

Optimisation Convexe

Ivan Lejeune*

30 janvier 2024

1 Optimisation en dimension finie

1.1 Introduction

Méthode d'évaluation :

- CC noté en CM - 20
- TP1 en 3 jours - 15
- TP2 en 3 heures - 25
- Examen terminal - 40

On considère un espace vectoriel normé de dimension n noté $(E, \|\cdot\|)$ et U ouvert de E .

On considère une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Dans la pratique, E sera égal à \mathbb{R}^n .

Soit $x \in U$, on note $f'(x)$ la différentielle (qu'on appellera plus simplement "dérivée") de f en x .

On a donc, pour tout $h \in E$ tel que $\|h\|$ soit assez petit,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \|h\|\varepsilon(x, h)$$

avec $\varepsilon(x, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $f'(x) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Avec cette notation, si f est dérivable en x , alors f admet des dérivées partielles en x dans toutes les directions, et si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , on note " $\partial f(x)$ " ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ ".

La dérivée partielle de f par rapport à la i ème variable. On a alors

$$\partial f(x) = f'(x) \cdot e_i \quad i = 1, \dots, n$$

Ainsi, pour $h \in E$ tel que $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$; on a

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot h &= f'(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^n h_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i f'(x) \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \partial f(x) \end{aligned}$$

De même, si $x \mapsto f(x)$ est dérivable en x , on note $f''(x) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$ cette dérivée seconde et on considère $f''(x)$ comme une forme bilinéaire

$$f''(x) \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{R})$$

Avec ces notations, le théorème fondamental de l'analyse (TTA) peut s'énoncer ainsi :

Théorème 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Alors pour tout $(x, y) \in U$ tel que $\forall t \in [0, 1], x + t(y - x) \in U$,

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Marche

on a

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 f'(x + t(y-x)) \cdot (y-x) dt$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, $x \in U$. Alors il existe un voisinage v de x tel que pour tout $h \in v$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x) \cdot (h, h) + o(\|h\|^2)$$

Bien entendu, cette expression peut aussi se formuler ainsi :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \sum_{i=1}^n \partial f(x) h_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial^2 f(x) h_i h_j \\ &\quad + \|h\|^2 \varepsilon(h) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$.

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur, noté $\nabla f(a)$ tel que pour tout $h \in E$

$$f'(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n

1.2 Résultats d'existence

Un outil fondamental à la compacité

Théorème 2. Soit K un compact de \mathbb{R}^n et $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\sup_{x \in K} |f(x)| < +\infty$$

et il existe $\underline{x} \in K$ et $\bar{x} \in K$ tels que

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x) \\ f(\bar{x}) &= \sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x) \end{aligned}$$

Preuve 1. Ce résultat à été démontré dans le cours de topologie / analyse fonctionnelle. Puisque f est continue, $f(K)$ est une partie compacte de \mathbb{R} , c'est à dire une partie fermée et bornée de \mathbb{R} . Ainsi on a

$$-\infty < \inf f(K) \leq \sup f(K) < +\infty$$

et puisque $f(K)$ est fermé et que $\inf f(K)$ et $\sup f(K)$ sont adhérents à $f(K)$, on a nécessairement

$$\begin{aligned} \inf f(K) &= \min f(K) \in f(K) \\ \text{et } \sup f(K) &= \max f(K) \in f(K) \end{aligned}$$

Définition 1. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **coercive** si $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Théorème 3. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et coercive. Alors f est minorée et atteint son minimum.

Preuve 2. Posons $A = f(0) + 1$.

Puisque f est coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq \alpha \implies f(x) \geq f(0) + 1$$

La boule $\overline{B}(0, \alpha)$ est un fermé borné de \mathbb{R}^n donc un compact de \mathbb{R}^n et $f|_{\overline{B}(0, \alpha)}$ est continue.

D'après le Théorème 1.1.1, f est minorée sur $\overline{B}(0, \alpha)$ et atteint son minimum en un certain x_0 ($\forall x \in \overline{B}(0, \alpha), f(x) \geq f(x_0)$)

Ainsi, soit $x \in \mathbb{R}^n$

a si $x \in \overline{B}(0, \alpha)$, alors $f(x) \geq f(x_0)$

a $x \notin \overline{B}(0, \alpha)$, alors $\|x\| > \alpha$ et donc $f(x) \geq f(0) + 1$ et $f(x) \geq f(x_0) + 1 > \dots$

puisque $0 \in \overline{B}(0, \alpha)$

Ainsi...

Remarque 1. Ce dernier résultat peut être généralisé, sous les mêmes hypothèses, au cas d'une fonction $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ avec K fermé de \mathbb{R}^n .

1.3 Caractérisation des extremas sans contraintes

Un outil fondamental au calcul différentiel.

Théorème 4. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Si $x_0 \in U$ est extremum local de f sur U alors on a $f'(x_0) = 0$ (ou $\nabla f(x_0) = 0$)

Preuve 3. Rappelons ce qu'il se passe pour une fonction $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet par exemple un maximum local en $0 \in I$.

On a d'une part $\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq 0$ car $x > 0$ et $\varphi(x) - \varphi(0) \leq 0$

et d'autre part $\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \geq 0$ car $x < 0$ et $\varphi(x) - \varphi(0) \leq 0$

Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, supposons que f admet un maximum local en $x_0 \in U$. Soit e_i un vecteur de base.

On sait que $\partial_i f(x_0) = f'(x_0) \cdot e_i = \varphi'_{e_i}(0)$ avec $\varphi_{e_i}(t) = f(x_0 + te_i)$

(où on remarque que $t \in]-\delta, \delta[$) puisque U est ouvert et $x_0 \in U$)

Puisque f admet un maximum local en x_0 il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B(x_0, r), \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| \leq r$ alors $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$.

et en particulier

$$\begin{aligned} |t| \leq r &\implies f(x_0 + te_i) \leq f(x_0) \\ &\implies \varphi'_{e_i}(0) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les dérivées partielles de f sont nulles en x_0 et donc $f'(x_0) = 0$