HAI820I Recherche Opérationnelle II — TDs

Ivan Lejeune

27 février 2026

Table des matières

1 Programmation linéaire en nombres entiers

1.1 Matrice totalement unimodulaire

Exercice 1 Matrice totalement unimodulaire.
Est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires ?

1. La matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. La matrice B suivante :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. La matrice C suivante :
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. La matrice D suivante :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. Propriétés : est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires sachant que A est totalement unimodulaire ?
   (a) La matrice $-A$,
   (b) la transposée A^T,
   (c) la matrice $[A, I]$,
   (d) la matrice $[A, -A]$.
6. Considérons la matrice E définie de la manière suivante :
$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et soit $b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Est-ce que E est totalement unimodulaire ? Trouver les deux solutions à valeurs entières au problème $EX = B$.

Solution.

1. La matrice A est totalement unimodulaire car toutes ses matrices ont déterminant $1, -1$ ou 0.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$
2. On peut regarder le critère de suffisance pour qu'une matrice soit TU. On met les lignes 1 et 3 ensemble dans A et les deux autres dans B. Alors on a :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On a bien respecté les critères, les valeurs de signes opposés dont dans le même sous-ensemble et les valeurs de signe identique sont bien dans les sous-ensembles opposés. Alors B est totalement unimodulaire.
3. La matrice C n'est pas TU car son déterminant est 2.

4. La matrice D n'est pas TU car son déterminant est 2.
5. Si A est une matrice totalement unimodulaire alors :
   (a) la matrice $-A$ est aussi TU,
   (b) la matrice A^T est TU,
   (c) en développant le long de la diagonale de I on retrouve bien que $[A, I]$ est TU,
   (d) par les propositions ci-dessus on a bien $[A, -A]$ qui est TU.
6. La matrice E n'est pas TU. Le problème s'exprime comme :

$$PL = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

   Les solutions sont $X_1 = (1, 0, 1)$ et $X_2 = (0, 1, 3)$.

1.2 Arbre de branchement et exemples

Exercice 2 Solutions entières versus solutions réelles.
Donner les solutions réelles et entières des problèmes suivants.

1. Un premier LP :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. Un second LP :

$$PL_2 = \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 29 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \max(z) = 300x_1 + 205x_2 \end{cases}$$

3. Un troisième LP :

$$PL_3 = \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Solution.

1. La meilleure solution réelle ici est $x^*_{\mathbb{R}} = (0.75, 0.25)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 2$.
   La solution entière optimale est $x^*_{\mathbb{Z}} = (1, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{Z}} = 3$.
   On peut visualiser ces résultats comme suit :

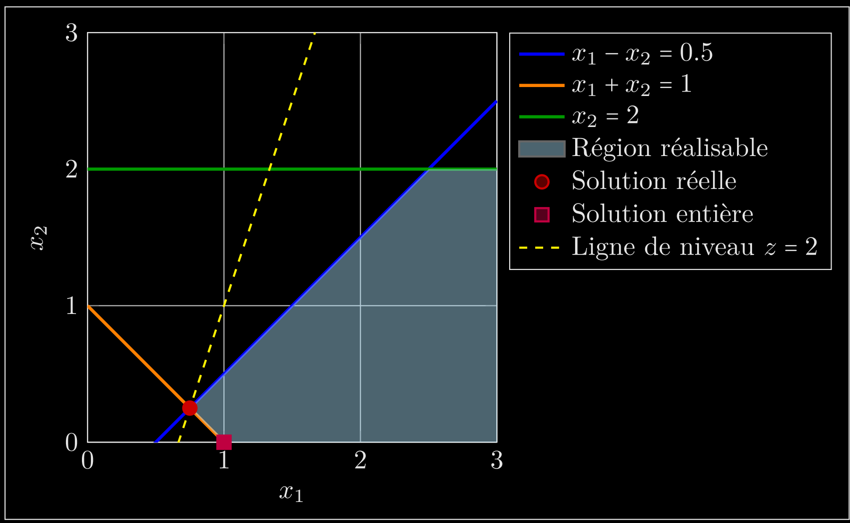

FIGURE 1 – Représentation du problème PL_1 dans $\mathbb{R}^2$

2. La meilleure solution réelle ici est $x^*_{\mathbb{R}} = (2.9, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 870$.
   La solution entière optimale est $x^*_{\mathbb{Z}} = (0, 4)$ avec $z^*_{\mathbb{Z}} = 820$.
   On peut visualiser ces résultats comme suit :

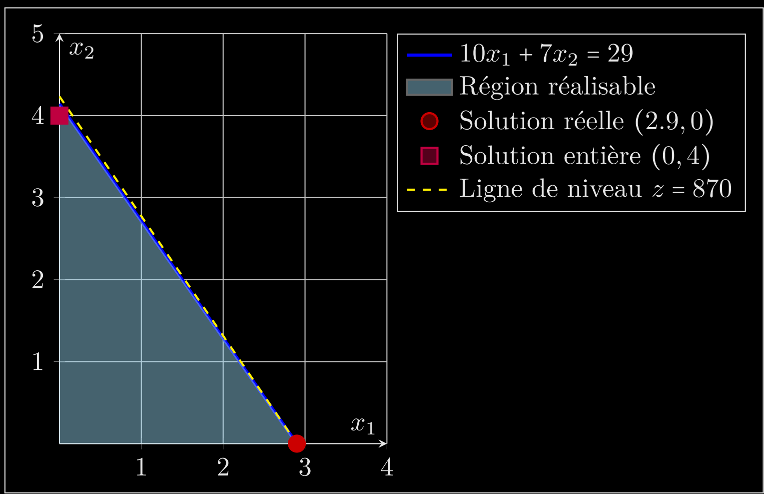

FIGURE 2 – Représentation du problème PL_2 dans $\mathbb{R}^2$

3. Le dernier problème est non borné.

Exercice 3 Détermination de l'arbre d'évaluation et de séparation pour un problème donné.

Nous considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Nous associons le programme linéaire (en valeurs réelles) PL_1 et la solution est la suivante :

$$x_1^* = 5.5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 55.$$

Le problème se sépare en deux sous-problèmes :

$$PL_2 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_3 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0.2, \quad z^* = 50.2 \text{ pour } PL_2$$
$$\varnothing \text{ pour } PL_3$$

Ainsi le problème PL_2 associé au programme PL_1 se décompose en sous-problèmes :

$$PL_4 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 50 \text{ pour } PL_4$$
$$x_1^* = 3, \quad x_2^* = 1, \quad z^* = 31 \text{ pour } PL_5$$

Donner l'arbre d'évaluation et de séparation associé à la résolution du problème PL_1.

Solution. L'arbre d'évaluation et de séparation est donné ci-dessous :

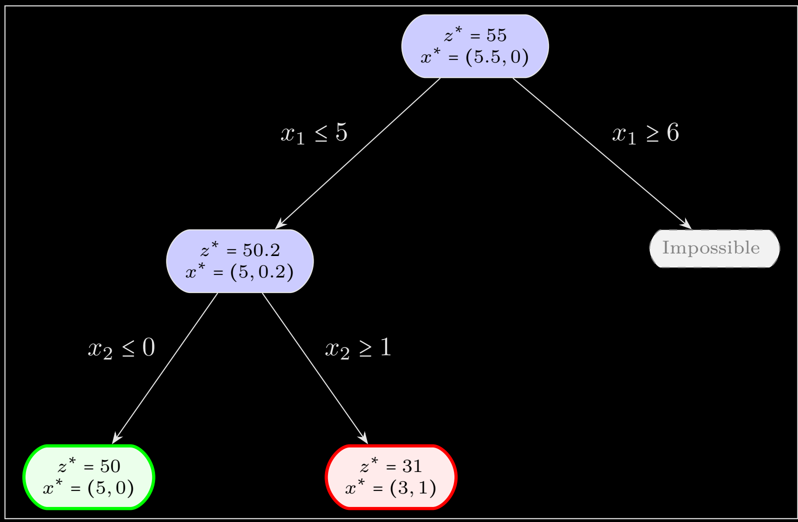

FIGURE 3 – Arbre de branchement du problème PL_1

1.3 Résolution effective

Exercice 4 Résolution en utilisant la méthode de séparation et évaluation.
On considère le problème linéaire en nombres entiers ci-dessous :

$$PL_0 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_2.
2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_1.
3. Donner la signifaction géométrique du premier branchement sur la variable x_2. Quels sont les principes vus en cours que l'on retrouve lors de l'interprétation géométrique ?

Solution.

1. L'arbre de branchement sur x_2 est le suivant :

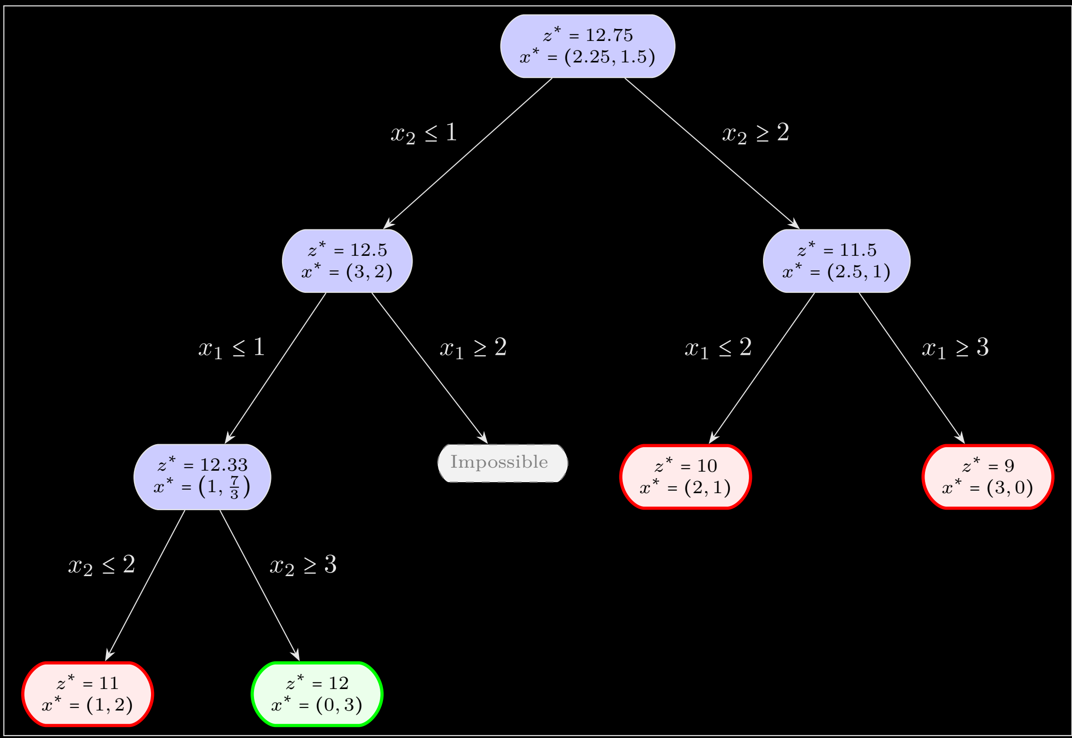

FIGURE 4 – Branch and bound

2. L'arbre de branchement sur x_1 est le suivant :

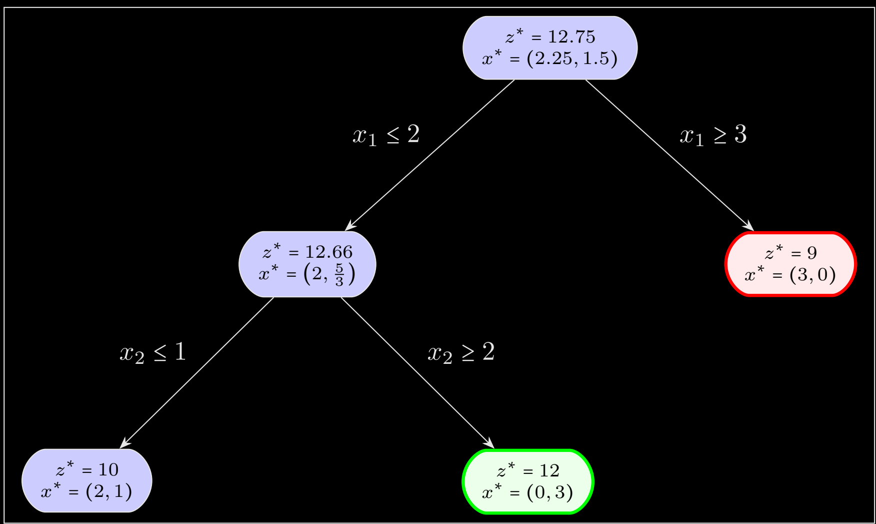

FIGURE 5 – Branch and bound

3. Le premier branchement sur la variable x_2 correspond à la séparation de l'espace des solutions en deux parties par les deux demi-espaces $x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 2$. Si on représente graphiquement le programme linéaire en nombres entiers PL_0, cela donne :

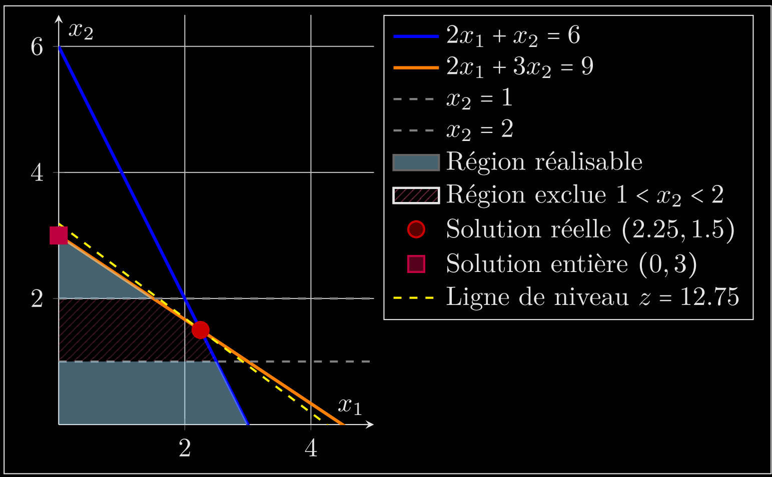

FIGURE 6 – Représentation du problème PL_0 dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 5 Branch and bound et plus court chemin.
Nous considérons le graphe donné par la figure 7 suivante :

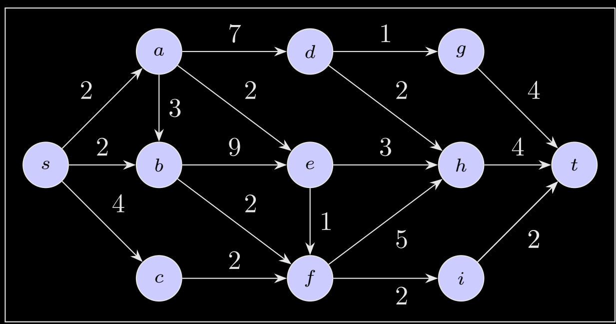

FIGURE 7 – Recherche d'un plus court chemin par branch and bound

Donner deux stratégies en utilisant le principe du branch and bound pour résoudre le problème d'un plus court chemin. Appliquer vos stratégies sur le graphe de la figure 7.

Solution.

- **Stratégie 1 :** On peut utiliser une approche de type Dijkstra, où à chaque étape, on explore le nœud avec la plus petite distance cumulée depuis le point de départ. On maintient une liste des nœuds à explorer et une table des distances minimales trouvées jusqu'à présent.
- **Stratégie 2 :** On peut également appliquer une variante du branch and bound comme suit :
  — On commence par calculer une borne supérieure du coût du chemin, par exemple en exhibant un chemin quelconque du point de départ à la destination, ici $s \to a \to e \to h \to t$ avec un coût de $2 + 2 + 3 + 4 = 11$.
  — Ensuite, on explore les branches du graphe en interdisant un arc à la fois, en recalculant les coûts minimaux pour chaque branche.
  — Si une branche mène à un coût supérieur à la borne supérieure actuelle, on peut la couper (pruning).
  — On continue ce processus jusqu'à ce que toutes les branches aient été explorées ou coupées, et la meilleure solution trouvée sera le plus court chemin.

En appliquant ces stratégies sur le graphe de la figure 7, on trouve que le plus court chemin de s à t est $s \to b \to f \to i \to t$ avec un coût total de 8.

Exercice 6 Contraintes avec une seule variable.
On considère un problème de programmation linéaire standard, à une seule contrainte, défini par

$$\max \sum_{j=1}^{n} u_j x_j$$

avec

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V, \text{ et } x_j \geq 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

Tous les coefficient u_j et v_j sont supposés strictement positifs et l'on suppose les variables classées par rapports utilité/volume décroissants ou, pour rester dans un formalisme plus mathématique, suivant les valeurs décroissantes des rapports $\frac{u_j}{v_j}$. Montrer que la variable x_1 est entrante et que, en la faisant entrer en base, on atteint l'optimum de l'objectif en une seule étape. Exprimer la valeur de l'objectif en fonction des différents coefficients.

Solution. Comme les variables sont classées par rapports utilité/volume décroissants, la variable x_1 a le rapport le plus élevé $\frac{u_1}{v_1}$. En faisant entrer x_1 en base, on maximise immédiatement l'utilité par unité de volume consommé.
En entrant x_1 en base, on peut allouer autant que possible à x_1 sans dépasser la contrainte de volume. La quantité maximale de x_1 que l'on peut allouer est donnée par

$$x_1 = \frac{V}{v_1}$$

sous réserve que $x_1 \leq 1$ (si x_1 est une variable binaire, sinon elle peut être continue).
L'objectif atteint en faisant entrer x_1 en base est alors

$$u_1 x_1 = u_1 \frac{V}{v_1} = V \frac{u_1}{v_1}$$

Cette solution est optimale car toute autre variable x_j avec $j > 1$ aurait un rapport utilité/volume inférieur à celui de x_1, ce qui signifie que pour chaque unité de volume consommée, on obtiendrait moins d'utilité que si on avait alloué ce volume à x_1.

Exercice 7 Le problème du voyageur du commerce symétrique.

1. Appliquer la méthode par séparation et évaluation décrite en cours pour résoudre le problème du voyageur de commerce dans le graphe K_6 dont la matrice des poids est la suivante :

	x	y	z	t	u	v
x	∞	4	7	2	5	4
y	4	∞	3	2	1	2
z	7	3	∞	2	6	3
t	2	2	2	∞	5	3
u	5	1	6	5	∞	2
v	4	2	3	3	2	∞

2. Que faudrait-il faire si on voulait connaitre tous les cycles de poids minimum ?

Solution.

1. **1. Construction du 1-arbre initial**
   On considère le graphe complet G sur $V = \{x, y, z, t, u, v\}$. On fixe le sommet x et on

calcule un 1-arbre.
On applique l'algorithme de Kruskal au graphe $G \setminus \{x\}$ muni des poids initiaux.
Les arêtes sélectionnées sont :

$$y\text{–}u = 1, \quad y\text{–}t = 2, \quad y\text{–}v = 2, \quad z\text{–}t = 2.$$

Poids de l'ACPM :

$$7.$$

On ajoute les deux arêtes incidentes à x de poids minimal :

$$x\text{–}t = 2, \qquad x\text{–}y = 4.$$

On obtient le 1-arbre initial de poids

$$LB_0 = 7 + 2 + 4 = 13.$$

Les degrés sont :

$$\deg(x) = 2,\ \deg(y) = 4,\ \deg(t) = 3,\ \deg(z) = 1,\ \deg(u) = 1,\ \deg(v) = 1.$$

Ce n'est pas un cycle hamiltonien.
On construit une solution réalisable :

$$x \to t \to z \to y \to u \to v \to x$$

de poids

$$14.$$

On fixe donc

$$UB = 14.$$

Comme $LB_0 < UB$, on applique la séparation.
Règle de branchement
Si le 1-arbre courant n'est pas hamiltonien, on choisit un sommet v tel que $\deg(v) > 2$. On crée une branche pour chacune des arêtes incidentes à v dans le 1-arbre courant, en les excluant successivement.
Toute exclusion est modélisée par une fonction de poids modifiée $w^{(k)}$ où l'arête exclue reçoit le poids ∞. Cette fonction est utilisée :

- pour l'ACPM sur $G \setminus \{x\}$,
- pour le choix des deux arêtes incidentes à x.

Branchement au niveau racine
Dans le 1-arbre initial, $\deg(y) = 4 > 2$. On branche donc sur y.
Les arêtes incidentes à y dans le 1-arbre sont :

$$y\text{–}u, \quad y\text{–}t, \quad y\text{–}v, \quad y\text{–}x.$$

On crée donc quatre branches.
Branche A : exclusion de $y\text{–}u$
On impose $w(y,u) = \infty$.
ACPM sur $G \setminus \{x\}$:

$$y\text{–}t = 2, \quad y\text{–}v = 2, \quad z\text{–}t = 2, \quad u\text{–}v = 2.$$

Poids = 8.

On ajoute $x–t = 2$ et $x–y = 4$.

$$LB_A = 8 + 2 + 4 = 14.$$

Comme $LB_A = UB$, la branche ne peut être élaguée.
Dans ce 1-arbre, $\deg(y) = 3 > 2$. On branche à nouveau sur y.
Les arêtes incidentes à y sont

$$y–t,\ y–v,\ y–x.$$

Branche A1 : exclusion de $y–t$
Il reste à y les arêtes $y–v = 2$ et $y–z = 3$.
Dans tout arbre couvrant, y doit être incident à au moins une arête. Toute ACPM contient donc une arête de poids au moins 3 incidente à y.
Les trois autres arêtes ont poids minimal total 6.
Toute ACPM a donc poids ≥ 9.

$$LB_{A1} \geq 9 + 2 + 4 = 15 > UB.$$

Branche élaguée.
Branche A2 : exclusion de $y–v$
Raisonnement analogue :
Toute ACPM contient une arête incidente à y de poids au moins 3.

$$LB_{A2} \geq 9 + 2 + 4 = 15 > UB.$$

Branche élaguée.
Branche A3 : exclusion de $y–x$
ACPM inchangé (poids 8).
Les deux arêtes minimales incidentes à x deviennent $x–t = 2$ et $x–v = 4$.

$$LB_{A3} = 8 + 2 + 4 = 14.$$

Tous les sommets ont degré 2.
On obtient un cycle hamiltonien de poids 14.
Branche fermée
Branche B : exclusion de $y–t$
On impose $w(y,t) = \infty$.
ACPM :

$$y–u = 1, \quad y–v = 2, \quad z–t = 2, \quad u–v = 2.$$

Poids = 7.
Ajout de $x–t = 2$ et $x–y = 4$.

$$LB_B = 13.$$

$\deg(y) = 3$. On branche sur y.
Branche B1 : exclusion de $y–u$
Toute ACPM contient alors une arête incidente à y de poids ≥ 3.

$$LB_{B1} \geq 15.$$

Élaguée.
Branche B2 : exclusion de $y–v$
Même raisonnement :

$$LB_{B2} \geq 15.$$

Élaguée.

Branche B3 : exclusion de $y{-}x$

Les arêtes incidentes à x deviennent $x{-}t = 2$ et $x{-}v = 4$.

On obtient un cycle hamiltonien de poids 14.

Branche fermée.

Branche C : exclusion de $y{-}v$

ACPM :

$$y{-}u = 1, \quad y{-}t = 2, \quad z{-}t = 2, \quad u{-}v = 2.$$

Poids = 7.

$$LB_C = 13.$$

On branche sur y.

Les deux sous-branches $y{-}u$ exclue et $y{-}t$ exclue donnent $LB \geq 15$, donc élaguées.

Exclusion de $y{-}x$ donne un cycle hamiltonien de poids 14.

Branche fermée.

Branche D : exclusion de $y{-}x$

ACPM initial inchangé (poids 7).

Arêtes incidentes minimales à x :

$$x{-}t = 2, \quad x{-}v = 4.$$

$$LB_D = 13.$$

On branche sur y.

Les exclusions successives de $y{-}u$ et $y{-}t$ donnent $LB \geq 15$: branches élaguées.

L'exclusion de $y{-}v$ produit un cycle hamiltonien de poids 14.

Branche fermée.

Conclusion globale

Toutes les branches de l'arbre de séparation ont été :

- soit élaguées par une borne strictement supérieure à 14,
- soit explorées complètement et conduisant à un cycle de poids 14.

Il n'existe donc aucun cycle hamiltonien de poids strictement inférieur à 14.

$$\boxed{\text{Poids optimal } = 14.}$$

L'arbre de séparation est donné à la figure 14 en annexe.

2. Pour obtenir *tous* les cycles optimaux, il faut poursuivre la séparation en n'élaguant que lorsque $LB > UB$ (et non $LB \geq UB$), et enregistrer toutes les solutions de poids 14.

1.4 Inégalités valides

Exercice 8 Simples inégalités valides.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{x_i \in \{0,1\} : \; 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 \leq -2\}$$

Donner deux équations valides.

Solution. On a les 5 inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} x_i &\le 4\\ x_2 + x_4 &\ge 1\\ x_1 + x_3 + x_5 &\le 2\\ x_1 &\le x_2\\ x_1 &\le x_4\\ x_3 &\le x_2\end{aligned}$$

Exercice 9 Simple inégalité valide.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x, y),\ 0 \le x \le 5, y \in \{0, 1\} :\ x \le 9999y\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution. On a l'inégalité suivante :

$$x \le 5y$$

Exercice 10 Simple inégalité valide.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x, y),\ 0 \le x \le 14, y \in \{0, 1\} :\ x \le 10y\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution. On n'a pas su trouver d'inégalité valide pour cet ensemble.

Exercice 11 Simple inégalité valide. Considérons la région entière $X = P \cap \mathbb{N}^4$ avec

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^4 :\ 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \ge 72\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution. On sait que les x_i sont des entiers positifs. Par conséquent, on peut trouver une inégalité valide en arrondissant les coefficients de l'inégalité à l'entier supérieur le plus proche. Par exemple, on peut faire comme suit :

$$\begin{aligned}13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \ge 72 &\implies \frac{13}{11}x_1 + \frac{20}{11}x_2 + x_3 + \frac{6}{11}x_4 \ge \frac{72}{11}\\ &\implies 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 7\end{aligned}$$

On peut faire ce procédé pour toute valeur entière pour obtenir des inégalités valides différentes.

Exercice 12 Inégalités valides.
Considérons une instance de Bin Packing Problem :

Algorithme 1 – Bin Packing Problem
Input: Soient n nombres entiers $a_1, \dots, a_n$ et $W, k \in \mathbb{N}^*$
Question: Existe-t-il une partition en k boites $B_1, \dots, B_k$ de capacité W telle que $\forall j \in \{1, \dots, k\}, \sum_{i \in B_j} a_i \le W$?

On considère l'instance suivante :

- La capacité des boites est $W = 6$.
- Les objets à ranger sont $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_5 = 4$, $a_6 = 4$, $a_7 = 5$.

1. Donner un algorithme linéaire en nombres entiers qui modélise le Bin Packing Problem.
2. Donner une solution optimale relaxée pour l'instance donnée. Montrer que cette solution est optimale.
3. Proposer une borne inférieure pour toute solution optimale.
4. Donner un ensemble de coupes pour l'instance.

Solution.

1. On peut modéliser le Bin Packing Problem de deux manières différentes :
   - On utilise des variables binaires x_{ij} qui indiquent si l'objet a_i est placé dans la boîte j, et des variables binaires y_j qui indiquent si la boîte j est utilisée. L'objectif est de minimiser le nombre de boîtes utilisées, soit :

$$\begin{cases} \min \sum_j y_j \\ \sum_j x_{ij} = 1, \ \forall i \in \{1, \dots, 7\} \\ \sum_i a_i x_{ij} \leq W y_j, \ \forall j \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall i, j \\ y_j \in \{0,1\}, \ \forall j \end{cases}$$

   - Une autre modélisation consiste à ne pas considérer les y_i comme des variables, cela donne alors :

$$\begin{cases} \min k \\ \sum_j x_{ij} = 1, \ \forall i \in \{1, \dots, 7\} \\ \sum_i a_i x_{ij} \leq W, \ \forall j \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall i, j \end{cases}$$

2. Une solution optimale pour cette instance consiste à placer les éléments comme suit :
   - a_7 est dans la boite 1,
   - a_6 et a_1 sont dans la boite 2,
   - a_5 est dans la boite 3,
   - a_4 et a_3 sont dans la boite 4,
   - a_2 est dans la boite 5.

   Cette solution utilise 5 boites. Une borne inférieure pour toute solution optimale est donnée par $\left\lceil \frac{\sum_i a_i}{W} \right\rceil = \left\lceil \frac{22}{6} \right\rceil = 4$. Les éléments $a_4, \dots, a_7$ nécessitent chacun une boite, et les éléments a_2 et a_3 ne peuvent rentrer tous deux dans ces boites. Le nombre minimum de boites est alors de 5, et la solution proposée est optimale.
3. Une borne inférieure pour toute solution optimale est donnée par

$$\left\lceil \frac{\sum_i a_i}{W} \right\rceil$$

4. Un ensemble de coupes pour l'instance donnée serait (pour tout j) :

$$C_1 = \begin{cases} x_{7j} + x_{1j} \leq y_j \\ x_{7j} + x_{2j} \leq y_j \\ x_{7j} + x_{3j} \leq y_j \\ x_{7j} + x_{4j} \leq y_j \\ x_{7j} + x_{5j} \leq y_j \\ x_{7j} + x_{6j} \leq y_j \end{cases}, \qquad C_2 = \begin{cases} x_{6j} + x_{2j} \leq y_j \\ x_{6j} + x_{3j} \leq y_j \\ x_{6j} + x_{4j} \leq y_j \\ x_{6j} + x_{5j} \leq y_j \end{cases},$$

$$C_3 = \begin{cases} x_{5j} + x_{2j} \leq y_j \\ x_{5j} + x_{3j} \leq y_j \\ x_{5j} + x_{4j} \leq y_j \end{cases}, \qquad C_4 = \begin{cases} x_{4j} + x_{3j} + x_{2j} \leq 2y_j \\ x_{4j} + x_{3j} + x_{1j} \leq 2y_j \\ x_{4j} + x_{2j} + x_{1j} \leq 2y_j \end{cases},$$

Exercice 13 Le polytope pour le $0-1$ Sac a Dos.
Soit

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; 79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178 \right\}.$$

avec $x_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, \ldots, 5$.

1. Donner les ensembles minimaux dépendants et donner les inégalités valides.
2. Donner l'extension $E(C)$ d'un ensemble minimal dépendant et les coupes associées.

Solution. Les ensembles minimaux dépendants sont les suivants :

- $C_1 = \{1, 2, 3\}$ avec $a(C_1) = 185 > 178$,
- $C_2 = \{1, 2, 4, 5\}$ avec $a(C_2) = 222 > 178$,
- $C_3 = \{1, 3, 4, 5\}$ avec $a(C_3) = 222 > 178$,
- $C_4 = \{2, 3, 4, 5\}$ avec $a(C_4) = 196 > 178$.

Les inégalités valides associées à ces ensembles sont les suivantes :

- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$,
- $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \leq 3$,
- $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$,
- $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$.

L'extension $E(C)$ de ces ensembles est la même pour tous ces ensembles sauf pour C_4 qui devient alors

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3.$$

1.5 Coupes

Exercice 14 Sur les coupes de Gomory.
Une coupe $ax \leq \alpha$ est dite « plus profonde » qu'une coupe $a'x \leq \alpha'$ si

$$\{x \in \mathcal{D} \mid ax \leq \alpha\} \subset \{x \in \mathcal{D} \mid a'x \leq \alpha'\},$$

1. Expliquer le sens de ce terme.
2. Essayer de déterminer la coupe la plus profonde dans les exercices 15 et 16 suivants.

Solution.

- Une coupe $ax \leq \alpha$ est dite plus profonde qu'une coupe $a'x \leq \alpha'$ si elle élimine un plus grand nombre de points non entiers que la coupe $a'x \leq \alpha'$. En d'autres termes, la coupe plus profonde est plus restrictive et réduit davantage l'ensemble des solutions possibles, ce qui peut conduire à une meilleure approximation de l'enveloppe convexe des solutions entières.

- On peut trouver (dans ce cas graphiquement) les coupes suivantes :
  — Pour l'exercice 15, la coupe optimale est $x_2 \leq -2x_1 + 6$ (en magenta sur la figure 8).
  — Pour l'exercice 16, la coupe optimale est $x_1 + x_2 \leq 3$ (en magenta sur la figure 10).

Exercice 15 Sur les coupes de Gomory.
On considère le programme linéaire suivant :

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers par la méthode des coupes de Gomory.
2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers par la méthode du Branch and Bound.

Solution. On considère :

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

On commence par résoudre la relaxation linéaire du programme linéaire en nombres entiers avec le simplexe. On obtient le tableau suivant :

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^1 = x_3$	17	2	5	1	0
0	$x_2^1 = x_4$	10	3	2	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0

On effectue le pivot, x_1 rentre (coefficient le plus négatif) et x_4 sort (rapport le plus petit). On obtient alors le tableau suivant :

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^2 = x_3$	31/3	0	11/3	1	$-2/3$
2	$x_2^2 = x_1$	10/3	1	2/3	0	1/3
	$z(x)$	20/3	0	1/3	0	2/3

Tous les coefficients de la ligne z sont positifs, on a atteint l'optimum de la relaxation linéaire :

$$x^*_{\mathbb{R}} = \left(\frac{10}{3}, 0\right), \quad z^*_{\mathbb{R}} = \frac{20}{3}.$$

1. Appliquons la méthode des coupes de Gomory.
   La variable de base x_1 est fractionnaire, on va construire une coupe de Gomory à partir de la ligne correspondante :

$$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_2 - 0 \cdot x_3 - \frac{1}{3}x_4.$$

   En isolant les parties fractionnaires, on obtient la coupe de Gomory suivante :

$$\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}.$$

En multipliant par 3, on peut réécrire la coupe de Gomory de la manière suivante :

$$x_2 + 2x_4 \geq 1.$$

Mais on sait que

$$x_4 = 10 - 2x_2 - 3x_1$$

et alors on obtient la coupe

$$\begin{aligned}
& x_2 + 2 \cdot (10 - 2x_2 - 3x_1) \geq 1 \\
\iff & x_2 + 20 - 4x_2 - 6x_1 \geq 1 \\
\iff & -3x_2 - 6x_1 \geq -19 \\
\iff & 6x_1 + 3x_2 \leq 19
\end{aligned}$$

En ajoutant cette coupe au programme linéaire, on obtient le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases}
2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\
3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
6x_1 + 3x_2 \leq 19 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}
\end{cases}$$

En résolvant la relaxation linéaire de ce programme linéaire, la solution

$$x^*_{\mathbb{R}} = (\frac{19}{6}, 0), \quad z^*_{\mathbb{R}} = \frac{19}{3}$$

On peut alors répéter ce procédé encore une fois pour obtenir la coupe suivante

$$x_1 = \frac{19}{6} - \frac{1}{2}x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 - \frac{1}{6}x_5$$

En isolant les parties fractionnaires, on obtient la coupe de Gomory suivante :

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{6}x_5 \geq \frac{1}{6}.$$

En multipliant par 6, on peut réécrire la coupe de Gomory de la manière suivante :

$$3x_2 + 5x_5 \geq 1.$$

Mais on sait que

$$x_5 = 19 - 6x_1 - 3x_2$$

et alors on obtient la coupe

$$\begin{aligned}
& 3x_2 + 5 \cdot (19 - 6x_1 - 3x_2) \geq 1 \\
\iff & 3x_2 + 95 - 30x_1 - 15x_2 \geq 1 \\
\iff & -12x_2 - 30x_1 \geq -94 \\
\iff & 30x_1 + 12x_2 \leq 94
\end{aligned}$$

En ajoutant cette coupe au programme linéaire, on obtient le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases}
2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\
3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
6x_1 + 3x_2 \leq 19 \\
30x_1 + 12x_2 \leq 94 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{N}
\end{cases}$$

En résolvant la relaxation linéaire de ce programme linéaire, la solution

$$x^*_{\mathbb{R}} = (3, \frac{1}{3}), \quad z^*_{\mathbb{R}} = \frac{19}{3}.$$

En répétant ce procédé encore une fois, on trouve la coupe suivante :

$$x_2 = \frac{1}{3} - 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 - \frac{5}{3} \cdot x_5 - \frac{1}{3} x_6$$

En isolant les parties fractionnaires, on obtient la coupe de Gomory suivante :

$$\frac{1}{3} x_5 + \frac{2}{3} x_6 \geq \frac{1}{3}.$$

En multipliant par 3, on peut réécrire la coupe de Gomory de la manière suivante :

$$x_5 + 2x_6 \geq 1.$$

Mais on sait que

$$x_6 = 94 - 30x_1 - 12x_2$$

et

$$x_5 = 19 - 6x_1 - 3x_2$$

et alors on obtient la coupe

$$\begin{aligned} & (19 - 6x_1 - 3x_2) + 2 \cdot (94 - 30x_1 - 12x_2) \geq 1 \\ \iff & 19 - 6x_1 - 3x_2 + 188 - 60x_1 - 24x_2 \geq 1 \\ \iff & -66x_1 - 27x_2 \geq -206 \\ \iff & 66x_1 + 27x_2 \leq 206 \end{aligned}$$

En ajoutant cette coupe au programme linéaire, on obtient le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 30x_1 + 12x_2 \leq 94 \\ 66x_1 + 27x_2 \leq 206 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

En résolvant la relaxation linéaire de ce programme linéaire, la solution

$$x^*_{\mathbb{R}} = (2.92, 0.5), \quad z^*_{\mathbb{R}} = 6.33.$$

Ce procédé peut ne jamais converger, on s'arrête ici par simplicité. Une représentation graphique du programme linéaire et des coupes associées est donnée ci-dessous en 8.

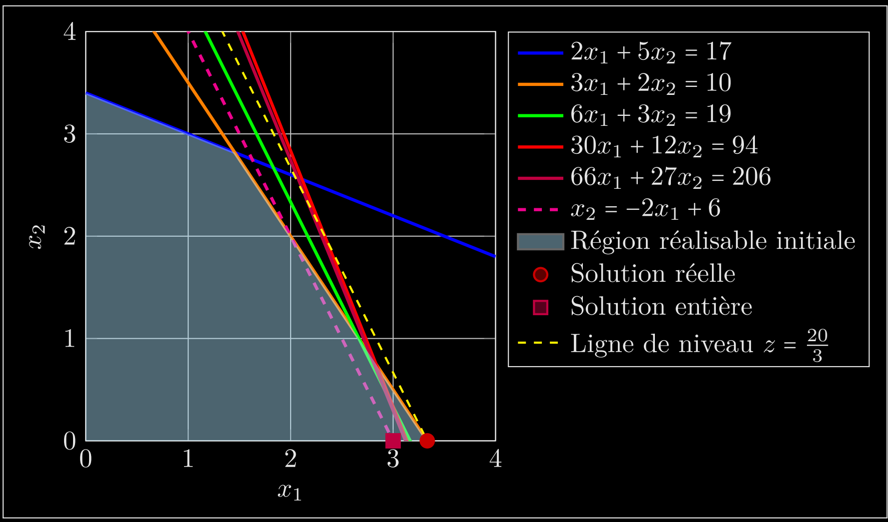

FIGURE 8 – Représentation du problème PL initial

On peut alors voir graphiquement l'inéfficacité des coupes de Gomory, on peut aussi voir que la solution optimale en nombres entiers est $x^* = (3, 0)$ avec $z^* = 6$.

2. Pour la méthode du Branch and Bound, on commence par résoudre la relaxation linéaire du programme linéaire en nombres entiers avec le simplexe. On obtient la même solution que précédemment :
$$x^*_{\mathbb{R}} = \left(\frac{10}{3}, 0\right), \quad z^*_{\mathbb{R}} = \frac{20}{3}.$$
Comme x_1 est fractionnaire, on va faire un branchement sur x_1 :
   - Branchement $x_1 \leq 3$: on ajoute la contrainte $x_1 \leq 3$ au programme linéaire, on résout la relaxation linéaire de ce programme linéaire et on trouve la solution $x^*_{\mathbb{R}} = (3, \frac{1}{2})$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 6.5$.
   Comme x_2 est fractionnaire, on va faire un branchement sur x_2 :
     — Branchement $x_2 \leq 0$: on ajoute la contrainte $x_2 \leq 0$ au programme linéaire, on résout la relaxation linéaire de ce programme linéaire et on trouve la solution $x^*_{\mathbb{R}} = (3, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 6$. C'est une solution entière, on la garde en mémoire et on continue à explorer les autres branches.
     — Branchement $x_2 \geq 1$: on ajoute la contrainte $x_2 \geq 1$ au programme linéaire, on résout la relaxation linéaire de ce programme linéaire et on trouve la solution $x^*_{\mathbb{R}} = (2.92, 1)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 6.84$. On peut alors faire un branchement sur x_1 :
       — Branchement $x_1 \leq 2$: on ajoute la contrainte $x_1 \leq 2$ au programme linéaire, on résout la relaxation linéaire de ce programme linéaire et on trouve la solution $x^*_{\mathbb{R}} = (2, 1)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 5$. C'est une solution entière inférieure à la solution entière trouvée précédemment, on ne la garde pas en mémoire et on continue à explorer les autres branches.
       — Branchement $x_1 \geq 3$: on ajoute la contrainte $x_1 \geq 3$ au programme linéaire, on résout la relaxation linéaire de ce programme linéaire et on trouve la solution $x^*_{\mathbb{R}} = (3, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 6$. C'est la même solution entière que celle trouvée précédemment, on poursuit.
   - Branchement $x_1 \geq 4$: aucune solution réalisable, on ne garde pas cette branche en mémoire.

On a fini de faire les branchements, la solution optimale en nombres entiers est $x^* = (3, 0)$ avec $z^* = 6$.

Une représentation de l'arbre de branchement est donnée ci-dessous en 9 :

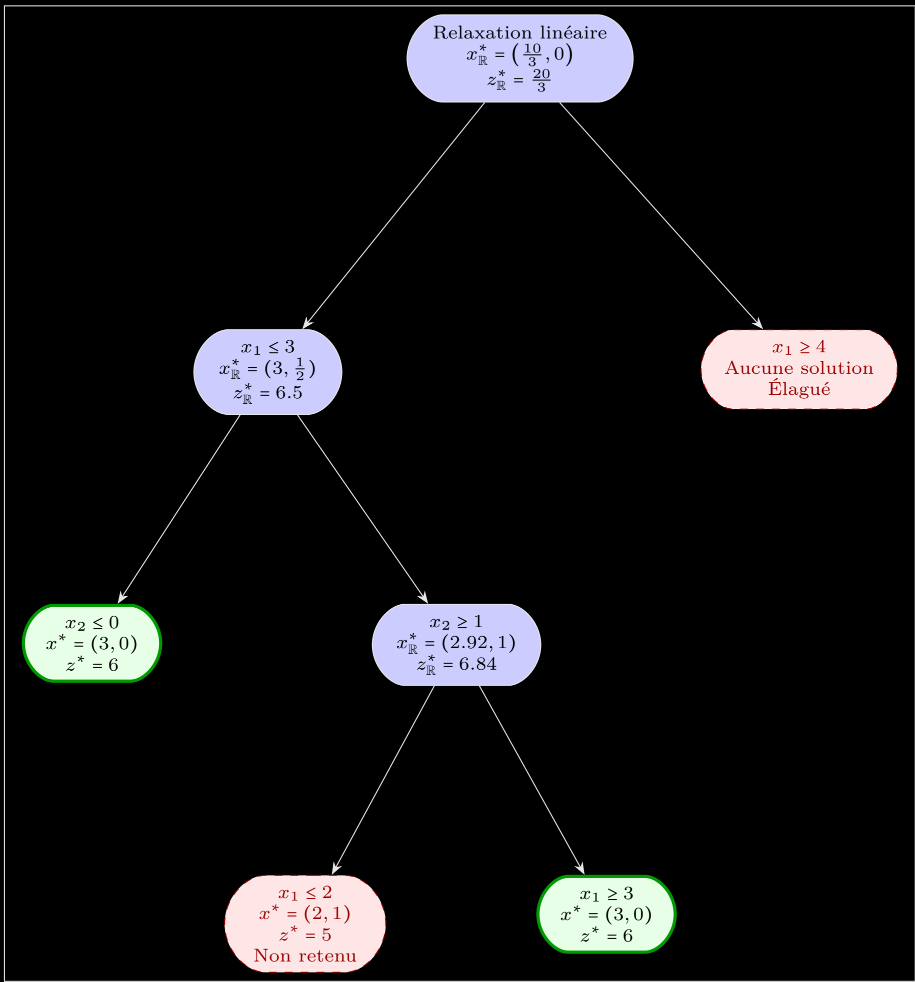

FIGURE 9 – Arbre de séparation et évaluation du problème en nombres entiers

Exercice 16 Algorithme de coupe de Gomory.
Donner la solution du programme linéaire suivant :

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Solution. On commence par résoudre la relaxation linéaire du programme linéaire en nombres entiers avec le simplexe. On obtient le tableau suivant :

		c	3	4	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^1 = x_3$	6	2	1	1	0
0	$x_2^1 = x_4$	9	2	3	0	1
	$z(x)$	0	-3	-4	0	0

On rentre x_2 en base et on sort x_4 de base. On obtient le tableau suivant :

		c	3	4	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^1 = x_3$	3	4/3	0	1	−1/3
4	$x_2^1 = x_2$	3	2/3	1	0	1/3
	$z(x)$	12	−1/3	0	0	4/3

On rentre x_1 en base et on sort x_3 de base. On obtient le tableau suivant :

		c	3	4	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
3	$x_1^1 = x_1$	9/4	1	0	3/4	−1/4
4	$x_2^1 = x_2$	3/2	0	1	−1/2	1/2
	$z(x)$	51/4	0	0	1/4	5/4

Tous les coefficients sont positifs donc on a trouvé notre solution optimale :

$$x^* = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}\right), z^* = \frac{51}{4}.$$

Ce problème peut être représenté graphiquement comme suit dans la figure 10 :

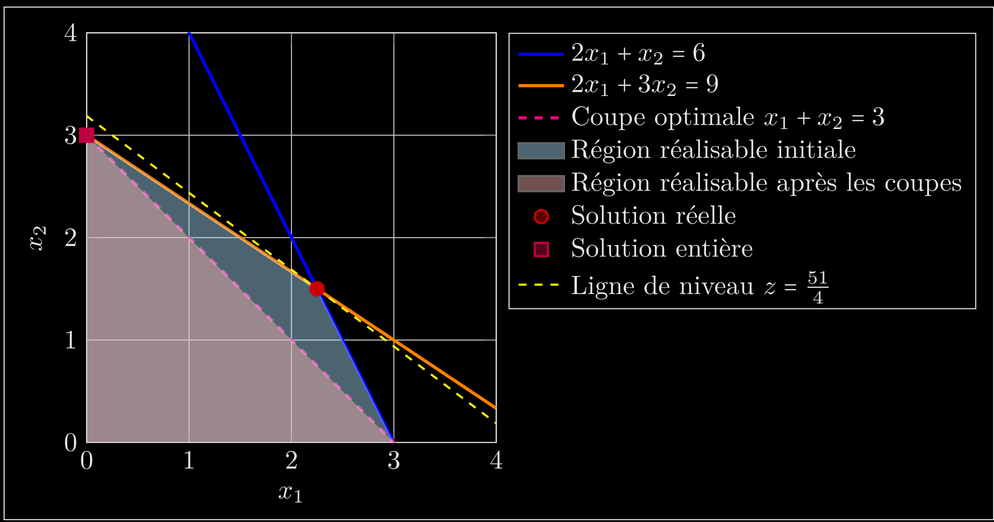

FIGURE 10 – Représentation du problème PL initial

La meilleure coupe ici est la coupe $x_1 + x_2 \leq 3$ (en magenta sur la figure 10) qui élimine le point optimal de la relaxation linéaire $x^* = (9/4, 3/2)$ tout en conservant les points entiers réalisables. La solution optimale du programme linéaire en nombres entiers devient alors $x^* = (0, 3)$ avec $z^* = 12$.

1.6 Enveloppe convexe

Exercice 17 Enveloppe convexe de points.
Soit $S \subseteq \{0,1\}^3$ qui consiste aux points suivants :

$$S = \{(0,0,0), (1,1,1), (0,1,0), (1,0,1)\}$$

Considérons le polytope $P = \mathsf{conv}(S)$. Trouver un système d'inéquations linéaires qui caractérise P, c'est-à-dire tel que :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$$

Solution.

Exercice 18 Enveloppe convexe et points extremes.
Soit $S \subseteq \{0,1\}^n$, c'est-à-dire un ensemble de $\{0,1\}$-vecteurs de dimension n. Soit le polytope $P = \mathsf{conv}(S)$. Montrer que x est un sommet de points de P si et seulement si $x \in S$.

Solution.

Exercice 19 Enveloppe convexe et points extremes.
Soit S l'ensemble suivant :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 0, x_1 \geq 0\}$$

Donner $\mathsf{conv}(S)$.

Solution.

Exercice 20 Enveloppe convexe et points extremes.
Considérons un polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ tel que $P = \mathsf{conv}(\{x_1, \dots, x_t\})$. Montrer que si x est un point extreme de P alors $x \in \{x_1, \dots, x_t\}$. Est-ce que x_j est forcément un point extreme de P pour tout $j \in \{1, \dots, t\}$?

Solution.

Exercice 21 Propriétés de l'enveloppe convexe.
Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathsf{conv}(A \cup B) = \mathsf{conv}(\mathsf{conv}(A) \cup \mathsf{conv}(B))$.
2. $\mathsf{conv}(A + B) = \mathsf{conv}(A) + \mathsf{conv}(B)$. *Aide* : On peut considerer la somme $\sum_{j,k} \lambda_j \mu_k (a_j + b_k)$ où $\sum_j \lambda_j = 1$, $\sum_k \mu_k = 1$, $\lambda_j, \mu_k \geq 0$, $a_j \in A$ et $b_k \in B$.
3. Soient P et Q deux polytopes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les ensembles suivants sont aussi des polytopes :
   - $P \times Q = \{(p \times q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p \in P, q \in Q\}$.
   - $P \cap Q$.
   - $\mathsf{conv}(P \cup Q)$.

Solution.

Exercice 22 Propriétés de l'enveloppe convexe.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe. Montrer que

$$\mathsf{conv}(C \cup \{x_0\}) = \{\lambda x + (1 - \lambda) x_0 \mid x \in C, \lambda \in [0,1]\}.$$

Solution.

Exercice 23 Enveloppe convexe.
Soit C le convexe défini comme étant l'enveloppe convexe de S : $C = \mathsf{conv}(S)$. Montrer que tout point extreme de C appartient à S.

Solution.

Exercice 24 Faces.

Soit $P_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ le polyèdre défini par les inégalités lineaires suivantes :

$$P_\varepsilon = \begin{cases} x_2 \geq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2-\varepsilon)x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

1. Illustrer P_ε et les inégalités dans le plan pour $\varepsilon = -1$ et $\varepsilon = 1$.
2. Quelles sont les facettes de P_1 ?
3. Soit $\varepsilon = 3$ et le polyèdre entier $P_I = \mathsf{conv}(P_\varepsilon \cap \mathbb{Z}^2)$. Dessiner P_I et donner les équations qui donnent l'enveloppe convexe.

Solution.

Exercice 25 Preuve sur les enveloppes convexes.

1. Soit X l'ensemble suivant

   $$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m_+ \times B^1 : \sum_{i=1}^{m} x_i \leq my, x_i \leq 1, \forall i \in \{1,\dots,m\}\}$$

   où $B^1 = \{0,1\}$. Considérons la formulation suivante :

   $$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1 : x_i \leq y, \forall i \in \{1,\dots,m\}, y \leq 1\}$$

   Montrer que la matrice A ou la partie (A,B) admet une structure particulière garantissant que $P = \mathsf{conv}(X)$.
2. Montrer que les points $(x,y) \in P$ (pour l'ensemble X) avec y fractionnaire sont des points extremes de P.

Solution.

2 Génération de colonnes

Rappelons le principe de l'algorithme de la génération de colonnes :

- Initialisation : on met quelques colonnes de PL. Soit PL_R.
- Itérations :
  — Résoudre (PL_R).
  — Calculer les couts réduits des variables de (PL).
  — Si toutes les variables de (PL) ont un cout réduit ≥ 0 alors STOP ((PL) est résolu). Sinon ajouter une variable de cout réduit minimum à (PL_R) et résoudre à nouveau (PL_R).

  Pour calculer les couts réduits :
- on utilise les variables duales $\mu \geq 0$ associées aux contraintes
- Couts réduits : $c - \mu A$.
- Dimensions :
  — c et μ vecteurs lignes,
  — c avec n colonnes et μ avec m colonnes,
  — A la matrice $m \times n$
  — n le nombre de variables et m le nombre de contraintes.

Exercice 26 Génération de colonnes.
On considère le problème PL suivant :

$$PL = \begin{cases} \min(z) = 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 \geq 3 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, 5\} \end{cases}$$

Commencer la méthode de génération de colonne avec les variables x_1, x_3 et x_4. Ecrire le problème restreint PL_R. Calculer les coûts réduits.

Solution.

Exercice 27 Encadrement de la valeur optimale.
Montrer qu'à chaque itération de la génération de colonnes on a

$$\text{valeur}(PL) \leq \text{valeur}(PL_R)$$

et

$$\text{score}(PL_R) + k \cdot \text{cred} \leq \text{score}(PL)$$

où k est la valeur d'une solution optimale $\sum_{j=1}^{n} x_j^* \leq k$ et cred est le cout reduit minimum à une itération donnée.

Solution.

Exercice 28 Génération de colonnes : le problème de la tournée de véhicules avec fenêtres temporelles.

Solution.

3 Lagrangien

Exercice 29 Lagrangien.
Soit le problème (P) suivant :

$$(P) = \begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ g(x) = 2x_1 + x_2 + 4 \leq 0 \\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. On relache la contrainte et on lui affecte le multiplicateur de Lagrange $\lambda \geq 0$.
2. Enoncer (D) le problème dual lagrangien de (P).
3. Calculer la fonction duale $\Delta(\lambda)$ en fonction de λ.
4. Résoudre le problème dual (D).

Solution.

4 Modélisation

Exercice 30 Le problème de la coloration de sommets.
Donner un programme linéaire en nombres entiers qui modélise le problème de la coloration de sommets.

Solution.

Exercice 31 Le problème du stable dans un graphe.
On rappelle la définition suivante :

Définition 4.1. Un **stable** dans un graphe est un ensemble de sommets qui sont deux à deux non adjacents.

La matrice d'incidence (arêtes-sommets) $A = (a_{ij})$ est une matrice $m \times n$ définie de la manière suivante :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } i \text{ est incidente au sommet } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la matrice d'incidence du graphe donné par la figure 11 :

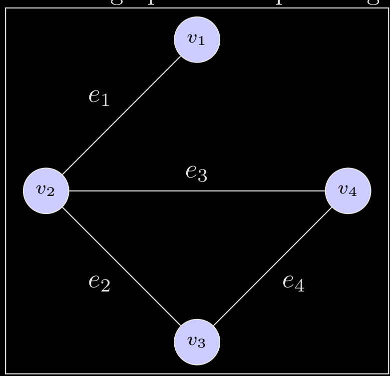

FIGURE 11 – Un graphe non orienté

2. Le problème de trouver un stable maximum dans un graphe ci-dessus peut se formuler comme un programme linéaire. Donner cette formulation.

Solution.

Exercice 32 Le problème du transversal dans un graphe.
On rappelle la définition suivante :

Définition 4.2. Un **transversal** (couverture) est un ensemble de sommets tel que pour chaque arete du graphe, au moins une de ses deux extremités appartient au transversal.

On considère le graphe donné par la figure 11. Donner le programme linéaire en nombres entiers qui permet de trouver un transversal de taille minimale dans ce graphe.

Solution.

Exercice 33 Modéliser les problèmes suivants par un programme linéaire en nombre entiers.

1. L'arbre couvrant de poits minimum. Quel est le problème sur le nombre de contraintes ?
2. Le problème du plus court chemin entre un sommet s et un sommet t. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté avec des coûts $c_{ij} \geq 0$ sur les arcs $(i, j) \in E$. Soit $F = \{P = (e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k})\}$

une séquence d'arcs d'un plus court chemin entre s et t dans le graphe G. On considère le graphe donné par la figure 12 ci-dessous :

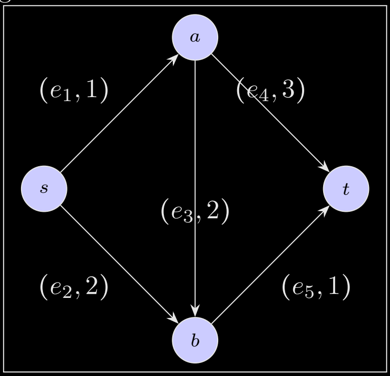

FIGURE 12 – Un graphe orienté pondéré

(a) Donner sa matrice d'incidence A.
(b) Donner le dual.
(c) Résoudre le problème par l'algorithme du simplexe.
(d) Considérons un vecteur $f = (f_1, \dots, f_n)$ avec f_i associé à l'arc e_i tel que $f_i = 1$ si l'arc e_i appartient à un plus court chemin P entre s et t, et $f_i = 0$ sinon.
   i. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 1$?
   ii. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = -1$?
   iii. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 0$?
(e) Utiliser l'algorithme du dual simplexe.

Solution.

Exercice 34 Sur le problème du voyageur de commerce.
Le problème du voyageur de commerce consiste à effectuer un circuit Hamiltonien de cout minimum dans un graphe complet non orienté. Pour cela nous considérons $n+1$ villes tel que le cout entre deux villes est donné par la matrice $C = (c_{ij})$ où c_{ij} est le cout pour aller de la ville i à la ville j.

1. Pourquoi le problème du voyageur de commerce est étudié dans le cadre d'un graphe complet valué et non dans un graphe quelconque ?
2. Rappeler la définition d'un circuit Hamiltonien. Quelles conséquences sur les degrés des sommets du circuit Hamiltonien ? Modéliser ce problème par un programme linéaire en nombres entiers en justifiant les contraintes.
3. Donner un exemple qui satisfait les contraintes du programme linéaire en nombres entiers mais qui n'est pas une solution réalisable du voyageur de commerce. Quel est l'inconvénient des nouvelles contraintes ? (Penser aux problèmes des sous-tours.)
4. Nous ajoutons au programme linéaire en nombres entiers les contraintes suivantes :

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n$$

   Montrer que les contraintes qu'on vient d'ajouter définissent bien le problème du voyageur de commerce.
5. Comment appele-t-on ce type de programme linéaire ?

Solution.

Exercice 35 Le problème du flot maximum versus la coupe minimum.

1. Questions préliminaires
   (a) Rappeler le principe des algorithmes principaux pour résoudre le problème du flot maximum.
   (b) Dans toute solution optimale, que dire des arcs retours ? Et des arcs avant appartenant à une coupe minimale ?
2. Modélisation et propriétés. On considère dans la partie qui suit le graphe orienté pondéré donné par la figure 13 suivante :

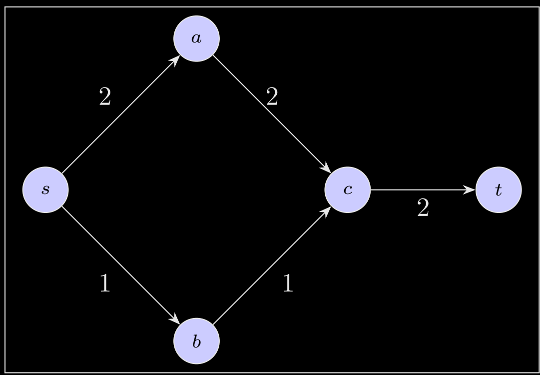

FIGURE 13 – Un réseau de flot

   (a) Formuler le problème du flot maximum par un programme linéaire noté P_0 pour le réseau donné par la figure 13. Formuler le problème du flot maximum par un programme linéaire $\mathcal{P}$.
   (b) Donner le programme dual de P_0 et de $\mathcal{P}$. Quelle est la structure de la matrice des contraintes pour le dual ?
   (c) Utiliser les écarts complémentaires pour retrouver un théorème de MIN-MAX.

Solution.

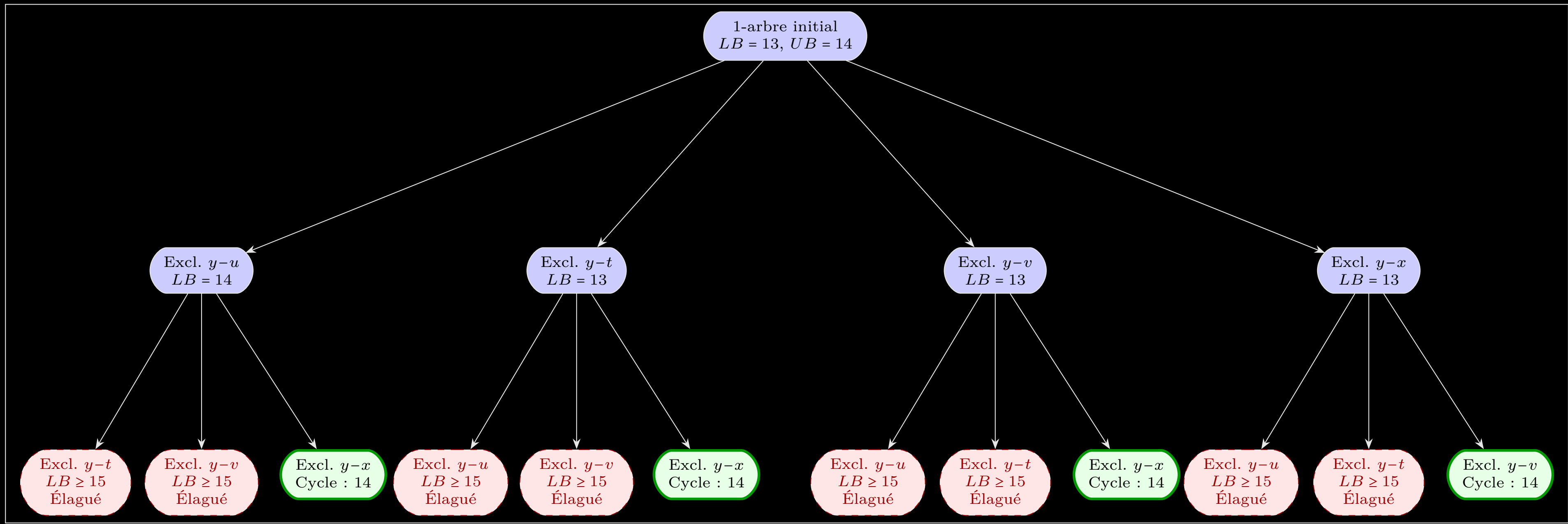

FIGURE 14 – Arbre de séparation et évaluation — TSP