HAI820I Recherche Opérationnelle II — TDs

Ivan Lejeune

31 janvier 2026

Table des matières

1 Programmation linéaire en nombres entiers

1.1 Matrice totalement unimodulaire

Exercice 1 Matrice totalement unimodulaire.
Est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires ?

1. La matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. La matrice B suivante :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. La matrice C suivante :
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. La matrice D suivante :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. Propriétés : est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires sachant que A est totalement unimodulaire ?
   (a) La matrice $-A$,
   (b) la transposée A^T,
   (c) la matrice $[A, I]$,
   (d) la matrice $[A, -A]$.
6. Considérons la matrice E définie de la manière suivante :
$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   et soit $b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Est-ce que E est totalement unimodulaire ? Trouver les deux solutions à valeurs entières au problème $EX = B$.

Solution.

1. La matrice A est totalement unimodulaire car toutes ses matrices ont déterminant $1, -1$ ou 0.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$
2. On peut regarder le critère de suffisance pour qu'une matrice soit TU. On met les lignes 1 et 3 ensemble dans A et les deux autres dans B. Alors on a :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   On a bien respecté les critères, les valeurs de signes opposés dont dans le même sous-ensemble et les valeurs de signe identique sont bien dans les sous-ensembles opposés. Alors B est totalement unimodulaire.
3. La matrice C n'est pas TU car son déterminant est 2.

4. La matrice D n'est pas TU car son déterminant est 2.
5. Si A est une matrice totalement unimodulaire alors :
   (a) la matrice $-A$ est aussi TU,
   (b) la matrice A^T est TU,
   (c) en développant le long de la diagonale de I on retrouve bien que $[A, I]$ est TU,
   (d) par les propositions ci-dessus on a bien $[A, -A]$ qui est TU.
6. La matrice E n'est pas TU. Le problème s'exprime comme :

$$PL = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Les solutions sont $X_1 = (1, 0, 1)$ et $X_2 = (0, 1, 3)$.

1.2 Arbre de branchement et exemples

Exercice 2 Solutions entières versus solutions réelles.
Donner les solutions réelles et entières des problèmes suivants.

1. Un premier LP :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. Un second LP :

$$PL_2 = \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 29 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \max(z) = 300x_1 + 205x_2 \end{cases}$$

3. Un troisième LP :

$$PL_3 = \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Solution.

1. La meilleure solution réelle ici est $x^*_{\mathbb{R}} = (0.75, 0.25)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 2$.
   La solution entière optimale est $x^*_{\mathbb{Z}} = (1, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{Z}} = 3$.
   On peut visualiser ces résultats comme suit :

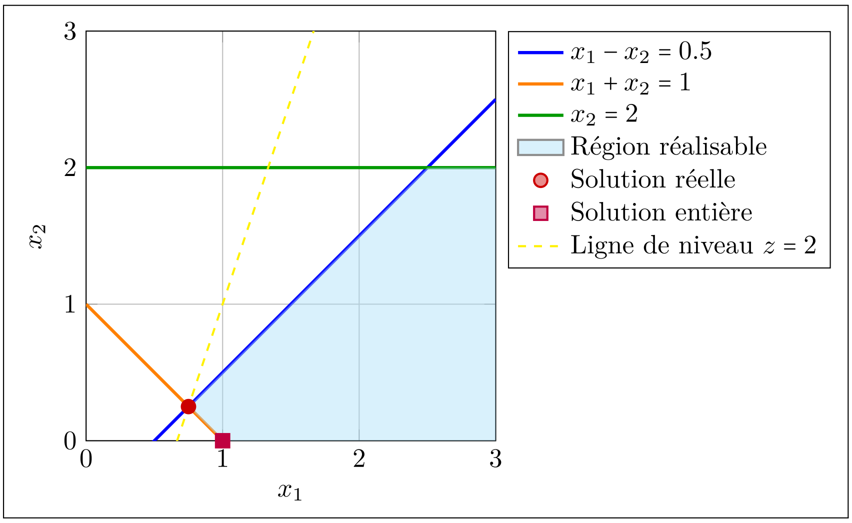

FIGURE 1 – Représentation du problème PL_1 dans $\mathbb{R}^2$

2. La meilleure solution réelle ici est $x^*_{\mathbb{R}} = (2.9, 0)$ avec $z^*_{\mathbb{R}} = 870$.
   La solution entière optimale est $x^*_{\mathbb{Z}} = (0, 4)$ avec $z^*_{\mathbb{Z}} = 820$.
   On peut visualiser ces résultats comme suit :

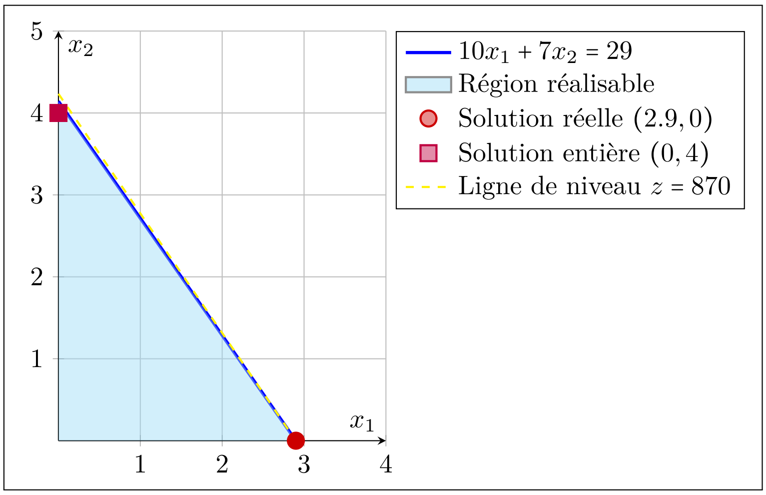

FIGURE 2 – Représentation du problème PL_2 dans $\mathbb{R}^2$

3. Le dernier problème est non borné.

Exercice 3 Détermination de l'arbre d'évaluation et de séparation pour un problème donné.

Nous considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Nous associons le programme linéaire (en valeurs réelles) PL_1 et la solution est la suivante :

$$x_1^* = 5.5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 55.$$

Le problème se sépare en deux sous-problèmes :

$$PL_2 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_3 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$\begin{aligned} x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0.2, \quad z^* = 50.2 \text{ pour } PL_2 \\ \varnothing \text{ pour } PL_3 \end{aligned}$$

Ainsi le problème PL_2 associé au programme PL_1 se décompose en sous-problèmes :

$$PL_4 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$\begin{aligned} x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 50 \text{ pour } PL_4 \\ x_1^* = 3, \quad x_2^* = 1, \quad z^* = 31 \text{ pour } PL_5 \end{aligned}$$

Donner l'arbre d'évaluation et de séparation associé à la résolution du problème PL_1.

Solution.

1.3 Résolution effective

Exercice 4 Résolution en utilisant la méthode de séparation et évaluation.
On considère le problème linéaire en nombres entiers ci-dessous :

$$PL_0 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_2.

2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable x_1.
3. Donner la signifaction géométrique du premier branchement sur la variable x_2. Quels sont les principes vus en cours que l'on retrouve lors de l'interprétation géométrique ?

Solution.

1. L'arbre de branchement sur x_2 est le suivant :

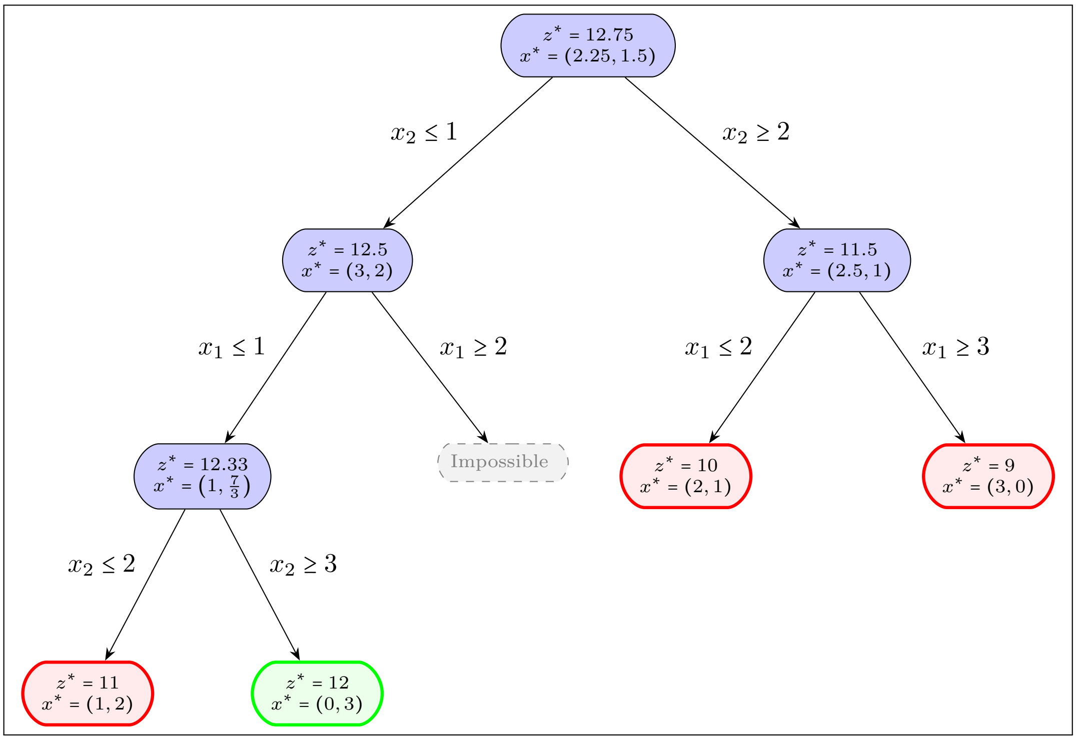

Figure 3 – Branch and bound

2. L'arbre de branchement sur x_1 est le suivant :

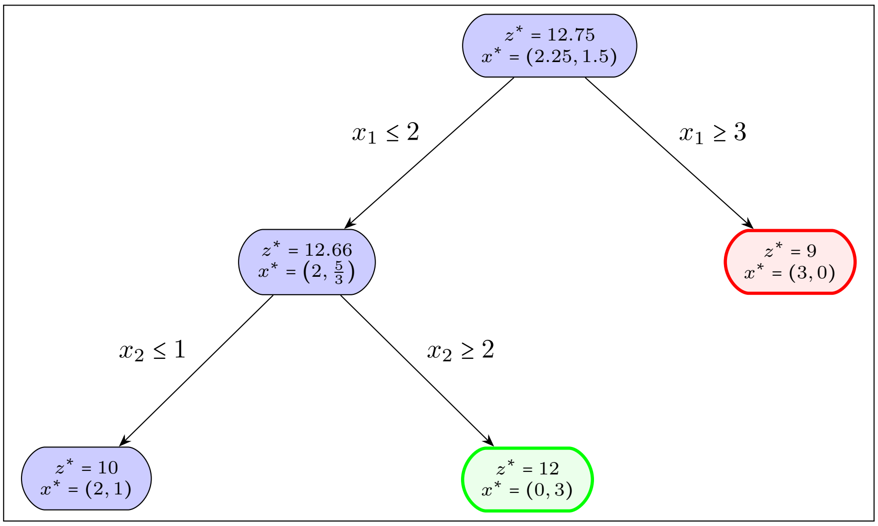

Figure 4 – Branch and bound

Exercice 5 Branch and bound et plus court chemin.
Nous considérons le graphe donné par la figure 5 suivante :

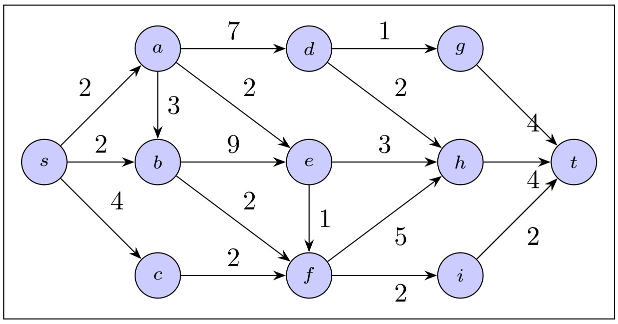

FIGURE 5 – Recherche d'un plus court chemin par branch and bound

Donner deux stratégies en utilisant le principe du branch and bound pour résoudre le problème d'un plus court chemin. Appliquer vos stratégies sur le graphe de la figure 5.

Solution.

Exercice 6 Contraintes avec une seule variable.
On considère un problème de programmation linéaire standard, à une seule contrainte, défini par

$$\max \sum_{j=1}^{n} u_j x_j$$

avec

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V, \text{ et } x_j \geq 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$$

Tous les coefficient u_j et v_j sont supposés strictement positifs et l'on suppose les variables classées par rapports utilité/volume décroissants ou, pour rester dans un formalisme plus mathématique, suivant les valeurs décroissantes des rapports $\frac{u_j}{v_j}$. Montrer que la variable x_1 est entrante et que, en la faisant entrer en base, on atteint l'optimum de l'objectif en une seule étape. Exprimer la valeur de l'objectif en fonction des différents coefficients.

Solution.

Exercice 7 Le problème du voyageur du commerce symétrique.

1. Appliquer la méthode par séparation et évaluation décrite en cours pour résoudre le problème du voyageur de commerce dans le graphe K_6 dont la matrice des poids est la suivante :

	x	y	z	t	u	v
x	∞	4	7	2	5	4
y	4	∞	3	2	1	2
z	7	3	∞	2	6	3
t	2	2	2	∞	5	3
u	5	1	6	5	∞	2
v	4	2	3	3	2	∞

2. Que faudrait-il faire si on voulait connaitre tous les cycles de poids minimum ?

Solution.

1.4 Inégalités valides

Exercice 8 Simples inégalités valides.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{x_i \in \{0,1\} : \ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 \leq -2\}$$

Donner deux équations valides.

Solution.

Exercice 9 Simple inégalité valide.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x,y), \ 0 \leq x \leq 5, y \in \{0,1\} : \ x \leq 9999y\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution.

Exercice 10 Simple inégalité valide.
Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x,y), \ 0 \leq x \leq 14, y \in \{0,1\} : \ x \leq 10y\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution.

Exercice 11 Simple inégalité valide. Considérons la région entière $X = P \cap \mathbb{N}^4$ avec

$$P = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : \ 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$$

Donner une inégalité valide.

Solution.

Exercice 12 title.

Solution.

Exercice 13 title.

Solution.

1.5 Coupes

Exercice 14 title.

Solution.

Exercice 15 title.

Solution.

Exercice 16 title.

Solution.

1.6 Enveloppe convexe

Exercice 17 title.

Solution.

Exercice 18 title.

Solution.

Exercice 19 title.

Solution.

Exercice 20 title.

Solution.

Exercice 21 title.

Solution.

Exercice 22 title.

Solution.

Exercice 23 title.

Solution.

Exercice 24 title.

Solution.

Exercice 25 title.

Solution.

2 Génération de colonnes

Rappelons le principe de l'algorithme de la génération de colonnes :

- Initialisation : on met quelques colonnes de PL. Soit PL_R.
- Itérations :
  - — Résoudre (PL_R).
  - — Calculer les couts réduits des variables de (PL).
  - — Si toutes les variables de (PL) ont un cout réduit ≥ 0 alors STOP ((PL) est résolu). Sinon ajouter une variable de cout réduit minimum à (PL_R) et résoudre à nouveau (PL_R).

  Pour calculer les couts réduits :
- on utilise les variables duales $\mu \geq 0$ associées aux contraintes
- Couts réduits : $c - \mu A$.
- Dimensions :
  - — c et μ vecteurs lignes,
  - — c avec n colonnes et μ avec m colonnes,
  - — A la matrice $m \times n$
  - — n le nombre de variables et m le nombre de contraintes.

Exercice 26 title.

Solution.

Exercice 27 title.

Solution.

Exercice 28 title.

Solution.

3 Lagrangien

Exercice 29 title.

Solution.

4 Modélisation

Exercice 30 title.

Solution.

Exercice 31 title.

Solution.

Exercice 32 title.

Solution.

Exercice 33 title.

Solution.

Exercice 34 title.

Solution.

Exercice 35 title.

Solution.