HAI722I — TDs

Ivan Lejeune

14 octobre 2025

Table des matières

1 Convexité : ensembles et fonctions

Exercice 1 Convexité.

1. Soit une famille (éventuellement infinie) d'inégalités linéaires $a_i^T x \leq b_i, i \in I$. Soit C son ensemble de solutions. Montrer que C est convexe.
2. Montrer que la boule fermée $\mathsf{B}(a, r)$ est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
3. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit W l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de S. Montrer que W est convexe.
4. Soit C un convexe. Montrer que
$$\bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C$$
est convexe.
5. Une matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times n$ est bistochastique si elle satisfait
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,$$
$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, a_{ij} \geq 0.$$
Une matrice de permutation P est une matrice bistochastique à valeurs entières, c'est-à-dire que dans chaque ligne de P il y a un et un seul élément égal à 1, et les autres sont nuls. De même pour chaque colonne.
   (a) Montrer que pour toute matrice bistochastique A, il existe une matrice de permutation P de même dimension telle que $p_{ij} = 0$ si $a_{ij} = 0$.
   (b) Est-ce qu'une combinaison convexe de matrices de permutation est une matrice bistochastique ?
   (c) Montrer que toute matrice bistochastique A est une combinaison convexe de matrices de permutation.
   (d) Trouver la combinaison convexe pour la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.37 & 0 & 0.48 \\ 0.02 & 0.15 & 0.67 & 0.16 \\ 0.46 & 0.02 & 0.16 & 0.36 \\ 0.37 & 0.46 & 0.17 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Soient maintenant C_1 et C_2 deux convexes disjoints et
$$D_1 = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda C_1, \quad i = 1, 2.$$
Montrer que l'un des deux convexes $C_1 \cap D_2$ ou $C_2 \cap D_1$ est vide.

Solution. A remplir

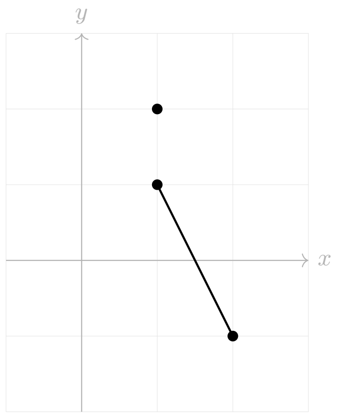
Exercice 2 Combinaison convexe.

1. Rappeler la définition d'une combinaison convexe.
2. Est-ce que le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$ est une combinaison convexe des points $(2, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 0, 0)$?
3. Déterminer si le point de coordonnées $(0, 7)$ est une combinaison convexe des points $(3, 6), (-6, 9), (2, 1), (-1, 1)$.
4. Déterminer graphiquement si le point de coordonnées $(1, 2)$ est une combinaison convexe

des points $(1,1)$ et $(2,-1)$.

Solution.

1. Une combinaison convexe de points $x_1, x_2, \dots, x_k$ est une combinaison
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$
avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.
2. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ tels que
$$\lambda_1(2,2,0) + \lambda_2(0,0,3) + \lambda_3(0,0,0) = (1,1,1).$$
Ici on voit que $(\lambda 1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.5, 1/3, 0)$ est une solution.
3. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ tels que
$$\lambda_1(3,6) + \lambda_2(-6,9) + \lambda_3(2,1) + \lambda_4(-1,1) = (0,7).$$
Cela revient à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 6\lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ 6\lambda_1 + 9\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 7 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \end{cases}$$
En résolvant on obtient la famille de solutions :
$$\lambda_1 = \frac{t}{2} + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} + \frac{5t}{16}, \quad \lambda_3 = \frac{-19t}{16}, \quad \lambda_4 = t$$
avec $t \in \mathbb{R}$. En imposant $\lambda_i \geq 0$ on trouve $t = 0$ et donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (2/3, 1/3, 0, 0)$.
4. Graphiquement, on voit que le point $(1,2)$ n'est pas sur le segment entre les points $(1,1)$ et $(2,-1)$. Donc ce n'est pas une combinaison convexe :



Exercice 3 Ensembles convexe.
Montrer qu'étant donné un sous-ensemble convexe C et deux réels positifs α et β alors on a
$$\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta) C.$$

Solution. Commencons par montrer l'inclusion $(\alpha + \beta) C \subset \alpha C + \beta C$.

Soit $x \in (\alpha+\beta)\,C$. Alors, il existe $x_0 \in C$ tel que

$$x = (\alpha+\beta)\,x_0 = \alpha x_0 + \beta x_0.$$

Donc $x \in \alpha C + \beta C$.
Montrons maintenant l'inclusion $\alpha C + \beta C \subset (\alpha+\beta)\,C$.
Soit $x \in \alpha C + \beta C$. Alors, il existe $x_1, x_2 \in C$ tels que

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_2\right).$$

Exercice 4 Ensembles convexes.
Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété de **demi-somme** suivante :

$$\forall x, y \in S, \quad \frac{x+y}{2} \in S.$$

1. S est-il convexe ?
2. Même question si on suppose que S est fermé.

Solution.

1. Non. Par exemple, le sous-ensemble S suivant :

   $$S = \left\{x \in [0,1] \mid x = \sum_{i=I} \frac{1}{2^i}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

   vérifie la propriété de demi-somme mais n'est pas convexe, car par exemple $\sqrt{2}/2 \in [0,1] \notin S$.

Exercice 5 Ensembles convexes.
Lesquels de ces ensembles sont convexes ?

1. $S = \left\{(x_1, x_2) \mid 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 12\right\}$,
2. $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 3, x_1 \leq 5\}$.

Solution. A remplir

Exercice 6 Ensembles convexes.

1. Soit C un convexe. Montrer que $x \in C$ est un point extrême de C si et seulement si $C \setminus \{x\}$ est convexe.
2. A-t-on une caractérisation similaire pour une face de C ?
3. On considère dans $\mathbb{R}^n$ les deux boules suivantes :
   - $\mathsf{B}_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq 1\}$
   - $\mathsf{B}_\infty = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq 1\}$

   Quels sont les points extrêmes de B_1 et B_∞ ?

Solution.

1. Commencons par le sens direct :
   Soit $x \in C$ un point extrême de C. Montrons que $C \setminus \{x\}$ est convexe.
   Soit $y, z \in C \setminus \{x\}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors

   $$\lambda y + (1-\lambda)z \in C.$$

   car C est convexe. Supposons par l'absurde que $\lambda y + (1-\lambda)z = x$. Alors x est une combinaison convexe de y et z avec $\lambda \in [0,1]$. Cela contredit le fait que x est un point extrême

de C. Donc la combinaison convexe $\lambda y + (1-\lambda)z$ est dans $C \setminus \{x\}$. Donc $C \setminus \{x\}$ est convexe.
Montrons maintenant le sens réciproque :
Soit $x \in C$ tel que $C \setminus \{x\}$ est convexe. Montrons que x est un point extrême de C.
Supposons par l'absurde que x n'est pas un point extrême de C. Alors, il existe $y, z \in C$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que
$$x = \lambda y + (1-\lambda)z.$$
Comme $y, z \in C$ et x est une combinaison convexe de y et z, on a forcément $y \neq x$ et $z \neq x$. Donc $y, z \in C \setminus \{x\}$. Comme $C \setminus \{x\}$ est convexe, on a
$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \in C \setminus \{x\}.$$
C'est une contradiction. Donc x est un point extrême de C.

Exercice 7 Fonction convexe.

1. Est-ce qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe ?
2. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est convexe ?
3. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions convexes, est-ce que $\max(f_1, f_2)$ est convexe ?
4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Oui. On pose $g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x)$. Alors
$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \sum_{i \in I} \alpha_i \left(\lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$
2. Non. Par exemple, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$ sont convexes mais $f_1(x)f_2(x) = x^3$ n'est pas convexe.
3. Oui. On pose $g(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$. Alors
$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \max\left(f_1(\lambda x + (1-\lambda)y), f_2(\lambda x + (1-\lambda)y)\right) \\ &\leq \max\left(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y), \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y)\right) \\ &\leq \lambda \max\left(f_1(x), f_2(x)\right) + (1-\lambda) \max\left(f_1(y), f_2(y)\right) \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y). \end{aligned}$$
4. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors
$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\ &= \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy \\ &\iff \lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy - \lambda x^2 - (1-\lambda)y^2 \leq 0 \\ &\iff \lambda(1-\lambda)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}x^2 + \frac{1-\lambda}{\lambda}y^2 + 2xy - \frac{x^2}{1-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda}\right) \leq 0 \\ &\iff \lambda(1-\lambda)\left(-(x-y)^2\right) \leq 0. \end{aligned}$$
Or tous les termes sont positifs sauf le dernier. Donc l'inégalité est vérifiée.

Exercice 8 Fonction convexe.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Prouver que f est convexe.
Indication : Montrer par récurrence que sur $|\geq|2$, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall p \in \{0,1,\dots,2^n\}, \quad f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Solution. A remplir

2 Divers formulations

Exercice 9 Reformulation en programme linéaire.
Reformuler les problèmes suivants sous forme de programme linéaire.

1.
$$\begin{cases} \min z = 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Soit un ensemble d'inégalités linéaires

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1,\dots,m, a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}.$$

Formuler un modèle (uniquement des contraintes sans fonction objectif) pour lequel un point $x \in \mathbb{N}^n$ satisfait au moins k des m contraintes ($k \leq m$) entiers de plus satisfaite

$$0 \leq x_j \leq M, \quad \forall j \in \{1,\dots,m\}.$$

Solution. A remplir

Exercice 10 Linéarisation de fonctions non linéaires. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 11. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 12 Forme standard et forme canonique.
Dans cet exercice vous devez mettre les programmes suivants sous forme standard et donner également la forme matricielle.

1.
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

3. Réécrire le programme précédent dans le cas où la fonction objectif est la minimisation.

4.
$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, \quad i = 1,2. \end{cases}$$

Solution.

1. La forme standard est
$$\begin{cases} \max z = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

   La forme matricielle est
$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

2. La forme standard est
$$\begin{cases} \max z = 80x_1 + 60x_2 + 0 \cdot x_3 - M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

   La forme matricielle est
$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 80 & 60 & 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

3. La forme standard est

$$\begin{cases} \min z = -80x_1 - 60x_2 + 0 \cdot x_3 + M \cdot x_4 \\ 0.2x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \min z = \begin{pmatrix} -80 & -60 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

4. La forme standard est

$$\begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot (x_6 + x_7 + x_8) \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

La forme matricielle est

$$\begin{cases} \max z = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & M & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 13.
Nous considérons les programmes linéaires avec des variables $x_1 \in \{0, u_j\}$. Montrer que nous pouvons nous ramener à un programme linéaire en nombres entiers. Appliquez-le au problème

suivant :

$$\begin{cases} \max z = 18x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 150 \\ x_1 \in \{0, 60\} \\ x_2 \in \{0, 30\} \\ x_3 \in \{0, 20\}. \end{cases}$$

Solution. On remplace chaque variable x_j par une variable y_j telle que $x_j = u_j y_j$ et $y_j \in \{0, 1\}$. Le programme devient

$$\begin{cases} \max z = 18 \cdot 60 y_1 + 3 \cdot 30 y_2 + 9 \cdot 20 y_3 \\ 2 \cdot 60 y_1 + 30 y_2 + 7 \cdot 20 y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Cela revient à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \max z = 1080 y_1 + 90 y_2 + 180 y_3 \\ 120 y_1 + 30 y_2 + 140 y_3 \leq 150 \\ y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Exercice 14 Points extrêmes.
On considère le polyèdre S de $\mathbb{R}^3$ défini par les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$$

1. Le point $x* = (1, 1, 1, 1, 0)$ est-il un point extrême ? Pourquoi ?
2. Les points suivants sont-ils des points extrêmes ? Dégénérés ?
   - $x_1 = (0, -1, 2, 4, 0)$,
   - $x_2 = (0.5, 0, 1.5, 2.5, 0)$,
   - $x_3 = (2, 3, 0, -2, 0)$,
   - $x_4 = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$.

Solution.

1. On commence par vérifier que $x*$ respecte les contraintes :
   On constate qu'il vérifie bien les contraintes, mais on sait qu'il n'y a que 3 variables en base. Or, $x*$ en a 4 de non nulles. Donc, $x*$ n'est pas un point extrême.
2. On commence par vérifier que les points respectent les contraintes :
   - x_1 ne respecte pas les contraintes car $x_2 < 0$.
   - x_2 respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc, x_2 est un point extrême non dégénéré.
   - x_3 ne respecte pas les contraintes car $x_4 < 0$.
   - x_4 respecte les contraintes et a 3 variables en base. Donc, x_4 est un point extrême non dégénéré.

   On rappelle qu'un point est dégénéré s'il a plus de m variables nulles où m est le nombre de variables originelles.

Exercice 15 Points extrêmes et solutions.

Soit le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \le b\}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2,3,6 \\ -1,0,0 \\ 0,-1,0 \\ 0,0,-1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6,1,0,0 \end{pmatrix}.$$

On supposera que le polyèdre est borné.

Solution. Pour trouver les points extrêmes, on cherche à résoudre tous les arrangements possibles de 3 contraintes parmi les 4. On énumère les lignes qu'on choisit comme contraintes comme suit et on les résout dans l'ordre :

$$(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4).$$

- Pour (1,2,3), on résout :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 = 1 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

  et on trouve $x_1 = (-1, 0, \frac{4}{3})$.
- Pour (1,2,4), on trouve $x_2 = (-1, \frac{8}{3}, 6)$,
- Pour (1,3,4), on trouve $x_3 = (3, 0, 0)$,
- Pour (2,3,4), on trouve $x_4 = (-1, 0, 0)$.

Les points extrêmes sont donc x_1, x_2, x_3 et x_4. Si on rajoute la contrainte $x_i \ge 0$, on a seulement x_3 qui reste.

Exercice 16 Points extrêmes.
Soit C le polyèdre convexe fermé de $\mathbb{R}^2$ décrit à l'aide des inégalités suivantes :

$$\mathcal{P}_y = \begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

1. Ecrire C sous la forme standard.
2. Quels sont les points extrêmes de C ?

Solution.

1. On introduit les variables d'écart x_3, x_4, x_5 pour obtenir la forme standard :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{8}{3}x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

2. On écrit le problème matriciellement :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

   On choisit ensuite 3 contraintes parmi les 5 et on résout les systèmes linéaires associés :

- Pour (3,4,5), on trouve $x_1 = (0, 0, 4, 2, 3)$,
- Pour (1,2,3), on trouve $x_2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, 0, 0)$,

et ainsi de suite.

Exercice 17. Soient : $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$ et $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : Ax - y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$.

1. Montrer que si x est un point extreme de P, alors $x, Ax - b$ est un point extrême de Q.
2. Montrer que si (x, y) est un point extrême de Q, alors x est un point extrême de P.

Solution.

1. Supposons que x est un point extrême de P. Montrons que $(x, Ax-b)$ est un point extrême de Q.
   Si $(x, Ax - b)$ n'est pas un point extrême de Q, alors il existe $x_1, x_2 \in Q$ tels que
   $$(x, Ax - b) = \frac{x_1, y_1 + x_2, y_2}{2}$$
   De plus
   $$\begin{cases} Ax_1 - y_1 = b \implies & Ax_1 \geq b \\ Ax_2 - y_2 = b \implies & Ax_2 \geq b \end{cases}$$
   Donc $x_1, x_2 \in P$ et donc $x = \frac{x_1+x_2}{2} \in P$. Cela contredit le fait que x est un point extrême de P. Donc $(x, Ax - b)$ est un point extrême de Q.
2. Supposons que x n'est pas un point extreme de P. Alors il existe $x_1, x_2 \in P$ tels que $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Alors
   $$\begin{aligned} y &= Ax - b \\ &= A\frac{x_1}{2} + A\frac{x_2}{2} - b \\ &= A\frac{x_1}{2} + A\frac{x_2}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \\ &= \frac{1}{2}(Ax_1 - b) + \frac{1}{2}(Ax_2 - b) \\ &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$
   d'où
   $$(x, y) = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2)$$
   et donc (x, y) n'est pas un point extrême de Q.

Exercice 18. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 19. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 20. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 21. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 22. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 23. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 24. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 25. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 26. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 27. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 28. A remplir

Solution. A remplir

Exercice 29 La méthode du simplexe n'est pas une méthode polynomiale.
Dans cet exercice nous allons montrer que la méthode du simplexe n'est pas une méthode polynomiale. Pour cela, nous allons considérer le programme linéaire suivant :

$$(PL_n) = \begin{cases} \max z = 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n \\ x_1 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\ \ldots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + \cdots + 4x_{n-1} + x_n \leq 5^n \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

1. Donner la forme standard de (PL_n).
2. Donner la solution optimale.
3. Montrer que $\forall i, x_i$ et y_i (où y_i est la variable d'écart associée à la i-ième variable) ne peuvent être en même temps des variables hors base.
4. Nous allons montrer que 2^n tableaux sont nécessaires pour résoudre ce problème.
   - Vérifez-le pour $n = 1$.
   - Montrez-le pour $n = 2$.

— Résoudre graphiquement.
— Résoudre par la méthode des tableaux. Combien de tableaux sont nécessaires pour résoudre (PL_2).
— Quel est le chemin des visites des points extrêmes. Montrez que le dernier tableau peut se mettre sous la forme (voir le tableau 2).

$$2cx + x_n \leq 5^n$$

où

$$l \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad c = (2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2),$$

et A est la matrice associé au $n-1$ premières contraintes.

- Supposons par hypothèse de récurrence que la résolution du programme linéaire PL_n nécessite 2^n tableaux. Nous allons montrer que la résolution du programme linéaire PL_{n+1} nécessite 2^{n+1} tableaux.

—

Solution.

1. On réécrit les équations avec les n variables d'écart y_i :

$$\begin{cases} \max z = 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n + 0 \cdot y_1 + \cdots + 0 \cdot y_n \\ x_1 + y_1 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + y_2 = 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 + y_3 = 125 \\ \vdots \\ 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + \cdots + 4x_{n-1} + x_n + y_n = 5^n \\ x_i, y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

2. Pour $n = 1$, la solution optimale est $x_1 = 5$.
Pour $n = 2$, la solution optimale est $(0, 25)$. On peut vérifier avec le tableau du simplexe qui suit :

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
0	$x_1^1 = y_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^1 = y_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0

ensuite

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
2	$x_1^2 = x_1$	5	1	0	1	0
0	$x_2^2 = y_2$	5	0	1	-4	1
	$z(x)$	10	0	-1	2	0

ensuite

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
2	$x_1^3 = x_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^3 = x_2$	5	0	1	-4	1
	$z(x)$	10	0	0	-2	1

et enfin

		c	2	1	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	y_1	y_2
0	$x_1^4 = y_1$	5	1	0	1	0
1	$x_2^4 = x_2$	25	4	1	0	1
	$z(x)$	25	2	0	0	1

ce qui confirme que la solution optimale est $(0, 25)$.

3. On ecrit les deux lignes du tableau et on regarde ce qui se passe en x_i et y_i :

$$2^{i-1}x_1 + 2^{i-2}x_2 + \cdots + 4x_{i-2} + x_{i-1} + y_{i-1} = 5^{i-1}$$
$$2^i x_1 + 2^{i-1}x_2 + \cdots + 4x_{i-1} + x_i + y_i = 5^i$$

Si $y_i = 0$, alors dans l'équation du haut on a

$$4x_{i-1} = 5^{i-1} - 2^{i-1}x_1 - 2^{i-2}x_2 - \cdots - x_{i-2} \geq 0$$

mais dans celle du bas on a

$$4x_{i-1} = 4 \cdot 5^{i-1} - 2^i x_1 - 2^{i-1}x_2 - \cdots - x_i > 0$$

Si on fait cela aussi avec $x_i = 0$, on trouve que $x_i = y_i = 0$ est impossible.

4. On a
   (a)

Exercice 30.

Solution.

Exercice 31.

Solution.

Exercice 32.

Solution.

Exercice 33 Détermination du dual. Déterminer le dual des programmes suivants :

1.
$$(PL_0) = \begin{cases} \min z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2.
$$(PL_1) = \begin{cases} \max z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Solution. On a

1. Le dual du programme (PL_0) est

$$\begin{cases} \max 20y_1 + 30y_2 + 40y_3 + 50y_4 \\ 2y_1 + 6y_2 + 7y_3 + y_4 \leq 5 \\ 3y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 2 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 + 4y_4 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

2. Le dual du programme (PL_1) est

$$\begin{cases} \min 10y_1 + 6y_2 + 8y_3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Pour ce qui est de leur résolution, on a :

1.
2. On a

		c	2	1	0	0	0
c^J	variables de base		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	$x_1^1 = x_3$	10	1	5	1	0	0
0	$x_2^1 = x_4$	6	1	3	0	1	0
0	$x_3^1 = x_5$	8	2	2	0	0	1
	$z(x)$	0	-2	-1	0	0	0

$$\downarrow$$

		c	2	1	0	0	0
c^J	variables de base		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	$x_1^2 = x_3$	6	0	4	1	0	$-\frac{1}{2}$
0	$x_2^2 = x_4$	2	0	2	0	1	$-\frac{1}{2}$
2	$x_3^2 = x_1$	4	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$
	$z(x)$	8	0	1	0	0	1

Comme x_3, x_4 sont en bases, leurs variables duales associées valent 0. Pour x_5, on prend la valeur associée donc 1. Cela donne :

$$(x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 1) \implies (y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 1).$$

Exercice 34.

Solution. On peut extraire des tableaux les problèmes suivants :

$$PL_4 = \begin{cases} \min(z) = 25y_1 + 30y_2 \\ 4y_1 + 7y_2 = 1 \\ 8y_1 + 5y_2 = 3 \\ 6y_1 + 9y_2 = -1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} \max(z) = 7y_1 + 30y_2 \\ y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ y_1 + 3y_2 \geq 1 \\ -y_1 \geq 0 \\ -y_2 \geq 0 \\ y_1 \geq M \\ y_2 \geq M \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 35.

Solution.

Exercice 36 Ecarts complémentaires et dualité. Soit

$$PL = \begin{cases} \max z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 + 2x_2 \leq 700 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Vérifier la faisabilité du système PL.
2. Résoudre le primal.
3. Donner le programme dual.
4. Vérifier les écarts complémentaires.

Solution.

1. On sait que $(0,0,0)$ satisfait les contraintes donc il existe une solution au système PL. On peut le vérifier avec le lemme de Farkas :

$$Ax \leq b,\ \ x \geq 0 \quad \text{XOR} \quad \exists y \geq 0, yA \geq 0, yb < 0$$

Or ici, il n'y a clairement pas de solution a $yb < 0$ car tous les $y_i b_i$ sont positifs. Donc on a une solution à $Ax \leq b$.

2. On a le tableau initial suivant :

		c	4	5	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^1 = x_3$	800	2	1	1	0	0
0	$x_2^1 = x_4$	700	1	2	0	1	0
0	$x_3^1 = x_5$	300	0	1	0	0	1
	$z(x)$	0	-4	-5	0	0	0

On fait rentrer x_2 et on fait sortir x_5 :

		c	4	5	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^2 = x_3$	500	2	0	1	0	-1
0	$x_2^2 = x_4$	100	1	0	0	1	-2
5	$x_3^2 = x_2$	300	0	1	0	0	1
	$z(x)$	1500	-4	0	0	0	5

On fait rentrer x_1 et on fait sortir x_4 :

		c	4	5	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^3 = x_3$	300	0	0	1	-2	3
4	$x_2^3 = x_1$	100	1	0	0	1	-2
5	$x_3^3 = x_2$	300	0	1	0	0	1
	$z(x)$	1900	0	0	0	4	-3

On fait rentrer x_5 et on fait sortir x_3 :

		c	4	5	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$x_1^4 = x_5$	100	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
4	$x_2^4 = x_1$	300	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
5	$x_3^4 = x_2$	200	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
	$z(x)$	2200	0	0	1	2	0

Tous les $z_j - c_j$ sont positifs donc on a trouvé notre solution optimale :

$$(x_1, x_2) = (300, 200), \ z_{\max} = 2200.$$

3. Le programme dual de PL est :

$$\begin{cases} \min z(y_1, y_2, y_3) = 800y_1 + 700y_2 + 300y_3 \\ 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

On peut lire les valeurs de y dans le tableau, ici on a

$$y = (1, 2, 0)$$

4.