

# HAI802I Algorithmique Avancée — TDs

Ivan Lejeune

26 janvier 2026

## Table des matières

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | Complexité . . . . .                                      | 3  |
| 1.1 | Quelques preuves en complexité des problèmes . . . . .    | 3  |
| 1.2 | Quelques problèmes dans les graphes . . . . .             | 4  |
| 1.3 | La classe de complexité $coNP$ . . . . .                  | 5  |
| 1.4 | Rappels en complexité . . . . .                           | 5  |
| 2   | Algorithmes d'approximation . . . . .                     | 6  |
| 2.1 | La classe <b>Log-APX</b> . . . . .                        | 6  |
| 2.2 | La classe <b>APX</b> . . . . .                            | 6  |
| 2.3 | Mesure différentielle . . . . .                           | 7  |
| 2.4 | Construction d'un FPTAS . . . . .                         | 8  |
| 2.5 | Polynomial-Time Asymptotic Scheme : PTAS . . . . .        | 8  |
| 2.6 | Points extrêmes . . . . .                                 | 8  |
| 2.7 | FPTAS et programmation dynamique . . . . .                | 8  |
| 2.8 | Schéma primal-dual . . . . .                              | 8  |
| 3   | Inapproximabilité ou seuil d'approximation . . . . .      | 10 |
| 3.1 | Seuil d'approximation . . . . .                           | 10 |
| 3.2 | Utilisation du principe Gap-réduction . . . . .           | 10 |
| 4   | Méthodes exactes . . . . .                                | 11 |
| 4.1 | Programmation dynamique . . . . .                         | 11 |
| 4.2 | Arbres de branchement . . . . .                           | 11 |
| 5   | Réductions divers . . . . .                               | 12 |
| 5.1 | $L$ -réduction . . . . .                                  | 12 |
| 6   | Quelques problèmes d'ordonnancement . . . . .             | 13 |
| 6.1 | Ordonnancement sur un processeur . . . . .                | 13 |
| 6.2 | Ordonnancement sur $m$ processeurs . . . . .              | 13 |
| 7   | Algorithmes randomisés . . . . .                          | 14 |
| 7.1 | Sur le problème MAXIMUM SATISFAISABILITÉ . . . . .        | 14 |
| 7.2 | Sur le problème COUVERTURE D'ENSEMBLES PONDÉRÉS . . . . . | 14 |
| 8   | Bornes inférieures et ETH . . . . .                       | 15 |

## Liste des Algorithmes

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | 3-SAT . . . . .                              | 3  |
| 2 | HALF 3-SAT . . . . .                         | 3  |
| 3 | $\neg$ 3-SAT . . . . .                       | 3  |
| 4 | NON EGAL SATISFAISABILITÉ (NAESAT) . . . . . | 3  |
| 5 | EXACT COVER BY 3-SETS . . . . .              | 4  |
| 6 | VERTEX COVER . . . . .                       | 4  |
| 7 | STEINER TREE . . . . .                       | 4  |
| 8 | $P  \cdot  C_{\max}$ . . . . .               | 13 |

# 1 Complexité

## 1.1 Quelques preuves en complexité des problèmes

### Exercice 1 Quelques preuves de NP-complétude autour de 3-SAT.

Algorithme 1 – 3-SAT

**Input:** Une formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en 3-CNF

**Question:** Existe-t-il une affectation des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  satisfaisant  $\varphi$  ?

Algorithme 2 – HALF 3-SAT

**Input:** Une formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en 3-CNF

**Question:** Existe-t-il une affectation des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  satisfaisant  $\varphi$  à 50% ?

Algorithme 3 –  $\neg$ 3-SAT

**Input:** Une formule  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  en 3-CNF

**Question:** Existe-t-il une affectation des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  qui ne satisfait pas  $\varphi$  ?

1. Montrer que  $\neg$ 3-SAT appartient à la classe  $P$ .
2. Montrer que HALF 3-SAT est NP-complet. Que dire du problème HALF 3-SAT dans le cas où le nombre de clauses satisfaites est au moins de 50% ?

### Solution.

1. On rappelle que tous les littéraux sont positifs, il suffit alors de tout mettre à faux pour trouver une solution, donc le problème appartient à la classe  $P$ .
2. On fait une réduction de 3-SAT vers HALF 3-SAT.  
On commence par faire la chose suivante :

$$I \rightsquigarrow I + \underbrace{(x \vee y \vee z)}_{m \text{ copies}}, \quad x, y, z \notin I$$

Si on a oui à 3-SAT alors on a  $m$  clauses satisfaites. On en déduit que sur  $2m$  clauses, il suffit de mettre  $x, y, z$  à faux et alors on a bien 50% des clauses qui sont satisfaites par la solution à 3-SAT.

Dans l'autre sens, si on a une solution à HALF 3-SAT on a plusieurs cas :

- Premier cas, on satisfait une clause dans  $I$ . Alors toutes les  $m$  clauses sont validées dans  $I$  et on a une solution à 3-SAT.
- Second cas, on ne satisfait aucune clause de  $I$ . Mais alors si dans  $I$  il n'y a aucune variable négative, on peut résoudre 3-SAT en mettant tout à positif, de même dans le cas où il n'y a aucune variable positive. Il y a donc forcément une variable présente de manière positive et négative dans  $I$ . Alors, au moins une clause est satisfait. Donc on est dans le premier cas et forcément les  $m$  clauses satisfaites sont dans  $I$ .

Le problème de au moins 50% est facile. Il suffit de prendre une affectation aléatoire (ou son complémentaire).

### Exercice 2 Autour de Satisfaisabilité.

Algorithme 4 – NON EGAL SATISFAISABILITÉ (NAESAT)

**Input:** Und vofmuld onjonctive  $\varphi$  sur  $n$  variables et  $m$  clauses

**Question:** Existe-t-il une affectation de valeurs de vérité aux variables qui satisfasse  $\varphi$  tel que chaque clause a un littéral vrai et un littéral faux ?

Montrer que NON EGAL SATISFAISABILITÉ est  $\mathcal{NP}$ -complet. La preuve se fera à partir de SATISFAISABILITÉ.

**Solution.**

## 1.2 Quelques problèmes dans les graphes

**Exercice 3** Quelques preuves de NP-complétude pour Steiner tree.

Algorithme 5 – EXACT COVER BY 3-SETS

**Input:** Un univers  $X$ , une collection  $C$  de triplés de  $X$

**Question:** Trouver une collection  $C' \subset C$  telle que chaque élément de  $X$  apparait exactement une fois dans les triplés de  $C'$

Algorithme 6 – VERTEX COVER

**Input:** Un graphe  $G = (V, E)$ , un entier  $k$

**Question:** Trouver  $V' \subset V$  telle que chaque arête est couverte par un sommet de  $V$  avec  $|V'| = k$

Algorithme 7 – STEINER TREE

**Input:** Un graphe  $G = (V, E)$ , une fonction de poids  $w$  sur les arêtes, un ensemble de terminaux  $X \subset V$ , un entier  $k$

**Question:** Trouver  $T \subset E$  tel que la somme des poids des arêtes de  $T$  soit au plus de  $k$ ,  $G[T]$  est connexe et  $X \subset V(G[T])$

1. Montrer que

**Solution.**

**Exercice 4 title.**

**Solution.**

**Exercice 5 title.**

**Solution.**

**Exercice 6 title.**

**Solution.**

**Exercice 7 title.**

**Solution.**

**Exercice 8 title.**

**Solution.**

### 1.3 La classe de complexité $\text{coNP}$

**Exercice 9 title.**

**Solution.**

**Exercice 10 title.**

**Solution.**

**Exercice 11 title.**

**Solution.**

### 1.4 Rappels en complexité

**Exercice 12 title.**

**Solution.**

## 2 Algorithmes d'approximation

### 2.1 La classe Log-APX

 Exercice 13 title.

 Solution.

### 2.2 La classe APX

 Exercice 14 title.

 Solution.

 Exercice 15 title.

 Solution.

 Exercice 16 title.

 Solution.

 Exercice 17 title.

 Solution.

 Exercice 18 title.

 Solution.

 Exercice 19 title.

 Solution.

 Exercice 20 title.

 Solution.

 Exercice 21 title.

 Solution.

 Exercice 22 title.

 **Solution.**

 **Exercice 23 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 24 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 25 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 26 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 27 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 28 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 29 title.**

 **Solution.**

## 2.3 Mesure différentielle

 **Exercice 30 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 31 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 32 title.**

 **Solution.**

## 2.4 Construction d'un FPTAS

 **Exercice 33 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 34 title.**

 **Solution.**

## 2.5 Polynomial-Time Asymptotic Scheme : PTAS

 **Exercice 35 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 36 title.**

 **Solution.**

## 2.6 Points extrêmes

 **Exercice 37 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 38 title.**

 **Solution.**

 **Exercice 39 title.**

 **Solution.**

## 2.7 FPTAS et programmation dynamique

 **Exercice 40 title.**

 **Solution.**

## 2.8 Schéma primal-dual

**Exercice 41 title.**

**Solution.**

### 3 Inapproximabilité ou seuil d'approximation

#### 3.1 Seuil d'approximation

 Exercice 42 title.

 Solution.

 Exercice 43 title.

 Solution.

 Exercice 44 title.

 Solution.

#### 3.2 Utilisation du principe Gap-réduction

 Exercice 45 title.

 Solution.

 Exercice 46 title.

 Solution.

 Exercice 47 title.

 Solution.

 Exercice 48 title.

 Solution.

 Exercice 49 title.

 Solution.

## 4 Méthodes exactes

### 4.1 Programmation dynamique

Exercice 50 title.

Solution.

Exercice 51 title.

Solution.

### 4.2 Arbres de branchement

Exercice 52 title.

Solution.

Exercice 53 title.

Solution.

Exercice 54 title.

Solution.

Exercice 55 title.

Solution.

## 5 Réductions divers

### 5.1 *L*-réduction

 Exercice 56 title.

 Solution.

 Exercice 57 title.

 Solution.

## 6 Quelques problèmes d'ordonnancement

### 6.1 Ordonnancement sur un processeur

**Exercice 58 title.**

**Solution.**

### 6.2 Ordonnancement sur $m$ processeurs

**Exercice 59 Problème d'ordonnancement sans contrainte de précédence.**

On pose  $P| \cdot |C_{\max}$  définie de la manière suivante :

Algorithme 8 –  $P| \cdot |C_{\max}$

**Input:**  $n$  tâches de durées  $p_1, \dots, p_n$  indépendantes

**Question:** Ordonner ces tâches sur  $m$  machines identiques en une durée totale minimale notée  $C_{\max}$ .

Par la suite on va utiliser un ordonnancement par liste.

**Solution.**

**Exercice 60 title.**

**Solution.**

**Exercice 61 title.**

**Solution.**

**Exercice 62 title.**

**Solution.**

## 7 Algorithmes randomisés

### 7.1 Sur le problème Maximum Satisfaisabilité

 Exercice 63 title.

 Solution.

### 7.2 Sur le problème Couverture d'ensembles pondérés

 Exercice 64 title.

 Solution.

 Exercice 65 title.

 Solution.

 Exercice 66 title.

 Solution.

 Exercice 67 title.

 Solution.

 Exercice 68 title.

 Solution.

## 8 Bornes inférieures et ETH

 Exercice 69 title.

 Solution.

 Exercice 70 title.

 Solution.

 Exercice 71 title.

 Solution.