# Planche TD 1

Ivan Lejeune *

12 février 2024

**Exercice (Seconde inégalité triangulaire).** Soit $(X, d)$ un espace métrique, montrer que pour tous $x, y, z \in X$ on a
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

**Solution.** Soient $x, y, z \in X$. On a
$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ d(x,y) - d(z,y) &\leq d(x,z) \qquad (1) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} d(z,y) &\leq d(z,x) + d(x,y) \\ d(z,y) - d(x,y) &\leq d(x,z) \qquad (2) \end{aligned}$$
En combinant les 2 on obtient
$$-d(x,z) \underset{\text{par (2)}}{\leq} d(x,y) - d(y,z) \underset{\text{par (1)}}{\leq} d(x,z)$$
Donc on a bien
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

**Exercice (Distance induite).** Soit $x = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$ munit de la distance induite par la norme infinie de $\mathbb{R}^2$. Dessiner les boules de centre $(1,0)$.

**Solution.** On a
$$\begin{aligned} B(x_0, r[_{\|\cdot\|_\infty} &= \{y \in X \mid \mathcal{N}_\infty(y - (1,0)) < r\} \\ &= \left\{ y \in X \,\middle|\, \begin{array}{l} |y_1 - 1| < r \quad \text{et} \\ |y_2| < r \end{array} \right\} \\ &= x \text{ si } r > 1 \\ &= ]1-r, 1] \times \{0\} \text{ sinon} \end{aligned}$$
On a
$$B(x_0, r[_X = B(x_0, r[_{\mathbb{R}^2} \cap X$$

**Exercice (Fonctions sous-additives et distance).** Soit $(X, d)$ un espace métrique

1. Soit $\varphi$ une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi$ est injective sur un voisinage de 0 et $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $D = \varphi \circ d$ est une métrique sur $X$.
2. Montrer que $D(x,y) = \min(1, d(x,y))$ est une distance sur $X$ et que les topologies associées à $d$ et $D$ sont les mêmes.

*Cours inspiré de M. Akrout

**Solution.** 1. Il suffit de vérifier les axiomes d'une métrique :

Soit $x, y \in X$, on a

$(i)$ $\varphi \circ d$ positif par définition de $\varphi$,

$(ii)$ Si $d(x,y) = 0$ alors $\varphi \circ d(x,y) = 0$. Pour l'autre sens, on suppose $d(x,y) \neq 0$, soit, en notant $d := d(x,y)$, que $d > 0$.
Regardons alors sur $[0,d]$. On a

$$x \in [0,d] \implies 0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(d) = 0$$

Cela donne alors $\varphi$ constante égale à 0 sur $[0,d]$.
Or il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi$ injective sur $[0,\varepsilon[$, donc $\varphi$ ne peut pas être constante sur un voisinage de 0. Ainsi,

$$\varphi(d(x,y)) = 0 \iff d(x,y) = 0$$

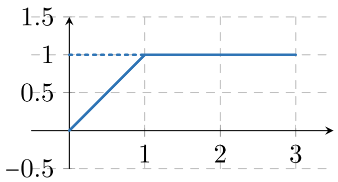
$(iii)$ $d(x,y) = d(y,x)$ donc $\varphi \circ d(x,y) = \varphi \circ d(y,x)$ et donc $\varphi \circ d$ est symétrique,

$(iv)$ soit $z \in X$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(d(x,y)) &\underset{\substack{\text{car } \varphi \\ \text{croissante}}}{\leq} \varphi(d(x,z) + d(z,y)) \\ &\underset{\substack{\text{car } \varphi \\ \text{ss-additive}}}{\leq} \varphi(d(x,z)) + \varphi(d(z,y)) \end{aligned}$$

2. Pour la deuxième partie, on rappelle $D = \min(1,d)$. On considère $\phi$ telle que

$$\begin{aligned} \phi = \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \min(1,t) \end{aligned}$$




On a

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{sur } [0,1] \\ 1 & \text{sur } [1,+\infty[ \end{cases}$$

On a $\phi(0) = 0$ car $\phi$ croissante et injective sur $[0,1]$. On a

$$\min(1,t+s) \leq \min(1,t) + \min(1,s)$$

Si

$$t + s \leq 1$$
$$\min(1,t+s) = t + s = \min(1,t) + \min(1,s)$$

Si

$$t + s > 1$$
$$\min(1,t+s) = 1$$

Si

$$s \geq 1, t \geq 1$$
$$\text{evident}$$

Si

$$s, t < 1$$
$$\min(1, s) + \min(1, t) = s + t \geq 1$$

Donc, en tout, $\varphi$ est sous-additive.

> **Remarque.** Si $r < 1$, on a
> $$B(x, r[_d = B(x, r[_D$$

On considère $U$ ouvert pour $d$ et $x \in U$. Alors $r' = \min(1, r) \leq r$ d'où

$$B(x, r[_D \subset U$$

D'où $U$ ouvert pour $D$.
Dans le cas $r \leq 1$, on prend $y \in B(x, r[_d$ et on a alors

$$d(x, y) < r \leq 1$$
$$D(x, y) = \min(1, d(x, y)) = d(x, y) < r$$

D'où $y \in B(x, r[_D$
Et pour $y \in B(x, r[_D$, on a

$$D(x, y) = \min(1, d(x, y)) < r \leq 1$$

D'où

$$\min(1, d(x, y)) < 1$$

Et enfin

$$\min(1, d(x, y)) = d(x, y) < r$$

**Exercice (Distance sur l'ensemble des suites).** Soit $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des suites réelles. Pour un espace métrique $(X, d)$, on définit son diamètre par $\mathsf{Diam}(X) = \sup\{d(x, y), x, y \in X\}$.

1. Montrer que $\delta(x, y) = \arctan(|x - y|)$ est une distance sur $\mathbb{R}$. Quel est le diamètre de $\mathbb{R}$ pour cette distance ?
2. Pour deux suites $(x_n) = (x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_n) = (y_0, \ldots, y_n)$ réelles, on pose

$$D(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^i}$$

   (a) Montrer que $D$ est bien définie et que c'est une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Quel est le diamètre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour $D$.

**Solution.** On considère

$$\varphi(t) = \arctan(t)$$

On prend

$$X = (\mathbb{R}, \arctan(|x - y|))$$

et on a

$$\operatorname{diam} X = \sup\{\delta(x, y), x, y, \in \mathbb{R}\} \leq \frac{\pi}{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(0, n) = \arctan(n) = \frac{\pi}{2} \leq \sup(\delta(x, y)) = \operatorname{diam}(X)$$

Donc

$$\operatorname{Diam}(\mathbb{R}, \delta) = \frac{\pi}{2}$$

**Remarque.**
$$\mathbb{R} = B(0, \frac{\pi}{2}[_{\delta}$$

On considère une suite de diamètre inférieur à $\pi$ :

$$X_n := (n, n, \dots, n)$$

Qui converge vers $2\arctan(n)$.

**Exercice (Distance ultramétrique).** Une distance $d$ sur $X$ est dite **ultramétrique** si elle vérifie

$$d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(y,z))$$

pour tous $x, y, z \in X$.

1. Montrer que l'inégalité ultramétrique implique l'inégalité triangulaire
2. Montrer que dans un espace ultramétrique,
   (a) tous les triangles sont isocèles,
   (b) tout point d'une boule est centre de cette boule.
   (c) toute boule est à la fois ouverte et fermée,
   (d) deux boules sont soit disjoints, soit l'une est incluse dans l'autre.

**Solution.** Il faut commencer par montrer que ultra métrique implique l'inégalité triangulaire. Soit $s, t \geq 0$, on a
$$\max(s,t) = s \text{ ou } t \leq s + t$$
Comme la distance est positive, on a

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Ainsi si on a l'inégalité ultra métrique, alors on a l'inégalité triangulaire.
Montrons maintenant qu'en ultra métrique tous les triangles sont isocèles et tout point d'une boule est centre de cette boule.

**Remarque (exo$*$).** La distance discrète est une distance ultra-métrique

- Pour le triangle isocèle, on pose $x, y, z \in x$ définissant un triangle.
  Si ce triangle n'est pas isocèle, alors on a

$$\begin{cases} d(x,y) & \neq d(y,z) \\ d(x,y) & \neq d(x,z) \\ d(y,z) & \neq d(x,z) \end{cases}$$

  On suppose,quitte à inter-changer $x, y$ et $z$, que

$$d(x,y) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$$

  et donc on a pas
$$d(x,y) \leq \max\{d(y,z), d(x,z)\}$$
  Ainsi $x, y, z$ forment forcément un triangle isocèle.

  **Remarque.** On ne le précise pas mais en plus d'être isocèle, le côté "isocèle" est le plus grand, il suffit de prendre la définition d'ultra-métrique.

- Pour montrer que tout point d'une boule en est un centre, on considère $B(x, \varepsilon)$ et $y \in B(x, \varepsilon)$. On montre alors que $B(x, \varepsilon) = B(y, \varepsilon)$.

Soit $x' \in B(x,\varepsilon)$, on a

$$d(x',x) \le \varepsilon$$
$$\text{et } d(x,y) \le \varepsilon$$
$$\text{et } d(x',y) \le \max\{d(x',x), d(x,y)\}$$

Et donc $x' \in B(y,\varepsilon)$, soit que

$$B(x,\varepsilon[ \subset B(y,\varepsilon[$$

Pour l'autre sens on a

$$\begin{aligned} y \in B(x,\varepsilon[ &\Longleftrightarrow d(x,y) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow x \in B(y,\varepsilon[ \end{aligned}$$

- Soient $x \in X$ et $r > 0$. On veut montrer que $B(x,r[$ est fermée.
  Soit $y \in B(x,r[^C$. Montrons que $B(y,r[ \subset B(x,r[^C$.
  Supposons par l'absurde qu'il existe

  $$z \in B(y,r[ \cap B(x,r[$$

  D'après la question précédente, on a

  $$B(y,r[ = B(z,r[ = B(x,r[$$

  En particulier $y \in B(x,r[$ ce qui est absurde.
- Pour l'autre, on considère $y \in B(x,r]$. On a

  $$y \in B(y,r[ \subset B(y,r] = B(x,r]$$

- Soit $x,y \in X$, on considère $B(x,r], B(y,r']$. On a alors deux possibilités :
  Si $B(x,r[ \cap B(y,r[ = \varnothing$ alors
  Sinon, on considère $\alpha \in B(x,r[ \cap B(y,r[ = \varnothing$. Supposons (quitte à refaire le même raisonnement dans l'autre sens) que $r' \le r$, alors :

  $$B(y,r'[ = B(\alpha,r'[ \subset B(\alpha,r[ = B(x,r[$$

**Exercice (Distance ultramétrique, exemple, pour aller plus loin).** On rappelle $U_p(0) = +\infty$ (par convention) dans le cadre de cet exercice. Indice de résolution :

$$U_p(xy) = U_p(x) + U_p(y)$$

**Exercice Anticipation feuille 2.** Soit $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$. Montrer que

$$\mathscr{B} = \left\{ B(\alpha, \frac{1}{n}[, \alpha \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

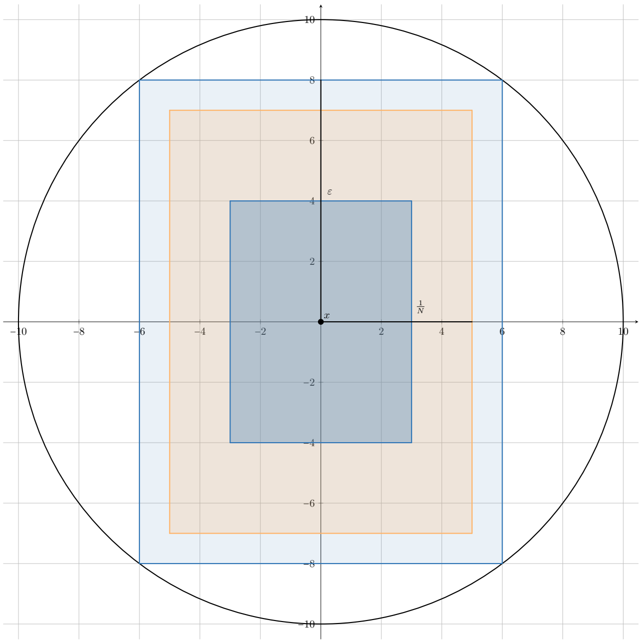
est une base de $\mathcal{T}_{||\cdot||_\infty}$.

**Solution.** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x \in U$. Montrons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}^n$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \in B(\alpha, \frac{1}{N}[ \subset U$$

$U$ est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon[ \subset U$. Il existe aussi $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Ainsi,

$$B(x, \frac{1}{N}[ \subset B(x,\varepsilon[ \subset U$$




Il existe donc $\alpha \in \mathbb{Q}^n \cap B(x, \frac{1}{2N}[$.
Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ alors $]x_i - \frac{1}{2N}, x_i + \frac{1}{2N}[$ contient un rationnel $\alpha_i$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).
Alors

$$B(x, \frac{1}{2N}[_{\|\cdot\|_\infty} = \prod_{i=1}^{n} ]x_i - \frac{1}{2N}, x_i + \frac{1}{2N}[$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors

$$\alpha \in B(x, \frac{1}{2N}[ \text{ donc } x \in B(\alpha, \frac{1}{2N}[$$

Soit $y \in B(\alpha, \frac{1}{2N}[$. On a

$$d(x,y) < d(x,\alpha) + d(\alpha,y) < \frac{1}{N}$$

Or ces deux distances (au mileu) sont plus petites que $\frac{1}{2N}$. Alors

$$y \in B(x, \frac{1}{N}[ \subset U$$

Donc $y \subset Y$.