HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

2 décembre 2025

Table des matières

1 Convexité : ensembles et fonctions

Exercice 1 Convexité.

1. Soit une famille (éventuellement infinie) d'inégalités linéaires $a_i^T x \le b_i, i \in I$. Soit C son ensemble de solutions. Montrer que C est convexe.
2. Montrer que la boule fermée $\mathsf{B}(a,r)$ est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit W l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de S. Montrer que W est convexe.
4. Soit C un convexe. Montrer que
$$\bigcup_{0\le\lambda\le1} \lambda C$$
est convexe.
5. Une matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times n$ est bistochastique si elle satisfait
$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall j \in \{1,\dots,n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, a_{ij} \ge 0.$$
Une matrice de permutation P est une matrice bistochastique à valeurs entières, c'est-à-dire que dans chaque ligne de P il y a un et un seul élément égal à 1, et les autres sont nuls. De même pour chaque colonne.
   (a) Montrer que pour toute matrice bistochastique A, il existe une matrice de permutation P de même dimension telle que $p_{ij} = 0$ si $a_{ij} = 0$.
   (b) Est-ce qu'une combinaison convexe de matrices de permutation est une matrice bistochastique ?
   (c) Montrer que toute matrice bistochastique A est une combinaison convexe de matrices de permutation.
   (d) Trouver la combinaison convexe pour la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0 & 0.48 \\ 0.02 & 0.15 & 0.67 & 0.16 \\ 0.46 & 0.02 & 0.16 & 0.36 \\ 0.37 & 0.46 & 0.17 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Soient maintenant C_1 et C_2 deux convexes disjoints et
$$D_1 = \bigcup_{0\le\lambda\le1} \lambda C_1, \quad i = 1,2.$$
Montrer que l'un des deux convexes $C_1 \cap D_2$ ou $C_2 \cap D_1$ est vide.

Solution. A remplir

Exercice 2 Combinaison convexe.

1. Rappeler la définition d'une combinaison convexe.
2. Est-ce que le point A de coordonnées $(1,1,1)$ est une combinaison convexe des points $(2,2,0),(0,0,3),(0,0,0)$?
3. Déterminer si le point de coordonnées $(0,7)$ est une combinaison convexe des points $(3,6),(-6,9),(2,1),(-1,1)$.
4. Déterminer graphiquement si le point de coordonnées $(1,2)$ est une combinaison convexe

des points $(1,1)$ et $(2,-1)$.

Solution.

1. Une combinaison convexe de points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ est une combinaison

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

2. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ tels que

$$\lambda_1(2,2,0) + \lambda_2(0,0,3) + \lambda_3(0,0,0) = (1,1,1).$$

Ici on voit que $(\lambda 1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.5, 1/3, 0)$ est une solution.

3. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ tels que

$$\lambda_1(3,6) + \lambda_2(-6,9) + \lambda_3(2,1) + \lambda_4(-1,1) = (0,7).$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

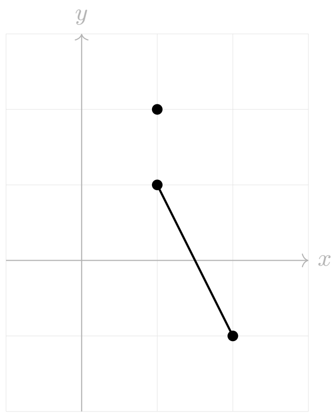
$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 6\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_1 + 9\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 7 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

En résolvant on obtient la famille de solutions :

$$\lambda_1 = \frac{t}{2} + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{5t}{16}, \quad \lambda_3 = \frac{-19t}{16}, \quad \lambda_4 = t$$

avec $t \in \mathbb{R}$. En imposant $\lambda_i \geq 0$ on trouve $t = 0$ et donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2/3, 1/3, 0, 0)$.

4. Graphiquement, on voit que le point $(1,2)$ n'est pas sur le segment entre les points $(1,1)$ et $(2,-1)$. Donc ce n'est pas une combinaison convexe :



Exercice 3 Ensembles convexe.
Montrer qu'étant donné un sous-ensemble convexe C et deux réels positifs α et β alors on a

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C.$$

Solution. Commencons par montrer l'inclusion $(\alpha + \beta)\, C \subset \alpha C + \beta C$.

Soit $x \in (\alpha+\beta)\,C$. Alors, il existe $x_0 \in C$ tel que

$$x = (\alpha+\beta)\,x_0 = \alpha x_0 + \beta x_0.$$

Donc $x \in \alpha C + \beta C$.
Montrons maintenant l'inclusion $\alpha C + \beta C \subset (\alpha+\beta)\,C$.
Soit $x \in \alpha C + \beta C$. Alors, il existe $x_1, x_2 \in C$ tels que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_2\right).$$

Exercice 4 Ensembles convexes.
Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété de **demi-somme** suivante :

$$\forall x, y \in S, \quad \frac{x+y}{2} \in S.$$

1. S est-il convexe ?
2. Même question si on suppose que S est fermé.

Solution.

1. Non. Par exemple, le sous-ensemble S suivant :

$$S = \left\{ x \in [0,1] \mid x = \sum_{i=I} \frac{1}{2^i} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

vérifie la propriété de demi-somme mais n'est pas convexe, car par exemple $\sqrt{2}/2 \in [0,1] \notin S$.

Exercice 5 Ensembles convexes.
Lesquels de ces ensembles sont convexes ?

1. $S = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 12\}$,
2. $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 3, x_1 \leq 5\}$.

Solution. A remplir

Exercice 6 Ensembles convexes.

1. Soit C un convexe. Montrer que $x \in C$ est un point extrême de C si et seulement si $C \setminus \{x\}$ est convexe.
2. A-t-on une caractérisation similaire pour une face de C ?
3. On considère dans $\mathbb{R}^n$ les deux boules suivantes :
   - $\mathsf{B}_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq 1\}$
   - $\mathsf{B}_\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 1\}$

   Quels sont les points extrêmes de B_1 et B_∞ ?

Solution.

1. Commencons par le sens direct :
   Soit $x \in C$ un point extrême de C. Montrons que $C \setminus \{x\}$ est convexe.
   Soit $y, z \in C \setminus \{x\}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$\lambda y + (1-\lambda) z \in C.$$

car C est convexe. Supposons par l'absurde que $\lambda y + (1-\lambda)z = x$. Alors x est une combinaison convexe de y et z avec $\lambda \in [0,1]$. Cela contredit le fait que x est un point extrême de C. Donc la combinaison convexe $\lambda y + (1-\lambda)z$ est dans $C \setminus \{x\}$. Donc $C \setminus \{x\}$ est convexe.

Montrons maintenant le sens réciproque :
Soit $x \in C$ tel que $C \setminus \{x\}$ est convexe. Montrons que x est un point extrême de C.
Supposons par l'absurde que x n'est pas un point extrême de C. Alors, il existe $y, z \in C$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z.$$

Comme $y, z \in C$ et x est une combinaison convexe de y et z, on a forcément $y \neq x$ et $z \neq x$. Donc $y, z \in C \setminus \{x\}$. Comme $C \setminus \{x\}$ est convexe, on a

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \in C \setminus \{x\}.$$

C'est une contradiction. Donc x est un point extrême de C.

Exercice 7 Fonction convexe.

1. Est-ce qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe ?
2. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est convexe ?
3. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes, est-ce que $\max(f_1, f_2)$ est convexe ?
4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Oui. On pose $g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x)$. Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$

2. Non. Par exemple, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$ sont convexes mais $f_1(x) f_2(x) = x^3$ n'est pas convexe.
3. Oui. On pose $g(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$. Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max\left(f_1(\lambda x + (1-\lambda)y), f_2(\lambda x + (1-\lambda)y)\right) \\ &\leq \max\left(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y), \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)\right) \\ &\leq \lambda \max(f_1(x), f_2(x)) + (1-\lambda) \max(f_1(y), f_2(y)) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$

4. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &\iff \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy - \lambda x^2 - (1-\lambda)y^2 \leq 0 \\ &\iff \lambda(1-\lambda)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}x^2 + \frac{1-\lambda}{\lambda}y^2 + 2xy - \frac{x^2}{1-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda}\right) \leq 0 \\ &\iff \lambda(1-\lambda)\left(-(x-y)^2\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Or tous les termes sont positifs sauf le dernier. Donc l'inégalité est vérifiée.

Exercice 8 Fonction convexe.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Prouver que f est convexe.
Indication : Montrer par récurrence que sur $|\geq|2$, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall p \in \{0,1,\ldots,2^n\}, \quad f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Solution. A remplir

2 Divers formulations

Exercice 9 Reformulation en programme linéaire.
Reformuler les problèmes suivants sous forme de programme linéaire.

1. $$\begin{cases} \min z = 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ |x_1+2| + |x_2| \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Soit un ensemble d'inégalités linéaires

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1,\ldots,m, a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}.$$

Formuler un modèle (uniquement des contraintes sans fonction objectif) pour lequel un point $x \in \mathbb{N}^n$ satisfait au moins k des m contraintes $(k \leq m)$ entiers de plus satisfaite

$$0 \leq x_j \leq M, \quad \forall j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Solution. A remplir

Exercice 10 Linéarisation de fonctions non linéaires. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 11. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 12 Forme standard et forme canonique.
Dans cet exercice vous devez mettre les programmes suivants sous forme standard et donner également la forme matricielle.

1. $$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

3. Réécrire le programme précédent dans le cas où la fonction objectif est la minimisation.

4.

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Solution.

1. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

2. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 + 0 \cdot x_3 - M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 80 & 60 & 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

3. La forme standard est

$$\begin{cases} \min z = -80x_1 - 60x_2 + 0 \cdot x_3 + M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \min z = \begin{pmatrix} -80 & -60 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

4. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot (x_6 + x_7 + x_8) \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & M & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 13.
Nous considérons les programmes linéaires avec des variables $x_1 \in \{0, u_j\}$. Montrer que nous pouvons nous ramener à un programme linéaire en nombres entiers. Appliquez-le au problème

suivant :

$$\begin{cases} \max z = 18x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 150 \\ x_1 \in \{0, 60\} \\ x_2 \in \{0, 30\} \\ x_3 \in \{0, 20\}. \end{cases}$$

Solution. On remplace chaque variable x_j par une variable y_j telle que $x_j = u_j y_j$ et $y_j \in \{0, 1\}$. Le programme devient

$$\begin{cases} \max z = 18 \cdot 60y_1 + 3 \cdot 30y_2 + 9 \cdot 20y_3 \\ 2 \cdot 60y_1 + 30y_2 + 7 \cdot 20y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Cela revient à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \max z = 1080y_1 + 90y_2 + 180y_3 \\ 120y_1 + 30y_2 + 140y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Exercice 14 Points extrêmes.
On considère le polyèdre S de $\mathbb{R}^3$ défini par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

1. Le point $x* = (1, 1, 1, 1, 0)$ est-il un point extrême ? Pourquoi ?
2. Les points suivants sont-ils des points extrêmes ? Dégénérés ?
   - $x_1 = (0, -1, 2, 4, 0)$,
   - $x_2 = (0.5, 0, 1.5, 2.5, 0)$,
   - $x_3 = (2, 3, 0, -2, 0)$,
   - $x_4 = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$.

Solution.

1. On commence par vérifier que $x*$ respecte les contraintes :
   On constate qu'il vérifie bien les contraintes, mais on sait qu'il n'y a que 3 variables en base. Or, $x*$ en a 4 de non nulles. Donc, $x*$ n'est pas un point extrême.
2. On commence par vérifier que les points respectent les contraintes :
   - x_1 ne respecte pas les contraintes car $x_2 < 0$.
   - x_2 respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc, x_2 est un point extrême non dégénéré.
   - x_3 ne respecte pas les contraintes car $x_4 < 0$.
   - x_4 respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc, x_4 est un point extrême non dégénéré.

   On rappelle qu'un point est dégénéré s'il a plus de m variables nulles où m est le nombre de variables originelles.

Exercice 15 Points extrêmes et solutions.

Soit le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2,3,6 \\ -1,0,0 \\ 0,-1,0 \\ 0,0,-1 \end{pmatrix}, \quad b = \big(6,1,0,0\big).$$

On supposera que le polyèdre est borné.

Solution. Pour trouver les points extrêmes, on cherche à résoudre tous les arrangements possibles de 3 contraintes parmi les 4. On énumère les lignes qu'on choisit comme contraintes comme suit et on les résout dans l'ordre :

$$(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4).$$

- Pour (1,2,3), on résout :

  $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 = 1 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

  et on trouve $x_1 = (-1, 0, \frac{4}{3})$.
- Pour (1,2,4), on trouve $x_2 = (-1, \frac{8}{3}, 0)$,
- Pour (1,3,4), on trouve $x_3 = (3,0,0)$,
- Pour (2,3,4), on trouve $x_4 = (-1,0,0)$.

Les points extrêmes sont donc x_1, x_2, x_3 et x_4. Si on rajoute la contrainte $x_i \geq 0$, on a seulement x_3 qui reste.

Exercice 16 Points extrêmes.
Soit C le polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^2$ décrit à l'aide des inégalités suivantes :

$$\mathcal{P}_y = \begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

1. Ecrire C sous la forme standard.
2. Quels sont les points extrêmes de C ?

Solution.

1. On introduit les variables d'écart x_3, x_4, x_5 pour obtenir la forme standard :

   $$\begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,5. \end{cases}$$

2. On écrit le problème matriciellement :

   $$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On choisit ensuite 3 contraintes parmi les 5 et on résout les systèmes linéaires associés :

- Pour (3,4,5), on trouve $x_1 = (0,0,4,2,3)$,
- Pour (1,2,3), on trouve $x_2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, 0, 0)$,

et ainsi de suite.

Exercice 17. Soient : $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ et $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : Ax - y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$.

1. Montrer que si x est un point extreme de P, alors $x, Ax - b$ est un point extrême de Q.
2. Montrer que si (x,y) est un point extrême de Q, alors x est un point extrême de P.

Solution.

1. Supposons que x est un point extrême de P. Montrons que $(x, Ax-b)$ est un point extrême de Q.
   Si $(x, Ax-b)$ n'est pas un point extrême de Q, alors il existe $x_1, x_2 \in Q$ tels que
   $$(x, Ax-b) = \frac{x_1, y_1 + x_2, y_2}{2}$$
   De plus
   $$\begin{cases} Ax_1 - y_1 = b \implies & Ax_1 \geq b \\ Ax_2 - y_2 = b \implies & Ax_2 \geq b \end{cases}$$
   Donc $x_1, x_2 \in P$ et donc $x = \frac{x_1+x_2}{2} \in P$. Cela contredit le fait que x est un point extrême de P. Donc $(x, Ax-b)$ est un point extrême de Q.
2. Supposons que x n'est pas un point extreme de P. Alors il existe $x_1, x_2 \in P$ tels que $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Alors
   $$\begin{aligned} y &= Ax - b \\ &= A\frac{x_1}{2} + A\frac{x_2}{2} - b \\ &= A\frac{x_1}{2} + A\frac{x_2}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{2}(Ax_1 - b) + \frac{1}{2}(Ax_2 - b) \\ &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$
   d'où
   $$(x,y) = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2)$$
   et donc (x,y) n'est pas un point extrême de Q.

Exercice 18. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 19. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 20. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 21. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 22. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 23. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 24. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 25. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 26. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 27. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 28. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 29 La méthode du simplexe n'est pas une méthode polynomiale.
Dans cet exercice nous allons montrer que la méthode du simplexe n'est pas une méthode polynomiale. Pour cela, nous allons considérer le programme linéaire suivant :

$$(PL_n) = \begin{cases} \max z = 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n \\ x_1 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\ \dots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + \dots + 4x_{n-1} + x_n \leq 5^n \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

1. Donner la forme standard de (PL_n).
2. Donner la solution optimale.
3. Montrer que $\forall i, x_i$ et y_i (où y_i est la variable d'écart associée à la i-ième variable) ne peuvent être en même temps des variables hors base.
4. Nous allons montrer que 2^n tableaux sont nécessaires pour résoudre ce problème.

- Vérifez-le pour $n = 1$.
- Montrez-le pour $n = 2$.
  — Résoudre graphiquement.
  — Résoudre par la méthode des tableaux. Combien de tableaux sont nécessaires pour résoudre (PL_2).
  — Quel est le chemin des visites des points extrêmes. Montrez que le dernier tableau peut se mettre sous la forme (voir le tableau 2).

$$2cx + x_n \leq 5^n$$

  où
$$l \in \{1, \dots, n-1\}, \quad c = (2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2),$$
  et A est la matrice associé au $n-1$ premières contraintes.
- Supposons par hypothèse de récurrence que la résolution du programme linéaire PL_n nécessite 2^n tableaux. Nous allons montrer que la résolution du programme linéaire PL_{n+1} nécessite 2^{n+1} tableaux.
  —

Solution.

1. On réécrit les équations avec les n variables d'écart y_i :

$$\begin{cases} \max z = 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n + 0 \cdot y_1 + \cdots + 0 \cdot y_n \\ x_1 + y_1 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + y_2 = 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 + y_3 = 125 \\ \vdots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + \cdots + 4x_{n-1} + x_n + y_n = 5^n \\ x_i, y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

2. Pour $n = 1$, la solution optimale est $x_1 = 5$.
   Pour $n = 2$, la solution optimale est $(0, 25)$. On peut vérifier avec le tableau du simplexe qui suit :

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
0	$x_1^1 = y_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^1 = y_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0

   ensuite

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
2	$x_1^2 = x_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^2 = y_2$	5	0	1	-4	1
	$z(x)$	10	0	-1	2	0

   ensuite

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
2	$x_1^3 = x_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^3 = x_2$	5	0	1	-4	1
	$z(x)$	10	0	0	-2	1

et enfin

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
0	$x_1^4 = y_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^4 = x_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	25	2	0	0	1

ce qui confirme que la solution optimale est $(0, 25)$.

3. On ecrit les deux lignes du tableau et on regarde ce qui se passe en x_i et y_i :

$$2^{i-1}x_1 + 2^{i-2}x_2 + \cdots + 4x_{i-2} + x_{i-1} + y_{i-1} = 5^{i-1}$$
$$2^i x_1 + 2^{i-1}x_2 + \cdots + 4x_{i-1} + x_i + y_i = 5^i$$

Si $y_i = 0$, alors dans l'équation du haut on a

$$4x_{i-1} = 5^{i-1} - 2^{i-1}x_1 - 2^{i-2}x_2 - \cdots - x_{i-2} \geq 0$$

mais dans celle du bas on a

$$4x_{i-1} = 4 \cdot 5^{i-1} - 2^i x_1 - 2^{i-1}x_2 - \cdots - x_i > 0$$

Si on fait cela aussi avec $x_i = 0$, on trouve que $x_i = y_i = 0$ est impossible.

4. On a

   (a)

Exercice 30. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 31. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 32. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 33 Détermination du dual. Déterminer le dual des programmes suivants :

1.

$$(PL_0) = \begin{cases} \min z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2.

$$(PL_1) = \begin{cases} \max z(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Solution. On a

1. Le dual du programme (PL_0) est

$$\begin{cases} \max 20y_1 + 30y_2 + 40y_3 + 50y_4 \\ 2y_1 + 6y_2 + 7y_3 + y_4 \le 5 \\ 3y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 \le 2 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 4y_4 \le 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0. \end{cases}$$

2. Le dual du programme (PL_1) est

$$\begin{cases} \min 10y_1 + 6y_2 + 8y_3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Pour ce qui est de leur résolution, on a :

1.
2. On a

		c	2	1	0	0	0
c^J	variables de base		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	$x_1^1 = x_3$	10	1	5	1	0	0
0	$x_2^1 = x_4$	6	1	3	0	1	0
0	$x_3^1 = x_5$	8	2	2	0	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0	0

$$\downarrow$$

		c	2	1	0	0	0
c^J	variables de base		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	$x_1^2 = x_3$	6	0	4	1	0	$-\frac{1}{2}$
0	$x_2^2 = x_4$	2	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$
2	$x_3^2 = x_1$	4	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$
	$z(x)$	8	0	1	0	0	1

Comme x_3, x_4 sont en bases, leurs variables duales associées valent 0. Pour x_5, on prend la valeur associée donc 1. Cela donne :

$$(x_3, x_4, x_5) = (0,0,1) \implies (y_1, y_2, y_3) = (0,0,1).$$

Exercice 34.

Solution. On peut extraire des tableaux les problèmes suivants :

$$PL_4 = \begin{cases} \min(z) = 25y_1 + 30y_2 \\ 4y_1 + 7y_2 = 1 \\ 8y_1 + 5y_2 = 3 \\ 6y_1 + 9y_2 = -1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} \max(z) = 7y_1 + 30y_2 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1 + 3y_2 \geq 1 \\ -y_1 \geq 0 \\ -y_2 \geq 0 \\ y_1 \geq M \\ y_2 \geq M \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 35 Contraintes serrées et solutions. On considère

$$P = \begin{cases} \max z & = 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 & \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 & \leq 6 \\ x_1 - x_2 & \leq 2 \\ x_1, x_2 & \geq 0. \end{cases} \quad , \quad D = \begin{cases} \min z = 8u_1 + 6u_2 + 2u_3 & \\ u_1 - 2u_2 + u_3 & \geq 6 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 & \geq 5 \\ u_i & \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

En supposant que la solution optimale du primal est $x = (5, 3)$, donner la solution du dual. Quelles sont les contraintes serrées pour le primal et le dual.

Solution. Supposons que la solution optimale du primal est $x = (5, 3)$. Les contraintes donnent alors :

$$\begin{aligned} 5 + 3 \leq 8 &\iff 8 \leq 8 \\ -2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \leq 6 &\iff -1 \leq 6 \\ 5 - 3 \leq 2 &\iff 2 \leq 2 \end{aligned}$$

Les contraintes 1 et 3 sont serrées, la contrainte 2 ne l'est pas. Donc on sait que

$$u_1 > 0,\ u_2 = 0,\ u_3 > 0.$$

En rentrant cela dans le dual on obtient :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 \geq 6 \\ u_1 - u_3 \geq 5 \end{cases}$$

Alors, la solution optimale est $(u_1 = \frac{11}{2}, u_2 = 0, u_3 = \frac{1}{2})$.

CC1

Exercice 1 Points extrêmes.
Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b, x \geq 0\}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Combien y a-t-il de points extrêmes ? Lister les points extrêmes et préciser si les points extrêmes sont des points dégénérés.

Solution. Le polygone P est défini par les contraintes :

$$\begin{array}{ll} (1) & x_1 + x_2 \leq 3 \\ (2) & x_1 - x_2 \leq 0 \\ (3) & x_1 \qquad \geq 0 \\ (4) & x_2 \qquad \geq 0 \end{array}$$

Graphiquement, cela donne :

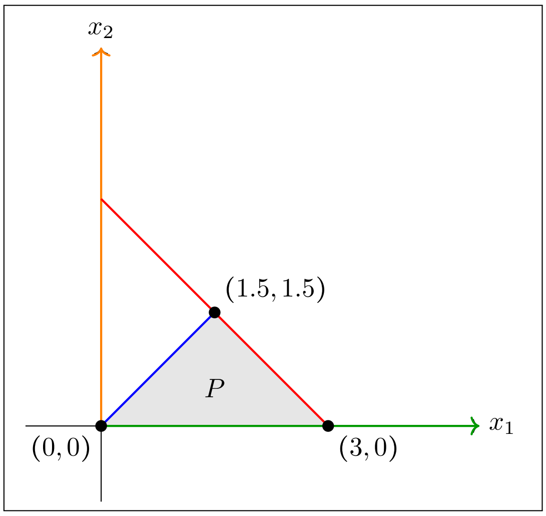


FIGURE 1 – Représentation graphique des contraintes sur P

Les points extrêmes de P sont donc :

- $(0, 0)$
- $(1.5, 1.5)$
- $(3, 0)$

On voit alors clairement que

- le point $(0, 0)$ est dégénéré car trois contraintes sont actives en ce point, les contraintes (2), (3) et (4).
- le point $(1.5, 1.5)$ n'est pas dégénéré car seules les contraintes (1) et (2) sont actives en ce point.
- le point $(3, 0)$ n'est pas dégénéré car seules les contraintes (1) et (3) sont actives en ce point.

Exercice 2 Ensembles et fonctions convexes.

1. Soit $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\right\}$. Montrer que S est un ensemble convexe.

2. Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$. On pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx_1 + (1-s)x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$. Montrer que C est convexe.
3. Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$. On pose $C = C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$. Montrer que C est convexe.
4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes avec g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Solution.

1. Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S$ et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que le point $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2, z_2)$ appartient à S :

$$\begin{aligned} z &= \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \\ &\geq \lambda(x_1^2 + y_1^2) + (1-\lambda)(x_2^2 + y_2^2) \quad (\text{car } z_1 \geq x_1^2 + y_1^2 \text{ et } z_2 \geq x_2^2 + y_2^2) \\ &= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 + \lambda y_1^2 + (1-\lambda) y_2^2 \\ &\geq (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)^2 \quad (\text{par l'inégalité (I)}) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

où $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ et $y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$.
On prouve en plus grand détail l'inégalité utilisée ci-dessus :

Preuve de l'inégalité (I)

Pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tous réels a, b, on a :

$$\lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 \geq (\lambda a + (1-\lambda)b)^2. \tag{I}$$

On a

$$\begin{aligned} &\lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 - (\lambda a + (1-\lambda)b)^2 \\ &= \lambda a^2 + (1-\lambda)b^2 - \left[\lambda^2 a^2 + 2\lambda(1-\lambda)ab + (1-\lambda)^2 b^2\right] \\ &= \left(\lambda - \lambda^2\right)a^2 + \left((1-\lambda) - (1-\lambda)^2\right)b^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab \\ &= \lambda(1-\lambda)a^2 + \lambda(1-\lambda)b^2 - 2\lambda(1-\lambda)ab \\ &= \lambda(1-\lambda)\left(a^2 + b^2 - 2ab\right) \\ &= \lambda(1-\lambda)(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que $\lambda(1-\lambda) \geq 0$ pour $\lambda \in [0,1]$, et que $(a-b)^2 \geq 0$.
Ainsi, (I) est vérifiée. En l'appliquant à $a = x_1, b = x_2$ puis à $a = y_1, b = y_2$, on obtient les inégalités nécessaires pour conclure que S est convexe.

2. Soient $x, y \in C$. Par définition de C, il existe $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$ tels que

$$\begin{aligned} x &= sx_1 + (1-s)x_2, \\ y &= sy_1 + (1-s)y_2. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda\big(sx_1 + (1-s)x_2\big) + (1-\lambda)\big(sy_1 + (1-s)y_2\big)\\ &= \lambda s x_1 + \lambda(1-s)x_2 + (1-\lambda)sy_1 + (1-\lambda)(1-s)y_2\\ &= s\big(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1}_{=x_0\in C_1}\big) + (1-s)\big(\underbrace{\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2}_{=y_0\in C_2}\big)\\ &= sx_0 + (1-s)y_0 \in C.\end{aligned}$$

Ainsi, C est convexe.

3. Soient $x, y \in C$. Par définition de C, il existe $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$ tels que

$$\begin{aligned}x &= x_1 + x_2,\\ y &= y_1 + y_2.\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2)\\ &= \lambda x_1 + \lambda x_2 + (1-\lambda)y_1 + (1-\lambda)y_2\\ &= \big(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1}_{=x_0\in C_1}\big) + \big(\underbrace{\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2}_{=y_0\in C_2}\big)\\ &= x_0 + y_0 \in C.\end{aligned}$$

Ainsi, C est convexe.

4. On rappelle que si f est convexe, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Visuellement, la courbe de f est en dessous de la corde reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}g \circ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &= g\big(f(\lambda x + (1-\lambda)y)\big)\\ &\leq g\big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big) \quad \text{(car } f \text{ est convexe)}\\ &\leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)) \quad \text{(car } g \text{ est convexe et croissante)}\\ &\leq \lambda(g\circ f)(x) + (1-\lambda)(g\circ f)(y).\end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f$ est convexe.

Exercice 3 Modélisation de contraintes. Soient $P_1, \ldots, P_n$ des propositions logiques, chécune étant vraie ou fausse. En introduisant des variables binaires, représenter les relations suivantes par des contraintes linéaires :

1. La proposition P_1 est vraie.
2. Toutes les propositions sont vraies.
3. Au moins k propositions sont vraies.
4. Si P_1 est vraie, alors P_2 est vraie.
5. Les propositions P_1 et P_2 sont équivalentes.
6. Si P_1 ou P_2 est vraie, alors au plus deux des propositions $P_3, \ldots, P_n$ sont vraies.

On pose $x_i = 1$ si P_i est vraie, $x_i = 0$ sinon.

Solution.

1. $x_1 = 1$.
2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$.
3. $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$.
4. $x_1 \leq x_2$ ou encore $x_1 - x_2 \leq 0$.
5. $x_1 = x_2$ ou $x_1 - x_2 = 0$.
6. On peut utiliser une des deux formulations suivantes :
   - On introduit une variable binaire y qui vaut 1 si P_1 ou P_2 est vraie, 0 sinon. On peut l'écrire comme suit :
     $$y \geq x_1, \quad y \geq x_2, \quad y \leq x_1 + x_2.$$
     La contrainte demandée s'écrit alors :
     $$\sum_{i=3}^{n} x_i \leq 2 + (n-2)(1-y).$$
     Si $y = 1$, alors la contrainte devient $\sum_{i=3}^{n} x_i \leq 2$. Si $y = 0$, la contrainte devient $\sum_{i=3}^{n} x_i \leq n$, qui est toujours vérifiée.
   - On peut aussi écrire directement la contrainte :
     $$\sum_{i=3}^{n} x_i \leq 2 + (n-2)(1-x_1)(1-x_2).$$
     Si $x_1 = 1$ ou $x_2 = 1$, alors $(1-x_1)(1-x_2) = 0$ et la contrainte devient $\sum_{i=3}^{n} x_i \leq 2$. Si $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, alors $(1-x_1)(1-x_2) = 1$ et la contrainte devient $\sum_{i=3}^{n} x_i \leq n$, qui est toujours vérifiée.

Exercice 4 Résolution. Soit le programme linéaire $\mathcal{P}_0$ suivant :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{cases} \max z(x) 35x_1 + 50x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 120 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le problème $\mathcal{P}_0$. Donner les tableaux et les bases associées.
2. Donner le dual de $\mathcal{P}_0$.
3. Donner la solution du dual à partir du tableau final du primal.
4. Vérifier les écarts complémentaires.
5. `Modification du vecteur` b : le vecteur b devient $b' = (75, 15, 50)$.
   (a) Que devient la solution optimale de $\mathcal{P}_0$?
   (b) Proposer deux méthodes pour résoudre ce nouveau problème, sans tenter de résoudre le dit problème.

Solution. On commence par remarquer que la première contrainte est inutile, elle est toujours vérifiée si la troisième contrainte est vérifiée. On peut donc réécrire le problème $\mathcal{P}_0$ comme suit :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{cases} \max z(x) = 35x_1 + 50x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit les variables d'écart x_3 et x_4 pour transformer les inégalités en égalités :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{cases} \max z(x) = 35x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1. On peut maintenant écrire le tableau initial :

		c	35	50	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^1 = x_3$	20	1	1	1	0
0	$x_2^1 = x_4$	40	2	3	0	1
	$z(x)$	0	-35	-50	0	0

On voit que c'est x_2 qui entre dans la base. On calcule les rapports :

$$\frac{20}{1} = 20, \qquad \frac{40}{3} < 20.$$

Donc x_4 sort de la base. On effectue le pivot :

		c	35	50	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
0	$x_1^2 = x_3$	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$
50	$x_2^2 = x_2$	$\frac{40}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$
	$z(x)$	$\frac{2000}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$

On voit que x_1 entre dans la base. On calcule les rapports :

$$\frac{20/3}{1/3} = 20, \qquad \frac{40/3}{2/3} = 20.$$

On peut choisir de faire sortir x_3 de la base. On effectue le pivot :

		c	35	50	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4
35	$x_1^3 = x_1$	20	1	0	3	-1
50	$x_2^3 = x_2$	0	0	1	-2	1
	$z(x)$	700	0	0	5	15

Tous les coefficients de la ligne $z(x)$ sont positifs ou nuls, donc la solution optimale est atteinte.
La solution optimale est donc $x^* = (20, 0)$ avec $z(x^*) = 700$.

2. Le dual de $\mathcal{P}_0$ est :

$$\mathcal{D}_0 = \begin{cases} \min z(y) = 20y_1 + 40y_2 \\ y_1 + 2y_2 \geq 35 \\ y_1 + 3y_2 \geq 50 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. À partir du tableau final du primal, on lit directement la solution du dual :

$$y^* = (5, 15)$$

avec $z(y^*) = 20 \times 5 + 40 \times 15 = 700$.
La valeur optimale du primal et du dual coïncident, comme attendu et la solution optimale du dual vérifie bien les contraintes :

$$\begin{cases} 5 + 2 \times 15 = 35 \geq 35 \\ 5 + 3 \times 15 = 50 \geq 50 \end{cases}$$

On note que les deux contraintes sont serrées.

4. On vérifie les écarts complémentaires :
5. En modifiant le vecteur b en $b' = (75, 15, 50)$, on modifie les constantes des contraintes :

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 75 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \end{cases}$$

C'est alors la troisième contrainte qui devient inutile, elle est toujours vérifiée si la première contrainte est vérifiée. Le nouveau problème devient :

$$\mathcal{P}_1 = \begin{cases} \max z(x) = 35x_1 + 50x_2 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 75 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) La solution optimale du problème change car les coefficients changés correspondent à des contraintes serrées à l'optimum.

(b) Deux méthodes sont possibles :
- Recommencer la méthode du simplexe à partir du tableau initial du nouveau problème $\mathcal{P}_1$.
- Utiliser la solution optimale du dual du problème initial comme point de départ pour résoudre le dual du nouveau problème à condition de vérifier que cette solution est faisable pour le nouveau dual.

Exercice 5 Farkas. Est-ce que les systèmes suivants admettent une solution ?

1. On résoud $Ax \leq b, x \geq 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. On résoud $Ax \leq b, x \geq 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3. On résoud $Ax = b, x \geq 0$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. Le système revient à résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

   Il admet la solution $x = (0, 0)$.

2. Le système revient à résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 \leq 4 \\ 3x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_3 \leq 6 \end{cases}$$

   Il admet la solution $x = (0, 0, 0)$.

3. Le système revient à résoudre :

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

   En éliminant x_1 à partir de la seconde équation, on obtient

$$x_1 = -1 + x_2 - 2x_3.$$

   Substituant dans la première équation on obtient

$$x_2 + 4x_3 = -1,$$

   donc $x_2 = -1 - 4x_3$ et $x_1 = -2 - 6x_3$. On a donc $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$ pour tout $x_3 \geq 0$. Ainsi il n'existe pas de $x \geq 0$ tel que $Ax = b$.