

# HAI802I Algorithmique Avancée — TDs

Ivan Lejeune

23 janvier 2026

## Table des matières

1	Complexité . . . . .	3
1.1	Quelques preuves en complexité des problèmes . . . . .	3
1.2	Quelques problèmes dans les graphes . . . . .	3
1.3	La classe de complexité $co\mathcal{NP}$ . . . . .	4
1.4	Rappels en complexité . . . . .	4
2	Algorithmes d'approximation . . . . .	6
2.1	La classe <b>Log-APX</b> . . . . .	6
2.2	La classe <b>APX</b> . . . . .	6
2.3	Mesure différentielle . . . . .	7
2.4	Construction d'un FPTAS . . . . .	8
2.5	Polynomial-Time Asymptotic Scheme : PTAS . . . . .	8
2.6	Points extrêmes . . . . .	8
2.7	FPTAS et programmation dynamique . . . . .	8
2.8	Schéma primal-dual . . . . .	8
3	Inapproximabilité ou seuil d'approximation . . . . .	10
3.1	Seuil d'approximation . . . . .	10
3.2	Utilisation du principe Gap-réduction . . . . .	10
4	Méthodes exactes . . . . .	11
4.1	Programmation dynamique . . . . .	11
4.2	Arbres de branchement . . . . .	11
5	Réductions divers . . . . .	12
5.1	$L$ -réduction . . . . .	12
6	Quelques problèmes d'ordonnancement . . . . .	13
6.1	Ordonnancement sur un processeur . . . . .	13
6.2	Ordonnancement sur $m$ processeurs . . . . .	13
7	Algorithmes randomisés . . . . .	14
7.1	Sur le problème MAXIMUM SATISFAISABILITÉ . . . . .	14
7.2	Sur le problème COUVERTURE D'ENSEMBLES PONDÉRÉS . . . . .	14
8	Bornes inférieures et ETH . . . . .	15

## Liste des Algorithmes

1	3-SAT . . . . .	3
2	HALF 3-SAT . . . . .	3
3	-3-SAT . . . . .	3
4	NON EGAL SATISFAISABILITÉ (NAESAT) . . . . .	3
5	EXACT COVER BY 3-SETS . . . . .	3
6	VERTEX COVER . . . . .	3
7	STEINER TREE . . . . .	4

# 1 Complexité

## 1.1 Quelques preuves en complexité des problèmes

### Exercice 1 Quelques preuves de NP-complétude autour de 3-SAT.

Algorithme 1 – 3-SAT

**Input:** Une formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en 3-CNF

**Question:** Existe-t-il une affectation des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  satisfaisant  $\varphi$  ?

Algorithme 2 – HALF 3-SAT

**Input:** Une formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en 3-CNF

**Question:** Existe-t-il une affectation des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  satisfaisant  $\varphi$  à 50% ?

Algorithme 3 –  $\neg$ 3-SAT

**Input:** Une formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en 3-CNF

**Question:** Existe-t-il une affectation des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  qui ne satisfait pas  $\varphi$  ?

1. Montrer que  $\neg$ 3-SAT appartient à la classe  $P$ .
2. Montrer que HALF 3-SAT est NP-complet. Que dire du problème HALF 3-SAT dans le cas où le nombre de clauses satisfaites est au moins de 50% ?

**Solution.**

1. On rappelle que tous les littéraux sont positifs, il suffit alors de tout mettre à faux.

### Exercice 2 Autour de Satisfaisabilité.

Algorithme 4 – NON EGAL SATISFAISABILITÉ (NAESAT)

**Input:** Une formule conjonctive  $\varphi$  sur  $n$  variables et  $m$  clauses

**Question:** Existe-t-il une affectation de valeurs de vérité aux variables qui satisfasse  $\varphi$  tel que chaque clause a un littéral vrai et un littéral faux ?

Montrer que NON EGAL SATISFAISABILITÉ est  $\mathcal{NP}$ -complet. La preuve se fera à partir de SATISFAISABILITÉ.

**Solution.**

## 1.2 Quelques problèmes dans les graphes

### Exercice 3 Quelques preuves de NP-complétude pour Steiner tree.

Algorithme 5 – EXACT COVER BY 3-SETS

**Input:** Un univers  $X$ , une collection  $C$  de triplés de  $X$

**Question:** Trouver une collection  $C' \subset C$  telle que chaque élément de  $X$  apparait exactement une fois dans les triplés de  $C'$

Algorithme 6 – VERTEX COVER

**Input:** Un graphe  $G = (V, E)$ , un entier  $k$

**Question:** Trouver  $V' \subset V$  telle que chaque arête est couverte par un sommet de  $V$  avec  $|V'| = k$

Algorithme 7 – STEINER TREE

**Input:** Un graphe  $G = (V, E)$ , une fonction de poids  $w$  sur les arêtes, un ensemble de terminaux  $X \subset V$ , un entier  $k$

**Question:** Trouver  $T \subset E$  tel que la somme des poids des arêtes de  $T$  soit au plus de  $k$ ,  $G[T]$  est connexe et  $X \subset V(G[T])$

1. Montrer que

**Solution.**

**Exercice 4 title.**

**Solution.**

**Exercice 5 title.**

**Solution.**

**Exercice 6 title.**

**Solution.**

**Exercice 7 title.**

**Solution.**

**Exercice 8 title.**

**Solution.**

### 1.3 La classe de complexité $co\mathcal{NP}$

**Exercice 9 title.**

**Solution.**

**Exercice 10 title.**

**Solution.**

**Exercice 11 title.**

**Solution.**

### 1.4 Rappels en complexité



**Exercise 12 title.**



**Solution.**

## 2 Algorithmes d'approximation

### 2.1 La classe Log-APX

Exercice 13 title.

Solution.

### 2.2 La classe APX

Exercice 14 title.

Solution.

Exercice 15 title.

Solution.

Exercice 16 title.

Solution.

Exercice 17 title.

Solution.

Exercice 18 title.

Solution.

Exercice 19 title.

Solution.

Exercice 20 title.

Solution.

Exercice 21 title.

Solution.

Exercice 22 title.

Solution.

Exercice 23 title.

Solution.

Exercice 24 title.

Solution.

Exercice 25 title.

Solution.

Exercice 26 title.

Solution.

Exercice 27 title.

Solution.

Exercice 28 title.

Solution.

Exercice 29 title.

Solution.

## 2.3 Mesure différentielle

Exercice 30 title.

Solution.

Exercice 31 title.

Solution.

Exercice 32 title.

Solution.

## 2.4 Construction d'un FPTAS

Exercice 33 title.

Solution.

Exercice 34 title.

Solution.

## 2.5 Polynomial-Time Asymptotic Scheme : PTAS

Exercice 35 title.

Solution.

Exercice 36 title.

Solution.

## 2.6 Points extrêmes

Exercice 37 title.

Solution.

Exercice 38 title.

Solution.

Exercice 39 title.

Solution.

## 2.7 FPTAS et programmation dynamique

Exercice 40 title.

Solution.

## 2.8 Schéma primal-dual





**Exercise 41 title.**



**Solution.**

### 3 Inapproximabilité ou seuil d'approximation

#### 3.1 Seuil d'approximation

Exercice 42 title.

Solution.

Exercice 43 title.

Solution.

Exercice 44 title.

Solution.

#### 3.2 Utilisation du principe Gap-réduction

Exercice 45 title.

Solution.

Exercice 46 title.

Solution.

Exercice 47 title.

Solution.

Exercice 48 title.

Solution.

Exercice 49 title.

Solution.

## 4 Méthodes exactes

### 4.1 Programmation dynamique

Exercice 50 title.

Solution.

Exercice 51 title.

Solution.

### 4.2 Arbres de branchement

Exercice 52 title.

Solution.

Exercice 53 title.

Solution.

Exercice 54 title.

Solution.

Exercice 55 title.

Solution.

## 5 Réductions divers

### 5.1 $L$ -réduction

Exercice 56 title.

Solution.

Exercice 57 title.

Solution.

## 6 Quelques problèmes d'ordonnancement

### 6.1 Ordonnancement sur un processeur

Exercice 58 title.

Solution.

### 6.2 Ordonnancement sur $m$ processeurs

Exercice 59 title.

Solution.

Exercice 60 title.

Solution.

Exercice 61 title.

Solution.

Exercice 62 title.

Solution.

## 7 Algorithmes randomisés

### 7.1 Sur le problème Maximum Satisfaisabilité

Exercice 63 title.

Solution.

### 7.2 Sur le problème Couverture d'ensembles pondérés

Exercice 64 title.

Solution.

Exercice 65 title.

Solution.

Exercice 66 title.

Solution.

Exercice 67 title.

Solution.

Exercice 68 title.

Solution.

## 8 Bornes inférieures et ETH

Exercice 69 title.

Solution.

Exercice 70 title.

Solution.

Exercice 71 title.

Solution.