HAI711I — DM1

Ivan Lejeune

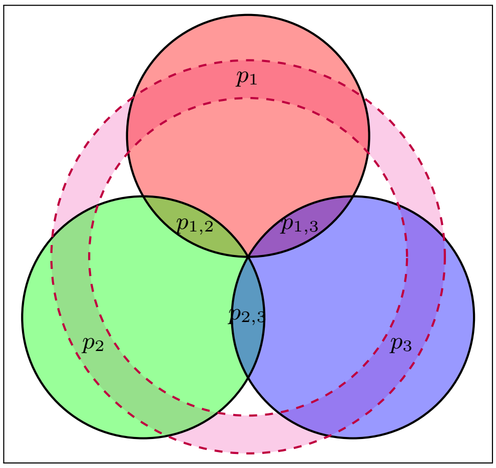
13 novembre 2025

Exercice 1 Antigone des asso.
Un groupe de personnes est tel que :

1. Chaque personne est membre d'exactement deux associations,
2. chaque association comprend exactement trois membres,
3. deux associations ont toujours exactement un membre en commun.

Combien y a-t-il de personnes ? D'associations ?

Solution.
Il y a exactement 6 personnes et 4 associations avec l'arrangement qui suit :



On peut bien vérifier qu'avec les associations

- $A = \{p_1, p_{1,2}, p_{1,3}\}$,
- $B = \{p_2, p_{1,2}, p_{2,3}\}$
- $C = \{p_3, p_{1,3}, p_{2,3}\}$
- $D = \{p_1, p_2, p_3\}$

on respecte bien les trois contraintes :

1. Chaque personne est membre d'exactement deux associations :
   - p_1 est dans A et D,
   - p_2 est dans B et D,
   - p_3 est dans C et D,
   - $p_{1,2}$ est dans A et B,
   - $p_{1,3}$ est dans A et C,
   - $p_{2,3}$ est dans B et C.

2. Chaque association comprend exactement trois membres :

$$|A| = |B| = |C| = |D| = 3$$

3. Deux associations ont toujours exactement un membre en commun :
   - $A \cap B = \{p_{1,2}\}$,
   - $A \cap C = \{p_{1,3}\}$,
   - $A \cap D = \{p_1\}$,
   - $B \cap C = \{p_{2,3}\}$,
   - $B \cap D = \{p_2\}$,
   - $C \cap D = \{p_3\}$.

Exercice 2 Bipartis.
Montrer proprement qu'un graphe G est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire.
De plus, donner un algorithme linéaire (en $O(n+m)$) pour décider si un graphe est biparti ou non.

Solution.
Montrons qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair comme sous-graphe.

- Sens direct : Supposons que G est biparti. Soit C un cycle de G. Par définition d'un graphe biparti, on peut colorier les sommets de G en deux couleurs telles que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. En parcourant le cycle C, on remarque que chaque sommet doit avoir une couleur différente du sommet précédent. Ainsi, si le cycle C a une longueur impaire, le premier et le dernier sommet du cycle C seraient de la même couleur, ce qui est impossible car ils sont adjacents. Donc C ne peut pas être de longueur impaire.

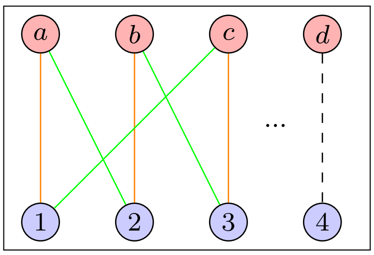


FIGURE 1 – Cas cycle pair

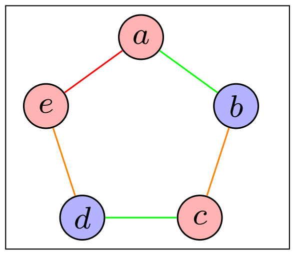


FIGURE 2 – Cas cycle impair

- Sens indirect : Supposons que G ne contient pas de cycle impair. On choisit un sommet racine r et on effectue un parcours en largeur à partir de r. On colorie le sommet r en rouge. Ensuite, on colorie tous les sommets de niveau 1 (voisins de r) en bleu, tous les sommets de niveau 2 en rouge, tous les sommets de niveau 3 en bleu, et ainsi de suite.

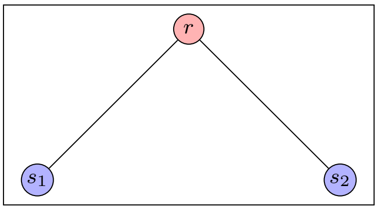


FIGURE 3 – Premiere etape du BFS

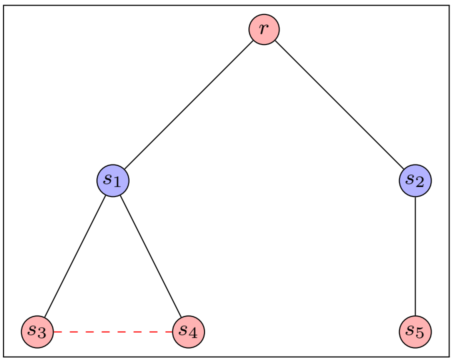


FIGURE 4 – Deuxieme etape du BFS

Si il y avait une arête entre deux sommets du même niveau, cela formerait un cycle impair avec le chemin passant par leur parent commun r_i. En effet, si deux sommets u et v sont au même niveau et sont adjacents, alors le chemin de r_i à u, l'arête (u, v), et le chemin de v à r_i forment un cycle dont la longueur est impaire (car la distance de r_i à u et v est la même, disons d, donc le cycle a une longueur de $2d + 1$).

Cependant, par hypothèse, G ne contient pas de cycle impair. Donc, il ne peut pas y avoir d'arêtes entre deux sommets du même niveau. Par conséquent, tous les sommets de niveau pair sont colorés en rouge et tous les sommets de niveau impair sont colorés en bleu. Ainsi, G est biparti.

Un algorithme permettant de décider si un graphe est biparti ou non est donc celui décrit ci-dessus, avec une complexité en $O(n + m)$ car chaque sommet et chaque arête est visité au plus une fois lors du parcours en largeur.

Exercice 3 Graphes sans triangles.

Le but de l'exercice est de montrer que si G ne contient pas de triangle alors le nombre d'arêtes de G est au plus $\frac{n^2}{4}$ si n est pair et au plus $\frac{n^2-1}{4}$ si n est impair.

1. On raisonne par récurrence sur n. Soit uv une arête de G. Majorer le nombre d'arêtes entre $\{u, v\}$ et $V \setminus \{u, v\}$ puis conclure.
2. Quels sont les graphes sans triangle qui ont pour nombre d'arêtes exactement les bornes proposées ?

Solution.

1. On peut commencer par remarquer que comme G est sans triangles, les voisins de u et v sont disjoints (en effet si on note w un voisin commun aux 2 alors uvw forme un triangle).
   Alors, le nombre d'arêtes entre $\{u, v\}$ et $V \setminus \{u, v\}$ est le nombre d'arêtes entre u et $V \setminus \{u, v\}$ plus le nombre d'arêtes entre v et $V \setminus \{u, v\}$. Soit

   $$\deg(u) - 1 + \deg(v) - 1 = \deg(u) + \deg(v) - 2$$

   où on a enlevé 1 au degré des deux sommets car ils sont adjacents.
   De plus, comme les voisins de u et v sont disjoints, on a

   $$\deg(u) - 1 + \deg(v) - 1 \leq n - 2$$
   $$\deg(u) + \deg(v) \leq n$$

   Pour ce qui est de la récurrence, si $n = 1$, le graphe n'a pas d'arêtes et la propriété est vérifiée. Si $n = 2$, le graphe peut avoir au plus une arête et la propriété est vérifiée. Montrons que si la propriété est vérifiée pour un graphe de taille $n-2$, elle l'est aussi pour un graphe de taille n.

On peut catégoriser les arêtes de G en trois groupes différents :

- L'arête uv que l'on a choisie,
- Les arêtes entre $\{u, v\}$ et $V \setminus \{u, v\}$,
- Les arêtes entre les sommets de $V \setminus \{u, v\}$ (on notera m' leur nombre).

Ce qui nous donne m, le nombre total d'arêtes de G :

$$m = 1 + \underbrace{(\deg(u) + \deg(v) - 2)}_{\text{arêtes entre } \{u,v\} \text{ et } V \setminus \{u,v\}} + m' = \deg(u) + \deg(v) - 1 + m'$$

On procède par disjonction de cas :

- Si $n = 2k$ est pair, alors $n - 2$ est pair. Par hypothèse de récurrence, on a

$$m' \leq \frac{(n-2)^2}{4}$$

  En utilisant notre formule précédente, on a

$$\begin{aligned} m &= \deg(u) + \deg(v) - 1 + m' \\ &\leq n - 1 + \frac{(n-2)^2}{4} \\ &\leq 2k - 1 + \frac{(2k-2)^2}{4} \\ &\leq 2k - 1 + \frac{4k^2 - 8k + 4}{4} \\ &\leq 2k - 1 + k^2 - 2k + 1 \\ &\leq k^2 \\ &\leq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ &\leq \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

  Donc la formule est vérifiée pour n pair.
- Si $n = 2k + 1$ est impair, alors $n - 2$ est impair. Par hypothèse de récurrence, on a

$$m' \leq \frac{(n-2)^2 - 1}{4}$$

En utilisant notre formule précédente, on a

$$
\begin{aligned}
m &= \deg(u) + \deg(v) - 1 + m' \\
&\leq n - 1 + \frac{(n-2)^2 - 1}{4} \\
&\leq 2k + 1 - 1 + \frac{(2k-1)^2 - 1}{4} \\
&\leq 2k + \frac{4k^2 - 4k + 1 - 1}{4} \\
&\leq 2k + k^2 - k \\
&\leq k^2 + k \\
&\leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{n-1}{2} \\
&\leq \frac{n^2 - 2n + 1 + 2n - 2}{4} \\
&\leq \frac{n^2 - 1}{4}
\end{aligned}
$$

Donc la formule est vérifiée pour n impair.

On a donc montré que si G est un graphe sans triangles alors le nombre d'arêtes de G est au plus $\frac{n^2}{4}$ si n est pair et au plus $\frac{n^2-1}{4}$ si n est impair.

2. Pour le cas d'égalité, il faut que toutes les inégalités deviennent des égalités :
   - $\deg(u) + \deg(v) = n$ (les voisins de u et v partitionnent $V \setminus \{u, v\}$)
   - $G \setminus \{u, v\}$ atteint sa borne maximale (donc est un graphe biparti complet équilibré par l'hypothèse de récurrence)
   - Tous les sommets d'une partie de $G \setminus \{u, v\}$ sont connectés à u, et tous les sommets de l'autre partie à v

   Cela nous donne la structure suivante :

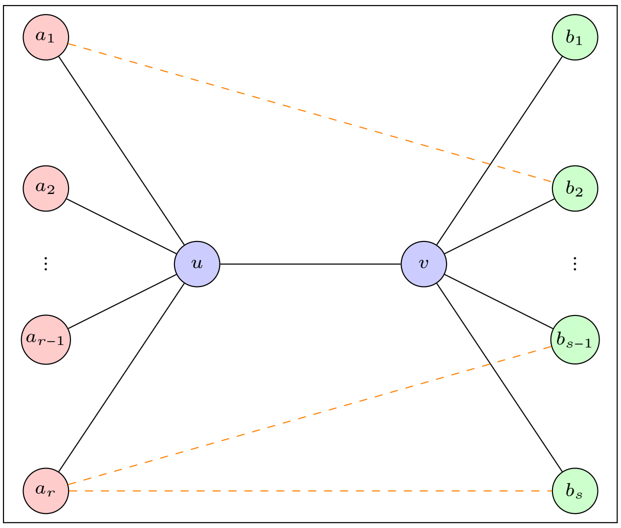


FIGURE 5 – Graphe représenté à partir de uv
(les autre sommets peuvent être reliés à ceux
de l'autre côté mais pas entre eux)

En respectant toutes les conditions, on arrive bien à un graphe biparti complet où les deux parties ont une taille aussi proche que possible :

- La première condition nous impose la partition du graphe par uv.
- Les autres nous imposent que chaque sommet d'une partie soit relié à tous les sommets de l'autre partie et pour la maximalité, que les tailles des deux parties soient aussi proches que possible (pour maximiser le produit des tailles).
- Visuellement cela veut dire qu'il y a une arête entre chaque paire (a_i, b_j) et que r et s sont distants d'au plus 1.

Donc la solution est G un graphe biparti complet $K_{r,s}$ avec $r + s = n$ et $|r - s| \leq 1$.

Exercice 4 Couplage dans les cubiques.
Une arête e d'un graphe connexe G est dite séparatrice si $G - e$ n'est pas connexe.

1. Soit G un graphe 3-régulier (ou cubique...) et M un couplage parfait de G. Montrer que M contient toutes les arêtes séparatrices de G.
2. Donner un exemple de graphe cubique qui n'admet pas de couplage parfait.
3. Plus généralement, pour tout $k \geq 2$, proposer un graphe $(2k+1)$-régulier qui n'admet pas de couplage parfait.

Solution.

Exercice 5 Pierre, papier, ciseaux.
Lors du tournoi international de Pierre-Papier-Ciseaux, vous êtes en charge d'organiser le déroulement des matchs. On note n le nombre de participants. Un match oppose deux participants. Lors du tournoi, chaque participant doit rencontrer chaque autre participant exactement une fois. Le tournoi est découpé en rounds pendant lesquels les match ont lieu, un partipant faisant au plus un match par round. Le but de votre travail est d'organiser les rencontres en minimisant le nombre de rounds.

1. Modéliser le problème (avec un graphe bien choisi).
2. Résoudre le problème pour $n = 3, 4, 5, 6$.
3. Donner une réponse pour n quelconque et justifier votre réponse.

Solution.

1.
2. On procède en fonction de n :
   - Pour $n = 3$, on note p_1, p_2, p_3 les participants et on a
   $$\begin{aligned} R1 &\to (p_1, p_2) \\ R2 &\to (p_1, p_3) \\ R3 &\to (p_2, p_3) \end{aligned}$$
   Il faut exactement 3 rounds pour que tous les participants s'affrontent.
   - Pour $n = 4$, on a
   $$\begin{aligned} R1 &\to (p_1, p_2) \\ &\to (p_3, p_4) \\ R2 &\to (p_1, p_3) \\ &\to (p_2, p_4) \\ R3 &\to (p_1, p_4) \\ &\to (p_2, p_3) \end{aligned}$$
   Il faut exactement 3 rounds pour résoudre le problème.

- Pour $n = 5$, on a

$$\begin{aligned} R1 &\to (p_1, p_2) \\ &\to (p_5, p_4) \\ R2 &\to (p_1, p_3) \\ &\to (p_5, p_2) \\ R3 &\to (p_1, p_4) \\ &\to (p_2, p_3) \\ R4 &\to (p_5, p_1) \\ &\to (p_3, p_4) \\ R5 &\to (p_2, p_4) \\ &\to (p_5, p_3) \end{aligned}$$

Il faut exactement 5 rounds pour résoudre le problème.

Exercice 6 Couplage dans les arbres.
Le but de l'exercice est de proposer un algorithme de calcul d'un couplage maximum dans les arbres plus direct que l'algorithme de Egerváry.

1. Soit T un arbre et f une feuille de T. Montrer que T admet un couplage maximum qui sature f.
2. En déduire un algorithme récursif pour le calcul d'un couplage maximum de T.
3. On propose une implémentation efficace de l'algorithme ci-dessus : on pourra effectuer un parcours en profondeur de T, puis lister les sommets selon l'ordre de *fin* obtenu et choisir les arêtes du couplage gloutonnement selon cet ordre. Détailler l'algorithme (on pourra faire appel à un parcours en profondeur), prouver sa validité et calculer sa complexité.
4. *Question annexe* : montrer qu'un arbre possède au plus un couplage parfait

Solution.