HAI713I — TDs

Ivan Lejeune

21 novembre 2025

Table des matières

1 TD1

Exercice 1.1 Manipuler les définitions.

1. Rappelez ce qu'est une fonction calculable. Montrez que les fonctions suivantes sont calculables :
   - $f : x \mapsto 2x$,
   - $g : \langle x, y \rangle \mapsto x + y$,
   - $\lightning$, la fonction définie nulle part.
2. Rappelez ce qu'est un ensemble récursif. Montrez que les ensembles suivants sont récursifs :
   - l'ensemble de tous les entiers,
   - l'ensemble vide,
   - l'ensemble des nombres pairs.
3. Montrez que si E est un ensemble récursif, alors son complémentaire $\overline{E}$ l'est aussi.
4. Rappelez ce qu'est un ensemble énumérable. Ecrivez un programme qui converge si et seulement si son entrée est paire. En déduire que l'ensemble des nombres pairs est énumérable.
5. Montrez que si E est un ensemble récursif, alors E et $\overline{E}$ sont énumérables.

Solution.

1. Une fonction est **calculable** si il existe un programme qui la calcule. Alors,
   - f est calculable car il peut être défini par le programme suivant :

     $$x \mapsto \text{return } 2 \times x.$$

   - g est calculable pour la même raison :

     $$z \mapsto \text{return } \pi_1(z) + \pi_2(z).$$

   - De même pour $\lightning$:

     $$\begin{array}{l} x \mapsto \text{while } x = x \text{ do} \\ \qquad x \leftarrow x \\ \text{end while} \\ \text{return } 0. \end{array}$$

2. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est **décidable** (ou récursif) si sa fonction caractéristique χ_A est calculable. Alors,
   - L'ensemble de tous les entiers est récursif car sa fonction caractéristique peut être définie par le programme suivant :

     $$x \mapsto \text{return } 1$$

   - L'ensemble vide est récursif car sa fonction caractéristique peut être définie comme suit :

     $$x \mapsto \text{return } 0$$

- L'ensemble des nombres pairs est récursif pour la même raison :

$$x \mapsto \text{if } x \bmod 2 == 0 \text{ then}$$
$$\quad \text{return } 1$$
$$\text{else}$$
$$\quad \text{return } 0$$
$$\text{end if}$$

3. Il suffit d'inverser les valeurs de la fonction caractéristique de E pour obtenir celle de $\overline{E}$ (qui est donc aussi calculable).
4. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ est **énumérable** si il est le domaine d'une fonction calculable. On définit la fonction suivante :

$$x \mapsto \text{if } x \bmod 2 == 0 \text{ then}$$
$$\quad \text{return } 0$$
$$\text{else}$$
$$\quad \text{ll } (x)$$
$$\text{end if}$$

   qui converge si et seulement si son entrée est paire. Donc l'ensemble des nombres pairs est énumérable.
5. Si E est récursif, alors sa fonction caractéristique χ_E est calculable. Donc on peut définir deux programmes :

$$x \mapsto \text{if } \chi_E(x) == 1 \text{ then}$$
$$\quad \text{return } 0$$
$$\text{else}$$
$$\quad \text{ll } (x)$$
$$\text{end if}$$

   et

$$x \mapsto \text{if } \chi_E(x) == 0 \text{ then}$$
$$\quad \text{return } 0$$
$$\text{else}$$
$$\quad \text{ll } (x)$$
$$\text{end if}$$

   qui convergent respectivement si et seulement si $x \in E$ et $x \in \overline{E}$.

Exercice 1.2 Propriétés de cloture des ensembles récursifs. Nous prouvons dans cet exercice que la classe des ensembles récursifs est close par union, intersection, produit cartésien et complémentaire. La situation est un peu différente pour les ensembles énumérables. Soient A et B deux ensembles récursifs.

1. Montrer que $A \cup B$ est récursif.
2. Montrer que $A \cap B$ est récursif.
3. Montrer que $A \times B = \{\langle x, y\rangle, x \in A \wedge y \in B\}$ est récursif.
4. Montrer que $\overline{A}$ est récursif (c.f. exercice 1).
5. Montrer que $A \setminus B$ est récursif.

Solution.

1. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} x \mapsto & \text{ if } \chi_A(x) == 1 \text{ or } \chi_B(x) == 1 \text{ then} \\ & \quad \text{return } 1 \\ & \text{else} \\ & \quad \text{return } 0 \\ & \text{end if} \end{aligned}$$

2. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} x \mapsto & \text{ if } \chi_A(x) == 1 \text{ and } \chi_B(x) == 1 \text{ then} \\ & \quad \text{return } 1 \\ & \text{else} \\ & \quad \text{return } 0 \\ & \text{end if} \end{aligned}$$

3. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} z \mapsto & \text{ if } \chi_A(\pi_1(z)) == 1 \text{ and } \chi_B(\pi_2(z)) == 1 \text{ then} \\ & \quad \text{return } 1 \\ & \text{else} \\ & \quad \text{return } 0 \\ & \text{end if} \end{aligned}$$

4. Voir exercice 1.1.
5. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} x \mapsto & \text{ if } \chi_A(x) == 1 \text{ and } \chi_B(x) == 0 \text{ then} \\ & \quad \text{return } 1 \\ & \text{else} \\ & \quad \text{return } 0 \\ & \text{end if} \end{aligned}$$

Exercice 1.3 Step, convergence, projections et énumération. Considérons le programme suivant (remarquez qu'il s'appelle a et son entrée s'appelle y) :

$$\begin{aligned} \text{a} : y \mapsto & \ z \leftarrow 0 \\ & \text{while step}\langle y, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle == 0 \text{ do} \\ & \quad z \leftarrow z + 1 \\ & \text{end while} \\ & \text{return } 17 \end{aligned}$$

1. Soit b un programme qui s'arrete sur au moins une entrée. Que vaut $[a \mid b]$?
2. Que vaut $[a \mid b]$ si b est un programme qui ne s'arrête jamais ?
3. Montrez que l'ensemble des programmes qui s'arrêtent sur au moins une entrée est énumérable.

Solution.

1. On note c une entrée telle que $[b \mid c]\downarrow$ (elle existe par hypothèse).
   Alors, il existe t tel que
   $$\mathrm{Step}\langle b, c, t\rangle = 1$$
   Donc, pour $z = \langle c, t\rangle$, on a $[a \mid z]\downarrow$. Donc $[a \mid b]\downarrow$ et vaut 17.
2. Le programme a ne s'arrête jamais, donc $[a \mid b]\uparrow$.
3. Le programme a correspond exactement au programme dont le domaine est l'ensemble des programmes qui s'arrêtent sur au moins une entrée. Donc cet ensemble est énumérable.

Exercice 1.4 Ensembles énumérables. On veut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) E est **énumérable** (rappel de la définition) si
$$\exists a, E = W_a = \{x, [a \mid x]\downarrow\}$$

(ii) E admet une **fonction d'énumération** calculable :
$$\exists b, E = \mathrm{Im}[b \mid \cdot] = \{x, \exists y, [b \mid y] = x\}$$

(iii) E est vide ou admet une **fonction d'énumération totale** calculable :
$$E = \varnothing \text{ ou } \exists c, E = \mathrm{Im}[c \mid \cdot] = \{x, \exists y, [c \mid y] = x\}$$

- Montrer que (i) ⇒ (iii).
- Montrer que (iii) ⇒ (ii).
- Montrer que (ii) ⇒ (i).

Solution.

- (i) ⇒ (iii) : Si $E = \varnothing$, c'est trivial. Sinon, E contient au moins un élément qu'on note a_0. On utilise le programme suivant :
  $$\begin{aligned}\text{enum} : z \mapsto\ &\text{if } \mathrm{step}\langle a, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle == 0 \text{ then}\\ &\quad \text{return } \pi_1(z)\\ &\text{else}\\ &\quad \text{return } a_0\\ &\text{end if}\end{aligned}$$
  qui est total et énumère E.
- (iii) ⇒ (ii) : C'est trivial car une fonction totale est aussi une fonction partielle.
- (ii) ⇒ (i) : C'est la définition même d'un ensemble énumérable.

Exercice 1.5 Ensembles énumérables — mieux comprendre.

1. Montrez qui si E est un ensemble énumérable *infini* alors il admet une fonction d'énumération totale bijective.
2. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération croissante.
3. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération strictement croissante.

Solution. A compléter

2 TD2

Exercice 2.1 Ensembles énumérables. On veut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) E est **énumérable** (rappel de la définition) si

$$\exists a, E = W_a = \{x, [a \mid x] \downarrow\}$$

(ii) E admet une **fonction d'énumération** calculable :

$$\exists b, E = \mathrm{Im}[b \mid \cdot] = \{x, \exists y, [b \mid y] = x\}$$

(iii) E est vide ou admet une **fonction d'énumération totale** calculable :

$$E = \varnothing \text{ ou } \exists c, E = \mathrm{Im}[c \mid \cdot] = \{x, \exists y, [c \mid y] = x\}$$

- Montrer que (i) ⇒ (iii).
- Montrer que (iii) ⇒ (ii).
- Montrer que (ii) ⇒ (i).

Solution.

- (i) ⇒ (iii) : Si E est vide, la propriété est vérifiée. Sinon, $\exists \alpha \in E$. On définit le programme suivant :

$$\begin{aligned} b \ : \ z \mapsto & \text{ if } \mathrm{Step}\langle a, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle \neq 0 \text{ then} \\ & \quad \text{return } \pi_1(z) \\ & \text{else} \\ & \quad \text{return } \alpha \\ & \text{end if} \end{aligned}$$

  Montrons que $\mathrm{Im}[b \mid \cdot] = E$. Si $e \in E$ alors $\exists t$ tel que $\mathrm{Step}\langle a, e, t\rangle \neq 0$. Donc $[b \mid \langle e, t\rangle] = e$ pour tout $e \in E$, d'où $E = \mathrm{Im}[b \mid \cdot]$.
- (iii) ⇒ (ii) : Si E est vide, b qui diverge partout convient. Sinon, il existe une fonction d'énumération totale c de E calculable et donc une fonction d'énumération $b = c$ de E calculable.
- (ii) ⇒ (i) : Soit b une fonction d'énumération de E calculable. On définit le programme suivant :

$$\begin{aligned} a \ : \ x \mapsto & \ z \leftarrow 0 \\ & \text{while } \mathrm{Step}\langle b, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle \neq x + 1 \text{ do} \\ & \quad z \leftarrow z + 1 \\ & \text{end while} \\ & \text{return } 34 \end{aligned}$$

  Ce programme s'arrête sur x si et seulement si $x \in E$. Donc $E = W_a$.

Exercice 2.2 Ensembles énumérables — mieux comprendre.

1. Montrez que si E est un ensemble énumérable *infini* alors il admet une fonction d'énumération totale bijective.
2. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération croissante.
3. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération strictement croissante.

Solution.

1. On crée le programme suivant :

$$
\begin{aligned}
b \ : \ n \mapsto\ & J \leftarrow \varnothing \\
& k \leftarrow 0 \\
& \text{While } |J| \leq n \text{ do} \\
& \quad J \leftarrow J \cup \{[b \mid k]\} \\
& \quad k \leftarrow k + 1 \\
& \text{end while} \\
& \text{Return } [b \mid k]
\end{aligned}
$$

   Ce programme s'arrête toujours car E est infini et il rend tous les éléments de E sans répétition.

2. On écrit le programme suivant pour montrer le sens indirect :

$$
\begin{aligned}
d \ : \ x \mapsto\ & z \leftarrow 0 \\
& \text{while } [b \mid z] < x \text{ do} \\
& \quad z \leftarrow z + 1 \\
& \text{end while} \\
& \text{if } [b \mid z] = x \text{ then return 1 else return 0 end if}
\end{aligned}
$$

Exercice 2.3 Enumeration des fonctions totales. Nous allons montrer dans cet exercice qu'il n'est pas possible d'avoir un système de programmation « raisonnable » où les programmes s'arrêtent toujours. Supposons que ce système existe et notons $[x \mid y]'$ le résultat du calcul du x-ième programme sur l'entrée y.

1. On suppose que dans un de nos programmes on peut en appeler un autre et que la fonction successeur soit calculable. Montrez que $g : x \mapsto [x|x]' + 1$ est calculable dans ce système. On notera n son numéro : $[n \mid \cdot]' = g(\cdot)$.
2. Que vaut $g(n)$? En déduire qu'un tel système n'existe pas.

Solution.

Exercice 2.4 Ensembles énumérables — clôture. Nous prouvons dans cet exercice que la classe des ensembles énumérables est bien close par union, intersection et produit cartésien. Soient A et B deux ensembles énumérables.

1. Montrez que $A \cup B$ est énumérable.
2. Montrez que $A \cap B$ est énumérable.
3. Montrez que $A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in B\}$ est énumérable.

Solution.

3 TD3

Exercice 3.1 Reductions. Soit $A = \{x, \forall y, [x \mid y] \downarrow\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
2. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ (où A est le complémentaire de A).
4. Montrez que ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Solution.

1. On pose $A = P_{\mathscr{C}}$ pour $\mathscr{C} = \{f, \mathsf{Dom}(f) = \mathbb{N}\}$. En d'autres termes c'est l'ensemble des fonctions totales où qui sont définies partout. Alors

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{C}} &= \{x, [x \mid \cdot] \in \mathscr{C}\} \\ &= \{x, \forall y, [x \mid y] \downarrow\} \end{aligned}$$

   De plus, A n'est pas trivial car :

   - le programme suivant est dans A :

$$a : x \mapsto \text{return } 42$$

   - et celui ci ne l'est pas :

$$b : x \mapsto \text{while true } x \leftarrow x + 1.$$

   Donc, d'après le théorème de Rice, A est indécidable et donc non récursif.

2. On pose

$$c : \langle x, y\rangle \mapsto \text{if } [x \mid x] \downarrow \text{ then return } [a \mid y]$$

   et ensuite

$$S_1^1\langle c, x\rangle : y \mapsto \cdots\cdots$$

   (où $\cdots\cdots$ correspond au meme code que c). Enfin, on pose $f(x) = S_1^1\langle c, x\rangle$. Alors

$$\forall x, x \in \mathbb{K} \iff f(x) \in A.$$

   Donc $\mathbb{K} \prec A$.

3. On pose

$$d : \langle x, y\rangle \mapsto \text{if } \mathsf{Step}\langle x, x, y\rangle = 0 \text{ then return } 3$$

   et on pose un S_1^1 similaire avec d. Enfin, on pose $g(x) = S_1^1\langle d, x\rangle$. Alors

$$\forall x, x \in \mathbb{K} \iff g(x) \in \overline{A}.$$

   Donc $\mathbb{K} \prec \overline{A}$.

4. On sait que $\overline{\mathbb{K}}$ n'est pas énumérable donc A n'est pas énumérable. De même pour $\overline{A}$. Donc ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Exercice 3.2 Reductions. Soit $B = \{x, [x \mid 0] \downarrow \text{ et } [x \mid 1] \uparrow\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que B n'est pas récursif.
2. B et son complémentaire $\overline{B}$ sont-ils énumérables ?

Solution.

1. On pose $B = P_{\mathscr{C}}$ pour $\mathscr{C} = \{f, 0 \in \mathsf{Dom}(f) \text{ et } 1 \notin \mathsf{Dom}(f)\}$. Alors si a calcule $\lightning$ alors $a \notin B$

et le programme suivant :

$$b : x \mapsto \text{if } x = 0 \text{ then return } 42 \text{ else } \bot$$

est dans B. Donc B n'est pas trivial et d'après le théorème de Rice, B n'est pas récursif.

4 TD4

5 TD5

Exercice 5.1 facile. Soit g une fonction calculable.

1. Montrez qu'il existe une fonction calculable *totale* G telle que
$$[G(n) \mid \cdot] = n + g(\cdot)$$
2. Montrez que $\exists n [n \mid \cdot] = n + g(\cdot)$.

Solution.

1. On ecrit le programme suivant :
$$\begin{aligned} a : \langle x, y \rangle &\to \text{ return } (x + g(y)) \\ S_1^1 \langle a, x \rangle y &\mapsto \cdots \\ G : x &\mapsto S_1^1 \langle a, x \rangle. \end{aligned}$$
Alors, on a
$$\forall n, [G(n) \mid \cdot] = n + g(\cdot)$$
2. D'après la question 1, on a on a trouvé une fonction calculable totale G telle que
$$\forall n, [G(n) \mid \cdot] = n + g(\cdot)$$
Alors, d'après le théorème du point fixe, il existe un programme n tel que
$$[n \mid \cdot] = [G(n) \mid \cdot] = n + g(\cdot)$$
ce qui est exactement ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 5.2 tout aussi aisé.

1. Montre qu'il existe une fonction calculable *totale* f telle que
$$[f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + 1$$
2. Quelles fonctions sont calculées par les points fixes de f ?

Solution.

1. On utilise S.N.M pour obtenir :
$$\begin{aligned} b : \langle x, y \rangle &\to \text{ return } ([x \mid y] + 1) \\ S_1^1 \langle b, x \rangle y &\mapsto \cdots \\ f : x &\mapsto S_1^1 \langle b, x \rangle. \end{aligned}$$
Alors, on a
$$\forall n [f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + 1$$
2. D'après le théorème du point fixe, on a
$$\exists n [n \mid \cdot] = [f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + 1$$
Donc les points fixes de f calculent les fonctions qui plantent partout.

Exercice 5.3 amusant et à peine plus dur.

1. Montrez que dans tout système acceptable de programmation il existe 2 programmes

consécutifs qui calculent la même fonction.

2. Proposez un système de programmation dans lequel 3 programmes consécutifs ne calculent jamais la même fonction.

Solution.

1. On pose $f : x \mapsto x+1$. Cette fonction est calculable. Déterminons son point fixe :

$$\exists n[n \mid \cdot] = [f(n) \mid \cdot] = [n+1 \mid \cdot].$$

Fini.

2. On prend un système usuel avec la fonction universelle $U\langle x, y\rangle$.
   - Si $x \equiv 0 \mod 3$, alors $\forall y[x \mid y] = U\langle k, y\rangle$.
   - Si $x \equiv 1 \mod 3$, alors $\forall y[x \mid y] = \bot$.
   - Si $x \equiv 2 \mod 3$, alors $\forall y[x \mid y] = U\langle k, y\rangle$.

Exercice 5.4 opérations ensemblistes.

1. Trouvez un exemple d'ensembles S_1 et S_2 non énumérables tels que $S_1 \setminus S_2$ soit énumérable.
2. Trouvez un exemple d'ensembles S_1 et S_2 non énumérables tels que $S_1 \cup S_2$ soit énumérable.

Solution.

1. On pose $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{K}}$. Alors on a bien S_1 et S_2 non énumérables mais $S_1 \setminus S_2 = \varnothing$ qui est énumérable.
2. On pose deux ensembles bien choisis :

$$S_1 = \mathsf{Pairs} \cup \{2x+1, [x \mid x]\uparrow\}$$
$$S_2 = \mathsf{Impairs} \cup \{2x, [x \mid x]\uparrow\}$$

Ces ensembles sont bien non énumérables car $\overline{\mathbb{K}} \prec S_i$ en prenant la fonction de réduction

$$f_1 : x \mapsto 2x+1, \quad f_2 : x \mapsto 2x$$

et leur union fait bien $\mathbb{N}$ et donc est énumérable.

6 TD6

1 Examen Blanc

Exercice 1.1 Rice.
Soit $A = \{x, \exists n > 0, \forall y, [x \mid y] = y^n\}$

1. Exprimez cet ensemble avec des mots en français.
2. Peut-on écrire $A = P_{\mathcal{C}}$ pour une certaine propriété $\mathcal{C}$ où $P_{\mathcal{C}} = \{\langle x, [x \mid \cdot] \in \mathcal{C}\}$? Si oui, proposez une telle propriété, sinon faites une preuve.
3. En appliquant proprement le théorème de Rice, montrez que A est indécidable.

Solution.

1. L'ensemble des programmes qui renvoient un monome de degré n.
2. Une telle propriété existe :
$$f \in \mathcal{C} \iff f(y) = y^n, n > 0$$
3. On voit que A est non trivial car :
$$x \mapsto x \in A$$
et
$$x \mapsto \perp$$
donc en appliquant le théorème de Rice, on en déduit que A est indécidable.

Exercice 1.2 Progressif.
Soit g une fonction calculable totale qui ne s'annule jamais.
Soit $A = \{x, [x \mid 0]\uparrow \text{ et } [x \mid g(x)] = 1\}$. On définit le programme p suivant :
On définit aussi la fonction f par $f(x) = S_1^1\langle p, x\rangle$.

1. La fonction f est-elle calculable ? Est-elle totale ? Justifier.
2. Soit x tel que $[x \mid x]\downarrow$. Quelle fonction est calculée par $y \mapsto [f(x) \mid y]$?
3. Soit x tel que $[x \mid x]\uparrow$. Quelle fonction est calculée par $y \mapsto [f(x) \mid y]$?
4. Montrez qur $\mathbb{K} \prec A$.
5. Montrez que l'ensemble A n'est pas récursif.
6. Aurait-on pu montrer que A n'est pas récursif en appliquant le Théorème de Rice ?
7. Ecrivez un programme q tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :
   - $\forall x, [q \mid \langle x, 0\rangle]\downarrow \iff x \in \mathbb{K}$,
   - $\forall x, y, y \neq 0 \implies [q \mid \langle x, y\rangle] = 1$.
8. Montrez que $\overline{\mathbb{K}} \prec A$.

Solution.

1. D'après le théorème SNM qu'on utilise pour construire la fonction f, f est bien calculable.
2. La fonction calculée est celle qui renvoie 1 partout sauf en 0 où elle n'est pas définie.
3. La fonction calculée est $\perp\!\!\!\perp$.
4. On veut mmontrer qu'il existe une fonction F calculable totale telle que pour tout x :
$$x \in \mathbb{K} \iff f(x) \in A$$
On a montré que f est calculable totale au 1 que f est calculable totale. On a montré au 2 que si $x \in \mathbb{K}$ alors $f(x) \in A$ et au 3 que si $x \notin \mathbb{K}$ alors $f(x) \notin A$. Donc f est bien la fonction cherchée.
5. Si A était récursif, alors $\mathbb{K}$ serait récursif, ce qui n'est pas le cas donc A n'est pas récursif.

6. Non car l'ensemble est défini par des propriétés sur le programme et non sur la fonction calculée.
7. On pose q comme suit :
8. On pose $f'(x) = S_1^1\langle q, x\rangle$.
$$\forall x, x \in \overline{\mathbb{K}} \iff f'(x) \in A$$
et f' est calculable totale. Donc $\overline{\mathbb{K}} \prec A$.
9. On a $\overline{\mathbb{K}} \prec A$ donc $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ et donc $\overline{A}$ n'est pas énumérable. De même, $\mathbb{K} \prec A$ donc A n'est pas énumérable.

Exercice 1.3 Enumérabilité.

Solution.

Exercice 1.4 Points fixes.
Soit $F : x \mapsto a$ où a est un entier fixé. Notons n_0 un point fixe de F.

1. Que calcule le programme n_0 ?
2. Est-ce que a est un point fixe de F ?
3. Peut-on avoir $n_1 = a$? $n_1 = n_0$? Que calcule n_1 ?
4. Montrez qu'il existe un programme partour convergent qui prend en entrée a et b et donne en sortie le point fixe n_1. En d'autres termes, il faut montrer que n_1 est récursif en $\langle a, b\rangle$.
5. En vous inspirant de ce qui précède, montrez qu'il existe un programme partout convergent *toto* qui, sur l'entrée $\langle a, b, i\rangle$ donne un programme noté n_i qui calcule la même fonction que a ($[a \mid \cdot = [n_i \mid \cdot]]$), tous les n_i étant différents quand i varie, a et b étant fixés.
6. Si le programme a calcule la fonction constante de valeur 2, que donnent $toto\langle a, b_0, i\rangle$ et $toto\langle a, b_1, i\rangle$?
7. Si le programme a calcule la fonction constante de valeur 1, que donnent $toto\langle a, b_0, i\rangle$ et $toto\langle a, b_1, i\rangle$?
8. A l'aide de b_0, b_1 et *toto*, définissez un programme partout convergent qui, sur l'entrée $\langle a, i\rangle$ donne un programme n_i qui calcule la même fonction que a, tous les n_i étant différents quand i varie, a étant fixé.

Solution.

1. On applique le théorème de point fixe qui nous dit que
$$\exists n, [n \mid \cdot] = [F(n) \mid \cdot] = [a \mid \cdot]$$
Donc le programme n_0 calcule la même chose que a.
2. Oui car $F(a) = a$.
3. Non car si $n_1 = a$ ou $n_1 = n_0$, on aurait à la fois
$$F(n_1) = n_1 = a \text{ ou } n_0$$
et
$$F(n_1) = b$$
On arrive à une contradiction donc $n_1 \neq a$ et $n_1 \neq n_0$.
4. n_1 est récursif en a et b car il est récursif dans F_1 (par le théorème du point fixe effectif) et ce code dépend récursivement de a et b.
5. On va définir F_i comme suit :
où n_i est un point fixe de F_i. On applique le théorème du point fixe effectif pour obtenir n_i récursif en a, b, i.

6. Il renvoie un programme qui calcule la fonction constante de valeur 2 dans les deux cas.
7. Il renvoie un programme qui calcule la fonction constante de valeur 1 dans le premier cas et dans le deuxième cas, il peut renvoyer a.
8. Il suffit d'appeler les deux fonctions et de filtrer pour avoir le bon resultat, comme ça on evite de produire deux fois le meme programme.

2 TD7

Exercice 2.1 Modèles, théories et propriétés. 1. Pour le modèle $\mathbb{R}, |x-y| = 1$, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ avec un prédicat binaire d tel que $d(x,y)$ si et seulement si $|x-y| = 1$ (ce qui exprime que x et y sont à distance 1 dans $\mathbb{R}$), donner une formule *une formule du langage ayant uniquement le prédicat binaire* d qui exprime $|x-y| = 2$.

2. Rappelez ce qu'est un automorphisme. Pour le modèle $(\mathbb{R}, |x-y| = 1)$ montrez que la fonction $x \to x+1$ est un automorphisme. En déduire que dans ce modèle on ne peut pas exprimer la propriété $x = 0$.
3. Montrez que dans $(\mathbb{R}, |x-y| = 1)$ on ne peut pas exprimer la propriété x est un entier relatif.
4. Montrez que dans $(\mathbb{Z}, x+y=z)$ on peut exprimer les propriétés $x = 0$ et x est pair.
5. Montrez que dans $(\mathbb{Z}, x+y=z)$ on ne peut pas exprimer la propriété $x > 0$.

Solution.

1. On peut utiliser la formule :

$$P(x,y) \iff \exists z, \quad x \neq z \wedge d(x,z) \wedge d(z,y)$$

2. La fonction $f : x \mapsto x+1$ est bien bijective donc on peut faire comme suit :

$$\begin{aligned} M_a M \vDash d(x,y) & \\ &\iff d(f(x), f(y)) \\ &\iff d(x+1, y+1) \\ &\iff |(x+1)-(y+1)| = 1 \\ &\iff |x-y| = 1 \end{aligned}$$

3. Si on pouvait exprimer la propriété $P(x) \sim x = 0$ alors on aurait $M \vDash P(x_0)$ et en particulier $M \vDash P(f(x_0)) \equiv P(x+1)$. On aurait alors $1 = 0$ ce qui est impossible, donc P ne peut pas exprimer « $x = 0$ ».
4. On veut montrer que

$$M \vDash P(\underbrace{x}_{\in \mathbb{Z}}) \iff M \vDash P(\underbrace{f(x)}_{\notin \mathbb{Z}})$$

Supposons qu'il existe $P : P(x) \iff x \in \mathbb{Z}$. Utilisons l'isomorphisme suivant :

$$g : x \mapsto x + \frac{1}{2}$$

Alors pour $x = 1$, on a $M \vDash P(1)$ et $M \vDash P(1.5)$ qui n'est pas entier. Alors P n'exprime pas « $x \in \mathbb{Z}$ »

5. On peut utiliser la formule suivante :

$$F(x) \iff \exists y (x+y = y)$$

qui exprime bien « $x = 0$ ». Pour l'autre formule on peut utiliser :

$$G(x) \iff \exists y \quad y + y = x$$

6. On peut utiliser l'isomorphisme suivant :

$$f : x \mapsto -x$$

Il en suit

$$\begin{aligned} -(x+y) = -z &\iff x + y = z \\ &\iff f(x) + f(y) = f(z) \end{aligned}$$

Exercice 2.2 Compacité — ordres complétés. Soit $\mathcal{A} = (A, <, \{a_0, a_1, \ldots\})$ un modèle dénombrable où chaque élément de $\mathcal{A}$ apparaît comme une constante a_i. Dans la suite, i et j sont des symboles de l'exercice et non pas de la théorie ; ils représentent des entiers. La relation $<$ est un ordre (partiel et strict) quelconque. On note T la théorie de l'ordre partiel (voir précédents exercices) et on a donc $A \vDash T$. Nous allons démontrer qu'on peut étendre l'ordre de A en un (nouvel) ordre qui, lui, est total. On appelle $f_{i,j}$ la formule $a_i < a_j \vee a_j < a_i$.

1. Pour $i \neq j$, trouvez un modèle $\mathcal{A}_{i,j}$ de même langage que $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}_{i,j} \vDash T \cup \{f_{i,j}\}$ et où l'ordre sur $\mathcal{A}_{i,j}$ étend celui sur $\mathcal{A}$.
2. Trouvez un modèle $\mathcal{A}_n$ de même langage que $\mathcal{A}$ tel que $A_n \vDash T \cup \left\{ \bigwedge_{\substack{i \leq n \\ j \leq n \\ i \neq j}} f_{i,j} \right\}$ et où l'ordre sur $\mathcal{A}_n$ étend celui sur $\mathcal{A}$.
3. En déduire qu'on peut étendre l'ordre en un ordre total sur $\mathcal{A}$.

Solution.

1. On prend T la théorie de l'ordre partiel.
   - Soit $a_i < a_j$ ou $a_j < a_i$. Alors, $\mathcal{A} \vDash f_{i,j}$ donc $\mathcal{A} \vDash T \cup \{f_{i,j}\}$.
   - Sinon, on pose $<' = < \cup \{a_i < a_j\}$. Alors, pour tout $b \in A$ tel que

     $$\begin{cases} a_i < a_j \\ a_j < b \end{cases}$$

     En rajoutant $a_i < b$ on a

     $$\mathcal{A}' = (A, <', \ldots) \vDash T \cup \{f_{i,j}\}$$

2. On peut juste redémontrer la même chose pour chaque $\{f_{i,j}\}$.
3. On veut construire un modèle de $T \cup \left\{ \bigwedge_{i \neq j} f_{i,j} \right\}$.

   $$\begin{aligned} &T_f \subseteq T \cup \left\{ \bigwedge_{i \neq j} f_{i,j} \right\} \\ &T_f = T \cup \{f_{i_1,j_1}, f_{i_2,j_2}, \ldots\} \\ &\exists n, \forall i, \forall j, \quad f_{i,j} \in T_f \implies i \leq n \wedge j \leq n \\ &\mathcal{A}_n \vDash T \cup \left\{ \bigwedge_{\substack{i \leq n \\ j \leq n \\ i \neq j}} f_{i,j} \right\} \\ &\mathcal{A}_n \vDash T_f \end{aligned}$$

Donc par H_1 compacité, T a un modèle B :

$$B \vDash T \cup \left\{ \bigwedge_{i \neq j} f_{i,j} \right\}$$

Exercice 2.3 Compacité et $\mathbb{Z}$. On dispose ici d'une théorie T de l'ordre total strict et d'une fonction S vérifiant $\forall x \quad x < S(x)$ et $\neg\left(\exists x, \exists y, x < y < S(x)\right)$.

1. Ré-écrivez la formule $\neg\left(\exists x, \exists y, x < y < S(x)\right)$ avec uniquement des quantificateurs, le symbole de fonction S et celui de prédicat $<$, et des symboles $=, \wedge, \vee, \neg$ où on n'appliquera ce dernier qu'à des formules atomiques. Ensuite, transformez la formule en une formule équivalente sans $\neg$ en tenant compte des autres formules de la théorie T.
2. On ajoute maintenant les symboles de constante a et b au langage. Pour tout entier n trouver une formule $F_n(a, b)$ qui exprime $a + n < b$.
3. Pour tout entier n trouvez un modèle d'univers $\mathbb{N}$ où $F_n(a, b)$ est vrai, a, b étant des constantes du modèle.
4. Montrez que tout ensemble fini de formules F_n ajouté à la théorie T est cohérent.
5. Montrez que l'ensemble infini des formules F_n ajouté à la théorie T a un modèle. Décrivez un tel modèle.
6. Que se passe-t-il si on ajoute à la théorie la formule $\forall x, \exists y, S(y) = x$?

Solution. On rappelle que dans un ordre total, on a les propriétés suivantes :

- Antiréflexivité : $\forall x, \neg(x < x)$,
- Asymétrie : $\forall x, \forall y, (x < y) \implies \neg(y < x)$,
- Transitivité : $\forall x, \forall y, \forall z, (x < y \wedge y < z) \implies (x < z)$,
- Totalité : $\forall x, \forall y, x = y \vee x < y \vee y < x$.
- Une fonction S telle que
  - $\forall x, S(x) > x$,
  - $\neg\left(\exists x, \exists y, x < y < S(x)\right)$.

1. On a
$$\forall x, \forall y \quad \neg(x < y) \vee \neg(y < S(x))$$
et
$$\forall x, \forall y \quad y < x \vee x = y \vee S(x) < y \vee S(x) = y$$
2. On a
$$F_n(a, b) = \underbrace{S(S(\cdots(S(x))))}_{n \text{ fois}} < b$$
3. On pose
$$\begin{aligned} M &= (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}}, a, b) \\ [a]^M &= 0 \\ [b]^M &= n + 1 \\ M &\vDash F_n(a, b) \end{aligned}$$
Où $T \cup \{F_n\}$ est cohérente.
Alors,
$$F_3(a, b) = S(S(S(a))) < b$$
4. On a $T \cup \{F_{K_1}, \ldots, F_{K_m}\}$ avec m un entier quelconque et K une constante. Alors
$$\exists m, \forall n \geq m \quad F_n \notin T \cup \{F_{K_1}, \ldots, F_{K_m}\}$$

Donc

$$[a]^M = 10, \quad [b]^M = 10 + m + 1$$

Donc

$$M \vDash F_{K_i}$$

pour tout K_i. Donc

$$M \vDash T \cup \{F_{K_1}, \dots, F_{K_m}\}$$

Donc l'extension de T par un nombre fini de formules F_n est cohérente.

5. $T \cup \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$. Par la question précédente, toute partie finie de $T \cup \{F_n\}$ a un modèle, donc $T \cup \{F_n\}$ a un modèle M. Alors

$$M = (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}, S_{\mathbb{N}}, a, b)$$

et $F_n(a, b)$ est équivalent à « a, b à distance au moins n ». Si

$$\exists n_0 \quad a + n_0 = b, \quad M \vDash F_{n_0+1}$$

ce qui est absurde donc n est cohérente.

$$U = \{(1, m) \text{ avec } i \in \{0, 1\} \text{ et } m \in \mathbb{N}\}$$

6. $\forall x, \exists y, S(y) = x$.

3 TD8

Exercice 3.1 Non standard on refait.
On considère $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, <)$ les entiers relatifs avec un seul symbole de prédicat qui est l'ordre habituel inférieur strict (total) noté $<$. Le langage du modèle est noté $\mathcal{L}$. On note $T = \mathsf{th}(\mathcal{M})$, ensemble de formules sur le langage $\mathcal{L}$. On ajoute maintenant à $\mathcal{L}$ deux symboles de constante a et b et on obtient le langage $\mathcal{L}'$.

1. On considère le $\mathcal{L}'$-modèle

Solution.
Exercice solution

Exercice 3.2 Inexprimabilité de l'infini.
On commence par étudier une théorie sur le langage avec uniquement un prédicat binaire $<$.

1. Rappelez sous forme de formules closes les propriétés du prédicat $<$ que l'on souhaite de façon à ce qu'il représente un ordre (strict) total.

Solution.

1.
2. M est fini alors l'univers de M est fini, donc a un plus grand élément a et $M \vDash \neg\exists y \quad a < y$.
3. Non, par exemple dans $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, <_{\mathbb{Z}})$, le modèle est infini mais il existe un élément maximum.
4. On se donne $\mathcal{L}$ le langage quelconque et T une théorie cohérente qui admet un modèle de cardinal n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. φ correspond à « le modèle a n éléments au moins ». C'est à dire
$$M \vDash \varphi_n \iff |M| \geq n.$$
Donc
$$\varphi_n = \exists x_1, \ldots, x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j.$$
Donc
$$M \vDash \varphi_n \iff |M| \geq n.$$
On pose $G = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on considère $T \cup G$.
6. On prend M un modèle fini de T. Alors
   - $M \vDash T$ car M est un modèle de T.
   - et $M \nvDash G$.

   car $m = |M|$ et alors
7. On suppose $T \cup G \vdash \bot$. Montrons qu'il existe $F \subseteq T \cup G$ fini et tel que $F \vdash \bot$.
   Il suffit de prendre M assez grand pour que $|M| \geq n$ pour tout $\varphi_n \in F \cap G$.

Exercice 3.3 Théorie de l'incrément.
Exercise 3 content

Solution.
Exercice solution