

# HAI711I — TDs

Ivan Lejeune

19 novembre 2025

## Table des matières

TD1 — Généralités . . . . .	2
TD2 — Couplages . . . . .	8
TD3 — Flots et circulation . . . . .	14

## TD1 — Généralités

### Exercice 1 Soirée chez Ramsey.

On considère un ensemble de six personnes. Montrer que au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou que au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux. Est-ce vrai pour un ensemble de cinq personnes ?

#### Solution.

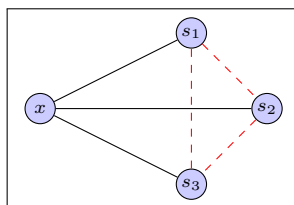
Soit  $G = (V, E)$  un graphe à six sommets. On veut montrer que  $G$  contient  $K_3$  ou  $\overline{K_3}$ .

Considérons  $x \in V$  un sommet de  $G$  et procédons par disjonction de cas en fonction du degré de  $x$  :

- Si  $\deg(x) \geq 3$ , on note  $s_1, s_2, s_3$  trois voisins de  $x$ . Si  $(s_1, s_2) \in E$  alors  $x, s_1, s_2$  forment  $K_3$ .

De manière similaire, si  $(s_1, s_3) \in E$  ou  $(s_2, s_3) \in E$  alors  $K_3$  est formé. Si il n'existe pas d'arête entre  $s_1, s_2, s_3$  alors  $\overline{K_3}$  est formé.

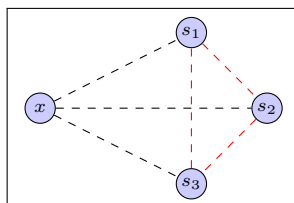
Ainsi, si  $\deg(x) \geq 3$  alors  $G$  contient  $K_3$  ou  $\overline{K_3}$ .



Visuellement, on peut voir que si un des traits rouges est présent (donc si il existe une arête entre deux des sommets  $s_1, s_2, s_3$ ) alors  $K_3$  est formé. Sinon, il y a un triangle rouge en pointillés et  $\overline{K_3}$  est formé.

- Si  $\deg(x) \leq 2$ , on note  $s_1, s_2, s_3 \in V$  trois sommets de  $G$  qui ne sont pas voisins de  $x$  (ils existent forcément car  $|V| = 6$ ). Si  $(s_1, s_2) \notin E$  alors  $x, s_1, s_2$  forment  $\overline{K_3}$ .

De manière similaire, si  $(s_1, s_3) \notin E$  ou  $(s_2, s_3) \notin E$  alors  $\overline{K_3}$  est formé. Si il existe une arête entre chacun des sommets  $s_1, s_2, s_3$  alors  $K_3$  est formé.

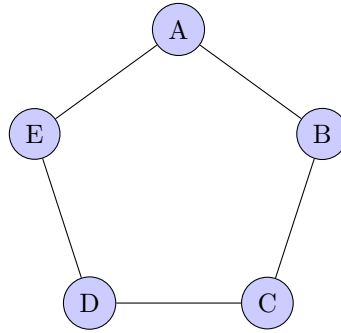


Visuellement, on peut voir que si un des traits rouges est absent (donc si il n'existe pas d'arête entre deux des sommets  $s_1, s_2, s_3$ ) alors  $\overline{K_3}$  est formé. Sinon, il y a un triangle rouge en pointillés et  $K_3$  est formé.

Ainsi, si  $\deg(x) \leq 2$  alors  $G$  contient  $K_3$  ou  $\overline{K_3}$ .

Donc pour un ensemble de six personnes, au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux.

Pour un ensemble de cinq personnes, le graphe  $G$  à cinq sommets ci-dessous ne contient ni  $K_3$  ni  $\overline{K_3}$  :



### Exercice 2 Hyperparcours.

Soit  $d$  un entier positif non nul. L'hypercube  $Q_d$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des  $d$ -uplets  $x_1, \dots, x_d$  de 0 et de 1, deux  $d$ -uplets étant adjacents s'ils diffèrent sur une seule entrée.

1. Dessiner  $Q_d$  pour  $d = 1, 2, 3, 4$ .
2. Calculer un parcours en largeur de  $Q_3$  de racine 000. En cas de choix entre plusieurs sommets pour entrer dans la file, on choisira celui de valeur (en binaire) minimale.
3. Effectuer de même un parcours en profondeur de  $Q_3$ . Cette fois, il n'y a pas de consigne en cas de choix, mais on essaiera d'obtenir un arbre de parcours qui ne soit pas un chemin.

### Solution.

1. On a les hypercubes suivants :

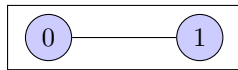


FIGURE 1 –  
Hypercube  $Q_1$

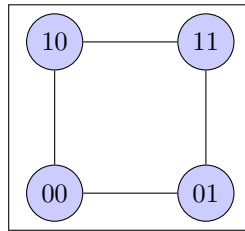


FIGURE 2 –  
Hypercube  $Q_2$

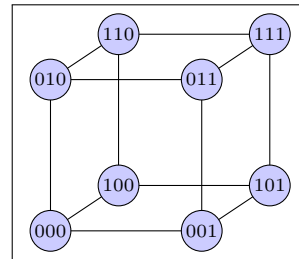


FIGURE 3 –  
Hypercube  $Q_3$

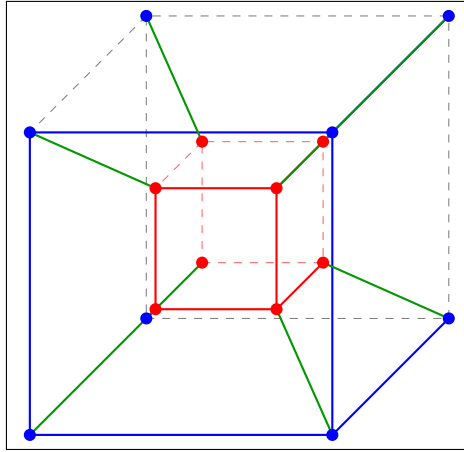


FIGURE 4 – Hypercube  $Q_4$   
Noeuds non précisés pour la clarté

2. On peut effectuer le parcours en largeur suivant :

$000 \rightarrow 001 \rightarrow 010 \rightarrow 100$   
 $001 \rightarrow 011 \rightarrow 101$   
 $010 \rightarrow 110$   
 $011 \rightarrow 111$

ce qui se représente visuellement comme suit :

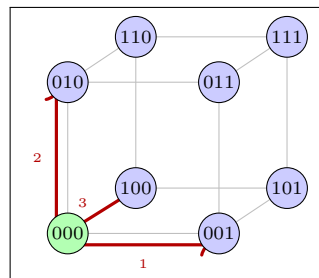


FIGURE 5 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 1

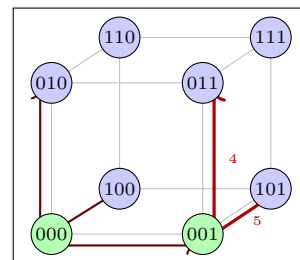


FIGURE 6 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 2

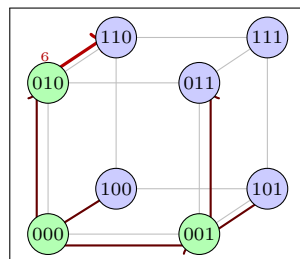


FIGURE 7 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 3

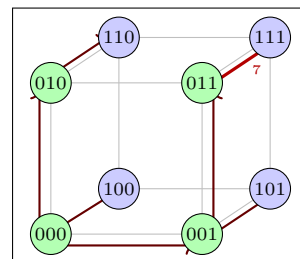


FIGURE 8 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 4

3. On peut effectuer le parcours en profondeur suivant :

$000 \rightarrow 001 \rightarrow 101 \rightarrow 111 \rightarrow 110 \rightarrow 100$

$100 \rightarrow 110$

$110 \rightarrow 010 \rightarrow 011$

ce qui se représente visuellement comme suit :

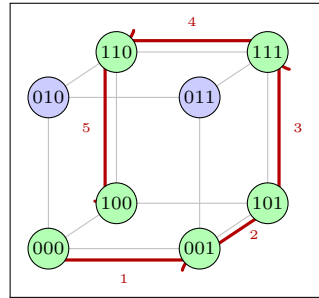


FIGURE 9 –  
DFS sur  $Q_3$  — Phase 1

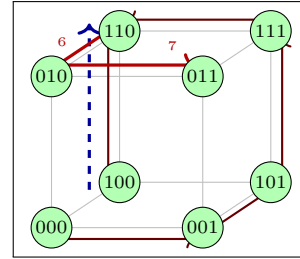


FIGURE 10 –  
DFS sur  $Q_3$  — Phase 2

### Exercice 3 Biparti.

Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair comme sous-graphe (on pourra s'aider d'un parcours en largeur).

#### Solution.

Montrons qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair comme sous-graphe.

- Sens direct : Supposons que  $G$  est biparti. Soit  $C$  un cycle de  $G$ . Par définition d'un graphe biparti, on peut colorier les sommets de  $G$  en deux couleurs telles que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. En parcourant le cycle  $C$ , on remarque que chaque sommet doit avoir une couleur différente du sommet précédent. Ainsi, si le cycle  $C$  a une longueur impaire, le premier et le dernier sommet du cycle  $C$  seraient de la même couleur, ce qui est impossible car ils sont adjacents. Donc  $C$  ne peut pas être de longueur impaire.

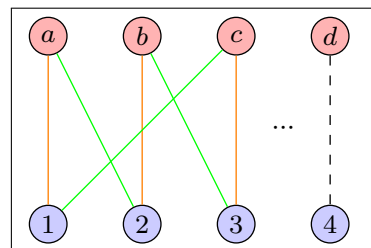


FIGURE 11 – Cas cycle pair

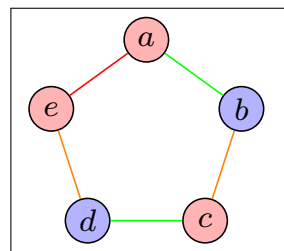


FIGURE 12 – Cas cycle impair

- Sens indirect : Supposons que  $G$  ne contient pas de cycle impair. On choisit un sommet racine  $r$  et on effectue un BFS à partir de  $r$ . On colorie le sommet  $r$  en rouge. Ensuite, on colorie tous les sommets de niveau 1 (voisins de  $r$ ) en bleu, tous les sommets de niveau 2 en rouge, tous les sommets de niveau 3 en bleu, et ainsi de suite.

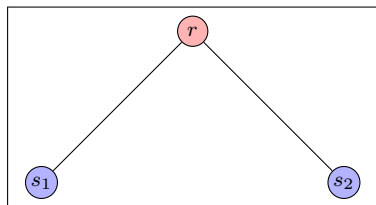


FIGURE 13 – Première étape du BFS

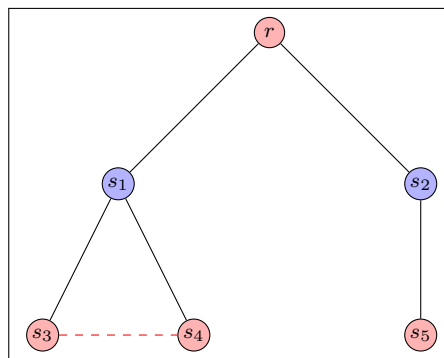


FIGURE 14 – Deuxième étape du BFS

Si il y avait une arête entre deux sommets du même niveau, cela formerait un cycle impair avec le chemin passant par la racine  $r$ . En effet, si deux sommets  $u$  et  $v$  sont au même niveau et sont adjacents, alors le chemin de  $r$  à  $u$ , l'arête  $(u, v)$ , et le chemin de  $v$  à  $r$  forment un cycle dont la longueur est impaire (car il y a un nombre pair d'arêtes dans les chemins plus une arête entre  $u$  et  $v$ ).

Cependant, par hypothèse,  $G$  ne contient pas de cycle impair. Donc, il ne peut pas y avoir d'arêtes entre deux sommets du même niveau. Par conséquent, tous les sommets de niveau pair sont colorés en rouge et tous les sommets de niveau impair sont colorés en bleu. Ainsi,  $G$  est biparti.

#### Exercice 4 Long Chemin.

Montrer que tout graphe  $G$  contient un chemin de longueur  $\delta(G)$ , ainsi qu'un cycle de longueur  $\geq \delta(G) + 1$  si  $\delta(G) \geq 2$ . Montrer que ces résultats sont optimaux.

#### Solution.

Soit  $x_0$  un sommet de  $G$ . On sait que  $\delta(x) \geq \delta(G)$ . Il a donc au moins  $\delta(G)$  voisins. On choisit un de ces voisins, notons le  $x_1$ . Ce nouveau sommet a aussi  $\delta(G)$  voisins dont au moins  $\delta(G) - 1$  différents de ceux choisis précédemment. En répétant processus  $\delta(G)$  fois, on aura bien obtenu  $\delta(G)$  sommets différents de  $x_0$  et tels que  $(x_0, x_1, \dots, x_{\delta(G)})$  forme un chemin de longueur  $\delta(G)$ . On reprend le chemin  $(x_0, x_1, \dots, x_{\delta(G)})$  choisi précédemment. Si  $x_{\delta(G)}$  est de degré

#### Exercice 5 Convexité.

#### Solution.

A remplir

#### Exercice 6 Convexité.

#### Solution.

A remplir

#### Exercice 7 Convexité.

#### Solution.

A remplir

**Exercice 8 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 9 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 10 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 11 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

## TD2 — Couplages

### Exercice 1 Euh . . .

Que vaut  $\alpha(L(G))$  ?

#### Solution.

On a

$$\alpha(L(G)) = \mu(G)$$

### Exercice 2 Couplage maximum Vs couplage maximal.

Soient  $G$  un graphe,  $M$  un couplage maximal de  $G$  et  $M^*$  un couplage maximum de  $G$ . Montrer que  $|M| \leq |M^*| \leq 2|M|$ .

#### Solution.

On peut considérer le stable  $S$  tel que  $S \cup M = G$ .

### Exercice 3 Couplage dans les graphes sans triangle.

Un graphe est dit sans triangle si il ne contient pas de cycle de longueur 3 comme sous-graphe. Si  $G$  est sans triangle, montrer que

$$\chi(\overline{G}) + \mu(G) = n$$

#### Solution.

A remplir

### Exercice 4 Jeu de Slither.

Le jeu de *Slither* se joue sur un graphe connexe, noté  $G$ . Chaque joueur choisit à son tour un sommet  $v_i$  non précédemment choisi. La suite  $v_0, v_1, \dots$  doit former un chemin, c'est-à-dire que tout pour tout  $i = 1, 2, \dots$ ,  $v_i$  doit être choisi comme adjacent à  $v_{i-1}$ . Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Montrer que si  $G$  admet un couplage parfait alors le second joueur a une stratégie gagnante. Montrer que si  $G$  n'admet pas un couplage parfait alors le premier joueur a une stratégie gagnante

#### Solution.

A remplir

### Exercice 5 Tous d'un coup.

Soit  $G = (X \cup Y, E)$  un graphe biparti de bipartition  $(X, Y)$  avec  $\Delta(G) \geq 1$ .

1. Montrer que  $G$  admet un couplage couvrant tous les sommets de  $X$  de degré  $\Delta(G)$ .
2. Montrer que  $G$  admet un couplage couvrant tous les sommets de  $G$  de degré  $\Delta(G)$ .
3. En déduire qu'il est possible de partitionner les arêtes de  $G$  en  $\Delta(G)$  couplages.

#### Solution.

1. On note  $k = \Delta(G)$ . Soit  $S \subseteq X_\Delta$ . On note  $Z = N_G(S)$ . On va compter  $e$  le nombre d'arêtes entre  $S$  et  $Z$  :

$$e = \sum_{s \in S} \deg(s) = k \cdot |S|$$

Par ailleurs, comme toute arête comptée est incidente à un sommet  $z$ , on a :

$$e \leq \sum_{z \in Z} \deg(z) = k \cdot |Z|$$

Donc  $k \cdot |S| \leq k \cdot |Z|$  d'où  $|S| \leq |Z| = |N_G(S)|$ . Par le théorème de Hall,  $G$  admet un couplage qui sature  $X_\Delta$ .

- Par la question précédente il existe un couplage  $M_X$  saturant  $X_\Delta$ . De même, il existe un couplage  $M_Y$  saturant  $Y_\Delta$ . On va extraire de  $M_X \cup M_Y$  un couplage  $M$  saturant  $X_\Delta \cup Y_\Delta$ . On construit  $M$  en regardant chaque composante connexe de  $M_X \cup M_Y$ .

Soit  $C$  une composante connexe de  $(V, M_X \cup M_Y)$  ( $C$  est soit un chemin soit un cycle).

- Si  $C$  est un cycle alors on choisit  $M = M_X$  ou  $M = M_Y$  (les deux conviennent) et on continue à saturer les sommets de  $C$
- Si  $C$  est un chemin on peut supposer que sa première arête est dans  $M_X$ . On note  $C = x_1 x_2 \dots x_k$ . On a trois cas :
  - (a) Si  $x_1 \in Y_\Delta$ , c'est impossible car  $x_1$  doit être incident à une arête de  $M_Y$ ,
  - (b) Si  $x_1 \in Y \setminus Y_\Delta$ , on prend  $M = M_Y$ ,
  - (c) Si  $x_1 \in X_\Delta$  on prend  $M = M_X$ .

### Exercice 6 Famille couvrante de cycles dans les graphes $2k$ -réguliers.

Un  $2$ -factor d'un graphe  $G$  est un sous-graphe  $2$ -régulier couvrant  $G$ . Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant dû à J. Petersen (1891) : *tout graphe régulier de degré pair admet un  $2$ -factor*. Soit  $G$  un graphe régulier de degré pair.

- A l'aide d'une marche eulérienne de  $G$ , montrer que  $G$  admet une orientation  $D$  dans laquelle  $d^+(x) = d^-(x)$  pour tout sommet  $x$  de  $G$ .
- Le **biparti d'adjacence** d'un graphe orienté  $D = (V, A)$  est le graphe de sommets  $\{x^+, x^-, : x \in V(D)\}$  et d'arêtes  $\{u^+ v^-, : uv \in A(D)\}$ . En étudiant le biparti d'adjacence du graphe orienté produit à la question précédente, conclure.

### Solution.

A remplir

### Exercice 7 Convexité.

### Solution.

- On construit le graphe biparti  $((X, Y), E)$  avec  $Y = A$  et  $X = \{1, \dots, p\}$ . On relie  $a \in A$  à  $i$  si  $a \in A_i$ . Un SDR correspond à un couplage saturant  $X$ .  
C'est exactement le théorème de Hall.
- Dans le cas où il y a  $p$ -candidats potentiels pour  $p$  ensembles, chaque élément sera un représentant.
- 

### Exercice 8 Subtil SAT.

### Solution.

- Soit  $F$  une formule 3-SAT. Pour  $i = 1 \dots s$  nombre de variables, si  $x_i$  apparaît  $l_i$  fois, on crée  $l_i$  variables  $x_i^1, \dots, x_i^{l_i}$  dans  $F$ , on remplace la  $j$ -ème occurrence de  $x_i$  par  $x_i^j$ .  
On ajoute les clauses

$$(\neg x_i^1 \vee x_i^2) \wedge (\neg x_i^2 \vee x_i^3) \wedge \dots \wedge (\neg x_i^{l_i} \vee x_i^1).$$

Elles sont toutes de taille  $\leq 2$  et maintenant toutes les variables  $x_i^j$  ont la même valeur.

On obtient une formule équivalente à  $F$ , où les clauses sont de taille  $\leq 3$  et les variables apparaissent 3 fois.

Comme 3-SAT est NP-complet,  $(\leq 3)$ -SAT est aussi NP-complet.

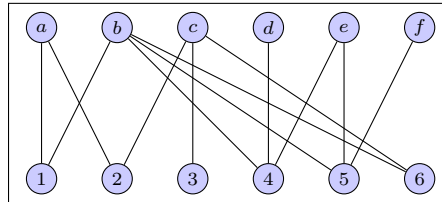
2. On fait le biparti  $G$  Clause-Variable. Les sommets clauses sont de degré 3 dans  $G$ . Les sommets variables sont de degré  $\leq 3$ .

Par l'exercice 5 il existe un couplage  $M$  saturant les clauses. Chaque clause  $C_i$  a sa variable privée  $M \cdot C_i$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on instancie  $M \cdot C_i$  pour satisfaire  $C_i$ .

Ainsi, la formule de départ est toujours satisfaisable.

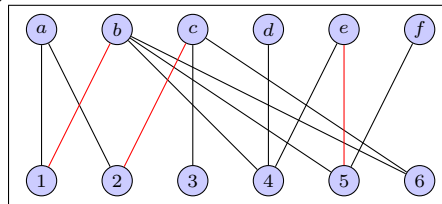
### Exercice 9 Algo de couplage max — Partie 1.

Dans le graphe biparti suivant, appliquer l'algo de calcul d'un couplage maximum, en sachant que le couplage  $\{1b, 2c\}$  a déjà été précalculé.

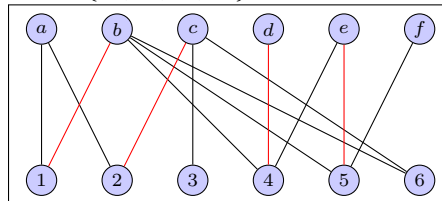


#### Solution.

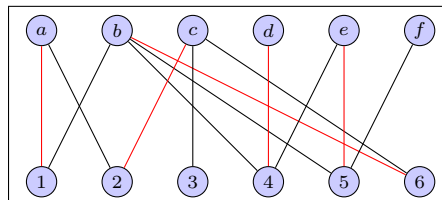
On nous donne  $\{1b, 2c\}$  au départ. On part d'un sommet non saturé et on essaie de lui trouver un chemin augmentant. Prenons ici par exemple 5. On le lie à  $e$  et on le rajoute au couplage qui devient alors  $\{1b, 2c, 5e\}$ .



Ensuite on choisit encore un nouveau sommet non saturé, par exemple  $d$ . On le relie à 4 et on le rajoute au couplage qui devient  $\{1b, 2c, 5e, 4d\}$ .



On continue, cette fois-ci disons avec  $a$ . On cherche un chemin augmentant à partir de  $a$  et on trouve  $\{a1, 1b, b6\}$ . On augmente le chemin et on le rajoute au couplage qui devient alors  $\{a1, b6, 2c, 5e, 4d\}$ .



On choisit encore un nouveau sommet, disons 3. On ne trouve pas de chemin augmentant à partir de 3 donc on réessaie avec un autre sommet non saturé, ici  $f$ . On ne trouve pas non plus de chemin augmentant à partir de  $f$ . Comme il n'y a plus de sommets non saturés, l'algorithme s'arrête et on a trouvé un couplage maximum.

### Exercice 10 Convexité.

**Solution.**

A remplir

### Exercice 11 Convexité.

**Solution.**

A remplir

### Exercice 12 Convexité.

**Solution.**

On part de  $m$  non saturé et on calcule un arbre de couplage. Le sommet  $j$  est non saturé donc on a le chemin augmentant  $mj$ , on le rajoute au couplage.

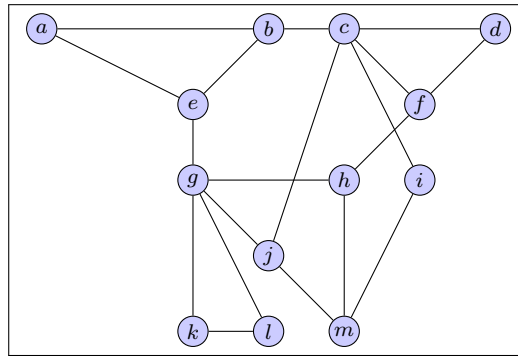


FIGURE 15 – Graphe  $G$

On part de  $d$  non saturé.

On trouve  $df$  une arête entre 2 sommets rouges, c'est-à-dire un blossom. On le contracte.

On part de  $i$  non saturé et on trouve  $i-cdf$  un chemin augmentant. En décontractant le blossom, on trouve  $i-c-f-d$  un chemin augmentant.

On augmente  $M$ , on a  $M$  final :

$$M = \{ic, fd, ae, gh, jm, kl\}$$

seul  $b$  est non saturé :  $M$  est maximum

### Exercice 13 Théorème de structure de Gallai (1964).

Consigne ici, faut pas m'en tenir rigueur

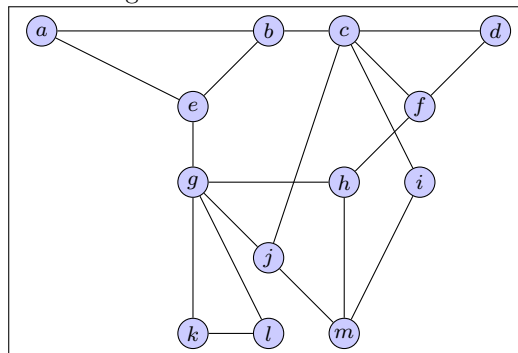
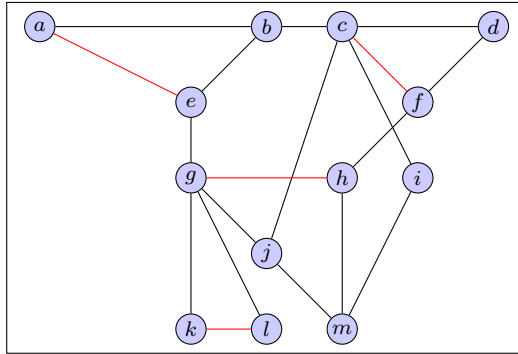


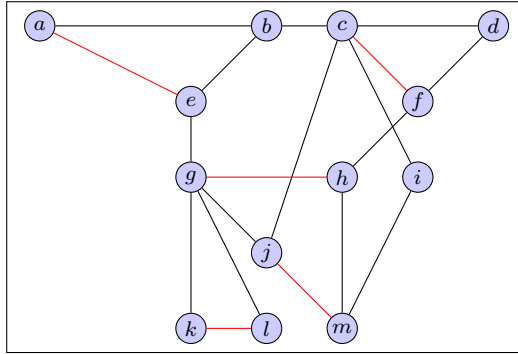
FIGURE 16 – Graphe  $G$

**Solution.**

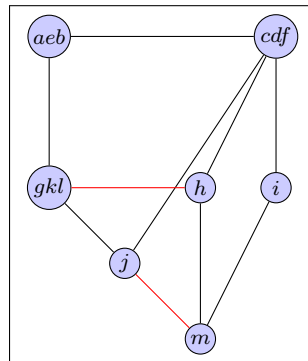
On nous donne le couplage initial  $\{ae, cf, gh, kl\}$  suivant :

FIGURE 17 – Graphe  $G$ 

On choisit un sommet non saturé, disons  $m$ . On cherche un chemin augmentant à partir de  $m$  et on trouve  $mj$ . On augmente le couplage qui devient  $\{ae, cf, gh, kl, jm\}$ .

FIGURE 18 – Graphe  $G$ 

C'est un bon moment pour commencer à contracter nos blossoms. On contracte  $gkl, abe, cdf$ . Le graphe devient alors :

FIGURE 19 – Graphe  $G$ 

On choisit un nouveau sommet non saturé, disons  $i$ . On cherche un chemin augmentant à partir de  $i$  et on trouve  $i - cdf$ . Le graphe devient :

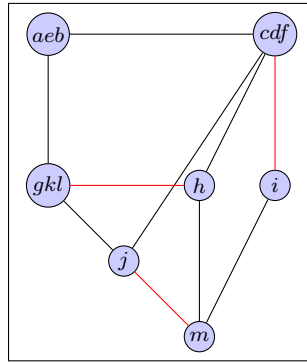


FIGURE 20 – Graphe  $G$

On ne peut plus contracter de blossom ou trouver de chemin augmentant, donc on remonte en décontractant les blossoms. Le sommet  $i$  est relié à  $c$  dans le blossom  $cdf$ , on a donc le chemin augmentant  $i - c - f - d$  dans le graphe initial. On augmente le couplage qui devient  $\{ae, gh, kl, jm, ic, fd, kl\}$ .

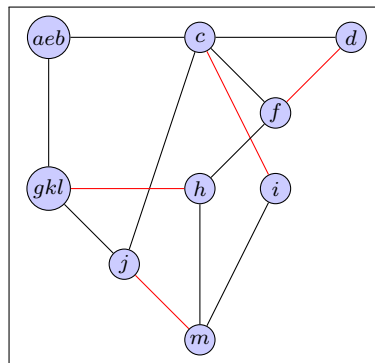


FIGURE 21 – Graphe  $G$

On voit que seul le blossom  $aeb$  n'est pas saturé, donc le couplage est maximum. On décontracte tous les blossoms pour obtenir le couplage maximum final :

$$M = \{ae, ci, df, gh, jm, kl\}$$

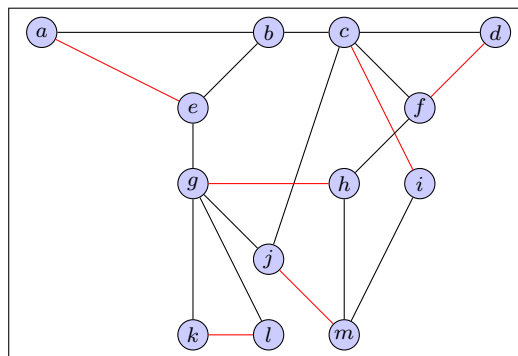


FIGURE 22 – Graphe  $G$

#### Exercice 14 Convexité.

#### Solution.

A remplir

## TD3 — Flots et circulation

### Exercice 1 Glouglouglou.

Dérouler à la main l'algorithme de Ford-Fulkerson sur les deux réseaux de transport suivants afin de déterminer dans chaque cas un flot maximal ainsi qu'une coupe minimale (les valeurs notées sur les arcs sont les capacités correspondantes). Pour le second graphe, on commencera par une augmentation de flot le long du chemin  $sabdp$  suivi d'une augmentation de flot le long de  $scedbap$ .

#### Solution.

A remplir

### Exercice 2 PL.

Soit  $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$  un réseau de transport. Montrer qu'il est possible d'écrire un programme linéaire correspondant à la recherche d'un flot de valeur maximal dans  $\mathcal{N}$ . On proposera un modèle utilisant un nombre polynomial (en la taille de  $D$ ) de variables et de contraintes.

#### Solution.

A remplir

### Exercice 3 Décomposition d'un flot.

Soit  $f$  un flot à valeurs entières sur un réseau de transport  $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$ . On veut montrer qu'il existe dans  $D$  un multi-ensemble (un ensemble où les éléments peuvent apparaître plusieurs fois) de chemins  $P_1, \dots, P_k$  tous de  $s$  à  $p$  et un multi-ensemble de cycles  $C_1, \dots, C_l$  tels que pour tout arc  $xy$  de  $D$  on ait  $f(xy) = \#\{i \in \{1, \dots, k\} : xy \in P_i\} + \#\{j \in \{1, \dots, l\} : xy \in C_j\}$ .

1. Sur le premier graphe de l'exercice 1, on considère le flot  $f$  défini par  $f(ab) = 5, f(bc) = 2, f(bp) = 4, f(ca) = 2, f(cd) = 1, f(db) = 1, f(sa) = 3, f(sc) = 1$ . Donner la décomposition voulue.
2. Prouver le résultat attendu en raisonnant par récurrence sur  $\sum_{xy \in A(D)} f(xy)$ .

#### Solution.

A remplir

### Exercice 4 Théorème de Hall.

Soit  $G = ((A, B), E)$  un graphe biparti (de bipartition  $(A, B)$ ). On souhaite montrer.

#### Solution.

A remplir

### Exercice 5 Convexité.

#### Solution.

A remplir

### Exercice 6 Convexité.

#### Solution.

A remplir



**Exercice 7 Convexité.**



**Solution.**

A remplir