Planche TD 1

Ivan Lejeune [*]

11 février 2024

Exercice (Seconde inégalité triangulaire). Soit (X,d) un espace métrique, montrer que pour tous $x,y,z \in X$ on a
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

Solution. Soient $x,y,z \in X$. On a

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ d(x,y) - d(z,y) &\leq d(x,z) \end{aligned} \tag{1}$$

et
$$\begin{aligned} d(z,y) &\leq d(z,x) + d(x,y) \\ d(z,y) - d(x,y) &\leq d(x,z) \end{aligned} \tag{2}$$

En combinant les 2 on obtient

$$-d(x,z) \underset{\text{par (2)}}{\leq} d(x,y) - d(y,z) \underset{\text{par (1)}}{\leq} d(x,z)$$

Donc on a bien
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

Exercice (Distance induite). Soit $x = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ munit de la distance induite par la norme infinie de $\mathbb{R}^2$. Dessiner les boules de centre $(1,0)$.

Solution. On a
$$\begin{aligned} B(x_0, r[_{\|\cdot\|_\infty} &= \{y \in X \mid \mathcal{N}_\infty(y - (1,0)) < r\} \\ &= \left\{ y \in X \,\middle|\, \begin{array}{c} |y_1 - 1| < r \quad \text{et} \\ |y_2| < r \end{array} \right\} \\ &= x \text{ si } r > 1 \\ &=]1-r, 1] \times \{0\} \text{ sinon} \end{aligned}$$

On a
$$B(x_0, r[_X = B(x_0, r[_{\mathbb{R}^2} \cap X$$

Exercice (Fonctions sous-additives et distance). Soit (X,d) un espace métrique

1. Soit φ une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\varphi(0) = 0$, φ est injective sur un voisinage de 0 et $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $D = \varphi \circ d$ est une métrique sur X.

Solution. 1. Il suffit de vérifier les axiomes d'une métrique :

Soit $x,y \in X$, on a

(i) $\varphi \circ d$ positif par définition de φ,

[*] Cours inspiré de M. Akrout

(ii) Si $d(x,y) = 0$ alors $\varphi \circ d(x,y) = 0$. Pour l'autre sens, on suppose $d(x,y) \neq 0$, soit, en notant $d := d(x,y)$, que $d > 0$.
Regardons alors sur $[0,d]$. On a

$$x \in [0,d] \Longrightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(d) = 0$$

Cela donne alors φ constante égale à 0 sur $[0,d]$.
Or il existe $\varepsilon > 0$ tel que φ injective sur $[0,\varepsilon[$, donc φ ne peut pas être constante sur un voisinage de 0. Ainsi,

$$\varphi(d(x,y)) = 0 \Longleftrightarrow d(x,y) = 0$$

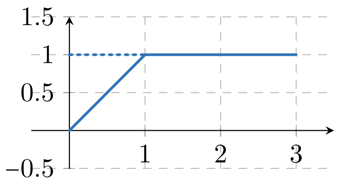
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ donc $\varphi \circ d(x,y) = \varphi \circ d(y,x)$ et donc $\varphi \circ d$ est symétrique,

(iv) soit $z \in X$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(d(x,y)) &\underset{\substack{\text{car } \varphi \\ \text{croissante}}}{\leq} \varphi(d(x,z) + d(z,y)) \\ &\underset{\substack{\text{car } \varphi \\ \text{ss-additive}}}{\leq} \varphi(d(x,z)) + \varphi(d(z,y))\end{aligned}$$

2. Pour la deuxième partie, on rappelle $D = \min(1,d)$. On considère ϕ telle que

$$\begin{aligned}\phi = \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \min(1,t)\end{aligned}$$



On a

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{sur } [0,1] \\ 1 & \text{sur } [1,+\infty[\end{cases}$$

On a $\phi(0) = 0$ car ϕ croissante et injective sur $[0,1]$. On a

$$\min(1,t+s) \leq \min(1,t) + \min(1,s)$$

Si

$$t + s \leq 1$$
$$\min(1,t+s) = t + s = \min(1,t) + \min(1,s)$$

Si

$$t + s > 1$$
$$\min(1,t+s) = 1$$

Si

$$s \geq 1, t \geq 1$$
$$\text{evident}$$

Si

$$s,t < 1$$
$$\min(1,s) + \min(1,t) = s + t \geq 1$$

Donc, en tout, φ est sous-additive.

Remarque. Si $r < 1$, on a
$$B(x, r[_d = B(x, r[_D$$
On considère U ouvert pour d et $x \in U$. Alors $r' = \min(1, r) \leq r$ d'où
$$B(x, r[_D \subset U$$
D'où U ouvert pour D.
Dans le cas $r \leq 1$, on prend $y \in B(x, r[_d$ et on a alors
$$d(x, y) < r \leq 1$$
$$D(x, y) = \min(1, d(x, y)) = d(x, y) < r$$
D'où $y \in B(x, r[_D$
Et pour $y \in B(x, r[_D$, on a
$$D(x, y) = \min(1, d(x, y)) < r \leq 1$$
D'où
$$\min(1, d(x, y)) < 1$$
Et enfin
$$\min(1, d(x, y)) = d(x, y) < r$$

Exercice. Soit $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des suites réelles. Pour un espace métrique (X, d), on définit son diamètre par $\mathsf{Diam}(X) = \sup\{d(x, y), x, y \in X\}$.

1. Montrer que $\delta(x, y) = \arctan(|x - y|)$ est une distance sur $\mathbb{R}$. Quel est le diamètre de $\mathbb{R}$ pour cette distance ?
2. Pour deux suites $(x_n) = (x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_n) = (y_0, \ldots, y_n)$ réelles, on pose
$$D(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^i}$$
   (a) Montrer que D est bien définie et que c'est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Quel est le diamètre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour D.

Solution. On considère
$$\varphi(t) = \arctan(t)$$
On prend
$$X = (\mathbb{R}, \arctan(|x - y|))$$
et on a
$$\text{diam} X = \sup\{\delta(x, y), x, y, \in \mathbb{R}\} \leq \frac{\pi}{2}$$
Pour $n \in \mathbb{N}$
$$\delta(0, n) = \arctan(n) = \frac{\pi}{2} \leq \sup(\delta(x, y)) = \text{diam}(X)$$
Donc
$$\text{Diam}(\mathbb{R}, \delta) = \frac{\pi}{2}$$

Remarque.
$$\mathbb{R} = B(0, \frac{\pi}{2}[_\delta$$
On considère une suite de diamètre inférieur à π :
$$X_n := (n, n, \ldots, n)$$

Qui converge vers $2\arctan(n)$.

Solution. Il faut commencer par montrer que ultra métrique implique l'inégalité triangulaire.
Soit $s, t \geq 0$, on a
$$\max(s,t) = s \text{ ou } t \leq s + t$$
Comme la distance est positive, on a
$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) \leq d(x,y) + d(y,z)$$
Ainsi si on a l'inégalité ultra métrique, alors on a l'inégalité triangulaire.
Montrons maintenant qu'en ultra métrique tous les triangles sont isocèles et tout point d'une boule est centre de cette boule.

> **Remarque (exo$*$).** La distance discrète est une distance ultra-métrique

- Pour le triangle isocèle, on pose $x, y, z \in x$ définissant un triangle.
  Si ce triangle n'est pas isocèle, alors on a
$$\begin{cases} d(x,y) & \neq d(y,z) \\ d(x,y) & \neq d(x,z) \\ d(y,z) & \neq d(x,z) \end{cases}$$
  On suppose,quitte à inter-changer x, y et z, que
$$d(x,y) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$$
  et donc on a pas
$$d(x,y) \leq \max\{d(y,z), d(x,z)\}$$
  Ainsi x, y, z forment forcément un triangle isocèle.

  > **Remarque.** On ne le précise pas mais en plus d'être isocèle, le côté "isocèle" est le plus grand, il suffit de prendre la définition d'ultra-métrique.

- Pour montrer que tout point d'une boule en est un centre, on considère $B(x,\varepsilon)$ et $y \in B(x,\varepsilon)$. On montre alors que $B(x,\varepsilon) = B(y,\varepsilon)$.
  Soit $x' \in B(x,\varepsilon)$, on a
$$\begin{gathered} d(x',x) \leq \varepsilon \\ \text{et } d(x,y) \leq \varepsilon \\ \text{et } d(x',y) \leq \max\{d(x',x), d(x,y)\} \end{gathered}$$
  Et donc $x' \in B(y,\varepsilon)$, soit que
$$B(x,\varepsilon[\subset B(y,\varepsilon[$$
  Pour l'autre sens on a
$$\begin{aligned} y \in B(x,\varepsilon[&\iff d(x,y) < \varepsilon \\ &\iff x \in B(y,\varepsilon[\end{aligned}$$

- Soient $x \in X$ et $r > 0$. On veut montrer que $B(x,r[$ est fermée.
  Soit $y \in B(x,r[^C$. Montrons que $B(y,r[\subset B(x,r[^C$.
  Supposons par l'absurde qu'il existe
$$z \in B(y,r[\cap B(x,r[$$

D'après la question précédente, on a

$$B(y,r[\ = B(z,r[\ = B(x,r[$$

En particulier $y \in B(x,r[$ ce qui est absurde.

- Pour l'autre, on considère $y \in B(x,r]$. On a

$$y \in B(y,r[\ \subset B(y,r] = B(x,r]$$

- Soit $x, y \in X$, on considère $B(x,r], B(y,r']$. On a alors deux possibilités :
  Si $B(x,r[\ \cap B(y,r[\ = \varnothing$ alors
  Sinon, on considère $\alpha \in B(x,r[\ \cap B(y,r[\ = \varnothing$. Supposons (quitte à refaire le même raisonnement dans l'autre sens) que $r' \leq r$, alors :

$$B(y,r'[\ = B(\alpha,r'[\ \subset B(\alpha,r[\ = B(x,r[$$

Exercice 6. On rappelle $U_p(0) = +\infty$ (par convention) dans le cadre de cet exercice. Indice de résolution :

$$U_p(xy) = U_p(x) + U_p(y)$$

Exercice Anticipation feuille 2. Soit $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$. Montrer que

$$\mathscr{B} = \left\{ B(\alpha, \frac{1}{n}[, \alpha \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

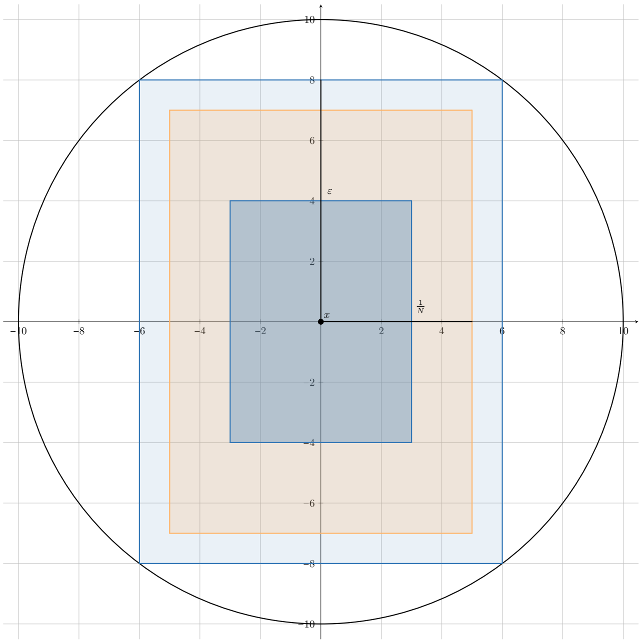
est une base de $\mathcal{T}_{||\cdot||_\infty}$.

Solution. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x \in U$. Montrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}^n$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \in B(\alpha, \frac{1}{N}[\subset U$$

U est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon[\subset U$. Il existe aussi $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Ainsi,

$$B(x, \frac{1}{N}[\subset B(x, \varepsilon[\subset U$$



Il existe donc $\alpha \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, \frac{1}{2N}[$.
Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ alors $]x_i - \frac{1}{2N}, x_i + \frac{1}{2N}[$ contient un rationnel α_i (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).
Alors

$$B(x, \frac{1}{2N}[_{\|\cdot\|_\infty} = \prod_{i=1}^{n}]x_i - \frac{1}{2N}, x_i + \frac{1}{2N}[$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ alors

$$\alpha \in B(x, \frac{1}{2N}[\text{ donc } x \in B(\alpha, \frac{1}{2N}[$$

Soit $y \in B(\alpha, \frac{1}{2N}[$. On a

$$d(x, y) < d(x, \alpha) + d(\alpha, y) < \frac{1}{N}$$

Or ces deux distances (au mileu) sont plus petites que $\frac{1}{2N}$. Alors

$$y \in B(x, \frac{1}{N}[\subset U$$

Donc $y \subset Y$.