TD2 - Optimisation sans contraintes

Ivan Lejeune*

9 février 2024

Exercice 1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$x^T A x \geq \lambda_1 ||x||^2$$

Solution. Comme A appartient au groupe symétrique réel, on a

1. A diagonalisable
2. dans une base orthonormée
3. valeurs propres réelles

Donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^T D P$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} X^T A X &= \underbrace{X^T P^T}_{=(PX^T)} DPX & &\geq \lambda \min ||X||^2 \\ &= Y^T D Y & &\quad\quad \| \\ &= \sum_i \lambda_i y_i^2 & &\geq \min_i \lambda_i ||Y||^2 \end{aligned}$$

Exercice 2. On définit la fonction

$$J: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y^4 - 3xy^2 + x^2 \end{array}$$

1. Déterminer les points critiques de J.
2. Soit $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant l'application $t \mapsto J(td_1, td_2)$ pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $(0,0)$ est un minimum local le long de toute droite passant par $(0,0)$.
3. Le point $(0,0)$ est-il un minimum local de la restriction de J à la parabole d'équation $x = y^2$?
4. Calculer f''. Quelle est la nature du point critique $(0,0)$?

Solution.

1. On a

$$\nabla J(x,y) = \begin{pmatrix} -3y^2 + 2x \\ -6xy + 4y^3 \end{pmatrix}$$

*Cours inspiré de M. Marche

Les points critiques sont les $(\overline{x}, \overline{y})$ tels que $\nabla J(\overline{x}, \overline{y}) = 0$.

$$\begin{cases} -3y^2 + 2x = 0 \\ -6xy + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}y^2 \\ -9y^3 + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

2. Soit $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$. On pose
$$\psi : t \mapsto J(td_1, td_2)$$
On a
$$\begin{aligned} \psi(t) &= t^4 d_2^4 - 3t^3 d_1 d_2^2 + t^2 d_1^2 \\ \psi'(t) &= 4t^3 d_2^4 - 9t^2 d_1 d_2^2 + 2t d_1^2 \\ \psi''(t) &= 12t^2 d_2^4 - 18t d_1 d_2 + 2d_1^2 \end{aligned}$$
D'où $\psi''(0) = 2d_1^2 > 0$ si $d_1 \neq 0$.
Donc ψ admet un minimum local en $t = 0$.
Si $d = 0$ alors $x = td_1 = 0$ et $J(td_1, td_2) = (td_2)^4 > 0$ si $d_2 \neq 0$.
On a donc nécessairement
$$J(td_1, td_2) \geq J(0,0) = 0$$
3. Posons $\varphi : y \mapsto J(y^2, y)$. On a alors
$$\begin{aligned} \varphi(y) &= y^4 - 3y^4 + y^4 \\ &= -y^4 < 0 \text{ si } y \neq 0 \end{aligned}$$
Donc $(0,0)$ est un maximum local pour φ et donc aussi pour $y \mapsto J(y^2, y)$, et $(0,0)$ est un maximum local pour la restriction de J à la parabole $x = y^2$.
4. On calcule
$$J''(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}$$
ce qui donne
$$J''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On constate que J'' a deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$.
Le théorème du cours nous indique que comme $\lambda_2 = 0$, on ne peut pas conclure sans étude locale (faite précédemment, aux questions 2 et 3).
On a donc affaire à un point selle.

Exercice 3. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (et les déterminer) tels que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x,y) \geq \alpha \|(x,y)\|^2 + \beta$$
2. Montrer que $\inf f(x,y)$ existe.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
4. Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point selle). Résoudre le problème (2).

Solution.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \\ &= x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y \end{array}$$

1. Pour quelles valeurs de a la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?
2. Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions à

$$\inf f_a(x,y)$$

3. Lorsque $a \in]-2,2[$, résoudre ce problème.

Exercice 5. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(Ax,x)}{\|x\|^2} \end{array}$$

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
2. Montrer que les problèmes d'optimisation

$$\inf f(x) \qquad \text{et} \qquad \sup f(x)$$

   possèdent une solution.
3. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
4. Résoudre les deux problèmes ci-dessus.
5. Montrer qu'en un point critique $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, f'' est donnée par

$$f''(x^*) = \frac{2}{\|x^*\|^2}\left(A - f(x^*)I_n\right)$$

6. En déduire que tous les points critiques qui ne sont pas solution d'un des problèmes au dessus sont des points-selles.