Planche TD 0

Ivan Lejeune*

11 février 2024

Exercice (Distance discrète). Soit X un ensemble et δ la distance discrète sur cet ensemble.

1. Vérifier que δ est une distance sur X.
2. Déterminer les boules ouvertes et fermées de (X,δ). Puis déterminer la topologie $\mathcal{T}_\delta$ associée à δ.

Solution. Soient $x, y, z \in X$

1. On rappelle
$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$
   (i) $\delta(x,y) \geq 0$ par définition
   (ii) $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$ par définition
   (iii) Si $x \neq y$ alors $y \neq x$ donc $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ par définition
   (iv) Si $\delta(x,y) + \delta(y,z) = 0$ alors $x = y = z$ et $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z)$.
   Sinon $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq 1 \geq \delta(x,z)$.

   δ vérifie les quatre propriétés donc c'est une distance sur X.
2. Pour $\varepsilon = 0$ on a
$$B(x,\varepsilon[= \varnothing$$
$$B(x,\varepsilon] = \{x\}$$
   Pour $\varepsilon \in]0,1[$ on a
$$B(x,\varepsilon[= \{x\}$$
$$B(x,\varepsilon] = \{x\}$$
   Pour $\varepsilon = 1$ on a
$$B(x,\varepsilon[= \{x\}$$
$$B(x,\varepsilon] = X$$
   Pour $\varepsilon > 1$ on a
$$B(x,\varepsilon[= X$$
$$B(x,\varepsilon] = X$$
   La topologie $\mathcal{T}_\delta$ associée à δ est engendrée par l'ensemble des boules ouvertes de X. Comme on vient de le voir, il existe une boule ouverte associée à chaque élément $x \in X$. Ainsi on a
$$\mathcal{T}_\delta = \mathscr{P}(X)$$

Exercice (Distance et normes). Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{N}$ une norme sur E, montrer que $d(x,y) = \mathcal{N}(y-x)$ est une distance sur E.

Solution. Soient $x, y \in E$

(i) $d(x,y) = \mathcal{N}(y-x) \geq 0$ par définition d'une norme.

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Akrout

(ii) $d(x,y) = 0 \iff \mathcal{N}(y-x) = 0 \iff x = y$ par définition d'une norme.

(iii) $d(x,y) = \mathcal{N}(y-x) = |-1|\mathcal{N}(x-y) = d(y,x)$

(iv) Soit $z \in X$, on a

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \mathcal{N}(z-x) \\ &= \mathcal{N}(z-x+y-y) \\ &= \mathcal{N}((y-x)+(z-y)) \\ &\leq \mathcal{N}(y-x) + \mathcal{N}(z-y) \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

δ vérifie les quatre propriétés donc c'est une distance sur X.

Exercice (Normes sur $\mathbb{R}^n$). On considère les normes suivantes :

$$\mathcal{N}_1(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\mathcal{N}_\infty(x_1,\ldots,x_n) = \max_{i \in [\![1,n]\!]} (|x_i|)$$

Montrer qu'elles sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et dessiner leurs boules unités lorsque $n = 2$

Solution. Pour $\mathcal{N}_1$ on a

(i) On notera $x := (x_1, \ldots, x_n)$ et $I = \{1, \ldots, n\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(x) = 0 &\implies \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\ &\implies \forall i \in I, x_i = 0 \end{aligned}$$

Dans l'autre sens on a aussi

$$\begin{aligned} \forall i \in I, x_i = 0 &\implies \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\ &\implies \mathcal{N}_1(x) = 0 \end{aligned}$$

(ii) On considère $\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ avec $\lambda > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(\lambda x) &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &= |\lambda| \mathcal{N}_1(x) \end{aligned}$$

(iii) On considère $y := (y_1, \ldots, y_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(x+y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \\ &\leq \mathcal{N}_1(x) + \mathcal{N}_1(y) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{N}_1$ est bien une norme.
Pour $\mathcal{N}_\infty$ on a

(i) On notera $x := (x_1, \dots, x_n)$ et $I = \{1, \dots, n\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(x) = 0 &\Longrightarrow \max(|x_i|) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall i \in I, x_i = 0 \end{aligned}$$

Dans l'autre sens on a aussi

$$\begin{aligned} \forall i \in I, x_i = 0 &\Longrightarrow \max(|x_i|) = 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{N}_\infty(x) = 0 \end{aligned}$$

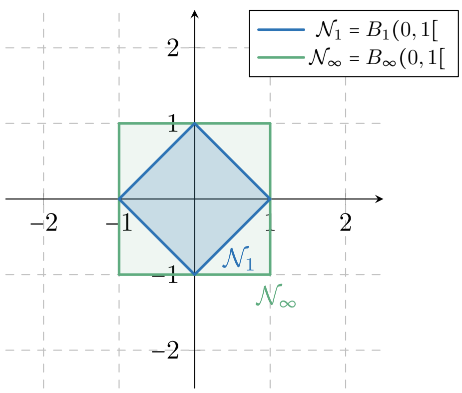
(ii) On considère $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ avec $\lambda > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(\lambda x) &= \max(|\lambda x_i|) \\ &= |\lambda| \max(|x_i|) \\ &= |\lambda| \mathcal{N}_\infty(x) \end{aligned}$$

(iii) On considère $y := (y_1, \dots, y_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(x + y) &= \max(|x_i + y_i|) \\ &\leq \max(|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max(|x_i|) + \max(|y_i|) \\ &\leq \mathcal{N}_\infty(x) + \mathcal{N}_\infty(y) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{N}_\infty$ est bien une norme.
Les boules unités associées sont :



Exercice (Distance Fly Emirate). Soit (X, d) un espace métrique et Dubai $= D$ un point de X. On considère

$$d_{FE}(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ d(x, D) + d(y, D) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que d_{FE} est une distance sur X
2. On suppose que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, \text{ euclidien})$ et $D = 0$. Pour $x \in X$, dessiner les boules ouvertes centrées en x.
3. Montrer que pour $x \neq D$, le singleton $\{x\}$ est ouvert.

Solution.

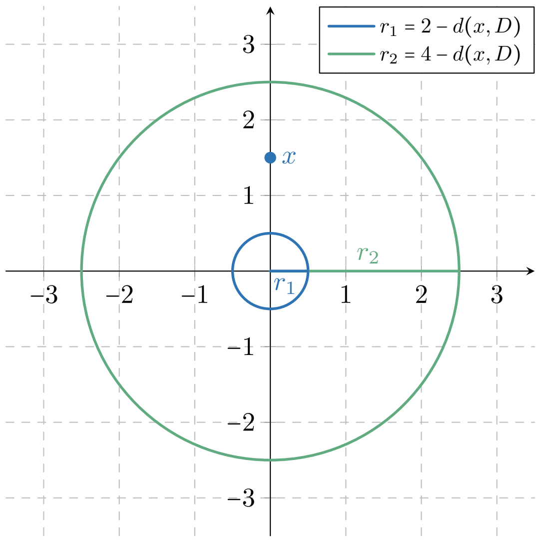
1. Il faut vérifier les 4 conditions d'une distance :
   (i) $d_{FE}(x,y) \geq 0$ car $d(x,y) \geq 0$
   (ii) On a $x = y \Longrightarrow d_{FE}(x,y) = 0$ par définition.
   Si $d_{FE}(x,y) = 0$ alors on a $x = y$ ou $d(x,D) + d(y,D) = 0$.
   Comme une distance est positive, on a $d(x,D) = d(y,D) = 0$ donc $x = y$.
   (iii) Si $x = y$, on a $d_{FE}(x,y) = d_{FE}(y,x)$. Dans le cas contraire on a

$$\begin{aligned} d_{FE}(x,y) &= d_{FE}(x,D) + d_{FE}(y,D) \\ &= d_{FE}(y,D) + d_{FE}(x,D) \\ &= d_{FE}(y,x) \end{aligned}$$

   (iv) Soit $z \in X$. Si $x = z$, cela est évident. Dans le cas contraire on a

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \mathcal{N}(z-x) \\ &= \mathcal{N}(z-x+y-y) \\ &= \mathcal{N}((y-x)+(z-y)) \\ &\leq \mathcal{N}(y-x) + \mathcal{N}(z-y) \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

2. On fixe $x = (0, 1.5)$ et on fait varier $\varepsilon \in \{1,2,4\}$.
   Pour $\varepsilon = 1$ on a $B(x,\varepsilon[= \{x\}$



3. Comme on vient de le voir, pour $x \neq D$ on peut choisir $0 \leq \varepsilon < d(x,D)$ et on a alors $B(x,\varepsilon[= \{x\} \subset \{x\}$. Soit, que $\{x\}$ est ouvert.