HAI820I Recherche Opérationnelle II — TDs

Ivan Lejeune

9 février 2026

Table des matières

1 Programmation linéaire en nombres entiers

1.1 Matrice totalement unimodulaire

Exercice 1 Matrice totalement unimodulaire.
Est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires ?

1. La matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. La matrice B suivante :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. La matrice C suivante :
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. La matrice D suivante :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. Propriétés : est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires sachant que A est totalement unimodulaire ?
   (a) La matrice $-A$,
   (b) la transposée A^T,
   (c) la matrice $[A, I]$,
   (d) la matrice $[A, -A]$.
6. Considérons la matrice E définie de la manière suivante :
$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et soit $b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Est-ce que E est totalement unimodulaire ? Trouver les deux solutions à valeurs entières au problème $EX = B$.

Solution.

1. La matrice A est totalement unimodulaire car toutes ses matrices ont déterminant $1, -1$ ou 0.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$
2. On peut regarder le critère de suffisance pour qu'une matrice soit TU. On met les lignes 1 et 3 ensemble dans A et les deux autres dans B. Alors on a :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On a bien respecté les critères, les valeurs de signes opposés dont dans le même sous-ensemble et les valeurs de signe identique sont bien dans les sous-ensembles opposés. Alors B est totalement unimodulaire.
3. La matrice C n'est pas TU car son déterminant est 2.

4. La matrice D n'est pas TU car son déterminant est 2.
5. Si A est une matrice totalement unimodulaire alors :
   (a) la matrice $-A$ est aussi TU,
   (b) la matrice A^T est TU,
   (c) en développant le long de la diagonale de I on retrouve bien que $[A, I]$ est TU,
   (d) par les propositions ci-dessus on a bien $[A, -A]$ qui est TU.
6. La matrice E n'est pas TU. Le problème s'exprime comme :

$$PL = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

   Les solutions sont $X_1 = (1, 0, 1)$ et $X_2 = (0, 1, 3)$.

1.2 Arbre de branchement et exemples

Exercice 2 Solutions entières versus solutions réelles.
Donner les solutions réelles et entières des problèmes suivants.

1. Un premier LP :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. Un second LP :

$$PL_2 = \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 29 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \max(z) = 300x_1 + 205x_2 \end{cases}$$

3. Un troisième LP :

$$PL_3 = \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Solution.

1. La meilleure solution réelle ici est $x^*_{\mathbb{R}} = (0.75, 0.25)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 2$.
   La solution entière optimale est $x^*_{\mathbb{Z}} = (1, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{Z}} = 3$.
   On peut visualiser ces résultats comme suit :

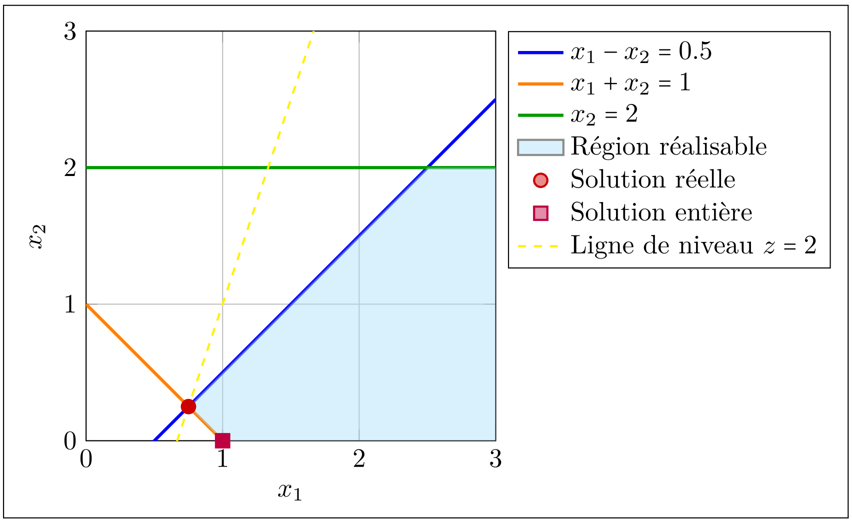

FIGURE 1 – Représentation du problème PL_1 dans $\mathbb{R}^2$

2. La meilleure solution réelle ici est $x^*_{\mathbb{R}} = (2.9, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 870$.
   La solution entière optimale est $x^*_{\mathbb{Z}} = (0, 4)$ avec $z^*_{\mathbb{Z}} = 820$.
   On peut visualiser ces résultats comme suit :

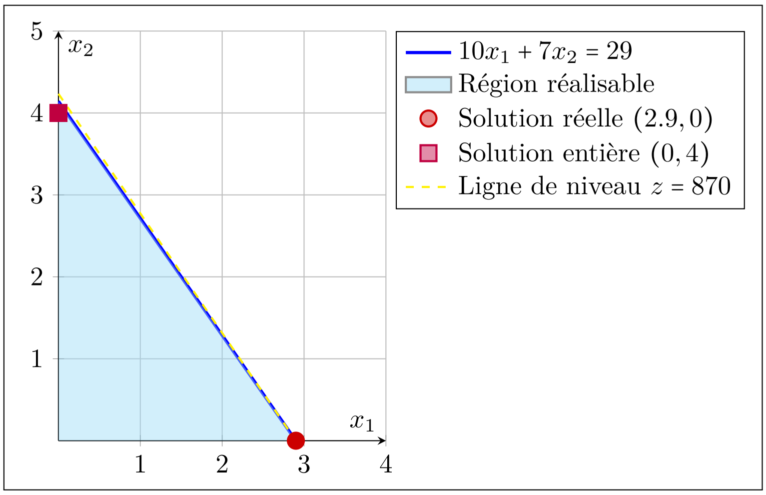

FIGURE 2 – Représentation du problème PL_2 dans $\mathbb{R}^2$

3. Le dernier problème est non borné.

Exercice 3 Détermination de l'arbre d'évaluation et de séparation pour un problème donné.

Nous considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Nous associons le programme linéaire (en valeurs réelles) PL_1 et la solution est la suivante :

$$x_1^* = 5.5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 55.$$

Le problème se sépare en deux sous-problèmes :

$$PL_2 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_3 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$\begin{aligned} x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0.2, \quad z^* = 50.2 \text{ pour } PL_2 \\ \varnothing \text{ pour } PL_3 \end{aligned}$$

Ainsi le problème PL_2 associé au programme PL_1 se décompose en sous-problèmes :

$$PL_4 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$\begin{aligned} x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 50 \text{ pour } PL_4 \\ x_1^* = 3, \quad x_2^* = 1, \quad z^* = 31 \text{ pour } PL_5 \end{aligned}$$

Donner l'arbre d'évaluation et de séparation associé à la résolution du problème PL_1.

Solution. L'arbre d'évaluation et de séparation est donné ci-dessous :

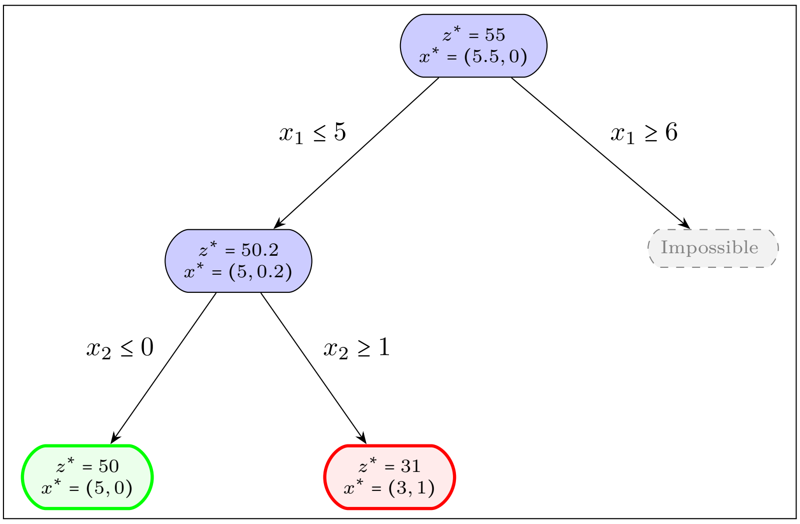

FIGURE 3 – Arbre de branchement du problème PL_1

1.3 Résolution effective

Exercice 4 Résolution en utilisant la méthode de séparation et évaluation.
On considère le problème linéaire en nombres entiers ci-dessous :

$$PL_0 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_2.
2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_1.
3. Donner la signifaction géométrique du premier branchement sur la variable x_2. Quels sont les principes vus en cours que l'on retrouve lors de l'interprétation géométrique ?

Solution.

1. L'arbre de branchement sur x_2 est le suivant :

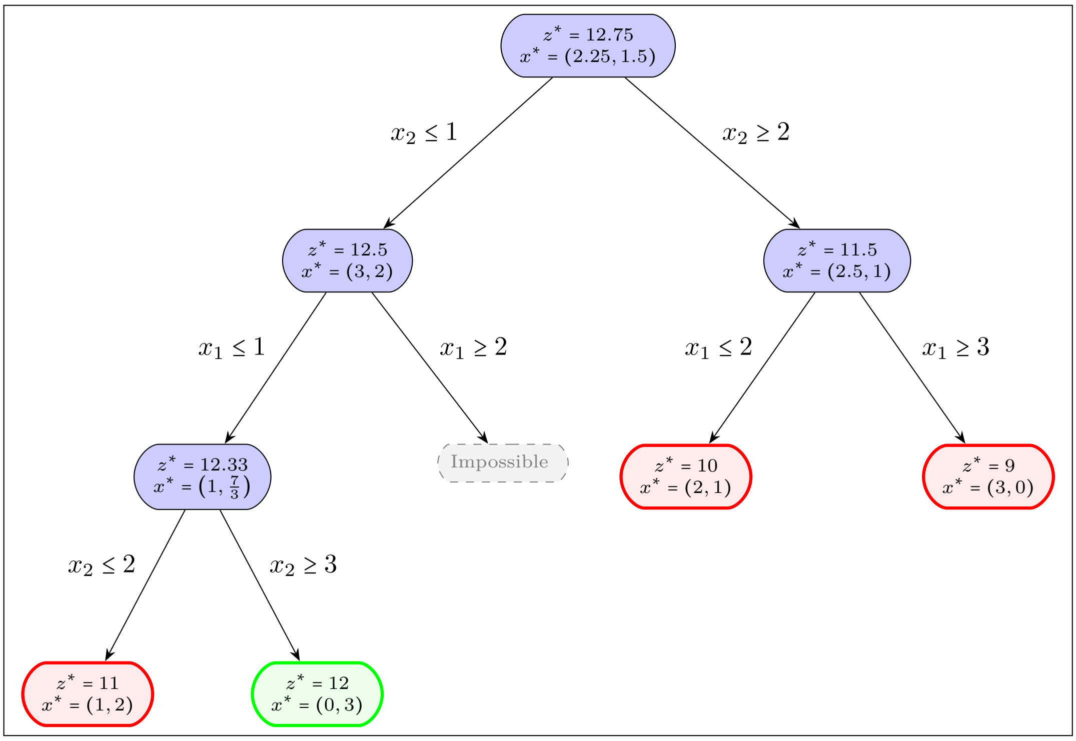

FIGURE 4 – Branch and bound

2. L'arbre de branchement sur x_1 est le suivant :

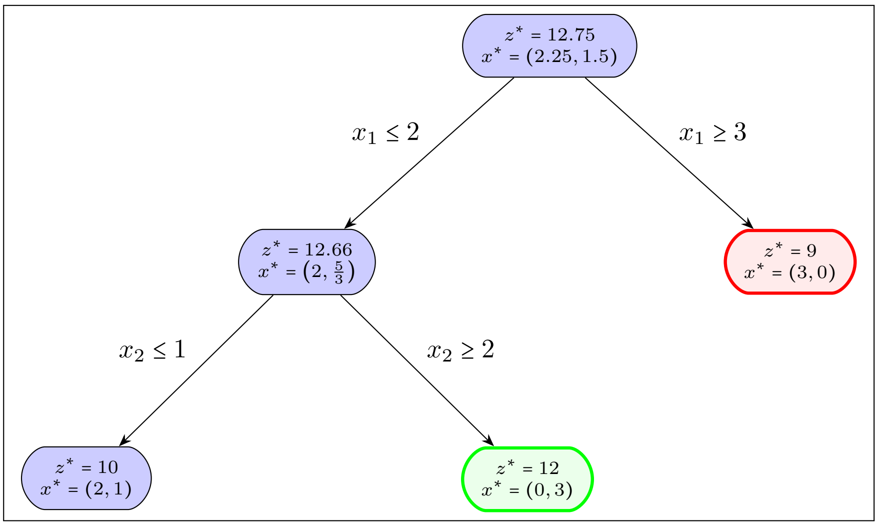

FIGURE 5 – Branch and bound

3. Le premier branchement sur la variable x_2 correspond à la séparation de l'espace des solutions en deux parties par les deux demi-espaces $x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 2$. Si on représente graphiquement le programme linéaire en nombres entiers PL_0, cela donne :

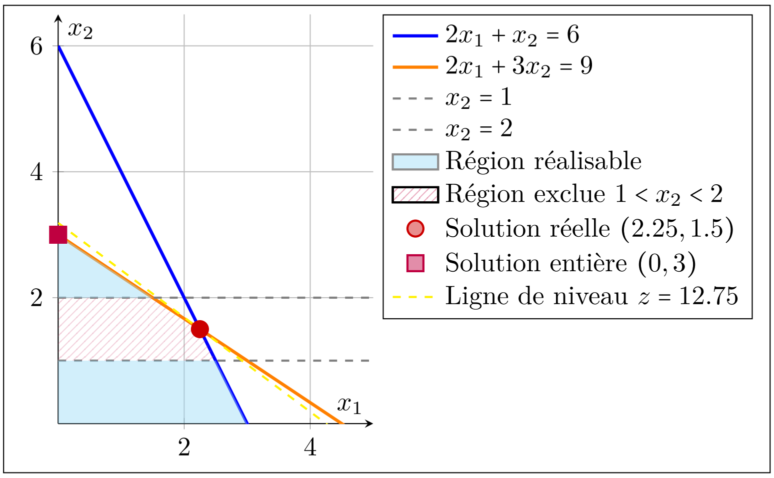

FIGURE 6 – Représentation du problème PL_0 dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 5 Branch and bound et plus court chemin.
Nous considérons le graphe donné par la figure 7 suivante :

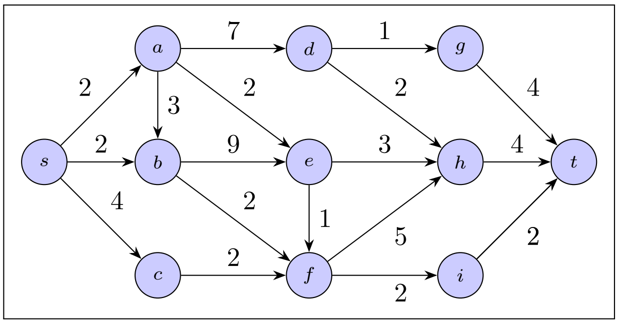

FIGURE 7 – Recherche d'un plus court chemin par branch and bound

Donner deux stratégies en utilisant le principe du branch and bound pour résoudre le problème d'un plus court chemin. Appliquer vos stratégies sur le graphe de la figure 7.

Solution.

Exercice 6 Contraintes avec une seule variable.
On considère un problème de programmation linéaire standard, à une seule contrainte, défini par

$$\max \sum_{j=1}^{n} u_j x_j$$

avec

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V, \text{ et } x_j \geq 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

Tous les coefficient u_j et v_j sont supposés strictement positifs et l'on suppose les variables classées par rapports utilité/volume décroissants ou, pour rester dans un formalisme plus mathématique, suivant les valeurs décroissantes des rapports $\frac{u_j}{v_j}$. Montrer que la variable x_1 est entrante et que, en la faisant entrer en base, on atteint l'optimum de l'objectif en une seule étape. Exprimer la valeur de l'objectif en fonction des différents coefficients.

Solution.

Exercice 7 Le problème du voyageur du commerce symétrique.

1. Appliquer la méthode par séparation et évaluation décrite en cours pour résoudre le problème du voyageur de commerce dans le graphe K_6 dont la matrice des poids est la suivante :

	x	y	z	t	u	v
x	∞	4	7	2	5	4
y	4	∞	3	2	1	2
z	7	3	∞	2	6	3
t	2	2	2	∞	5	3
u	5	1	6	5	∞	2
v	4	2	3	3	2	∞

2. Que faudrait-il faire si on voulait connaitre tous les cycles de poids minimum ?

Solution.

1. **1. Construction du 1-arbre initial**

   On considère le graphe complet G sur $V = \{x, y, z, t, u, v\}$. On fixe le sommet x et on calcule un 1-arbre.

   On applique l'algorithme de Kruskal au graphe $G \smallsetminus \{x\}$ muni des poids initiaux.

   Les arêtes sélectionnées sont :

$$y{-}u = 1, \quad y{-}t = 2, \quad y{-}v = 2, \quad z{-}t = 2.$$

   Poids de l'ACPM :

$$7.$$

   On ajoute les deux arêtes incidentes à x de poids minimal :

$$x{-}t = 2, \qquad x{-}y = 4.$$

   On obtient le 1-arbre initial de poids

$$LB_0 = 7 + 2 + 4 = 13.$$

   Les degrés sont :

$$\deg(x) = 2, \ \deg(y) = 4, \ \deg(t) = 3, \ \deg(z) = 1, \ \deg(u) = 1, \ \deg(v) = 1.$$

   Ce n'est pas un cycle hamiltonien.

   On construit une solution réalisable :

$$x \to t \to z \to y \to u \to v \to x$$

   de poids

$$14.$$

   On fixe donc

$$UB = 14.$$

   Comme $LB_0 < UB$, on applique la séparation.

   Règle de branchement

Si le 1-arbre courant n'est pas hamiltonien, on choisit un sommet v tel que $\deg(v) > 2$. On crée une branche pour chacune des arêtes incidentes à v dans le 1-arbre courant, en les excluant successivement.

Toute exclusion est modélisée par une fonction de poids modifiée $w^{(k)}$ où l'arête exclue reçoit le poids ∞. Cette fonction est utilisée :

- pour l'ACPM sur $G \setminus \{x\}$,
- pour le choix des deux arêtes incidentes à x.

Branchement au niveau racine

Dans le 1-arbre initial, $\deg(y) = 4 > 2$. On branche donc sur y.

Les arêtes incidentes à y dans le 1-arbre sont :

$$y{-}u, \quad y{-}t, \quad y{-}v, \quad y{-}x.$$

On crée donc quatre branches.

Branche A : exclusion de $y{-}u$

On impose $w(y,u) = \infty$.

ACPM sur $G \setminus \{x\}$:

$$y{-}t = 2, \quad y{-}v = 2, \quad z{-}t = 2, \quad u{-}v = 2.$$

Poids $= 8$.

On ajoute $x{-}t = 2$ et $x{-}y = 4$.

$$LB_A = 8 + 2 + 4 = 14.$$

Comme $LB_A = UB$, la branche ne peut être élaguée.

Dans ce 1-arbre, $\deg(y) = 3 > 2$. On branche à nouveau sur y.

Les arêtes incidentes à y sont

$$y{-}t,\ y{-}v,\ y{-}x.$$

Branche A1 : exclusion de $y{-}t$

Il reste à y les arêtes $y{-}v = 2$ et $y{-}z = 3$.

Dans tout arbre couvrant, y doit être incident à au moins une arête. Toute ACPM contient donc une arête de poids au moins 3 incidente à y.

Les trois autres arêtes ont poids minimal total 6.

Toute ACPM a donc poids ≥ 9.

$$LB_{A1} \geq 9 + 2 + 4 = 15 > UB.$$

Branche élaguée.

Branche A2 : exclusion de $y{-}v$

Raisonnement analogue :

Toute ACPM contient une arête incidente à y de poids au moins 3.

$$LB_{A2} \geq 9 + 2 + 4 = 15 > UB.$$

Branche élaguée.

Branche A3 : exclusion de $y{-}x$

ACPM inchangé (poids 8).

Les deux arêtes minimales incidentes à x deviennent $x{-}t = 2$ et $x{-}v = 4$.

$$LB_{A3} = 8 + 2 + 4 = 14.$$

Tous les sommets ont degré 2.
On obtient un cycle hamiltonien de poids 14.
Branche fermée
Branche B : exclusion de $y{-}t$
On impose $w(y,t) = \infty$.
ACPM :

$$y{-}u = 1, \quad y{-}v = 2, \quad z{-}t = 2, \quad u{-}v = 2.$$

Poids = 7.
Ajout de $x{-}t = 2$ et $x{-}y = 4$.

$$LB_B = 13.$$

$\deg(y) = 3$. On branche sur y.
Branche B1 : exclusion de $y{-}u$
Toute ACPM contient alors une arête incidente à y de poids ≥ 3.

$$LB_{B1} \geq 15.$$

Élaguée.
Branche B2 : exclusion de $y{-}v$
Même raisonnement :

$$LB_{B2} \geq 15.$$

Élaguée.
Branche B3 : exclusion de $y{-}x$
Les arêtes incidentes à x deviennent $x{-}t = 2$ et $x{-}v = 4$.
On obtient un cycle hamiltonien de poids 14.
Branche fermée.
Branche C : exclusion de $y{-}v$
ACPM :

$$y{-}u = 1, \quad y{-}t = 2, \quad z{-}t = 2, \quad u{-}v = 2.$$

Poids = 7.

$$LB_C = 13.$$

On branche sur y.
Les deux sous-branches $y{-}u$ exclue et $y{-}t$ exclue donnent $LB \geq 15$, donc élaguées.
Exclusion de $y{-}x$ donne un cycle hamiltonien de poids 14.
Branche fermée.
Branche D : exclusion de $y{-}x$
ACPM initial inchangé (poids 7).
Arêtes incidentes minimales à x :

$$x{-}t = 2, \quad x{-}v = 4.$$

$$LB_D = 13.$$

On branche sur y.
Les exclusions successives de $y{-}u$ et $y{-}t$ donnent $LB \geq 15$: branches élaguées.

L'exclusion de $y{-}v$ produit un cycle hamiltonien de poids 14.
Branche fermée.
Conclusion globale
Toutes les branches de l'arbre de séparation ont été :

- soit élaguées par une borne strictement supérieure à 14,
- soit explorées complètement et conduisant à un cycle de poids 14.

Il n'existe donc aucun cycle hamiltonien de poids strictement inférieur à 14.

$$\boxed{\text{Poids optimal } = 14.}$$

L'arbre de séparation est donné à la figure 11 en annexe.

2. Pour obtenir *tous* les cycles optimaux, il faut poursuivre la séparation en n'élaguant que lorsque $LB > UB$ (et non $LB \geq UB$), et enregistrer toutes les solutions de poids 14.

1.4 Inégalités valides

Exercice 8 Simples inégalités valides.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{x_i \in \{0,1\} : \; 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 \leq -2\}$$

Donner deux équations valides.

Solution.

Exercice 9 Simple inégalité valide.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x,y), \; 0 \leq x \leq 5, y \in \{0,1\} : \; x \leq 9999y\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution.

Exercice 10 Simple inégalité valide.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x,y), \; 0 \leq x \leq 14, y \in \{0,1\} : \; x \leq 10y\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution.

Exercice 11 Simple inégalité valide. Considérons la région entière $X = P \cap \mathbb{N}^4$ avec

$$P = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : \; 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution.

Exercice 12 Inégalités valides.
Considérons une instance de Bin Packing Problem :

Algorithme 1 – Bin Packing Problem

Input: Soient n nombres entiers $a_1, \dots, a_n$ et $W, k \in \mathbb{N}^*$

Question: Existe-t-il une partition en k boites $B_1, \dots, B_k$ de capacité W telle que $\forall j \in \{1, \dots, k\}, \sum_{i \in B_j} a_i \leq W$?

On considère l'instance suivante :

- La capacité des boites est $W = 6$.
- Les objets à ranger sont $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 3$, $a_5 = 4$, $a_6 = 4$, $a_7 = 5$.

1. Donner un algorithme linéaire en nombres entiers qui modélise le Bin Packing Problem.
2. Donner une solution optimale relaxée pour l'instance donnée. Montrer que cette solution est optimale.
3. Proposer une borne inférieure pour toute solution optimale.
4. Donner un ensemble de coupes pour l'instance.

Solution.

Exercice 13 Le polytope pour le $0-1$ Sac a Dos.
Soit

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; 79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178\right\}.$$

avec $x_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, \dots, 5$.

1. Donner les ensembles minimaux dépendants et donner les inégalités valides.
2. Donner l'extension $E(C)$ d'un ensemble minimal dépendant et les coupes associées.

Solution.

1.5 Coupes

Exercice 14 Sur les coupes de Gomory.
Une coupe $ax \leq \alpha$ est dite « plus profonde » qu'une coupe $a'x \leq \alpha'$ si

$$\{x \in \mathcal{D} \mid ax \leq \alpha\} \subset \{x \in \mathcal{D} \mid a'x \leq \alpha'\},$$

1. Expliquer le sens de ce terme.
2. Essayer de déterminer la coupe la plus profonde dans les exercices 15 et 16 suivants.

Solution.

Exercice 15 Sur les coupes de Gomory.
On considère le programme linéaire suivant :

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers par la méthode des coupes de Gomory.
2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers par la méthode du Branch and Bound.

Solution.

Exercice 16 Algorithme de coupe de Gomory.
Donner la solution du programme linéaire suivant :

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Solution.

1.6 Enveloppe convexe

Exercice 17 Enveloppe convexe de points.
Soit $S \subseteq \{0,1\}^3$ qui consiste aux points suivants :

$$S = \{(0,0,0), (1,1,1), (0,1,0), (1,0,1)\}$$

Considérons le polytope $P = \mathsf{conv}(S)$. Trouver un système d'inéquations linéaires qui caractérise P, c'est-à-dire tel que :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$$

Solution.

Exercice 18 Enveloppe convexe et points extremes.
Soit $S \subseteq \{0,1\}^n$, c'est-à-dire un ensemble de $\{0,1\}$-vecteurs de dimension n. Soit le polytope $P = \mathsf{conv}(S)$. Montrer que x est un sommet de points de P si et seulement si $x \in S$.

Solution.

Exercice 19 Enveloppe convexe et points extremes.
Soit S l'ensemble suivant :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 0, x_1 \geq 0\}$$

Donner $\mathsf{conv}(S)$.

Solution.

Exercice 20 Enveloppe convexe et points extremes.
Considérons un polytope $P \subset \mathbb{R}^n$ tel que $P = \mathsf{conv}(\{x_1, \ldots, x_t\})$. Montrer que si x est un point extreme de P alors $x \in \{x_1, \ldots, x_t\}$. Est-ce que x_j est forcément un point extreme de P pour tout $j \in \{1, \ldots, t\}$?

Solution.

Exercice 21 Propriétés de l'enveloppe convexe.
Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ deux ensembles convexes. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathsf{conv}(A \cup B) = \mathsf{conv}(\mathsf{conv}(A) \cup \mathsf{conv}(B))$.
2. $\mathsf{conv}(A + B) = \mathsf{conv}(A) + \mathsf{conv}(B)$. *Aide* : On peut considerer la somme $\sum_{j,k} \lambda_j \mu_k (a_j + b_k)$ où $\sum_j \lambda_j = 1$, $\sum_k \mu_k = 1$, $\lambda_j, \mu_k \geq 0$, $a_j \in A$ et $b_k \in B$.
3. Soient P et Q deux polytopes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les ensembles suivants sont aussi des

polytopes :

- $P \times Q = \{(p \times q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p \in P, q \in Q\}$.
- $P \cap Q$.
- $\mathsf{conv}(P \cup Q)$.

Solution.

Exercice 22 Propriétés de l'enveloppe convexe.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexe. Montrer que

$$\mathsf{conv}(C \cup \{x_0\}) = \{\lambda x + (1-\lambda)x_0 \mid x \in C, \lambda \in [0,1]\}.$$

Solution.

Exercice 23 Enveloppe convexe.
Soit C le convexe défini comme étant l'enveloppe convexe de S : $C = \mathsf{conv}(S)$. Montrer que tout point extreme de C appartient à S.

Solution.

Exercice 24 Faces.
Soit $P_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ le polyèdre défini par les inégalités lineaires suivantes :

$$P_\varepsilon = \begin{cases} x_2 \geq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2-\varepsilon)x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

1. Illustrer P_ε et les inégalités dans le plan pour $\varepsilon = -1$ et $\varepsilon = 1$.
2. Quelles sont les facettes de P_1 ?
3. Soit $\varepsilon = 3$ et le polyèdre entier $P_I = \mathsf{conv}(P_\varepsilon \cap \mathbb{Z}^2)$. Dessiner P_I et donner les équations qui donnent l'enveloppe convexe.

Solution.

Exercice 25 Preuve sur les enveloppes convexes.

1. Soit X l'ensemble suivant

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m_+ \times B^1 : \sum_{i=1}^{m} x_i \leq my, x_i \leq 1, \forall i \in \{1,\ldots,m\}\}$$

   où $B^1 = \{0,1\}$. Considérons la formulation suivante :

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1 : x_i \leq y, \forall i \in \{1,\ldots,m\}, y \leq 1\}$$

   Montrer que la matrice A ou la partie (A,B) admet une structure particulière garantissant que $P = \mathsf{conv}(X)$.
2. Montrer que les points $(x,y) \in P$ (pour l'ensemble X) avec y fractionnaire sont des points extremes de P.

Solution.

2 Génération de colonnes

Rappelons le principe de l'algorithme de la génération de colonnes :

- Initialisation : on met quelques colonnes de PL. Soit PL_R.
- Itérations :
  - — Résoudre (PL_R).
  - — Calculer les couts réduits des variables de (PL).
  - — Si toutes les variables de (PL) ont un cout réduit ≥ 0 alors STOP ((PL) est résolu). Sinon ajouter une variable de cout réduit minimum à (PL_R) et résoudre à nouveau (PL_R).

  Pour calculer les couts réduits :

- on utilise les variables duales $\mu \geq 0$ associées aux contraintes
- Couts réduits : $c - \mu A$.
- Dimensions :
  - — c et μ vecteurs lignes,
  - — c avec n colonnes et μ avec m colonnes,
  - — A la matrice $m \times n$
  - — n le nombre de variables et m le nombre de contraintes.

Exercice 26 Génération de colonnes.
On considère le problème PL suivant :

$$PL = \begin{cases} \min(z) = 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 \geq 3 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\} \end{cases}$$

Commencer la méthode de génération de colonne avec les variables x_1, x_3 et x_4. Ecrire le problème restreint PL_R. Calculer les coûts réduits.

Solution.

Exercice 27 Encadrement de la valeur optimale.
Montrer qu'à chaque itération de la génération de colonnes on a

$$\text{valeur}(PL) \leq \text{valeur}(PL_R)$$

et

$$\text{score}(PL_R) + k \cdot \text{cred} \leq \text{score}(PL)$$

où k est la valeur d'une solution optimale $\sum_{j=1}^{n} x_j^* \leq k$ et cred est le cout reduit minimum à une itération donnée.

Solution.

Exercice 28 Génération de colonnes : le problème de la tournée de véhicules avec fenêtres temporelles.

Solution.

3 Lagrangien

Exercice 29 Lagrangien.
Soit le problème (P) suivant :

$$(P) = \begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ g(x) = 2x_1 + x_2 + 4 \leq 0 \\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. On relache la contrainte et on lui affecte le multiplicateur de Lagrange $\lambda \geq 0$.
2. Enoncer (D) le problème dual lagrangien de (P).
3. Calculer la fonction duale $\Delta(\lambda)$ en fonction de λ.
4. Résoudre le problème dual (D).

Solution.

4 Modélisation

Exercice 30 Le problème de la coloration de sommets.
Donner un programme linéaire en nombres entiers qui modélise le problème de la coloration de sommets.

Solution.

Exercice 31 Le problème du stable dans un graphe.
On rappelle la définition suivante :

Définition 4.1. Un **stable** dans un graphe est un ensemble de sommets qui sont deux à deux non adjacents.

La matrice d'incidence (arêtes-sommets) $A = (a_{ij})$ est une matrice $m \times n$ définie de la manière suivante :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } i \text{ est incidente au sommet } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la matrice d'incidence du graphe donné par la figure 8 :

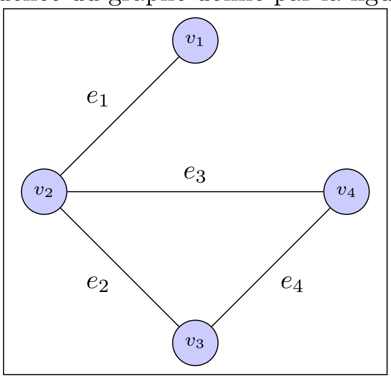

FIGURE 8 – Un graphe non orienté

2. Le problème de trouver un stable maximum dans un graphe ci-dessus peut se formuler comme un programme linéaire. Donner cette formulation.

Solution.

Exercice 32 Le problème du transversal dans un graphe.
On rappelle la définition suivante :

Définition 4.2. Un **transversal** (couverture) est un ensemble de sommets tel que pour chaque arete du graphe, au moins une de ses deux extremités appartient au transversal.

On considère le graphe donné par la figure 8. Donner le programme linéaire en nombres entiers qui permet de trouver un transversal de taille minimale dans ce graphe.

Solution.

Exercice 33 Modéliser les problèmes suivants par un programme linéaire en nombre entiers.

1. L'arbre couvrant de poits minimum. Quel est le problème sur le nombre de contraintes ?
2. Le problème du plus court chemin entre un sommet s et un sommet t. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté avec des coûts $c_{ij} \geq 0$ sur les arcs $(i, j) \in E$. Soit $F = \{P = (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k})\}$ une séquence d'arcs d'un plus court chemin entre s et t dans le graphe G. On considère

le graphe donné par la figure 9 ci-dessous :

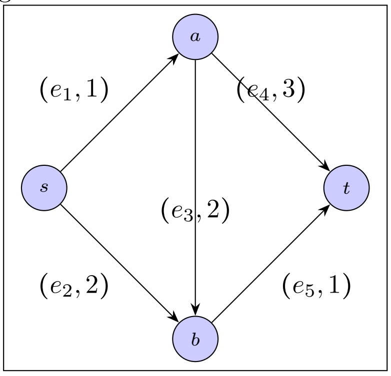

FIGURE 9 – Un graphe orienté pondéré

(a) Donner sa matrice d'incidence A.

(b) Donner le dual.

(c) Résoudre le problème par l'algorithme du simplexe.

(d) Considérons un vecteur $f = (f_1, \ldots, f_n)$ avec f_i associé à l'arc e_i tel que $f_i = 1$ si l'arc e_i appartient à un plus court chemin P entre s et t, et $f_i = 0$ sinon.

  i. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 1$?

  ii. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = -1$?

  iii. Que signifie $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j = 0$?

(e) Utiliser l'algorithme du dual simplexe.

Solution.

Exercice 34 Sur le problème du voyageur de commerce.
Le problème du voyageur de commerce consiste à effectuer un circuit Hamiltonien de cout minimum dans un graphe complet non orienté. Pour cela nous considérons $n + 1$ villes tel que le cout entre deux villes est donné par la matrice $C = (c_{ij})$ où c_{ij} est le cout pour aller de la ville i à la ville j.

1. Pourquoi le problème du voyageur de commerce est étudié dans le cadre d'un graphe complet valué et non dans un graphe quelconque ?
2. Rappeler la définition d'un circuit Hamiltonien. Quelles conséquences sur les degrés des sommets du circuit Hamiltonien ? Modéliser ce problème par un programme linéaire en nombres entiers en justifiant les contraintes.
3. Donner un exemple qui satisfait les contraintes du programme linéaire en nombres entiers mais qui n'est pas une solution réalisable du voyageur de commerce. Quel est l'inconvénient des nouvelles contraintes ? (Penser aux problèmes des sous-tours.)
4. Nous ajoutons au programme linéaire en nombres entiers les contraintes suivantes :

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n$$

   Montrer que les contraintes qu'on vient d'ajouter définissent bien le problème du voyageur de commerce.
5. Comment appele-t-on ce type de programme linéaire ?

Solution.

Exercice 35 Le problème du flot maximum versus la coupe minimum.

1. Questions préliminaires
   (a) Rappeler le principe des algorithmes principaux pour résoudre le problème du flot maximum.
   (b) Dans toute solution optimale, que dire des arcs retours ? Et des arcs avant appartenant à une coupe minimale ?
2. Modélisation et propriétés. On considère dans la partie qui suit le graphe orienté pondéré donné par la figure 10 suivante :

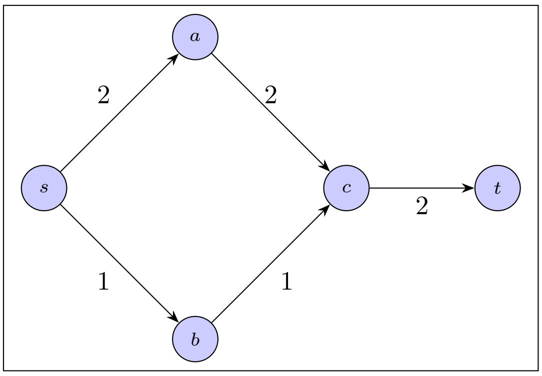

FIGURE 10 – Un réseau de flot

   (a) Formuler le problème du flot maximum par un programme linéaire noté P_0 pour le réseau donné par la figure 10. Formuler le problème du flot maximum par un programme linéaire $\mathcal{P}$.
   (b) Donner le programme dual de P_0 et de $\mathcal{P}$. Quelle est la structure de la matrice des contraintes pour le dual ?
   (c) Utiliser les écarts complémentaires pour retrouver un théorème de MIN-MAX.

Solution.

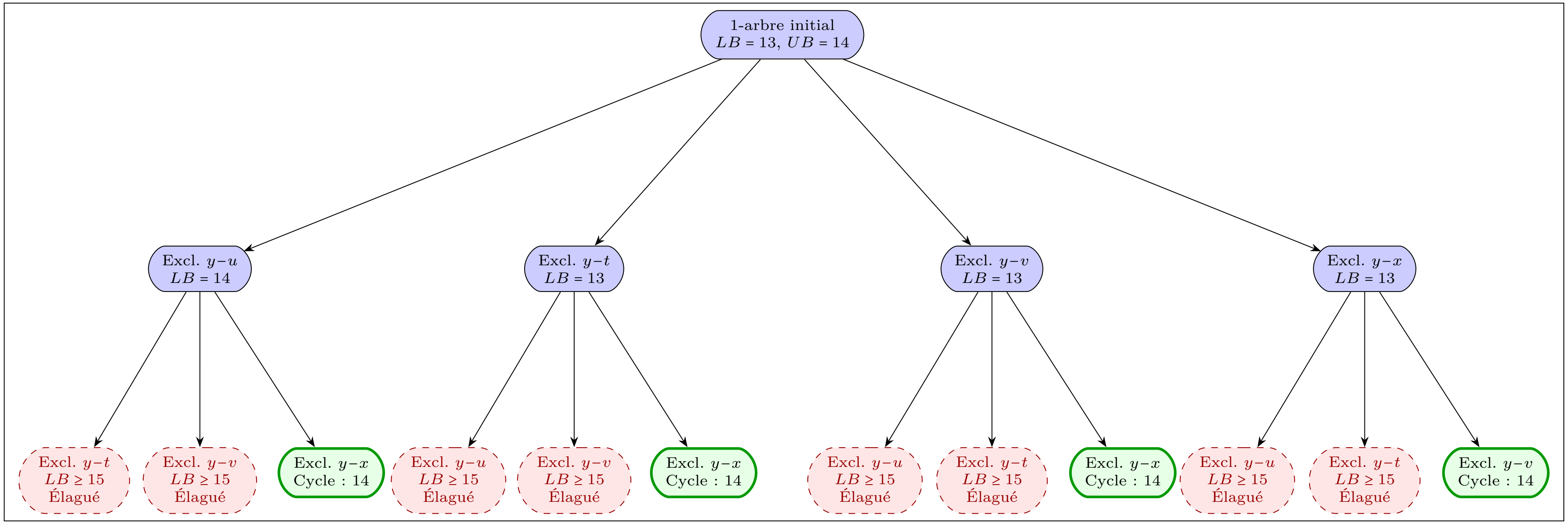

FIGURE 11 – Arbre de séparation et évaluation — TSP