HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

16 septembre 2025

Table des matières

TD1

1.1 Convexité : ensembles et fonctions

Exercice 1.1 Convexité.

1. Soit une famille (éventuellement infinie) d'inégalités linéaires $a_i^T x \leq b_i, i \in I$. Soit C son ensemble de solutions. Montrer que C est convexe.
2. Montrer que la boule fermée $\mathsf{B}(a, r)$ est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit W l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de S. Montrer que W est convexe.
4. Soit C un convexe. Montrer que
$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C$$
est convexe.
5. Une matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times n$ est bistochastique si elle satisfait
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, a_{ij} \geq 0.$$
Une matrice de permutation P est une matrice bistochastique à valeurs entières, c'est-à-dire que dans chaque ligne de P il y a un et un seul élément égal à 1, et les autres sont nuls. De même pour chaque colonne.
   (a) Montrer que pour toute matrice bistochastique A, il existe une matrice de permutation P de même dimension telle que $p_{ij} = 0$ si $a_{ij} = 0$.
   (b) Est-ce qu'une combinaison convexe de matrices de permutation est une matrice bistochastique ?
   (c) Montrer que toute matrice bistochastique A est une combinaison convexe de matrices de permutation.
   (d) Trouver la combinaison convexe pour la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0 & 0.48 \\ 0.02 & 0.15 & 0.67 & 0.16 \\ 0.46 & 0.02 & 0.16 & 0.36 \\ 0.37 & 0.46 & 0.17 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Soient maintenant C_1 et C_2 deux convexes disjoints et
$$D_1 = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C_1, \quad i = 1, 2.$$
Montrer que l'un des deux convexes $C_1 \cap D_2$ ou $C_2 \cap D_1$ est vide.

Solution. A remplir

Exercice 1.2 Combinaison convexe.

1. Rappeler la définition d'une combinaison convexe.
2. Est-ce que le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$ est une combinaison convexe des points $(2, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 0, 0)$?
3. Déterminer si le point de coordonnées $(0, 7)$ est une combinaison convexe des points $(3, 6), (-6, 9), (2, 1), (-1, 1)$.

4. Déterminer gra

Solution. Exercice solution

Exercice 1.3 Ensembles convexe. Montrer qu'étant donné un sous-ensemble convexe C et deux réels positifs α et β alors on a

$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C.$$

Solution. Commencons par montrer l'inclusion $(\alpha + \beta)\, C \subset \alpha C + \beta C$.
Soit $x \in (\alpha + \beta)\, C$. Alors, il existe $x_0 \in C$ tel que

$$x = (\alpha + \beta)\, x_0 = \alpha x_0 + \beta x_0.$$

Donc $x \in \alpha C + \beta C$.
Montrons maintenant l'inclusion $\alpha C + \beta C \subset (\alpha + \beta)\, C$.
Soit $x \in \alpha C + \beta C$. Alors, il existe $x_1, x_2 \in C$ tels que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_2\right).$$

Exercice 1.4 Ensembles convexes. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété de **demi-somme** suivante :

$$\forall x, y \in S, \quad \frac{x + y}{2} \in S.$$

1. S est-il convexe ?
2. Même question si on suppose que S est fermé.

Solution.

1. Non. Par exemple, le sous-ensemble S suivant :

$$S = \left\{ x \in [0,1] \mid x = \sum_{i=I} \frac{1}{2^i} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots \right\}$$

vérifie la propriété de demi-somme mais n'est pas convexe, car par exemple $\sqrt{2}/2 \in [0,1] \notin S$.

Exercice 1.5 Ensembles convexes. Exercise 2 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.6 Ensembles convexes. Exercise 2 content

Solution. Exercice solution

Exercice 1.7 Fonction convexe.

1. Est-ce qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe ?
2. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est convexe ?
3. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes, est-ce que $\max(f_1, f_2)$ est convexe ?
4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Oui. On pose $g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x)$. Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$

2. Non. Par exemple, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$ sont convexes mais $f_1(x)f_2(x) = x^3$ n'est pas convexe.
3. Oui. On pose $g(x) = \max\left(f_1(x), f_2(x)\right)$. Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max\left(f_1(\lambda x + (1-\lambda)y), f_2(\lambda x + (1-\lambda)y)\right) \\ &\leq \max\left(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y), \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)\right) \\ &\leq \lambda \max\left(f_1(x), f_2(x)\right) + (1-\lambda)\max\left(f_1(y), f_2(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$

4. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &\iff \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy - \lambda x^2 - (1-\lambda)y^2 \leq 0 \\ &\iff \lambda(1-\lambda)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}x^2 + \frac{1-\lambda}{\lambda}y^2 + 2xy - \frac{x^2}{1-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda}\right) \leq 0 \\ &\iff \lambda(1-\lambda)\left(-(x-y)^2\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Or tous les termes sont positifs sauf le dernier. Donc l'inégalité est vérifiée.

Exercice 1.8 Fonction convexe. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Prouver que f est convexe.
Indication : Montrer par récurrence que sur $|\geq|2$, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall p \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}, \quad f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n} f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right) f(y).$$

Solution.

Exercice 1.9.

Solution.

Exercice 1.10.

Solution.

Exercice 1.11 Forme standard et forme canonique. Dans cet exercice vous devez mettre les programmes suivants sous forme standard et donner également la forme matricielle.

1.
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

3. Réécrire le programme précédent dans le cas où la fonction objectif est la minimisation.

4.
$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Solution.

1. La forme standard est
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

   La forme matricielle est
$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

2. La forme standard est
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 + 0 \cdot x_3 - M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 80 & 60 & 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

3. La forme standard est

$$\begin{cases} \min z = -80x_1 - 60x_2 + 0 \cdot x_3 + M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \min z = \begin{pmatrix} -80 & -60 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

4. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot (x_6 + x_7 + x_8) \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & M & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 1.12. Nous considérons les programmes linéaires avec des variables $x_1 \in \{0, u_j\}$. Montrer que nous pouvons nous ramener à un programme linéaire en nombres entiers. Appliquez-le au problème suivant :

$$\begin{cases} \max z = 18x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 150 \\ x_1 \in \{0, 60\} \\ x_2 \in \{0, 30\} \\ x_3 \in \{0, 20\}. \end{cases}$$

Solution. On remplace chaque variable x_j par une variable y_j telle que $x_j = u_j y_j$ et $y_j \in \{0, 1\}$. Le programme devient

$$\begin{cases} \max z = 18 \cdot 60y_1 + 3 \cdot 30y_2 + 9 \cdot 20y_3 \\ 2 \cdot 60y_1 + 30y_2 + 7 \cdot 20y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Cela revient à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \max z = 1080y_1 + 90y_2 + 180y_3 \\ 120y_1 + 30y_2 + 140y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Exercice 1.13.

Solution.

Exercice 1.14.

Solution.

Exercice 1.15.

Solution.

Exercice 1.16.

Solution.

Exercice 1.17.

Solution.