TD 1

Ivan Lejeune *

29 janvier 2024

Exemple 0.1. On considère $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et son action sur $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 2$, la base standard de $\mathbb{K}^2$ est $\{e_1, e_2\}$. Alors, $G \cdot e_1 = \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ car

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in G \cdot e_1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot e_1 & \text{si } x \neq 0 \\ \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot e_1 & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Alors $G \cdot 0 = \{0\}$. L'action est donc transitive sur $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ et 0 est l'unique point fixe. De plus

$$G_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} b, d \in \mathbb{K} \\ d \neq 0 \end{array} \right\}$$

Cela implique $\mathbb{K}^2$ n'est pas homogène (l'action n'est pas transitive) et l'action n'est pas libre.

Définition 0.1. Soit $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ l'**espace projectif de dimension** $n-1$. C'est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^n$.
De manière équivalente, $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ est le quotient de $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \colon v' = \lambda v$$

Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X, alors $X/\sim$ est l'ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalence de $\sim$ dans X.
Si $x \in X$, sa classe d'équivalence notée $[x] \in X/\sim$ correspond à $\{x' \in X \mid x' \sim x\}$

G agit sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ par

$$A \cdot [v] = [Av] \quad \forall A \in G, v \in \mathbb{K}^n$$

Exercice 1. Considérer les actions suivantes :

(i) L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$;

(ii) L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$;

(iii) L'action de $\mathscr{D}_n$ sur μ_n ;

(iv) L'action de $\mathfrak{S}_n$ par conjugaison sur ses sous-groupes d'ordre 2.

Ces actions sont-elles libres ? Sont-elles transitives

Solution.

(i) Si $n > 2$, l'action n'est pas libre car

$$\mathsf{st}(n) = \mathfrak{S}_{n-1} < \mathfrak{S}_n$$

*Cours inspiré de M. Charlier et M. De Renzi

L'action est transitive car on a

$$i = (i\ j) \cdot j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Si $n \leq 2$, alors l'action est libre et transitive.

(ii) L'action est transitive car l'action de G sur $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ l'est. Donc

$$\forall v \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}, \exists A \in G \colon Ae_1 = v$$

Soit que

$$A \cdot [e_1] = [A \cdot e_1] = [v]$$

Il suffit de considérer le même A qu'avant (pour un choix quelconque d'un représentant v de $[v]$).
Il vient $G \cdot [e_1] = \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ et

$$G_{[e_1]} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, b, d \in \mathbb{K} \\ ad \neq 0 \end{array} \right\}$$

Donc l'action n'est pas libre

(iii)

Rappel 0.1. On a

$$R \cdot \zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} \zeta$$
$$S \cdot \zeta = \overline{\zeta}$$

Avec

$$R = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \end{pmatrix}$$
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_n &\to \mathfrak{S}_{\mu_n} \\ R^j &\mapsto \left[\zeta^k \mapsto e^{\frac{2j\pi i}{n}} \zeta^k\right] \\ R^j S &\mapsto \left[\zeta^k \mapsto e^{\frac{2j\pi i}{n}} \zeta^{-k}\right] \end{aligned}$$

L'action de $\mathscr{D}_n$ sur μ_n n'est pas libre car $S \in \mathsf{st}(1)$ et donc $S \cdot 1 = \overline{1} = 1$.
L'action est transitive car $\zeta^k = R^k \cdot 1 \quad \forall \zeta^k \in \mu_n$.

(iv) Si $H < \mathfrak{S}_n$ est un sous-groupe d'ordre 2, c'est que $H = \{\mathsf{Id}, \sigma\}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
On a donc $\sigma \in \mathsf{st}(\{1, \sigma\})$ pour σ d'ordre 2 car

$$\left\{\sigma 1 \sigma^{-1}, \sigma \sigma \sigma^{-1}\right\} = \{1, \sigma\}$$

Pour $\sigma = (i\ j)$ et $\phi \in \mathfrak{S}_n$ quelconque, on a

$$\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} = (\phi(i)\ \phi(j))$$

Donc $<(1\ 2)(3\ 4)> \notin \mathsf{orb}(<1\ 2>)$ pour $n \geq 4$.
En conclusion l'action n'est jamais libre, et elle n'est pas transitive pour $n \geq 4$.

Exercice 2. Soit $\|\_\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$ et soit 0_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\|Av\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. On appelle 0_n le **groupe orthogonal de dimension n**. Soit $S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ la **sphère de dimension $n-1$**. Montrer que O_n agit transitivement, mais pas librement sur S^{n-1} pour tout $n > 1$.