HAI713I — TDs

Ivan Lejeune

11 septembre 2025

Table des matières

TD1

Exercice 1.1 Manipuler les définitions.

1. Rappelez ce qu'est une fonction calculable. Montrez que les fonctions suivantes sont calculables :
   - $f : x \mapsto 2x$,
   - $g : \langle x, y \rangle \mapsto x + y$,
   - $\perp\!\!\!\perp$, la fonction définie nulle part.
2. Rappelez ce qu'est un ensemble récursif. Montrez que les ensembles suivants sont récursifs :
   - l'ensemble de tous les entiers,
   - l'ensemble vide,
   - l'ensemble des nombres pairs.
3. Montrez que si E est un ensemble récursif, alors son complémentaire $\overline{E}$ l'est aussi.
4. Rappelez ce qu'est un ensemble énumérable. Ecrivez un programme qui converge si et seulement si son entrée est paire. En déduire que l'ensemble des nombres pairs est énumérable.
5. Montrez que si E est un ensemble récursif, alors E et $\overline{E}$ sont énumérables.

Solution.

1. Une fonction est **calculable** si il existe un programme qui la calcule. Alors,
   - f est calculable car il peut être défini par le programme suivant :
     $$x \mapsto \text{return } 2 \times x.$$
   - g est calculable pour la même raison :
     $$z \mapsto \text{return } \pi_1(z) + \pi_2(z).$$
   - De même pour $\perp\!\!\!\perp$:
     $$\begin{aligned} x \mapsto\ & \text{while } x = x \text{ do} \\ & \quad x \leftarrow x \\ & \text{end while} \\ & \text{return } 0. \end{aligned}$$
2. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est **décidable** (ou récursif) si sa fonction caractéristique χ_A est calculable. Alors,
   - L'ensemble de tous les entiers est récursif car sa fonction caractéristique peut être définie par le programme suivant :
     $$x \mapsto \text{return } 1$$
   - L'ensemble vide est récursif car sa fonction caractéristique peut être définie comme suit :
     $$x \mapsto \text{return } 0$$

- L'ensemble des nombres pairs est récursif pour la même raison :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & \text{if } x \bmod 2 == 0 \text{ then} \\
& \quad \text{return } 1 \\
& \text{else} \\
& \quad \text{return } 0 \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

3. Il suffit d'inverser les valeurs de la fonction caractéristique de E pour obtenir celle de $\overline{E}$ (qui est donc aussi calculable).
4. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ est **énumérable** si il est le domaine d'une fonction calculable. On définit la fonction suivante :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & \text{if } x \bmod 2 == 0 \text{ then} \\
& \quad \text{return } 0 \\
& \text{else} \\
& \quad \perp\!\!\!\perp(x) \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

qui converge si et seulement si son entrée est paire. Donc l'ensemble des nombres pairs est énumérable.
5. Si E est récursif, alors sa fonction caractéristique χ_E est calculable. Donc on peut définir deux programmes :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & \text{if } \chi_E(x) == 1 \text{ then} \\
& \quad \text{return } 0 \\
& \text{else} \\
& \quad \perp\!\!\!\perp(x) \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & \text{if } \chi_E(x) == 0 \text{ then} \\
& \quad \text{return } 0 \\
& \text{else} \\
& \quad \perp\!\!\!\perp(x) \\
& \text{end if}
\end{aligned}
$$

qui convergent respectivement si et seulement si $x \in E$ et $x \in \overline{E}$.

Exercice 1.2 Propriétés de cloture des ensembles récursifs. Nous prouvons dans cet exercice que la classe des ensembles récursifs est close par union, intersection, produit cartésien et complémentaire. La situation est un peu différente pour les ensembles énumérables. Soient A et B deux ensembles récursifs.

1. Montrer que $A \cup B$ est récursif.
2. Montrer que $A \cap B$ est récursif.
3. Montrer que $A \times B = \{\langle x, y\rangle, x \in A \wedge y \in B\}$ est récursif.
4. Montrer que $\overline{A}$ est récursif (c.f. exercice 1).
5. Montrer que $A \setminus B$ est récursif.

Solution.

1. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}x \mapsto\ & \text{if } \chi_A(x) == 1 \text{ or } \chi_B(x) == 1 \text{ then}\\ &\quad \text{return } 1\\ & \text{else}\\ &\quad \text{return } 0\\ & \text{end if}\end{aligned}$$

2. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}x \mapsto\ & \text{if } \chi_A(x) == 1 \text{ and } \chi_B(x) == 1 \text{ then}\\ &\quad \text{return } 1\\ & \text{else}\\ &\quad \text{return } 0\\ & \text{end if}\end{aligned}$$

3. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}z \mapsto\ & \text{if } \chi_A(\pi_1(z)) == 1 \text{ and } \chi_B(\pi_2(z)) == 1 \text{ then}\\ &\quad \text{return } 1\\ & \text{else}\\ &\quad \text{return } 0\\ & \text{end if}\end{aligned}$$

4. Voir exercice 1.1.
5. On utilise la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned}x \mapsto\ & \text{if } \chi_A(x) == 1 \text{ and } \chi_B(x) == 0 \text{ then}\\ &\quad \text{return } 1\\ & \text{else}\\ &\quad \text{return } 0\\ & \text{end if}\end{aligned}$$

Exercice 1.3 `step`, convergence, projections et énumération. Considérons le programme suivant (remarquez qu'il s'appelle a et son entrée s'appelle y) :

$$\begin{aligned}\text{a} : y \mapsto\ & z \leftarrow 0\\ & \text{while step}\langle y, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle == 0 \text{ do}\\ &\quad z \leftarrow z + 1\\ & \text{end while}\\ & \text{return } 17\end{aligned}$$

1. Soit b un programme qui s'arrete sur au moins une entrée. Que vaut $[a \mid b]$?
2. Que vaut $[a \mid b]$ si b est un programme qui ne s'arrête jamais ?
3. Montrez que l'ensemble des programmes qui s'arrêtent sur au moins une entrée est énumérable.

Solution.

1. On note c une entrée telle que $[b \mid c]\downarrow$ (elle existe par hypothèse).
   Alors, il existe t tel que
   $$\mathrm{Step}\langle b, c, t\rangle = 1$$
   Donc, pour $z = \langle c, t\rangle$, on a $[a \mid z]\downarrow$. Donc $[a \mid b]\downarrow$ et vaut 17.
2. Le programme a ne s'arrête jamais, donc $[a \mid b]\uparrow$.
3. Le programme a correspond exactement au programme dont le domaine est l'ensemble des programmes qui s'arrêtent sur au moins une entrée. Donc cet ensemble est énumérable.

Exercice 1.4 Ensembles énumérables. On veut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) E est **énumérable** (rappel de la définition) si
$$\exists a, E = W_a = \{x, [a \mid x]\downarrow\}$$

ii) E admet une **fonction d'énumération** calculable :
$$\exists b, E = \mathrm{Im}[b \mid \cdot] = \{x, \exists y, [b \mid y] = x\}$$

iii) E est vide ou admet une **fonction d'énumération totale** calculable :
$$E = \varnothing \text{ ou } \exists c, E = \mathrm{Im}[c \mid \cdot] = \{x, \exists y, [c \mid y] = x\}$$

- Montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii).
- Montrer que (iii) $\Rightarrow$ (ii).
- Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Solution.

- (i) $\Rightarrow$ (iii) : Si $E = \varnothing$, c'est trivial. Sinon, E contient au moins un élément qu'on note a_0. On utilise le programme suivant :
  $$\begin{aligned} \text{enum} : z \mapsto\ & \text{if step}\langle a, \pi_1(z), \pi_2(z)\rangle == 0 \text{ then} \\ & \quad \text{return } \pi_1(z) \\ & \text{else} \\ & \quad \text{return } a_0 \\ & \text{end if} \end{aligned}$$
  qui est total et énumère E.
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) : C'est trivial car une fonction totale est aussi une fonction partielle.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : C'est la définition même d'un ensemble énumérable.

Exercice 1.5 Ensembles énumérables — mieux comprendre.

1. Montrez qui si E est un ensemble énumérable *infini* alors il admet une fonction d'énumération totale bijective.
2. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et suelement si il admet une fonction d'énumération croissante.
3. Soit E un ensemble infini. Montrez que E est récursif si et suelement si il admet une fonction d'énumération strictement croissante.

Solution. A compléter