GROUPES ET ANNEAUX 2
FEUILLE DE TD N°1

Faits basiques sur les actions

Exercice 1. Considérer :

(*i*) L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$;

(*ii*) L'action de $\mathrm{GL}_2(\Bbbk)$ sur $\mathbb{P}^1(\Bbbk)$;

(*iii*) L'action de $\mathscr{D}_n$ sur $\boldsymbol{\mu}_n$;

(*iv*) L'action de $\mathfrak{S}_n$ par conjugaison sur ses sous-groupes d'ordre 2.

Ces actions, sont-elles libres ? Sont-elles transitives ?

Exercice 2. Soit $\|\_\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$, et soit O_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\|Av\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. On appelle O_n le *groupe orthogonal de dimension n*. Soit $S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ la *sphère de dimension* $n-1$. Montrer que O_n agit transitivement, mais pas librement, sur S^{n-1} pour tout $n > 1$.

Exercice 3. L'action de $\mathscr{D}_n$ sur les racines de l'unité $\boldsymbol{\mu}_n$ est-elle une action par morphismes de groupe ?

Exercice 4. Soit $H < G$ un sous-groupe. Soit G_{L} l'ensemble G muni de l'action par translations à gauche de H, à savoir, $\rho_{\mathrm{L}}(h)(g) = hg$ pour tout $h \in H$ et $g \in G_{\mathrm{L}}$. Soit G_{R} l'ensemble G muni de l'action par translations à droite de H, à savoir, $\rho_{\mathrm{R}}(h)(g) = gh^{-1}$ pour tout $h \in H$ et $g \in G_{\mathrm{R}}$. Montrer que la fonction $\_^{-1} : G_{\mathrm{L}} \to G_{\mathrm{R}}$ est une bijection H-équivariante.

Quotient par une action

Exercice 5. En utilisant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$, montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$. Similairement, utiliser l'action de $\mathscr{D}_3$ sur $\boldsymbol{\mu}_3$ pour montrer que $\mathscr{D}_3 \cong \mathfrak{S}_3$.

Exercice 6. Les quotients du point de vue géométrique.

(*i*) Déterminer une bijection entre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et le cercle S^1.

(*ii*) Soit $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ muni de l'action de $\mathbb{R}^\times$ par multiplication scalaire. Déterminer une bijection entre $X/\mathbb{R}^\times$ et le cercle S^1.

(*iii*) Considérer le sous-groupe

$$i(\mathrm{O}_{n-1}) = \left\{ \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in \mathrm{O}_{n-1} \right\} < \mathrm{O}_n,$$

et construire une bijection entre $\mathrm{O}_n / i(\mathrm{O}_{n-1})$ et la sphère S^{n-1}.

Exercice 7. Soit p un nombre premier, n un entier strictement positif et G un groupe d'ordre p^n. On appelle parfois ces groupes des *p-groupes finis*.

(*i*) On se donne un G-ensemble fini X. Soit $x \in X$ tel que $|\mathrm{orb}(x)| > 1$. Montrer que $|\mathrm{orb}(x)| \equiv 0 \pmod p$. En déduire que
$$|X| \equiv |X^G| \pmod p.$$

(*ii*) Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G$. Pour chaque $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $f \in F$, soit $a \cdot f \in F$ la fonction définie par $(a \cdot f)(b) := f(a+b)$ pour tout $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que cela définit une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur F. Identifier l'ensemble des points fixes de cette action.

(*iii*) Considérons
$$X = \left\{ f \in F \;\middle|\; \prod_{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} f(a) = e \right\}.$$
Montrer que X est stable par l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Identifier l'ensemble des points fixes de cette action. En employant le point (*i*), montrer que G possède un élément d'ordre p.

Exercice 8. Soit $H < G$ un sous-groupe d'un groupe G. Le *normalisateur de H dans G* est $\mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Il s'agit d'un sous-groupe de G contenant H.

(*i*) Soit $G = \mathscr{D}_n$ et $H = \langle S \rangle$ le sous-groupe engendré par la réflexion S. Déterminer $\mathrm{N}_G(H)$.

(*ii*) En utilisant l'action de G par conjugaison sur ses sous-groupes, montrer que $[G : \mathrm{N}_G(H)]$ est égal au nombre de conjugués de H.

Exercice 9. Soit $H < G$ un sous-groupe d'un groupe G. On considère l'action de G sur G/H par translation à gauche. Déterminer $\mathrm{st}(gH)$ en fonction de H et de $g \in G$. Soit $H' < G$ un autre sous-groupe de G. Montrer que les G-ensembles G/H et G/H' sont isomorphes si et seulement si H et H' sont conjugués.

Exercice 10 (Lemme de Burnside)**.** Soit X un ensemble fini muni d'une action d'un groupe fini G. Pour tout $g \in G$, soit $\mathrm{fix}(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ l'*ensemble points fixes de g*. On écrira parfois X^g pour $\mathrm{fix}(g)$. Montrer que
$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$
Indication : Soit $S = \{(g,x) \in G \times X \mid gx = x\}$, et soient $p_G : S \to G$ et $p_X : S \to X$ les projections naturelles. Calculer $|S|$ en utilisant les images réciproques.

Exercice 11. Soit G un groupe d'ordre n agissant transitivement sur un ensemble X de cardinal m.

(*i*) Montrer que $m \mid n$.

(*ii*) Montrer que
$$\left| \bigcup_{x \in X} \mathrm{st}(x) \right| \leqslant n - m + 1.$$

(*iii*) Montrer que, si $m \geqslant 2$, alors il existe au moins $m - 1$ éléments de G qui n'ont pas de point fixe.

(*iv*) Montrer qu'un groupe fini n'est jamais la réunion des conjugués d'un sous-groupe propre.

(*v*) En étudiant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, montrer que l'énoncé précédent est faux si G n'est pas fini.