

# HAI711I — TDs

Ivan Lejeune

8 décembre 2025

## Table des matières

TD1 — Généralités . . . . .	2
TD2 — Couplages . . . . .	8
TD3 — Flots et circulation . . . . .	14
Examen blanc . . . . .	18
TD4 — Connectivité . . . . .	30

## TD1 — Généralités

### Exercice 1 Soirée chez Ramsey.

On considère un ensemble de six personnes. Montrer que au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou que au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux. Est-ce vrai pour un ensemble de cinq personnes ?

#### Solution.

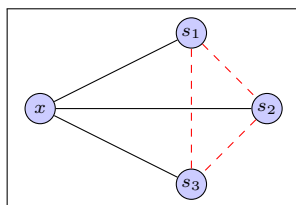
Soit  $G = (V, E)$  un graphe à six sommets. On veut montrer que  $G$  contient  $K_3$  ou  $\overline{K_3}$ .

Considérons  $x \in V$  un sommet de  $G$  et procédons par disjonction de cas en fonction du degré de  $x$  :

- Si  $\deg(x) \geq 3$ , on note  $s_1, s_2, s_3$  trois voisins de  $x$ . Si  $(s_1, s_2) \in E$  alors  $x, s_1, s_2$  forment  $K_3$ .

De manière similaire, si  $(s_1, s_3) \in E$  ou  $(s_2, s_3) \in E$  alors  $K_3$  est formé. Si il n'existe pas d'arête entre  $s_1, s_2, s_3$  alors  $\overline{K_3}$  est formé.

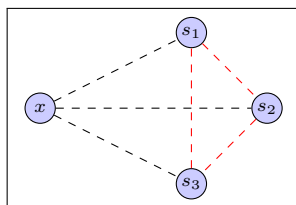
Ainsi, si  $\deg(x) \geq 3$  alors  $G$  contient  $K_3$  ou  $\overline{K_3}$ .



Visuellement, on peut voir que si un des traits rouges est présent (donc si il existe une arête entre deux des sommets  $s_1, s_2, s_3$ ) alors  $K_3$  est formé. Sinon, il y a un triangle rouge en pointillés et  $\overline{K_3}$  est formé.

- Si  $\deg(x) \leq 2$ , on note  $s_1, s_2, s_3 \in V$  trois sommets de  $G$  qui ne sont pas voisins de  $x$  (ils existent forcément car  $|V| = 6$ ). Si  $(s_1, s_2) \notin E$  alors  $x, s_1, s_2$  forment  $\overline{K_3}$ .

De manière similaire, si  $(s_1, s_3) \notin E$  ou  $(s_2, s_3) \notin E$  alors  $\overline{K_3}$  est formé. Si il existe une arête entre chacun des sommets  $s_1, s_2, s_3$  alors  $K_3$  est formé.

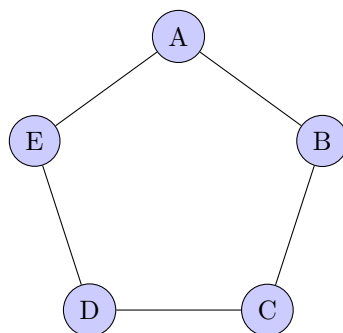


Visuellement, on peut voir que si un des traits rouges est absent (donc si il n'existe pas d'arête entre deux des sommets  $s_1, s_2, s_3$ ) alors  $\overline{K_3}$  est formé. Sinon, il y a un triangle rouge en pointillés et  $K_3$  est formé.

Ainsi, si  $\deg(x) \leq 2$  alors  $G$  contient  $K_3$  ou  $\overline{K_3}$ .

Donc pour un ensemble de six personnes, au moins trois personnes se connaissent deux-à-deux ou au moins trois personnes ne se connaissent pas deux-à-deux.

Pour un ensemble de cinq personnes, le graphe  $G$  à cinq sommets ci-dessous ne contient ni  $K_3$  ni  $\overline{K_3}$  :



### Exercice 2 Hyperparcours.

Soit  $d$  un entier positif non nul. L'hypercube  $Q_d$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des  $d$ -uplets  $x_1, \dots, x_d$  de 0 et de 1, deux  $d$ -uplets étant adjacents s'ils diffèrent sur une seule entrée.

1. Dessiner  $Q_d$  pour  $d = 1, 2, 3, 4$ .
2. Calculer un parcours en largeur de  $Q_3$  de racine 000. En cas de choix entre plusieurs sommets pour entrer dans la file, on choisira celui de valeur (en binaire) minimale.
3. Effectuer de même un parcours en profondeur de  $Q_3$ . Cette fois, il n'y a pas de consigne en cas de choix, mais on essaiera d'obtenir un arbre de parcours qui ne soit pas un chemin.

### Solution.

1. On a les hypercubes suivants :

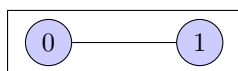


FIGURE 1 –  
Hypercube  $Q_1$

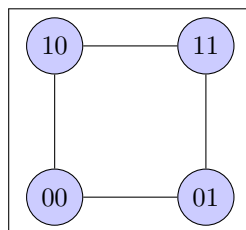


FIGURE 2 –  
Hypercube  $Q_2$

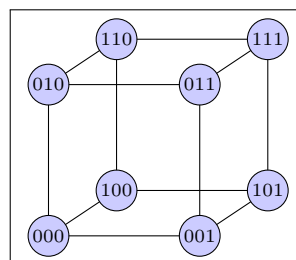


FIGURE 3 –  
Hypercube  $Q_3$



FIGURE 4 – Hypercube  $Q_4$   
Noeuds non précisés pour la clarté

2. On peut effectuer le parcours en largeur suivant :

$000 \rightarrow 001 \rightarrow 010 \rightarrow 100$

$001 \rightarrow 011 \rightarrow 101$

$010 \rightarrow 110$

$011 \rightarrow 111$

ce qui se représente visuellement comme suit :

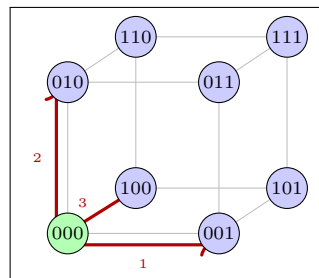


FIGURE 5 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 1

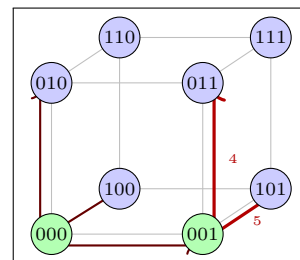


FIGURE 6 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 2

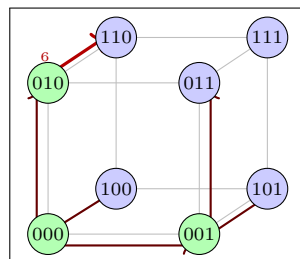


FIGURE 7 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 3

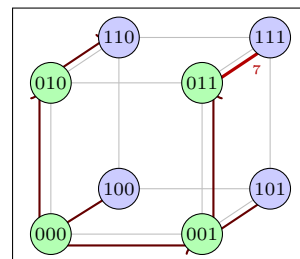


FIGURE 8 –  
BFS sur  $Q_3$  — Étape 4

3. On peut effectuer le parcours en profondeur suivant :

$000 \rightarrow 001 \rightarrow 101 \rightarrow 111 \rightarrow 110 \rightarrow 100$

$100 \rightarrow 110$

$110 \rightarrow 010 \rightarrow 011$

ce qui se représente visuellement comme suit :



FIGURE 9 –  
DFS sur  $Q_3$  — Phase 1



FIGURE 10 –  
DFS sur  $Q_3$  — Phase 2

### Exercice 3 Biparti.

Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair comme sous-graphe (on pourra s'aider d'un parcours en largeur).

#### Solution.

Montrons qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair comme sous-graphe.

- Sens direct : Supposons que  $G$  est biparti. Soit  $C$  un cycle de  $G$ . Par définition d'un graphe biparti, on peut colorier les sommets de  $G$  en deux couleurs telles que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. En parcourant le cycle  $C$ , on remarque que chaque sommet doit avoir une couleur différente du sommet précédent. Ainsi, si le cycle  $C$  a une longueur impaire, le premier et le dernier sommet du cycle  $C$  seraient de la même couleur, ce qui est impossible car ils sont adjacents. Donc  $C$  ne peut pas être de longueur impaire.



FIGURE 11 – Cas cycle pair



FIGURE 12 – Cas cycle impair

- Sens indirect : Supposons que  $G$  ne contient pas de cycle impair. On choisit un sommet racine  $r$  et on effectue un BFS à partir de  $r$ . On colorie le sommet  $r$  en rouge. Ensuite, on colorie tous les sommets de niveau 1 (voisins de  $r$ ) en bleu, tous les sommets de niveau 2 en rouge, tous les sommets de niveau 3 en bleu, et ainsi de suite.



FIGURE 13 – Première étape du BFS



FIGURE 14 – Deuxième étape du BFS

Si il y avait une arête entre deux sommets du même niveau, cela formerait un cycle impair avec le chemin passant par la racine  $r$ . En effet, si deux sommets  $u$  et  $v$  sont au même niveau et sont adjacents, alors le chemin de  $r$  à  $u$ , l'arête  $(u, v)$ , et le chemin de  $v$  à  $r$  forment un cycle dont la longueur est impaire (car il y a un nombre pair d'arêtes dans les chemins plus une arête entre  $u$  et  $v$ ).

Cependant, par hypothèse,  $G$  ne contient pas de cycle impair. Donc, il ne peut pas y avoir d'arêtes entre deux sommets du même niveau. Par conséquent, tous les sommets de niveau pair sont colorés en rouge et tous les sommets de niveau impair sont colorés en bleu. Ainsi,  $G$  est biparti.

#### Exercice 4 Long Chemin.

Montrer que tout graphe  $G$  contient un chemin de longueur  $\delta(G)$ , ainsi qu'un cycle de longueur  $\geq \delta(G) + 1$  si  $\delta(G) \geq 2$ . Montrer que ces résultats sont optimaux.

#### Solution.

Soit  $x_0$  un sommet de  $G$ . On sait que  $\delta(x) \geq \delta(G)$ . Il a donc au moins  $\delta(G)$  voisins. On choisit un de ces voisins, notons le  $x_1$ . Ce nouveau sommet a aussi  $\delta(G)$  voisins dont au moins  $\delta(G) - 1$  différents de ceux choisis précédemment. En répétant processus  $\delta(G)$  fois, on aura bien obtenu  $\delta(G)$  sommets différents de  $x_0$  et tels que  $(x_0, x_1, \dots, x_{\delta(G)})$  forme un chemin de longueur  $\delta(G)$ . On reprend le chemin  $(x_0, x_1, \dots, x_{\delta(G)})$  choisi précédemment. Si  $x_{\delta(G)}$  est de degré

#### Exercice 5 Convexité.

#### Solution.

A remplir

#### Exercice 6 Convexité.

#### Solution.

A remplir

#### Exercice 7 Convexité.

#### Solution.

A remplir

**Exercice 8 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 9 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 10 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 11 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

## TD2 — Couplages

### Exercice 1 Euh . . .

Que vaut  $\alpha(L(G))$  ?

#### Solution.

On a

$$\alpha(L(G)) = \mu(G)$$

### Exercice 2 Couplage maximum Vs couplage maximal.

Soient  $G$  un graphe,  $M$  un couplage maximal de  $G$  et  $M^*$  un couplage maximum de  $G$ . Montrer que  $|M| \leq |M^*| \leq 2|M|$ .

#### Solution.

On peut considérer le stable  $S$  tel que  $S \cup M = G$ .

### Exercice 3 Couplage dans les graphes sans triangle.

Un graphe est dit sans triangle si il ne contient pas de cycle de longueur 3 comme sous-graphe. Si  $G$  est sans triangle, montrer que

$$\chi(\overline{G}) + \mu(G) = n$$

#### Solution.

A remplir

### Exercice 4 Jeu de Slither.

Le jeu de Slither se joue sur un graphe connexe, noté  $G$ . Chaque joueur choisit à son tour un sommet  $v_i$  non précédemment choisi. La suite  $v_0, v_1, \dots$  doit former un chemin, c'est-à-dire que tout pour tout  $i = 1, 2, \dots$ ,  $v_i$  doit être choisi comme adjacent à  $v_{i-1}$ . Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Montrer que si  $G$  admet un couplage parfait alors le second joueur a une stratégie gagnante. Montrer que si  $G$  n'admet pas un couplage parfait alors le premier joueur a une stratégie gagnante

#### Solution.

A remplir

### Exercice 5 Tous d'un coup.

Soit  $G = (X \cup Y, E)$  un graphe biparti de bipartition  $(X, Y)$  avec  $\Delta(G) \geq 1$ .

1. Montrer que  $G$  admet un couplage couvrant tous les sommets de  $X$  de degré  $\Delta(G)$ .
2. Montrer que  $G$  admet un couplage couvrant tous les sommets de  $G$  de degré  $\Delta(G)$ .
3. En déduire qu'il est possible de partitionner les arêtes de  $G$  en  $\Delta(G)$  couplages.

#### Solution.

1. On note  $k = \Delta(G)$ . Soit  $S \subseteq X_\Delta$ . On note  $Z = N_G(S)$ . On va compter  $e$  le nombre d'arêtes entre  $S$  et  $Z$  :

$$e = \sum_{s \in S} \deg(s) = k \cdot |S|$$

Par ailleurs, comme toute arête comptée est incidente à un sommet  $z$ , on a :

$$e \leq \sum_{z \in Z} \deg(z) = k \cdot |Z|$$



Donc  $k \cdot |S| \leq k \cdot |Z|$  d'où  $|S| \leq |Z| = |N_G(S)|$ . Par le théorème de Hall,  $G$  admet un couplage qui sature  $X_\Delta$ .

- Par la question précédente il existe un couplage  $M_X$  saturant  $X_\Delta$ . De même, il existe un couplage  $M_Y$  saturant  $Y_\Delta$ . On va extraire de  $M_X \cup M_Y$  un couplage  $M$  saturant  $X_\Delta \cup Y_\Delta$ . On construit  $M$  en regardant chaque composante connexe de  $M_X \cup M_Y$ .

Soit  $C$  une composante connexe de  $(V, M_X \cup M_Y)$  ( $C$  est soit un chemin soit un cycle).

- Si  $C$  est un cycle alors on choisit  $M = M_X$  ou  $M = M_Y$  (les deux conviennent) et on continue à saturer les sommets de  $C$
- Si  $C$  est un chemin on peut supposer que sa première arête est dans  $M_X$ . On note  $C = x_1 x_2 \dots x_k$ . On a trois cas :
  - (a) Si  $x_1 \in Y_\Delta$ , c'est impossible car  $x_1$  doit être incident à une arête de  $M_Y$ ,
  - (b) Si  $x_1 \in Y \setminus Y_\Delta$ , on prend  $M = M_Y$ ,
  - (c) Si  $x_1 \in X_\Delta$  on prend  $M = M_X$ .

### Exercice 6 Famille couvrante de cycles dans les graphes $2k$ -réguliers.

Un  $2$ -factor d'un graphe  $G$  est un sous-graphe  $2$ -régulier couvrant  $G$ . Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant dû à J. Petersen (1891) : *tout graphe régulier de degré pair admet un  $2$ -factor*. Soit  $G$  un graphe régulier de degré pair.

- A l'aide d'une marche eulérienne de  $G$ , montrer que  $G$  admet une orientation  $D$  dans laquelle  $d^+(x) = d^-(x)$  pour tout sommet  $x$  de  $G$ .
- Le **biparti d'adjacence** d'un graphe orienté  $D = (V, A)$  est le graphe de sommets  $\{x^+, x^-, : x \in V(D)\}$  et d'arêtes  $\{u^+ v^-, : uv \in A(D)\}$ . En étudiant le biparti d'adjacence du graphe orienté produit à la question précédente, conclure.

### Solution.

A remplir

### Exercice 7 Convexité.

### Solution.

- On construit le graphe biparti  $((X, Y), E)$  avec  $Y = A$  et  $X = \{1, \dots, p\}$ . On relie  $a \in A$  à  $i$  si  $a \in A_i$ . Un SDR correspond à un couplage saturant  $X$ .  
C'est exactement le théorème de Hall.
- Dans le cas où il y a  $p$ -candidats potentiels pour  $p$  ensembles, chaque élément sera un représentant.
- 

### Exercice 8 Subtil SAT.

### Solution.

- Soit  $F$  une formule 3-SAT. Pour  $i = 1 \dots s$  nombre de variables, si  $x_i$  apparaît  $l_i$  fois, on crée  $l_i$  variables  $x_i^1, \dots, x_i^{l_i}$  dans  $F$ , on remplace la  $j$ -ème occurrence de  $x_i$  par  $x_i^j$ .  
On ajoute les clauses

$$(\neg x_i^1 \vee x_i^2) \wedge (\neg x_i^2 \vee x_i^3) \wedge \dots \wedge (\neg x_i^{l_i} \vee x_i^1).$$

Elles sont toutes de taille  $\leq 2$  et maintenant toutes les variables  $x_i^j$  ont la même valeur.

On obtient une formule équivalente à  $F$ , où les clauses sont de taille  $\leq 3$  et les variables apparaissent 3 fois.

Comme 3-SAT est NP-complet,  $(\leq 3)$ -SAT est aussi NP-complet.

2. On fait le biparti  $G$  Clause-Variable. Les sommets clauses sont de degré 3 dans  $G$ . Les sommets variables sont de degré  $\leq 3$ .

Par l'exercice 5 il existe un couplage  $M$  saturant les clauses. Chaque clause  $C_i$  a sa variable privée  $M \cdot C_i$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on instancie  $M \cdot C_i$  pour satisfaire  $C_i$ .

Ainsi, la formule de départ est toujours satisfaisable.

### Exercice 9 Algo de couplage max — Partie 1.

Dans le graphe biparti suivant, appliquer l'algo de calcul d'un couplage maximum, en sachant que le couplage  $\{1b, 2c\}$  a déjà été précalculé.



#### Solution.

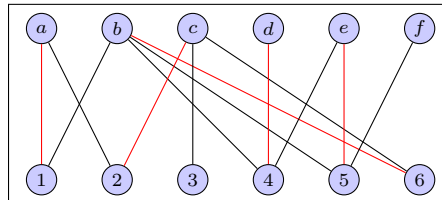
On nous donne  $\{1b, 2c\}$  au départ. On part d'un sommet non saturé et on essaie de lui trouver un chemin augmentant. Prenons ici par exemple 5. On le lie à  $e$  et on le rajoute au couplage qui devient alors  $\{1b, 2c, 5e\}$ .



Ensuite on choisit encore un nouveau sommet non saturé, par exemple  $d$ . On le relie à 4 et on le rajoute au couplage qui devient  $\{1b, 2c, 5e, 4d\}$ .



On continue, cette fois-ci disons avec  $a$ . On cherche un chemin augmentant à partir de  $a$  et on trouve  $\{a1, 1b, b6\}$ . On augmente le chemin et on le rajoute au couplage qui devient alors  $\{a1, b6, 2c, 5e, 4d\}$ .



On choisit encore un nouveau sommet, disons 3. On ne trouve pas de chemin augmentant à partir de 3 donc on réessaie avec un autre sommet non saturé, ici  $f$ . On ne trouve pas non plus de chemin augmentant à partir de  $f$ . Comme il n'y a plus de sommets non saturés, l'algorithme s'arrête et on a trouvé un couplage maximum.

### Exercice 10 Convexité.

**Solution.**

A remplir

### Exercice 11 Convexité.

**Solution.**

A remplir

### Exercice 12 Convexité.

**Solution.**

On part de  $m$  non saturé et on calcule un arbre de couplage. Le sommet  $j$  est non saturé donc on a le chemin augmentant  $mj$ , on le rajoute au couplage.

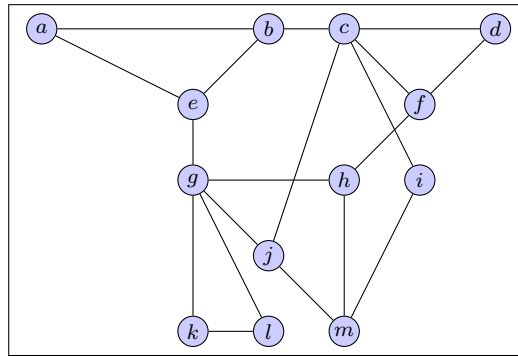


FIGURE 15 – Graphe  $G$

On part de  $d$  non saturé.

On trouve  $df$  une arête entre 2 sommets rouges, c'est-à-dire un blossom. On le contracte.

On part de  $i$  non saturé et on trouve  $i-cdf$  un chemin augmentant. En décontractant le blossom, on trouve  $i-c-f-d$  un chemin augmentant.

On augmente  $M$ , on a  $M$  final :

$$M = \{ic, fd, ae, gh, jm, kl\}$$

seul  $b$  est non saturé :  $M$  est maximum

### Exercice 13 Théorème de structure de Gallai (1964).

Consigne ici, faut pas m'en tenir rigueur

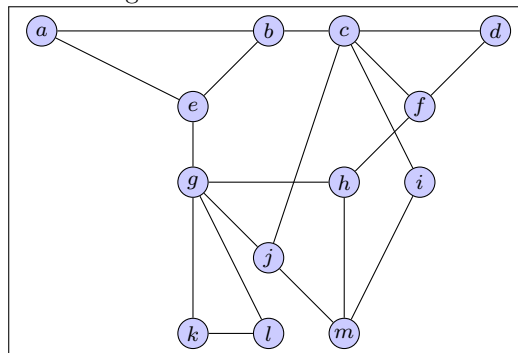


FIGURE 16 – Graphe  $G$

**Solution.**

On nous donne le couplage initial  $\{ae, cf, gh, kl\}$  suivant :

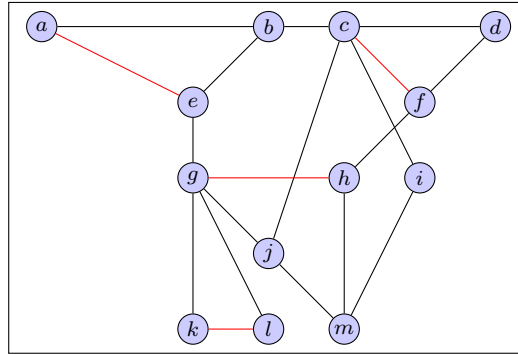


FIGURE 17 – Graphe  $G$

On choisit un sommet non saturé, disons  $m$ . On cherche un chemin augmentant à partir de  $m$  et on trouve  $mj$ . On augmente le couplage qui devient  $\{ae, cf, gh, kl, jm\}$ .

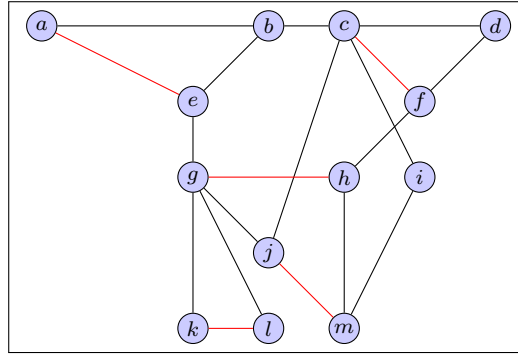


FIGURE 18 – Graphe  $G$

C'est un bon moment pour commencer à contracter nos blossoms. On contracte  $gkl, abe, cdf$ . Le graphe devient alors :

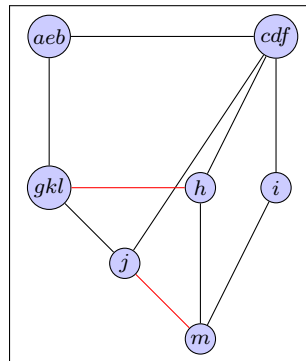


FIGURE 19 – Graphe  $G$

On choisit un nouveau sommet non saturé, disons  $i$ . On cherche un chemin augmentant à partir de  $i$  et on trouve  $i - cdf$ . Le graphe devient :



FIGURE 20 – Graphe  $G$

On ne peut plus contracter de blossom ou trouver de chemin augmentant, donc on remonte en décontractant les blossoms. Le sommet  $i$  est relié à  $c$  dans le blossom  $cdf$ , on a donc le chemin augmentant  $i - c - f - d$  dans le graphe initial. On augmente le couplage qui devient  $\{ae, gh, kl, jm, ic, fd, kl\}$ .

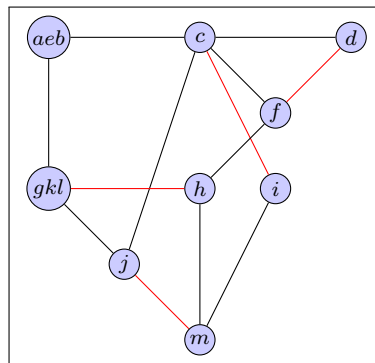


FIGURE 21 – Graphe  $G$

On voit que seul le blossom  $aeb$  n'est pas saturé, donc le couplage est maximum. On décontracte tous les blossoms pour obtenir le couplage maximum final :

$$M = \{ae, ci, df, gh, jm, kl\}$$

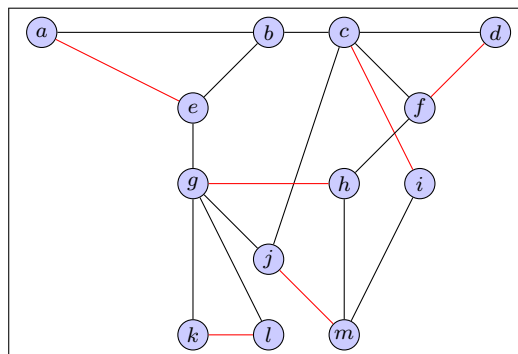


FIGURE 22 – Graphe  $G$

#### Exercice 14 Convexité.

##### Solution.

A remplir

## TD3 — Flots et circulation

### Exercice 1 Glouglouglou.

Dérouler à la main l'algorithme de Ford-Fulkerson sur les deux réseaux de transport suivants afin de déterminer dans chaque cas un flot maximal ainsi qu'une coupe minimale (les valeurs notées sur les arcs sont les capacités correspondantes). Pour le second graphe, on commencera par une augmentation de flot le long du chemin  $sabdp$  suivi d'une augmentation de flot le long de  $scedbap$ .

### Solution.

A remplir

### Exercice 2 PL.

Soit  $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$  un réseau de transport. Montrer qu'il est possible d'écrire un programme linéaire correspondant à la recherche d'un flot de valeur maximal dans  $\mathcal{N}$ . On proposera un modèle utilisant un nombre polynomial (en la taille de  $D$ ) de variables et de contraintes.

### Solution.

A remplir

### Exercice 3 Décomposition d'un flot.

Soit  $f$  un flot à valeurs entières sur un réseau de transport  $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$ . On veut montrer qu'il existe dans  $D$  un multi-ensemble (un ensemble où les éléments peuvent apparaître plusieurs fois) de chemins  $P_1, \dots, P_k$  tous de  $s$  à  $p$  et un multi-ensemble de cycles  $C_1, \dots, C_l$  tels que pour tout arc  $xy$  de  $D$  on ait  $f(xy) = \#\{i \in \{1, \dots, k\} : xy \in P_i\} + \#\{j \in \{1, \dots, l\} : xy \in C_j\}$ .

1. Sur le premier graphe de l'exercice 1, on considère le flot  $f$  défini par  $f(ab) = 5, f(bc) = 2, f(bp) = 4, f(ca) = 2, f(cd) = 1, f(db) = 1, f(sa) = 3, f(sc) = 1$ . Donner la décomposition voulue.
2. Prouver le résultat attendu en raisonnant par récurrence sur  $\sum_{xy \in A(D)} f(xy)$ .

### Solution.

1. La décomposition est :
  - On prend une fois le chemin  $scdp$ .
  - On prend 3 fois le chemin  $sabp$ .
  - On prend 2 fois le cycle  $abc$ .
2. Si la somme vaut 0 alors on ne prend aucun chemin ou cycle.  
Sinon, on a

$$\sum_{xy \in A(D)} f(xy) = S > 0$$

et on suppose que la propriété est vraie pour toute somme de flot  $< S$ .

On note  $D_f$  le graphe orienté formé des arcs partant du flot

$$D_f = (V, \{xy \in A(D) : f(xy) > 0\}.)$$

Deux cas se présentent :

- Premier cas :  $|f| > 0 : \exists a \in N^+(s)$  avec  $f(sa) > 0$ .  
Notons  $X = \{\text{sommets de } D_f \text{ tels qu'il existe un chemin de } D_f \text{ de } s \text{ à } x\}$ .  
Par la propriété du cours, si  $p \notin X$ , on a

$$f(X, \overline{X}) = |f| + f(\overline{X}, X) \geq |f| > 0$$

et donc il existe  $uv \in A(D)$  tel que  $u \in X, v \in \overline{X}$  et  $f(uv) > 0$  mais alors  $v$  doit appartenir à  $X$ , contradiction.

Il existe donc un chemin  $P$  de  $s$  à  $p$  dans  $D_f$ , c'est-à-dire :

$$\forall xy \in P, f(xy) \geq 1 \quad (> 0)$$

On définit le flot  $f'$  par

$$\begin{cases} f'(uv) = f(uv) & \text{si } uv \notin P \\ f'(uv) = f(uv) - 1 & \text{si } uv \in P \end{cases}$$

et on garde la conservation du flot.

On a

$$\begin{aligned} \sum_{xy \in A(D)} f'(xy) &= \sum_{xy \in A(D)} f(xy) - \text{long}(P) \\ &< \sum_{xy \in A(D)} f(xy) \end{aligned}$$

Par récurrence, il existe  $P_1, \dots, P_k$  chemins dirigés de  $s$  à  $p$  et  $C_1, \dots, C_l$  cycles dirigés tels que

$$\begin{aligned} \forall xy \in A(D), f'(xy) &= \#\{i \in \{1, \dots, k\} : xy \in P_i\} \\ &\quad + \#\{j \in \{1, \dots, l\} : xy \in C_j\} \end{aligned}$$

On pose alors  $P_{k+1} = P$  et on a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \forall xy \in A(D), xy \notin P \quad f(xy) = f'(xy) &= \#\{i \in \{1, \dots, k+1\} : xy \in P_i\} \\ &\quad + \#\{j \in \{1, \dots, l\} : xy \in C_j\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \forall xy \in A(D), xy \in P \quad f(xy) = f'(xy) + 1 &= \#\{i \in \{1, \dots, k\} : xy \in P_i\} \\ &\quad + \#\{j \in \{1, \dots, l\} : xy \in C_j\} + 1 \end{aligned}$$

- Second cas :  $|f| = 0$ . Comme on a  $\sum_{xy \in A(D)} f(xy) > 0$ , il existe un arc  $uv \in A(D)$  tel que

$$f(uv) \geq 1$$

On note  $X = \{z \text{ sommets de } D_f \text{ tels qu'il existe un chemin dirigé de } z \text{ à } u \text{ dans } D_f\}$ . Montrons que  $v \in X$ .

On a  $s \notin X$  car  $|f| = 0$  donc aucun arc de  $D_f$  ne sort de  $s$ . Alors et  $f(X, \overline{X}) = f(\overline{X}, X)$  donc si  $v \notin X$ , on a

$$f(X, \overline{X}) > 0 \implies f(\overline{X}, X) > 0$$

et il existerait  $a \notin X, b \in X$  tel que  $f(ab) > 0$  donc  $a \in X$ , contradiction.

Donc  $v \in X$  et il existe un cycle dirigé  $C$  dans  $D_f$  contenant l'arc  $uv$ .

Comme précédemment, on définit le flot  $f'$  par

$$\begin{cases} f'(xy) = f(xy) & \text{si } xy \notin C \\ f'(xy) = f(xy) - 1 & \text{si } xy \in C \end{cases}$$

et on garde la conservation du flot. On applique la récurrence au flot  $f'$  et on conclut de la même manière en ajoutant le cycle  $C$  à la décomposition.

#### Exercice 4 Théorème de Hall.

Soit  $G = ((A, B), E)$  un graphe biparti (de bipartition  $(A, B)$ ). On souhaite montrer le théorème de Hall en utilisant ldes résultats de flots. Pour cela, on considère le réseau de transport  $\mathcal{N} = (D, s, p, c)$  où  $D$  est obtenu depuis  $G$  en ajoutant une source  $s$  dominant tous les sommets de

$A$ , en orientant toutes les arêtes de  $G$  de  $A$  vers  $B$  puis en ajoutant un puits  $p$  dominé par tous les sommets de  $B$ . Finalement, pour obtenir  $\mathcal{N}$ , on munit chaque arc de  $D$  d'une capacité de 1.

1. Soit  $X$  une  $(s, p)$ -coupe de capacité minimum et telle que  $|X \cap A|$  soit minimal pour cela. Montrer qu'il n'y a pas d'arc dans  $D$  de  $X \cap A$  vers  $B \setminus X$ .
2. Montrer que pour tout entier  $k$ , il y a une correspondance entre les flots entiers  $f$  de  $\mathcal{N}$  avec  $|f| = k$  et les couplages de  $G$  de taille  $k$ .
3. Dédurre le théorème de Hall du théorème « **min cut = max flot** ».

### Solution.

1. Sinon, il existe une arête  $uv$  avec  $u \in X \cap A$  et  $v \in B \setminus X$ .

On considère la  $(s, p)$ -coupe  $(X', \overline{X}') = (X \setminus \{u\}, \overline{X} \cup \{u\})$ .

Les arcs qui traversent  $X', \overline{X}'$  sont ceux de  $X, \overline{X}$  moins les arcs sortant de  $u$  (dont au moins  $uv$ ) plus les arcs entrants en  $u$  depuis  $X'$ , c'est-à-dire  $su$ .

Donc

$$c(X', \overline{X}') \leq c(X, \overline{X})$$

Comme  $(X, \overline{X})$  est une  $(s, p)$ -coupe min, on a l'égalité et donc  $(X', \overline{X}')$  est aussi une  $(s, p)$ -coupe min. Mais  $|X' \cap A| = |X \cap A \setminus \{u\}| < |X \cap A|$ , ce qui contredit la minimalité de  $|X \cap A|$ .

Donc, il n'y a pas d'arc dans  $D$  de  $X \cap A$  vers  $B \setminus X$ .

2. Supposons que  $\mathcal{N}$  admette un flot entier  $f$  de valeur  $k$ . Si  $x$  est un voisin de  $s$  avec  $f(sx) > 0$ , alors

$$1 \leq f(sx) \leq c(sx) = 1$$

et donc  $f(sx) = 1$ . Donc il existe  $x_1, \dots, x_k$   $k$  sommets distincts de  $A$  tels que  $f(sx_i) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$  et pour tout autre voisin  $x$  de  $s$ ,  $f(sx) = 0$ .

Pour tout sommet  $x_i$ , le flot sortant de  $x_i$  doit être égal à 1 (car le flot entrant est 1 et la conservation du flot s'applique) donc il existe un voisin  $y_i$  de  $x_i$  dans  $B$  tel que  $f(x_i y_i) = 1$ . De plus, les  $y_i$  sont distincts car sinon on aurait  $f(x_i y_i) = 1$  et  $f(x_j y_i) = 1$  pour  $i \neq j$  et donc le flot entrant en  $y_i$  serait au moins de 2. Par conservation du flot, le flot sortant de  $y_i$  serait aussi au moins de 2 ce qui est impossible car le seul arc sortant de  $y_i$  est  $y_i p$  qui est de capacité 1.

Alors, les arêtes  $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_k y_k$  forment un couplage de taille  $k$  dans  $G$ .

Et inversement, si  $M$  est un couplage de taille  $k$  dans  $G$ , on peut définir un flot  $f$  dans  $\mathcal{N}$  par

$$f(xy) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = s \text{ et } y \in A \text{ avec } (y, \cdot) \in M \\ 1 & \text{si } x \in A, y \in B \text{ avec } xy \in M \\ 1 & \text{si } x \in B \text{ et } y = p \text{ avec } (\cdot, x) \in M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on vérifie facilement que  $f$  est un flot de valeur  $k$ .

3. On va montrer la contraposée du théorème de Hall :

Si la taille d'un couplage maximum du  $G$  est strictement inférieure à  $|A|$ , alors il existe  $S \subseteq A$  tel que  $|N(S)| < |S|$ .

Dans ce cas, le flot maximum dans  $\mathcal{N}$  est de valeur  $k < |A|$  (par le point précédent).

Alors, par le théorème « min cut = max flot », il existe une  $(s, p)$ -coupe  $(X, \overline{X})$  de capacité  $k < |A|$ .

De plus, par le point 1, il existe une coupe minimale  $(X, \overline{X})$  avec aucune arête de  $X \cap A$  vers  $B \setminus X$ . Il en suit

$$c(X, \overline{X}) = |A \setminus X| + |B \cap X| < |A| \implies |B \cap X| < |X \cap A|$$



Alors, en posant  $S = X \cap A$ , on a bien  $|N(S)| \leq |B \cap X| < |X \cap A| = |S|$ .

**Exercice 5 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 6 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

**Exercice 7 Convexité.**

**Solution.**

A remplir

## Examen blanc

### Exercice 1 Flots — 3pts.

Calculer un flot maximal sur le réseau de transport ci-dessous, commençant par une augmentation de flot le long du chemin *sadbep*. En expliquant comment l'obtenir, donner une coupe minimale du réseau.

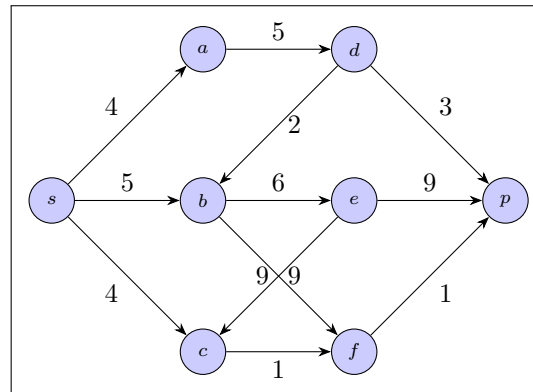


FIGURE 23 – Réseau de transport initial

### Solution.

Commençons par retirer *sadbep* au réseau pour obtenir le réseau résiduel suivant :

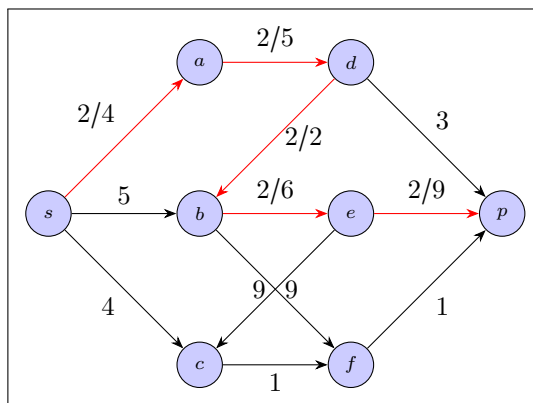


FIGURE 24 – Réseau de transport initial après la première étape

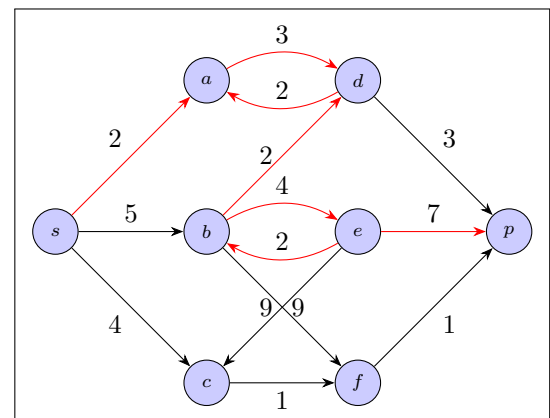


FIGURE 25 – Réseau résiduel après avoir retiré un flot de 2 par *sadbep*

Ensuite, on peut faire passer 2 de flot par *sbdp* et 1 de flot par *scfp* pour obtenir les graphes suivants :

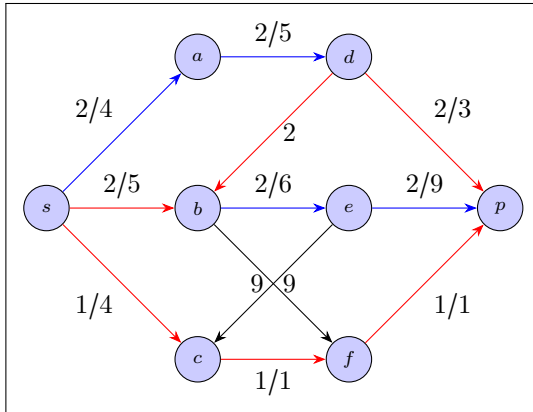


FIGURE 26 – Réseau de transport initial après la deuxième étape

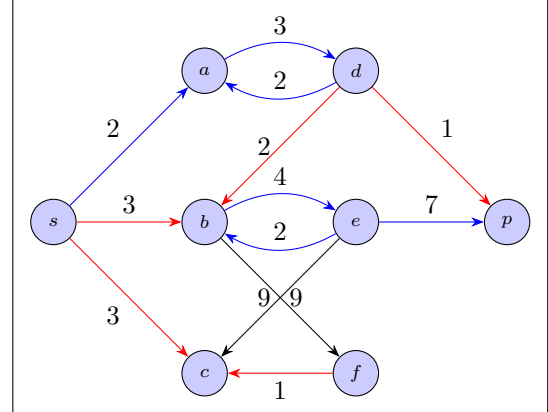


FIGURE 27 – Réseau résiduel après avoir retiré un flot de 2 par *sbdp* et un autre de 1 par *scfp*

Ensuite, on peut faire passer 1 de flot par *sadp* et 3 par *sbeep* :

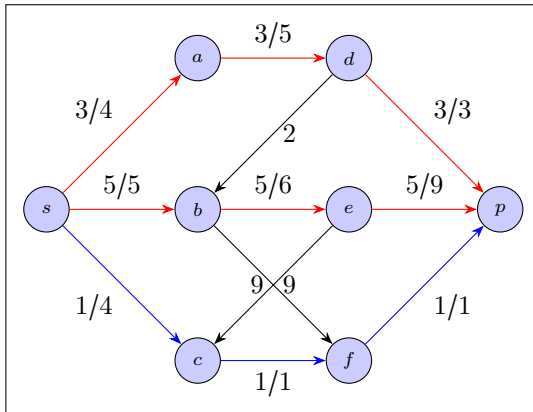


FIGURE 28 – Réseau de transport initial après la troisième étape

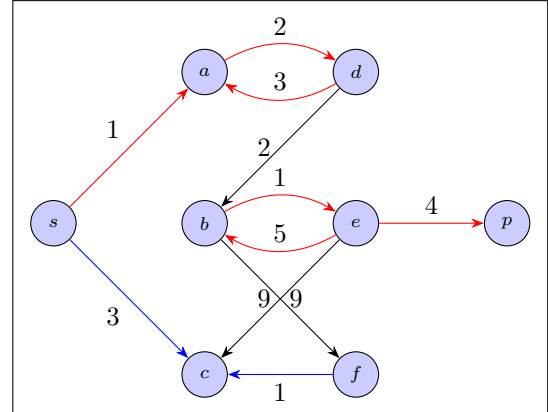


FIGURE 29 – Réseau résiduel après avoir retiré un flot de 1 par *sadp* et un autre de 3 par *sbeep*

Il ne reste plus qu'à faire passer une dernière fois 1 de flot par *sadbep* et on aura fini :

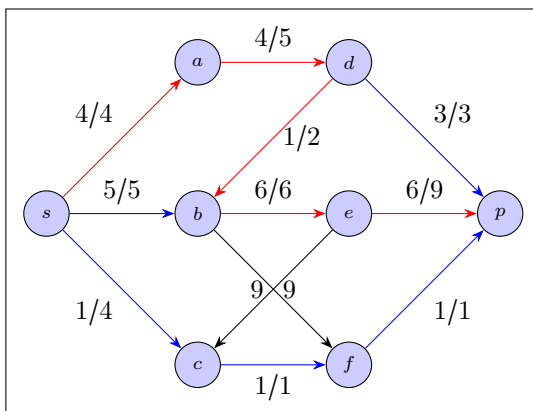


FIGURE 30 – Réseau de transport initial après la dernière étape

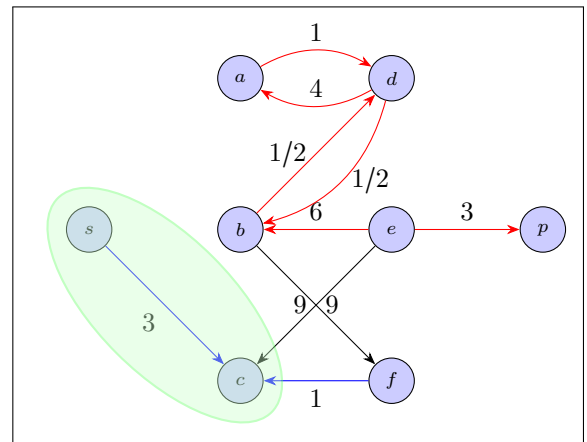


FIGURE 31 – Réseau résiduel après avoir retiré un dernier flot de 1 par *sadbep*

On a trouvé un flot maximal de valeur 10. Une coupe minimale est donnée par l'ensemble des sommets atteignables depuis  $s$  dans le réseau résiduel final, soit  $\{s, c\}$ .

### Exercice 2 Indépendant dans les subcubiques — 5pts.

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit **subcubique** si tous ses sommets ont degré au plus 3, c'est à dire si  $\forall v \in V, \deg_G(v) \leq 3$ . Le but de l'exercice est de donner des bornes sur  $\alpha(G)$ , la taille du plus grand ensemble indépendant (ou stable) de  $G$  en fonction de  $n$ , le nombre de sommets de  $G$ .

1. On commence par fournir une borne inférieure pour  $\alpha(G)$ .
  - (a) Montrer que si  $x$  est un sommet de  $G$  et  $I$  un indépendant de  $G \setminus (x \cup N_G(x))$  alors  $I \cup \{x\}$  est un indépendant de  $G$ .
  - (b) En déduire, par récurrence sur  $n$ , que tout graphe subcubique à  $n$  sommets admet un indépendant de taille au moins  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ .
2. On suppose maintenant que  $G$  est cubique (c'est à dire  $\forall v \in V, \deg_G(v) = 3$ ) et on va établir une borne supérieure pour  $\alpha(G)$ .
  - (a) Soit  $X$  un indépendant de  $G$ . En fonction de la taille de  $X$ , calculer le nombre d'arêtes, noté  $e(X, \overline{X})$ , entre  $X$  et son complémentaire.
  - (b) En déduire que  $|X| \leq |\overline{X}|$  puis que  $|X| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .
3. Donner deux exemples de graphes cubiques  $G_1$  et  $G_2$  sur  $n$  sommets tels que  $\alpha(G_1) = \frac{n}{4}$  et  $\alpha(G_2) = \frac{n}{2}$ . Si possible, vous donnerez des exemples pour  $n$  arbitrairement grand.

### Solution.

1. On fournit une borne inférieure pour  $\alpha(G)$ .
  - (a) Soit  $x$  un sommet de  $G$  et  $I$  un indépendant de  $G \setminus (x \cup N_G(x))$ . Soit  $y$  un sommet de  $I$ .  
Si  $y$  est un voisin de  $x$  alors  $y \in N_G(x)$  ce qui contredit le fait que  $y$  est dans  $G \setminus (x \cup N_G(x))$ . Donc  $y$  n'est pas un voisin de  $x$ .  
Alors, tout sommet de  $I$  n'est pas voisin de  $x$  donc  $I \cup \{x\}$  est un indépendant de  $G$ .
  - (b) On montre par récurrence (forte) sur  $n$  que tout graphe subcubique à  $n$  sommets admet un indépendant de taille au moins  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ .  
Pour  $n = 1$ , le graphe subcubique est réduit à un sommet isolé qui est bien un indépendant de taille  $1 \geq \lceil \frac{1}{4} \rceil$ .  
Supposons que la propriété est vraie pour tout graphe subcubique à  $k$  sommets (avec  $1 \leq k < n$ ) et montrons-la pour un graphe subcubique  $G$  à  $n$  sommets.  
Soit  $G$  un graphe subcubique à  $n$  sommets. Soit  $x$  un sommet de  $G$ .  
Le graphe  $G' = G \setminus (x \cup N_G(x))$  est subcubique (car  $G$  l'est) et possède au moins  $n - 4$  sommets (ceux de départ, moins  $x$  et au plus ses 3 voisins). Par hypothèse de récurrence, il admet un indépendant  $I$  de taille au moins  $\lceil \frac{n-4}{4} \rceil$ .  
D'après (1a),  $I \cup \{x\}$  est un indépendant de  $G$  de taille au moins  $\lceil \frac{n-4}{4} \rceil + 1$ .  
Donc  $G$  admet un indépendant de taille au moins  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$ .
2. On suppose maintenant que  $G$  est cubique et on établit une borne supérieure pour  $\alpha(G)$ .
  - (a) Soit  $X$  un indépendant de  $G$ . Chaque sommet de  $X$  possède 3 arêtes qui le relient à des sommets de  $\overline{X}$  (car  $G$  est cubique et  $X$  est un indépendant). Donc  $e(X, \overline{X}) = 3|X|$ .
  - (b) Au mieux, tout triplet de sommets de  $X$  est relié à un même triplet de sommets de  $\overline{X}$ . Donc  $|X| \leq |\overline{X}|$ .  
De plus, on a  $X \sqcup \overline{X} = V$  donc  $|X| + |\overline{X}| = n$ . Comme  $|X| \leq |\overline{X}|$ , on a forcément  $|X| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .
3. On peut utiliser les graphes suivants :
  - Pour  $G_1$ , on peut prendre une collection de copies du graphe suivant (le nombre de copies dépend de  $n$ ) :

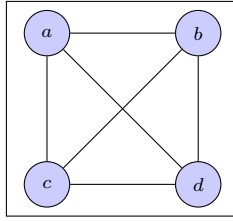


FIGURE 32 – Graphe cubique utilisé pour construire  $G_1$

Chaque copie possède un indépendant de taille 1 (par exemple le sommet central) et le graphe est cubique. Donc pour  $n$  suffisamment grand, on peut obtenir un graphe cubique à  $n$  sommets avec un indépendant de taille  $\frac{n}{4}$ .

- Pour  $G_2$ , on peut prendre une collection de copies du graphe suivant (le nombre de copies dépend de  $n$ ) :

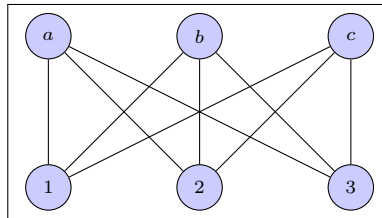


FIGURE 33 – Graphe cubique utilisé pour construire  $G_2$

Chaque copie possède un indépendant de taille 3 (par exemple les trois sommets en haut) et le graphe est cubique. Donc pour  $n$  suffisamment grand, on peut obtenir un graphe cubique à  $n$  sommets avec un indépendant de taille  $\frac{n}{2}$ .

### Exercice 3 Couplage max — 3pts.

Dans le graphe suivant, appliquer l'algorithme d'Edmonds pour calculer un couplage maximum, en sachant que le couplage  $\{be, ci, hp\}$  a déjà été précalculé. Au cours de votre déroulement d'algorithme, vous devrez, à au moins une reprise, contracter un blossom.

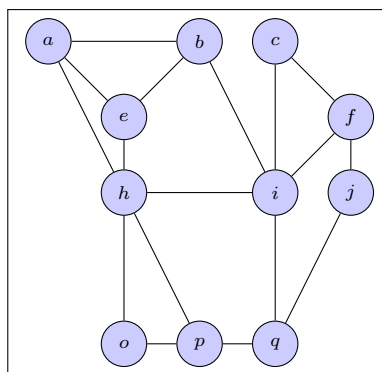


FIGURE 34 – Graphe initial

### Solution.

On commence par rajouter le couplage initial :

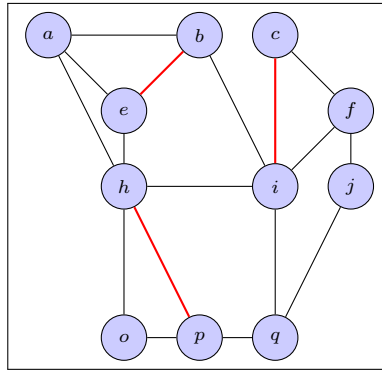


FIGURE 35 – Graphe avec couplage  $\{be, ci, hp\}$  précalculé

Contractons maintenant des blossoms. On peut commencer par le blossom  $cfi$  :

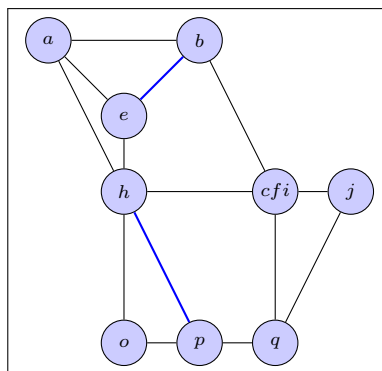


FIGURE 36 – Graphe après contraction du blossom  $cfi$

Ensuite on peut contracter le blossom  $cfijq$  :

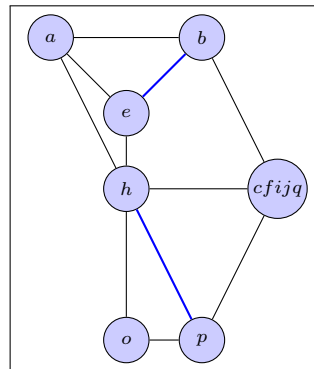


FIGURE 37 – Graphe après contraction du blossom  $cfijq$

Cherchons maintenant des chemins augmentants. On part d'un sommet non saturé, ici  $a$ , et on trouve le chemin augmentant  $ae - eb - bcfijq$ . On augmente alors le couplage :

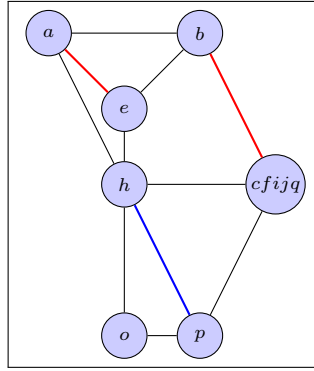


FIGURE 38 – Graphe après augmentation du chemin par  $ae - eb - bc f i j q$

Il ne reste qu'un seul sommet non saturé  $o$  donc on a fini de trouver des chemins augmentants.  
Il faut maintenant décontracter nos blossoms pour retrouver le couplage maximum :

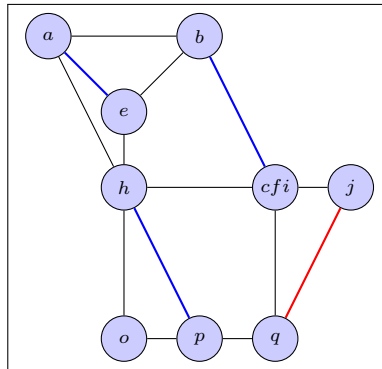


FIGURE 39 – Graphe après décontraction du blossom  $cf i j q$

Enfin, on décontracte le blossom  $cf i$  pour obtenir le couplage maximum final :

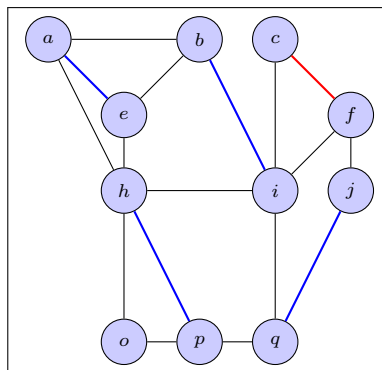


FIGURE 40 – Graphe final après décontraction du blossom  $cf i$

On voit alors notre couplage maximum de taille 5 :

$$\{ae, bi, cf, hp, qj\}.$$

#### Exercice 4 Miam ! — 5pts.

Trois étudiants affamés, nommés  $E_1, E_2$  et  $E_3$ , se retrouvent pour manger 6 pizzas, notées

$P_1, \dots, P_6$ . Chaque étudiant veut manger 2 pizzas exactement. Les étudiants ont les contraintes alimentaires suivantes :

- $E_1$  qui déteste les champignons, ne veut manger que les pizzas  $P_1, P_4$  et  $P_5$ .
- $E_2$  qui est allergique au chorizo, ne veut manger que les pizzas  $P_2, P_5$  et  $P_6$ .
- $E_3$  qui ne digère pas les anchois, ne veut manger que les pizzas  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_6$ .

On souhaite savoir si il est possible de répartir les 6 pizzas afin de satisfaire les choix des étudiants.

1. Construire le graphe biparti  $H_{(E,P)}$  défini sur  $\{P_1, \dots, P_6\} \cup \{E_1, E_2, E_3\}$  et dont les arêtes sont  $\{P_i E_j : \text{si } E_j \text{ veut manger la pizza } P_i\}$ .
2. Quelle structure souhaite-t-on trouver dans  $H_{(E,P)}$  pour garantir une solution au problème ?
3. Une **copie** d'un sommet  $x$  dans un graphe  $G$  est un sommet  $y$  non-adjacent à  $x$  et dont le voisinage est identique à celui de  $x$ . A partir du graphe  $H_{(E,P)}$ , on construit le graphe  $H'_{(E,P)}$  en ajoutant une copie pour chaque sommet  $E_i$ . Sans preuve, quelle structure souhaite-t-on trouver dans  $H'_{(E,P)}$  pour garantir que les trois étudiants peuvent se répartir les six pizzas en respectant leurs choix ?
4. Résoudre le problème (en utilisant un algorithme du cours ...).
5. Plus généralement, soit  $k \geq 2$  fixé, le **centre** d'un graphe biparti complet  $K_{1,k}$  est le sommet de ce graphe qui n'est pas une feuille. Etant donné un graphe biparti  $G = ((A, B), E)$ , on souhaite déterminer si  $G$  peut être (sommet-) partitionné en graphes  $K_{1,k}$  dont les centres sont tous dans  $A$ . Donner un algorithme de résolution en temps polynomial pour ce problème. Prouver la validité de votre algorithme.

### Solution.

1. Le graphe biparti  $H_{(E,P)}$  est le suivant :

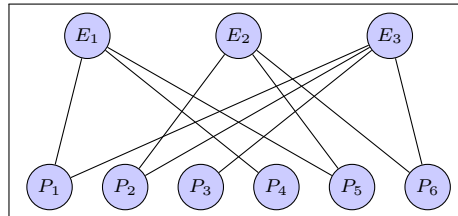


FIGURE 41 – Graphe biparti  $H_{(E,P)}$  avec les préférences culinaires des étudiants

2. On souhaite trouver deux couplages disjoints saturant les sommets  $E_1, E_2$  et  $E_3$ .
3. On souhaite trouver un couplage parfait dans le graphe  $H'_{(E,P)}$  suivant :

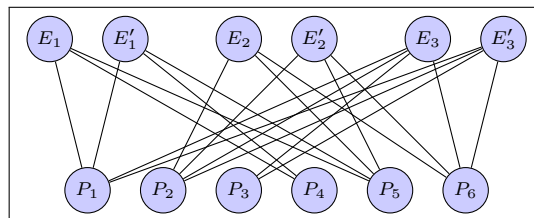


FIGURE 42 – Graphe biparti  $H'_{(E,P)}$  avec les copies des étudiants

4. On utilise l'algorithme d'Edmonds pour trouver un couplage maximum dans  $H'_{(E,P)}$ . On commence par trouver un chemin augmentant à partir de  $E_1$  :



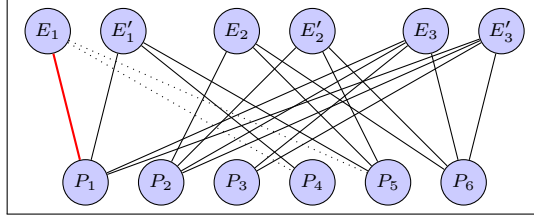


FIGURE 43 – Graphe biparti  $H'_{(E,P)}$  après calcul du couplage  $E_1P_1$

Dans la suite on omettra les arêtes à partir de sommets étudiants déjà dans le couplage. Puis on trouve un chemin augmentant à partir de  $E'_1$  :

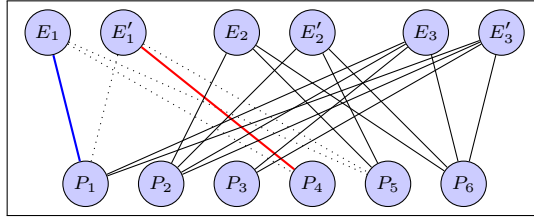


FIGURE 44 – Graphe biparti  $H'_{(E,P)}$  après rajout de  $E'_1P_4$  dans le couplage

Ensuite pour  $E_2$  :

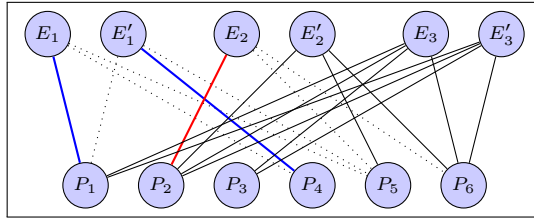


FIGURE 45 – Graphe biparti  $H'_{(E,P)}$  après rajout de  $E_2P_2$  dans le couplage

Et pour  $E'_2$  :

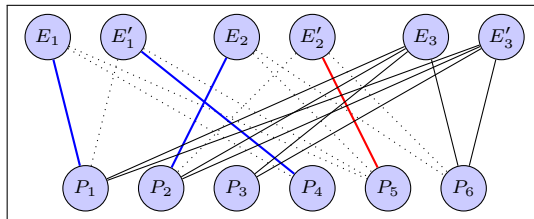


FIGURE 46 – Graphe biparti  $H'_{(E,P)}$  après rajout de  $E'_2P_3$  dans le couplage

Enfin pour  $E_3$  :

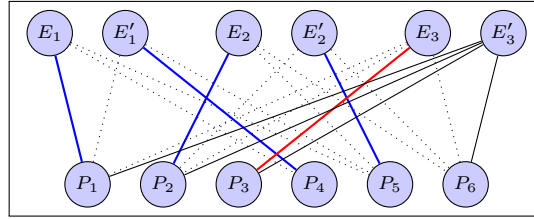


FIGURE 47 – Graphe biparti  $H'_{(E,P)}$  après rajout de  $E_3P_3$  dans le couplage

Et pour  $E'_3$  :

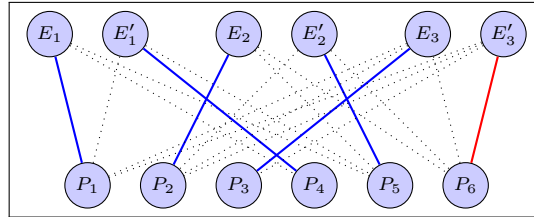


FIGURE 48 – Graphe biparti  $H'_{(E,P)}$  après rajout de  $E'_3P_6$  dans le couplage

On a trouvé un couplage parfait dans  $H'_{(E,P)}$  donc les trois étudiants peuvent se répartir les six pizzas comme suit :

$$\begin{cases} E_1 \text{ mange } P_1 \text{ et } P_4 \\ E_2 \text{ mange } P_2 \text{ et } P_5 \\ E_3 \text{ mange } P_3 \text{ et } P_6 \end{cases}$$

5. Pas encore rédigé.

### Exercice 5 Graphes auto-complémentaires — 4pts.

Un graphe  $G$  est dit **auto-complémentaire** si  $G$  est isomorphe à son complémentaire  $\overline{G}$ .

1. Justifier que  $P_4$  et  $C_5$  sont auto-complémentaires.
2. Montrer que tout graphe auto-complémentaire est connexe.
3. En notant  $n$  le nombre de sommets de  $G$ , calculer le nombre d'arêtes d'un graphe auto-complémentaire en fonction de  $n$ .
4. En déduire que  $n \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ .
5. Soit  $G$  un graphe auto-complémentaire et  $P$  un chemin de longueur 3 (c'est à dire avec 4 sommets). On note  $G'$  le graphe obtenu depuis  $G \cup P$  en reliant le premier et le dernier sommet de  $P$  à tous les sommets de  $G$ . Montrer que  $G'$  est auto-complémentaire.
6. En déduire que pour tout  $n$  avec  $n \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ , il existe un graphe auto-complémentaire à  $n$  sommets.

### Solution.

1. Dessinons ces graphes et leurs complémentaires pour comprendre visuellement ce qui se passe :

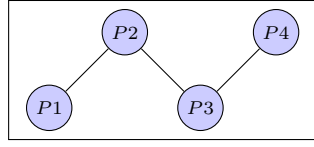


FIGURE 49 – Graphe  $P_4$  de départ

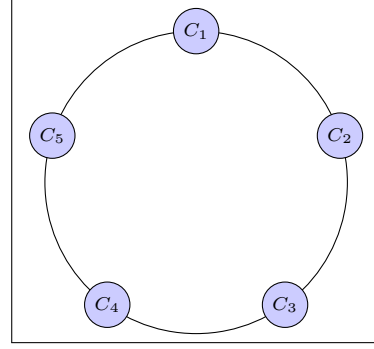


FIGURE 50 – Graphe  $C_5$  de départ

Lorsqu'on prend leur complémentaire, on obtient les graphes suivants :

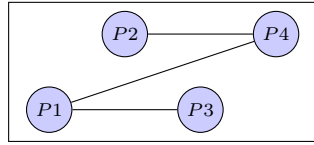


FIGURE 51 –  
Complémentaire du graphe  
 $P_4$

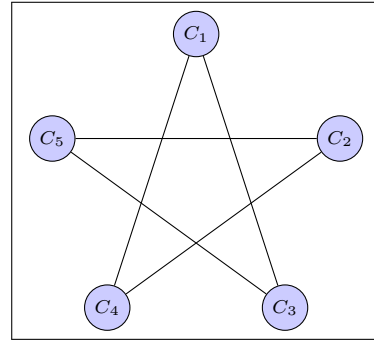


FIGURE 52 – Complémentaire du  
graphe  $C_5$

On voit alors clairement qu'on peut identifier dans ces graphes un unique chemin (respectivement cycle) qui passe par toutes les arêtes et tous les sommets.

Formellement, on peut définir les fonctions suivantes :

$$f_{P_4} : \begin{cases} P_1 \mapsto P_2 \\ P_2 \mapsto P_4 \\ P_3 \mapsto P_1 \\ P_4 \mapsto P_3 \end{cases} \quad f_{C_5} : \begin{cases} C_1 \mapsto C_1 \\ C_2 \mapsto C_3 \\ C_3 \mapsto C_5 \\ C_4 \mapsto C_2 \\ C_5 \mapsto C_4 \end{cases}$$

qui sont des isomorphismes entre  $P_4$  et  $\overline{P_4}$  (respectivement  $C_5$  et  $\overline{C_5}$ ).

Alors, ces graphes sont bien auto-complémentaires.

2. Soit  $G$  un graphe non connexe. Alors, il existe une partition de  $V(G)$  en deux ensembles non vides  $A$  et  $B$  tels qu'il n'existe pas d'arête entre un sommet de  $A$  et un sommet de  $B$ . Dans le complémentaire  $\overline{G}$ , tous les sommets de  $A$  sont reliés à tous les sommets de  $B$ . Donc  $\overline{G}$  est connexe. Ainsi,  $G$  et  $\overline{G}$  ne peuvent pas être isomorphes (et donc auto-complémentaires).

Donc tout graphe auto-complémentaire est connexe.

3. Soit  $G$  un graphe auto-complémentaire à  $n$  sommets. On note  $m$  le nombre d'arêtes de  $G$ . On remarque que le nombre total d'arêtes possibles dans un graphe à  $n$  sommets est

$\frac{n(n-1)}{2}$ . Comme  $G$  est isomorphe à  $\overline{G}$ , on a forcément

$$\begin{aligned} m = \frac{n(n-1)}{2} - m &\iff 2m = \frac{n(n-1)}{2} \\ &\iff m = \frac{n(n-1)}{4}. \end{aligned}$$

4. Comme  $m$  est un entier,  $\frac{n(n-1)}{4}$  doit être un entier et donc on a forcément  $n(n-1) \equiv 0 \pmod{4}$ , c'est à dire  $n \equiv 0$  ou  $1 \pmod{4}$ .
5. On se donne un graphe auto-complémentaire  $G$  à  $n$  sommets et un chemin  $P$  de longueur 3. On note  $G'$  le graphe obtenu depuis  $G \cup P$  avec le procédé décrit dans l'énoncé (5). On a :

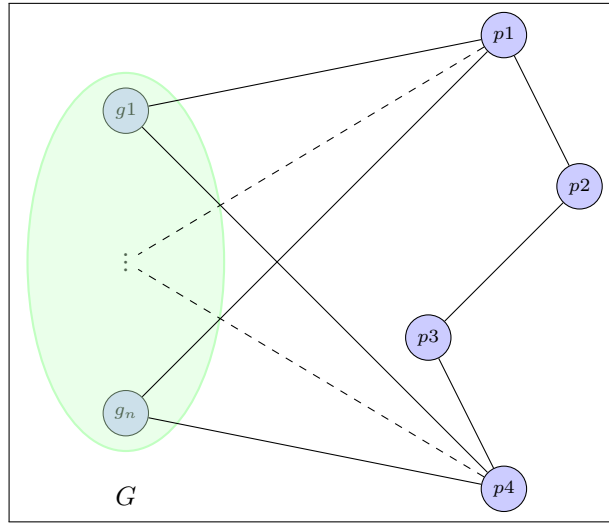


FIGURE 53 – Graphe  $G \cup P$

Observons ce qui se passe quand on passe au complémentaire  $\overline{G'}$  :

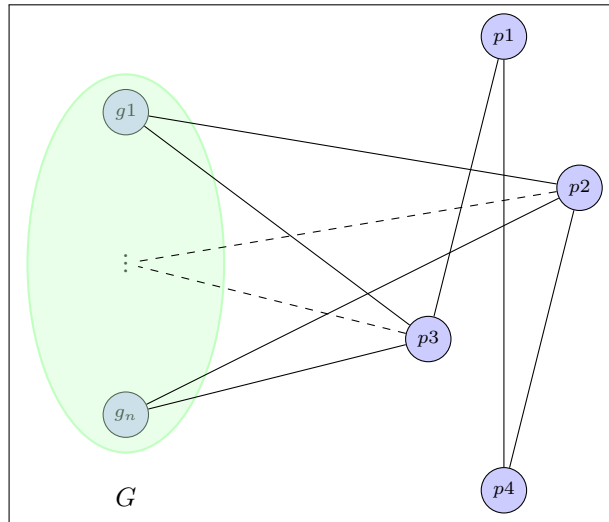


FIGURE 54 – Complémentaire du graphe  $G \cup P$

On remarque alors que les arêtes internes à  $G$  ne posent pas de soucis car  $G$  est auto-complémentaire. De même pour les arêtes internes à  $P$ . Reste à vérifier que les arêtes entre  $G$  et  $P$  sont bien préservées par l'isomorphisme. Dans  $G'$ , les sommets  $p_1$  et  $p_4$  sont reliés à tous les sommets de  $G$ . Dans  $\overline{G'}$ , les sommets  $p_2$  et  $p_3$  sont reliés à tous les sommets

de  $\overline{G}$ . Comme  $G$  est isomorphe à  $\overline{G}$ , on peut définir un isomorphisme entre  $G'$  et  $\overline{G'}$  en envoyant  $p_1$  sur  $p_2$ ,  $p_4$  sur  $p_3$  et en utilisant l'isomorphisme entre  $G$  et  $\overline{G}$  pour les autres sommets. Plus formellement, on a

$$f_{G'} : \begin{cases} p_1 \mapsto p_2 \\ p_2 \mapsto g_1 \\ p_3 \mapsto g_n \\ p_4 \mapsto p_3 \\ g_i \mapsto f_G(g_i) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

où  $f_G$  est un isomorphisme entre  $G$  et  $\overline{G}$ .

Ainsi,  $G'$  est auto-complémentaire.

6. Si  $n = 4$  ou  $n = 5$ , on peut prendre  $G = P_4$  ou  $G = C_5$ . Sinon, on peut construire  $G'$  à partir de  $G$  en répétant le procédé décrit en (5) pour obtenir un graphe de taille  $n$  (car l'opération ajoute 4 sommets à chaque fois et conserve la propriété d'auto-complémentarité).

## TD4 — Connectivité

### Exercice 1 Echauffement.

Calculer la sommet-connectivité et l'arête-connectivité du graphe suivant :

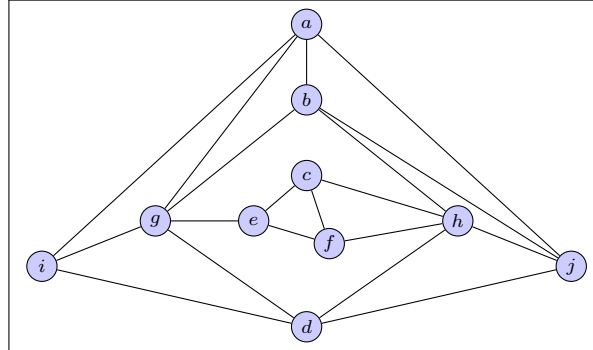


FIGURE 55 – Graphe  $G$  de départ

### Solution.

On peut remarquer que la partie centrale du graph est sûrement la plus facile à séparer du reste du graphe. On peut alors voir que la sommet-connectivité est de 2 en enlevant les sommets  $g$  et  $h$ , et que l'arête-connectivité est de 3 en enlevant les arêtes  $\{(e, g), (c, h), (f, h)\}$  :

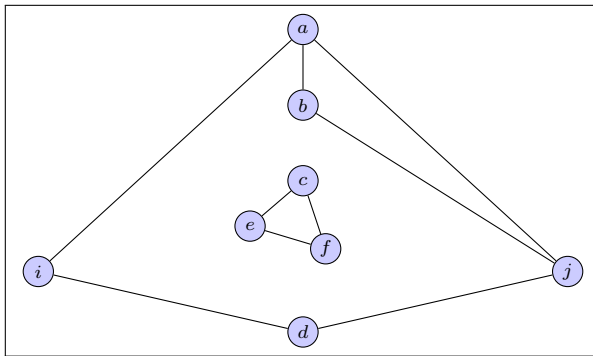


FIGURE 56 – Graphe  $G$  privé des sommets  $g$  et  $h$

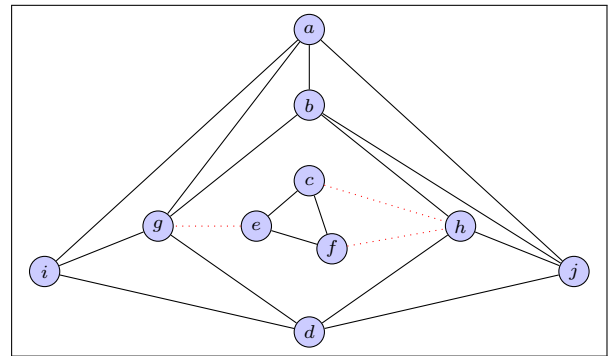


FIGURE 57 – Graphe  $G$  privé des arêtes  $\{(e, g), (c, h), (f, h)\}$

Il n'y a pas de méthode simple pour prouver ce résultat, pour la sommet-connectivité on peut noter qu'il existe un cycle hamiltonien dans le graphe  $G$  de départ, donc la sommet-connectivité est au moins de 2.

Pour la sommet-connectivité il n'existe pas de méthode simple non plus, on peut juste montrer que toute paire d'arêtes ne sépare pas le graphe en deux composantes connexes.

### Exercice 2 Echauffement (plus dur).

Calculer  $\kappa(P)$  (où  $P$  est le graphe de Petersen),  $\lambda(K_n)$  (où  $K_n$  est le graphe complet à  $n$  sommets; on pourra utiliser le fait que si  $F$  est un ensemble d'arêtes de taille  $\leq n - 2$  de  $K_n$ , alors  $V(K_n) \setminus F$  n'est pas connexe), et  $\kappa(Q_d)$  (où  $Q_d$  est le graphe hypercube de dimension  $d$ , de sommets  $\{0, 1\}^d$  avec  $x_1, \dots, x_d$  et  $y_1, \dots, y_d$  reliés si et seulement si  $\sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1$ ; on pourra raisonner par récurrence sur  $d$ ).

### Solution.

1. On peut constater graphiquement que  $\kappa(P) = 3$ .

2. Soit  $F$  un arête-séparateur minimum de  $K_n$ . Si  $|F| \leq n - 2$ , alors  $(V(K_n), F)$  n'est pas connexe. Il admet donc une partition  $(C, V \setminus C)$  sans arête entre les deux parties. Donc  $K_n \setminus F$  contient toutes les arêtes entre  $C$  et  $V \setminus C$ , donc il est connexe, ce qui est absurde. Donc  $|F| \geq n - 1$ .

### Exercice 3 Connectivité des cubiques.

Trouver un graphe  $G$  vérifiant  $\lambda(G) = 3$  et  $\kappa(G) = 1$ .

Soit  $G$  un graphe cubique (i.e. 3-régulier). Montrer que  $G$  est 3-arête-connexe si et seulement si il est 3-sommet-connexe.

### Solution.

On peut même résoudre ce problème pour  $\lambda(G) = n$  avec le graphe suivant :

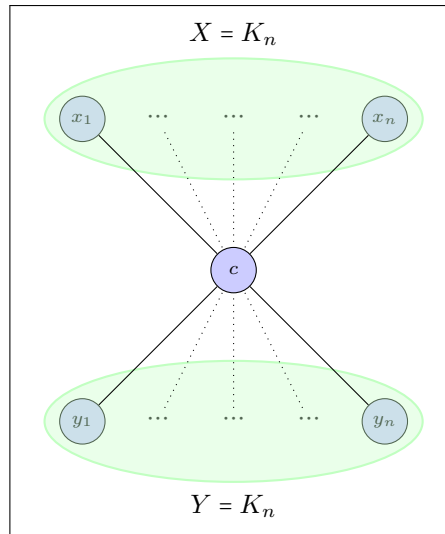


FIGURE 58 – Graphe  $G$  vérifiant  $\lambda(G) = n$  et  $\kappa(G) = 1$

On voit alors clairement que chaque composante  $X$  et  $Y$ , étant un graphe complet à  $n$  sommets est  $n$  régulier (car chaque sommet est aussi relié au sommet central  $c$ ). Ainsi il faut enlever au moins  $n$  arêtes pour séparer un sommet de  $G$  mais en enlevant le sommet  $c$  on sépare le graphe en deux composantes connexes, donc  $\kappa(G) = 1$  et  $\lambda(G) = n$ .

Par le cours, on a

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) = 3$$

donc le sens direct est évident,  $\kappa(G) = 3 \implies \lambda(G) = 3$ .

Inversement, supposons que  $\lambda(G) = 3$  et traitons les cas :

- On a  $\kappa > 0$  car  $G$  est connexe.
- Si  $\kappa(G) = 1$ , alors il existe un sommet  $x$  tel que  $G \setminus \{x\}$  est déconnecté. Alors  $G \setminus x$  possède une partition  $(C, V \setminus C)$  telle qu'il n'existe pas d'arête entre  $C$  et  $V \setminus C$ . Sans perte de généralité, supposons que  $x$  a un voisin dans  $C$  et deux dans  $V \setminus C$ . Alors, en enlevant l'arête entre  $x$  et  $C$ , le graphe n'est plus connexe, ce qui est absurde (car  $\lambda(G) = 3$ ).
- Si  $\kappa(G) = 2$ , alors il existe deux sommets  $x, y$  tels que  $G \setminus \{x, y\}$  est déconnecté. Alors  $G \setminus \{x, y\}$  possède une partition  $(C, V \setminus C)$  telle qu'il n'existe pas d'arête entre  $C$  et  $V \setminus C$ . Sans perte de généralité, supposons que  $x$  a un voisin dans  $C$  (sinon  $y$  sépare  $C$  de  $V \setminus C \cup \{x\}$ , ce qui est absurde). De même,  $x$  possède un voisin dans  $V \setminus C$  (sinon  $y$  sépare  $C \cup \{x\}$  de  $V \setminus C$ , ce qui est absurde). Donc  $x$  possède un voisin dans chaque partie.

De même,  $y$  possède un voisin dans chaque partie.

Pour que  $\{xx_C, yy_C\}$  ne soit pas un arête-séparateur, il faut une arête de plus entre  $C$  et  $\{x, y\}$ . De même, pour que  $\{xx_{V \setminus C}, yy_{V \setminus C}\}$  ne soit pas un arête-séparateur, il faut une arête de plus entre  $V \setminus C$  et  $\{x, y\}$ . Alors, en enlevant les arêtes  $xx_C, yy_C$  on a bien trouvé un arête-séparateur de taille 2, ce qui est absurde.

- Donc  $\kappa(G) \geq 3$ . Comme  $\kappa(G) \leq \lambda(G) = 3$ , on a bien  $\kappa(G) = 3$ .

#### Exercice 4 Treillis des séparateurs.

Soient  $G = (V, E)$  un graphe connexe et  $x, y$  deux sommets de  $G$ . Pour  $X$  un  $(x, y)$ -(sommet-)séparateur de  $G$ , on note  $C(X, x)$  la composante connexe de  $G \setminus X$  contenant  $x$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux  $(x, y)$ -(sommets-)séparateurs, montrer que  $A = (X \cap C(Y, x)) \cup (X \cap Y) \cup (Y \cap C(X, x))$  et  $B = (X \cap C(Y, y)) \cup (X \cap Y) \cup (Y \cap C(X, y))$  sont aussi des  $(x, y)$ -(sommets-)séparateurs de  $G$ .

#### Solution.

Exercice solution

#### Exercice 5 Graphes 2-connexes.

Exercice 5 content

#### Solution.

Exercice solution

#### Exercice 6 Menger étendu.

Soient  $G = (V, E)$  un graphe  $k$ -sommets-connexe (c'est-à-dire  $\kappa(G) \geq k$ ).

1. On ajoute à  $G$  un sommet  $u$  de degré  $k$ . Montrer que le graphe  $G'$  ainsi obtenu est encore  $k$ -sommets-connexe.
2. Pour le reste de l'exercice, on revient au graphe  $G$  de départ. Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $V$  de taille au moins  $k$ . Montrer qu'il existe  $k$  chemins sommet-disjoints de  $X$  à  $Y$ .
3. Soit maintenant  $z$  un sommet de  $G$  n'appartenant pas à  $X$ , montrer de même que  $G$  contient  $k$  chemins sommet-disjoints (sauf en  $z$ ) de  $z$  à  $X$ .

#### Solution.

1. Soit  $X$  un ensemble de  $k - 1$  sommets de  $G'$ . Si  $X \subseteq V$ , alors  $G' \setminus X$  est connexe car  $G$  est  $k$ -sommets-connexe et  $u$  a au moins un voisin dans  $G' \setminus X$ .  
Si  $u \in X$ , alors  $X \setminus \{u\}$  est un ensemble de  $k - 2$  sommets de  $G$ , donc  $G' \setminus X = G \setminus (X \setminus \{u\})$  est connexe car  $G$  est  $k$ -sommets-connexe et  $k - 2 < k$ .
2. On rajoute un point  $x$  qui domine  $X$  et un point  $y$  dominé par  $Y$ . Alors, par le point précédent, le graphe  $G''$  ainsi obtenu est encore  $k$ -sommets-connexe. Donc, par le théorème de Menger, il existe  $k$  chemins sommet-disjoints de  $x$  à  $y$  dans  $G''$ . En enlevant  $x$  et  $y$  de ces chemins, on obtient bien  $k$  chemins sommet-disjoints de  $X$  à  $Y$  dans  $G$ .
3. On rajoute un point  $x$  qui domine  $X$ . Alors, par le point précédent, le graphe  $G''$  ainsi obtenu est encore  $k$ -sommets-connexe. Donc, par le théorème de Menger, il existe  $k$  chemins sommet-disjoints de  $z$  à  $x$  dans  $G''$ . En enlevant  $x$  de ces chemins, on obtient bien  $k$  chemins sommet-disjoints (sauf en  $z$ ) de  $z$  à  $X$  dans  $G$ .

#### Exercice 7 Plein de cycles.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe  $k$ -sommets-connexe, avec  $k \geq 2$ .

1. Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux sommets distincts de  $G$ . Montrer qu'il existe un cycle contenant  $x_1$  et  $x_2$ .
2. On veut généraliser le résultat précédent. Soient  $\{x_1, \dots, x_k\}$  un ensemble de  $k$  sommets



distincts de  $G$ . Montrer qu'il existe un cycle de  $G$  contenant tous les  $x_i$  (on pourra considérer un cycle qui contient le plus grand nombre possible de sommets  $x_i$  puis appliquer le résultat de l'exercice précédent).

**Solution.**

1. Le graphe  $G$  étant  $k$ -sommets-connexe avec  $k \geq 2$ , il est en particulier 2-sommets-connexe. Donc, par le théorème de Menger, il existe deux chemins sommet-disjoints entre  $x_1$  et  $x_2$ . En combinant ces deux chemins, on obtient bien un cycle contenant  $x_1$  et  $x_2$ .
2. Considérons un cycle  $C$  qui contient un nombre maximum de sommets  $\{x_1, \dots, x_k\}$ . On suppose qu'il ne contient pas tous ces sommets (sinon la preuve est triviale). Supposons qu'il contient  $x_1, \dots, x_i$  avec  $i < k$ .

Si  $C = x_1, \dots, x_i$  alors on applique Menger entre  $x_{i+1}$  et  $C$  pour obtenir  $i$  chemins sommet-disjoints entre  $x_{i+1}$  et  $C$ . Alors,  $(C - x_1x_2) \cup P_1 \cup P_2$  est un cycle contenant  $x_1, \dots, x_{i+1}$ . Sinon,  $C$  contient au moins  $i + 1$  sommets. On applique Menger entre  $x_{i+1}$  et  $C$  pour obtenir  $i + 1$  chemins sommet-disjoints entre  $x_{i+1}$  et  $C$ . Par le principe des tiroirs, au moins deux de ces chemins aboutissent entre deux sommets consécutifs de  $C$ . En remplaçant le segment de  $C$  entre ces deux sommets par les deux chemins, on obtient un cycle contenant  $x_1, \dots, x_{i+1}$ .

**Exercice 8 Gros cycle.**

Exercice 8 content

**Solution.**

Exercice solution

**Exercice 9 Arbres couvrants disjoints.**

Exercice 9 content

**Solution.**

Exercice solution

**Exercice 10 Pas plus de deux...**

Exercice 10 content

**Solution.**

Exercice solution

**Exercice 11 Jeu de Shannon.**

Exercice 11 content

**Solution.**

Exercice solution