

# HAI702I — TDs

Ivan Lejeune

18 novembre 2025

## Table des matières

TD1 — Espaces vectoriels . . . . .	2
TD2 — Transformations linéaires . . . . .	9
TD3 — Réduction des endomorphismes . . . . .	15
Préparation à l'examen . . . . .	16

## TD1 — Espaces vectoriels

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

### Exercice 1.1.

Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur  $(1, 2, 2)$ .

**Solution.** On rappelle les définitions importantes :

- Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont orthogonaux si  $\langle u, v \rangle = 0$ .
- Une base est orthonormale si ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.
- Une base est directe si le produit vectoriel du premier vecteur par le deuxième donne le troisième.
- Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont colinéaires s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $u = \lambda v$ .

On veut former une base  $(u, v, w)$  avec les critères ci-dessus. Commençons par choisir notre premier vecteur  $u$ .

On veut  $u$  colinéaire à  $(1, 2, 2)$  donc on a

$$u = \lambda(1, 2, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Pour que la base soit directe, on veut que  $u$  soit de norme 1 :

$$\begin{aligned} \|u\| = 1 &\iff \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2} = 1 \\ &\iff \sqrt{\lambda^2(1^2 + 2^2 + 2^2)} = 1 \\ &\iff \sqrt{9\lambda^2} = 1 \\ &\iff 3\lambda = 1 \\ &\iff \lambda = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On a donc déterminé notre premier vecteur :

$$u = \frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

Ensuite on veut choisir  $v$ . Il faut que  $v$  soit orthogonal à  $u$  :

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Si on note  $v' = (x, y, z)$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle u, v' \rangle = 0 &\iff \frac{1}{3}(1, 2, 2) \cdot (x, y, z) = 0 \\ &\iff \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) = 0 \\ &\iff x + 2y + 2z = 0. \end{aligned}$$

Ce système admet plusieurs solutions, on peut choisir celle qui nous arrange. Ici, on choisit  $x = 0$ ,  $y = 1$  et  $z = -1$ . On a bien :

$$0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

Maintenant il faut normaliser  $v'$  pour obtenir  $v$  :

$$\|v'\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

On peut alors prendre  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$ .

Enfin, pour  $w$ , on peut faire le produit vectoriel  $u \wedge v$  pour être sûr que la base soit directe. Il y a plusieurs manières de faire le calcul, ici on utilise le déterminant :

$$\begin{aligned} w = u \wedge v &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot e_1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot e_2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot e_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (e_1(-2 - 2) - e_2(-1 - 0) + e_3(1 - 0)) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (-4, 1, 1). \end{aligned}$$

On trouve alors notre dernier vecteur :

$$w = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, 1).$$

**Remarque.** Notre dernier vecteur est déjà de norme 1 car  $u$  et  $v$  sont orthogonaux et de norme 1 :

On a alors notre base orthonormale directe :

$$\mathcal{B} = (u, v, w) = \left( \frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, 1) \right).$$

On peut vérifier rapidement qu'on a bien :

- $\|u\| = 1$ ,  $\|v\| = 1$  et  $\|w\| = 1$ .
- $\langle u, v \rangle = 0$ ,  $\langle u, w \rangle = 0$  et  $\langle v, w \rangle = 0$ .
- $u \wedge v = w$ .

### Exercice 1.2.

Pour quelles valeurs de  $a$  les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

- $(1, 0, a)$ ,
- $(a, 1, 0)$ ,
- $(0, a, 1)$ .

**Solution.** Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si la matrice formée par ces vecteurs a un déterminant nul. Ici on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^3.$$

On cherche donc les valeurs de  $a$  telles que :

$$1 + a^3 = 0 \iff a^3 = -1 \iff a = -1.$$

Il n'y a pas d'autres solutions réelles. On peut le vérifier en factorisant  $a^3 + 1$  :

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

où  $a^2 - a + 1$  n'a pas de racines réelles.

Donc les vecteurs sont coplanaires si et seulement si  $\boxed{a = -1}$ .

### Exercice 1.3.

Soient  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs de l'espace et  $a \in \mathbb{R}$ . On considère l'équation vectorielle d'inconnue  $x$  suivante :

$$u \wedge x = v$$

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors  $u$  et  $v$  sont orthogonaux. On supposera dans la suite que  $u$  et  $v$  sont orthogonaux.
2. Déterminer toutes les solutions colinéaires à  $u \wedge v$ .
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Déterminer les vecteurs solutions qui vérifient en outre  $\langle x, w \rangle = a$ .

### Solution.

1. Si l'équation admet une solution alors par définition du produit vectoriel on a  $v$  orthogonal à  $u$  et  $x$ , donc en particulier  $v$  est orthogonal à  $u$ .
2. Une solution colinéaire à  $u \wedge v$  s'écrit  $x = \lambda(u \wedge v)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculons  $u \wedge x$  :

$$\begin{aligned} u \wedge x &= u \wedge (\lambda(u \wedge v)) \\ &= \langle u, v \rangle \lambda v - \langle u, \lambda u \rangle v \\ &= -\lambda \langle u, u \rangle v \\ &= -\lambda \|u\|^2 v \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} -\lambda \|u\|^2 v &= v \\ \iff -\lambda \|u\|^2 &= 1 \\ \iff \lambda &= -\frac{1}{\|u\|^2}. \end{aligned}$$

La solution colinéaire à  $u \wedge v$  est donc :

$$\boxed{x = -\frac{1}{\|u\|^2}(u \wedge v)}.$$

3. Une solution de l'équation  $u \wedge x = v$  se situe sur le plan formé par  $u$  et  $u \wedge v$ . On va donc chercher une solution sous la forme :

$$x = \alpha u + \beta(u \wedge v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} u \wedge x &= u \wedge (\alpha u + \beta(u \wedge v)) \\ &= \alpha(u \wedge u) + \beta(u \wedge (u \wedge v)) \\ &= 0 + \beta(\langle u, v \rangle u - \langle u, u \rangle v) \\ &= -\beta \|u\|^2 v. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} -\beta \|u\|^2 v &= v \\ \iff -\beta \|u\|^2 &= 1 \\ \iff \beta &= -\frac{1}{\|u\|^2}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{ x = \alpha u - \frac{1}{\|u\|^2}(u \wedge v) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}}.$$

4. Non traité.

#### **Exercice 1.4. \***

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal. On note  $\mathcal{D}$  la droite passant par le point  $A = (1, 3, -2)$  et de vecteur directeur  $u = (2, 1, 0)$ ,  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $2x - 3y + 5z = 7$  et  $M$  le point de coordonnées  $(1, 2, 3)$ .

1. Calculer la distance de  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$ .
2. Calculer la distance de  $M$  au plan  $\mathcal{P}$ .

*Indication : remarquer que le point  $(1, 0, 1)$  appartient au plan  $\mathcal{P}$ .*

#### **Solution.**

1. Il y a plusieurs manières de calculer la distance d'un point à une droite.

Première méthode : on cherche le point  $X$  de la droite  $\mathcal{D}$  tel que le segment  $MX$  soit orthogonal à la droite. Le point  $X$  de la droite  $\mathcal{D}$  s'écrit :

$$X = A + \lambda u = (1, 3, -2) + \lambda(2, 1, 0) = (1 + 2\lambda, 3 + \lambda, -2).$$

On cherche  $\lambda$  tel que  $MX$  soit orthogonal à  $u$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \langle MX, u \rangle &= 0 \\ \iff \langle X - M, u \rangle &= 0 \\ \iff \langle (1 + 2\lambda - 1, 3 + \lambda - 2, -2 - 3), (2, 1, 0) \rangle &= 0 \\ \iff \langle (2\lambda, 1 + \lambda, -5), (2, 1, 0) \rangle &= 0 \\ \iff 4\lambda + 1 + \lambda &= 0 \\ \iff 5\lambda + 1 &= 0 \\ \iff \lambda &= -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$X = \left(1 - \frac{2}{5}, 3 - \frac{1}{5}, -2\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}, -2\right).$$

La distance cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
d(M, \mathcal{D}) &= \|MX\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{3}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - 2\right)^2 + (-2 - 3)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 25} \\
&= \sqrt{\frac{4 + 16 + 625}{25}} \\
&= \sqrt{\frac{645}{25}} \\
&= \frac{\sqrt{645}}{5}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on utilise la formule de la distance d'un point à une droite :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|AM \wedge u\|}{\|u\|}.$$

On a :

$$AM = M - A = (1 - 1, 2 - 3, 3 - (-2)) = (0, -1, 5).$$

Calculons le produit vectoriel :

$$AM \wedge u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5e_1 + 10e_2 + 2e_3.$$

On en déduit :

$$\|AM \wedge u\| = \sqrt{(-5)^2 + 10^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 100 + 4} = \sqrt{129}.$$

De plus :

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

On trouve donc :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{129}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{645}}{5}.$$

2. De même, il y a plusieurs manières de calculer la distance d'un point à un plan.

Première méthode : on cherche le point  $Y$  du plan  $\mathcal{P}$  tel que le segment  $MY$  soit orthogonal au plan. Le plan  $\mathcal{P}$  est orthogonal au vecteur normal  $n = (2, -3, 5)$ . Ainsi,  $Y$  s'écrit :

$$Y = M + \mu n = (1, 2, 3) + \mu(2, -3, 5) = (1 + 2\mu, 2 - 3\mu, 3 + 5\mu).$$

On cherche  $\mu$  tel que  $Y$  appartienne au plan, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
2(1 + 2\mu) - 3(2 - 3\mu) + 5(3 + 5\mu) &= 7 \\
\iff 2 + 4\mu - 6 + 9\mu + 15 + 25\mu &= 7 \\
\iff 38\mu + 11 &= 7 \\
\iff 38\mu &= -4 \\
\iff \mu &= -\frac{2}{19}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} Y &= \left(1 - \frac{4}{19}, 2 + \frac{6}{19}, 3 - \frac{10}{19}\right) \\ &= \left(\frac{15}{19}, \frac{44}{19}, \frac{47}{19}\right). \end{aligned}$$

La distance cherchée est donc :

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) &= \|MY\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{15}{19} - 1\right)^2 + \left(\frac{44}{19} - 2\right)^2 + \left(\frac{47}{19} - 3\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{361} + \frac{36}{361} + \frac{100}{361}} \\ &= \sqrt{\frac{16 + 36 + 100}{361}} \\ &= \sqrt{\frac{152}{361}} \\ &= \frac{\sqrt{152}}{19}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode : on utilise la formule de la distance d'un point à un plan :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

où  $ax + by + cz + d = 0$  est l'équation du plan et  $M = (x_0, y_0, z_0)$ . Ici,  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,  $c = 5$  et  $d = -7$ . On a :

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{P}) &= \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} \\ &= \frac{|2 - 6 + 15 - 7|}{\sqrt{4 + 9 + 25}} \\ &= \frac{|4|}{\sqrt{38}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{38}} = \frac{4\sqrt{38}}{38} = \frac{2\sqrt{38}}{19} = \frac{\sqrt{152}}{19}. \end{aligned}$$

La distance cherchée est donc :

$$d(M, \mathcal{P}) = \boxed{\frac{\sqrt{152}}{19}}.$$

### Exercice 1.5. \*

Déterminer la projection orthogonale  $\Delta'$  de la droite  $\Delta$  d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

dans le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y + z = 1$ .

**Solution.** Non traité.

**Exercice 1.6. \***

Calculer l'équation de la sphère de centre  $(1, 1, 1)$  et dont le plan tangent est  $x + y + z = 2$ .

**Solution.** Non traité.

## TD2 — Transformations linéaires

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

### Exercice 2.1 Transformation de $\mathbb{R}^2$ .

Ecrire pour chaque application linéaire ci dessous la matrice (dans la base canonique) de :

1. la rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $(0, 0)$ ,
2. la projection sur la droite  $\text{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,
3. la symétrie par rapport à la droite  $\text{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ .

#### Solution.

1. La matrice de la rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $(0, 0)$  est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2. On sait que la projection d'un vecteur  $u$  sur la droite définie par  $v$  est :

$$p_{u/v} = \frac{\langle u, v \rangle \cdot v}{\|v\|^2}.$$

Il nous faut trouver l'image des vecteurs de la base canonique par la projection. Donc :

$$\begin{aligned} p_{e_1/v} &= \frac{\langle e_1, v \rangle \cdot v}{\|v\|^2} \\ &= \frac{1 \times a_1 + 0 \times a_2}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a l'image de  $e_1$ . On fait de même pour  $e_2$  :

$$\begin{aligned} p_{e_2/v} &= \frac{\langle e_2, v \rangle \cdot v}{\|v\|^2} \\ &= \frac{0 \times a_1 + 1 \times a_2}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, on met le tout ensemble pour obtenir la matrice :

$$P_{p/v} = \begin{pmatrix} \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

3. La symétrie par rapport à la droite définie par  $v$  est la transformation suivante :

$$S = e_1 + 2d = e_1 + 2(p_{e_1/v} - e_1) = 2p_{e_1/v} - e_1.$$

où  $d = p_{e_1/v} - e_1$ . Alors :

$$P_{S/v} = 2P - I_2 = \begin{pmatrix} \frac{2a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} - 1 & \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} & \frac{2a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} - 1 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2.2.

Soit  $a, b \in \mathbb{R}^3$ . On note  $a_{\perp b}$  le vecteur projeté de  $a$  sur le plan orthogonal à  $b$ .

1. Exprimer  $a_{\perp b}$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
2. Démontrer que  $a_{\perp b} = \frac{(b \wedge a) \wedge b}{\|b\|^2}$ .
3. Trouver une matrice  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  telle que  $a_{\perp b} = Ma$ . Est-elle inversible ?

**Solution.** Non traité.

### Exercice 2.3 Inverser des matrices sans calculs.

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que  $A^2 = 2I_3 - A$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A^3 - A$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

3. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0$ . Démontrer que la matrice  $I_n - A$  est inversible et déterminer son inverse.

**Solution.**

1. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I_3 - A.$$

Donc  $A^2 = 2I_3 - A$ . Il en suit

$$\begin{aligned} A^2 = 2I_3 - A &\iff A^2 + A = 2I_3 \\ &\iff \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3 \\ &\iff A \left( \frac{1}{2}(A + I_3) \right) = I_3. \end{aligned}$$

Donc  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3).$$

2. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} A^3 - A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on en déduit que  $A$  est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)}.$$

3. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice nilpotente. On cherche un inverse  $X$  de sorte que  $(I_n - A)X = I_n$ .  
On remarque que dans le cadre des réels, l'inverse de  $1 - x$  est  $\frac{1}{1-x}$ . Mais aussi :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

On pose alors  $Y$  un tel candidat :

$$Y = I_n + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^p A^k.$$

Où  $p$  est le plus petit entier tel que  $A^p = 0$ . Il suit alors :

$$\begin{aligned} (I_n - A)Y &= Y - AY \\ &= \sum_{k=0}^p A^k - A \sum_{k=0}^p A^k \\ &= \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=0}^p A^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=1}^{p+1} A^k \\ &= \sum_{k=0}^p A^k - \sum_{k=1}^p A^k - A^{p+1} \\ &= I_n + \sum_{k=1}^p A^k - \sum_{k=1}^p A^k - 0 \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Notre candidat était bien choisi, donc  $I_n - A$  est inversible et

$$\boxed{(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^p A^k}.$$

#### **Exercice 2.4 Déterminant d'une matrice triangulaire. \***

Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses entrées diagonales.

**Solution.** Soit  $M$  une matrice triangulaire. On peut supposer sans perte de généralité que  $M$  est triangulaire supérieure (en effet, le déterminant d'une matrice est le même que celui de sa transposée). Alors  $M$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} \\ 0 & 0 & m_{3,3} & \cdots & m_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

On peut développer le calcul du déterminant :

$$\det(M) = m_{1,1} \det \begin{pmatrix} m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,n} \\ 0 & m_{3,3} & \cdots & m_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

En faisant une simple récurrence, on trouve :

$$\det(M) = m_{1,1} \times m_{2,2} \times m_{3,3} \times \cdots \times m_{n,n} = \prod_{i=1}^n m_{i,i}.$$

c'est-à-dire le produit des entrées diagonales.

### Exercice 2.5 Inverser des matrices avec calculs.

A l'aide du pivot de Gauss, dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Appliquons le pivot de Gauss aux matrices  $A$  et  $B$ .

1. Pour  $A$ , on a :

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \right)
 \end{array}$$

On est arrivé jusqu'à la matrice identité, donc  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour  $B$ , on a :

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -2 & +1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

L'algorithme s'arrête avant de trouver la matrice identité, donc  $B$  n'est pas inversible.

### Exercice 2.6 Décomposition d'une rotation. \*

On appelle cisaillement horizontal ( $x$ -shear) les transformations linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

On appelle cisaillement vertical ( $y$ -shear) les transformations linéaires de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice

(dans les bases canoniques) est de la forme

$$V_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } y \in \mathbb{R}.$$

1. Représenter l'effet de ces transformations sur la base canonique.
2. Soit  $R_{-\theta}$  la matrice de rotation d'angle  $-\theta \in \mathbb{R}$ . Démontrer la décomposition suivante :

$$R_{-\theta} = H_{-\tan(\frac{\theta}{2})} V_{-\sin(\theta)} H_{\tan(\frac{\theta}{2})}.$$

**Solution.** Non traité.

**Exercice 2.7. \***

Soit  $A$  une matrice carrée à coefficients réels. Si  $A$  est inversible, est-ce que  $A^t$  est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Justifier.

**Solution.** Non traité.

## TD3 — Réduction des endomorphismes

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

### Exercice 3.1 Vrai ou Faux.

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si  $A$  est diagonalisable, alors  $A^2$  l'est aussi.
3. Si  $A^2$  est diagonalisable, alors  $A$  l'est aussi.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
5. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

### Solution.

1. Faux, on peut multiplier un vecteur propre par un scalaire.
2. Vrai, si  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale, alors  $A^2 = PD^2P^{-1}$  est aussi diagonale.
3. Faux, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable mais  $A^2 = 0$  l'est. Montrons-le :

$$\text{Det}(A - \lambda I_2) = \lambda^2$$

La seule valeur propre est donc 0 et le sous-espace associé est de dimension  $1 \leq 2$  car  $E_0(e_2) = 0$ .

## Préparation à l'examen

### Exercice 4.1.

On se place dans  $\mathbb{R}^3$ . L'objectif est de trouver une matrice de rotation qui transforme le plan  $(P)$  d'équation  $x + 2y + 2z = 0$  en le plan horizontal  $(H)$  (d'équation  $z = 0$ ).

1. Donnez un vecteur  $n$  normal au plan  $(P)$ , de norme 1.
2. Trouver un vecteur  $u$  de coordonnées  $(a, b, 0)$ , de norme 1 et orthogonal à  $n$ .
3. Complétez  $(n, u)$  en une base orthonormale directe  $(n, u, v)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
4. Soit  $M$  la matrice dont les colonnes sont  $(u, v, n)$ . Justifiez le fait que  $(u, v, n)$  est également une base orthonormale directe.
5. On rappelle qu'une matrice de rotation  $Q$  est une matrice orthogonale de déterminant 1 (donc telle que  $Q^T Q = QQ^T = I$  et  $\det(Q) = 1$ ). Montrez que  $M$  transforme le vecteur  $(0, 0, 1)$  en  $n$ . En déduire une matrice de rotation transformant  $(P)$  en  $(H)$ .

### Solution.

1. Un vecteur normal au plan  $(P)$  est un vecteur  $k = (a, b, c)$  tel que

$$a + 2b + 2c = 0.$$

Ici, on prend  $k = (1, 2, 2)$ . Normalisons-le :

$$\|k\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$$

donc le vecteur normal unitaire est

$$n = \frac{1}{3}(1, 2, 2).$$

2. On cherche un vecteur  $k = (a, b, 0)$  orthogonal à  $n$ , soit :

$$k \cdot n = \frac{1}{3}(a + 2b) = 0 \implies a + 2b = 0.$$

Choix simple :  $a = 2, b = -1$ , donc  $k = (2, -1, 0)$ . Normalisons-le :

$$\|k\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0).$$

3. Complétons en une base orthonormale directe avec le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} v &= n \times u \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}} ((2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1))e_1 - (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2)e_2 + (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)e_3) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, -5). \end{aligned}$$

4. La matrice  $M$  dont les colonnes sont  $(u, v, n)$  est

$$M = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5}) & 1/3 \\ -1/\sqrt{5} & 4/(3\sqrt{5}) & 2/3 \\ 0 & -5/(3\sqrt{5}) & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Tous les vecteurs sont unitaires et orthogonaux, et  $u \times v = n$  assure la directivité.

5. Une matrice de rotation  $Q$  doit vérifier  $Q^T Q = I$  et  $\det(Q) = 1$ . Ici,  $M$  envoie  $(0, 0, 1)$  sur  $n$ , donc elle envoie  $H$  sur  $P$ . Pour envoyer  $P$  sur  $H$ , il faut prendre l'inverse, soit  $Q = M^T$  :

$$Q = M^T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 2/(3\sqrt{5}) & 4/(3\sqrt{5}) & -5/(3\sqrt{5}) \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est bien orthogonale, de déterminant 1, et envoie le plan  $(P)$  sur le plan horizontal  $(H)$ .