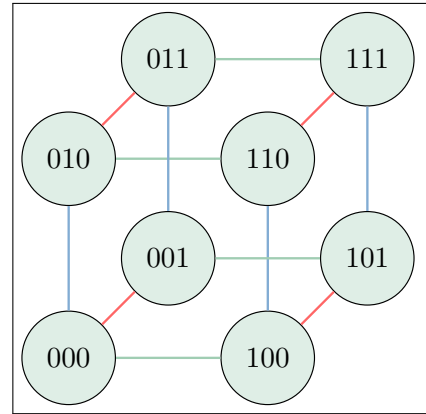


FIGURE 6 –  $H_3$

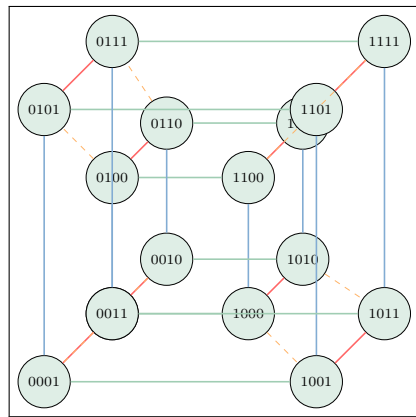


FIGURE 7 –  $H_4$

**Exercice 1.3.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe d'ordre  $n$ . Soient  $d_1, d_2, \dots, d_n$  les degrés du graphe. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2 \cdot |E|.$$

**Solution.** Une arête relie exactement 2 sommets. Le degré  $d_i$  du  $i$ -ième sommet correspond au nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Alors, en sommant tous ces degrés, on compte toutes les arêtes exactement 2 fois, d'où

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2 \cdot |E|.$$

**Exercice 1.4.** Montrer que dans un graphe il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

**Solution.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Pour tout sommet  $v \in V$ , notons  $\deg(v)$  son degré. Chaque arête  $e \in E$  contribue 1 au degré de chacun de ses deux sommets, donc

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Ainsi la somme des degrés est un nombre pair.

Séparons les sommets selon la parité de leur degré : soit  $I$  l'ensemble des sommets de degré

impair et  $P$  l'ensemble des sommets de degré pair. On a alors

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in I} \deg(v) + \sum_{v \in P} \deg(v).$$

La somme  $\sum_{v \in P} \deg(v)$  est paire. De plus, chaque terme de  $\sum_{v \in I} \deg(v)$  est impair, donc  $\sum_{v \in I} \deg(v)$  n'est pair que si  $|I|$  est pair. Or  $\sum_{v \in V} \deg(v)$  est pair, donc  $|I|$  aussi et le nombre de sommets de degré impair est pair.

**Exercice 1.5.** Exercice 5 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.6.** Exercice 6 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.7 Exercice 7.** Les nombres  $\delta(G)$  et  $\Delta(G)$  représentent respectivement les degrés minimum et maximum d'un graphe  $G = (X, E)$  ( $X$  représente l'ensemble des sommets et  $E$  celui des arêtes) où  $n = |X|$  et  $m = |E|$ . Montrer que  $\delta(G) \leq 2 \frac{m}{n} \leq \Delta(G)$ .

**Solution.** On sait que pour tout sommet  $d$ , on a

$$\delta \leq d_i \leq \Delta$$

Si on fait la somme des distances pour tous les sommets, on obtient alors

$$\delta \leq 2m/n \leq \Delta$$

**Exercice 1.8 Exercice 8.** Montrer que si un graphe biparti  $G = (X_1, X_2, E)$  est  $k$ -régulier (avec  $k > 0$ ) alors  $|X_1| = |X_2|$ .

**Solution.** Il y a  $n_1$  sommets à gauche et  $n_2$  à droite. Il y a donc  $kn_1$  arêtes qui sortent de la partie à gauche et qui vont à droite, et vice versa. Alors  $kn_1 = kn_2$  et donc  $n_1 = n_2$ .

**Exercice 1.9 Exercice 9.** Montrer que tout graphe simple possède au moins deux sommets de même degré

**Solution.** Supposons que tous les sommets ont des degrés différents. Alors, comme le degré maximal est  $n - 1$ , on a

$$\begin{aligned} x_n &= n - 1 \\ x_{n-1} &= n - 2 \\ &\vdots \\ x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Or,  $x_n$  est relié à tous les sommets, donc en particulier à  $x_1$ , mais celui-ci est de degré 0. Il y a donc contradiction et il existe au moins deux sommets de même degré

**Exercice 1.10 Exercice 10.** Un  $n$ -cube ou (hypercube de dimension  $n$ ) est un graphe dont les sommets représentent les éléments de  $\{0, 1\}^n$  et deux sommets sont adjacents si et seulement si les  $n$ -uplets correspondants diffèrent en exactement une composante. Montrer que :

1. Le  $n$ -cube possède  $2^n$  sommets,
2. Le  $n$ -cube est  $n$ -régulier,

3. Le nombre d'arêtes est  $n \cdot 2^{n-1}$ .

Représenter le 1-cube, le 2-cube et le 3-cube

- Solution.**
1. Il y a exactement  $2^n$   $n$ -uplets dans  $\{0,1\}^n$  donc un  $n$ -cube a exactement  $2^n$  sommets.
  2. Il y a exactement  $n$   $n$ -uplets qui diffèrent d'un sommet en exactement une composante (il suffit d'inverser une de ses composantes).
  3. Chaque sommet a  $n$  voisins et chaque arête est comptée 2 fois donc  $n \cdot 2^n / 2 = n2^{n-1}$ .
  4. le 1 cube est une ligne reliant 2 points le 2 un carré et le 3 un cube.

**Exercice 1.11 Exercice 11.** Montrer que tout arbre d'ordre  $n > 1$  a au moins 2 sommets pendants (un sommet pendant est un sommet de degré 1).

**Solution.** Raisonner sur le degré des sommets sur la chaîne maximale (les sommets les plus distants). On peut aussi raisonner sur la somme des degrés et montrer qu'il faut forcément 2 de degré 1 pour la formule

**Exercice 1.12.** Exercice 12 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.13.** Exercice 13 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.14.** Exercice 14 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.15.** Exercice 15 content

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.16 Exercice 16.** Soient  $G_1 = (X_1, A_1)$  et  $G_2 = (X_2, A_2)$  les graphes suivants :

Repondre aux questions suivantes :

1. Donner  $\Gamma^+(x)$  (la liste des successeurs),  $\Gamma^-(x)$  (la liste des prédécesseurs),  $\Gamma(x)$ ,  $d^+(x)$ ,  $d^-(x)$  et  $d(x)$  pour tout  $x \in X_2$ .
2. Donner les matrices d'adjacence de  $G_1$  et  $G_2$ .
3. Etant donné un graphe orienté  $G = (X, A)$  ayant  $n$  sommets et  $m$  arcs, sa matrice d'incidence est une matrice  $n \times m$ , notée  $P = (p_{ie})$  telle que  $p_{ie} = 1$  si et seulement si le sommet  $i$  est l'origine de l'arc  $e$ ,  $p_{ie} = -1$  si et seulement si le sommet  $i$  est l'extrémité de l'arc  $e$  et  $p_{ie} = 0$  sinon. Donner la matrice d'incidence des graphes  $G_1$  et  $G_2$ .
4. Représenter les deux graphes par leurs listes d'adjacence (les sommets d'une liste d'adjacence sont rangés consécutivement dans un tableau.)

**Solution.** A completer

**Exercice 1.17 Exercice 17.** a completer, penser à rajouter les packages pour faire des algorithmes

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.18 Notions de base.** Soit la matrice binaire ou matrice d'adjacence  $M$  associée au graphe orienté  $G = (S, U)$  telle que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe représentatif de cette matrice.
2. Donner la matrice d'incidence sommets-arcs de ce graphe.
3. Calculer  $M^2, M^3, M^4$ . Que pouvez-vous en dire ?
4. Calculer

$$A = I + M + M^2 + M^3 + M^4.$$

Interpréter A.

5. Appliquer l'algorithme de Roy Warshall. Que constatez-vous ?

**Solution.** Exercice solution

**Exercice 1.19 Optional title 2.** Exercice 2 content

**Solution.** Exercice solution