Planche TD 2

Ivan Lejeune

6 mars 2024

Exercice 2. Soit X un espace topologique et A, B deux parties de X.

1. Vérifier que $A \subset B$ implique $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. Etablir les égalités
$$C_X(\overline{A}) = \overbrace{C_X(A)}^{\circ},$$
$$C_X(\mathring{A}) = \overline{C_X(A)},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$
3. Etablir les inclusions
$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}.$$
Puis construire des exemples où ces inclusions sont strictes.

Exercice 3. Dans un espace métrique X, notons B la boule ouverte de centre a et de rayon r et B' la boule fermée correspondante.

1. Rappeler pourquoi on a toujours $\mathring{B} = B$ et $\overline{B'} = B'$.
2. Montrer que $B \subset \mathring{B}'$ et $\overline{B} \subset B'$. Trouver un espace métrique où ces inclusions sont strictes.
3. Montrer que si X est un espace normé, les inclusions ci-dessus sont toujours des égalités.

Solution.

1. La première égalité est vraie car les boules ouvertes sont des ouverts.
La deuxieme est vraie care les boules fermées sont fermées
2. La première égalité est vraie car B est un ouvert contenu dans B' donc par définition de $\mathring{B}'$ on a $B \subset \mathring{B}'$
La deuxième est vraie car $\overline{B} \subset B'$, B' est un fermé et $B \subset B'$ donc par définition de $\overline{B}$, on a $\overline{B} \subset B'$.
Un espace topologique où les inclusions sont strictes serait le suivant :
Soit $X = \{a, b\}$ et d la distance discrète. Alors
$$B(a, 1[= \{a\}$$
$$\overline{B(a, 1[} = \overline{\{a\}} = \{a\}$$
$$B(a, 1] = X = \{a, b\}$$
$$\overbrace{B(a, 1]}^{\circ} = X = \{a, b\}$$
3. Soit $x \in B(a, r]$.

Soit V un voisinage de x et $\rho > 0$ tel que

$$x \in B(x, \rho[\subset V$$

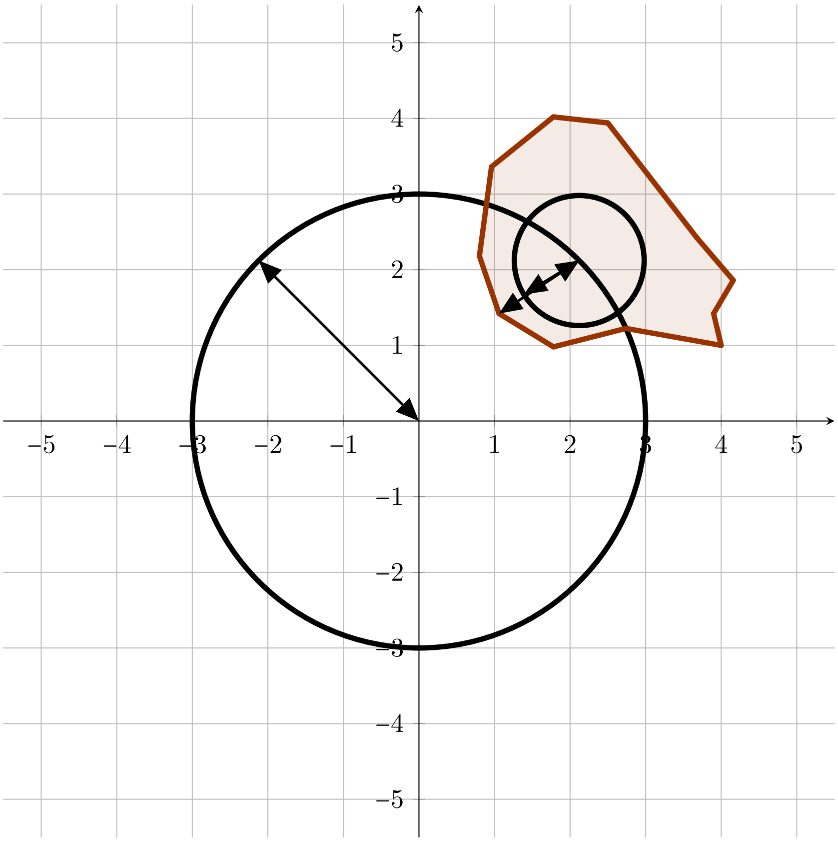
On peut supposer $p < r$. Alors en posant

$$\lambda := 1 - \frac{\rho}{2r}$$

on a

$$a + \lambda(x - a) \in B(a, r[\cap B(x, \rho[$$

Donc $V \cap B(a, r[\neq \varnothing$.



On veut choisir $\lambda < 1$ tel que

$$\frac{\|x - (a + \lambda(x - a))\|}{(1 - \lambda)(x - a)} < \rho$$

Alors $x \in \overline{B(a, r[}$ car

$$x = \lim_{n \to +\infty} \left(a + \left(1 - \frac{1}{n} \right) (x - a) \right)$$

et cet element appartient à $B(a, r]$ puisque il est $< r$.

Solution 4. Il faut montrer que

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq k \cdot d(x, y)$$

Cela ressemble fort à la seconde inégalité triangulaire qui nous dit :

$$|d(x, a) - d(a, y)| \leq d(x, y)$$

Si $A = \{a\}$, ceci dit que d_A est 1-lipschitzienne. Aurait-on dans le cas général

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x,y) \quad ?$$

Cela revient à prouver

$$-d(x,y) \leq d_A(x) - d_A(y) \leq d(x,y)$$

Soit $a \in A$, alors

$$d(x,a) - d(y,a) \leq d(x,y)$$

et donc

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$$

d'où

$$d_A(x) - d(x,y) \leq d(y,a)$$

pour tout $a \in A$ et donc la fonction est 1-lipschitzienne.
Dans des espaces métriques, f est continue en $x \in X$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de X qui convergent vers $x \in X$, on a $f(x_n) \to f(x)$.