Chapitre 1 - Espaces Métriques

Ivan Lejeune*

27 mars 2024

1 Espaces métriques

Definition 1.1. Soit (X,d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset X$ sera dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,m \geq N,\ d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.

- C'est une notion purement métrique.
- intuitivement : "x_n et x_m se rapprochent de plus en plus à mesure que n et m deviennent grands".

2 Un premier lot de résultats utiles

Proposition 2.1.

1. Si d et δ sont deux distances fortement équivalentes sur le même ensemble X, alors (X,d) et (X,δ) ont les **mêmes** suites de Cauchy.
2. Si $f\colon (X,d) \to (Y,\delta)$ est une application uniformément continue, alors f envoie les suites de Cauchy de X sur les suites de Cauchy de Y.
3. Toute suite de Cauchy est bornée.
4. Toute suite convergente est de Cauchy.
5. Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge.

Preuve.

1. Il existe $\alpha,\beta > 0$ tels que $\alpha d(x,y) \leq \delta(x,y) \leq \beta d(x,y)$.
   Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X,d).
   $$\delta(x_n,x_m) \leq \beta d(x_n,x_m)$$
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n,m \geq N$, $d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{\beta}$.
   Donc $\forall n,m \geq N$, $\delta(x_n,x_m) \leq \beta d(x_n,x_m) < \varepsilon$.
   La réciproque est analogue.
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X,d) et $f\colon (X,d) \to (Y,\delta)$ uniformément continue.
   On pose $y_n \coloneqq f(x_n)$ et on veut montrer que (y_n) est de Cauchy dans (Y,δ).
   Comme f est uniformément continue, on a :
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x,x' \in X,\ d(x,x') < \alpha \Rightarrow \delta(f(x),f(x')) < \varepsilon.$$

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Gieu

Comme (x_n) est de Cauchy, on a :

$$\forall \alpha > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ d(x_n, x_m) < \alpha.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer

$$\delta(y_n, y_m) = \delta(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Or $\delta(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ vrai dès que $d(x_n, x_m) < \alpha$ et donc dès que $n, m \geq N$.

3. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d). Prenons $\varepsilon = 1$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < 1$.
   En particulier, pour $n \geq N$, $d(x_n, \underset{a}{x_N}) < 1$.
   Prenons $R := \max\{d(x_0, a), \ldots, d(x_{N-1}, a), 1\}$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, a) \leq R$.
   Donc $(x_n) \subset B(a, R)$, ce qui montre que (x_n) est bornée.
4. Soit (x_n) une suite convergente dans (X, d). Alors

$$d(x_n, a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Montrons que (x_n) est de Cauchy :
Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, a)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(a, x_m)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

pour n, m assez grands.

> **Lemme 2.1 cf prochain TD.** Soit (x_n) une suite dans (X, d). Les assertions suivantes sont équivalentes :
>
> (i) (x_n) admet une sous-suite convergente vers $a \in X$.
> (ii) a est valeur d'adhérence de (x_n).
> (iii) $\forall V \in \mathcal{V}_a,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \geq m,\ x_n \in V$.
> (iv) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \geq m,\ d(a, x_n) < \varepsilon$.

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (X, d) qui admet une valeur d'adhérence $a \in X$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall m, p \in \mathbb{N},\ d(x_m, x_p) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a les assertions suivantes :

- (x_n) de Cauchy donc $\forall m, p \geq N,\ d(x_m, x_p) < \frac{\varepsilon}{2}$.
- a est une valeur d'adhérence donc si on fixe $m \in \mathbb{N},\ \exists n \geq m,\ d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, pour $m \in \mathbb{N}$, on a

$$d(a, x_m) \leq d(a, x_n) d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$.

Remarque 2.1. Il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas :
On considère Héron d'Alexandrie qui a donné une suite de Cauchy qui ne converge pas :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}$$

Suite dans $\mathbb{Q}$.
(x_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais ne converge pas.
(x_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge vers $\sqrt{2}$.

Definition 2.1. Un espace métrique (X, d) sera dit complet si chacune de ses suites de Cauchy converge (dans X).

Exemple 2.1. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Proposition 2.2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

Preuve. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Elle est donc bornée.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence $a \in \mathbb{R}$.
Donc, (x_n) admet une sous-suite convergente vers a.
Alors $(x_n) \subset [\alpha, \beta]$ compact.

3 Complétude et Produit

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On considère

$$z = (x, y) \in Z = X \times Y$$
$$z' = (x', y') \in Z$$

Notation 3.1. On notera
$$\mathcal{D}_\infty(z, z') \coloneqq \max\{d(x, x'), \delta(y, y')\}$$

Exercice 3.1. Montrer que $\mathcal{D}_\infty$ est une distance sur Z.

"la" distance produit. On note aussi $(Z, \mathcal{D}_\infty)$ "l" espace métrique produit.
Pourquoi les "·" ? On aurait pu prendre

$$\mathcal{D}_p(z, z') \coloneqq (d(x, x')^p + \delta(y, y')^p)^{\frac{1}{p}}$$

pour $p \geq 1$. $\mathcal{D}_p$ est une distance équivalente à $\mathcal{D}_\infty$.
Elles donnent la **même** topologie : la topologie produit.

Proposition 3.1. Si (x_n) une suite dans X, (y_n) une suite dans Y et $(z_n) = (x_n, y_n)$ une suite dans Z.
Alors, (z_n) est de Cauchy dans Z si et seulement si (x_n) et (y_n) sont de Cauchy dans X et Y respectivement.

Preuve. $\Rightarrow$ $\mathcal{D}_\infty(z_n, z_m) \leq \max\{d(x_n, x_m) + \delta(y_n, y_m)\}$.

$\Leftarrow$

$$\begin{cases} \dot{(}x_n, x_m) < \mathcal{D}_\infty(z_n, z_m) \\ \delta(y_n, y_m) < \mathcal{D}_\infty(z_n, z_m) \end{cases}$$

Corollaire 3.1. $(Z, \mathcal{D}_\infty)$ est complet si et seulement si (X, d) et (Y, δ) sont complets.

Corollaire 3.2. $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ est complet, et

$$(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty) = (\mathbb{R}, |\cdot|)^n$$

4 Complétude et Sous-espaces

Notation 4.1. On notera (A, d_A) un sous-espace de (X, d).

Remarque 4.1. $(a_n) \subset A$ est une suite de Cauchy dans (A, d_A) si et seulement si (a_n) est de Cauchy dans (X, d).

Proposition 4.1. Soit $A \subset (X, d)$ muni de la distance induite d_A. Alors :

1. (A, d_A) complet $\Rightarrow A$ fermé dans (X, d).
2. Si A est fermé dans (X, d) et (X, d) complet, alors (A, d_A) est complet.
3. Si A est compact dans (X, d), alors (A, d_A) est complet.

Preuve.

1. Soit $x \in \overline{A}$. Il existe $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.
   Comme (a_n) est convergente dans (A, d_A), elle est de Cauchy dans (A, d_A).
   Donc, (a_n) converge dans (A, d_A).
2. On suppose que A est fermé dans (X, d) et (X, d) complet.
   Soit (a_n) une suite de Cauchy dans (A, d_A). Comme (a_n) est de Cauchy dans (X, d), elle converge dans (X, d).
   X complet $\Rightarrow (a_n)$ converge vers $x \in X$.
   Comme A est fermé, $x \in A$.
   (a_n) converge dans (A, d_A). (A, d_A) complet.
3. On suppose que A est compact dans (X, d).
   Soit (a_n) une suite de Cauchy dans (A, d_A).
   Comme A est compact, (a_n) admet une valeur d'adhérence $x \in A$.
   Comme A compact dans un séparé, A est fermé. Donc $x \in A$.
   Donc (a_n) converge dans (A, d_A). (A, d_A) complet.

5 Exemples fondamentaux

5.1 $f^\infty(X)$

On considère X un ensemble et $f^\infty(X) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On a $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Proposition 5.1. $(f^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Remarque 5.1. Si $X = \mathbb{N}$, alors $f^\infty(X) = \ell^\infty - - - l^\infty$.