

# Course Name — TDs

Ivan Lejeune

9 décembre 2025

## Table des matières

|  |   |
|--|---|
| TD1 — Introduction et lois usuelles . . . . .              | 2 |
| Combinatoire et premiers calculs de probabilités . . . . . | 2 |
| Loi binomiale . . . . .                                    | 2 |
| La loi normale (gaussienne) . . . . .                      | 2 |
| La loi du Chi-deux $\chi^2$ (ou loi de Pearson) . . . . .  | 3 |
| Théorème de la limite centrale . . . . .                   | 4 |

## TD1 — Introduction et lois usuelles

### Combinatoire et premiers calculs de probabilités

#### Exercice 1.1.

1. En considérant les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de 2 lettres ? Combien peut-on former de mots de deux lettres constitués d'une consonne suivie d'une voyelle ? Combien peut-on former de mots de deux lettres constitués d'une consonne et d'une voyelle ?
2. Combien d'équipes différentes de 3 personnes peut-on former à partir d'un groupe de 5 personnes ?
3. Avec 17 chevaux au départ, combien y a-t-il de tiercés possibles ? Dans le désordre ?

#### Solution.

1. On peut former  $26 \times 26 = 676$  mots de 2 lettres. On peut former  $20 \times 6 = 120$  mots de deux lettres constitués d'une consonne suivie d'une voyelle. On peut former  $20 \times 6 + 6 \times 20 = 240$  mots de deux lettres constitués d'une consonne et d'une voyelle.
2. On peut en former  $\binom{5}{3} = 10$  équipes différentes de 3 personnes à partir d'un groupe de 5 personnes.
3. Avec 17 chevaux au départ, il y a  $17 \times 16 \times 15 = 4080$  tiercés possibles. Dans le désordre, il y en a  $4080/6 = 680$ .

#### Exercice 1.2.

Une urne contient  $n$  boules blanches ( $n \geq 5$ ) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité  $p_n$  pour que l'on ait tiré exactement 3 boules noires ?
2. Etudier le sens de variation de la suite  $p_n$  et calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

#### Solution.

1. Exercice solution

### Loi binomiale

#### Exercice 1.3.

On jette une fois un dé non truqué.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la face 1 ? Quelle est la loi de cet événement ?  
On jette 18 fois le dé en question, quelles sont les probabilités des événements suivants :
2. Obtenir la face 1 exactement 3 fois.
3. Obtenir la face 1 au moins 3 fois.
4. Obtenir la face 1 au plus 16 fois.

#### Solution.

Exercice solution

### La loi normale (gaussienne)

On suppose dans cette section que  $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$  (loi normale centrée réduite).

#### Exercice 1.4.

Calculer les probabilités suivantes :

1.  $P(U < 1.5)$
2.  $P(U > 2.5)$
3.  $P(U < -1.5)$
4.  $P(-1.5 < U < 2.5)$

**Solution.**

Exercice solution

**Exercice 1.5.**

Trouver la valeur de  $u$  telle que :

1.  $P(U < u) = 0.95$
2.  $P(U < u) = 0.1$
3.  $P(U > u) = 0.99$
4.  $P(-u < U < u) = 0.95$

**Solution.**

Exercice solution

On suppose dans la suite que  $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 5^2)$  (loi normale de moyenne 2 et d'écart-type 5).  
On a alors  $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-2}{5} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 1.6.**

Calculer les probabilités suivantes :

1.  $P(X < 10)$
2.  $P(0 < X < 10)$

**Solution.**

Exercice solution

**Exercice 1.7.**

Trouver la valeur de  $x$  telle que :

1.  $P(X < x) = 0.95$
2.  $P(X < x) = 0.05$
3.  $P(2 - x < X < 2 + x) = 0.95$

**Solution.**

Exercice solution

## La loi du Chi-deux $\chi^2$ (ou loi de Pearson)

Pour  $U_1, \dots, U_p$  des variables  $\mathcal{N}(0, 1)$  indépendantes, on appelle loi du Chi-deux à  $p$  degrés de liberté ( $\chi_p^2$ ) la loi de la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^p U_i^2$ .

**Exercice 1.8.**

1. Que vaut la somme de deux variables de loi  $\chi^2$  indépendantes de degrés de liberté respectifs  $p$  et  $q$  ?
2. Soit  $X \sim \chi_{15}^2$  et  $Y \sim \chi_{10}^2$ . Calculer :
  - (a)  $P(X < 6.26)$
  - (b)  $P(Y > 3.25)$
  - (c)  $P(X + Y > 11.52)$
3. Soit  $X \sim \chi_{15}^2$ . Trouver la valeur de  $x$  telle que :

- (a)  $P(X < x) = 0.01$
- (b)  $P(X < x) = 0.05$
- (c)  $P(X < x) = 0.99$

**Solution.**

Exercice solution

### Théorème de la limite centrale

On rappelle quelques propriétés de la loi normale.