Uso de algoritmos genéticos para encontrar la ruta óptima en un viaje interplanetario.
Taller de Modelación Numérica

C. Iván Pineda S.[1]

[1] *Universidad Nacional Autónoma de México*

17 de Abril de 2017

Resumen

El objetivo de este trabajo es modelar el sistema solar y su dinámica utilizando las ecuaciones de movimiento para un sitema de dos cuerpos en el caso de la interacción planeta-estrella y un sistema de n-cuerpos para el caso de la nave, además, se empleó un algoritmo genético para encontrar las trayectorias óptimas para el viaje desde la Tierra hasta otro cuerpo del sistema solar, la función de evaluación de dicho algoritmo recibe la velocidad inicial de la nave y el tiempo inicial al despegar, utiliza el método de Euler para resolver las trayectorias de cada uno de los cuerpos y regresa la distancia mínima a la que estuvo la nave y el planeta destino, además, se anexa una animación para visualizar los resultados.

Introducción

Mecánica newtoniana

La interacción gravitatoria no relativista de dos cuerpos con masa se describe básicamente con la segunda ley de Newton y con la ley de gravitación universal.

$$M\frac{\partial^2 \mathbf{r_2}}{\partial t^2} = -G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}|^3}(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}) \tag{1}$$

Donde:

$M = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, es el centro de masas del sistema.

$G = 39.4784176\ AU^3\ YR^{-2}\ SM^{-1}$, G es la constante de gravitación universal, AU=Unidad Astronómica, YR=Año, SM=Masas solares.

$\mathbf{r_n}$ es el vector de posición de cada cuerpo.

Como la masa del Sol comparada con la de los planetas es varios ordenes de magnitud mayor que la de los planetas, podemos decir que $m_s >> m_p$, por lo tanto:

$M = \dfrac{m_s m_p}{m_s + m_p} = \dfrac{m_s m_p}{m_s} = m_p$, sustituyendo en la ecuación (1).

$$m_p \frac{\partial^2 \mathbf{r_p}}{\partial t^2} = -G\frac{m_s m_p}{|\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}|^3}(\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}) \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{r_p}}{\partial t^2} = -G\frac{m_s}{|\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}|^3}(\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}) \tag{2}$$

La ecuación (2) determina la dinámica de un planeta con respecto al Sol, para determinar la dinámica de la nave debemos sumar las fuerzas de cada uno de los planetas y del Sol, basándonos en lo que realizamos para obtener la ecuación (2) pero ahora siendo $m_{planetas} >> m_{nave}$ obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r_{nave}}}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{9} -G\frac{m_i}{|\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}|^3}(\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}) = -G\sum_{i=1}^{9} m_i \frac{\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}}{|\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}|^3} \tag{3}$$

Donde m_i y r_i representan la masa y posición de cada uno de los planetas y el Sol.

Para obtener la velocidad debemos integrar las ecuaciones (2) y (3).

$$\mathbf{v_{planeta}} \equiv \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{r_p}}{\partial t^2} dt = -G\int_0^t \frac{m_s}{|\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}|^3}(\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}) dt \tag{4}$$

$$\mathbf{v_{nave}} \equiv \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{r_{nave}}}{\partial t^2} dt = -G\int_0^t \sum_{i=1}^{9} m_i \frac{\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}}{|\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}|^3} dt \tag{5}$$

Como el objetivo del curso es usar métodos numéricos, vamos a obtener cada punto siguiente utilizando el método de Euler, entonces la forma en que vamos a utilizar las ecuaciones (4) y (5) es:

$$\mathbf{v_{planeta_{t+1}}} = \mathbf{v_{planeta_t}} - G\frac{m_s}{|\mathbf{r_{p_t}} - \mathbf{r_{s_t}}|^3}(\mathbf{r_{p_t}} - \mathbf{r_{s_t}}) dt \tag{6}$$

$$\mathbf{v_{nave_{t+1}}} = \mathbf{v_{nave_t}} - G\sum_{i=1}^{9} m_i \frac{\mathbf{r_{nave_t}} - \mathbf{r_{i_t}}}{|\mathbf{r_{nave_t}} - \mathbf{r_{i_t}}|^3} dt \tag{7}$$

Para obtener la posición actual en función de la posición anterior utilizamos la ecuación de posición para un movimiento uniformemente acelerado que se obtiene al integrar dos veces con respecto al tiempo las ecuaciones (2) y (3), suponiendo que la distancia que separa a los cuerpos no varia significativamente del punto anterior al punto siguiente si usamos un dt pequeño, por lo que la aceleración se puede tomar como constante, entonces:

$$\mathbf{a} \equiv -G\sum_{i=1}^{9} m_i \frac{\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}}{|\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}|^3} \approx cte$$

Por lo tanto la velocidad es:

$$\mathbf{v_{nave}} \equiv \frac{\partial \mathbf{r_{nave}}}{\partial t} \equiv \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{r_{nave}}}{\partial t^2} dt = \int_0^t \mathbf{a} dt \tag{8}$$

Resolviendo la ecuación (8):

$$\frac{\partial \mathbf{r_{nave}}}{\partial t} \Big|_0^t = \mathbf{a}t \Big|_0^t \Rightarrow \mathbf{v_{nave}}(t) - \mathbf{v_{nave}}(0) = \mathbf{a}t - \mathbf{a}0$$

Tomando a $\mathbf{v_{nave}}(0) = \mathbf{v_{nave_0}} = cte$, tenemos que:

$$\mathbf{v_{nave}}(t) = \mathbf{v_{nave_0}} + \mathbf{a}t \tag{9}$$

La ecuación (9) también se puede escribir de la forma $\dfrac{\partial \mathbf{r_{nave}}(t)}{\partial t} = \mathbf{v_{nave_0}} + \mathbf{a}t$, la integral de dicha ecuación con respecto al tiempo nos dará la ecuación de movimiento para la nave.

$$\int_0^t \frac{\partial \mathbf{r_{nave}}(t)}{\partial t} dt = \int_0^t [\mathbf{v_{nave_0}} + \mathbf{a}t] dt \tag{10}$$

Resolviendo la ecuación (10):

$$\mathbf{r_{nave}}(t) \mid_0^t = [\mathbf{v_{nave_0}}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2] \mid_0^t \Rightarrow \ \mathbf{r_{nave}}(t) - \mathbf{r_{nave}}(0) = [\mathbf{v_{nave_0}}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2] - [\mathbf{v_{nave_0}}0 + \frac{1}{2}\mathbf{a}0^2]$$

Tomando a $\mathbf{r_{nave}}(0) = \mathbf{r_{nave_0}} = cte$ y remplazando a $\mathbf{a}$ tenemos que la ecuación de movimiento para la nave es:

$$\mathbf{r_{nave}}(t) = \mathbf{r_{nave_0}} + \mathbf{v_{nave_0}}t - \frac{1}{2}\ G \sum_{i=1}^{9} m_i \frac{\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}}{|\mathbf{r_{nave}} - \mathbf{r_i}|^3} t^2 \tag{11}$$

Realizando un procedimiento similar, la ecuación de movimiento para cada uno de los planetas es:

$$\mathbf{r_p}(t) = \mathbf{r_{p_0}} + \mathbf{v_{p_0}}t - \frac{1}{2}\ G \frac{m_s}{|\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}|^3} (\mathbf{r_p} - \mathbf{r_s}) t^2 \tag{12}$$

La resolución numérica de dichas ecuaciones para cada iteración es:

$$\mathbf{r_{nave_{t+1}}} = \mathbf{r_{nave_t}} + \mathbf{v_{nave_t}}dt - \frac{1}{2}\ G \sum_{i=1}^{9} m_i \frac{\mathbf{r_{nave_t}} - \mathbf{r_{i_t}}}{|\mathbf{r_{nave_t}} - \mathbf{r_{i_t}}|^3} dt^2 \tag{13}$$

$$\mathbf{r_{p_{t+1}}} = \mathbf{r_{p_t}} + \mathbf{v_{p_t}}dt - \frac{1}{2}\ G \frac{m_s}{|\mathbf{r_{p_t}} - \mathbf{r_{s_t}}|^3} (\mathbf{r_{p_t}} - \mathbf{r_{s_t}}) dt^2 \tag{14}$$

Para modelar la dinámica de nuestro sistema solo usaremos las ecuaciones (6), (7), (13) y (14), las condiciones iniciales que se asignaran al algoritmo genético son t_0, v_{x_0}, v_{y_0}, mientras que $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$, $\mathbf{v} = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$, $z(t) = 0$ y $v_z(t) = 0$ para todo t.

Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son una heurística de optimización que se utiliza para encontrar los máximos y mínimos de una función sin necesidad de usar derivadas, se basan en la selección natural.

Codificación binaria

En la naturaleza la información necesaria para codificar las proteínas que constituyen a los seres vivos está almacenada en una cadena de ADN, dicha cadena se compone de solo 4 bases; adenina, guanina, citosina y timina, posteriormente se realiza una transcripción a ARN que se compone de las mismas bases, solo se cambia timina por uracilo y finalmente se realiza la traducción a proteínas.

Para nuestro algoritmo utilizaremos una codificación en números binarios, es decir, una cadena de solo 0 y 1 que posteriormente será traducida a un número decimal que se encuentre dentro de un intervalo dado.

En un inicio se crearan un número determinado de cadenas de binarios que será nuestra población, que tendrán un número determinado de bits al que llamaremos n y la distribución de 0 y 1 será aleatoria.

Primero convertimos la cadena binaria a decimal como en el siguiente ejemplo:

$$dec = 101011_2 = 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 = 43$$

Posteriormente para tener el decimal en el intervalo en el que vamos a evaluar a nuestra función utilizamos:

$$decInt = a + \frac{dec}{2^n - 1}(b - a) \tag{15}$$

Donde a y b son el inicio y final de nuestro intervalo, n es el número de bits de nuestra cadena y dec es nuestra primer conversión de binario a decimal, $decInt$ es el decimal que recibe la función de evaluación.

Selección

Si buscamos encontrar los mínimos seleccionaremos aquellas cadenas que al ser convertidas a decimal y al evaluarlas en nuestra función $f(v_{x_0}, v_{y_0}, t_0)$ nos den resultados más pequeños, es decir, las cadenas que produzcan las trayectorias más cercanas al planeta destino, nuestra función evidentemente tiene un gran número de mínimos, obtenerlos con métodos numéricos o analíticos convencionales no es lo más efectivo.

El punto P es un mínimo local de f si existe un entorno reducido de centro x_0, que cumpla que $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in E'(x_0)$. $P(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto de $f \iff \forall x \neq x_0, A, f(x_0) \leqslant f(x)$, donde A es un subconjunto del dominio de f.

La cantidad de cadenas a seleccionar puede variar, para este trabajo se utilizó la mitad de la población, es decir solo el 50 % más adaptado podrá reproducirse.

Reproducción

Una vez que se seleccionaron los individuos más aptos, dejarán su descendencia, se seleccionan dos cadenas al azar y apartir de ellas se crea una cadena hija, para este algoritmo se genera una cantidad de cadenas hijas igual a la cantidad de cadenas padres, es decir, la mitad de la población inicial, así padres e hijos sumaran la misma cantidad de cadenas que al inicio.

Hay varias formas de combinar los genes (unidades de información, en este caso bits), aquí se utilizó el cruce uniforme que consiste en formar una cadena hija a partir de dos padres, donde cada bit de las cadenas padres tiene un 50 % de probabilidad de pasar al hijo. Esto se logra seleccionando aleatoriamiente un bit en una posición específica de las cadenas padres (lo más fácil es empezar en la posición 0 y terminar en el último carácter de la cadena), dicho bit se asigna en la misma posición para el hijo y se descarta esa posición.

Mutación

Las mutaciones son esenciales para mantener la variabilidad en nuestra población, sin estas, nuestros individuos tendrán el mismo valor en un menor número de generaciones, esto es ideal sí ese valor corresponde a un mínimo, pero casi nunca es así.

Para mutar a un individuo es necesario cambiar aleatoriamente el valor de algunos de sus genes o bits, para esto se genera un número aleatorio en un intervalo que va desde el 0 hasta la longitud de la cadena menos 1, se escoge la posición en la cadena correspondiente a ese número y se intercambia su valor por 0 si era 1 y viceversa, se realiza lo mismo el número de veces que se quiera mutar al individuo.

Algoritmo principal

Los pasos que se llevan a cabo son los siguientes:

1. Generación de una población inicial de cadenas.
2. Selección de las más aptas.
3. Reproducción.
4. Mutación solo en los hijos.
5. Generación de una nueva población que es la suma de los padres y los hijos.
6. Se regresa al paso 2 con la generación obtenida en el paso 5 hasta una condición de paro o cuando se alcance el número especificado de iteraciones.
7. Se imprimen o guardan los valores de la última generación.

Métodos

Se utilizó python para la elaboración de los algoritmos, la libreria de math y numpy para el desarrollo matemático, random para generar números aleatorios y Visual Python para el modelo visual, el código se puede revisar en `https://github.com/Ivan252512/TallerDeModelacion/tree/master/Exposicion`.

Resultados

Conclusiones