# HAI702I — TDs

Ivan Lejeune

8 septembre 2025

## Table des matières

# TD1 — Espaces vectoriels

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

**Exercice 1.1.**
Déterminer une base orthonormale directe done le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(1,2,2)$.

**Solution.** On pose $u = \frac{1}{3}(1,2,2)$, c'est à dire celui imposé puis normalisé.
Ensuite on veut $v$ orthogonal à $u$ et de norme 1.
Il faut donc $\langle u, v\rangle = 0$, soit $(0,1,-1)$.
On le normalise en divisant par $\sqrt{2}$ : $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$.
Pour $w$ on peut faire le produit vectoriel $u \wedge v$ :
On trouve $w = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,1)$.
On pose alors notre base orthonormale directe :

$$\mathcal{B} = (u,v,w) = \left(\frac{1}{3}(1,2,2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1), \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,1)\right).$$

**Exercice 1.2.**
Pour quelles valeurs de $a$ les vecteurs suivant sont-ils coplanaires ?

- $(1,0,a)$,
- $(a,1,0)$,
- $(0,a,1)$.

**Solution.** On trouve assez vite que $-1$ est solution. C'est la seule solution réelle, prouvable avec factorisation puis delta.

**Exercice 1.3.**
Soient $u, v$ et $w$ trois vecteurs de l'espace et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation vectorielle d'inconnue $x$ suivante :

$$u \wedge x = v$$

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors $u$ et $v$ sont orthogonaux. On supposera dans la suite que $u$ et $v$ sont orthogonaux.
2. Déterminer toutes les solutions colinéaires à $u \wedge v$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Déterminer les vecteurs solutions qui vérifient en outre $\langle x, w\rangle = a$.

**Solution.**

**Exercice 1.4.** ⋆
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A = (1,3,-2)$ et de vecteur directeur $u = (2,1,0)$, $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 3y + 5z = 7$ et $M$ le point de coordonnées $(1,2,3)$.

1. Calculer la distance de $M$ à la droite $\mathcal{D}$.
2. Calculer la distance de $M$ au plan $\mathcal{P}$.
   *Indication : remarquer que le point* $(1,0,1)$ *appartient au plan* $\mathcal{P}$.

**Solution.**

1. La distance de $M$ à la droite $\mathcal{D}$ est donnée par la formule :

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\mathcal{N}AM \wedge u}{\mathcal{N}u} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}.$$

**Exercice 1.5.** ⋆
Déterminer la projection orthogonale $\Delta'$ de la droite $\Delta$ d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

dans le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 1$.

**Solution.**

**Exercice 1.6.** ⋆
Calculer l'équation de la sphère de centre $(1,1,1)$ et dont le plan tangent est $x + y + z = 2$.

**Solution.**