Compléments - chapitre 1

Ivan Lejeune*

12 février 2024

1 Chapitre 1 - Optimisation convexe

2 Chapitre 2

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(Ax,x)-(b,x)=0 \end{aligned}$$

où

$$A \in S_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$$

On considère le problème :

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

Proposition 2.0.1. On a

$$f'(x) = Ax - b \text{ et } f''(x) = A.$$

Preuve. Il suffit de calculer

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= \frac{1}{2}(A(x+h),x+h)-(b,x+h)-\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x) \\ &= \frac{1}{2}(Ax,h)+\frac{1}{2}(Ah,x)+\frac{1}{2}(Ah,h)-(b,h) \\ &= (Ax-b,h)+\frac{1}{2}(Ah,h) \end{aligned}$$

et d'identifier ces termes avec le développement de Taylor :

$$f(x+h)-f(x) = f'(x)\cdot h + \frac{1}{2}f''(x)\cdot(h,h)$$

Proposition 2.0.2. Coercivité de f
f est coercive si et seulement si A est définie positive

Preuve. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable dans une base $\perp$.
Ainsi, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^tPDP$$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$, et posons $u = Ph$ (changement de base).
On a ainsi

$$(Ah,h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$$

où $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$ est le spectre de A.

*Cours inspiré de M. Marche

Ainsi

$$\begin{aligned}(Ah,h) \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 &= \lambda_1 \|u\|^2 \\ &= \lambda_1 \|h\|^2\end{aligned}$$

car la base est orthonormée.
Ainsi f est coercive si et seulement si A est définie positive.

Proposition 2.0.3. f est convexe si et seulement si A est positive
f est stricteent convexe si et seulement si A est définie positive

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 1 et des résultats

Proposition 2.0.4. On suppose que A est positive. Alors f admet un minimum global si et seulement si il existe $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$A\underline{x} = b$$

ou encore si et seulement si $b \in \mathsf{Im}\, A$.

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 1.4.2

Remarque 2.0.5. En dimension finie, on a

$$\mathsf{Im}\, A = \left(\mathsf{Ker}\ {}^tA\right)^{\perp} = (\mathsf{Ker}\, A)^{\perp}$$

Soit $x \in \mathsf{Ker}\ {}^tA$, on a ${}^tAx = 0$, donc $\forall y \in \mathbb{R}^n, \left({}^tAx, y\right) = 0$.
D'où $(x, Ay) = 0$ c'est à dire $x \in (\mathsf{Im}\, A)^{\perp}$ ainsi

$$\mathsf{Ker}\ {}^tA \subset (\mathsf{Im}\, A)^{\perp}$$

De plus, on a

$$\dim(\mathsf{Ker})\cdots$$

Remarque 2.0.6. On peut distinguer plusieurs cas :

- si $\lambda_1 < 0$ alors f n'est pas bornée inférieurement

$$\forall z \in \mathbb{R}, f(ze_i) = \frac{\lambda_1}{2} z^2 - z(b, e_i) + c \underset{z \to +\infty}{\to} -\infty$$

- si $\lambda_1 = 0$ et si $b \notin (\mathsf{Ker}\, A)^{\perp}$, alors l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution
  f est convexe, mais non bornée inférieurement. En effet il existe $e_i \in \mathsf{Ker}\, A$ tel que $(b, e_i) \neq 0$. On en déduit

$$\forall z \in \mathbb{R}, f(z, e_i) = -z(b, e_i) + c \underset{z \to \mathrm{sign}(b, e_i) \times \infty}{\to} -\infty$$

- si $\lambda_1 = 0$ et $b \in (\mathsf{Ker}\, A)^{\perp}$ alors l'équation $f'(x) = 0$ possède une infinité de solutions. En effet, puisque A est positive, f est convexe et tout minimum local est global.
  Si x_0 est une solution particulière de $f'(x) = 0$, l'ensemble des solutions est l'espace affine

$$x_0 + \mathsf{Ker}\, A$$

  et

$$\min_{\mathbb{R}^n} f(x) = -\frac{1}{2}(b, x_0) + c$$

- Si $\lambda_1 > 0$, A est définie positive, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution donnée par $A^{-1}b$.

f est strictement convexe et

$$\min_{\mathbb{R}^n} f(x) = -\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) + c$$