HAI702I — TDs

Ivan Lejeune

23 septembre 2025

Table des matières

TD1 — Espaces vectoriels

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 1.1.
Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(1,2,2)$.

Solution. On rappelle les définitions importantes :

- Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si $\langle u,v\rangle = 0$.
- Une base est orthonormale si ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.
- Une base est directe si le produit vectoriel du premier vecteur par le deuxième donne le troisième.

Commençons par choisir notre premier vecteur u. On veut u colinéaire à $(1,2,2)$ donc on a

$$u = \lambda(1,2,2), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Ensuite on veut que u soit de norme 1 :

$$\begin{aligned} \|u\| = 1 &\iff \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i^2} = 1 \\ &\iff \sum_{i=1}^{3} u_i^2 = 1 \\ &\iff \lambda^2(1^2+2^2+2^2) = 1 \\ &\iff 9\lambda^2 = 1 \\ &\iff \lambda = \pm\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On prend $\lambda = \frac{1}{3}$, donc

$$\boxed{u = \frac{1}{3}(1,2,2)}.$$

Ensuite on veut choisir v. Il faut que v soit orthogonal à u :

$$\langle u,v\rangle = 0.$$

Si on note $v' = (x,y,z)$, on a :

$$\langle u,v'\rangle = 0 \iff \frac{1}{3}(1,2,2)\cdot(x,y,z) = 0 \quad \iff \frac{1}{3}(x+2y+2z) = 0. \iff x+2y+2z = 0.$$

Pour des questions de simplicité, on peut choisir $x = 0, y = 1$ et $z = -1$. Il faut ensuite normaliser v' pour obtenir v.

$$\|v'\| = \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

On peut alors prendre $\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)}$.

Enfin, pour w, on peut faire le produit vectoriel $u \wedge v$ pour être sûr que la base soit directe. Il y a plusieurs manières de faire le calcul, ici on utilise le déterminant :

$$w = u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = e_1\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} - e_2\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + e_3\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}.$$

On trouve :

$$\boxed{w = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, 1)}.$$

On a alors notre base orthonormale directe :

$$\boxed{\mathcal{B} = (u, v, w) = \left(\frac{1}{3}(1, 2, 2), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1), \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, 1, 1)\right)}.$$

On peut vérifier rapidement qu'on a bien :

- $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ et $\|w\| = 1$.
- $\langle u, v\rangle = 0$, $\langle u, w\rangle = 0$ et $\langle v, w\rangle = 0$.
- $u \wedge v = w$.

Exercice 1.2.
Pour quelles valeurs de a les vecteurs suivant sont-ils coplanaires ?

- $(1, 0, a)$,
- $(a, 1, 0)$,
- $(0, a, 1)$.

Solution. Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si la matrice formée par ces vecteurs a un déterminant nul. Ici on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^3.$$

On cherche donc les valeurs de a telles que :

$$1 + a^3 = 0 \iff a^3 = -1 \iff a = -1.$$

Il n'y a pas d'autres solutions réelles. On peut le vérifier en factorisant $a^3 + 1$:

$$a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

où $a^2 - a + 1$ n'a pas de racines réelles.
Donc les vecteurs sont coplanaires si et seulement si $\boxed{a = -1}$.

Exercice 1.3.
Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation vectorielle d'inconnue x suivante :

$$u \wedge x = v$$

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors u et v sont orthogonaux. On supposera dans la suite que u et v sont orthogonaux.
2. Déterminer toutes les solutions colinéaires à $u \wedge v$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Déterminer les vecteurs solutions qui vérifient en outre $\langle x, w\rangle = a$.

Solution.

1. Si l'équation admet une solution alors par définition du produit vectoriel on a v orthogonal à u et x, donc en particulier v est orthogonal à u.

2. Une solution colinéaire à $u \wedge v$ s'écrit $x = \lambda(u \wedge v)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculons $u \wedge x$:

$$\begin{aligned} u \wedge x &= u \wedge (\lambda(u \wedge v)) \\ &= \langle u, v\rangle \lambda v - \langle u, \lambda u\rangle v \\ &= -\lambda\langle u, u\rangle v \\ &= -\lambda\|u\|^2 v \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & -\lambda\|u\|^2 v = v \\ \iff & -\lambda\|u\|^2 = 1 \\ \iff & \lambda = -\frac{1}{\|u\|^2}. \end{aligned}$$

La solution colinéaire à $u \wedge v$ est donc :

$$\boxed{x = -\frac{1}{\|u\|^2}(u \wedge v)}.$$

3. Une solution de l'équation $u \wedge x = v$ se situe sur le plan formé par u et $u \wedge v$. On va donc chercher une solution sous la forme :

$$x = \alpha u + \beta(u \wedge v), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} u \wedge x &= u \wedge (\alpha u + \beta(u \wedge v)) \\ &= \alpha(u \wedge u) + \beta(u \wedge (u \wedge v)) \\ &= 0 + \beta(\langle u, v\rangle u - \langle u, u\rangle v) \\ &= -\beta\|u\|^2 v. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & -\beta\|u\|^2 v = v \\ \iff & -\beta\|u\|^2 = 1 \\ \iff & \beta = -\frac{1}{\|u\|^2}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{x = \alpha u - \frac{1}{\|u\|^2}(u \wedge v) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}}.$$

4. Non traité.

Exercice 1.4. ⋆
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A = (1, 3, -2)$ et de vecteur directeur $u = (2, 1, 0)$, $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 3y + 5z = 7$ et M le point de coordonnées $(1, 2, 3)$.

1. Calculer la distance de M à la droite $\mathcal{D}$.
2. Calculer la distance de M au plan $\mathcal{P}$.
   Indication : remarquer que le point $(1, 0, 1)$ *appartient au plan* $\mathcal{P}$.

Solution.

1. Il y a plusieurs manières de calculer la distance d'un point à une droite.
   Première méthode : on cherche le point X de la droite $\mathcal{D}$ tel que le segment MX soit

orthogonal à la droite. Le point X de la droite $\mathcal{D}$ s'écrit :

$$X = A + \lambda u = (1,3,-2) + \lambda(2,1,0) = (1+2\lambda, 3+\lambda, -2).$$

On cherche λ tel que MX soit orthogonal à u, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&\langle MX, u\rangle = 0\\
\iff &\langle X - M, u\rangle = 0\\
\iff &\langle (1+2\lambda-1, 3+\lambda-2, -2-3), (2,1,0)\rangle = 0\\
\iff &\langle (2\lambda, 1+\lambda, -5), (2,1,0)\rangle = 0\\
\iff &4\lambda + 1 + \lambda = 0\\
\iff &5\lambda + 1 = 0\\
\iff &\lambda = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$X = \left(1 - \frac{2}{5}, 3 - \frac{1}{5}, -2\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}, -2\right).$$

La distance cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
d(M, \mathcal{D}) &= \|MX\|\\
&= \sqrt{\left(\frac{3}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - 2\right)^2 + (-2-3)^2}\\
&= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 25}\\
&= \sqrt{\frac{4 + 16 + 625}{25}}\\
&= \sqrt{\frac{645}{25}}\\
&= \frac{\sqrt{645}}{5}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on utilise la formule de la distance d'un point à une droite :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|AM \wedge u\|}{\|u\|}.$$

On a :

$$AM = M - A = (1-1, 2-3, 3-(-2)) = (0,-1,5).$$

Calculons le produit vectoriel :

$$AM \wedge u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -1 & 5\\ 1 & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 0 & 5\\ 2 & 0 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 0 & -1\\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5e_1 + 10e_2 + 2e_3.$$

On en déduit :

$$\|AM \wedge u\| = \sqrt{(-5)^2 + 10^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 100 + 4} = \sqrt{129}.$$

De plus :

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

On trouve donc :

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\sqrt{129}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{645}}{5}}.$$

2. De même, il y a plusieurs manières de calculer la distance d'un point à un plan.
Première méthode : on cherche le point Y du plan $\mathcal{P}$ tel que le segment MY soit orthogonal au plan. Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal au vecteur normal $n = (2,-3,5)$. Ainsi, Y s'écrit :

$$Y = M + \mu n = (1,2,3) + \mu(2,-3,5) = (1+2\mu, 2-3\mu, 3+5\mu).$$

On cherche μ tel que Y appartienne au plan, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& 2(1+2\mu) - 3(2-3\mu) + 5(3+5\mu) = 7 \\
\iff & 2 + 4\mu - 6 + 9\mu + 15 + 25\mu = 7 \\
\iff & 38\mu + 11 = 7 \\
\iff & 38\mu = -4 \\
\iff & \mu = -\frac{2}{19}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
Y &= \left(1 - \frac{4}{19}, 2 + \frac{6}{19}, 3 - \frac{10}{19}\right) \\
&= \left(\frac{15}{19}, \frac{44}{19}, \frac{47}{19}\right).
\end{aligned}$$

La distance cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
d(M,\mathcal{P}) &= \|MY\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{15}{19} - 1\right)^2 + \left(\frac{44}{19} - 2\right)^2 + \left(\frac{47}{19} - 3\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{16}{361} + \frac{36}{361} + \frac{100}{361}} \\
&= \sqrt{\frac{16+36+100}{361}} \\
&= \sqrt{\frac{152}{361}} \\
&= \frac{\sqrt{152}}{19}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on utilise la formule de la distance d'un point à un plan :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

où $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation du plan et $M = (x_0, y_0, z_0)$. Ici, $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ et

$d = -7$. On a :

$$\begin{aligned} d(M,\mathcal{P}) &= \frac{|2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 5\cdot 3 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} \\ &= \frac{|2-6+15-7|}{\sqrt{4+9+25}} \\ &= \frac{|4|}{\sqrt{38}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{38}} = \frac{4\sqrt{38}}{38} = \frac{2\sqrt{38}}{19} = \frac{\sqrt{152}}{19}. \end{aligned}$$

La distance cherchée est donc :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{\sqrt{152}}{19}}.$$

Exercice 1.5. ⋆
Déterminer la projection orthogonale Δ' de la droite Δ d'équation :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

dans le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 1$.

Solution. Non traité.

Exercice 1.6. ⋆
Calculer l'équation de la sphère de centre $(1,1,1)$ et dont le plan tangent est $x + y + z = 2$.

Solution. Non traité.

TD2 — Transformations linéaires

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

Exercice 2.1 Transformation de $\mathbb{R}^2$.
Ecrire pour chaque application linéaire ci dessous la matrice (dans la base canonique) de :

1. la rotation d'angle θ et de centre $(0,0)$,
2. la projection sur la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,
3. la symétrie par rapport à la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Solution.

1. La matrice de la rotation d'angle θ et de centre $(0,0)$ est :
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. La matrice de la projection sur la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est :
$$P = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 \\ a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$
3. La matrice de la symétrie par rapport à la droite $\mathsf{Vect}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est :
$$S = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{pmatrix} a_1^2 - a_2^2 & 2a_1 a_2 \\ 2a_1 a_2 & a_2^2 - a_1^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.2.
Soit $a, b \in \mathbb{R}^3$. On note $a_{\perp b}$ le vecteur projeté de a sur le plan orthogonal à b.

1. Exprimer $a_{\perp b}$ en fonction de a et b.
2. Démontrer que $a_{\perp b} = \frac{(b \wedge a) \wedge b}{\|b\|^2}$.
3. Trouver une matrice $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $a_{\perp b} = Ma$. Est-elle inversible ?

Solution. Non traité.

Exercice 2.3 Inverser des matrices sans calculs.

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Solution.

1. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2I_3 - A.$$

   Donc $A^2 = 2I_3 - A$. Il en suit

$$\begin{aligned} A^2 = 2I_3 - A &\iff A^2 + A = 2I_3 \\ &\iff \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3 \\ &\iff A\left(\frac{1}{2}(A + I_3)\right) = I_3. \end{aligned}$$

   Donc A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3)}.$$

2. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   On remarque alors que

$$\begin{aligned} A^3 - A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3. \end{aligned}$$

   Comme précédemment, on en déduit que A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)}.$$

3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice nilpotente. On cherche un inverse X de sorte que $(I_n - A)X = I_n$. On remarque que dans le cadre des réels, l'inverse de $1 - x$ est $\frac{1}{1-x}$. Mais aussi :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

   On pose alors Y un tel candidat :

$$Y = I_n + A + A^2 + A^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{p} A^k.$$

Où p est le plus petit entier tel que $A^p = 0$. Il suit alors :

$$\begin{aligned}(I_n - A)Y &= Y - AY \\ &= \sum_{k=0}^{p} A^k - A\sum_{k=0}^{p} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} A^k - \sum_{k=0}^{p} A^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} A^k - \sum_{k=1}^{p+1} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} A^k - \sum_{k=1}^{p} A^k - A^{p+1} \\ &= I_n + \sum_{k=1}^{p} A^k - \sum_{k=1}^{p} A^k - 0 \\ &= I_n.\end{aligned}$$

Notre candidat était bien choisi, donc $I_n - A$ est inversible et

$$\boxed{(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p} A^k}.$$

Exercice 2.4 Déterminant d'une matrice triangulaire. ⋆
Démontrer que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses entrées diagonales.

Solution. Non traité.

Exercice 2.5 Inverser des matrices avec calculs.
A l'aide du pivot de Gauss, dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Soit
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Solution. Non traité.

Exercice 2.6 Décomposition d'une rotation. ⋆
On appelle cisaillement horizontal (x-shear) les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

On appelle cisaillement vertical (y-shear) les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice (dans les bases canoniques) est de la forme

$$V_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } y \in \mathbb{R}.$$

1. Représenter l'effet de ces transformations sur la base canonique.
2. Soit $R_{-\theta}$ la matrice de rotation d'angle $-\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer la décomposition suivante :

$$R_{-\theta} = H_{-\tan(\frac{\theta}{2})} V_{-\sin(\theta)} H_{\tan(\frac{\theta}{2})}.$$

Solution. Non traité.

Exercice 2.7. ⋆
Soit A une matrice carrée à coefficients réels. Si A est inversible, est-ce que A^t est inversible ? Si oui, quel est son inverse ? Justifier.

Solution. Non traité.