# HAI713I — TDs

Ivan Lejeune

9 octobre 2025

## Table des matières

# 1 TD1

**Exercice 1.1 Manipuler les définitions.**

1. Rappelez ce qu'est une fonction calculable. Montrez que les fonctions suivantes sont calculables :
   - $f : x \mapsto 2x$,
   - $g : \langle x, y \rangle \mapsto x + y$,
   - $\perp\!\!\!\perp$, la fonction définie nulle part.
2. Rappelez ce qu'est un ensemble récursif. Montrez que les ensembles suivants sont récursifs :
   - l'ensemble de tous les entiers,
   - l'ensemble vide,
   - l'ensemble des nombres pairs.
3. Montrez que si $E$ est un ensemble récursif, alors son complémentaire $\overline{E}$ l'est aussi.
4. Rappelez ce qu'est un ensemble énumérable. Ecrivez un programme qui converge si et seulement si son entrée est paire. En déduire que l'ensemble des nombres pairs est énumérable.
5. Montrez que si $E$ est un ensemble récursif, alors $E$ et $\overline{E}$ sont énumérables.

**Solution.**

1. Une fonction est **calculable** si il existe un programme qui la calcule. Alors,
   - $f$ est calculable car il peut être défini par le programme suivant :
   $$x \mapsto \text{return } 2 \times x.$$
   - $g$ est calculable pour la même raison :
   $$z \mapsto \text{return } \pi_1(z) + \pi_2(z).$$
   - De même pour $\perp\!\!\!\perp$ :
   $$\begin{aligned} x \mapsto \ & \text{while } x = x \text{ do} \\ & \quad x \leftarrow x \\ & \text{end while} \\ & \text{return } 0. \end{aligned}$$
2. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est **décidable** (ou récursif) si sa fonction caractéristique $\chi_A$ est calculable. Alors,
   - L'ensemble de tous les entiers est récursif car sa fonction caractéristique peut être définie par le programme suivant :
   $$x \mapsto \text{return } 1$$
   - L'ensemble vide est récursif car sa fonction caractéristique peut être définie comme suit :
   $$x \mapsto \text{return } 0$$

- L'ensemble des nombres pairs est récursif pour la même raison :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto \ & \text{if } x \bmod 2 == 0 \text{ then} \\
& \qquad \text{return } 1 \\
& \text{else} \\
& \qquad \text{return } 0 \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

3. Il suffit d'inverser les valeurs de la fonction caractéristique de $E$ pour obtenir celle de $\overline{E}$ (qui est donc aussi calculable).
4. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ est **énumérable** si il est le domaine d'une fonction calculable. On définit la fonction suivante :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto \ & \text{if } x \bmod 2 == 0 \text{ then} \\
& \qquad \text{return } 0 \\
& \text{else} \\
& \qquad \perp\!\!\!\perp (x) \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

   qui converge si et seulement si son entrée est paire. Donc l'ensemble des nombres pairs est énumérable.
5. Si $E$ est récursif, alors sa fonction caractéristique $\chi_E$ est calculable. Donc on peut définir deux programmes :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto \ & \text{if } \chi_E(x) == 1 \text{ then} \\
& \qquad \text{return } 0 \\
& \text{else} \\
& \qquad \perp\!\!\!\perp (x) \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

   et

$$
\begin{aligned}
x \mapsto \ & \text{if } \chi_E(x) == 0 \text{ then} \\
& \qquad \text{return } 0 \\
& \text{else} \\
& \qquad \perp\!\!\!\perp (x) \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

   qui convergent respectivement si et seulement si $x \in E$ et $x \in \overline{E}$.

**Exercice 1.2 Propriétés de cloture des ensembles récursifs.** Nous prouvons dans cet exercice que la classe des ensembles récursifs est close par union, intersection, produit cartésien et complémentaire. La situation est un peu différente pour les ensembles énumérables. Soient $A$ et $B$ deux ensembles récursifs.

1. Montrer que $A \cup B$ est récursif.
2. Montrer que $A \cap B$ est récursif.
3. Montrer que $A \times B = \{\langle x, y \rangle, x \in A \wedge y \in B\}$ est récursif.
4. Montrer que $\overline{A}$ est récursif (c.f. exercice 1).
5. Montrer que $A \setminus B$ est récursif.

**Solution.**

1. On utilise la fonction caractéristique :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & \text{if } \chi_A(x) == 1 \text{ or } \chi_B(x) == 1 \text{ then}\\
& \quad \text{return } 1\\
& \text{else}\\
& \quad \text{return } 0\\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

2. On utilise la fonction caractéristique :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & \text{if } \chi_A(x) == 1 \text{ and } \chi_B(x) == 1 \text{ then}\\
& \quad \text{return } 1\\
& \text{else}\\
& \quad \text{return } 0\\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

3. On utilise la fonction caractéristique :

$$
\begin{aligned}
z \mapsto\ & \text{if } \chi_A(\pi_1(z)) == 1 \text{ and } \chi_B(\pi_2(z)) == 1 \text{ then}\\
& \quad \text{return } 1\\
& \text{else}\\
& \quad \text{return } 0\\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

4. Voir exercice 1.1.
5. On utilise la fonction caractéristique :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & \text{if } \chi_A(x) == 1 \text{ and } \chi_B(x) == 0 \text{ then}\\
& \quad \text{return } 1\\
& \text{else}\\
& \quad \text{return } 0\\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

**Exercice 1.3 Step, convergence, projections et énumération.** Considérons le programme suivant (remarquez qu'il s'appelle $a$ et son entrée s'appelle $y$) :

$$
\begin{aligned}
\text{a} : y \mapsto\ & z \leftarrow 0\\
& \text{while step}\langle y, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle == 0 \text{ do}\\
& \quad z \leftarrow z + 1\\
& \text{end while}\\
& \text{return } 17
\end{aligned}
$$

1. Soit $b$ un programme qui s'arrete sur au moins une entrée. Que vaut $[a \mid b]$ ?
2. Que vaut $[a \mid b]$ si $b$ est un programme qui ne s'arrête jamais ?
3. Montrez que l'ensemble des programmes qui s'arrêtent sur au moins une entrée est énumérable.

**Solution.**

1. On note $c$ une entrée telle que $[b \mid c]\downarrow$ (elle existe par hypothèse).
   Alors, il existe $t$ tel que
   $$\mathrm{Step}\langle b, c, t\rangle = 1$$
   Donc, pour $z = \langle c, t\rangle$, on a $[a \mid z]\downarrow$. Donc $[a \mid b]\downarrow$ et vaut 17.
2. Le programme $a$ ne s'arrête jamais, donc $[a \mid b]\uparrow$.
3. Le programme $a$ correspond exactement au programme dont le domaine est l'ensemble des programmes qui s'arrêtent sur au moins une entrée. Donc cet ensemble est énumérable.

**Exercice 1.4 Ensembles énumérables.** On veut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E$ est **énumérable** (rappel de la définition) si
$$\exists a, E = W_a = \{x, [a \mid x]\downarrow\}$$

(ii) $E$ admet une **fonction d'énumération** calculable :
$$\exists b, E = \mathrm{Im}[b \mid \cdot] = \{x, \exists y, [b \mid y] = x\}$$

(iii) $E$ est vide ou admet une **fonction d'énumération totale** calculable :
$$E = \varnothing \text{ ou } \exists c, E = \mathrm{Im}[c \mid \cdot] = \{x, \exists y, [c \mid y] = x\}$$

- Montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii).
- Montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii).
- Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i).

**Solution.**

- (i) $\Rightarrow$ (iii) : Si $E = \varnothing$, c'est trivial. Sinon, $E$ contient au moins un élément qu'on note $a_0$. On utilise le programme suivant :
  $$\begin{aligned}\mathrm{enum} : z \mapsto\ & \text{if step}\langle a, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle == 0 \text{ then}\\ & \qquad \text{return } \pi_1(z)\\ & \text{else}\\ & \qquad \text{return } a_0\\ & \text{end if}\end{aligned}$$
  qui est total et énumère $E$.
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) : C'est trivial car une fonction totale est aussi une fonction partielle.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : C'est la définition même d'un ensemble énumérable.

**Exercice 1.5 Ensembles énumérables — mieux comprendre.**

1. Montrez qui si $E$ est un ensemble énumérable *infini* alors il admet une fonction d'énumération totale bijective.
2. Soit $E$ un ensemble infini. Montrez que $E$ est récursif si et suelement si il admet une fonction d'énumération croissante.
3. Soit $E$ un ensemble infini. Montrez que $E$ est récursif si et suelement si il admet une fonction d'énumération strictement croissante.

**Solution.** A compléter

## 2 TD2

**Exercice 2.1 Ensembles énumérables.** On veut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E$ est **énumérable** (rappel de la définition) si

$$\exists a, E = W_a = \{x, [a \mid x] \downarrow\}$$

(ii) $E$ admet une **fonction d'énumération** calculable :

$$\exists b, E = \mathrm{Im}[b \mid \cdot] = \{x, \exists y, [b \mid y] = x\}$$

(iii) $E$ est vide ou admet une **fonction d'énumération totale** calculable :

$$E = \varnothing \text{ ou } \exists c, E = \mathrm{Im}[c \mid \cdot] = \{x, \exists y, [c \mid y] = x\}$$

- Montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii).
- Montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii).
- Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i).

**Solution.**

- (i) $\Rightarrow$ (iii) : Si $E$ est vide, la propriété est vérifiée. Sinon, $\exists \alpha \in E$. On définit le programme suivant :

$$\begin{aligned} b \ : \ z \mapsto\ & \text{if } \mathrm{Step}\langle a, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle \neq 0 \text{ then} \\ & \qquad \text{return } \pi_1(z) \\ & \text{else} \\ & \qquad \text{return } \alpha \\ & \text{end if} \end{aligned}$$

  Montrons que $\mathrm{Im}[b \mid \cdot] = E$. Si $e \in E$ alors $\exists t$ tel que $\mathrm{Step}\langle a, e, t\rangle \neq 0$. Donc $[b \mid \langle e, t\rangle] = e$ pour tout $e \in E$, d'où $E = \mathrm{Im}[b \mid \cdot]$.
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) : Si $E$ est vide, $b$ qui diverge partout convient. Sinon, il existe une fonction d'énumération totale $c$ de $E$ calculable et donc une fonction d'énumération $b = c$ de $E$ calculable.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $b$ une fonction d'énumération de $E$ calculable. On définit le programme suivant :

$$\begin{aligned} a \ : \ x \mapsto\ & z \leftarrow 0 \\ & \text{while } \mathrm{Step}\langle b, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle \neq x + 1 \text{ do} \\ & \qquad z \leftarrow z + 1 \\ & \text{end while} \\ & \text{return } 34 \end{aligned}$$

  Ce programme s'arrête sur $x$ si et seulement si $x \in E$. Donc $E = W_a$.

**Exercice 2.2 Ensembles énumérables — mieux comprendre.**

1. Montrez que si $E$ est un ensemble énumérable *infini* alors il admet une fonction d'énumération totale bijective.
2. Soit $E$ un ensemble infini. Montrez que $E$ est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération croissante.
3. Soit $E$ un ensemble infini. Montrez que $E$ est récursif si et seulement si il admet une fonction d'énumération strictement croissante.

**Solution.**

1. On crée le programme suivant :

$$\begin{aligned} b\ :\ n \mapsto\ & J \leftarrow \varnothing \\ & k \leftarrow 0 \\ & \text{While } |J| \leq n \text{ do} \\ & \quad J \leftarrow J \cup \{[b \mid k]\} \\ & \quad k \leftarrow k+1 \\ & \text{end while} \\ & \text{Return } [b \mid k] \end{aligned}$$

   Ce programme s'arrête toujours car $E$ est infini et il rend tous les éléments de $E$ sans répétition.

2. On écrit le programme suivant pour montrer le sens indirect :

$$\begin{aligned} d\ :\ x \mapsto\ & z \leftarrow 0 \\ & \text{while } [b \mid z] < x \text{ do} \\ & \quad z \leftarrow z+1 \\ & \text{end while} \\ & \text{if } [b \mid z] = x \text{ then return 1 else return 0 end if} \end{aligned}$$

**Exercice 2.3 Enumeration des fonctions totales.** Nous allons montrer dans cet exercice qu'il n'est pas possible d'avoir un système de programmation « raisonnable » où les programmes s'arrêtent toujours. Supposons que ce système existe et notons $[x \mid y]'$ le résultat du calcul du $x$-ième programme sur l'entrée $y$.

1. On suppose que dans un de nos programmes on peut en appeler un autre et que la fonction successeur soit calculable. Montrez que $g : x \mapsto [x|x]' + 1$ est calculable dans ce système. On notera $n$ son numéro : $[n \mid \cdot]' = g(\cdot)$.
2. Que vaut $g(n)$ ? En déduire qu'un tel système n'existe pas.

**Solution.**

**Exercice 2.4 Ensembles énumérables — clôture.** Nous prouvons dans cet exercice que la classe des ensembles énumérables est bien close par union, intersection et produit cartésien. Soient $A$ et $B$ deux ensembles énumérables.

1. Montrez que $A \cup B$ est énumérable.
2. Montrez que $A \cap B$ est énumérable.
3. Montrez que $A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in B\}$ est énumérable.

**Solution.**

# 3 TD3

**Exercice 3.1 Reductions.** Soit $A = \{x, \forall y, [x \mid y] \downarrow\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que $A$ n'est pas récursif.
2. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ (où $A$ est le complémentaire de $A$).
4. Montrez que ni $A$ ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

**Solution.**

1. On pose $A = P_{\mathscr{C}}$ pour $\mathscr{C} = \{f, \mathsf{Dom}(f) = \mathbb{N}\}$. En d'autres termes c'est l'ensemble des fonctions totales où qui sont définies partout. Alors

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{C}} &= \{x, [x \mid \cdot] \in \mathscr{C}\} \\ &= \{x, \forall y, [x \mid y] \downarrow\} \end{aligned}$$

   De plus, $A$ n'est pas trivial car :

   - le programme suivant est dans $A$ :

$$a : x \mapsto \text{return } 42$$

   - et celui ci ne l'est pas :

$$b : x \mapsto \text{while true } x \leftarrow x + 1.$$

   Donc, d'après le théorème de Rice, $A$ est indécidable et donc non récursif.

2. On pose

$$c : \langle x, y\rangle \mapsto \text{if } [x \mid x] \downarrow \text{ then return } [a \mid y]$$

   et ensuite

$$S_1^1\langle c, x\rangle : y \mapsto \cdots\cdots$$

   (où $\cdots\cdots$ correspond au meme code que $c$). Enfin, on pose $f(x) = S_1^1\langle c, x\rangle$. Alors

$$\forall x, x \in \mathbb{K} \iff f(x) \in A.$$

   Donc $\mathbb{K} \prec A$.

3. On pose

$$d \colon \langle x, y\rangle \mapsto \text{if } \mathsf{Step}\langle x, x, y\rangle = 0 \text{ then return } 3$$

   et on pose un $S_1^1$ similaire avec $d$. Enfin, on pose $g(x) = S_1^1\langle d, x\rangle$. Alors

$$\forall x, x \in \mathbb{K} \iff g(x) \in \overline{A}.$$

   Donc $\mathbb{K} \prec \overline{A}$.

4. On sait que $\overline{\mathbb{K}}$ n'est pas énumérable donc $A$ est énumérable. De même pour $\overline{A}$. Donc ni $A$ ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

**Exercice 3.2 Reductions.** Soit $B = \{x, [x \mid 0] \downarrow \text{ et } [x \mid 1] \uparrow\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que $B$ n'est pas récursif.
2. $B$ et son complémentaire $\overline{B}$ sont-ils énumérables ?

**Solution.**

1. On pose $B = P_{\mathscr{C}}$ pour $\mathscr{C} = \{f, 0 \in \mathsf{Dom}(f) \text{ et } 1 \notin \mathsf{Dom}(f)\}$. Alors si $a$ calcule $\perp\!\!\!\perp$ alors $a \notin B$ et le programme suivant :

$$b : x \mapsto \text{if } x = 0 \text{ then return } 42 \text{ else } \perp$$

est dans $B$. Donc $B$ n'est pas trivial et d'après le théorème de Rice, $B$ n'est pas récursif.

# 4 TD5

**Exercice 4.1 facile.** Soit $g$ une fonction calculable.

1. Montrez qu'il existe une fonction calculable *totale* $G$ telle que

$$[G(n) \mid \cdot] = n + g(\cdot)$$

2. Montrez que $\exists n[n \mid \cdot] = n + g(\cdot)$.

**Solution.**

1. On ecrit le programme suivant :

$$\begin{aligned} a:\ \langle x, y\rangle \rightarrow\ & \text{return } (x + g(y)) \\ S_1^1\langle a, x\rangle y \mapsto & \cdots \\ G:\ x \mapsto & S_1^1\langle a, x\rangle. \end{aligned}$$

   Alors, on a

$$\forall n, [G(n) \mid \cdot] = n + g(\cdot)$$

2. On ecrit le programme suivant :

$$P.F. \implies \exists n, [n \mid \cdot] = [G(n) \mid \cdot] = n + g(\cdot)$$

**Exercice 4.2 tout aussi aisé.**

1. Montre qu'il existe une fonction calculable *totale* $f$ telle que

$$[f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + 1$$

2. Quelles fonctions sont calculées par les points fixes de $f$ ?

**Solution.**

1. On utilise S.N.M pour obtenir :

$$\begin{aligned} b:\ \langle x, y\rangle \rightarrow\ & \text{return } ([x \mid y] + 1) \\ S_1^1\langle b, x\rangle y \mapsto & \cdots \\ f:\ x \mapsto & S_1^1\langle b, x\rangle. \end{aligned}$$

   Alors, on a

$$\forall n[f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + 1$$

2. D'après le théorème du point fixe, on a

$$\exists n[n \mid \cdot] = [f(n) \mid \cdot] = [n \mid \cdot] + 1$$

   Donc les points fixes de $f$ calculent les fonctions qui plantent partout.

**Exercice 4.3 amusant et à peine plus dur.**

1. Montrez que dans tout système acceptable de programmation il existe 2 programmes consécutifs qui calculent la même fonction.
2. Proposez un système de programmation dans lequel 3 programmes consécutifs ne calculent jamais la même fonction.

**Solution.**

1. On pose $f : x \mapsto x+1$. Cette fonction est calculable. Déterminons son point fixe :

$$\exists n[n \mid \cdot] = [f(n) \mid \cdot] = [n+1 \mid \cdot].$$

   Fini.

2. On prend un système usuel avec la fonction universelle $U\langle x, y\rangle$.
   - Si $x \equiv 0 \mod 3$, alors $\forall y[x \mid y] = U\langle k, y\rangle$.
   - Si $x \equiv 1 \mod 3$, alors $\forall y[x \mid y] =\perp$.
   - Si $x \equiv 2 \mod 3$, alors $\forall y[x \mid y] = U\langle k, y\rangle$.

**Exercice 4.4 opérations ensemblistes.**

1. Trouvez un exemple d'ensembles $S_1$ et $S_2$ non énumérables tels que $S_1 \setminus S_2$ soit énumérable.
2. Trouvez un exemple d'ensembles $S_1$ et $S_2$ non énumérables tels que $S_1 \cup S_2$ soit énumérable.

**Solution.**

1. On pose $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{K}}$. Alors on a bien $S_1$ et $S_2$ non énumérables mais $S_1 \setminus S_2 = \varnothing$ qui est énumérable.
2. On pose deux ensembles bien choisis :

$$S_1 = \mathsf{Pairs} \cup \{2x+1, [x \mid x] \uparrow\}$$
$$S_2 = \mathsf{Impairs} \cup \{2x, [x \mid x] \uparrow\}$$

   Ces ensembles sont bien non énumérables car $\overline{\mathbb{K}} < S_i$ en prenant la fonction de réduction

$$f_1 : x \mapsto 2x+1, \quad f_2 : x \mapsto 2x$$

   et leur union fait bien $\mathbb{N}$ et donc est énumérable.