HAI711I — DM1

Ivan Lejeune

13 octobre 2025

Table des matières

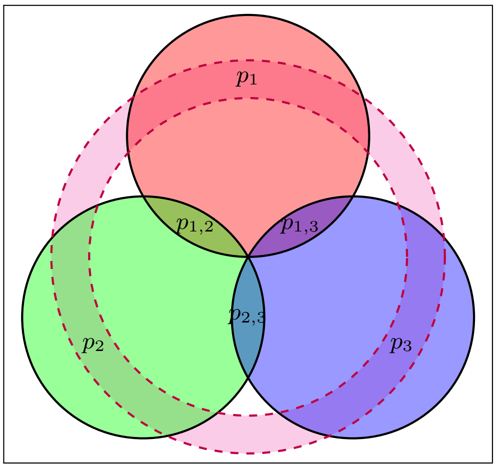
1 Partie pratique 3

Exercice 1 Antigone des asso.
Un groupe de personnes est tel que :

1. Chaque personne est membre d'exactement deux associations,
2. chaque association comprend exactement trois membres,
3. deux associations ont toujours exactement un membre en commun.

Combien y a-t-il de personnes ? D'associations ?

Solution.
Il y a exactement 6 personnes et 4 associations avec l'arrangement qui suit :



On peut bien vérifier qu'avec les associations

- $A = \{p_1, p_{1,2}, p_{1,3}\}$,
- $B = \{p_2, p_{1,2}, p_{2,3}\}$
- $C = \{p_3, p_{1,3}, p_{2,3}\}$
- $D = \{p_1, p_2, p_3\}$

on respecte bien les trois contraintes :

1. Chaque personne est membre d'exactement deux associations :
   - p_1 est dans A et D,
   - p_2 est dans B et D,
   - p_3 est dans C et D,
   - $p_{1,2}$ est dans A et B,
   - $p_{1,3}$ est dans A et C,
   - $p_{2,3}$ est dans B et C.
2. Chaque association comprend exactement trois membres :
$$|A| = |B| = |C| = |D| = 3$$
3. Deux associations ont toujours exactement un membre en commun :
   - $A \cap B = \{p_{1,2}\}$,
   - $A \cap C = \{p_{1,3}\}$,
   - $A \cap D = \{p_1\}$,
   - $B \cap C = \{p_{2,3}\}$,
   - $B \cap D = \{p_2\}$,
   - $C \cap D = \{p_3\}$.

Exercice 2 Dualité. Considérez le programme linéaire le plus général envisageable donné ci-dessous :

$$\begin{cases} \min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \leq b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

où A est une matrice $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ et $c, x \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et $b \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$.
Caractériser le dual.

Solution.

Exercice 3 Ensemble convexe. Soit C_1 et C_2 deux convexes de $\mathbb{R}^{m+n}$. Montrer que l'ensemble

$$C = \{(x, y_1 + y_2) \mid x \in \mathbb{R}^m, y_1 \in \mathbb{R}^n, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in C_1, (x, y_2) \in C_2\}$$

est également convexe.

Solution.

Exercice 4 Modélisation et dualité. Considérons un problème d'affectation avec m jobs et n travailleurs ($n \geq m$). Chaque job doit être affecté à exactement un travailleur. Soit p_{ij} le rendement obtenu si on affecte le job i au travailleur j, où $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$. On cherche une affectation qui maximise le rendement total.

1. Donner le programme linéaire.
2. Donner la formulation du dual de ce problème.

Solution.

Exercice 5 Programmation linéaire : Farkas. Considérons le programme linéaire suivant, qui dépend de $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \min z = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2 \leq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2 - \varepsilon) x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. Montrer que le problème est réalisable $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de ε la valeur optimale est-elle non bornée ?

Solution.

Exercice 6 Résolution numérique. Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode Primal-Dual :

$$\text{Primal} = \begin{cases} \min z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Solution.

1 Partie pratique

Exercice 7.

Solution.

Exercice 8.

Solution.

Exercice 9.

Solution.