Feuilles de TD

Ivan Lejeune *

7 février 2024

1 TD1

Exemple 1.1. On considère $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et son action sur $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 2$, la base standard de $\mathbb{K}^2$ est $\{e_1, e_2\}$. Alors, $G \cdot e_1 = \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ car

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in G\cdot e_1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot e_1 & \text{si } x \neq 0 \\ \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot e_1 & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

Alors $G \cdot 0 = \{0\}$. L'action est donc transitive sur $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ et 0 est l'unique point fixe. De plus

$$G_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} b, d \in \mathbb{K} \\ d \neq 0 \end{array} \right\}$$

Cela implique $\mathbb{K}^2$ n'est pas homogène (l'action n'est pas transitive) et l'action n'est pas libre.

Definition 1.1. Soit $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ l'**espace projectif de dimension** $n-1$. C'est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^n$.
De manière équivalente, $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ est le quotient de $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence

$$v \sim v' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \colon v' = \lambda v$$

Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X, alors $X/\sim$ est l'ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalence de $\sim$ dans X.
Si $x \in X$, sa classe d'équivalence notée $[x] \in X/\sim$ correspond à $\{x' \in X \mid x' \sim x\}$

G agit sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ par

$$A \cdot [v] = [Av] \quad \forall A \in G, v \in \mathbb{K}^n$$

Exercice. Considérer les actions suivantes :

(i) L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$;
(ii) L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$;
(iii) L'action de $\mathscr{D}_n$ sur μ_n ;
(iv) L'action de $\mathfrak{S}_n$ par conjugaison sur ses sous-groupes d'ordre 2.

Ces actions sont-elles libres ? Sont-elles transitives

*Cours inspiré de M. Charlier et M. De Renzi

Solution.

(i) Si $n > 2$, l'action n'est pas libre car

$$\mathsf{st}(n) = \mathfrak{S}_{n-1} < \mathfrak{S}_n$$

L'action est transitive car on a

$$i = (i\ j) \cdot j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Si $n \leq 2$, alors l'action est libre et transitive.

(ii) L'action est transitive car l'action de G sur $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ l'est. Donc

$$\forall v \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}, \exists A \in G \colon Ae_1 = v$$

Soit que

$$A \cdot [e_1] = [A \cdot e_1] = [v]$$

Il suffit de considérer le même A qu'avant (pour un choix quelconque d'un représentant v de $[v]$).

Il vient $G \cdot [e_1] = \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ et

$$G_{[e_1]} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a, b, d \in \mathbb{K} \\ ad \neq 0 \end{array} \right.$$

Donc l'action n'est pas libre

(iii)

> **Rappel.** On a
>
> $$R \cdot \zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} \zeta$$
> $$S \cdot \zeta = \overline{\zeta}$$
>
> Avec
>
> $$R = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \end{pmatrix}$$
> $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
>
> $$\begin{aligned} \mathscr{D}_n &\to \mathfrak{S}_{\mu_n} \\ R^j &\mapsto \left[\zeta^k \mapsto e^{\frac{2j\pi i}{n}} \zeta^k\right] \\ R^j S &\mapsto \left[\zeta^k \mapsto e^{\frac{2j\pi i}{n}} \zeta^{-k}\right] \end{aligned}$$

L'action de $\mathscr{D}_n$ sur μ_n n'est pas libre car $S \in \mathsf{st}(1)$ et donc $S \cdot 1 = \overline{1} = 1$.

L'action est transitive car $\zeta^k = R^k \cdot 1 \quad \forall \zeta^k \in \mu_n$.

(iv) Si $H < \mathfrak{S}_n$ est un sous-groupe d'ordre 2, c'est que $H = \{\mathsf{Id}, \sigma\}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

On a donc $\sigma \in \mathsf{st}(\{1, \sigma\})$ pour σ d'ordre 2 car

$$\left\{\sigma 1 \sigma^{-1}, \sigma \sigma \sigma^{-1}\right\} = \{1, \sigma\}$$

Pour $\sigma = (i\ j)$ et $\phi \in \mathfrak{S}_n$ quelconque, on a

$$\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} = (\phi(i)\ \phi(j))$$

Donc $< (1\ 2)(3\ 4) > \notin \mathsf{orb}(< 1\ 2 >)$ pour $n \geq 4$.

En conclusion l'action n'est jamais libre, et elle n'est pas transitive pour $n \geq 4$.

Exercice. Soit $\|\_\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$ et soit 0_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\|Av\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. On appelle 0_n le **groupe orthogonal de dimension** n. Soit $S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| = 1\}$ la **sphère de dimension** $n-1$. Montrer que O_n agit transitivement, mais pas librement sur S^{n-1} pour tout $n > 1$.

Solution. Soit $n \geq 2$
$O_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$
$O_n \circlearrowleft S^{n-1}$, l'action de O_n sur S^{n-1} n'est pas libre, car

$$\begin{aligned} i : O_{n-1} &\to O_n \\ A &\mapsto \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$i(O_{n-1}) \subset \mathrm{st}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\supset$ Soit $x \in S^{n-1}$. On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ canonique. $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on peut construire une base $\mathcal{B}' = (x, e_1', e_2', \ldots, e_n')$ par Gram-Schmidt on peut l'orthogonaliser et obtenir $\mathcal{B}'' = (x, e_1'', e_2'', \ldots, e_n'')$. Soit A la matrice de passage entre $\mathcal{B}''$ et $\mathcal{B}$, $x = A \cdot e_1$, A est orthogonale car $A^T A = (\langle e_i'', e_j'' \rangle)_{i,j} = (S_{i,j})_{i,j}$

Exercice. L'action de $\mathscr{D}_n$ sur les racines de l'unité μ_n est-elle une action par morphismes de groupe ?

Solution. $\mathscr{D}_n$ n'agit pas par homomorphisme sur μ_n. En effet, si $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, alors $R(1) = \zeta$ donc R n'agit pas par homomorphisme. $R(\zeta^k) = \zeta^{k+1}$ $R(\zeta^2) = \zeta^3 \neq \zeta^4 = R(\zeta)R(\zeta)$

Exercice. Soit $H < G$ un sous-groupe. Soit G_L l'ensemble G muni de l'action par translation à gauche de H, à savoir, $\rho_L(h)(g) = hg$ pour tout $h \in H$ et $g \in G_L$. Soit G_R l'ensemble G muni de l'action par translation à droite de H, à savoir, $\rho_R(h)(g) = gh^{-1}$ pour tout $h \in H$ et $G \in G_R$. Montrer que la fonction $\_^{-1} : G_L \to G_R$ est une bijection H−équivariante.

Solution. (Déjà fait en cours) "homomorphisme" = "morphisme de groupes".

Exercice. En utilisant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$ montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$. Similairement, utiliser l'action de $\mathscr{D}_3$ sur μ_3 pour montrer que $\mathscr{D}_3 \cong \mathfrak{S}_3$.

Solution. $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2) = \{[e_1], [e_2], [e_1 + e_2]\}$
$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}^2) \circlearrowleft \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$ par $\rho : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to \mathfrak{S}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)} \cong \mathfrak{S}_3$
$A \in \mathsf{Ker}\,\rho \implies A[e_1] = [e_1] \implies A[e_2] = [e_2] \implies A = \mathsf{Id}_2 \implies \rho$ injectif.
Mais $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)| = |\mathfrak{S}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)}| = 6 \implies \rho$ isomorphe.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\mu_3 = \{1, \zeta, \zeta^2\}$ avec $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. $\mathscr{D} \circlearrowleft \mu_3$ par $\rho : \mathscr{D}_3 \to \mathfrak{S}_{\mu_3} \cong \mathfrak{S}_3$

$R^l S^i,\ \zeta^{l+k} = \begin{cases} \zeta^{l+k} & \text{si } j = 0 \\ \zeta^{l-k} & \text{si } j = 1 \end{cases}$
avec $0 \leq l \leq 2$ et $0 \leq j \leq 1$. Donc $R^l S_j \in \operatorname{Ker} \rho \iff l = j = 0 \implies \rho$ injectif mais $|\mathscr{D}_3| = |\mathfrak{S}_{\mu_3}| = 6 \implies \rho$ isomorphisme.

Exercice. Exercice 6

Solution. (i)

$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(n, t) \mapsto n + t$
$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1_{2t\pi i}$
$\operatorname{orb} t = [t] \mapsto e^{2t\pi i}$ φ bien définie car $\varphi(n+t) = e^{2(n+t)\pi i} = e^{2t\pi i} = \varphi(t)$
φ injective $\varphi(t) = \varphi(t') \implies e^{2t\pi i} = e^{2t'\pi i} \implies t - t' \in \mathbb{Z}$
φ sujective car $e^{v_i} = \varphi(\frac{v}{2\pi}) \forall e^{v_i} \in S^1$

(ii) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{C}^X$
$\mathbb{R}^X \times X \to X$
$(\lambda, z) \mapsto \lambda z$
$\varphi : X/\mathbb{R}^X \to S^1$
$[z] \mapsto \frac{z^2}{|z^2|}$

Corollaire 1.1. Soit X un G-ensemble homogène (i.e. une seule orbite). Alors, il existe H sous groupe de G et $\varphi G/H \to X$ une bijection G-équivariante

Preuve. On choisit $x \in X$, on pose $H = G_X$ et on applique le dernier.

Corollaire 1.2. On prend $G \circlearrowleft X$ avec G, X des ensembles finis. Alors, les propositions suivantes sont vraies :

(i) $|G \cdot X| = [G \colon G_X] \quad \forall x \in X$

(ii) $X = (G \cdot X_1) \sqcup \cdots \sqcup (G \cdot X_n)$ soit

$$|X| = \sum_{i=1}^{n} |G \cdot X_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|G_{X_i}|}$$

Preuve. (i) Si

$$\begin{aligned} \varphi_x \colon G/G_X &\to G \cdot X \\ gG_X &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est une bijection alors

$$|G \cdot x| = |G/G_X| =: [G \colon G_X]$$

(ii) Soit $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} G \cdot X_i$. Alors

$$\begin{aligned} |X| = \sum_{i=1}^{n} |G \cdot x_i| &= \sum_{i=1}^{n} |G/G_{X_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|G_{x_i}|} \end{aligned}$$

Solution Suite. Pour le troisième point on a

$$\begin{aligned} O_n \times S^{n-1} &\to S^{n-1} \\ (A, v) &\mapsto Av \end{aligned}$$

$\mathsf{st}(e_n) = i(O_{n-1})$ car

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline c & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A^T & c^T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \\
\iff &\left(\begin{array}{cc} A^T & C^T \\ \hline 0\cdot 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} A & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline c & 1 \end{array}\right) = I_n = \left(\begin{array}{cc} A & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline c & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} A^T & C^T \\ \hline 0\cdot 0 & 1 \end{array}\right) \\
\iff &\begin{cases} A^T A + C^T C = I_{n-1} = AA^T \\ C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = AC^T \\ C = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \end{pmatrix} = CA^T \end{cases} \\
\implies &C = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, A \in O_{n-1}
\end{aligned}$$

Pour résumer

- On avait vu dans l'ex 2 que $i(O_{n-1}) \subset \mathsf{st}(e_n)$

- On a montré que $\mathsf{st}(e_n) \subset i(O_{n-1})$.

Comme cette action est transitive, on obtient (grâce au corollaire) que

$$\begin{aligned} O_n / i(O_{n-1}) &\to S^{n-1} \\ [A] &\mapsto Ae_n \end{aligned}$$

est une bijection.

Exercice. Soit p premier et $|G| = p^n$. On a

(i) $G \circlearrowleft X$ fini, $x \in X$: $|\mathsf{orb}(X)| > 1$ implique

$$|\mathsf{orb}(X)| \equiv 0 \pmod p$$

Solution. On considère $\varphi_X : G/\mathsf{st}(x) \to \mathsf{orb}(x)$ bijection implique

$$|\mathsf{orb}(x)| = |G/\mathsf{st}(x)| = |G|/|\mathsf{st}(x)|$$

ce qui implique

$$|\mathsf{orb}(x)| \big| |G| = p^n$$

mais $|\mathsf{orb}(x)| > 1 \implies |\mathsf{orb}(x) \equiv 0 \pmod p$. $(*)$ Donc, grâce au corollaire 2, si $X = \mathsf{orb}(x_1) \sqcup \cdots \sqcup \mathsf{orb}(x_n)$ avec $|\mathsf{orb}(x_1)| = 1 \forall 1 \le i \le l$ (donc $x^G = \{x_i \mid 1 \le i \le l\}$)
$*$ donne alors

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{i=1}^{l} |\mathsf{orb}(x_i)| + \sum_{i=l+1}^{n} |\mathsf{orb}(x_i)| \\ &= |X^G| + \sum_{i=l+1}^{n} |\mathsf{orb}(x_i)| \\ &= |X^G| \pmod p \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} F = \{f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G\} \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times F \to F \\ (a, f) \to [a \cdot f : b \mapsto f(a+b)] \end{gathered}$$

- $0 \cdot f = f$ car $f(0+b) = f(b) \quad \forall b \in \mathbb{Z}$

- $$\begin{aligned}(a \cdot (b \cdot f))(c) &= (b \cdot f)(a+c) \\ &= f(a+b+c) \\ &= ((a+b) \cdot f)(c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}_p\end{aligned}$$

  Les points fixes sont les fonctions constantes, car

$$f(a) = (a \cdot f)(0) = f(0) \quad \forall a \in \mathbb{Z}_p$$

$$X = \left\{ f \in F \middle| \prod_{a \in \mathbb{Z}_p} f(a) = e \right\}$$

X est stable car

$$\begin{aligned}\prod_{a \in \mathbb{Z}_p} f(a) = e \implies & \prod_{a \in \mathbb{Z}_p} (b \cdot f)(a) \\ &= \prod_{a \in \mathbb{Z}_p} f(a+b) \\ &= \prod_{c \in \mathbb{Z}_p} f(c) = e \quad \forall b \in \mathbb{Z}_p \\ &\implies bf \in X \quad \forall b \in \mathbb{Z}_p\end{aligned}$$

X est stable car

$$\begin{aligned}f \in X &\implies f(0)f(1)\cdots f(p-1) = e \\ &\implies (b \cdot f)(0)\cdots(b \cdot f)(p-1) = f(b)f(b+1)\cdots f(p-1)f(0)\cdots f(b-1) = g\end{aligned}$$

Alors, $g^2 = g \implies g = e \forall b \in \mathbb{Z}_p$. Donc X est stable par $\mathbb{Z}_p$.
Les points fixes dans X sont en bijection avec les éléments $g \in G$ tels que $g^p = e$ car

$$f(0)\cdots f(p-1) = e = f(0)^p$$

Grâce à (i)

$$|X| \equiv |X^{\mathbb{Z}_p}| \pmod{p}$$