



# 1 Partie théorique

## 1.1 Polyèdre entier

### Exercice 1 Représentation et facettes.

Soit  $P_\varepsilon$  le polyèdre défini par les inégalités linéaires suivantes :

$$(P_\varepsilon) = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2 - \varepsilon)x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. Illustrer le polyèdre  $P_\varepsilon$  et les inégalités dans le plan pour  $\varepsilon = 1$  et  $\varepsilon = -1$ .
2. Soient  $\varepsilon = 3$  et le polyèdre entier  $P_I = \text{conv}(P_3 \cap \mathbb{Z}^2)$ . Dessiner  $P_I$  et donner une représentation (extérieure) minimale de  $P_I$ .

### Solution.

1. Pour  $\varepsilon = -1$ , le problème  $P_\varepsilon$  devient le suivant :

$$P_\varepsilon = P_{-1} = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

On peut représenter ce problème dans le plan comme suit :

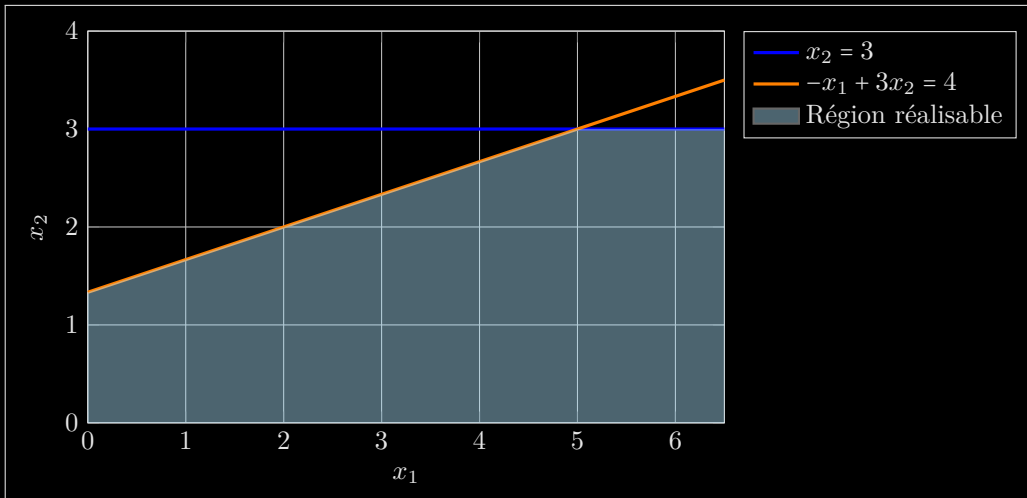


FIGURE 1 – Représentation du problème  $P_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\varepsilon = -1$

Quelques remarques par rapport à la figure :

- Tout d'abord on peut remarquer que l'ensemble des points dans le polyèdre est non borné en  $x_1$ .
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0, 0), (0, 4/3), (5, 3), (6.5, 3), (6.5, 0)$$

Regardons maintenant le cas  $\varepsilon = 1$ . Le problème  $P_\varepsilon$  devient le suivant :

$$P_\varepsilon = P_1 = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

On peut représenter ce problème dans le plan comme suit :

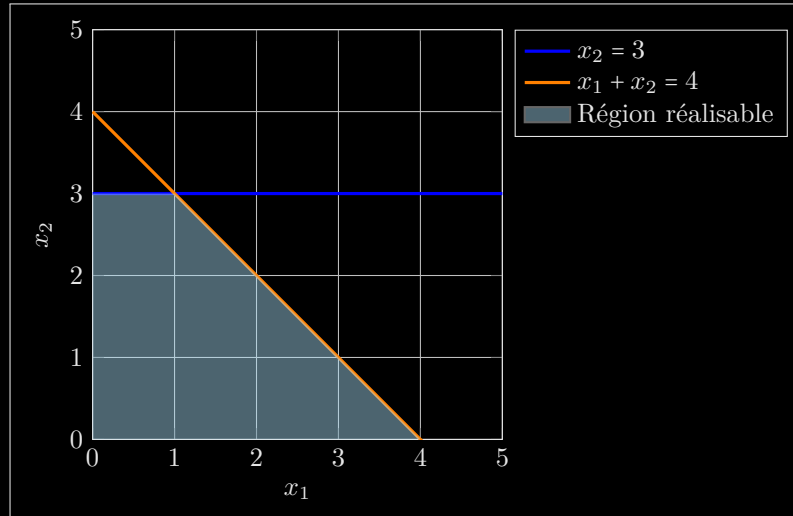


FIGURE 2 – Représentation du problème  $P_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\varepsilon = 1$

Quelques remarques par rapport à la figure :

- Tout d'abord on peut remarquer que l'ensemble des points dans le polyèdre est complètement borné cette fois-ci. Contrairement au cas  $\varepsilon = -1$ , on ne peut pas choisir n'importe quelle valeur pour  $x_1$ .
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0, 0), (0, 3), (1, 3), (4, 0)$$

- Ces deux problèmes, même s'ils viennent tous deux de  $P_\varepsilon$  ont des représentations dans l'espace bien différentes, cela est notamment dû à l'impact qu'a le choix de  $\varepsilon$  sur le signe des variables  $x_1$  et  $x_2$  dans la seconde contrainte. C'est ce qui décide « l'angle de la pente » de cette contrainte et qui permet donc de borner ou non le polyèdre.

2. On fixe désormais  $\varepsilon = 3$ . On commence par représenter le problème  $P_3$  dans l'espace comme suit :

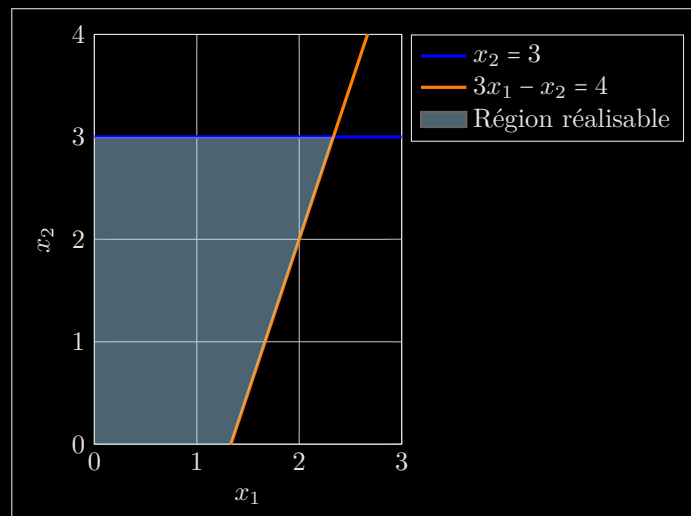


FIGURE 3 – Représentation du problème  $P_\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\varepsilon = 3$

Ensuite, on veut contraindre cet ensemble de points pour se retrouver uniquement avec des valeurs entières. Cela donne le graphe suivant :

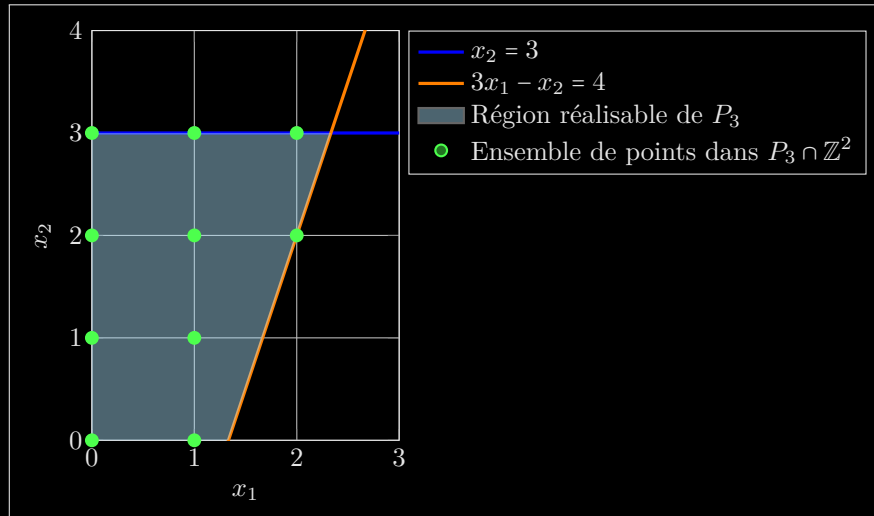


FIGURE 4 – Représentation de l'ensemble de points  $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$

On veut maintenant trouver l'enveloppe convexe de cet ensemble de points ce qui donne le graphe suivant :

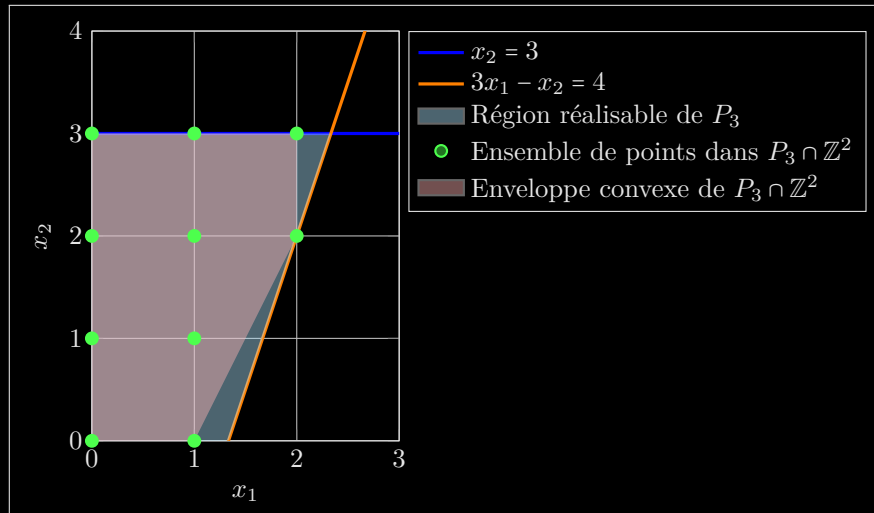


FIGURE 5 – Représentation de l'enveloppe convexe de  $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$

Enfin, on peut nettoyer un peu la figure pour voir plus clairement l'enveloppe convexe :

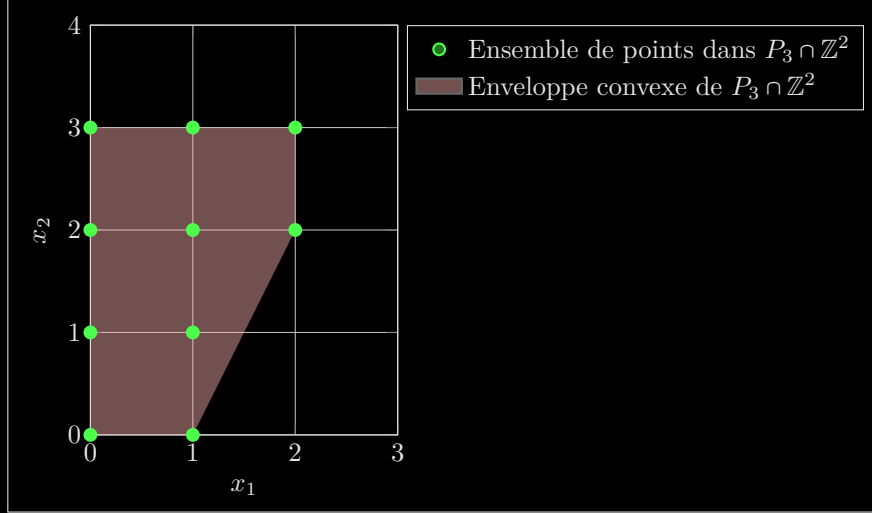


FIGURE 6 – Représentation de l'enveloppe convexe de  $P_3 \cap \mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  nettoyée

On voit alors que ce polyèdre  $P_I$  est clairement défini par les trois contraintes suivantes :

$$(P_I) = \begin{cases} x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

ce qui donne le graphe suivant :

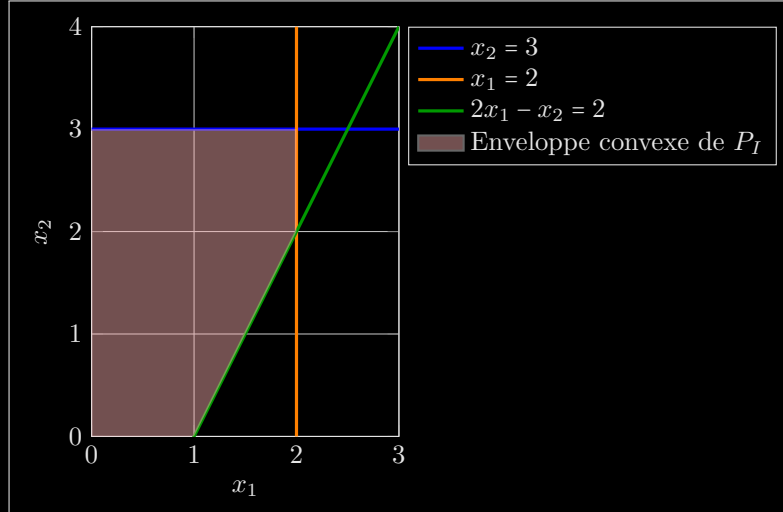


FIGURE 7 – Représentation du polyèdre  $P_I$  dans  $\mathbb{R}^2$

Quelques remarques sur  $P_I$  :

- Comme pour le cas  $\varepsilon = 1$ , l'ensemble des points du polyèdre est borné. Plus fort que ça, les différents points du polyèdre sont bornés par des points entiers.
- Les points extrêmes de ce polyèdre sont :

$$(0,0), (0,3), (2,3), (2,2), (1,0)$$

- Tous les points extrêmes de  $P_I$  sont entiers.
- Le polyèdre  $P_I$  est entièrement défini par 3 inégalités.

## 1.2 Optimisation combinatoire

### Exercice 2 Bornes géométriques pour le problème du Voyageur de Commerce.

On considère le problème du VOYAGEUR DE COMMERCE sur un graphe complet non-orienté formé de  $n$  villes. On note  $E$  l'ensemble des arêtes, formé des  $n(n-1)/2$  parties  $\{i, j\}$  de deux éléments distincts de  $\{1, \dots, n\}$ . On note  $d_{ij}$  la distance de la ville  $i$  à la ville  $j$ . On rappelle qu'à un tour, on associe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^E$  tel que  $x_{ij} = 1$  si l'arête  $i, j$  appartient au tour et  $x_{ij} = 0$  sinon. On considère le problème linéaire  $P_1$  (sans contraintes d'intégrité) suivant :

$$(P_1) = \begin{cases} \min \sum_{\{i,j\} \in E} d_{ij} x_{ij}, & x \in \mathbb{R}^E \\ \sum_{j: \{i,j\} \in E} x_{ij} = 2, & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ x_{ij} \geq 0, & \forall \{i, j\} \in E \end{cases}$$

1. Démontrer que la valeur de ce problème minore la valeur du problème du VOYAGEUR DE COMMERCE. Si ce problème admet une solution optimale à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , celle-ci fournit-elle nécessairement un tour optimal ?
2. On propose le minorant suivant, de nature géométrique, de la valeur du problème du VOYAGEUR DE COMMERCE. Nous supposons que la distance  $d$  provient d'une norme, que pour fixer les idées, nous pourrions supposer être la norme euclidienne dans le plan. Autrement dit, chaque ville  $i$  est située en un point  $x_i \in \mathbb{R}^2$  de sorte que

$$d_{ij} = \|x_i - x_j\|$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne. Donnons-nous un réel  $r_i \geq 0$  pour chaque ville  $i$ . On dit alors que les disques ouverts

$$D(x_i, r_i) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y - x_i\| < r_i\}$$

constituent une famille de *zones de controle* s'ils sont deux à deux disjoints. Montrer que si les  $r_i$  sont les rayons des disques d'une famille de zones de controle alors la valeur d'un tour est minorée par  $\sum_{1 \leq i \leq n} 2r_i$ . En déduire que la zone valeur du problème du VOYAGEUR DE COMMERCE est minorée par la valeur du problème suivant :

$$D_1 = \begin{cases} \max \sum_{i=1}^n 2r_i, & r_i \in \mathbb{R}^n \\ r_i + r_j \leq d_{ij}, & \forall i, j \in E \\ r_i \geq 0, & \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

3. Montrer que si un tour est tel qu'il existe une famille de zones de controle telles que

$$d_{ij} = r_i + r_j$$

pour toute arête  $\{i, j\}$  du tour alors ce tour est optimal.

4. Expliciter le problème dual du problème  $P_1$  et le comparer au programme  $D_1$ . Retrouver ainsi la borne précédente faisant intervenir les zones de controle.
5. Que pensez-vous de la qualité des bornes précédentes pour l'instance donnée par la figure 1 répartie en deux groupes distants ?

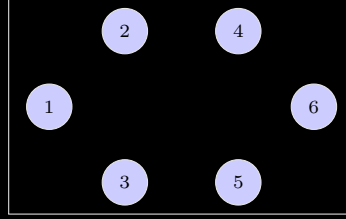


FIGURE 8 – Le pire des cas pour les zones de controle

Afin d'améliorer la borne obtenue à l'aide des zones de controle nous introduisons maintenant la notion suivante :

Etant donné un sous-ensemble non-vide  $V$  de villes ainsi qu'une famille de zones de controle, nous appelons **douve** de largeur  $\delta$  centrée en  $V$  la région :

$$D = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x_i \in V, \|y - x_i\| \leq r_i + \delta\}$$

On notera  $\bar{V}$  le complémentaire de  $V$  dans l'ensemble des villes.

6. Montrer que si deux douves centrées respectivement en  $V$  et en  $\bar{V}$  et de largeurs respectives  $\delta$  et  $\bar{\delta}$  ne s'intersectent pas alors la somme

$$\sum_{i=1}^n 2r_i + 2\delta + 2\bar{\delta}$$

minore la valeur du problème du VOYAGEUR DE COMMERCE.

7. Considérons maintenant le problème  $P_2$  obtenu en rajoutant à  $P_1$  une unique contrainte de sous-tour :

$$\sum_{\{i,j\} \in E, i \in V, j \in \bar{V}} x_{ij} \geq 2$$

Expliciter le dual du problème  $P_2$ . Montrer que toute borne obtenue à l'aide de douves peut aussi être obtenue à l'aide d'une contrainte de sous-tour.

8. On considère l'instance donnée par la figure 2.

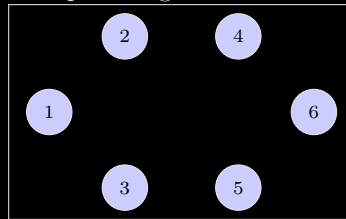


FIGURE 9 – Figure temporaire a remplacer par une grille

On prend la distance  $L_1$  et non la distance euclidienne. Les notions de disques, de zones de controle et de douves s'entendent alors au sens de cette distance. Montrer directement à l'aide d'une borne en faisant intervenir des douves que la longueur minimale d'un tour est de 14.

### Solution.

1. Commençons par expliciter l'ensemble des solutions des deux problèmes.  
Pour le problème du VOYAGEUR DE COMMERCE on a :

$$S_{TSP} = \left\{ x \in \{0, 1\}^E \mid \sum_{j: \{i,j\} \in E} x_{ij} = 2 \quad \forall i \text{ et les aretes forment un seul cycle} \right\}$$

Alors que pour  $P_1$  on a :

$$S_{P_1} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^E \mid \sum_{j:\{i,j\} \in E} x_{ij} = 2 \quad \forall i \right\}$$

Cela montre clairement que

$$S_{TSP} \subseteq S_{P_1}$$

Alors, si on considère la fonction  $f$  suivante :

$$f(x) = \sum_{\{i,j\} \in E} d_{ij} x_{ij}$$

on a bien

$$\min_{x \in S_{P_1}} f(x) \leq \min_{x \in S_{TSP}} f(x)$$

et donc les solutions au problème  $P_1$  minorent les solutions du VOYAGEUR DE COMMERCE. De plus, les solutions de  $P_1$  ne sont pas forcément admissibles pour le VOYAGEUR DE COMMERCE. Prenons l'exemple suivant avec le graphe  $G$  de la figure ?? ci-dessous :

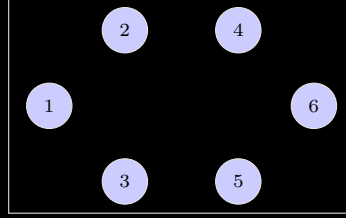


FIGURE 10 – Le pire des cas pour les zones de controle

On peut voir que la solution au problème  $P_1$  sur  $G$  où la distance entre les sommets est, par simplicité, la distance euclidienne donne

$$S_0 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$$

où les arêtes dans  $S_0$  ont poids 1 dans la solution et les autres ont poids 0.

Cette solution respecte bien toutes les contraintes de  $P_1$  mais correspond à deux cycles disjoints et n'est donc pas solution du VOYAGEUR DE COMMERCE. Ainsi une solution de  $P_1$ , même si elle est dans  $\{0, 1\}$  ne fournit pas forcément un tour optimal pour le problème du VOYAGEUR DE COMMERCE.

2. Si l'ensemble des  $r_i$  forment une famille de zones de controles alors ils sont deux à deux disjoints. En particulier, pour tout  $\{i, j\} \in E$ , on a

$$r_i + r_j \leq d_{ij}$$

Sinon, les deux disques respectivement centrés en  $i$  et  $j$  se croiseraient car ils dépassent la distance entre  $i$  et  $j$ . De plus, une solution au problème du VOYAGEUR DE COMMERCE passe forcément par chaque sommet. En particulier, si on considère les disques de rayon  $r_i$  de chaque sommet et une solution  $x_0, x_1, \dots, x_k, x_0$  au problème du VOYAGEUR DE COMMERCE, on a :

$$d_{x_i x_{i+1}} \geq r_i + r_{i+1}$$

En effet, une simple représentation géométrique de cela consisterait à tracer les deux disques respectivement centrés en  $x_i$  et  $x_{i+1}$  de rayons respectifs  $r_i$  et  $r_{i+1}$ . Alors, la droite qui passe par  $x_i$  et  $x_{i+1}$  passe forcément par le disque  $D(x_i, r_i)$  car il faut « sortir de ce

disque pour atteindre  $x_{i+1}$  (car les disques ne contiennent pas d'autres sommets par (2)). Il en va de même pour le disque en  $D(x_{i+1}, r_{i+1})$ . Alors on a bien

$$d_{x_i x_{i+1}} \geq r_i + r_{i+1}$$

et il en suit

$$\sum_{\{i,j\} \in S} d_{ij} \geq \sum_{i=1}^n 2r_i$$

car chaque sommet apparaît deux fois dans la somme des distances dans la solution (il faut « rentrer » dans le sommet puis en ressortir). D'où

$$D_1 = \begin{cases} \max \sum_{i=1}^n 2r_i, & r_i \in \mathbb{R}^n \\ r_i + r_j \leq d_{ij}, & \forall i, j \in E \\ r_i \geq 0, & \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

comme borne inférieure aux solutions du problème.

3. Soit  $S$  une solution telle que

$$d_{ij} = r_i + r_j.$$

On sait par la question précédente que

$$\sum_{i=1}^n 2r_i$$

est un minorant de toute solution. De plus,

$$\sum_{\{i,j\} \in S} d_{ij} = \sum_{\{i,j\} \in S} (r_i + r_j)$$

par hypothèse. Cette solution étant un cycle hamiltonien, on sait que chaque sommet apparaît exactement 2 fois dans la somme des distances, alors on a

$$\sum_{\{i,j\} \in S} (r_i + r_j) = \sum_{i=1}^n 2r_i.$$

Soit  $S$  atteint la borne inférieure des solutions à ce problème, donc elle est optimale.

4. Le problème  $P_1$  a une variable par arête (non orientée) et il y a  $n$  sommets donc  $\frac{n(n-1)}{2}$  variables. On a une contrainte par sommet et  $n$  sommets donc  $n$  contraintes. Le dual aura donc  $n$  variables et  $\frac{n(n-1)}{2}$  contraintes (autrement dit, autant de contraintes que d'arêtes). Cela donne :

$$\text{Dual}(P_1) = \begin{cases} \max \sum_{i=1}^n 2y_i \\ y_i + y_j \leq d_{ij}, & \forall \{i, j\} \in E \end{cases}$$

Cela correspond bien au bon nombre de variables et de contraintes. Il n'y a qu'une seule différence avec le programme  $D_1$ , on n'a pas de contraintes sur le signe de  $y$ . Si on contraint le dual aux valeurs positives en  $y$  alors on retrouve bien le programme  $D_1$  et la borne précédente. De plus, visuellement, si on considère qu'un  $r_i$  négatif ne correspond qu'à agrandir le rayon du disque dans l'autre sens, cela ne change rien aux solutions ni aux disques utilisés (ce n'est que visuel, plus formellement si on utilise  $|r_i|$  au lieu de juste  $r_i$  alors on a bien les mêmes propriétés sans contraindre le signe de  $r_i$ ).

5. On peut facilement remarquer que lorsque nos sommets sont proches, ou du moins à des distances similaires, l'utilisation de disques permet de bien séparer les sommets tout en mesurant la distance entre eux-ci avec peu de perte. Dans le cas de la figure 10 on comprend que si les sommets  $A = \{1, 2, 3\}$  sont très proches entre eux, les sommets  $B = \{4, 5, 6\}$  aussi mais ces deux groupes distants l'un de l'autre, alors les sommets au sein

de  $A$  (et de  $B$ ) vont fortement restreindre la taille des disques des autres sommets au sein du même groupe. Cela n'a pas forcément d'effet négatif au sein même de  $A$  mais donne une borne mauvaise sur la distance totale car elle néglige complètement l'écart entre ces deux groupes (qui pourtant contribue pour la majorité du poids d'une solution).

La notion de douve introduite pour la suite de l'exercice permet de parfaitement répondre à ce problème en regroupant ainsi les zones de contrôle par sous-famille locale, en découpant l'espace en régions en quelque sorte. Cela permettrait alors, dans le cas de la figure 10 par exemple de mesurer l'écart entre les groupes  $A$  et  $B$  avec les douves tout en conservant les écarts entre les villes internes à ces groupes grâce aux zones de contrôle.

Une représentation de ces concepts est donnée dans la figure 11 ci-dessous :

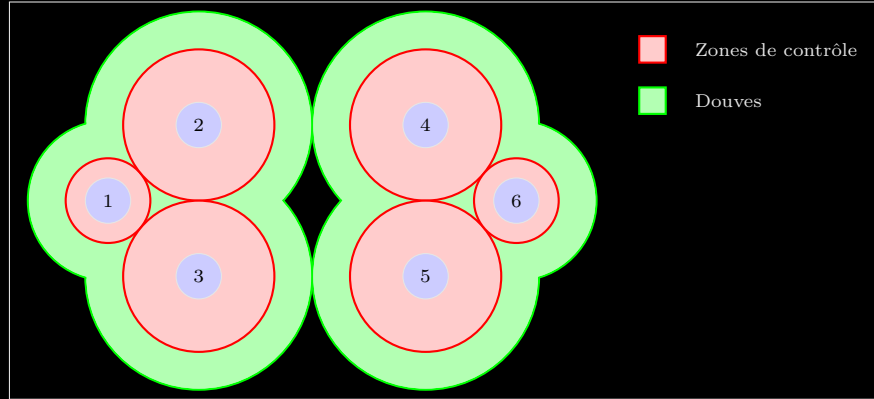


FIGURE 11 – Illustration des zones de contrôle sur la figure 10

où les zones rouges représentent des zones de contrôle de taille maximale locale (si on se restreint à la partie de gauche ou à la partie de droite ces rayons sont maximaux). Les zones vertes représentent les douves maximales.

On peut alors voir l'intérêt visuel de ces différents objets : les zones de contrôle permettent de bien mesurer la distance locale au sein d'un groupe et les douves permettent de mesurer la distance entre ces groupes.

6. Cela correspond à la même preuve que sur les zones de contrôle plus tôt. Si une des douves est vide (par exemple si son complémentaire contient tout le monde, ce qui n'est pas exclu) alors il n'y a aucun intérêt à utiliser des douves et  $\delta = 0$  convient, ce qui donne bien la minoration trouvée précédemment :

$$\sum_{\{i,j\} \in S} d_{ij} \geq \sum_{i=1}^n 2r_i$$

Sinon, chaque douve contient au moins un sommet. Alors, un cycle hamiltonien doit forcément passer par ce sommet deux fois et, comme précédemment, doit donc traverser la douve une fois pour rentrer et une fois pour sortir de ce sommet.

On en conclut alors que pour passer d'un sommet de  $V$  au sommet le plus proche dans  $V'$  il faut passer par les deux douves une première fois, puis une autre au retour. En y ajoutant les déplacements à l'intérieur même de ces douves on obtient bien

$$\sum_{\{i,j\} \in S} d_{ij} \geq \sum_{i=1}^n 2r_i + 2\delta + 2\bar{\delta}$$

**Exercice 3 exo3.**

**Solution.**

### 1.3 Comparaison de méthodes

■ Exercice 4 exo4.

■ Solution.

■ Exercice 5 exo5.

■ Solution.

■ Exercice 6 exo6.

■ Solution.

## 2 Partie pratique

### 2.1 Comparaison de formulations pour le problème du voyageur de commerce

■ Exercice 7 exo7.

■ Solution.

### 2.2 Sur le problème du sac à dos

■ Exercice 8 exo8.

■ Solution.