

Course Name — TDs

Ivan Lejeune

1^{er} décembre 2025

Table des matières

| | |
|--|---|
| TD1 — Introduction et lois usuelles | 2 |
| Combinatoire et premiers calculs de probabilités | 2 |
| Loi binomiale | 2 |
| La loi normale (gaussienne) | 2 |
| La loi du Chi-deux χ^2 (ou loi de Pearson) | 3 |
| Théorème de la limite centrale | 4 |

TD1 — Introduction et lois usuelles

Combinatoire et premiers calculs de probabilités

Exercice 1.1.

1. En considérant les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de mots de 2 lettres ? Combien peut-on former de mots de deux lettres constitués d'une consonne suivie d'une voyelle ? Combien peut-on former de mots de deux lettres constitués d'une consonne et d'une voyelle ?
2. Combien d'équipes différentes de 3 personnes peut-on former à partir d'un groupe de 5 personnes ?
3. Avec 17 chevaux au départ, combien y a-t-il de tiercés possibles ? Dans le désordre ?

Solution.

1. On peut former $26 \times 26 = 676$ mots de 2 lettres. On peut former $20 \times 6 = 120$ mots de deux lettres constitués d'une consonne suivie d'une voyelle. On peut former $20 \times 6 + 6 \times 20 = 240$ mots de deux lettres constitués d'une consonne et d'une voyelle.
2. On peut en former $\binom{5}{3} = 10$ équipes différentes de 3 personnes à partir d'un groupe de 5 personnes.
3. Avec 17 chevaux au départ, il y a $17 \times 16 \times 15 = 4080$ tiercés possibles. Dans le désordre, il y en a $4080/6 = 680$.

Exercice 1.2.

Une urne contient n boules blanches ($n \geq 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que l'on ait tiré exactement 3 boules noires ?
2. Etudier le sens de variation de la suite p_n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Solution.

1. Exercice solution

Loi binomiale

Exercice 1.3.

On jette une fois un dé non truqué.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la face 1 ? Quelle est la loi de cet événement ?
On jette 18 fois le dé en question, quelles sont les probabilités des événements suivants :
2. Obtenir la face 1 exactement 3 fois.
3. Obtenir la face 1 au moins 3 fois.
4. Obtenir la face 1 au plus 16 fois.

Solution.

Exercice solution

La loi normale (gaussienne)

On suppose dans cette section que $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (loi normale centrée réduite).

Exercice 1.4.

Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(U < 1.5)$
2. $P(U > 2.5)$
3. $P(U < -1.5)$
4. $P(-1.5 < U < 2.5)$

Solution.

Exercice solution

Exercice 1.5.

Trouver la valeur de u telle que :

1. $P(U < u) = 0.95$
2. $P(U < u) = 0.1$
3. $P(U > u) = 0.99$
4. $P(-u < U < u) = 0.95$

Solution.

Exercice solution

On suppose dans la suite que $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 5^2)$ (loi normale de moyenne 2 et d'écart-type 5).
On a alors $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-2}{5} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 1.6.

Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(X < 10)$
2. $P(0 < X < 10)$

Solution.

Exercice solution

Exercice 1.7.

Trouver la valeur de x telle que :

1. $P(X < x) = 0.95$
2. $P(X < x) = 0.05$
3. $P(2 - x < X < 2 + x) = 0.95$

Solution.

Exercice solution

La loi du Chi-deux χ^2 (ou loi de Pearson)

Pour U_1, \dots, U_p des variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes, on appelle loi du Chi-deux à p degrés de liberté (χ_p^2) la loi de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^p U_i^2$.

Exercice 1.8.

1. Que vaut la somme de deux variables de loi χ^2 indépendantes de degrés de liberté respectifs p et q ?
2. Soit $X \sim \chi_{15}^2$ et $Y \sim \chi_{10}^2$. Calculer :
 - (a) $P(X < 6.26)$
 - (b) $P(Y > 3.25)$
 - (c) $P(X + Y > 11.52)$
3. Soit $X \sim \chi_{15}^2$. Trouver la valeur de x telle que :

- (a) $P(X < x) = 0.01$
- (b) $P(X < x) = 0.05$
- (c) $P(X < x) = 0.99$

Solution.

Exercice solution

Théorème de la limite centrale

On rappelle quelques propriétés de la loi normale.