

# HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

1<sup>er</sup> décembre 2025

## Table des matières

1	Convexité : ensembles et fonctions . . . . .	2
2	Divers formulations . . . . .	6
CC1	. . . . .	17

## 1 Convexité : ensembles et fonctions

### Exercice 1 Convexité.

1. Soit une famille (éventuellement infinie) d'inégalités linéaires  $a_i^T x \leq b_i, i \in I$ . Soit  $C$  son ensemble de solutions. Montrer que  $C$  est convexe.
2. Montrer que la boule fermée  $B(a, r)$  est convexe pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $r \in \mathbb{R}^+$ .
3. Soit  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  et soit  $W$  l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de  $S$ . Montrer que  $W$  est convexe.
4. Soit  $C$  un convexe. Montrer que

$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C$$

est convexe.

5. Une matrice  $A = (a_{ij})$  de dimension  $n \times n$  est bistochastique si elle satisfait

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} &= 1, \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n a_{ij} &= 1, \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

Une matrice de permutation  $P$  est une matrice bistochastique à valeurs entières, c'est-à-dire que dans chaque ligne de  $P$  il y a un et un seul élément égal à 1, et les autres sont nuls. De même pour chaque colonne.

- (a) Montrer que pour toute matrice bistochastique  $A$ , il existe une matrice de permutation  $P$  de même dimension telle que  $p_{ij} = 0$  si  $a_{ij} = 0$ .
- (b) Est-ce qu'une combinaison convexe de matrices de permutation est une matrice bistochastique ?
- (c) Montrer que toute matrice bistochastique  $A$  est une combinaison convexe de matrices de permutation.
- (d) Trouver la combinaison convexe pour la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0 & 0.48 \\ 0.02 & 0.15 & 0.67 & 0.16 \\ 0.46 & 0.02 & 0.16 & 0.36 \\ 0.37 & 0.46 & 0.17 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Soient maintenant  $C_1$  et  $C_2$  deux convexes disjoints et

$$D_1 = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C_1, \quad i = 1, 2.$$

Montrer que l'un des deux convexes  $C_1 \cap D_2$  ou  $C_2 \cap D_1$  est vide.

**Solution.** A remplir

### Exercice 2 Combinaison convexe.

1. Rappeler la définition d'une combinaison convexe.
2. Est-ce que le point  $A$  de coordonnées  $(1, 1, 1)$  est une combinaison convexe des points  $(2, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 0, 0)$  ?
3. Déterminer si le point de coordonnées  $(0, 7)$  est une combinaison convexe des points  $(3, 6), (-6, 9), (2, 1), (-1, 1)$ .
4. Déterminer graphiquement si le point de coordonnées  $(1, 2)$  est une combinaison convexe

des points  $(1, 1)$  et  $(2, -1)$ .

**Solution.**

1. Une combinaison convexe de points  $x_1, x_2, \dots, x_k$  est une combinaison

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$$

avec  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ .

2. On cherche  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$  tels que

$$\lambda_1(2, 2, 0) + \lambda_2(0, 0, 3) + \lambda_3(0, 0, 0) = (1, 1, 1).$$

Ici on voit que  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.5, 1/3, 0)$  est une solution.

3. On cherche  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$  tels que

$$\lambda_1(3, 6) + \lambda_2(-6, 9) + \lambda_3(2, 1) + \lambda_4(-1, 1) = (0, 7).$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 6\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_1 + 9\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 7 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

En résolvant on obtient la famille de solutions :

$$\lambda_1 = \frac{t}{2} + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{5t}{16}, \quad \lambda_3 = \frac{-19t}{16}, \quad \lambda_4 = t$$

avec  $t \in \mathbb{R}$ . En imposant  $\lambda_i \geq 0$  on trouve  $t = 0$  et donc  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2/3, 1/3, 0, 0)$ .

4. Graphiquement, on voit que le point  $(1, 2)$  n'est pas sur le segment entre les points  $(1, 1)$  et  $(2, -1)$ . Donc ce n'est pas une combinaison convexe :



**Exercice 3 Ensembles convexe.**

Montrer qu'étant donné un sous-ensemble convexe  $C$  et deux réels positifs  $\alpha$  et  $\beta$  alors on a

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C.$$

**Solution.** Commençons par montrer l'inclusion  $(\alpha + \beta)C \subset \alpha C + \beta C$ .

Soit  $x \in (\alpha + \beta)C$ . Alors, il existe  $x_0 \in C$  tel que

$$x = (\alpha + \beta)x_0 = \alpha x_0 + \beta x_0.$$

Donc  $x \in \alpha C + \beta C$ .

Montrons maintenant l'inclusion  $\alpha C + \beta C \subset (\alpha + \beta)C$ .

Soit  $x \in \alpha C + \beta C$ . Alors, il existe  $x_1, x_2 \in C$  tels que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha + \beta) \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_2 \right).$$

#### Exercice 4 Ensembles convexes.

Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  vérifiant la propriété de **demi-somme** suivante :

$$\forall x, y \in S, \quad \frac{x + y}{2} \in S.$$

1.  $S$  est-il convexe ?
2. Même question si on suppose que  $S$  est fermé.

#### Solution.

1. Non. Par exemple, le sous-ensemble  $S$  suivant :

$$S = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

vérifie la propriété de demi-somme mais n'est pas convexe, car par exemple  $\sqrt{2}/2 \in [0, 1] \notin S$ .

#### Exercice 5 Ensembles convexes.

Lesquels de ces ensembles sont convexes ?

1.  $S = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 12\}$ ,
2.  $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 3, x_1 \leq 5\}$ .

#### Solution.

A remplir

#### Exercice 6 Ensembles convexes.

1. Soit  $C$  un convexe. Montrer que  $x \in C$  est un point extrême de  $C$  si et seulement si  $C \setminus \{x\}$  est convexe.
2. A-t-on une caractérisation similaire pour une face de  $C$  ?
3. On considère dans  $\mathbb{R}^n$  les deux boules suivantes :
  - $B_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq 1\}$
  - $B_{\infty} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 1\}$

Quels sont les points extrêmes de  $B_1$  et  $B_{\infty}$  ?

#### Solution.

1. Commençons par le sens direct :  
Soit  $x \in C$  un point extrême de  $C$ . Montrons que  $C \setminus \{x\}$  est convexe.  
Soit  $y, z \in C \setminus \{x\}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors

$$\lambda y + (1 - \lambda)z \in C.$$

car  $C$  est convexe. Supposons par l'absurde que  $\lambda y + (1 - \lambda)z = x$ . Alors  $x$  est une combi-

naison convexe de  $y$  et  $z$  avec  $\lambda \in [0, 1]$ . Cela contredit le fait que  $x$  est un point extrême de  $C$ . Donc la combinaison convexe  $\lambda y + (1 - \lambda)z$  est dans  $C \setminus \{x\}$ . Donc  $C \setminus \{x\}$  est convexe.

Montrons maintenant le sens réciproque :

Soit  $x \in C$  tel que  $C \setminus \{x\}$  est convexe. Montrons que  $x$  est un point extrême de  $C$ .

Supposons par l'absurde que  $x$  n'est pas un point extrême de  $C$ . Alors, il existe  $y, z \in C$  et  $\lambda \in ]0, 1[$  tels que

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Comme  $y, z \in C$  et  $x$  est une combinaison convexe de  $y$  et  $z$ , on a forcément  $y \neq x$  et  $z \neq x$ . Donc  $y, z \in C \setminus \{x\}$ . Comme  $C \setminus \{x\}$  est convexe, on a

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z \in C \setminus \{x\}.$$

C'est une contradiction. Donc  $x$  est un point extrême de  $C$ .

### Exercice 7 Fonction convexe.

1. Est-ce qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe ?
2. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est convexe ?
3. Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions convexes, est-ce que  $\max(f_1, f_2)$  est convexe ?
4. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto x^2$  est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$ .

### Solution.

1. Oui. On pose  $g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x)$ . Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \sum_{i \in I} \alpha_i (\lambda f_i(x) + (1 - \lambda)f_i(y)) \\ &= \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y). \end{aligned}$$

2. Non. Par exemple,  $f_1(x) = x$  et  $f_2(x) = x^2$  sont convexes mais  $f_1(x)f_2(x) = x^3$  n'est pas convexe.
3. Oui. On pose  $g(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ . Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \max(f_1(\lambda x + (1 - \lambda)y), f_2(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \\ &\leq \max(\lambda f_1(x) + (1 - \lambda)f_1(y), \lambda f_2(x) + (1 - \lambda)f_2(y)) \\ &\leq \lambda \max(f_1(x), f_2(x)) + (1 - \lambda) \max(f_1(y), f_2(y)) \\ &= \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y). \end{aligned}$$

4. Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy \\ &\iff \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy - \lambda x^2 - (1 - \lambda)y^2 \leq 0 \\ &\iff \lambda(1 - \lambda) \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} x^2 + \frac{1 - \lambda}{\lambda} y^2 + 2xy - \frac{x^2}{1 - \lambda} - \frac{y^2}{\lambda} \right) \leq 0 \\ &\iff \lambda(1 - \lambda) \left( -(x - y)^2 \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Or tous les termes sont positifs sauf le dernier. Donc l'inégalité est vérifiée.

**Exercice 8 Fonction convexe.**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Prouver que  $f$  est convexe.

Indication : Montrer par récurrence que sur  $|\geq 2$ , on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall p \in \{0, 1, \dots, 2^n\}, \quad f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

**Solution.** A remplir

## 2 Divers formulations

**Exercice 9 Reformulation en programme linéaire.**

Reformuler les problèmes suivants sous forme de programme linéaire.

1.

$$\begin{cases} \min z = 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Soit un ensemble d'inégalités linéaires

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}.$$

Formuler un modèle (uniquement des contraintes sans fonction objectif) pour lequel un point  $x \in \mathbb{N}^n$  satisfait au moins  $k$  des  $m$  contraintes ( $k \leq m$ ) entiers de plus satisfaite

$$0 \leq x_j \leq M, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

**Solution.** A remplir

**Exercice 10 Linéarisation de fonctions non linéaires.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 11.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 12 Forme standard et forme canonique.**

Dans cet exercice vous devez mettre les programmes suivants sous forme standard et donner également la forme matricielle.

1.

$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

3. Réécrire le programme précédent dans le cas où la fonction objectif est la minimisation.

4.

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

### Solution.

1. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

2. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 + 0 \cdot x_3 - M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 80 & 60 & 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

3. La forme standard est

$$\begin{cases} \min z = -80x_1 - 60x_2 + 0 \cdot x_3 + M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \min z = \begin{pmatrix} -80 & -60 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

4. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot (x_6 + x_7 + x_8) \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & M & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

### Exercice 13.

Nous considérons les programmes linéaires avec des variables  $x_1 \in \{0, u_j\}$ . Montrer que nous pouvons nous ramener à un programme linéaire en nombres entiers. Appliquez-le au problème



suivant :

$$\begin{cases} \max z = 18x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 150 \\ x_1 \in \{0, 60\} \\ x_2 \in \{0, 30\} \\ x_3 \in \{0, 20\}. \end{cases}$$

**Solution.** On remplace chaque variable  $x_j$  par une variable  $y_j$  telle que  $x_j = u_j y_j$  et  $y_j \in \{0, 1\}$ . Le programme devient

$$\begin{cases} \max z = 18 \cdot 60y_1 + 3 \cdot 30y_2 + 9 \cdot 20y_3 \\ 2 \cdot 60y_1 + 30y_2 + 7 \cdot 20y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Cela revient à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \max z = 1080y_1 + 90y_2 + 180y_3 \\ 120y_1 + 30y_2 + 140y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

#### Exercice 14 Points extrêmes.

On considère le polyèdre  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

1. Le point  $x^* = (1, 1, 1, 1, 0)$  est-il un point extrême ? Pourquoi ?
2. Les points suivants sont-ils des points extrêmes ? Dégénérés ?
  - $x_1 = (0, -1, 2, 4, 0)$ ,
  - $x_2 = (0.5, 0, 1.5, 2.5, 0)$ ,
  - $x_3 = (2, 3, 0, -2, 0)$ ,
  - $x_4 = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ .

#### Solution.

1. On commence par vérifier que  $x^*$  respecte les contraintes :

On constate qu'il vérifie bien les contraintes, mais on sait qu'il n'y a que 3 variables en base. Or,  $x^*$  en a 4 de non nulles. Donc,  $x^*$  n'est pas un point extrême.

2. On commence par vérifier que les points respectent les contraintes :

- $x_1$  ne respecte pas les contraintes car  $x_2 < 0$ .
- $x_2$  respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc,  $x_2$  est un point extrême non dégénéré.
- $x_3$  ne respecte pas les contraintes car  $x_4 < 0$ .
- $x_4$  respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc,  $x_4$  est un point extrême non dégénéré.

On rappelle qu'un point est dégénéré s'il a plus de  $m$  variables nulles où  $m$  est le nombre de variables originelles.

#### Exercice 15 Points extrêmes et solutions.

Soit le polyèdre  $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 2, 3, 6 \\ -1, 0, 0 \\ 0, -1, 0 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix}, \quad b = (6, 1, 0, 0).$$

On supposera que le polyèdre est borné.

**Solution.** Pour trouver les points extrêmes, on cherche à résoudre tous les arrangements possibles de 3 contraintes parmi les 4. On énumère les lignes qu'on choisit comme contraintes comme suit et on les résout dans l'ordre :

$$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4).$$

- Pour  $(1, 2, 3)$ , on résout :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 = 1 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

et on trouve  $x_1 = (-1, 0, \frac{4}{3})$ .

- Pour  $(1, 2, 4)$ , on trouve  $x_2 = (-1, \frac{8}{3}, 0)$ ,
- Pour  $(1, 3, 4)$ , on trouve  $x_3 = (3, 0, 0)$ ,
- Pour  $(2, 3, 4)$ , on trouve  $x_4 = (-1, 0, 0)$ .

Les points extrêmes sont donc  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$ . Si on rajoute la contrainte  $x_i \geq 0$ , on a seulement  $x_3$  qui reste.

### Exercice 16 Points extrêmes.

Soit  $C$  le polyèdre convexe fermé de  $\mathbb{R}^2$  décrit à l'aide des inégalités suivantes :

$$\mathcal{P}_y = \begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

1. Ecrire  $C$  sous la forme standard.
2. Quels sont les points extrêmes de  $C$  ?

**Solution.**

1. On introduit les variables d'écart  $x_3, x_4, x_5$  pour obtenir la forme standard :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

2. On écrit le problème matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On choisit ensuite 3 contraintes parmi les 5 et on résout les systèmes linéaires associés :

- Pour (3,4,5), on trouve  $x_1 = (0, 0, 4, 2, 3)$ ,
- Pour (1,2,3), on trouve  $x_2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, 0, 0)$ ,

et ainsi de suite.

**Exercice 17.** Soient :  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$  et  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : Ax - y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

1. Montrer que si  $x$  est un point extrême de  $P$ , alors  $x, Ax - b$  est un point extrême de  $Q$ .
2. Montrer que si  $(x, y)$  est un point extrême de  $Q$ , alors  $x$  est un point extrême de  $P$ .

**Solution.**

1. Supposons que  $x$  est un point extrême de  $P$ . Montrons que  $(x, Ax - b)$  est un point extrême de  $Q$ .

Si  $(x, Ax - b)$  n'est pas un point extrême de  $Q$ , alors il existe  $x_1, x_2 \in Q$  tels que

$$(x, Ax - b) = \frac{x_1, y_1 + x_2, y_2}{2}$$

De plus

$$\begin{cases} Ax_1 - y_1 = b \implies Ax_1 \geq b \\ Ax_2 - y_2 = b \implies Ax_2 \geq b \end{cases}$$

Donc  $x_1, x_2 \in P$  et donc  $x = \frac{x_1 + x_2}{2} \in P$ . Cela contredit le fait que  $x$  est un point extrême de  $P$ . Donc  $(x, Ax - b)$  est un point extrême de  $Q$ .

2. Supposons que  $x$  n'est pas un point extrême de  $P$ . Alors il existe  $x_1, x_2 \in P$  tels que  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Alors

$$\begin{aligned} y &= Ax - b \\ &= A \frac{x_1}{2} + A \frac{x_2}{2} - b \\ &= A \frac{x_1}{2} + A \frac{x_2}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{2} (Ax_1 - b) + \frac{1}{2} (Ax_2 - b) \\ &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

d'où

$$(x, y) = \frac{1}{2} (x_1, y_1) + \frac{1}{2} (x_2, y_2)$$

et donc  $(x, y)$  n'est pas un point extrême de  $Q$ .

**Exercice 18.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 19.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 20.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 21.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 22.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 23.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 24.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 25.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 26.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 27.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 28.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 29 La méthode du simplexe n'est pas une méthode polynomiale.**

Dans cet exercice nous allons montrer que la méthode du simplexe n'est pas une méthode polynomiale. Pour cela, nous allons considérer le programme linéaire suivant :

$$(PL_n) = \begin{cases} \max z = 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n \\ x_1 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\ \dots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + \dots + 4x_{n-1} + x_n \leq 5^n \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

1. Donner la forme standard de  $(PL_n)$ .
2. Donner la solution optimale.
3. Montrer que  $\forall i, x_i$  et  $y_i$  (où  $y_i$  est la variable d'écart associée à la  $i$ -ième variable) ne peuvent être en même temps des variables hors base.
4. Nous allons montrer que  $2^n$  tableaux sont nécessaires pour résoudre ce problème.

- Vérifiez-le pour  $n = 1$ .
- Montrez-le pour  $n = 2$ .
  - Résoudre graphiquement.
  - Résoudre par la méthode des tableaux. Combien de tableaux sont nécessaires pour résoudre  $(PL_2)$ .
  - Quel est le chemin des visites des points extrêmes. Montrez que le dernier tableau peut se mettre sous la forme (voir le tableau 2).

$$2cx + x_n \leq 5^n$$

où

$$l \in \{1, \dots, n-1\}, \quad c = (2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2),$$

et  $A$  est la matrice associée au  $n-1$  premières contraintes.

- Supposons par hypothèse de récurrence que la résolution du programme linéaire  $PL_n$  nécessite  $2^n$  tableaux. Nous allons montrer que la résolution du programme linéaire  $PL_{n+1}$  nécessite  $2^{n+1}$  tableaux.

—

### Solution.

1. On réécrit les équations avec les  $n$  variables d'écart  $y_i$  :

$$\begin{cases} \max z = 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n + 0 \cdot y_1 + \dots + 0 \cdot y_n \\ x_1 + y_1 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + y_2 = 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 + y_3 = 125 \\ \vdots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + \dots + 4x_{n-1} + x_n + y_n = 5^n \\ x_i, y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

2. Pour  $n = 1$ , la solution optimale est  $x_1 = 5$ .

Pour  $n = 2$ , la solution optimale est  $(0, 25)$ . On peut vérifier avec le tableau du simplexe qui suit :

$c$			2	1	0	0
$c^J$	variables de base		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
0	$x_1^1 = y_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^1 = y_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0

ensuite

$c$			2	1	0	0
$c^J$	variables de base		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
2	$x_1^2 = x_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^2 = y_2$	5	0	1	-4	1
	$z(x)$	10	0	-1	2	0

ensuite

$c$			2	1	0	0
$c^J$	variables de base		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
2	$x_1^3 = x_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^3 = x_2$	5	0	1	-4	1
	$z(x)$	10	0	0	-2	1

et enfin

$c$			2	1	0	0
$c^J$	variables de base		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$
0	$x_1^4 = y_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^4 = x_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	25	2	0	0	1

ce qui confirme que la solution optimale est  $(0, 25)$ .

3. On écrit les deux lignes du tableau et on regarde ce qui se passe en  $x_i$  et  $y_i$  :

$$2^{i-1}x_1 + 2^{i-2}x_2 + \dots + 4x_{i-2} + x_{i-1} + y_{i-1} = 5^{i-1}$$

$$2^i x_1 + 2^{i-1}x_2 + \dots + 4x_{i-1} + x_i + y_i = 5^i$$

Si  $y_i = 0$ , alors dans l'équation du haut on a

$$4x_{i-1} = 5^{i-1} - 2^{i-1}x_1 - 2^{i-2}x_2 - \dots - x_{i-2} \geq 0$$

mais dans celle du bas on a

$$4x_{i-1} = 4 \cdot 5^{i-1} - 2^i x_1 - 2^{i-1}x_2 - \dots - x_i > 0$$

Si on fait cela aussi avec  $x_i = 0$ , on trouve que  $x_i = y_i = 0$  est impossible.

4. On a

(a)

**Exercice 30.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 31.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 32.** A remplir

**Solution.** A remplir

**Exercice 33 Détermination du dual.** Déterminer le dual des programmes suivants :

- 1.

$$(PL_0) = \begin{cases} \min z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2.

$$(PL_1) = \begin{cases} \max z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Solution.** On a

1. Le dual du programme  $(PL_0)$  est

$$\begin{cases} \max 20y_1 + 30y_2 + 40y_3 + 50y_4 \\ 2y_1 + 6y_2 + 7y_3 + y_4 \leq 5 \\ 3y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 2 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 4y_4 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

2. Le dual du programme  $(PL_1)$  est

$$\begin{cases} \min 10y_1 + 6y_2 + 8y_3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Pour ce qui est de leur résolution, on a :

1.

2. On a

$c$			2	1	0	0	0
$c^J$	variables de base		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$x_1^1 = x_3$	10	1	5	1	0	0
0	$x_2^1 = x_4$	6	1	3	0	1	0
0	$x_3^1 = x_5$	8	2	2	0	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0	0

↓

$c$			2	1	0	0	0
$c^J$	variables de base		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
0	$x_1^2 = x_3$	6	0	4	1	0	$-\frac{1}{2}$
0	$x_2^2 = x_4$	2	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$
2	$x_3^2 = x_1$	4	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$
	$z(x)$	8	0	1	0	0	1

Comme  $x_3, x_4$  sont en bases, leurs variables duales associées valent 0.

Pour  $x_5$ , on prend la valeur associée donc 1. Cela donne :

$$(x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 1) \implies (y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 1).$$

**Exercice 34.**

**Solution.** On peut extraire des tableaux les problèmes suivants :

$$PL_4 = \begin{cases} \min(z) = 25y_1 + 30y_2 \\ 4y_1 + 7y_2 = 1 \\ 8y_1 + 5y_2 = 3 \\ 6y_1 + 9y_2 = -1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} \max(z) = 7y_1 + 30y_2 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1 + 3y_2 \geq 1 \\ -y_1 \geq 0 \\ -y_2 \geq 0 \\ y_1 \geq M \\ y_2 \geq M \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Exercice 35 Contraintes serrées et solutions.** On considère

$$P = \begin{cases} \max z & = 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 & \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 & \leq 6 \\ x_1 - x_2 & \leq 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{cases}, \quad D = \begin{cases} \min z = 8u_1 + 6u_2 + 2u_3 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 & \geq 6 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 & \geq 5 \\ u_i & \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

En supposant que la solution optimale du primal est  $x = (5, 3)$ , donner la solution du dual. Quelles sont les contraintes serrées pour le primal et le dual.

**Solution.** Supposons que la solution optimale du primal est  $x = (5, 3)$ . Les contraintes donnent alors :

$$\begin{aligned} 5 + 3 &\leq 8 \iff 8 \leq 8 \\ -2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 &\leq 6 \iff -1 \leq 6 \\ 5 - 3 &\leq 2 \iff 2 \leq 2 \end{aligned}$$

Les contraintes 1 et 3 sont serrées, la contrainte 2 ne l'est pas. Donc on sait que

$$u_1 > 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 > 0.$$

En rentrant cela dans le dual on obtient :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 \geq 6 \\ u_1 - u_3 \geq 5 \end{cases}$$

Alors, la solution optimale est  $(u_1 = \frac{11}{2}, u_2 = 0, u_3 = \frac{1}{2})$ .



## CC1

### Exercice 1 Points extrêmes.

Soit  $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b, x \geq 0\}$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Combien y a-t-il de points extrêmes ? Lister les points extrêmes et préciser si les points extrêmes sont des points dégénérés.

**Solution.** Le polygone  $P$  est défini par les contraintes :

$$(1) \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$(2) \quad x_1 - x_2 \leq 0$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0$$

$$(4) \quad x_2 \geq 0$$

Graphiquement, cela donne :

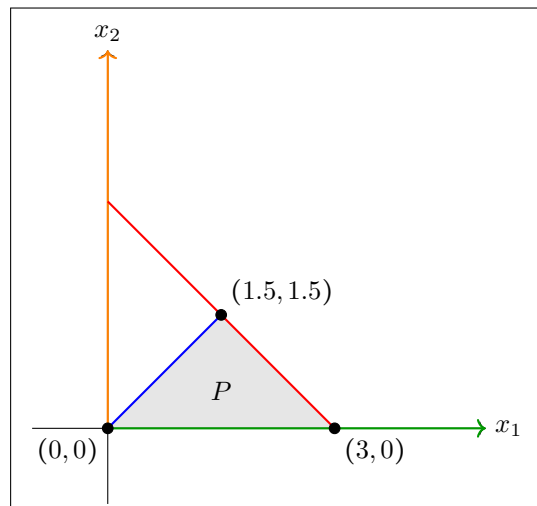


FIGURE 1 – Représentation graphique des contraintes sur  $P$

Les points extrêmes de  $P$  sont donc :

- $(0,0)$
- $(1.5, 1.5)$
- $(3,0)$

On voit alors clairement que

- le point  $(0,0)$  est dégénéré car trois contraintes sont actives en ce point, les contraintes (2), (3) et (4).
- le point  $(1.5, 1.5)$  n'est pas dégénéré car seules les contraintes (1) et (2) sont actives en ce point.
- le point  $(3,0)$  n'est pas dégénéré car seules les contraintes (1) et (3) sont actives en ce point.

### Exercice 2 Ensembles et fonctions convexes.

1. Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$ . Montrer que  $S$  est un ensemble convexe.

2. Soit  $C_1, C_2$  deux parties convexes d'un espace vectoriel réel  $E$  et soit  $s \in [0, 1]$ . On pose  $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx_1 + (1-s)x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ . Montrer que  $C$  est convexe.
3. Soit  $C_1$  et  $C_2$  deux ensembles convexes de  $\mathbb{R}^n$ . On pose  $C = C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ . Montrer que  $C$  est convexe.
4. Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions convexes avec  $g$  croissante. Montrer que  $g \circ f$  est convexe.

#### Solution.

1. Soient  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Montrons que le point  $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2, z_2)$  appartient à  $S$  :

$$\begin{aligned}
 z &= \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \\
 &\geq \lambda(x_1^2 + y_1^2) + (1-\lambda)(x_2^2 + y_2^2) \quad (\text{car } z_1 \geq x_1^2 + y_1^2 \text{ et } z_2 \geq x_2^2 + y_2^2) \\
 &= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 + \lambda y_1^2 + (1-\lambda)y_2^2 \\
 &\geq (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)^2 \quad (\text{par l'inégalité (I)}) \\
 &= x^2 + y^2
 \end{aligned}$$

où  $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$  et  $y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ .

On prouve en plus grand détail l'inégalité utilisée ci-dessus :

#### Preuve de l'inégalité (I)

Pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  et tous réels  $a, b$ , on a :

$$\lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 \geq (\lambda a + (1-\lambda)b)^2. \quad (\text{I})$$

On a

$$\begin{aligned}
 &\lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 - (\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \\
 &= \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 - [\lambda^2 a^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab + (1-\lambda)^2 b^2] \\
 &= (\lambda - \lambda^2)a^2 + ((1-\lambda) - (1-\lambda)^2)b^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab \\
 &= \lambda(1-\lambda)a^2 + \lambda(1-\lambda)b^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab \\
 &= \lambda(1-\lambda)(a^2 + b^2 - 2ab) \\
 &= \lambda(1-\lambda)(a-b)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que  $\lambda(1-\lambda) \geq 0$  pour  $\lambda \in [0, 1]$ , et que  $(a-b)^2 \geq 0$ .

Ainsi, (I) est vérifiée. En l'appliquant à  $a = x_1, b = x_2$  puis à  $a = y_1, b = y_2$ , on obtient les inégalités nécessaires pour conclure que  $S$  est convexe.

**Exercice 3 Modélisation de contraintes.** Soient  $P_1, \dots, P_n$  des propositions logiques, chacune étant vraie ou fausse. En introduisant des variables binaires, représenter les relations suivantes par des contraintes linéaires :

1. La proposition  $P_1$  est vraie.
2. Toutes les propositions sont vraies.
3. Au moins  $k$  propositions sont vraies.
4. Si  $P_1$  est vraie, alors  $P_2$  est vraie.
5. Les propositions  $P_1$  et  $P_2$  sont équivalentes.
6. Si  $P_1$  ou  $P_2$  est vraie, alors au plus deux des propositions  $P_3, \dots, P_n$  sont vraies.

On pose  $x_i = 1$  si  $P_i$  est vraie,  $x_i = 0$  sinon.

**Solution.**

**Exercice 4 Résolution.** Soit le programme linéaire  $\mathcal{P}_0$  suivant :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{cases} \max z(x) & 35x_1 + 50x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 120 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le problème  $\mathcal{P}_0$ . Donner les tableaux et les bases associées.
2. Donner le dual de  $\mathcal{P}_0$ .
3. Donner la solution du dual à partir du tableau final du primal.
4. Vérifier les écarts complémentaires.
5. **Modification du vecteur  $b$**  : le vecteur  $b$  devient  $b' = (75, 15, 50)$ .
  - (a) Que devient la solution optimale de  $\mathcal{P}_0$  ?
  - (b) Proposer deux méthodes pour résoudre ce nouveau problème, sans tenter de résoudre le dit problème.

**Solution.**

**Exercice 5 Farkas.** Est-ce que les systèmes suivants admettent une solution ?

1. On résoud  $Ax \leq b, x \geq 0$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. On résoud  $Ax \leq b, x \geq 0$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3. On résoud  $Ax = b, x \geq 0$  avec

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Solution.**