Chapitre 2: Espaces vectoriels normés

Ivan Lejeune*

28 mars 2024

1 Généralités

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La dimension de E sera quelconque, finie ou infinie.

Definition 1.1. Soit E un espace vectoriel et $||\cdot||$ de E dans $\mathbb{R}$ une fonction.

1. ava

On dit que $||\cdot||$ est une **norme** sur E si :

(P) $\forall x \in E, ||x|| \geq 0$

(H) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$

(S) $\forall x \in E, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(T) $\forall x, y \in E, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Proposition 1.1 Immédiate. Soit E un espace vectoriel normé. Alors :

$$\forall x, y \in E, ||x - y|| \geq |||x|| - ||y|||$$

Preuve.

$$\begin{aligned} ||x|| &= ||(x-y) + y|| \\ &\leq ||x - y|| + ||y|| \\ \Rightarrow ||x|| - ||y|| &\leq ||x - y|| \end{aligned}$$

En échangeant x et y, on obtient l'autre inégalité :

$$||y|| - ||x|| \leq ||x - y||$$

Si on enlève (S), on obtient une **semi-norme**.
Cette proposition implique que (S) est en fait une équivalence grâce à (H) :

$$x = 0 \Rightarrow ||x|| = ||\overrightarrow{0}|| = ||\overrightarrow{0} - \overrightarrow{0}|| \leq ||\overrightarrow{0}|| + ||\overrightarrow{0}|| = 0$$

Notation 1.1. On note $d(x, y) = ||x - y||$ la **distance** sur E associée à la norme $||\cdot||$.
(E, d) est un **espace métrique** et $\mathcal{T}_d$ est la topologie associée.
Si (E, d) est complet, on dit que E est un **espace de Banach**.

Definition 1.2. Soit n, n' deux normes sur le même espace vectoriel E. Elles sont dites **équivalentes** si :

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha n(x) \leq n'(x) \leq \beta n(x)$$

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Gieu

On note alors $n \sim n'$, $n \sim n' \Rightarrow d \sim d'$ et $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

Exemple 1.1. 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, de même pour $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$.

2. $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
3. $\left(C^0(X), \|\cdot\|_\infty\right)$ est un espace topologique compact, de Banach.
4. $\left(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1\right)$ espace vectoriel normé, mais pas de Banach.
5. $\ell^1 = \{x: ; \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum x(n)\}$ est absolument convergent de Banach.