

Compléments - chapitre 1

Ivan Lejeune*

26 février 2024

1 Chapitre 1 - Optimisation convexe

2 Compléments chapitre 1

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) = 0 \end{aligned}$$

où

$$A \in S_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$$

On considère le problème :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Proposition 2.0.1. On a

$$f'(x) = Ax - b \text{ et } f''(x) = A.$$

Preuve. Il suffit de calculer

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{2}(A(x+h), x+h) - (b, x+h) - \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) \\ &= \frac{1}{2}(Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, h) \\ &= (Ax - b, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) \end{aligned}$$

et d'identifier ces termes avec le développement de Taylor :

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \frac{1}{2}f''(x) \cdot (h, h)$$

Proposition 2.0.2. Coercivité de f

f est coercive si et seulement si A est définie positive

Preuve. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable dans une base \perp .

Ainsi, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^t P D P$$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$, et posons $u = Ph$ (changement de base).

On a ainsi

$$(Ah, h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$$

où $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ est le spectre de A .

*Cours inspiré de M. Marche

Ainsi

$$\begin{aligned}(Ah, h) &\geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n u_i^2 = \lambda_1 \|u\|^2 \\ &= \lambda_1 \|h\|^2\end{aligned}$$

car la base est orthonormée.

Ainsi f est coercive si et seulement si A est définie positive.

Proposition 2.0.3. f est convexe si et seulement si A est positive
 f est strictement convexe si et seulement si A est définie positive

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 1 et des résultats

Proposition 2.0.4. On suppose que A est positive. Alors f admet un minimum global si et seulement si il existe $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A\underline{x} = b$$

ou encore si et seulement si $b \in \text{Im } A$.

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 1.4.2

Remarque 2.0.5. En dimension finie, on a

$$\text{Im } A = (\text{Ker } {}^t A)^\perp = (\text{Ker } A)^\perp$$

Soit $x \in \text{Ker } {}^t A$, on a ${}^t Ax = 0$, donc $\forall y \in \mathbb{R}^n, ({}^t Ax, y) = 0$.
 D'où $(x, Ay) = 0$ c'est à dire $x \in (\text{Im } A)^\perp$ ainsi

$$\text{Ker } {}^t A \subset (\text{Im } A)^\perp$$

De plus, on a

$$\dim(\text{Ker}) \dots$$

Remarque 2.0.6. On peut distinguer plusieurs cas :

- si $\lambda_1 < 0$ alors f n'est pas bornée inférieurement

$$\forall z \in \mathbb{R}, f(ze_i) = \frac{\lambda_1}{2} z^2 - z(b, e_i) + c \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} -\infty$$

- si $\lambda_1 = 0$ et si $b \notin (\text{Ker } A)^\perp$, alors l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution
 f est convexe, mais non bornée inférieurement. En effet il existe $e_i \in \text{Ker } A$ tel que $(b, e_i) \neq 0$. On en déduit

$$\forall z \in \mathbb{R}, f(z, e_i) = -z(b, e_i) + c \xrightarrow{z \rightarrow \text{sign}(b, e_i) \times \infty} -\infty$$

- si $\lambda_1 = 0$ et $b \in (\text{Ker } A)^\perp$ alors l'équation $f'(x) = 0$ possède une infinité de solutions. En effet, puisque A est positive, f est convexe et tout minimum local est global.
 Si x_0 est une solution particulière de $f'(x) = 0$, l'ensemble des solutions est l'espace affine

$$x_0 + \text{Ker } A$$

et

$$\min_{\mathbb{R}^n} f(x) = -\frac{1}{2}(b, x_0) + c$$

- Si $\lambda_1 > 0$, A est définie positive, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution donnée par $A^{-1}b$.

f est strictement convexe et

$$\min_{\mathbb{R}^n} f(x) = -\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) + c$$