HAI711I — TDs

Ivan Lejeune

10 octobre 2025

Table des matières

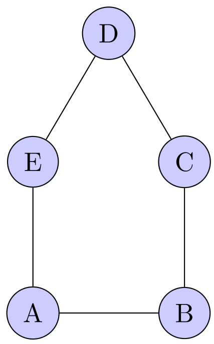
TD1 — Généralités

Exercice 1 Soirée chez Ramsey.
On considère un ensemble de six personnes. Montrer que au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou que au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux. Est-ce vrai pour un ensemble de cinq personnes ?

Solution.
Soit $G = (V, E)$ un graphe à six sommets. On veut montrer que G contient K_3 ou $\overline{K_3}$.
Considérons $x \in V$ un sommet de G et procédons par disjonction de cas en fonction du degré de x :

- Si $\deg(x) \geq 3$, on note s_1, s_2, s_3 trois voisins de x. Si $(s_1, s_2) \in E$ alors x, s_1, s_2 forment K_3.
  De manière similaire, si $(s_1, s_3) \in E$ ou $(s_2, s_3) \in E$ alors K_3 est formé. Si il n'existe pas d'arête entre s_1, s_2, s_3 alors $\overline{K_3}$ est formé.
  Ainsi, si $\deg(x) \geq 3$ alors G contient K_3 ou $\overline{K_3}$.
- Si $\deg(x) \leq 2$, on note $s_1, s_2, s_3 \in V$ trois sommets de G qui ne sont pas voisins de x. Si $(s_1, s_2) \notin E$ alors x, s_1, s_2 forment $\overline{K_3}$.
  De manière similaire, si $(s_1, s_3) \notin E$ ou $(s_2, s_3) \notin E$ alors $\overline{K_3}$ est formé. Si il existe une arête entre chacun des sommets s_1, s_2, s_3 alors K_3 est formé.
  Ainsi, si $\deg(x) \leq 2$ alors G contient K_3 ou $\overline{K_3}$.

Donc pour un ensemble de six personnes, au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux.
Pour un ensemble de cinq personnes, le graphe G à cinq sommets ci-dessous ne contient ni K_3 ni $\overline{K_3}$:



Exercice 2 Hyperparcours.
Soit d un entier positif non nul. L'hypercube Q_d est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des d-uplets $x_1, \ldots, x_d$ de 0 et de 1, deux d-uplets étant adjacents s'ils diffèrent sur une seule entrée.

1. Dessiner Q_d pour $d = 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer un parcours en largeur de Q_3 de racine 000. En cas de choix entre plusieurs sommets pour entrer dans la file, on choisira celui de valeur (en binaire) minimale.
3. Effectuer de même un parcours en profondeur de Q_3. Cette fois, il n'y a pas de consigne en cas de choix, mais on essayera d'obtenir un arbre de parcours qui ne soit pas un chemin.

Solution.

1. On a les hypercubes suivants :

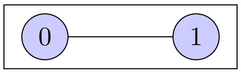


FIGURE 1 – Hypercube Q_1

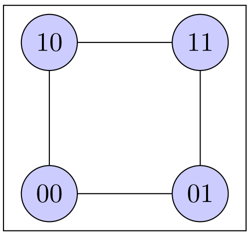


FIGURE 2 – Hypercube Q_2

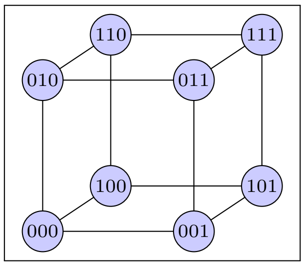


FIGURE 3 – Hypercube Q_3

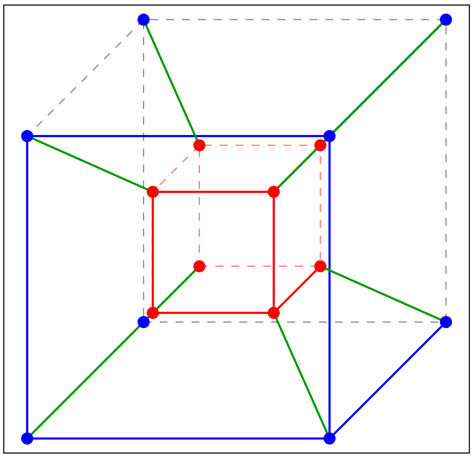


FIGURE 4 – Hypercube Q_4
Noeuds non précisés pour la clareté

Exercice 3 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 4 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 5 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 6 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 7 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 8 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 9 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 10 Convexité.

Solution.
A remplir

Exercice 11 Convexité.

Solution.
A remplir