HAI722I — DM

Ivan Lejeune

2 décembre 2025

Table des matières

Instructions

Ce devoir est à rendre avant le 12 décembre 2025 à 12h, soit par mail à l'adresse : rodolphe.giroudeau@lirmm.fr, soit en déposant votre devoir durant le cours

1 Partie théorique

Exercice 1 Algorithmes pour la programmation linéaire. Considérons la formulation suivante :

$$P_\beta = \begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. Résoudre le problème P_β par la méthode du big M.
2. Résoudre le problème P_β par la méthode à deux phases.
3. **Difficile :**
   (a) Résoudre le problème P_β par la méthode dual-simplexe.
   (b) Soit le programme linéaire P_θ

$$P_\theta = \begin{cases} \max z = x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

   Résoudre le problème P_θ par la méthode dual-simplexe.

Solution.

1. Commençons par poser le problème sous forme standard :

$$P_\beta = \begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - M \cdot (y_1 + y_2 + y_3) \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 6 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_4 + y_2 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + y_3 = 4 \\ x_i \geq 0, y_j \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, 5\}, \forall j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

   Ensuite on construit notre tableau du simplexe :

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
$-M$	$x_1^1 = y_1$	6	6	1	-1	0	0	1	0	0
$-M$	$x_2^1 = y_2$	12	4	4	0	-1	0	0	1	0
$-M$	$x_3^1 = y_3$	4	1	2	0	0	-1	0	0	1
	$z(x)$	$-22M$	$-11M - 5$	$-7M - 2$	M	M	M	0	0	0

   et on déroule l'algorithme :

   - on rentre x_1,
   - on sort y_1 car $1 < 3 < 4$,

$\downarrow$

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
5	$x_1^2 = x_1$	1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
$-M$	$x_2^2 = y_2$	8	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{4}{6}$	-1	0	$-\frac{4}{6}$	1	0
$-M$	$x_3^2 = y_3$	3	0	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	-1	$-\frac{1}{6}$	0	1
	$z(x)$	$-11M+5$	0	$-\frac{31}{6}M - \frac{7}{12}$	$-\frac{5}{6}M - \frac{5}{6}$	M	M	$\frac{11}{6}M + \frac{5}{6}$	0	0

- on rentre x_2,
- on sort y_3 car $\frac{11}{2} < 6 < \frac{80}{3}$,

$\downarrow$

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
5	$x_1^3 = x_1$	$\frac{8}{11}$	1	0	$-\frac{2}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	0	$-\frac{1}{11}$
$-M$	$x_2^3 = y_2$	$\frac{28}{11}$	0	0	$\frac{4}{11}$	-1	$\frac{20}{11}$	$-\frac{4}{11}$	1	$-\frac{20}{11}$
2	$x_3^3 = x_2$	$\frac{18}{11}$	0	1	$\frac{1}{11}$	0	$-\frac{6}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	$\frac{6}{11}$
	$z(x)$	$-\frac{28}{11}M + \frac{76}{11}$	0	0	$-\frac{4}{11}M - \frac{8}{11}$	$-M$	$-\frac{20}{11}M - \frac{7}{11}$	$\frac{15}{11}M + \frac{8}{11}$	0	$\frac{31}{11}M + \frac{7}{11}$

- on rentre x_5,
- on sort y_2 car $\frac{7}{5} < 8$ (l'autre rapport étant négatif on le compte pas),

$\downarrow$

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
5	$x_1^4 = x_1$	$\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	0
0	$x_2^4 = x_5$	$\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{20}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{20}$	-1
2	$x_3^4 = x_2$	$\frac{12}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0
	$z(x)$	$\frac{39}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{20}$	0	$M + \frac{3}{5}$	$M + \frac{7}{20}$	M

A ce stade, il est clair que les variables artificielles ne pourront plus entrer en base. On peut donc les retirer et procéder sur le tableau réduit suivant :

		c	5	2	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	$x_1^4 = x_1$	$\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	0
0	$x_2^4 = x_5$	$\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{20}$	1
2	$x_3^4 = x_2$	$\frac{12}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0
	$z(x)$	$\frac{39}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{20}$	0

- on rentre x_3,
- on sort x_5,

$$\downarrow$$

		c	5	2	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	$x_1^5 = x_1$	2	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
0	$x_2^5 = x_3$	7	0	0	1	$-\frac{11}{4}$	5
2	$x_3^5 = x_2$	1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	-1
	$z(x)$	12	0	0	0	-2	3

Il ne reste probablement qu'une étape, faisons-la :

- on rentre x_4,
- on sort x_2, c'est la seule valeur positive,

$$\downarrow$$

		c	5	2	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	$x_1^6 = x_1$	4	1	2	0	0	-1
0	$x_2^6 = x_3$	18	0	11	1	0	-6
0	$x_3^6 = x_4$	4	0	4	0	1	-4
	$z(x)$	20	0	8	0	0	-5

Dommage, on a encore un point pivot à faire rentrer (x_5 a valeur négative) donc on aimerait continuer de dérouler l'algorithme mais on a pas de critère pour trouver quelle variable sortir de base (en effet, toutes les valeurs dans la colonne du pivot sont négatives). On conclut donc que l'espace des solutions est non borné. C'est-à-dire qu'il n'existe pas « un couple maximum » car on peut toujours en trouver un plus grand. Donc il n'y a pas un unique couple (x_1, x_2) qui maximise z.

2. Résolvons maintenant le problème P_θ par la méthode à deux phases.

Exercice 2 Dualité. Considérez le programme linéaire le plus général envisageable donné ci-dessous :

$$\begin{cases} \min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \leq b_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

où A est une matrice $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ et $c, x \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et $b \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$.
Caractériser le dual.

Solution.

Exercice 3 Ensemble convexe. Soit C_1 et C_2 deux convexes de $\mathbb{R}^{m+n}$. Montrer que l'ensemble

$$C = \{(x, y_1 + y_2) \mid x \in \mathbb{R}^m, y_1 \in \mathbb{R}^n, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in C_1, (x, y_2) \in C_2\}$$

est également convexe.

Solution. Soient (x^1, y^1) et (x^2, y^2) deux points de C. Par définition de C, il existe $y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2$ tels que

$$(x^1, y_1^1) \in C_1, \quad (x^1, y_2^1) \in C_2, \quad (x^2, y_1^2) \in C_1, \quad (x^2, y_2^2) \in C_2,$$

et

$$y^1 = y_1^1 + y_2^1, \quad y^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Soit $\lambda \in [0,1]$. Considérons le point

$$(x^\lambda, y^\lambda) = \lambda(x^1, y^1) + (1-\lambda)(x^2, y^2).$$

On a

$$\begin{aligned} x^\lambda &= \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \\ y^\lambda &= \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \\ &= \lambda(y_1^1 + y_2^1) + (1-\lambda)(y_1^2 + y_2^2) \\ &= (\lambda y_1^1 + (1-\lambda)y_1^2) + (\lambda y_2^1 + (1-\lambda)y_2^2). \end{aligned}$$

Notons $y_1^\lambda = \lambda y_1^1 + (1-\lambda)y_1^2$ et $y_2^\lambda = \lambda y_2^1 + (1-\lambda)y_2^2$. Par convexité de C_1 et C_2, on a

$$(x^\lambda, y_1^\lambda) \in C_1, \quad (x^\lambda, y_2^\lambda) \in C_2.$$

Ainsi, par définition de C, on a $(x^\lambda, y^\lambda) \in C$. Donc C est convexe.

Exercice 4 Modélisation et dualité. Considérons un problème d'affectation avec m jobs et n travailleurs $(n \geq m)$. Chaque job doit être affecté à exactement un travailleur. Soit p_{ij} le rendement obtenu si on affecte le job i au travailleur j, où $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On cherche une affectation qui maximise le rendement total.

1. Donner le programme linéaire.
2. Donner la formulation du dual de ce problème.

Solution.

1. On introduit les variables x_{ij} qui valent 1 si le job i est affecté au travailleur j, et 0 sinon. Le programme linéaire s'écrit alors :

$$P_0 = \begin{cases} \max z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} & (1) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} & (2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} & (3) \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j & (4) \end{cases}$$

où les contraintes correspondent à :

(1) on maximise le rendement total
(2) chaque job est affecté à un travailleur
(3) chaque travailleur a au plus un job
(4) variables binaires

2. Pour obtenir la formulation du dual, on relâche la contrainte de binarité sur les variables x_{ij}. On introduit les variables duales u_i (une par job) et v_j (une par travailleur). Le dual s'écrit alors :

$$D_0 = \begin{cases} \min w = \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j & (5) \\ u_i + v_j \geq p_{ij}, \quad \forall i, j & (6) \\ v_j \geq 0, \quad \forall j & (7) \end{cases}$$

où les contraintes correspondent à :

(5) on minimise la somme des coûts
(6) les coûts doivent couvrir les rendements
(7) les variables duales associées aux inégalités sont positives

Exercice 5 Programmation linéaire : Farkas. Considérons le programme linéaire suivant, qui dépend de $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \min z = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2 \leq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2-\varepsilon)x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

1. Montrer que le problème est réalisable $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de ε la valeur optimale est-elle non bornée ?

Solution.

Exercice 6 Résolution numérique. Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode Primal-Dual :

$$\text{Primal} = \begin{cases} \min z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

Solution.

2 Partie pratique

Exercice 7.

Solution.

Exercice 8.

Solution.

Exercice 9.

Solution.