

# TD1 - Algorithmes unidimensionnels

Ivan Lejeune\*

9 février 2024

**Exercice 1. Minimisation d'une fonction par dichotomie.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . On dit que  $f$  est **unimodale** sur l'intervalle  $[a, b]$  si il existe un point  $\bar{x} \in [a, b]$  tel que  $f$  soit strictement décroissante sur  $[a, \bar{x}[$  et strictement croissante sur  $]\bar{x}, b]$ .

Pour chercher  $\bar{x}$ , nous allons générer une suite strictement décroissante d'intervalles dont le diamètre tend vers 0 et qui encadrent le minimum recherché.

Supposons connus cinq point  $a = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = b$ . Cinq situations se présentent :

- (i)  $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$  :  $\bar{x}$  appartient alors à  $]x_1, x_2[$ ,
  - (ii)  $f(x_1) > f(x_2)$ ,  $f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$  :  $\bar{x}$  appartient alors à  $]x_1, x_3[$ ,
  - (iii)  $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ ,  $f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$  :  $\bar{x}$  appartient alors à  $]x_2, x_4[$ ,
  - (iv)  $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$ ,  $f(x_4) < f(x_5)$  :  $\bar{x}$  appartient alors à  $]x_3, x_5[$ ,
  - (v)  $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) > f(x_5)$  :  $\bar{x}$  appartient alors à  $]x_4, x_5[$ .
1. Utiliser ces propriétés pour construire un algorithme permettant de générer une suite d'intervalles  $([a_k, b_k])_{k \in \mathbb{N}}$  telle que
    - $\bar{x} \in [a_k, b_k]$
    - $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$
    - mis à part pour le premier pas, 2 évaluations de  $f$  sont nécessaires à chaque itération.
  2. Montrer que  $a_k \rightarrow \bar{x}$  et  $b_k \rightarrow \bar{x}$ .

**Solution.** 1. On notera  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  plutôt  $\{a_i, y_i, z_i, t_i, b_i\}$  à la  $i$ -ème itération.

Pour n'évaluer  $f$  que deux fois à chaque itération on regroupera également les cas (i) et (ii), soit

$$\underline{x} \in ]a_k, z_k[$$

et les cas (iv) et (v), soit

$$\underline{x} \in ]z_k, b_k[$$

le dernier cas est alors (iii)

$$\underline{x} \in ]y_k, t_k[$$

Les valeurs deviennent alors dans le cas (i) et (ii),

$$a_{k+1} = a_k$$

$$b_{k+1} = z_k$$

dans le cas (iii),

$$a_{k+1} = y_k$$

$$b_{k+1} = t_k$$

---

\*Cours inspiré de M. Marche

et dans le cas (iv) et (v),

$$a_{k+1} = z_k$$

$$b_{k+1} = b_k$$

2. On a  $\frac{L_{k+1}}{L_k} = \frac{1}{2}$  donc

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= \frac{1}{2} L_k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} L_0 \end{aligned}$$

Soit que  $L_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , et même que  $(a_k)$  est strictement croissante,  $(b_k)$  strictement décroissante et  $\forall k, a_k < b_k$ .

$(a_k)$  et  $(b_k)$  sont alors adjacentes et convergent vers la même limite.

Par construction,  $a_k \leq l \leq b_k$  pour tout  $k$ . Or, on sait que  $\forall k, a_k \leq \underline{x} \leq b_k$  donc nécessairement  $l = \underline{x}$ .

**Exercice 2. Méthode de la section dorée.** Nous reprenons le principe de la méthode de la dichotomie précédente mais à chaque itération, nous allons maintenant chercher à diviser l'intervalle d'approximation en 3 parties (au lieu de 4 pour la dichotomie).

Plus précisément, nous allons construire une suite décroissante d'intervalles  $[a_k, b_k]$  qui contiennent tous le minimum  $\bar{x}$ . Pour passer de  $[a_k, b_k]$  à  $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ , on introduit deux nombres  $x_2^k$  et  $x_3^k$  de l'intervalle  $[a_k, b_k]$ .

On calcule alors les valeurs  $f(x_2^k)$  et  $f(x_3^k)$  et deux possibilités se présentent :

- (i) Si  $f(x_2^k) \leq f(x_3^k)$ , alors le minimum se trouve nécessairement à gauche de  $x_3^k$ . Ceci définit alors le nouvel intervalle en posant  $a_{k+1} = a_k$  et  $b_{k+1} = x_3^k$ .
- (ii) Si  $f(x_2^k) \geq f(x_3^k)$ , alors le minimum se trouve nécessairement à droite de  $x_2^k$ . Ceci définit alors le nouvel intervalle en posant  $a_{k+1} = x_2^k$  et  $b_{k+1} = b_k$ .

La question suivant se pose alors : comment choisir  $x_2^k$  et  $x_3^k$  en pratique ? Il faut privilégier deux aspects :

- (i) On souhaite que le facteur de réduction  $\gamma$ , qui représente le ratio de la longueur du nouvel intervalle, noté  $L_{k+1}$ , par rapport à la longueur du précédent, notée  $L_k$ , soit constant :

$$\frac{L_{k+1}}{L_k} = \gamma$$

- (ii) On désire, comme pour la méthode de la dichotomie, réutiliser le point qui n'a pas été choisi dans l'itération précédente afin de diminuer les coûts de calcul : ceci permettra de n'évaluer  $f$  qu'une fois par itération au lieu de deux (sauf pour la première itération, où deux évaluations sont nécessaires). Rappelons que pour la dichotomie, il est nécessaire d'évaluer  $f$  deux fois par itération.

1. Traduire ces contraintes permettant de choisir  $x_2^k, x_3^k, a_{k+1}, b_{k+1}$ , proposer un algorithme et montrer qu'il n'y a qu'une seule valeur possible pour  $\gamma$ ,
2. Montrer que pour tout  $k$ , on a  $b_k - a_k = \gamma^k(b - a)$ . Conclure.