



# 1 Programmation linéaire en nombres entiers

## 1.1 Matrice totalement unimodulaire

### Exercice 1 Matrice totalement unimodulaire.

Est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires ?

1. La matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice  $B$  suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La matrice  $C$  suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. La matrice  $D$  suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Propriétés : est-ce que les matrices suivantes sont totalement unimodulaires sachant que  $A$  est totalement unimodulaire ?

- (a) La matrice  $-A$ ,
- (b) la transposée  $A^T$ ,
- (c) la matrice  $[A, I]$ ,
- (d) la matrice  $[A, -A]$ .

6. Considérons la matrice  $E$  définie de la manière suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit  $b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Est-ce que  $E$  est totalement unimodulaire ? Trouver les deux solutions à valeurs entières au problème  $EX = b$ .

### Solution.

1. La matrice  $A$  est totalement unimodulaire car toutes ses matrices ont déterminant 1, -1 ou 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

2. On peut regarder le critère de suffisance pour qu'une matrice soit TU. On met les lignes 1 et 3 ensemble dans  $A$  et les deux autres dans  $B$ . Alors on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a bien respecté les critères, les valeurs de signes opposés sont dans le même sous-ensemble et les valeurs de signe identique sont bien dans les sous-ensembles opposés. Alors  $B$  est totalement unimodulaire.

3. La matrice  $C$  n'est pas TU car son déterminant est 2.

4. La matrice  $D$  n'est pas TU car son déterminant est 2.
5. Si  $A$  est une matrice totalement unimodulaire alors :
  - (a) la matrice  $-A$  est aussi TU,
  - (b) la matrice  $A^T$  est TU,
  - (c) en développant le long de la diagonale de  $I$  on retrouve bien que  $[A, I]$  est TU,
  - (d) par les propositions ci-dessus on a bien  $[A, -A]$  qui est TU.
6. La matrice  $E$  n'est pas TU. Le problème s'exprime comme :

$$PL = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Les solutions sont  $X_1 = (1, 0, 1)$  et  $X_2 = (0, 1, 3)$ .

## 1.2 Arbre de branchement et exemples

### Exercice 2 Solutions entières versus solutions réelles.

Donner les solutions réelles et entières des problèmes suivants.

1. Un premier LP :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. Un second LP :

$$PL_2 = \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 29 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \max(z) = 300x_1 + 205x_2 \end{cases}$$

3. Un troisième LP :

$$PL_3 = \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 11 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \min(z) = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

### Solution.

1. La meilleure solution réelle ici est  $x_{\mathbb{R}}^* = (0.75, 0.25)$  avec  $z_{\mathbb{R}}^* = 2$ .  
La solution entière optimale est  $x_{\mathbb{Z}}^* = (1, 0)$  avec  $z_{\mathbb{Z}}^* = 3$ .  
On peut visualiser ces résultats comme suit :

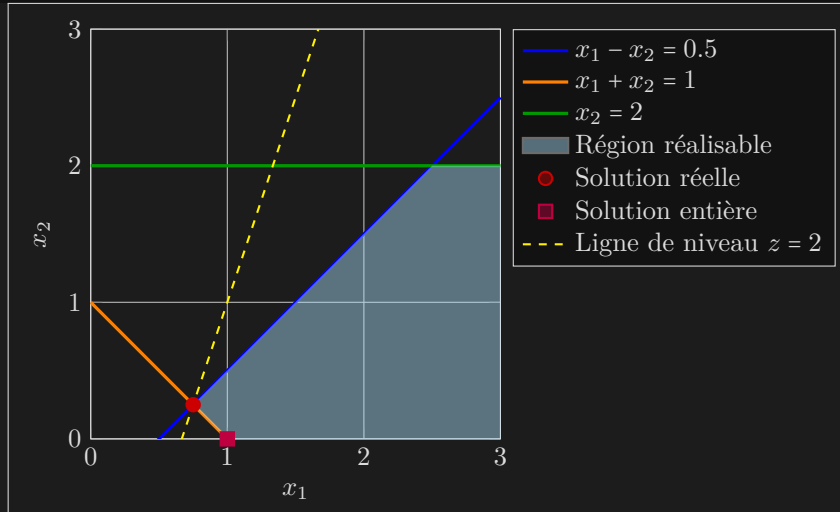


FIGURE 1 – Représentation du problème  $PL_1$  dans  $\mathbb{R}^2$

2. La meilleure solution réelle ici est  $x_{\mathbb{R}}^* = (2.9, 0)$  avec  $z_{\mathbb{R}}^* = 870$ .

La solution entière optimale est  $x_{\mathbb{Z}}^* = (0, 4)$  avec  $z_{\mathbb{Z}}^* = 820$ .

On peut visualiser ces résultats comme suit :

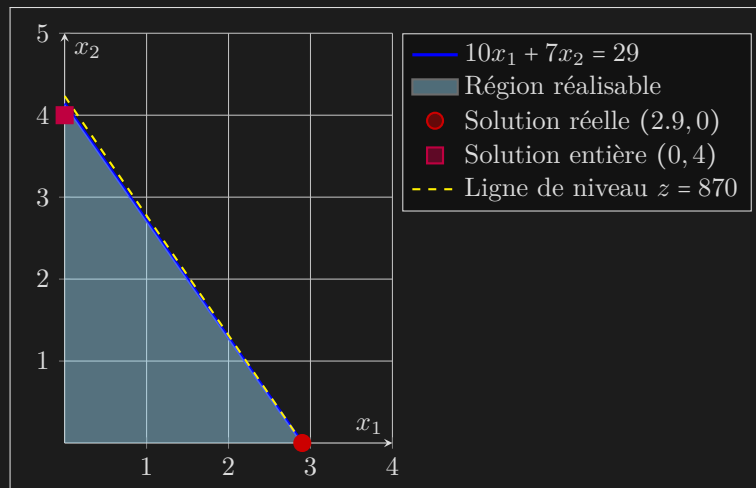


FIGURE 2 – Représentation du problème  $PL_2$  dans  $\mathbb{R}^2$

3. Le dernier problème est non borné.

### Exercice 3 Détermination de l'arbre d'évaluation et de séparation pour un problème donné.

Nous considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$PL_1 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Nous associons le programme linéaire (en valeurs réelles)  $PL_1$  et la solution est la suivante :

$$x_1^* = 5.5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 55.$$

Le problème se sépare en deux sous-problèmes :

$$PL_2 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_3 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 6 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0.2, \quad z^* = 50.2 \text{ pour } PL_2 \\ \emptyset \text{ pour } PL_3$$

Ainsi le problème  $PL_2$  associé au programme  $PL_1$  se décompose en sous-problèmes :

$$PL_4 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

et

$$PL_5 = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 11 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 10x_1 + x_2 \end{cases}$$

Les solutions sont les suivantes pour les deux programmes :

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 50 \text{ pour } PL_4 \\ x_1^* = 3, \quad x_2^* = 1, \quad z^* = 31 \text{ pour } PL_5$$

Donner l'arbre d'évaluation et de séparation associé à la résolution du problème  $PL_1$ .

**Solution.**

### 1.3 Résolution effective

#### Exercice 4 Résolution en utilisant la méthode de séparation et évaluation.

On considère le problème linéaire en nombres entiers ci-dessous :

$$PL_0 = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable  $x_2$ .

2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers ci-dessus par la méthode d'évaluation et de séparation tel que le premier branchement se fera sur la variable  $x_1$ .
3. Donner la signification géométrique du premier branchement sur la variable  $x_2$ . Quels sont les principes vus en cours que l'on retrouve lors de l'interprétation géométrique ?

**Solution.**

1. L'arbre de branchement sur  $x_2$  est le suivant :

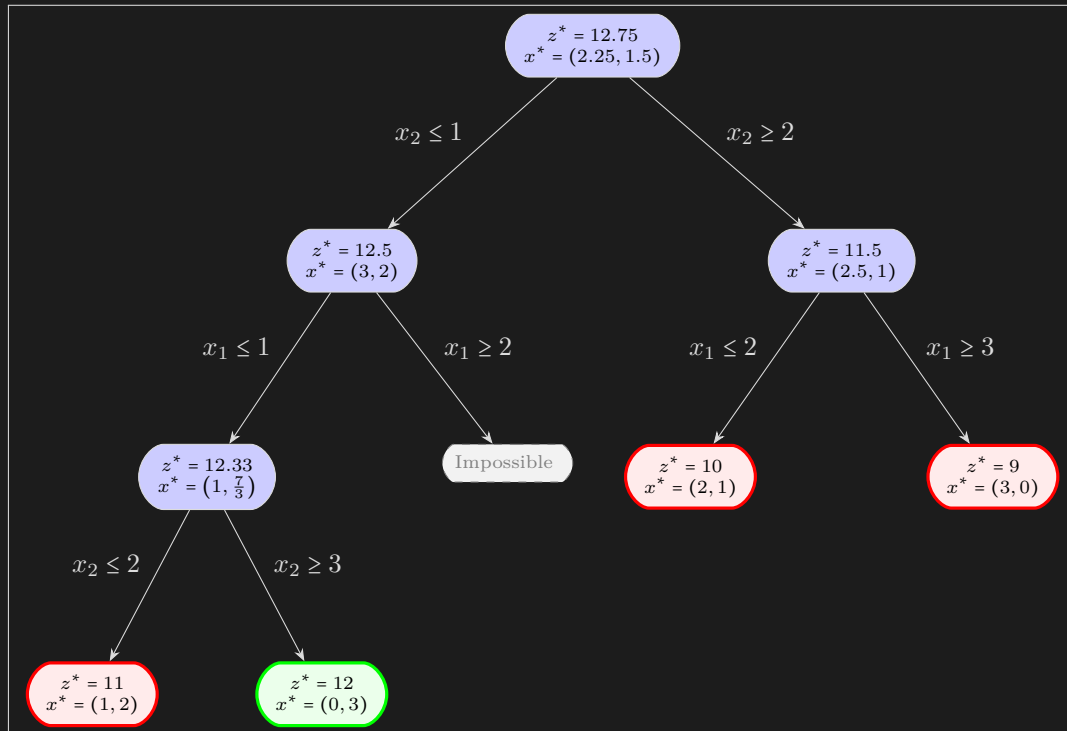


FIGURE 3 – Branch and bound

2. L'arbre de branchement sur  $x_1$  est le suivant :

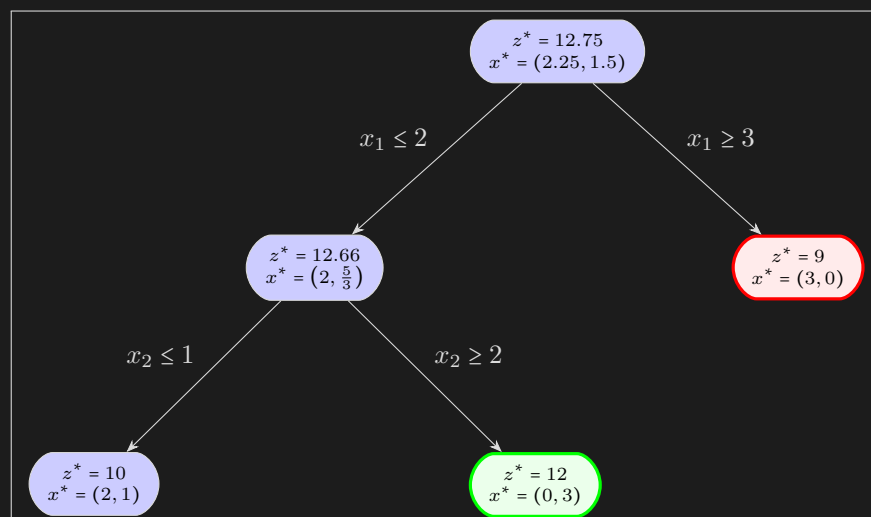


FIGURE 4 – Branch and bound

### Exercice 5 Branch and bound et plus court chemin.

Nous considérons le graphe donné par la figure 5 suivante :

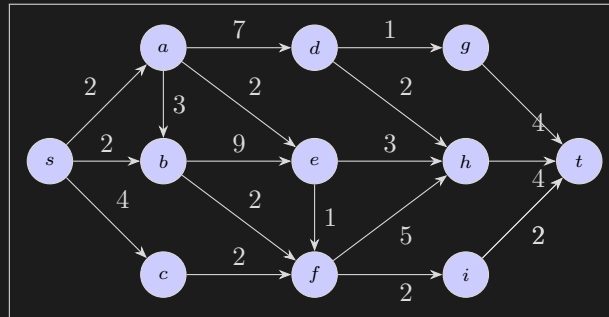


FIGURE 5 – Recherche d'un plus court chemin par branch and bound

Donner deux stratégies en utilisant le principe du branch and bound pour résoudre le problème d'un plus court chemin. Appliquer vos stratégies sur le graphe de la figure 5.

**Solution.**

### Exercice 6 Contraintes avec une seule variable.

On considère un problème de programmation linéaire standard, à une seule contrainte, défini par

$$\max \sum_{j=1}^n u_j x_j$$

avec

$$\sum_{j=1}^n v_j x_j \leq V, \text{ et } x_j \geq 0, \text{ pour } 1 \leq j \leq n$$

Tous les coefficients  $u_j$  et  $v_j$  sont supposés strictement positifs et l'on suppose les variables classées par rapports utilité/volume décroissants ou, pour rester dans un formalisme plus mathématique, suivant les valeurs décroissantes des rapports  $\frac{u_j}{v_j}$ . Montrer que la variable  $x_1$  est entrante et que, en la faisant entrer en base, on atteint l'optimum de l'objectif en une seule étape. Exprimer la valeur de l'objectif en fonction des différents coefficients.

**Solution.**

### Exercice 7 Le problème du voyageur du commerce symétrique.

1. Appliquer la méthode par séparation et évaluation décrite en cours pour résoudre le problème du voyageur de commerce dans le graphe  $K_6$  dont la matrice des poids est la suivante :

	$x$	$y$	$z$	$t$	$u$	$v$
$x$	$\infty$	4	7	2	5	4
$y$	4	$\infty$	3	2	1	2
$z$	7	3	$\infty$	2	6	3
$t$	2	2	2	$\infty$	5	3
$u$	5	1	6	5	$\infty$	2
$v$	4	2	3	3	2	$\infty$

2. Que faudrait-il faire si on voulait connaître tous les cycles de poids minimum ?

**Solution.**

## 1.4 Inégalités valides

**Exercice 8 Simples inégalités valides.**

Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{x_i \in \{0, 1\} : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 \leq -2\}$$

Donner deux équations valides.

**Solution.****Exercice 9 Simple inégalité valide.**

Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x, y), 0 \leq x \leq 5, y \in \{0, 1\} : x \leq 9999y\}$$

Donner une inégalité valide.

**Solution.****Exercice 10 Simple inégalité valide.**

Considérons l'ensemble suivant :

$$X = \{(x, y), 0 \leq x \leq 14, y \in \{0, 1\} : x \leq 10y\}$$

Donner une inégalité valide.

**Solution.**

**Exercice 11 Simple inégalité valide.** Considérons la région entière  $X = P \cap \mathbb{N}^4$  avec

$$P = \{x \in \mathbb{R}_+^4 : 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$$

Donner une inégalité valide.

**Solution.****Exercice 12 Inégalités valides.**

Considérons une instance de BIN PACKING PROBLEM :

Algorithme 1 – BIN PACKING PROBLEM

**Input:** Soient  $n$  nombres entiers  $a_1, \dots, a_n$  et  $W, k \in \mathbb{N}^*$

**Question:** Existe-t-il une partition en  $k$  boîtes  $B_1, \dots, B_k$  de capacité  $W$  telle que  $\forall j \in \{1, \dots, k\}, \sum_{i \in B_j} a_i \leq W$  ?

On considère l'instance suivante :

- La capacité des boîtes est  $W = 6$ .
- Les objets à ranger sont  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 4, a_7 = 5$ .

1. Donner un algorithme linéaire en nombres entiers qui modélise le BIN PACKING PROBLEM.
2. Donner une solution optimale relaxée pour l'instance donnée. Montrer que cette solution est optimale.
3. Proposer une borne inférieure pour toute solution optimale.
4. Donner un ensemble de coupes pour l'instance.



**Solution.**

**Exercice 13 Le polytope pour le 0 – 1 Sac à Dos.**

Soit

$$S = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid 79x_1 + 53x_2 + 53x_3 + 45x_4 + 45x_5 \leq 178\}.$$

avec  $x_i \in \{0, 1\}$  pour  $i = 1, \dots, 5$ .

1. Donner les ensembles minimaux dépendants et donner les inégalités valides.
2. Donner l'extension  $E(C)$  d'un ensemble minimal dépendant et les coupes associées.

**Solution.**

## 1.5 Coupes

**Exercice 14 Sur les coupes de Gomory.**

Une coupe  $ax \leq \alpha$  est dure « plus profonde » qu'une coupe  $a'x \leq \alpha'$  si

$$\{x \in \mathcal{D} \mid ax \leq \alpha\} \subset \{x \in \mathcal{D} \mid a'x \leq \alpha'\},$$

1. Expliquer le sens de ce terme.
2. Essayer de déterminer la coupe la plus profonde dans les exercices 15 et 16 suivants.

**Solution.**

**Exercice 15 Sur les coupes de Gomory.**

On considère le programme linéaire suivant :

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

1. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers par la méthode des coupes de Gomory.
2. Résoudre le programme linéaire en nombres entiers par la méthode du Branch and Bound.

**Solution.**

**Exercice 16 Algorithme de coupe de Gomory.**

Donner la solution du programme linéaire suivant :

$$PL = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \\ \max(z) = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

**Solution.**

## 1.6 Enveloppe convexe

**Exercice 17 Enveloppe convexe de points.**

Soit  $S \subseteq \{0, 1\}^3$  qui consiste aux points suivants :

$$S = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

Considérons le polytope  $P = \text{conv}(S)$ . Trouver un système d'inéquations linéaires qui caractérise  $P$ , c'est-à-dire tel que :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$$

**Solution.**

### Exercice 18 Enveloppe convexe et points extrêmes.

Soit  $S \subseteq \{0, 1\}^n$ , c'est-à-dire un ensemble de  $\{0, 1\}$ -vecteurs de dimension  $n$ . Soit le polytope  $P = \text{conv}(S)$ . Montrer que  $x$  est un sommet de points de  $P$  si et seulement si  $x \in S$ .

**Solution.**

### Exercice 19 Enveloppe convexe et points extrêmes.

Soit  $S$  l'ensemble suivant :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 \leq 1, x_1 - x_3 \leq 0, x_1 \geq 0\}$$

Donner  $\text{conv}(S)$ .

**Solution.**

### Exercice 20 Enveloppe convexe et points extrêmes.

Considérons un polytope  $P \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_t\})$ . Montrer que si  $x$  est un point extrême de  $P$  alors  $x \in \{x_1, \dots, x_t\}$ . Est-ce que  $x_j$  est forcément un point extrême de  $P$  pour tout  $j \in \{1, \dots, t\}$  ?

**Solution.**

### Exercice 21 Propriétés de l'enveloppe convexe.

Soient  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  deux ensembles convexes. Montrer les propriétés suivantes :

1.  $\text{conv}(A \cup B) = \text{conv}(\text{conv}(A) \cup \text{conv}(B))$ .
2.  $\text{conv}(A + B) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$ . *Aide* : On peut considérer la somme  $\sum_{j,k} \lambda_j \mu_k (a_j + b_k)$  où  $\sum_j \lambda_j = 1$ ,  $\sum_k \mu_k = 1$ ,  $\lambda_j, \mu_k \geq 0$ ,  $a_j \in A$  et  $b_k \in B$ .
3. Soient  $P$  et  $Q$  deux polytopes de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que les ensembles suivants sont aussi des polytopes :
  - $P \times Q = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} \mid p \in P, q \in Q\}$ .
  - $P \cap Q$ .
  - $\text{conv}(P \cup Q)$ .

**Solution.**

### Exercice 22 Propriétés de l'enveloppe convexe.

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et soit  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un convexe. Montrer que

$$\text{conv}(C \cup \{x_0\}) = \{\lambda x + (1 - \lambda)x_0 \mid x \in C, \lambda \in [0, 1]\}.$$

**Solution.**

**Exercice 23 Enveloppe convexe.**

Soit  $C$  le convexe défini comme étant l'enveloppe convexe de  $S$  :  $C = \text{conv}(S)$ . Montrer que tout point extrême de  $C$  appartient à  $S$ .

**Solution.**

**Exercice 24 Faces.**

Soit  $P_\varepsilon \in \mathbb{R}^2$  le polyèdre défini par les inégalités linéaires suivantes :

$$P_\varepsilon = \begin{cases} x_2 \geq 3 \\ \varepsilon x_1 + (2 - \varepsilon)x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. Illustrer  $P_\varepsilon$  et les inégalités dans le plan pour  $\varepsilon = -1$  et  $\varepsilon = 1$ .
2. Quelles sont les facettes de  $P_1$  ?
3. Soit  $\varepsilon = 3$  et le polyèdre entier  $P_I = \text{conv}(P_\varepsilon \cap \mathbb{Z}^2)$ . Dessiner  $P_I$  et donner les équations qui donnent l'enveloppe convexe.

**Solution.**

**Exercice 25 Preuve sur les enveloppes convexes.**

1. Soit  $X$  l'ensemble suivant

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times B^1 : \sum_{i=1}^m x_i \leq my, x_i \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

où  $B^1 = \{0, 1\}$ . Considérons la formulation suivante :

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^1 : x_i \leq y, \forall i \in \{1, \dots, m\}, y \leq 1\}$$

Montrer que la matrice  $A$  ou la partie  $(A, B)$  admet une structure particulière garantissant que  $P = \text{conv}(X)$ .

2. Montrer que les points  $(x, y) \in P$  (pour l'ensemble  $X$ ) avec  $y$  fractionnaire sont des points extrêmes de  $P$ .

**Solution.**

## 2 Génération de colonnes

Rappelons le principe de l'algorithme de la génération de colonnes :

- Initialisation : on met quelques colonnes de  $PL$ . Soit  $PL_R$ .
- Itérations :
  - Résoudre  $(PL_R)$ .
  - Calculer les couts réduits des variables de  $(PL)$ .
  - Si toutes les variables de  $(PL)$  ont un cout réduit  $\geq 0$  alors STOP ( $(PL)$  est résolu). Sinon ajouter une variable de cout réduit minimum à  $(PL_R)$  et résoudre à nouveau  $(PL_R)$ .

Pour calculer les couts réduits :

- on utilise les variables duales  $\mu \geq 0$  associées aux contraintes
- Couts réduits :  $c - \mu A$ .
- Dimensions :
  - $c$  et  $\mu$  vecteurs lignes,
  - $c$  avec  $n$  colonnes et  $\mu$  avec  $m$  colonnes,
  - $A$  la matrice  $m \times n$
  - $n$  le nombre de variables et  $m$  le nombre de contraintes.

### Exercice 26 Génération de colonnes.

On considère le problème  $PL$  suivant :

$$PL = \begin{cases} \min(z) = 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 \geq 3 \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\} \end{cases}$$

Commencer la méthode de génération de colonne avec les variables  $x_1, x_3$  et  $x_4$ . Ecrire le problème restreint  $PL_R$ . Calculer les coûts réduits.

### Solution.

### Exercice 27 Encadrement de la valeur optimale.

Montrer qu'à chaque itération de la génération de colonnes on a

$$\text{valeur}(PL) \leq \text{valeur}(PL_R)$$

et

$$\text{score}(PL_R) + k \cdot \text{cred} \leq \text{score}(PL)$$

où  $k$  est la valeur d'une solution optimale  $\sum_{j=1}^n x_j^* \leq k$  et cred est le cout réduit minimum à une itération donnée.

### Solution.

### Exercice 28 Génération de colonnes : le problème de la tournée de véhicules avec fenêtres temporelles.

### Solution.

### 3 Lagrangien

**Exercice 29 Lagrangien.**

Soit le problème  $(P)$  suivant :

$$(P) = \begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ g(x) = 2x_1 + x_2 + 4 \leq 0 \\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

1. On relache la contrainte et on lui affecte le multiplicateur de Lagrange  $\lambda \geq 0$ .
2. Enoncer  $(D)$  le problème dual lagrangien de  $(P)$ .
3. Calculer la fonction duale  $\Delta(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .
4. Résoudre le problème dual  $(D)$ .

**Solution.**

## 4 Modélisation

### Exercice 30 Le problème de la coloration de sommets.

Donner un programme linéaire en nombres entiers qui modélise le problème de la coloration de sommets.

**Solution.**

### Exercice 31 Le problème du stable dans un graphe.

On rappelle la définition suivante :

**Définition 4.1.** Un **stable** dans un graphe est un ensemble de sommets qui sont deux à deux non adjacents.

La matrice d'incidence (arêtes-sommets)  $A = (a_{ij})$  est une matrice  $m \times n$  définie de la manière suivante :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } i \text{ est incidente au sommet } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner la matrice d'incidence du graphe donné par la figure 6 :

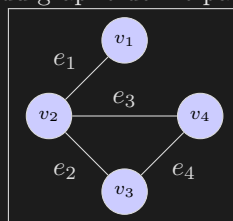


FIGURE 6 – Un graphe non orienté

2. Le problème de trouver un stable maximum dans un graphe ci-dessus peut se formuler comme un programme linéaire. Donner cette formulation.

**Solution.**

**Exercice 32 title.**

**Solution.**

**Exercice 33 title.**

**Solution.**

**Exercice 34 title.**

**Solution.**

**Exercice 35 title.**

**Solution.**