Espaces métriques, notions de topologie

Ivan Lejeune*

29 février 2024

1 Connexité

Remarque 1.1 Idée. Un espace topologique est **convexe** s'il est "en un seul morceau"

Exemple 1.1. $\mathbb{R}$ usuel est connexe,
$\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, en "deux morceaux" : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$
$X = [0,1] \cup [2,3]$ n'est pas connexe, en "deux morceaux"
$X = \{0\} \cup]0,1]$ est connexe, en "un seul morceau" : $X = [0,1]$

1.1 Introduction

On a envie de dire que X (espace topologique) est constitué de "deux morceaux" A et B si

$$X = A \cup B,$$
$$A \neq \varnothing, B \neq \varnothing,$$
$$A \cap B = \varnothing,$$
$$\overline{A} \cap B = \varnothing, A \cap \overline{B} = \varnothing$$

Si c'est la cas, alors nécessairement A et B sont des **fermés** de X :

$$A \subset \overline{A} \subset X \setminus B = A$$

Donc $A = \overline{A}$ et A est un fermé de X.
De même :

$$B \subset \overline{B} \subset X \setminus A = B$$

Donc $B = \overline{B}$ et B est un fermé de X.
$X = A \sqcup B$ est une union disjointe avec A et B fermés.
Alors,

$$\begin{cases} A = X \setminus B \\ B = X \setminus A \end{cases}$$

ouverts de X

Donc une décomposition topologique de X peut se voir comme :

$$X = A \sqcup (X \setminus A)$$

avec $A \neq \varnothing, A \neq X, A$ ouvert et fermé de X.

1.2 Espaces topologiques connexes

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Akrout

Definition 1.1. Un espace topologique X est **connexe** si X et $\varnothing$ sont les seuls ouverts et fermés de X. Une partie de $(X, \mathcal{T})$ est dite **connexe** si elle est connexe pour la topologie induite par $\mathcal{T}$.

Exemple 1.2. X muni de la topologie grossière est connexe.

Exemple 1.3. X muni de la topologie discrète est connexe si et seulement si X est vide ou à un seul élément.

Exemple 1.4. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ muni de la topologie usuelle.

Remarque 1.2. Les propositions suivantes sont équivalentes :

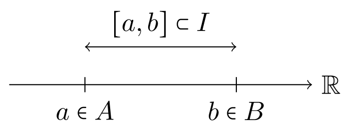
(i) $(X, \mathcal{T})$ est connexe

(ii) Il n'existe pas d'ouverts disjoints A et B de X tels que $X = A \cup B$

(iii) Il n'existe pas de fermés disjoints A et B de X tels que $X = A \sqcup B$

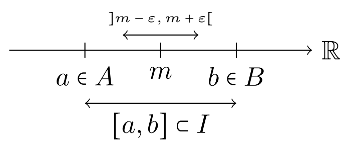
Théorème 1.1. $\mathbb{R}$ usuel ainsi que tous ses intervalles, est connexe.

Preuve. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si I est vide, c'est évident.
Si I est non vide, on suppose que I est la réunion de deux ouverts disjoints A et B de I avec $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$.
On cherche une contradiction.
Soit $a \in A, b \in B$.
Sans perte de généralité, on suppose que $a < b$.
Comme I est un intervalle, on a $[a, b] \subset I$.



Considérons $\{X \in [a, b] \mid x \in A\}$.
C'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car $a \in A$) et majorée par b.
Donc elle admet une borne supérieure $m = \sup\{x \in [a, b] \mid x \in A\}$.
Alors $m \in [a, b] \subset I$ donc $m \in A \cup B$.

- Si $m \in A$, alors A est voisinage de m donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset A$.
  Ceci contredit la définition de m comme borne supérieure de $\{x \in [a, b] \mid x \in A\}$.
- Si $m \in B$, alors B est voisinage de m donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset B$.
  Ceci contredit la définition de m comme borne supérieure de $\{x \in [a, b] \mid x \in A\}$.



Ceci contredit l'hypothèse que A et B sont disjoints.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle.
Alors il existe $a, a' \in A$ et $b \in \mathbb{R} \setminus A$ tels que $a < b < a'$.
Mais alors

$$A = \underbrace{A \cap [-\infty, b]}_{\text{ouvert} \neq \varnothing} \sqcup \underbrace{A \cap [b, +\infty]}_{\text{ouvert} \neq \varnothing}$$

Donc A n'est pas connexe.

Théorème 1.2. Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.1. $\mathbb{Q}$ usuel, est-il connexe ? Non, ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.
Il suffit de vérifier que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un point de séparation.

Théorème 1.3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.

Remarque 1.3. On considère $f : X \to \{0,1\}$. A quelle condition f est-elle continue ?
Les ouverts de $\{0,1\}$ discret sont $\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$.
Alors

$$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$
$$f^{-1}(\{0,1\}) = X$$

Une telle fonction est continue si et seulement si $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont ouverts de X.

Preuve.

($\Rightarrow$) Supposons que X est connexe.
Soit $f : X \to \{0,1\}$ continue.
Alors $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts de X.
Comme $f^{-1}(\{0\}) \sqcup f^{-1}(\{1\}) = X$ et X connexe, alors soit :
- $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$, donc f est constante égale à 1.
- $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$, donc f est constante égale à 0.

Donc f est constante.

($\Leftarrow$) Supposons que toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.
Supposons que X n'est pas connexe.
Alors il existe A et B ouverts de X tels que $X = A \sqcup B$ avec $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$.
Considérons l'application caractéristique

$$\chi : X \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}$$

χ est continue et non constante, donc contradiction.

Proposition 1.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors :

1) Si A, B sont deux parties connexes de X et $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A \cup B$ est connexe.
2) Si A, B sont deux parties de X telles que

$$A \subset B \subset \overline{A}$$
$$A \text{ connexe}$$

Alors B est connexe.
3) En particulier :
A connexe $\Rightarrow \overline{A}$ connexe pour toute partie A de X.

Preuve.

1) On suppose A, B connexes et $A \cap B \neq \varnothing$.
Soit $f : A \cup B \to \{0,1\}$ continue.

Alors $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues.

Or A et B sont connexes, donc $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont constantes.

Comme $A \cap B \neq \varnothing$, alors $f_{|A}(A \cap B) = f_{|B}(A \cap B)$.

Donc $f_{|A \cup B}$ est constante.

Donc $A \cup B$ est connexe.

2) On suppose $A \subset B \subset \overline{A}$ et A connexe.

Soit $f \colon B \to \{0, 1\}$ continue.

Alors $f_{|A}$ est continue donc constante car A est connexe.

Donc $f_{|B}$ est constante :

Soit $x \in B$. Soit $(x_n)_n$ une suite de A qui converge vers x.

Alors $\underbrace{f(x_n)}_{\text{constante}} \to f(x)$ par continuité de f.

Donc $f(x)$ est constante.