

# Espaces métriques, notions de topologie

Ivan Lejeune\*

7 février 2024

## 1 Espaces métriques

**Definition 1.1.** Un **espace métrique** est un ensemble  $X$  munit d'une application

$$d := X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

tel que pour tout  $x, y \in X$  on a

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  ;
- (ii)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  (séparation) ;
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie) ;
- (iv)  $\forall z \in X, d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (inégalité triangulaire) ;

On appelle  $d$  la **distance** (ou métrique) sur  $X$ .

**Exemple 1.1.** Soit  $X$  un ensemble, on considère

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

C'est une distance, appelée la distance discrète, qu'on verra en TD.

**Definition 1.2.** Une **norme** sur  $E$  est une application

$$\mathcal{N} := E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que pour tout  $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ , on a

- (i)  $\mathcal{N}(x) = 0 \iff x = 0$  ;
- (ii)  $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$  ;
- (iii)  $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$  ;

Pour  $E = \mathbb{R}$ -ev, on a  $(E, \mathcal{N})$  **espace vectoriel normé**.

**Exercice 1.1.** Montrer que  $d(x, y) = \mathcal{N}(y - x)$  est une distance sur  $E$ .

**Remarque 1.1.** Si  $(E, \mathcal{N})$  est un evn, alors  $(E, \mathcal{N})$  est un espace métrique

**Exercice 1.2.** Montrer que evn  $\implies$  espace métrique pour

- $(\mathbb{R}^n \text{ euclidiens})$

---

\*Cours inspiré de M. Charlier et M. Akrouit

- ( $\{ \text{fonctions bornées sur } [0, 1] \}$ )

$$\sim \|f\|_\infty = \sup |f|$$

$$\sim \|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } f \text{ continue bornée}$$

**Exemple 1.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $A \subset X$ . On a  $(A, d|_{A \times A})$  espace métrique.

**Exercice 1.3.** Le montrer pour  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

**Rappel.**

$$S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

**Definition 1.3.** Pour  $x \in X$  et  $\varepsilon \geq 0$  :

- La **boule ouverte** de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  est

$$B(x, \varepsilon[ = \{y \in X, d(x, y) < \varepsilon\}$$

- La **boule fermée** de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$  est

$$B(x, \varepsilon] = \{y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

**Exemple 1.3.** Pour  $X = \mathbb{R}$  et  $d(x, y) = |x - y|$ , on a

$$B(x, \varepsilon[ = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

$$B(x, \varepsilon] = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

**Definition 1.4.** Soit  $X$  un ensemble et  $U$  une partie de  $X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $U$  est un ouvert de  $X$
- (ii) Pour tout  $x \in U$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$B(x, \varepsilon[ \subset U$$

**Exemple 1.4.** Une boule ouverte est un ouvert.

**Preuve.** Laissée en exercice.

**Remarque 1.2.** Si  $(X, d)$  est un espace métrique alors

1.  $\emptyset$  et  $X$  des ouverts ;
2. toute intersection finie d'ouverts de  $X$  est un ouvert de  $X$  ;
3. toute union quelconque d'ouverts de  $X$  est un ouvert de  $X$ .

**Preuve.** Il suffit de vérifier les 3 propriétés :

1. On a

$$\forall x \in X, B(x, 1[ \subset X \quad \text{et}$$

$\forall x \in \emptyset$ , la propriété est toujours vrai

Donc (1) est vérifié.

2. Soient  $U_1, \dots, U_n$  ouverts. On pose

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i$$

Soit  $x \in U$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a  $x \in U_i$  ouvert donc il existe  $\varepsilon_i > 0$  tel que

$$B(x, \varepsilon_i[ \subset U_i$$

On pose  $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a alors

$$B(x, \varepsilon[ \subset B(x, \varepsilon_i[ \subset U_i$$

Et donc

$$B(x, \varepsilon[ \subset U$$

Soit que  $U$  est ouvert, et donc (2) est vérifié.

3. Soient  $U_1, \dots, U_n$  ouverts. On pose

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

Soit  $x \in U$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que pour  $x \in U_i$  ouvert, il existe  $\varepsilon_i > 0$  tel que

$$B(x, \varepsilon[ \subset U_i \subset U$$

Soit que  $U$  est ouvert, et donc (3) est vérifié.

**Remarque 1.3.** On note

$$\mathcal{T}_d = \{U \in \mathcal{P}(X), U \text{ est ouvert pour } d\}$$

## 2 Espaces topologiques

On considère  $X$  un ensemble quelconque.

**Definition 2.1.** On dit que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  est une **topologie** sur  $X$  si :

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{T}$  et  $X \in \mathcal{T}$
- (ii)  $\mathcal{T}$  est stable par intersection finie
- (iii)  $\mathcal{T}$  est stable par union quelconque

Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont dit **ouverts**.

**Exemple 2.1.** Si  $(X, d)$  est métrique,  $\mathcal{T}_d$  est une topologie.

**Exemple 2.2.** Pour  $X$  est un ensemble, les ensembles suivants sont des topologies :

- $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$  appelée topologie discrète ;
- $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$  appelée topologie grossière ;
- $\mathcal{T}_d$ , la topologie associée à la métrique  $d$  ;
- Si  $X = \{a, b\}$  on a aussi la topologie

$$\mathcal{T} = \{\{a, b\}, \{a\}, \emptyset\}$$

A partir de maintenant, on considère  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique avec  $\mathcal{T}$  l'ensemble des ouverts de  $X$ .

**Definition 2.2.** Une partie  $F \subset X$  est dite **fermée** si  $X \setminus F$  est **ouvert**

**Exemple 2.3.** Pour  $(X, d)$  un espace métrique, on a  $B(x, r]$  fermée

**Preuve.** Laissée en exercice.

**Remarque 2.1.** On n'a pas  $F$  non ouvert  $\implies F$  fermé.

**Exemple 2.4.** Pour  $I = [0, 1[ \subset \mathbb{R}$ , on a

1.  $I$  n'est pas ouvert (problème en 0)
2.  $I$  n'est pas fermé (problème en 1)

**Proposition 2.1.** Les assertions suivantes sont vraies.

1.  $\emptyset$  et  $X$  sont fermés
2. Une union finie de fermés est fermé
3. Une intersection quelconque de fermés est fermé

**Rappel.**

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i$$
$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$$

**Remarque 2.2.** Une topologie peut-être définie à partir de ses fermés (au lieu de ses ouverts).

## 2.1 Adhérence, intérieur (version topologique)

**Proposition - Définition 2.1.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $A \subset X$ .

1. Il existe un plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) noté  $\overset{\circ}{A}$  tel que  $\overset{\circ}{A} \subset A$   
 $\overset{\circ}{A}$  est appelé **intérieur** de  $A$
2. Il existe un plus petit fermé (au sens de l'inclusion) noté  $\overline{A}$  tel que  $A \subset \overline{A}$   
 $\overline{A}$  est appelé **adhérence** de  $A$

**Proposition 2.2.** On a

1.  $x \in \overset{\circ}{A} \iff$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon[ \subset A$
2.  $x \in \overline{A} \iff$  pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $B(x, \varepsilon[ \cap A \neq \emptyset$

**Preuve.** Pour le 1., on commence par le sens direct :

$\implies$  On a  $x \in \overset{\circ}{A}$  ouvert donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$B(x, \varepsilon[ \subset \overset{\circ}{A} \stackrel{\text{def}}{\subset} A$$

$\Leftarrow$  Par hypothèse, on a  $B(x, \varepsilon[ \subset A$  un ouvert de  $A$  pour  $\varepsilon > 0$  donc

$$x \in B(x, \varepsilon[ \subset \overset{\circ}{A}$$

Pour le 2. cela revient à montrer que

$$x \in \overline{A} \iff \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x, \varepsilon[ \subset X \setminus A$$
$$x \in X \setminus \overline{A} \iff x \in \overset{\circ}{X \setminus A}$$

Il suffit de montrer que

$$X \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{X \setminus A}$$

**Lemme 2.1.** Soit  $(X, T)$  espace topologique et  $A \subset X$ . Alors

$$X \setminus \overline{A} = \overline{X \setminus A}$$

**Preuve.** On démontre le lemme pour démontrer la proposition précédente

$\subset \overline{A}$  fermé,  $X \setminus \overline{A}$  ouvert,  $A \subset \overline{A}$  donc

$$X \setminus A \supset X \setminus \overline{A}$$

D'où

$$X \setminus \overline{A} \subset \overline{X \setminus A}$$

$\supset X \setminus \left( \overline{X \setminus A} \right)$  fermé donc

$$X \setminus \left( \overline{X \setminus A} \right) \supset X \setminus (X \setminus A) = A$$

donc

$$X \setminus \left( \overline{X \setminus A} \right) \supset \overline{A} = X \setminus (X \setminus \overline{A})$$

donc

$$\overline{X \setminus A} \subset X \setminus \overline{A}$$

Donc 2. est vérifié

**Remarque 2.3.** Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$ . On a

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$$

**Exercice 2.1.** Montrer que

1.  $A$  ouvert  $\iff A = \overset{\circ}{A}$
2.  $A$  fermé  $\iff A = \overline{A}$

### 3 Applications continues

**Definition 3.1.** Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques.

Une application  $f: X \rightarrow Y$  est **continue** si et seulement si pour tout  $U$  ouvert dans  $Y$ ,  $f^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$ .

**Remarque 3.1.** On a  $f^{-1}(Y \setminus U) = X - f^{-1}(U)$ .

$f$  est continue si et seulement si pour tout fermé  $F \subset Y$ , on a  $f^{-1}(F)$  fermé.

#### 3.1 Voisinages

**Definition 3.2.** Soit  $X$  un espace topologique,  $x \in X$ .  $N \subset X$  est un **voisinage** de  $x$  si il existe  $U$  ouvert avec  $x \in U \subset N$ .

**Exemple 3.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique avec  $x \in X$  et  $\varepsilon > 0$ .

On a  $B(x, \varepsilon[$  et  $B(x, \varepsilon]$  voisinages de  $x$

**Exemple 3.2.**  $X$  est voisinage de chaque  $x \in X$

**Definition 3.3.** Soient  $X, Y$  des espaces topologiques et  $f: X \rightarrow Y$ . Soit  $x \in X$ . On dit que  $f$  est **continue** en  $x$  si pour tout voisinage  $N$  de  $f(x)$ , on a  $f^{-1}(N)$  voisinage de  $x$ .

**Remarque 3.2.**  $f$  est continue en  $x$  si et seulement si, pour tout voisinage  $N$  de  $f(x)$ , il existe un voisinage  $M$  de  $x$  tel que  $f(M) \subset N$ .

**Proposition 3.1.** Soit  $f$  une application de  $X \rightarrow Y$ .  $f$  est continue si et seulement si pour tout  $x \in X$ ,  $f$  est continue en  $x$ .

**Preuve.**

$\implies$  Soit  $x \in X$  et  $N$  un voisinage de  $f(x)$ . Il existe  $V$  ouvert de  $Y$  avec  $f(x) \in V \subset N$ . En conséquence, on a  $x \in \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{ouvert}} \subset f^{-1}(N)$ .

Pour l'autre sens, commençons par démontrer le lemme nécessaire.

**Lemme 3.1.** Soit  $X$  un espace topologique et  $U \subset X$ . On a  $U$  ouvert si et seulement si

$$\forall x \in U, U \in \mathcal{V}(x)$$

avec  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble des voisinages de  $x$

**Preuve.**

$\implies$  Soit  $x \in U$ , il existe un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $x \in U$  et  $U \subset X$

$\impliedby$  Soit  $x \in U$ , il existe un **ouvert**  $V_x$  de  $X$  tel que  $x \in V_x \subset U$ . Ainsi

$$U = \bigcup_{x \in U} \underbrace{V_x}_{\text{ouvert}}$$

Soit  $U \subset Y$  ouvert, il faut montrer que  $f^{-1}(U)$  est ouvert.

Si  $x \in f^{-1}(U)$ , alors  $f(x) \in U$  et donc  $U \in \mathcal{V}(f(x))$ .

donc  $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$ .

D'où pour tout  $x \in f^{-1}(U)$ ,  $f^{-1}(U)$  est voisinage de  $x$ .

$\impliedby$  D'après le lemme,  $f^{-1}(U)$  est ouvert

Cas de  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  avec  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  des espaces métriques.

**Proposition 3.2.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  continue si et seulement si

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } d_X(x, y) \leq \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Preuve.**

$\impliedby$  Soit  $x \in X, \varepsilon > 0$ . On a  $B(f(x), \varepsilon[$  ouvert.

Donc  $f$  continue,  $f^{-1}(B)$  ouvert et  $x \in f^{-1}(B)$ .

Cela revient à dire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$B(x, \delta[ \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon[)$$

$\implies$  Soit  $V \subset Y$  ouvert. Montrons que  $f^{-1}$  est ouvert.

Soit  $x \in f^{-1}(V), f(x) \in V$  ouvert. Alors il existe  $\varepsilon_0$  tel que

$$B(f(x), \varepsilon_0[ \subset V$$

Par hypothèse, il existe alors  $\delta$  tel que

$$x \in B(x, \delta[ \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon_0[) \subset f^{-1}(V)$$

En conclusion,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de tous ses points, donc  $f^{-1}(V)$  est ouvert.

**Definition 3.4.** Soient  $X, Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f: X \rightarrow Y$  est un **homéomorphisme** si

- (i)  $f$  continue
- (ii)  $f$  bijective (et donc  $f^{-1}$  existe)
- (iii)  $f^{-1}$  continue

**Remarque 3.3.** On n'a pas  $(i) + (ii) \implies (iii)$ .

**Exemple 3.3.** On prend  $X = [0, 1] \cup ]2, 3]$  et  $Y = [0, 2]$ . Muni de la distance

$$d(x, y) = |x - y|$$

**Definition 3.5.** Soit  $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ . On dit que  $f$  est une **isométrie** si  $f$  est bijective et

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

**Remarque 3.4.** Une isométrie est un homéomorphisme.