Planche TD 1

Ivan Lejeune*

2 février 2024

Exercice. Soit (X, d) un espace métrique, montrer que pour tous $x, y, z \in X$ on a

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

Solution. Soient $x, y, z \in X$. On a

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ d(x,y) - d(z,y) &\leq d(x,z) \qquad (1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(z,y) &\leq d(z,x) + d(x,y) \\ d(z,y) - d(x,y) &\leq d(x,z) \qquad (2) \end{aligned}$$

En combinant les 2 on obtient

$$-d(x,z) \underset{\text{par (2)}}{\leq} d(x,y) - d(y,z) \underset{\text{par (1)}}{\leq} d(x,z)$$

Donc on a bien

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

Exercice. Soit $x = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ munit de la distance induite par la norme infinie de $\mathbb{R}^2$. Dessiner les boules de centre $(1, 0)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} B(x_0, r[_{\|\cdot\|_\infty} &= \{y \in X \mid \mathcal{N}_\infty(y - (1,0)) < r\} \\ &= \left\{ y \in X \,\middle|\, \begin{array}{c} |y_1 - 1| < r \quad \text{et} \\ |y_2| < r \end{array} \right\} \\ &= x \text{ si } r > 1 \\ &=]1 - r, 1] \times \{0\} \text{ sinon} \end{aligned}$$

On a

$$B(x_0, r[_X = B(x_0, r[_{\mathbb{R}^2} \cap X$$

Exercice. Soit (X, d) un espace métrique

1. Soit ϕ une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\phi(0) = 0$, ϕ est injective sur un voisinage de 0 et $\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $D = \phi \circ d$ est une métrique sur X.

*Cours inspiré de M. Akrout