

Planche TD 0

Ivan Lejeune*

31 janvier 2024

Exercice. Soit X un ensemble et δ la distance discrète sur cet ensemble.

1. Vérifier que δ est une distance sur X .
2. Déterminer les boules ouvertes et fermées de (X, δ) . Puis déterminer la topologie \mathcal{T}_δ associée à δ .

Solution. Soient $x, y, z \in X$

1. On rappelle

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

- (i) $\delta(x, y) \geq 0$ par définition
- (ii) $\delta(x, y) = 0 \iff x = y$ par définition
- (iii) Si $x \neq y$ alors $y \neq x$ donc $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ par définition
- (iv) Si $\delta(x, y) + \delta(y, z) = 0$ alors $x = y = z$ et $\delta(x, y) + \delta(y, z) \geq \delta(x, z)$.
Sinon $\delta(x, y) + \delta(y, z) \geq 1 \geq \delta(x, z)$.

δ vérifie les quatre propriétés donc c'est une distance sur X .

2. Pour $\varepsilon = 0$ on a

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon[&= \emptyset \\ B(x, \varepsilon] &= \{x\} \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon[&= \{x\} \\ B(x, \varepsilon] &= \{x\} \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = 1$ on a

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon[&= \{x\} \\ B(x, \varepsilon] &= X \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 1$ on a

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon[&= X \\ B(x, \varepsilon] &= X \end{aligned}$$

La topologie \mathcal{T}_δ associée à δ est engendrée par l'ensemble des boules ouvertes de X . Comme on vient de le voir, il existe une boule ouverte associée à chaque élément $x \in X$. Ainsi on a

$$\mathcal{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$$

Exercice. Soit E un espace vectoriel et \mathcal{N} une norme sur E , montrer que $d(x, y) = \mathcal{N}(y - x)$ est une distance sur E .

Solution. Soient $x, y \in E$

- (i) $d(x, y) = \mathcal{N}(y - x) \geq 0$ par définition d'une norme.

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Akrouf

- (ii) $d(x, y) = 0 \iff \mathcal{N}(y - x) = 0 \iff x = y$ par définition d'une norme.
- (iii) $d(x, y) = \mathcal{N}(y - x) = |-1| \mathcal{N}(x - y) = d(y, x)$
- (iv) Soit $z \in X$, on a

$$\begin{aligned}
 d(x, z) &= \mathcal{N}(z - x) \\
 &= \mathcal{N}(z - x + y - y) \\
 &= \mathcal{N}((y - x) + (z - y)) \\
 &\leq \mathcal{N}(y - x) + \mathcal{N}(z - y) \\
 &\leq d(x, y) + d(y, z)
 \end{aligned}$$

d vérifie les quatre propriétés donc c'est une distance sur X .

Exercice. On considère les normes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\
 \mathcal{N}_\infty(x_1, \dots, x_n) &= \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|)
 \end{aligned}$$

Montrer qu'elles sont des normes sur \mathbb{R}^n et dessiner leurs boules unités lorsque $n = 2$

Solution. Pour \mathcal{N}_1 on a

- (i) On notera $x := (x_1, \dots, x_n)$ et $I = \{1, \dots, n\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(x) = 0 &\implies \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \\
 &\implies \forall i \in I, x_i = 0
 \end{aligned}$$

Dans l'autre sens on a aussi

$$\begin{aligned}
 \forall i \in I, x_i = 0 &\implies \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \\
 &\implies \mathcal{N}_1(x) = 0
 \end{aligned}$$

- (ii) On considère $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ avec $\lambda > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(\lambda x) &= \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| \\
 &= \sum_{i=1}^n |\lambda| |x_i| \\
 &= |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| \\
 &= |\lambda| \mathcal{N}_1(x)
 \end{aligned}$$

- (iii) On considère $y := (y_1, \dots, y_n)$. On a alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(x + y) &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |y_i| \\
 &\leq \mathcal{N}_1(x) + \mathcal{N}_1(y)
 \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{N}_1 est bien une norme.

Pour \mathcal{N}_∞ on a

(i) On notera $x := (x_1, \dots, x_n)$ et $I = \{1, \dots, n\}$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty(x) = 0 &\implies \max(|x_i|) = 0 \\ &\implies \forall i \in I, x_i = 0\end{aligned}$$

Dans l'autre sens on a aussi

$$\begin{aligned}\forall i \in I, x_i = 0 &\implies \max(|x_i|) = 0 \\ &\implies \mathcal{N}_\infty(x) = 0\end{aligned}$$

(ii) On considère $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ avec $\lambda > 0$. On a alors

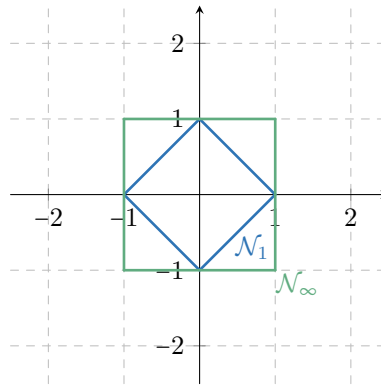
$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty(\lambda x) &= \max(|\lambda x_i|) \\ &= |\lambda| \max(|x_i|) \\ &= |\lambda| \mathcal{N}_\infty(x)\end{aligned}$$

(iii) On considère $y := (y_1, \dots, y_n)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty(x + y) &= \max(|x_i + y_i|) \\ &\leq \max(|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max(|x_i|) + \max(|y_i|) \\ &\leq \mathcal{N}_\infty(x) + \mathcal{N}_\infty(y)\end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{N}_∞ est bien une norme.

Les boules unités associées sont :



Exercice. Soit (X, d) un espace métrique et Dubai = D un point de X . On considère

$$d_{FE}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ d(x, D) + d(y, D) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que d_{FE} est une distance sur X
2. On suppose que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, \text{euclidien})$ et $D = 0$. Pour $x \in X$, dessiner les boules ouvertes centrées en x .
3. Montrer que pour $x \neq D$, le singleton $\{x\}$ est ouvert.

Solution.

1. Il faut vérifier les 4 conditions d'une distance :

(i) $d_{FE}(x, y) \geq 0$ car $d(x, y) \geq 0$

(ii) On a $x = y \implies d_{FE}(x, y) = 0$ par définition.

Si $d_{FE}(x, y) = 0$ alors on a $x = y$ ou $d(x, D) + d(y, D) = 0$.

Comme une distance est positive, on a $d(x, D) = d(y, D) = 0$ donc $x = y$.

(iii) Si $x = y$, on a $d_{FE}(x, y) = d_{FE}(y, x)$. Dans le cas contraire on a

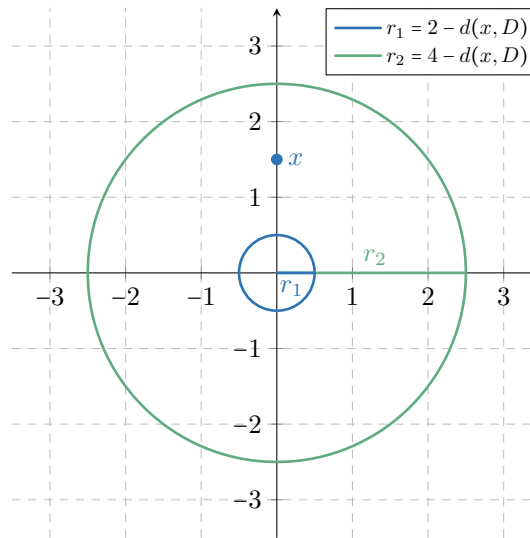
$$\begin{aligned} d_{FE}(x, y) &= d_{FE}(x, D) + d_{FE}(y, D) \\ &= d_{FE}(y, D) + d_{FE}(x, D) \\ &= d_{FE}(y, x) \end{aligned}$$

(iv) Soit $z \in X$. Si $x = z$, cela est évident. Dans le cas contraire on a

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \mathcal{N}(z - x) \\ &= \mathcal{N}(z - x + y - y) \\ &= \mathcal{N}((y - x) + (z - y)) \\ &\leq \mathcal{N}(y - x) + \mathcal{N}(z - y) \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

2. On fixe $x = (0, 1.5)$ et on fait varier $\varepsilon \in \{1, 2, 4\}$.

Pour $\varepsilon = 1$ on a $B(x, \varepsilon] = \{x\}$



3. Comme on vient de le voir, pour $x \neq D$ on peut choisir $0 \leq \varepsilon < d(x, D)$ et on a alors $B(x, \varepsilon] = \{x\} \subset \{x\}$. Soit, que $\{x\}$ est ouvert.