Espaces métriques, notions de topologie

Ivan Lejeune*

29 février 2024

1 Espaces métriques

Definition 1.1. Un **espace métrique** est un ensemble X munit d'une application

$$d := X \times X \to \mathbb{R}$$

tel que pour tout $x, y \in X$ on a

(i) $d(x,y) \geq 0$;

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (séparation) ;

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;

(iv) $\forall z \in X, d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (inégalité triangulaire) ;

On appelle d la **distance** (ou métrique) sur X.

Exemple 1.1. Soit X un ensemble, on considère

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

C'est une distance, appelée la distance discrète, qu'on verra en TD

Definition 1.2. Une **norme** sur E est une application

$$\mathcal{N} := E \to \mathbb{R}^+$$

telle que pour tout $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, on a

(i) $\mathcal{N}(x) = 0 \iff x = 0$;

(ii) $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$;

(iii) $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$;

Pour $E = \mathbb{R}$-ev, on a $(E, \mathcal{N})$ **espace vectoriel normé**.

Exercice 1.1. Montrer que $d(x,y) = \mathcal{N}(y-x)$ est une distance sur E.

Remarque 1.1. Si $(E, \mathcal{N})$ est un evn, alors $(E, \mathcal{N})$ est un espace métrique

Exercice 1.2. Montrer que evn $\Longrightarrow$ espace métrique pour

- ($\mathbb{R}^n$ euclidiens)

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Akrout

- $(\{\text{fonctions bornées sur } [0,1]\})$

$$\rightsquigarrow \|f\|_\infty = \sup |f|$$
$$\rightsquigarrow \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } f \text{ continue bornée}$$

Exemple 1.2. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. On a $(A, d|_{A\times A})$ espace métrique.

Exercice 1.3. Le montrer pour $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Rappel.
$$S^2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

Definition 1.3. Pour $x \in X$ et $\varepsilon \geq 0$:

- La **boule ouverte** de centre x et de rayon ε est
$$B(x,\varepsilon[= \{y \in X, d(x,y) < \varepsilon\}$$
- La **boule fermée** de centre x et de rayon ε est
$$B(x,\varepsilon] = \{y \in X, d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

Exemple 1.3. Pour $X = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$, on a
$$B(x,\varepsilon[=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$$
$$B(x,\varepsilon] = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$$

Definition 1.4. Soit X un ensemble et U une partie de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) U est un ouvert de X

(ii) Pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$B(x,\varepsilon[\subset U$$

Exemple 1.4. Une boule ouverte est un ouvert.

Preuve. Laissée en exercice.

Remarque 1.2. Si (X,d) est un espace métrique alors

1. $\varnothing$ et X des ouverts ;
2. toute intersection finie d'ouverts de X est un ouvert de X ;
3. toute union quelconque d'ouverts de X est un ouvert de X.

Preuve. Il suffit de vérifier les 3 propriétés :

1. On a
$$\forall x \in X, B(x,1[\subset X \quad \text{et}$$
$$\forall x \in \varnothing, \text{ la propriété est toujours vrai}$$
Donc (1) est vérifié.
2. Soient $U_1, \ldots, U_n$ ouverts. On pose
$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

Soit $x \in U$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $x \in U_i$ ouvert donc il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que

$$B(x, \varepsilon_i[\subset U_i$$

On pose $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a alors

$$B(x, \varepsilon[\subset B(x, \varepsilon_i[\subset U_i$$

Et donc

$$B(x, \varepsilon[\subset U$$

Soit que U est ouvert, et donc (2) est vérifié.

3. Soient $U_1, \dots, U_n$ ouverts. On pose

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

Soit $x \in U$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que pour $x \in U_i$ ouvert, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que

$$B(x, \varepsilon[\subset U_i \subset U$$

Soit que U est ouvert, et donc (3) est vérifié.

Remarque 1.3. On note

$$\mathcal{T}_d = \{U \in \mathscr{P}(X), U \text{ est ouvert pour } d\}$$

2 Espaces topologiques

On considère X un ensemble quelconque.

Definition 2.1. On dit que $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(X)$ est une **topologie** sur X si :

(i) $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$

(ii) $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie

(iii) $\mathcal{T}$ est stable par union quelconque

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont dit **ouverts**.

Exemple 2.1. Si (X, d) est métrique, $\mathcal{T}_d$ est une topologie.

Exemple 2.2. Pour X est un ensemble, les ensembles suivants sont des topologies :

- $\mathcal{T} := \mathscr{P}(X)$ appelée topologie discrète ;
- $\mathcal{T} := \{\varnothing, X\}$ appelée topologie grossière ;
- $\mathcal{T}_d$, la topologie associée à la métrique d ;
- Si $X = \{a, b\}$ on a aussi la topologie

$$\mathcal{T} = \{\{a, b\}, \{a\}, \varnothing\}$$

A partir de maintenant, on considère (X, T) un espace topologique avec T l'ensemble des ouverts de X.

Definition 2.2. Une partie $F \subset X$ est dite **fermée** si $X \setminus F$ est **ouvert**

Exemple 2.3. Pour (X, d) un espace métrique, on a $B(x, r]$ fermée

Preuve. Laissée en exercice.

Remarque 2.1. On n'a pas F non ouvert $\Longrightarrow F$ fermé.

Exemple 2.4. Pour $I = [0,1[\subset \mathbb{R}$, on a

1. I n'est pas ouvert (problème en 0)
2. I n'est pas fermé (problème en 1)

Proposition 2.1. Les assertions suivantes sont vraies.

1. $\varnothing$ et X sont fermés
2. Une union finie de fermés est fermé
3. Une intersection quelconque de fermés est fermé

Rappel.

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i$$

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$$

Remarque 2.2. Une topologie peut-être définie à partir de ses fermés (au lieu de ses ouverts).

2.1 Adhérence, intérieur (version topologique)

Proposition - Définition 2.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.

1. Il existe un plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) noté $\mathring{A}$ tel que $\mathring{A} \subset A$
   $\mathring{A}$ est appelé **intérieur** de A
2. Il existe un plus petit fermé (au sens de l'inclusion) noté $\overline{A}$ tel que $A \subset \overline{A}$
   $\overline{A}$ est appelé **adhérence** de A

Proposition 2.2. On a

1. $x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon[\subset A$
2. $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ pour tout $\varepsilon > 0, B(x, \varepsilon[\cap A \neq \varnothing$

Preuve. Pour le 1., on commence par le sens direct :

$\Longrightarrow$ On a $x \in \mathring{A}$ ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(x, \varepsilon[\subset \mathring{A} \underset{\text{def}}{\subset} A$$

$\Longleftarrow$ Par hypothèse, on a $B(x, \varepsilon[\subset A$ un ouvert de A pour $\varepsilon > 0$ donc

$$x \in B(x, \varepsilon[\subset \mathring{A}$$

Pour le 2. cela revient à montrer que

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B(x, \varepsilon[\subset X \setminus A$$

$$x \in X \setminus \overline{A} \Longleftrightarrow x \in \overbrace{X \setminus A}^{\circ}$$

Il suffit de montrer que

$$X \setminus \overline{A} = \overbrace{X \setminus A}^{\circ}$$

Lemme 2.1. Soit (X,T) espace topologique et $A \subset X$. Alors

$$X \setminus \overline{A} = \overbrace{X \setminus A}^{\circ}$$

Preuve. On démontre le lemme pour démontrer la proposition précédente

$\subset$ $\overline{A}$ fermé, $X \setminus \overline{A}$ ouvert, $A \subset \overline{A}$ donc

$$X \setminus A \supset X \setminus \overline{A}$$

D'où

$$X \setminus \overline{A} \subset \overbrace{X \setminus A}^{\circ}$$

$\supset$ $X \setminus \left(\overbrace{X \setminus A}^{\circ}\right)$ fermé donc

$$X \setminus \left(\overbrace{X \setminus A}^{\circ}\right) \supset X \setminus (X \setminus A) = A$$

donc

$$X \setminus \left(\overbrace{X \setminus A}^{\circ}\right) \supset \overline{A} = X \setminus \left(X \setminus \overline{A}\right)$$

donc

$$\overbrace{X \setminus A}^{\circ} \subset X \setminus \overline{A}$$

Donc 2. est vérifié

Remarque 2.3. Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On a

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$$

Exercice 2.1. Montrer que

1. A ouvert $\iff A = \mathring{A}$
2. A fermé $\iff A = \overline{A}$

3 Applications continues

Definition 3.1. Soient X, Y deux espaces topologiques.
Une application $f : X \to Y$ est **continue** si et seulement si pour tout U ouvert dans Y, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

Remarque 3.1. On a $f^{-1}(Y \setminus U) = X - f^{-1}(U)$.
f est continue si et seulement si pour tout fermé $F \subset Y$, on a $f^{-1}(F)$ fermé.

3.1 Voisinages

Definition 3.2. Soit X un espace topologique, $x \in X$. $N \subset X$ est un **voisinage** de x si il existe U ouvert avec $x \in U \subset N$.

Exemple 3.1. Soit (X,d) un espace métrique avec $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.
On a $B(x,\varepsilon[$ et $B(x,\varepsilon]$ voisinages de x

Exemple 3.2. X est voisinage de chaque $x \in X$

Definition 3.3. Soient X, Y des espaces topologiques et $f: X \to Y$. Soit $x \in X$. On dit que f est **continue** en x si pour tout voisinage N de $f(x)$, on a $f^{-1}(N)$ voisinage de x.

Remarque 3.2. f est continue en x si et seulement si, pour tout voisinage N de $f(x)$, il existe un voisinage M de x tel que $f(M) \subset N$.

Proposition 3.1. Soit f une application de $X \to Y$. f est continue si et seulement si pour tout $x \in X$, f est continue en x.

Preuve.

$\Longrightarrow$ Soit $x \in X$ et N un voisinage de $f(x)$. Il existe V ouvert de Y avec $f(x) \in V \subset N$. En conséquence, on a $x \in \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{ouvert}} \subset f^{-1}(N)$.

Pour l'autre sens, commençons par démontrer le lemme nécessaire.

Lemme 3.1. Soit X un espace topologique et $U \subset X$. On a U ouvert si et seulement si

$$\forall x \in U, U \in \mathcal{V}(x)$$

avec $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x

Preuve.

$\Longrightarrow$ Soit $x \in U$, il existe un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $U \subset X$

$\Longleftarrow$ Soit $x \in U$, il existe un **ouvert** V_x de X tel que $x \in V_x \subset U$. Ainsi

$$U = \bigcup_{x \in U} \underbrace{V_x}_{\text{ouvert}}$$

Soit $U \subset Y$ ouvert, il faut montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert.
Si $x \in f^{-1}(U)$, alors $f(x) \in U$ et donc $U \in \mathcal{V}(f(x))$.
donc $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x)$.
D'où pour tout $x \in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$ est voisinage de x.

$\Longleftarrow$ D'après le lemme, $f^{-1}(U)$ est ouvert

Cas de $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ avec $(X, d_X), (Y, d_Y)$ des espaces métriques.

Proposition 3.2. Soit $f: X \to Y$ continue si et seulement si

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \lambda > 0 \text{ tq } d_X(x, y) \leq \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Preuve.

$\Longleftarrow$ Soit $x \in X, \varepsilon > 0$. On a $B(f(x), \varepsilon[$ ouvert.
Donc f continue, $f^{-1}(B)$ ouvert et $x \in f^{-1}(B)$.
Cela revient à dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$B(x, \delta[\subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon[)$$

$\Longrightarrow$ Soit $V \subset Y$ ouvert. Montrons que f^{-1} est ouvert.
Soit $x \in f^{-1}(V), f(x) \in V$ ouvert. Alors il existe ε_0 tel que

$$B(f(x), \varepsilon_0[\subset V$$

Par hypothèse, il existe alors δ tel que

$$x \in B(x, \delta[\subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon_0[) \subset f^{-1}(V)$$

En conclusion, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de tous ses points, donc $f^{-1}(V)$ est ouvert.

Definition 3.4. Soient X, Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \to Y$ est un **homéomorphisme** si

(i) f continue

(ii) f bijective (et donc f^{-1} existe)

(iii) f^{-1} continue

Remarque 3.3. On n'a pas $(i) + (ii) \implies (iii)$.

Exemple 3.3. On prend $X = [0,1] \cup]2,3]$ et $Y = [0,2]$. Muni de la distance

$$d(x,y) = |x - y|$$

Definition 3.5. Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. On dit que f est une **isométrie** si f est bijective et

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$$

Remarque 3.4. Une isométrie est un homéomorphisme.

4 Construction d'espaces topologiques

4.1 Sous-espaces

On se place dans le cadre de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Même si intuitivement ces deux espaces sont différents, "ensemblistement" ils sont identiques :
Il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ bijective. Il faut d'abord voir que d'après le corollaire de Cantor Bernstein, on a

$$|X \times Y| = \max(|X|, |Y|)$$

On va travailler sur $]0,1[\simeq \mathbb{R}$ et on considère

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \in]0,1[$$
$$y = 0, y_1 y_2 \dots y_n \in]0,1[$$

On considère alors

$$\begin{aligned} \varphi :]0,1[^2 &\to]0,1[\\ (x,y) &\mapsto 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_n y_n \end{aligned}$$

qui est alors clairement une bijection.
Or, $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Definition 4.1. Soit $X, \mathcal{T}$ un espace topologique et $A \subset X$. On pose

$$\mathcal{T}_A = \left\{ A \cap \tilde{U} \text{ avec } \tilde{U} \in \mathcal{T} \right\}$$

Proposition - Définition 4.1. $\mathcal{T}_A$ est une topologie sur A appelée **topologie induite** par $\mathcal{T}$ sur A.

Preuve. Laissée en exercice, il faut voir que

$$\bigcap \bigcup = \bigcup \bigcap$$

Exemple 4.1. On considère (X, d) métrique avec $\mathcal{T}_d$ la topologie associée à d. On a alors

$$A \subset X \rightsquigarrow (A, \underbrace{d|_A}_{=d|_{A\times A}}) \rightsquigarrow \mathcal{T}_{d_A}$$

où $\mathcal{T}_{d_A}$ est la topologie associée à $d|_A$.

Proposition 4.1. La topologie $\mathcal{T}_{d_A}$ associée à d_A est la topologie induite par $\mathcal{T}_d$ sur A.

Exemple 4.2. On considère

$$A = [0, 1] \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

Alors, $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ est ouvert pour la topologie induite dans A. Alors

$$\left]\frac{1}{2}, 1\right] = A \cap \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[= B_{\mathbb{R}}(1, \frac{1}{2}[\text{ ouvert}$$

Dans la suite, tous les ensembles seront des espaces topologiques.

Proposition 4.2. Soit $f : X \to Y$ continue et $A \subset X$. Alors, $f|_A$ continue.

Preuve. On prend V un ouvert dans Y, alors

$$f|_A^{-1}(V) = \underbrace{A \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\text{ouvert dans } X}}_{\text{ouvert dans } A}$$

Remarque 4.1. Toutes les fonctions continues sur A ne proviennent pas forcément de fonctions continues sur X.

Exemple 4.3. Il suffit de prendre $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction n'est pas la restriction d'une application continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4.1. Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Alors :

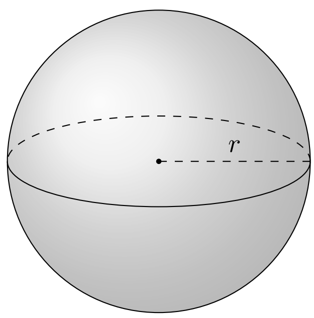
$$A \text{ ouvert dans } X \iff \mathcal{T}_A = \{U \subset X \text{ ouverts dans } X, U \subset A\}$$

Exemple 4.4.

(i)

$$S^n = \left\{X \in \mathbb{R}^{n+1}, \|X\|_2 = 1\right\}$$

La sphère S^n correspond à



(ii)
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$
qui a une topologie induite = discrète.

(iii)
$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
qui a une topologie induite = le bordel

4.2 Base d'une topologie

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

Definition 4.2. On considère $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$. $\mathscr{B}$ est une **base d'ouverts** pour $\mathcal{T}$ si tout ouvert de X est réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.

Proposition 4.3. On considère B si et seulement si
$$U \text{ ouvert} \iff \text{pour tout } x \in U, \text{ il existe } B_x \in \mathscr{B} \text{ avec } x \in B_x \subset U.$$

Preuve. Laissée en exercice

Exemple 4.5. (i) Pour (X, d) un espace métrique, on a
$$\mathscr{B} = \{B(x, \varepsilon[, x \in X, \varepsilon > 0\}$$

(ii) Pour (X, d) un espace métrique, on a
$$\mathscr{B} = \left\{B(x, \frac{1}{n}[, x \in X, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

(iii) On se place dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Alors
$$\mathscr{B} = \underbrace{\{B(\alpha, \frac{1}{n}[, \alpha \in \mathbb{Q}^N, n \in \mathbb{N}^*\}}_{\text{dénombrable}}$$

(iv) Pour (X, δ) un espace discret, l'ensemble des singletons est une base.

(v) $\mathscr{B} = \mathcal{T}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Proposition 4.4. Soit X un ensemble, $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ telle que

(i) $\varnothing \in \mathscr{B}$

(ii) Stable par intersection finie

(iii) $\bigcup_{A \in \mathscr{B}} A = X$.

alors, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ dont $\mathscr{B}$ est une base.

Preuve. On a
$$\mathcal{T} = \{\text{unions d'éléments de } \mathscr{B}\}$$
Soit
$$\mathcal{T} = \left\{\bigcup_{V \in S} V, S \subset \mathscr{B}\right\}$$
Qui est stable par intersection.

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On considère $f : X \to Y$ continue.

Proposition 4.5. Si $x_n \to x$ dans X, alors $f(x_n) \to f(x)$ dans Y.

Preuve. Supposons que $x_n \to x$ dans X. Montrons que $f(x_n) \to f(x)$ dans Y.
Soit V un ouvert de Y contenant $f(x)$. Alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X contenant x.
Or $x_n \to x$ dans X, donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n \in f^{-1}(V)$.
Donc $f(x_n) \to f(x)$ dans Y.