HAI722I — DM

Ivan Lejeune

9 octobre 2025

Table des matières

Instructions

Ce devoir est à rendre avant le 12 décembre 2025 à 12h, soit par mail à l'adresse : rodolphe.giroudeau@lirmm.fr, soit en déposant votre devoir durant le cours

1 Partie théorique

Exercice 1 Algorithmes pour la programmation linéaire. Considérons la formulation suivante :

$$P_\beta = \begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

1. Résoudre le problème P_β par la méthode du big M.
2. Résoudre le problème P_β par la méthode à deux phases.
3. **Difficile :**
   (a) Résoudre le problème P_β par la méthode dual-simplexe.
   (b) Soit le programme linéaire P_θ

$$P_\theta = \begin{cases} \max z = x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

   Résoudre le problème P_θ par la méthode dual-simplexe.

Solution.

1. Commençons par poser le problème sous forme standard :

$$P_\beta = \begin{cases} \max z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - M \cdot (y_1 + y_2 + y_3) \\ 6x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 6 \\ 4x_1 + 4x_2 - x_4 + y_2 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + y_3 = 4 \\ x_i \geq 0, y_j \geq 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,5\}, \forall j \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Ensuite on construit notre tableau du simplexe :

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
$-M$	$x_1^1 = y_1$	6	6	1	-1	0	0	1	0	0
$-M$	$x_2^1 = y_2$	12	4	4	0	-1	0	0	1	0
$-M$	$x_3^1 = y_3$	4	1	2	0	0	-1	0	0	1
	$z(x)$	$-22M$	$-11M-5$	$-7M-2$	M	M	M	0	0	0

et on déroule l'algorithme :

- on rentre x_1,
- on sort y_1 car $1 < 3 < 4$,

$\downarrow$

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
5	$x_1^2 = x_1$	1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
$-M$	$x_2^2 = y_2$	8	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{4}{6}$	-1	0	$-\frac{4}{6}$	1	0
$-M$	$x_3^2 = y_3$	3	0	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	-1	$-\frac{1}{6}$	0	1
	$z(x)$	$-11M+5$	0	$-\frac{31}{6}M - \frac{7}{12}$	$-\frac{5}{6}M - \frac{5}{6}$	M	M	$\frac{11}{6}M + \frac{5}{6}$	0	0

- on rentre x_2,
- on sort y_3 car $\frac{11}{2} < 6 < \frac{80}{3}$,

$\downarrow$

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
5	$x_1^3 = x_1$	$\frac{8}{11}$	1	0	$-\frac{2}{11}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	0	$-\frac{1}{11}$
$-M$	$x_2^3 = y_2$	$\frac{28}{11}$	0	0	$\frac{4}{11}$	-1	$\frac{20}{11}$	$-\frac{4}{11}$	1	$-\frac{20}{11}$
2	$x_3^3 = x_2$	$\frac{18}{11}$	0	1	$\frac{1}{11}$	0	$-\frac{6}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	$\frac{6}{11}$
	$z(x)$	$-\frac{28}{11}M + \frac{76}{11}$	0	0	$-\frac{4}{11}M - \frac{8}{11}$	$-M$	$-\frac{20}{11}M - \frac{7}{11}$	$\frac{15}{11}M + \frac{8}{11}$	0	$\frac{31}{11}M + \frac{7}{11}$

- on rentre x_5,
- on sort y_2 car $\frac{7}{5} < 8$ (l'autre rapport étant négatif on le compte pas),

$\downarrow$

		c	5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3
5	$x_1^4 = x_1$	$\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	0
0	$x_2^4 = x_5$	$\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{20}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{11}{20}$	-1
2	$x_3^4 = x_2$	$\frac{12}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0
	$z(x)$	$\frac{39}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{20}$	0	$M + \frac{3}{5}$	$M + \frac{7}{20}$	M

A ce stade, il est clair que les variables artificielles ne pourront plus entrer en base. On peut donc les retirer et procéder sur le tableau réduit suivant :

		c	5	2	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	$x_1^4 = x_1$	$\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	0
0	$x_2^4 = x_5$	$\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{20}$	1
2	$x_3^4 = x_2$	$\frac{12}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	0
	$z(x)$	$\frac{39}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{7}{20}$	0

- on rentre x_3,
- on sort x_5,

$$\downarrow$$

		c	5	2	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	$x_1^5 = x_1$	2	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
0	$x_2^5 = x_3$	7	0	0	1	$-\frac{11}{4}$	5
2	$x_3^5 = x_2$	1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	-1
	$z(x)$	12	0	0	0	-2	3

Il ne reste probablement qu'une étape, faisons-la :

- on rentre x_4,
- on sort x_2, c'est la seule valeur positive,

$$\downarrow$$

		c	5	2	0	0	0
c^J	variables de base		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	$x_1^6 = x_1$	4	1	2	0	0	-1
0	$x_2^6 = x_3$	18	0	11	1	0	-6
0	$x_3^6 = x_4$	4	0	4	0	1	-4
	$z(x)$	12	0	8	0	0	-5

Exercice 2 Dualité. Considérez le programme linéaire le plus général envisageable donné ci-dessous :

$$\begin{cases} \min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

où A est une matrice $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ et $c, x \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et $b \in \mathbb{R}^{m_1+m_2}$. Caractériser le dual.

Solution.

Exercice 3 Ensemble convexe. Soit C_1 et C_2 deux convexes de $\mathbb{R}^{m+n}$. Montrer que l'ensemble

$$C = \{(x, y_1 + y_2) \mid x \in \mathbb{R}^m, y_1 \in \mathbb{R}^n, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in C_1, (x, y_2) \in C_2\}$$

est également convexe.

Solution.

Exercice 4 Modélisation et dualité. Considérons un problème d'affectation avec m jobs et n travailleurs $(n \geq m)$. Chaque job doit être affecté à exactement un travailleur. Soit p_{ij} le rendement obtenu si on affecte le job i au travailleur j, où $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$. On cherche une affectation qui maximise le rendement total.

1. Donner le programme linéaire.
2. Donner la formulation du dual de ce problème.

Solution.

Exercice 5 Programmation linéaire : Farkas. Considérons le programme linéaire suivant, qui dépend de $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \min z = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2 \leq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2-\varepsilon)x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2\} \end{cases}$$

1. Montrer que le problème est réalisable $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de ε la valeur optimale est-elle non bornée ?

Solution.

Exercice 6 Résolution numérique. Résoudre le programme linéaire suivant par la méthode Primal-Dual :

$$\text{Primal} = \begin{cases} \min z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

Solution.

2 Partie pratique

Exercice 7.

Solution.

Exercice 8.

Solution.

Exercice 9.

Solution.