Planche TD 0

Ivan Lejeune*

29 janvier 2024

Exercice. Soit X un ensemble et δ la distance discrète sur cet ensemble.

1. Vérifier que δ est une distance sur X.
2. Déterminer les boules ouvertes et fermées de (X, δ). Puis déterminer la topologie $\mathcal{T}_\delta$ associée à δ.

Solution. Soient $x, y, z \in X$

1. On rappelle
$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$
   (i) $\delta(x,y) \geq 0$ par définition
   (ii) $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$ par définition
   (iii) Si $x \neq y$ alors $y \neq x$ donc $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ par définition
   (iv) Si $\delta(x,y) + \delta(y,z) = 0$ alors $x = y = z$ et $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z)$.
   Sinon $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq 1 \geq \delta(x,z)$.

   δ vérifie les quatre propriétés donc c'est une distance sur X.
2. Pour $\varepsilon = 0$ on a
$$B(x, \varepsilon[= \varnothing$$
$$B(x, \varepsilon] = \{x\}$$
   Pour $\varepsilon \in]0, 1[$ on a
$$B(x, \varepsilon[= \{x\}$$
$$B(x, \varepsilon] = \{x\}$$
   Pour $\varepsilon \geq 1$ on a
$$B(x, \varepsilon[= X$$
$$B(x, \varepsilon] = X$$
   La topologie $\mathcal{T}_\delta$ associée à δ est engendrée par l'union de l'ensemble des boules ouvertes de X. Comme on vient de le voir, il existe une boule ouverte associée à chaque élément $x \in X$. Ainsi on a
$$\mathcal{T}_\delta = \mathscr{P}(X)$$

Exercice. Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{N}$ une norme sur E, montrer que $d(x,y) = \mathcal{N}(y - x)$ est une distance sur E.

Solution. Soient $x, y \in E$

(i) $d(x,y) = \mathcal{N}(y - x) \geq 0$ par définition d'une norme.
(ii) $d(x,y) = 0 \iff \mathcal{N}(y - x) = 0 \iff x = y$ par définition d'une norme.
(iii) $d(x,y) = \mathcal{N}(y - x) = |-1|\mathcal{N}(x - y) = d(y,x)$

*Cours inspiré de M. Charlier et M. Akrout (*iv*) Soit $z \in X$, on a

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \mathcal{N}(z-x) \\ &= \mathcal{N}(z-x+y-y) \\ &= \mathcal{N}((y-x)+(z-y)) \\ &\leq \mathcal{N}(y-x)+\mathcal{N}(z-y) \\ &\leq d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

δ vérifie les quatre propriétés donc c'est une distance sur X.

Exercice. On considère les normes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \mathcal{N}_\infty(x_1,\dots,x_n) &= \max_{i\in[\![1,n]\!]}(|x_i|) \end{aligned}$$

Montrer qu'elles sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et dessiner leurs boules unités lorsque $n = 2$

Solution. Pour $\mathcal{N}_1$ on a

(*i*) On notera $x := (x_1,\dots,x_n)$ et $I = \{1,\dots,n\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(x) = 0 &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\ &\Longrightarrow \forall i \in I, x_i = 0 \end{aligned}$$

Dans l'autre sens on a aussi

$$\begin{aligned} \forall i \in I, x_i = 0 &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{N}_1(x) = 0 \end{aligned}$$

(*ii*) On considère $\lambda x := (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$ avec $\lambda > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(\lambda x) &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &= |\lambda|\mathcal{N}_1(x) \end{aligned}$$

(*iii*) On considère $y := (y_1,\dots,y_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(x+y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|+|y_i| \\ &\leq \mathcal{N}_1(x)+\mathcal{N}_1(y) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{N}_1$ est bien une norme.
Pour $\mathcal{N}_\infty$ on a

(i) On notera $x := (x_1, \ldots, x_n)$ et $I = \{1, \ldots, n\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(x) = 0 &\Longrightarrow \max(|x_i|) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall i \in I, x_i = 0 \end{aligned}$$

Dans l'autre sens on a aussi

$$\begin{aligned} \forall i \in I, x_i = 0 &\Longrightarrow \max(|x_i|) = 0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{N}_\infty(x) = 0 \end{aligned}$$

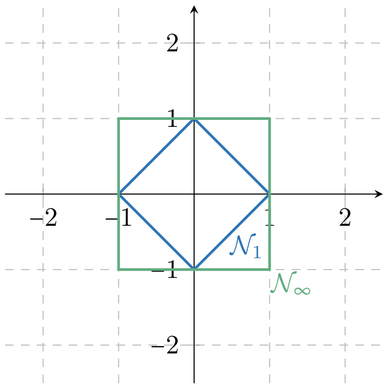
(ii) On considère $\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ avec $\lambda > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(\lambda x) &= \max(|\lambda x_i|) \\ &= |\lambda| \max(|x_i|) \\ &= |\lambda| \mathcal{N}_\infty(x) \end{aligned}$$

(iii) On considère $y := (y_1, \ldots, y_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(x+y) &= \max(|x_i + y_i|) \\ &\leq \max(|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \max(|x_i|) + \max(|y_i|) \\ &\leq \mathcal{N}_\infty(x) + \mathcal{N}_\infty(y) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{N}_\infty$ est bien une norme.
Les boules unités associées sont :



Exercice. Soit (X, d) un espace métrique et Dubai = D un point de X. On considère

$$d_{FE}(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ d(x,D) + d(y,D) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que d_{FE} est une distance sur X
2. On suppose que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, \text{ euclidien})$ et $D = 0$. Pour $x \in X$, dessiner les boules ouvertes centrées en x.
3. Montrer que pour $x \neq D$, le singleton $\{x\}$ est ouvert.

Solution.

1. Il faut vérifier les 4 conditions d'une distance :

   (i) $d_{FE}(x, y) \geq 0$ car $d(x, y) \geq 0$.

(ii) On a $x = y \implies d_{FE}(x,y) = 0$ par définition. Si $d_{FE}(x,y) = 0$ alors on a $x = y$ ou $d(x,D) + d(y,D) = 0$. Comme une distance est positive, cela implique $d(x,D) = d(y,D) = 0$, soit que $x = y$

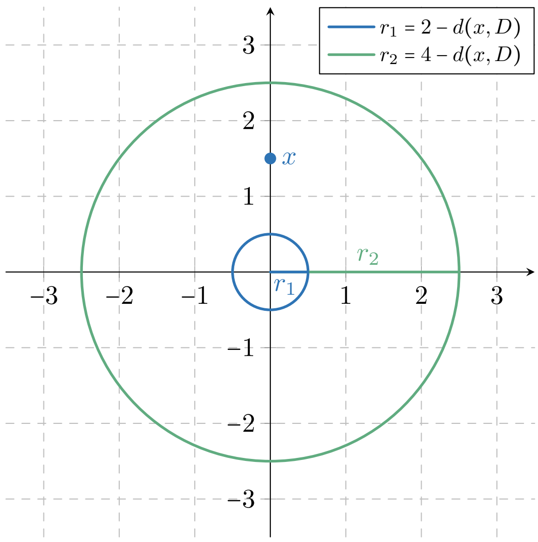
(iii) Si $x = y$, on a $d_{FE}(x,y) = d_{FE}(y,x)$. Dans le cas contraire on a

$$\begin{aligned} d_{FE}(x,y) &= d_{FE}(x,D) + d_{FE}(y,D) \\ &= d_{FE}(y,D) + d_{FE}(x,D) \\ &= d_{FE}(y,x) \end{aligned}$$

(iv) Soit $z \in X$. Si $x = z$, cela est évident. Dans le cas contraire on a

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \mathcal{N}(z-x) \\ &= \mathcal{N}(z-x+y-y) \\ &= \mathcal{N}((y-x)+(z-y)) \\ &\leq \mathcal{N}(y-x) + \mathcal{N}(z-y) \\ &\leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

2. On fixe $x = (0, 1.5)$ et on fait varier $\varepsilon \in \{1, 2, 4\}$.
   Pour $\varepsilon = 1$ on a $B(x,\varepsilon[= \{x\}$



3. Comme on vient de le voir, pour $x \neq D$ on peut choisir $0 \leq \varepsilon < d(x,D)$ et on a alors $B(x,\varepsilon[= \{x\} \subset \{x\}$. Soit, que $\{x\}$ est ouvert.