TD CAPES / Remise à niveau M1

Ivan Lejeune

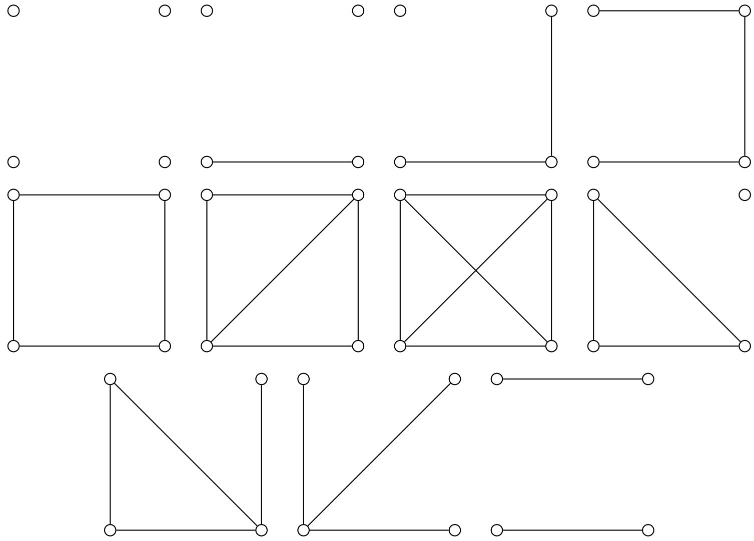
11 septembre 2025

Table des matières

TD1 — Graphes

Exercice 1.1. Combien y-a-t'il de graphes simples non isomorphes avec 4 sommets ? Dessiner chacun de ces graphes.

Solution. Il y a exactement 11 graphes simples non isomorphes avec 4 sommets, les voici :



Exercice 1.2. Calculez les paramètres n (nombre de sommets), m (nombre d'arcs ou d'arêtes), δ (degré min), Δ (degré max) et D (diamètre) des graphes suivants :

1. B_d (les arbres binomiaux de dimension d),
2. C_n (cycle à n sommets),
3. K_n (graphe complet à n sommets),
4. $GR_{p\times q}$ (grille $p \times q$),
5. $TR_{p\times q}$ (tore $p \times q$),
6. H_d (hypercube de dimension d).

Dessinez les graphes suivants :

1. B_3
2. K_5
3. $GR_{4\times 4}$
4. $TR_{4\times 4}$
5. H_2
6. H_3
7. H_4

Rappel. Le **diamètre** D d'un graphe est la plus grande des plus courtes distances entre deux sommets quelconques.
Par exemple, dans un arbre, le diamètre est la longueur du chemin le plus long entre deux feuilles.

Solution. Les paramètres des graphes sont les suivants :

Graphe	n	m	δ	Δ	D
B_d	2^d	$2^d - 1$	1	3	d
C_n	n	n	2	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
K_n	n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n-1$	$n-1$	1
$GR_{p \times q}$	pq	$2pq - p - q$	2	4	$p + q - 2$
$TR_{p \times q}$	pq	$2pq$	4	4	$\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$
H_d	2^d	$d \cdot 2^{d-1}$	d	d	d

Leur représentation graphique est la suivante :

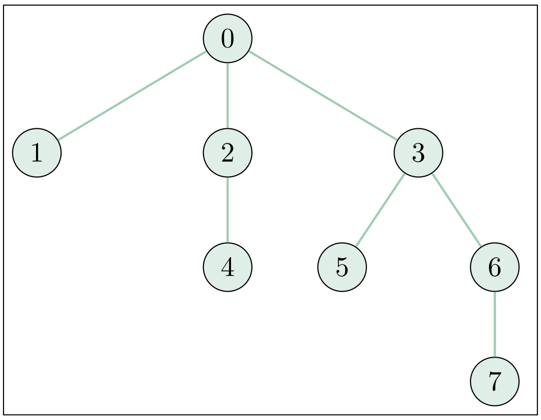


Figure 1 – B_3

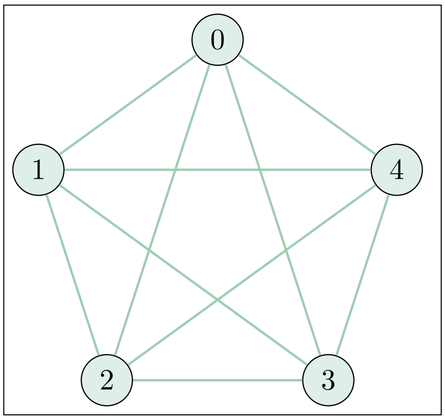


Figure 2 – K_5

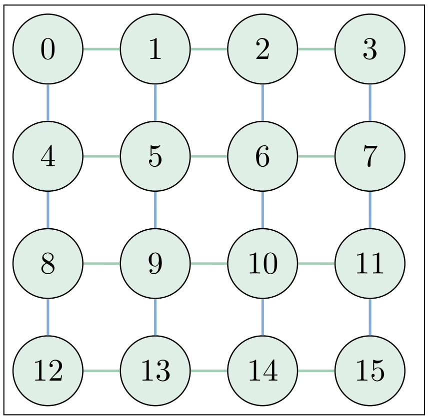


Figure 3 – $GR_{4 \times 4}$

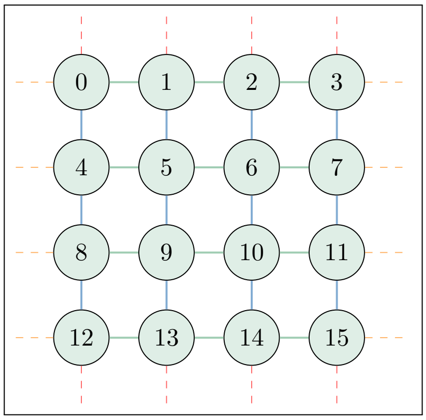


Figure 4 – $TR_{4 \times 4}$

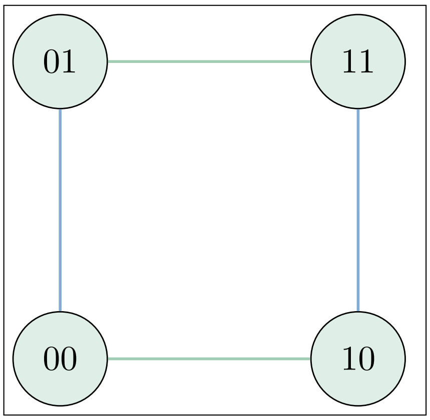


FIGURE 5 – H_2

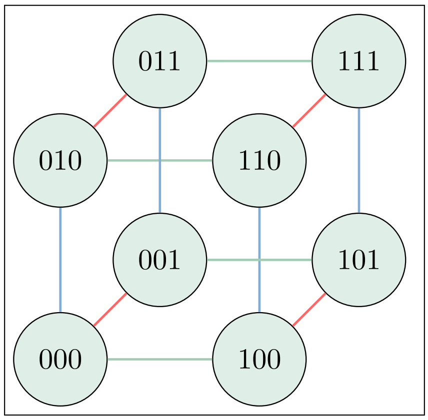


FIGURE 6 – H_3

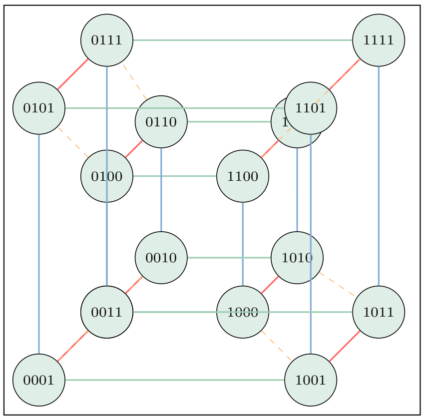


FIGURE 7 – H_4

Exercice 1.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n. Soient $d_1, d_2, \dots, d_n$ les degrés du graphe. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E|.$$

Solution. Une arête relie exactement 2 sommets. Le degré d_i du i-ième sommet correspond au nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Alors, en sommant tous ces degrés, on compte toutes les arêtes exactement 2 fois, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E|.$$

Exercice 1.4. Montrer que dans un graphe il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

Solution. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour tout sommet $v \in V$, notons $\deg(v)$ son degré. Chaque arête $e \in E$ contribue 1 au degré de chacun de ses deux sommets, donc

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Ainsi la somme des degrés est un nombre pair.
Séparons les sommets selon la parité de leur degré : soit I l'ensemble des sommets de degré

impair et P l'ensemble des sommets de degré pair. On a alors

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in I} \deg(v) + \sum_{v \in P} \deg(v).$$

La somme $\sum_{v \in P} \deg(v)$ est paire. De plus, chaque terme de $\sum_{v \in I} \deg(v)$ est impair, donc $\sum_{v \in I} \deg(v)$ n'est pair que si $|I|$ est pair. Or $\sum_{v \in V} \deg(v)$ est pair, donc $|I|$ aussi et le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exercice 1.5. Exercise 5 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.6. Exercise 6 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.7 Exercice 7. Les nombres $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ représentent respectivement les degrés minimum et maximum d'un graphe $G = (X, E)$ (X représente l'ensemble des sommets et E celui des arêtes) où $n = |X|$ et $m = |E|$. Montrer que $\delta(G) \leq 2\frac{m}{n} \leq \Delta(G)$.

Solution. On sait que pour tout sommet d, on a

$$\delta \leq d_i \leq \Delta$$

Si on fait la somme des distances pour tous les sommets, on obtient alors

$$\delta \leq 2m/n \leq \Delta$$

Exercice 1.8 Exercice 8. Montrer que si un graphe biparti $G = (X_1, X_2, E)$ est k-régulier (avec $k > 0$) alors $|X|_1 = |X|_2$.

Solution. Il y a n_1 sommets à gauche et n_2 à droite. Il y a donc kn_1 arêtes qui sortent de la partie à gauche et qui vont à droite, et vice versa. Alors $kn_1 = kn_2$ et donc $n_1 = n_2$.

Exercice 1.9 Exercice 9. Montrer que tout graphe simple possède au moins deux sommets de même degré

Solution. Supposons que tous les sommets ont des degrés différents. Alors, comme le degré maximal est $n - 1$, on a

$$\begin{aligned} x_n &= n - 1 \\ x_{n-1} &= n - 2 \\ &\vdots \\ x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Or, x_n est relié à tous les sommets, donc en particulier à x_1, mais celui-ci est de degré 0. Il y a donc contradiction et il existe au moins deux sommets de même degré

Exercice 1.10. Un n-cube ou (hypercube de dimension n) est un graphe dont les sommets représentent les éléments de $\{0, 1\}^n$ et deux sommets sont adjacents si et seulement si les n-uplets correspondants diffèrent en exactement une composante. Montrer que :

1. Le n-cube possède 2^n sommets,
2. Le n-cube est n-régulier,

3. Le nombre d'arêtes est $n \cdot 2^{n-1}$.

Représenter le 1-cube, le 2-cube et le 3-cube

Solution. 1. Il y a exactement 2^n n-uplets dans $\{0,1\}^n$ donc un n-cube a exactement 2^n sommets.

2. Il y a exactement n n-uplets qui diffèrent d'un sommet en exactement une composante (il suffit d'inverser une de ses composantes).
3. Chaque sommet a n voisins et chaque arête est comptée 2 fois donc $n * 2^n/2 = n2^{n-1}$.
4. le 1 cube est une ligne reliant 2 points le 2 un carré et le 3 un cube.

Exercice 1.11. Montrer que tout arbre d'ordre $n > 1$ a au moins 2 sommets pendants (un sommet pendant est un sommet de degré 1).

Solution. Raisonner sur le degré des sommets sur la chaine maximale (les sommets les plus distants). On peut aussi raisonner sur la somme des degrés et montrer qu'il faut forcement 2 de degre 1 pour la formule

Exercice 1.12. Exercise 12 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.13. Exercise 13 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.14. Exercise 14 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.15. Exercise 15 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.16. Soient $G_1 = (X_1, A_1)$ et $G_2 = (X_2, A_2)$ les graphes suivants :
Repondre aux questions suivantes :

1. Donner $\Gamma^+(x)$ (la liste des successeurs), $\Gamma^-(x)$ (la liste des prédécesseurs), $\Gamma(x), d^+(x), d^-(x)$ et $d(x)$ pour tout $x \in X_2$.
2. Donner les matrices d'adjacence de G_1 et G_2.
3. Etant donné un graphe orienté $G = (X, A)$ ayant n sommets et m arcs, sa matrice d'incidence est une matrice $n \times m$, notée $P = (p_{ie})$ telle que $p_{ie} = 1$ si et seulement si le sommet i est l'origine de l'arc e, $p_{ie} = -1$ si et seulement si le sommet i est l'extrêmité de l'arc e et $p_{ie} = 0$ sinon. Donner la matrice d'incidence des graphes G_1 et G_2.
4. Représenter les deux graphes par leurs listes d'adjacence (les sommets d'une liste d'adjacence sont rangés consécutivement dans un tableau.)

Solution. A completer

Exercice 1.17. a completer, penser à rajouter les packages pour faire des algorithmes

Solution. Exercice solution

Exercice 1.18 Notions de base. Soit la matrice binaire ou matrice d'adjacence M associée au graphe orienté $G = (S, U)$ telle que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe représentatif de cette matrice.
2. Donner la matrice d'incidence sommets-arcs de ce graphe.
3. Calculer M^2, M^3, M^4. Que pouvez-vous en dire ?
4. Calculer
$$A = I + M + M^2 + M^3 + M^4.$$
Interpréter A.
5. Appliquer l'algorithme de Roy Warshall. Que constatez-vous ?

Solution. Exercice solution

Exercice 1.19 Optional title 2. Exercise 2 content

Solution. Exercice solution