

# Planche TD 1

Ivan Lejeune\*

13 février 2024

**Exercice (Seconde inégalité triangulaire).** Soit  $(X, d)$  un espace métrique, montrer que pour tous  $x, y, z \in X$  on a

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

**Solution.** Soient  $x, y, z \in X$ . On a

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ d(x, y) - d(z, y) &\leq d(x, z) \end{aligned} \quad (1)$$

et

$$\begin{aligned} d(z, y) &\leq d(z, x) + d(x, y) \\ d(z, y) - d(x, y) &\leq d(x, z) \end{aligned} \quad (2)$$

En combinant les 2 on obtient

$$-d(x, z) \underset{\text{par (2)}}{\leq} d(x, y) - d(y, z) \underset{\text{par (1)}}{\leq} d(x, z)$$

Donc on a bien

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

**Exercice (Distance induite).** Soit  $x = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$  munit de la distance induite par la norme infinie de  $\mathbb{R}^2$ . Dessiner les boules de centre  $(1, 0)$ .

**Solution.** On a

$$\begin{aligned} B(x_0, r)_{\|\cdot\|_\infty} &= \{y \in X \mid \mathcal{N}_\infty(y - (1, 0)) < r\} \\ &= \left\{ y \in X \mid \begin{array}{l} |y_1 - 1| < r \quad \text{et} \\ |y_2| < r \end{array} \right\} \\ &= x \text{ si } r > 1 \\ &= ]1 - r, 1] \times \{0\} \text{ sinon} \end{aligned}$$

On a

$$B(x_0, r)_X = B(x_0, r)_{\mathbb{R}^2} \cap X$$

**Exercice (Fonctions sous-additives et distance).** Soit  $(X, d)$  un espace métrique

1. Soit  $\varphi$  une fonction croissante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi$  est injective sur un voisinage de 0 et  $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$  pour tous  $s, t \in \mathbb{R}^+$ . Montrer que  $D = \varphi \circ d$  est une métrique sur  $X$ .
2. Montrer que  $D(x, y) = \min(1, d(x, y))$  est une distance sur  $X$  et que les topologies associées à  $d$  et  $D$  sont les mêmes.

---

\*Cours inspiré de M. Akrouit

**Solution.** 1. Il suffit de vérifier les axiomes d'une métrique :

Soit  $x, y \in X$ , on a

- (i)  $\varphi \circ d$  positif par définition de  $\varphi$ ,
- (ii) Si  $d(x, y) = 0$  alors  $\varphi \circ d(x, y) = 0$ . Pour l'autre sens, on suppose  $d(x, y) \neq 0$ , soit, en notant  $d := d(x, y)$ , que  $d > 0$ .

Regardons alors sur  $[0, d]$ . On a

$$x \in [0, d] \implies 0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(d) = 0$$

Cela donne alors  $\varphi$  constante égale à 0 sur  $[0, d]$ .

Or il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varphi$  injective sur  $[0, \varepsilon[$ , donc  $\varphi$  ne peut pas être constante sur un voisinage de 0. Ainsi,

$$\varphi(d(x, y)) = 0 \iff d(x, y) = 0$$

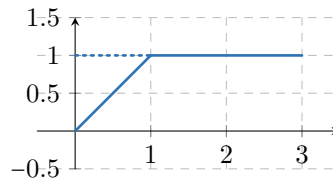
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  donc  $\varphi \circ d(x, y) = \varphi \circ d(y, x)$  et donc  $\varphi \circ d$  est symétrique,

- (iv) soit  $z \in X$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi(d(x, y)) &\stackrel{\substack{\leq \\ \text{car } \varphi \\ \text{croissante}}}{\leq} \varphi(d(x, z) + d(z, y)) \\ &\stackrel{\substack{\leq \\ \text{car } \varphi \\ \text{ss-additive}}}{\leq} \varphi(d(x, z)) + \varphi(d(z, y)) \end{aligned}$$

- 2. Pour la deuxième partie, on rappelle  $D = \min(1, d)$ . On considère  $\phi$  telle que

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \min(1, t) \end{aligned}$$



On a

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{sur } [0, 1] \\ 1 & \text{sur } [1, +\infty[ \end{cases}$$

On a  $\phi(0) = 0$  car  $\phi$  croissante et injective sur  $[0, 1]$ . On a

$$\min(1, t + s) \leq \min(1, t) + \min(1, s)$$

Si

$$t + s \leq 1$$

$$\min(1, t + s) = t + s = \min(1, t) + \min(1, s)$$

Si

$$t + s > 1$$

$$\min(1, t + s) = 1$$

Si

$$s \geq 1, t \geq 1$$

evident

Si

$$s, t < 1$$

$$\min(1, s) + \min(1, t) = s + t \geq 1$$

Donc, en tout,  $\varphi$  est sous-additive.

**Remarque.** Si  $r < 1$ , on a

$$B(x, r)_d = B(x, r)_D$$

On considère  $U$  ouvert pour  $d$  et  $x \in U$ . Alors  $r' = \min(1, r) \leq r$  d'où

$$B(x, r)_D \subset U$$

D'où  $U$  ouvert pour  $D$ .

Dans le cas  $r \leq 1$ , on prend  $y \in B(x, r)_d$  et on a alors

$$d(x, y) < r \leq 1$$

$$D(x, y) = \min(1, d(x, y)) = d(x, y) < r$$

D'où  $y \in B(x, r)_D$

Et pour  $y \in B(x, r)_D$ , on a

$$D(x, y) = \min(1, d(x, y)) < r \leq 1$$

D'où

$$\min(1, d(x, y)) < 1$$

Et enfin

$$\min(1, d(x, y)) = d(x, y) < r$$

**Exercice (Distance sur l'ensemble des suites).** Soit  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des suites réelles. Pour un espace métrique  $(X, d)$ , on définit son diamètre par  $\text{Diam}(X) = \sup\{d(x, y), x, y \in X\}$ .

1. Montrer que  $\delta(x, y) = \arctan(|x - y|)$  est une distance sur  $\mathbb{R}$ . Quel est le diamètre de  $\mathbb{R}$  pour cette distance ?
2. Pour deux suites  $(x_n) = (x_0, \dots, x_n)$  et  $(y_n) = (y_0, \dots, y_n)$  réelles, on pose

$$D(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^i}$$

- (a) Montrer que  $D$  est bien définie et que c'est une distance sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- (b) Quel est le diamètre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  pour  $D$ .

**Solution.** On considère

$$\varphi(t) = \arctan(t)$$

On prend

$$X = (\mathbb{R}, \arctan(|x - y|))$$

et on a

$$\text{diam} X = \sup\{\delta(x, y), x, y \in \mathbb{R}\} \leq \frac{\pi}{2}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(0, n) = \arctan(n) = \frac{\pi}{2} \leq \sup(\delta(x, y)) = \text{diam}(X)$$

Donc

$$\text{Diam}(\mathbb{R}, \delta) = \frac{\pi}{2}$$

**Remarque.**

$$\mathbb{R} = B(0, \frac{\pi}{2}[\delta$$

On considère une suite de diamètre inférieur à  $\pi$  :

$$X_n := (n, n, \dots, n)$$

Qui converge vers  $2 \arctan(n)$ .

**Exercice (Distance ultramétrique).** Une distance  $d$  sur  $X$  est dite **ultramétrique** si elle vérifie

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z))$$

pour tous  $x, y, z \in X$ .

1. Montrer que l'inégalité ultramétrique implique l'inégalité triangulaire
2. Montrer que dans un espace ultramétrique,
  - (a) tous les triangles sont isocèles,
  - (b) tout point d'une boule est centre de cette boule.
  - (c) toute boule est à la fois ouverte et fermée,
  - (d) deux boules sont soit disjointes, soit l'une est incluse dans l'autre.

**Solution.** Il faut commencer par montrer que ultra métrique implique l'inégalité triangulaire.

Soit  $s, t \geq 0$ , on a

$$\max(s, t) = s \text{ ou } t \leq s + t$$

Comme la distance est positive, on a

$$d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z)) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Ainsi si on a l'inégalité ultra métrique, alors on a l'inégalité triangulaire.

Montrons maintenant qu'en ultra métrique tous les triangles sont isocèles et tout point d'une boule est centre de cette boule.

**Remarque (exo\*).** La distance discrète est une distance ultra-métrique

- Pour le triangle isocèle, on pose  $x, y, z \in X$  définissant un triangle.  
Si ce triangle n'est pas isocèle, alors on a

$$\begin{cases} d(x, y) \neq d(y, z) \\ d(x, y) \neq d(x, z) \\ d(y, z) \neq d(x, z) \end{cases}$$

On suppose, quitte à inter-changer  $x, y$  et  $z$ , que

$$d(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$$

et donc on a pas

$$d(x, y) \leq \max\{d(y, z), d(x, z)\}$$

Ainsi  $x, y, z$  forment forcément un triangle isocèle.

**Remarque.** On ne le précise pas mais en plus d'être isocèle, le côté "isocèle" est le plus grand, il suffit de prendre la définition d'ultra-métrique.

- Pour montrer que tout point d'une boule en est un centre, on considère  $B(x, \varepsilon)$  et  $y \in B(x, \varepsilon)$ . On montre alors que  $B(x, \varepsilon) = B(y, \varepsilon)$ .

Soit  $x' \in B(x, \varepsilon)$ , on a

$$\begin{aligned} d(x', x) &\leq \varepsilon \\ \text{et } d(x, y) &\leq \varepsilon \\ \text{et } d(x', y) &\leq \max\{d(x', x), d(x, y)\} \end{aligned}$$

Et donc  $x' \in B(y, \varepsilon)$ , soit que

$$B(x, \varepsilon[ \subset B(y, \varepsilon[$$

Pour l'autre sens on a

$$\begin{aligned} y \in B(x, \varepsilon[ &\iff d(x, y) < \varepsilon \\ &\iff x \in B(y, \varepsilon[ \end{aligned}$$

- Soient  $x \in X$  et  $r > 0$ . On veut montrer que  $B(x, r[$  est fermée.  
Soit  $y \in B(x, r[^C$ . Montrons que  $B(y, r[ \subset B(x, r[^C$ .  
Supposons par l'absurde qu'il existe

$$z \in B(y, r[ \cap B(x, r[$$

D'après la question précédente, on a

$$B(y, r[ = B(z, r[ = B(x, r[$$

En particulier  $y \in B(x, r[$  ce qui est absurde.

- Pour l'autre, on considère  $y \in B(x, r]$ . On a

$$y \in B(y, r[ \subset B(y, r] = B(x, r]$$

- Soit  $x, y \in X$ , on considère  $B(x, r], B(y, r']$ . On a alors deux possibilités :  
Si  $B(x, r[ \cap B(y, r[ = \emptyset$  alors  
Sinon, on considère  $\alpha \in B(x, r[ \cap B(y, r[ = \emptyset$ . Supposons (quitte à refaire le même raisonnement dans l'autre sens) que  $r' \leq r$ , alors :

$$B(y, r'[ = B(\alpha, r'[ \subset B(\alpha, r[ = B(x, r[$$

**Exercice (Distance ultramétrique, exemple, pour aller plus loin).** On rappelle  $U_p(0) = +\infty$  (par convention) dans le cadre de cet exercice. Indice de résolution :

$$U_p(xy) = U_p(x) + U_p(y)$$

**Exercice Anticipation feuille 2.** Soit  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ . Montrer que

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(\alpha, \frac{1}{n}[ , \alpha \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

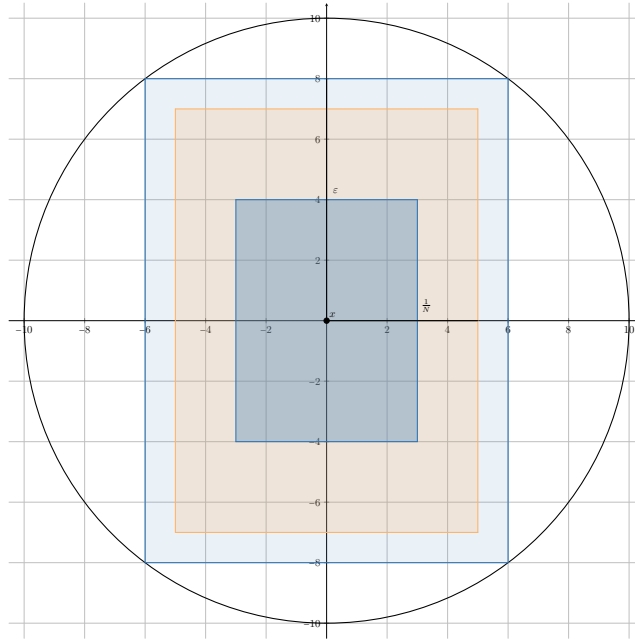
est une base de  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_\infty}$ .

**Solution.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in U$ . Montrons qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{Q}^n$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tels que

$$x \in B\left(\alpha, \frac{1}{N}[ \subset U$$

$U$  est ouvert donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon[ \subset U$ . Il existe aussi  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ .  
Ainsi,

$$B\left(x, \frac{1}{N}[ \subset B(x, \varepsilon[ \subset U$$



Il existe donc  $\alpha \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, \frac{1}{2N}[$ .

Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  alors  $]x_i - \frac{1}{2N}, x_i + \frac{1}{2N}[$  contient un rationnel  $\alpha_i$  (par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ ).

Alors

$$B(x, \frac{1}{2N}[_{\|\cdot\|_\infty} = \prod_{i=1}^n ]x_i - \frac{1}{2N}, x_i + \frac{1}{2N}[$$

Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  alors

$$\alpha \in B(x, \frac{1}{2N}[ \text{ donc } x \in B(\alpha, \frac{1}{2N}[$$

Soit  $y \in B(\alpha, \frac{1}{2N}[$ . On a

$$d(x, y) < d(x, \alpha) + d(\alpha, y) < \frac{1}{N}$$

Or ces deux distances (au milieu) sont plus petites que  $\frac{1}{2N}$ . Alors

$$y \in B(x, \frac{1}{N}[ \subset U$$

Donc  $y \in Y$ .