Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EMBOLCALL CONVEX D'UN TIPUS D'ORDRE

Autor: Ivan Alfredo Rodrigo Arbós

Director: Dr. Arnau Padrol Sureda
Codirector: Dra. Laura Costa Farràs
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 28 de juny de 2024

Abstract

Combinatorial geometry is a branch of Computational geometry that studies the combinatorial properties of geometric objects. One of its properties is the order type of points in geometric space which determines the convex hull of set.

This work sets an important result on the number of vertices in the convex hull of a random order type, proving that for $n \geq 3$, the average number of vertices is $4 - \dfrac{8}{n^2 - n + 2}$.
It is done from the chirotope function of set, which determines the order type of the points in this case of the plane or equivalently of the unit sphere, in which a duality process is developed that will facilitate the demonstration of the result.

Resum

La geometria Combinatòria és una branca de la geometria Computacional que estudia les propietats combinatòries dels objectes geomètrics. Una de les seues propietats és el tipus d'ordre dels punts de l'espai geomètric el qual determina l'embolcall convex del conjunt.
En aquest treball s'estableix un resultat important sobre el nombre de vèrtexs de l'embolcall convex d'un tipus d'ordre aleatori, demostrant que per $n \geq 3$, la mitjana del nombre de vèrtexs és $4 - \dfrac{8}{n^2 - n + 2}$.
Es fa a partir de la funció chirotop del conjunt, aquesta determina el tipus d'ordre dels punts en aquest cas del pla o equivalentment en l'esfera unitària, en la que es desenvolupa un procés de dualitat que facilitarà la demostració del resultat.

2020 Mathematics Subject Classification. 52C05, 52C10, 52C15, 52C30, 52C35, 52C40

Agraïments

En primer lloc, vull agrair tota l'ajuda i el suport rebut durant aquest semestre per part dels meus tutors, el doctor Arnau Padrol Sureda i la doctora Laura Costa Farràs.

L'Arnau ha estat el motor principal d'aquest estudi, i vull agrair-li no només que m'ha ensenyat amb detall cadascun dels conceptes d'aquest treball, sinó també que ha fet de mi un millor estudiant. M'ha fet aprendre què és viure una investigació i com plantejar-la, i a més, m'ha millorat com a persona en el fet de ser més ambiciós pel coneixement, despertant en mi aquestes ganes de seguir aprenent per ser un millor matemàtic.

La Laura ha estat des del primer moment d'aquests anys de grau la meva inspiració. M'ha transmès des de l'inici que les matemàtiques són molt més que una ciència. Des de la primera classe que vaig rebre per part seva a la Universitat, a l'assignatura d'Àlgebra, vaig veure que les matemàtiques eren tot un món de curiositats i coneixements inesgotables. Un estudi que, plantejant-ho amb les ganes que hi posa ella, no només s'aprèn moltíssim, sinó que també es guanyen valors com la disciplina i la constància. La Laura m'ha acompanyat des del primer moment fins a l'últim d'aquests anys de carrera. No puc estar més orgullós de dir que he començat i acabat aquesta etapa de la vida amb ella al costat. Laura, sense tu la Universitat no hauria estat la mateixa i, tant de bo algun dia arribi a ser tan bon matemàtic com ho ets tu.

No puc oblidar-me dels meus amics, la gent d'Atzeneta del Maestrat, Paüls, Barcelona, Xerta i la Universitat de Barcelona. Sense ells no hauria estat tan a gust ni hauria crescut tant personalment.

M'agradaria fer una menció especial a algunes persones:

Roger Florez, Didac Segarra, Bernat Mestre, Gemmeta Roig, Marc Queral i Carlos Sabaté, millors amics des de la infància, que m'han animat i donat un cop de mà sempre que ho he necessitat. Han estat allí sempre i han crescut al meu costat, ajudant-me a aconseguir tot el que em proposava.

Laura Tarés, Nadia Curto, Ariadna Cobos i Laia Figueras. Sou la meva segona família, tant de bo tothom tingués amigues com vosaltres al seu costat.

Joan Guich, Álvaro Luque i Onofre Bisbal. Germans de la Universitat i espero que amics de per vida. Sempre heu anat un pas per davant meu en aquests anys de carrera, aconsellant-me i guiant-me pel bon camí i, sobretot, fent-me gaudir moltíssim d'aquesta etapa de la vida. Heu estat al meu costat en tot moment i estic molt orgullós d'haver creat aquest vincle tan gran amb vosaltres, ojalá que no es trenqui mai. ¡Topolocos para siempre!

Ana Victoria, Natalia Subirana i Aina Nadal, sou les petites que sempre heu estat al meu costat fent-me sentir part d'algo que és molt més que un grup de la universitat. Una part de mi esta enamorat de vatros, i es que el bé que m'heu fet i tot lo que m'heu aportat no hi ha prous risottos o tartes 3 xocolates que ho compensen. Gràcies, perquè el que he aconseguit i superat sense les 3 no hauria sigut possible.

Gemma Gil Saura, al principi érem companys en el grau, amics de la mateixa promoció. Va passar la pandèmia i vas convertir-te en la meua companya de pis. Porta en porta d'habitació tots els dies, vivint junts mil i un moments, records i anècdotes. Avui en dia, ets la germana que no tinc. No sé com seria la meua vida a Barcelona sense tu i tampoc vull imaginar-me-la. I tot i que ets la petita, sempre seràs un exemple per a mi en molts aspectes. Em fa feliç veure't feliç i ojalá no perdre't mai. ¡Te vullc moltíssim!

Finalment, els de casa.
Els meus iaios que m'han donat tot el que he necessitat i més. S'han preocupat per mi dia a dia i han facilitat que avui estigui on estic. Iaio, que has marxat fa poc, ojalà m'haguessis vist tancar aquesta etapa. Gràcies per, fins l'últim moment, intentar aprendre en mi tot el que descobria. Ojalà algun dia sigui l'artista que tu has estat. Espero que estiguis orgullós de les representacions gràfiques d'aquest treball.

I les persones més importants per a mi. El meu papa Gonzalo i la meua mama Marga, tothom sempre remarca en mi la bona persona que sóc i jo, orgullós, puc dir que no seria qui sóc ni com sóc sense vosaltres. Esteu al meu costat en tot moment, no us perdeu mai res del que faig i anem junts a tot arreu. Sou els millors pares sense dubte i la demostració és trivial. Res del que aconsegueixo seria possible sense vosaltres, gràcies per tot, espero que junts puguem aconseguir moltes més metes.

En definitiva, gràcies a les matemàtiques. Sense elles, no seria igual i no tindria tot el que he aconseguit avui dia ni el que m'envolta.

Índex

Introducció

La geometria Computacional és una branca de la informàtica que estudia els algoritmes que poden ser formulats en termes de geometria. Dins d'aquesta ciència trobem diferents àrees, entre les quals està la geometria Combinatòria, que és la ciència que identifica aquest treball.

- La **geometria Combinatòria** estudia les propietats combinatòries dels objectes geomètrics com ara les disposicions o triangulacions.

Una d'aquestes propietats és el tipus d'ordre dels punts de l'espai geomètric, que és la manera en què s'organitzen els punts i és lo que determina l'embolcall convex d'aquests.

En la pràctica hi ha dues maneres de trobar el tipus d'ordre:

- El **tipus d'ordre angular**, on els punts es classifiquen segons l'angle respecte un punt del conjunt que normalment és el punt amb una de les coordenades amb valor mínim. Aquesta ordenació s'utilitza per exemple els Algoritmes de Graham.

I la que s'estudia en aquest treball:

- El **tipus d'ordre segons la posició**, on els punts es classifiquen segons on estan en l'espai geomètric respecte dels altres. Aquest tipus d'ordre és molt habitual en els algoritmes de Knuth.

L'objectiu d'aquest treball és establir el següent resultat sobre els tipus d'ordre aleatoris i l'embolcall convex dels punts que el formen.

Teorema: Per $n \geq 3$, el nombre de vèrtexs de l'embolcall convex d'un tipus d'ordre aleatori simple etiquetat elegit uniformement entre tots els tipus d'ordre simple etiquetats de tamany n en el pla, té mitjana $4 - \dfrac{8}{n^2 - n + 2}$.

El nombre de vèrtexs és un invariant combinatori, és a dir, una propietat que és constant sota diferents processos.
Aquest invariant mostra un problema important dels algoritmes geomètrics.

En aquests algoritmes hi ha jocs de prova i, per tant, es pot fer mostratge des del punt de vista estadístic. Aleshores, si comparem els resultats del mostreig amb el resultat del treball, veiem que la realitat s'allunya molt del que hauria de ser.

Els mètodes de mostreig d'aquests algoritmes geomètrics donen un nombre de vèrtexs que tendeix a infinit. És a dir, que els algoritmes geomètrics que coneixem disten molt de la distribució uniforme.

Estructura de la memòria

- **Capítol 1:** S'introdueix el concepte d'orientació, definint la funció *chirotope*, que és l'aplicació amb la qual es classifiquen els diferents conjunts i es formen els diferents tipus d'ordre.
- **Capítol 2:** Es relacionen els conjunts de punts en el pla amb els conjunts de punts sobre l'esfera unitària. A més, s'introdueix un concepte de dualitat sobre l'esfera que facilitarà arribar a la conclusió final del Teorema.
- **Capítol 3:** Es desenvolupa el contingut principal del treball, identificant i definint formalment el tipus d'ordre amb el qual es desenvolupen diferents resultats per relacionar-los entre ells de diverses formes.
- **Capítol 4:** Es defineix el concepte d'embolcall convex amb unes quantes propietats per acabar de relacionar els tipus d'ordre amb el Teorema.
- **Capítol 5:** Finalment, es demostra el Teorema sobre el qual gira tot el treball a partir de tot el que s'ha anat desenvolupant anteriorment.

Notació

- Denotem per $\mathbb{S}^2$ l'esfera unitària centrada en l'origen O continguda en $\mathbb{R}^3$.
- Anomenem **gran cercle** a la intersecció de l'esfera $\mathbb{S}^2$ amb un pla que conté l'origen O.
- Definim **semiesfera oberta** o **hemisferi obert** a la component connexa de l'esfera $\mathbb{S}^2$ que resulta del complement d'un gran cercle.
- Anàlogament, una **semiesfera tancada** o **hemisferi tancat** és la component connexa de l'esfera $\mathbb{S}^2$ que resulta del complement d'un gran cercle amb la clausura en $\mathbb{S}^2$, és a dir, el complement d'un hemisferi obert.
- Un **conjunt semiesfèric** és un conjunt finit de punts de l'esfera $\mathbb{S}^2$ continguts en una semiesfera oberta.
- Diem que $q \in \mathbb{S}^2$ és **antípoda** de $p \in \mathbb{S}^2$ si $p = -q$.
- Un subconjunt finit $P \subset \mathbb{S}^2$ és un **conjunt projectiu** si tot punt del conjunt té la seua antípoda també en el conjunt, és a dir, $p \in P \Leftrightarrow -p \in P$.
- S'anomena **terminació projectiva** d'un conjunt semiesfèric A a la unió $A \cup -A$.
- Diem que un conjunt de punts del pla **està en posició general** si no hi ha tres punts alineats.
- Un **conjunt semiesfèric està en posició general** si no hi ha tres punts coplanaris amb l'origen O. És a dir, no hi ha tres punts de la semiesfera oberta en un mateix gran cercle.
- Un **conjunt projectiu està en posició general** si sempre que tres punts són coplanaris amb O, dos d'aquests són antípodes. És a dir, si tres punts estan en un mateix gran cercle dos d'aquests són una parella d'antípodes.
- Donat conjunt X, definim **embolcall convex de** X a la intersecció de tots els convexos que contenen X.
- Anomenem **politop** a l'embolcall convex d'un conjunt finit de punts.
- Un conjunt S es diu que està **distribuït uniformement** si tots els elements $s \in S$ tenen la mateixa probabilitat d'aparèixer $\mathbb{P}(s)$. És a dir, $\mathbb{P}(s) = \frac{1}{|S|}$ $\forall s \in S$, on $|S|$ és el nombre d'elements de S.
- El **conjunt [n]** amb $n \in \mathbb{N}$ és el conjunt format pels naturals d'1 fins n, és a dir, $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$.

- Donats dos vectors $u = (u_1, \cdots, u_d)$, $v = (v_1, \cdots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ denotem $\langle u, v\rangle$ al seu **producte escalar**

  $$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_d v_d = |u| \cdot |v| \cdot cos(\widehat{uv})$$

  En particular, u i v són perpendiculars sí, i només si $\langle u, v\rangle = 0$.

Capítol 1

Orientació

En el context d'espais vectorials, la noció d'**orientació** s'introdueix en espais de dimensió finita. Per exemple, en dimensió dos permet dir quan un gir es produeix en sentit horari o antihorari, i en dimensió tres si una figura és levogira o dextrogira.

1.1 chirotope

Donat un conjunt de vectors en $\mathbb{R}^d$, podem assignar una orientació a cada subconjunt de cardinal d a partir de la funció *chirotope*.

Definició 1.1.1. *Donat un conjunt de n vectors $(p_1, \cdots, p_n)$ en l'espai d-dimensional $\mathbb{R}^d$ denotem $[n]^d$ a un conjunt de d índexs ordenats. Un **chirotope** és una funció $\chi : [n]^d \longrightarrow \{+, 0, -\}$ definida per*

$$\chi(a_1, a_2, \cdots, a_d) \longmapsto signe(det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ p_{a_1} & p_{a_2} & \cdots & p_{a_d} \\ | & | & & | \end{pmatrix})$$

És a dir, el chirotope assigna l'orientació del subconjunt dels vectors amb aquests índexs.

En particular, si tenim un conjunt P en $\mathbb{R}^d$ tal que $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ amb $n \geq d$ aleshores el valor de $\chi(a_1, \cdots, a_d)$ determina si el vector p_{a_d} està situat a l'esquerra, dreta o dins de l'hiperplà $< p_{a_1}, p_{a_2}, \cdots, p_{a_{d-1}} >$.

En geometria combinatòria, el concepte de *chirotope* proporciona una manera de caracteritzar l'orientació relativa d'un conjunt de vectors en un espai euclidià. Això és especialment útil per estudiar les propietats combinatòries i topològiques dels conjunts de punts i vectors.

Per exemple en el cas d'orientació d'una base de l'espai vectorial:
Sigui $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió n. Diem que dues bases $(e_1, \cdots, e_n)$ i $(u_1, \cdots, u_n)$ tenen la mateixa orientació si

$$det_{(e_i)}(u_1, \cdots, u_n) > 0$$

És a dir, si el determinant de la base de vectors u_i en funció dels vectors de la base e_i tenen signe positiu.

Quan treballem en el pla $\mathbb{R}^2$, és convenient utilitzar una formulació diferent del chirotope que anomenem **chirotope afí**. Aquesta fa servir coordenades de punts en lloc de vectors. Particularment útil per analitzar la col·linearitat i l'orientació relativa dels punts en el pla.

Definició 1.1.2. *Donat un conjunt de n punts etiquetats en el pla $\mathbb{R}^2$, $A = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ amb $p_i = (x_i, y_i)$, es defineix **Chirotope afí** com la funció $\chi_A : [n]^3 \longrightarrow \{+, 0, -\}$ que assigna una orientació $\chi_A(a, b, c)$ a cada tripleta de vectors (p_a, p_b, p_c) com segueix:*

$$\chi_A(a, b, c) \longmapsto signe(det \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix})$$

Aquesta matriu és la representació augmentada de les coordenades dels punts amb una fila addicional d'1s. El signe del determinant ens indica l'orientació relativa dels punts: positiu si els punts estan en ordre antihorari, negatiu si estan en ordre horari, i zero si els punts són col·lineals.

Geomètricament, això significa que $\chi_A(a, b, c) = +$ si el punt p_c està a l'esquerra de la recta $\overrightarrow{p_a p_b}$. Anàlogament, $\chi_A(a, b, c) = -$ si el punt p_c se situa a la dreta de la recta i finalment el *chirotope* és nul si $p_c \in \overrightarrow{p_a p_b}$.

Així, mentre que el chirotope vectorial es preocupa de la independència lineal i l'orientació en un context vectorial, el chirotope afí adapta aquests conceptes per treballar amb la geometria dels punts en el pla. Aquesta distinció és crucial per l'estudi de configuracions de punts i les seues propietats geomètriques com la d'aquest treball.

Ara bé, com en aquest treball estudiem els conjunts del pla en posició general i ordenats, no tindrem mai la situació de conjunt **degenerat**, és a dir, no existirà una tripleta de punts amb orientació nul·la.

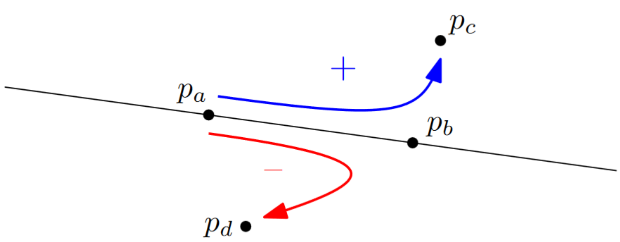


Figura 1.1: [1] Un *chirotope* $\chi_A(a, b, c) = +$ i un altre on $\chi_A(a, b, d) = -$.

Definició 1.1.3. *Diem que una bijecció $f : S \longrightarrow S'$ entre conjunts ordenats finits de punts S i S' **preserva l'orientació** si $\chi_{S'}(f(a), f(b), f(c)) = \chi_S(a, b, c)$, per a tot $(p_a, p_b, p_c) \in S$.*

A partir de l'orientació donada pel *chirotope afí* podem definir la següent relació.

Definició 1.1.4. *Dos **conjunts ordenats de punts** P **i** Q **són idèntics per orientació**, $P \sim Q$, si i només si $\chi_P = \chi_Q$. És a dir, donat $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ i $Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ es compleix:*

$$P \sim Q \iff \chi_P(i, j, k) = \chi_Q(i, j, k) \;\; \forall (i, j, k) \in [n]^3, \;\; k \neq i, j$$

Aleshores definida aquesta relació, si tenim n punts en el pla, els podem etiquetar de diverses maneres i formar diferents conjunts que mitjançant l'orientació queden agrupats en diferents classes d'equivalència de

$$(\mathbb{R}^2)^n \big/ \sim$$

És aquí on trobem les diferents classes $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ que indiquen les diferents orientacions possibles en conjunts de n punts en el pla. Cada classe és el que anomenem **tipus d'ordre**.

Definició 1.1.5. *Diem que dos conjunts ordenats P i Q* ***tenen el mateix tipus d'ordre*** *si existeix una bijecció entre ells que preserva l'orientació i que, per tant, pertanyen a la mateixa classe d'equivalència definida per la relació d'orientació.*

Capítol 2

Dualitat en $\mathbb{S}^2$

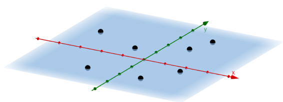
El Teorema principal del treball fa referència als tipus d'ordre de punts en el pla, però els conceptes que es desenvolupen per demostrar-lo són sobre l'esfera.
En aquest Capítol, veiem com un conjunt de punts del pla és equivalent a un conjunt semiesfèric. A més a més, veurem resultats i aplicacions dels conjunts sobre l'esfera que ens seran útils per desenvolupar el treball.

2.1 Projecció estereogràfica

Es pot definir una aplicació que li assigna a qualsevol conjunt de punts de $\mathbb{R}^2$ amb un tipus d'ordre assignat un conjunt de punts en un hemisferi obert amb el signe χ del *chirotope*, d'aquesta manera, es relaciona i es fa equivalent el tipus d'ordre d'un conjunt de $\mathbb{R}^2$ amb el tipus d'ordre del mateix conjunt de $\mathbb{S}^2$.

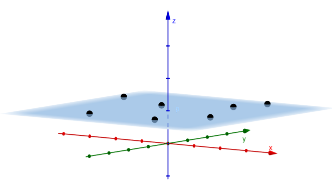
Aquest procés rep el nom de **projecció estereogràfica** i el podem descriure com segueix.

1. Tenim n punts del pla $\mathbb{R}^2$.



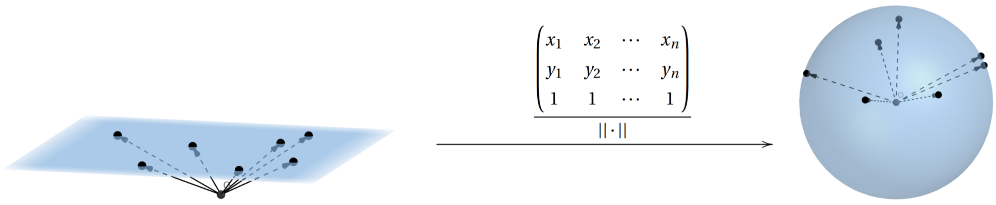
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

2. Ara, traslladem aquests punts a l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$ afegint una nova component $z = 1$. Observem que la configuració global del conjunt roman inalterada.



$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3. Finalment, si els punts els visualitzem com vectors de $\mathbb{R}^3$, aquests es poden escalar a norma igual a 1 mitjançant la *Norma euclidiana*, $|| \cdot || = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$. D'aquesta manera, tots els punts acaben traslladats a l'esfera unitària $\mathbb{S}^2$, formant un conjunt semiesfèric.



En particular, cada transformació d'aquest tipus envia:

rectes $\longmapsto$ grans cercles.

segments $\longmapsto$ arcs de grans cercles.

Aleshores, si el conjunt del pla està en posició general el conjunt semiesfèric també, ja que al no haver tres punts alineats en una recta no hi haurà tres punts de la semiesfera $\mathbb{S}^2$ coplanaris amb l'origen O.

2.2 Arranjament en $\mathbb{S}^2$

Definició 2.2.1. *En l'esfera $\mathbb{S}^2$, definim el **dual d'un punt** p com el gran cercle p^* format per la intersecció de $\mathbb{S}^2$ amb el pla que conté l'origen O i és ortogonal al vector $\vec{p}$.*

Si aquest procés de dualització l'apliquem a un conjunt semiesfèric S, obtenim l'arranjament de grans cercles de S.

Definició 2.2.2. *Defminim **arranjament de grans cercles de** S com S^*. És el conjunt de cercles duals p^* formats pels punts p de S. És a dir,*

$$S^* = \{p^* : p \in S\}$$

Aleshores, si P és un conjunt projectiu de $2n$ punts en posició general, com les parelles d'antípodes tenen el mateix gran cercle dual, P^* és la intersecció de n grans cercles.

Aquest procés de dualitat amb elements de l'esfera determina una bijecció entre punts i grans cercles:

punt $p \longmapsto$ gran cercle p^*.

gran cercle $p^* \longmapsto$ punt $p = (p^*)^*$.

Donat que un conjunt projectiu P està en posició general si i només si mai tres punts pertanyen a un mateix gran cercle, tots tres de diferents parelles d'antípodes. Podem fixar la següent noció:

Definició 2.2.3. *P^* està **en posició general** si i només si no hi ha tres grans cercles del conjunt que tinguin un mateix punt en comú.*

Ara bé, tots els grans cercles estan formats per plans que contenen l'origen O i, per tant, dos grans cercles diferents sempre es creuaran.

Lema 2.2.4. *Dos grans cercles diferents de $\mathbb{S}^2$ sempre es creuen dos cops en una parella d'antípodes.*

Demostració. La intersecció de dos grans cercles en $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, és la intersecció de dos plans que contenen l'origen O amb l'esfera.
Si anomenem F_1 i F_2 als plans que formen els dos cercles, aplicant la fórmula de Grassman:

$$dim(F_1) + dim(F_2) = dim(F_1 + F_2) + dim(F_1 \cap F_2)$$

$$2 + 2 = 3 + dim(F_1 \cap F_2)$$

$$dim(F_1 \cap F_2) = 1$$

Podem confirmar llavors que la intersecció de dos plans diferents en $\mathbb{R}^3$ és una recta i com passa per l'origen O, punt en comú dels dos plans, en intersecar-la amb l'esfera $\mathbb{S}^2$ origina les dues antípodes p i $-p$ que són la intersecció dels dos grans cercles. $\square$

Aleshores, si a un conjunt projectiu P li apliquem aquest procés de dualitat, obtenim P^*, que és un conjunt de grans cercles que s'intersequen dos a dos sempre dues vegades. Aquest arranjament de grans cercles es pot visualitzar com un graf, on cada intersecció representa un **vèrtex** i els arcs entre les interseccions dels grans cercles actuen com a **arestes** del graf.

Definició 2.2.5. *Un graf és **pla** si està dibuixat en l'esfera $\mathbb{S}^2$ (o, equivalentment, en el pla $\mathbb{R}^2$ mitjançant la projecció estereogràfica) de manera que les seues arestes només es toquen en els vèrtexs, és a dir, que no hi ha encreuaments d'arestes.*

Això vol dir que existeix una representació del graf en la qual és possible traçar totes les arestes com a línies corbes o rectes sense que es tallen mútuament, excepte en els seus vèrtexs.

Definició 2.2.6. *Qualsevol graf pla descompon en un nombre finit de regions connexes, que són el que anomenem **cares**.*

La fórmula d'Euler estableix una relació entre el nombre de vèrtexs, arestes i cares vàlida per qualsevol graf pla.

Teorema 2.2.7. *([2])(Fórmula d'Euler) Sigui G un graf pla connex amb v vèrtex, e arestes i f cares, aleshores:*

$$f + v = e + 2$$

Demostració. Sigui $T \subseteq E$, E el conjunt d'arestes d'un arbre generador de G, és a dir, un subgraf minimal que connecta tots el vèrtex de G i aquest no té cicles per la suposició de minimalitat.
Ara necessitem el graf dual G^* de G. Per construir-lo posem dins de cada cara de G un vèrtex i per cada aresta de G que separa dues cares connectem els vèrtexs corresponents

de G^* mitjançant una aresta.
Considerem la col·lecció $T^* \subseteq E^*$ d'arestes en el graf dual que es corresponen a les arestes $E \setminus T$. El conjunt d'arestes T^* connecta totes les cares, ja que T no té cicles i T^* tampoc. Així doncs, T^* és un arbre generador de G^*.
Per cada arbre, el nombre de vèrtexs és un més que el d'arestes. Per veure-ho, elegim un vèrtex com arrel i dirigim totes les arestes "cap a l'arrel". Això dona lloc a una bijecció entre els vèrtexs que no són arrels i les arestes on cada aresta es correspon amb el vèrtex des del qual surt.
Aplicant-ho a l'arbre T obtenim que $V = A_T + 1$, mentre que per l'arbre T^* obtenim que $C = A_{T^*} + 1$. Sumant les dues igualtats obtenim la fórmula que volem demostrar:

$$V + C = (A_T + 1) + (A_{T^*} + 1) = A + 2$$

□

Observació 2.2.8. La fórmula d'Euler estableix una relació numèrica a partir d'una situació mètrica-topològica entre les cares, vèrtexs i arestes dels grafs finits que estan dibuixats en el pla o l'esfera.

Si apliquem el Lema 2.2.4 i el Teorema 2.2.7 obtenim el següent resultat.

Lema 2.2.9. *L'arranjament de grans cercles P^* d'un conjunt projectiu P qualsevol de $2n$ punts dóna lloc a un graf pla amb:*

1. $2\binom{n}{2}$ ***vèrtexs***
2. $4\binom{n}{2}$ ***arestes***
3. $2\binom{n}{2} + 2$ ***cares***

Demostració. Donat un conjunt projectiu P de $2n$ punts, com les parelles d'antípodes tenen el mateix gran cercle dual, llavors P^* és la intersecció de n grans cercles diferents.

A partir del Lema 2.2.4, podem afirmar que cada gran cercle interseca dos cops amb els altres $n-1$ grans cercles, és a dir, cada parella possible dels n cercles duals té dues interseccions. Per tant, tenim $2\binom{n}{2}$ interseccions, que són els $2\binom{n}{2}$ vèrtexs.

A més, el fet que sempre que dos grans cercles es creuen i ho fan en un vèrtex, implica que l'arranjament és un graf pla. En conseqüència, de cada vèrtex sempre surten 4 arcs de cercles duals que van a parar al punt antipodal. Per tant, cada parella de vèrtexs sempre està unida per 4 arestes diferents, i com a conseqüència el nombre total d'arestes és $4\binom{n}{2}$.

Finalment, com tenim un graf pla amb $2\binom{n}{2}$ vèrtex i $4\binom{n}{2}$ podem aplicar el Teorema 2.2.7 i confirmar que el nombre de cares és $f = 2\binom{n}{2} + 2$. □

En particular, P^*, l'arranjament de n grans cercles, té $2\binom{n}{2} + 2$ cares diferents de dimensió 2.

Definició 2.2.10. *Anomenem **cel·les** a aquestes $2\binom{n}{2} + 2$ cares que es formen en el graf de l'arranjament dual.*

Capítol 3

Els tipus d'ordre

Anomenem ϕ al conjunt de les configuracions de n punts del pla que no estan en posició general. Si agrupem la resta de conjunts a partir de la relació $\sim$, definida en 1.1.4, obtenim les diferents classes d'equivalència de

$$(\mathbb{R}^2)^n \setminus \phi \big/ \sim$$

Definició 3.0.1. *Anomenem **tipus d'ordre simple** al tipus d'ordre on tots els punts del conjunt estan en posició general.*

Donat que en aquest treball estudiem punts en l'esfera, els tipus d'ordre dels punts són definits a partir del chirotope afí i, per tant, podem identificar els tipus d'ordre de la següent manera.

Definició 3.0.2. *Anomenem **tipus d'ordre afí** a una classe d'equivalència de conjunts semiesfèrics amb el mateix tipus d'ordre, és a dir, aquells conjunts de punts en la semiesfera entre els quals existeix una bijecció que preserva l'orientació del chirotope afí.*

Qualsevol conjunt semiesfèric A de n punts defineix un conjunt projectiu $A \cup -A$ de $2n$ punts sobre l'esfera $\mathbb{S}^2$ aquest conjunt projectiu és la terminació projectiva de A.

Definició 3.0.3. *Anomenem **terminació projectiva** d'un conjunt semiesfèric A de n punts al conjunt projectiu $A \cup -A$ de $2n$ punts.*

Aleshores, donat un conjunt projectiu, a aquest també se li pot assignar un tipus d'ordre. Però, per definir-lo bé com en el cas dels conjunts semiesfèrics i assignar-li una classe d'equivalència ben definida, cal primer introduir més conceptes.

Definició 3.0.4. *Donat un conjunt projectiu P, anomenem **tipus d'ordre projectiu de** P al conjunt dels diferents tipus d'ordre afí que defineixen els diferents conjunts semiesfèrics que podem trobar en P.*

És a dir, donat un conjunt projectiu P de $2n$ punts ordenats, podem obtenir diferents conjunts semiesfèrics A de n punts tals que $P = A \cup -A$. El conjunt de totes aquestes classes d'equivalència de tipus d'ordre afí diferents dels conjunts A formen un tipus d'ordre projectiu, el tipus d'ordre projectiu de P.

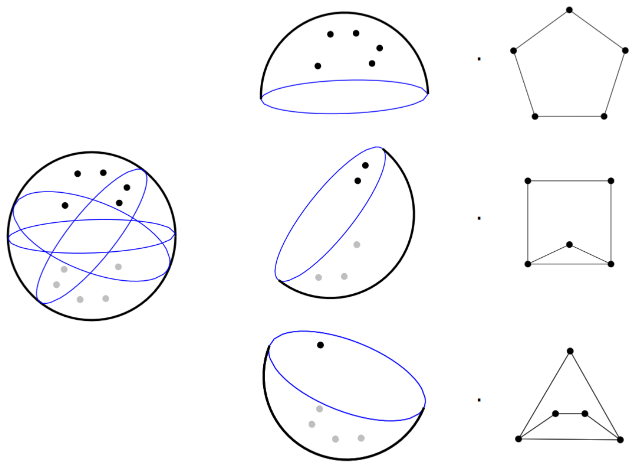


Figura 3.1: [1] Tipus d'ordre projectiu d'un conjunt projectiu de 10 punts que conté els tres tipus d'ordre afí simples diferents de 5 punts.

Notació 1. *Denotarem de la següent forma els diferents conjunts de tipus d'ordre:*

- LOT_n^{aff} *:= Conjunt de tots els tipus d'ordre afí simple etiquetats dels conjunts de punts de mida n.*
- OT_n^{aff} *:= Conjunt de tots els tipus d'ordre afí simple dels conjunts de punts de mida n.*
- LOT_n^{proj} *:= Conjunt de tots els tipus d'ordre projectiu simple etiquetats dels conjunts de punts de mida $2n$.*
- OT_n^{proj} *:= Conjunt de tots els tipus d'ordre projectiu simple dels conjunts de punts de mida $2n$.*

En particular,

$$LOT_n^{aff} = {}^{(\mathbb{R}^2)^n \setminus \phi}\big/_{\sim}$$

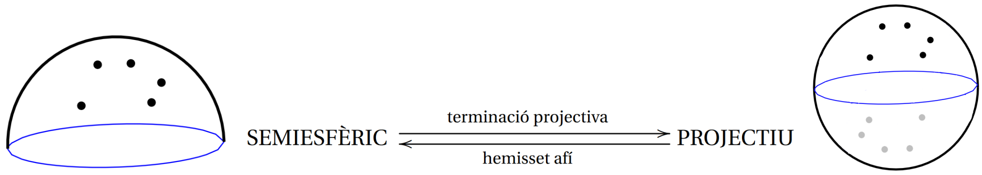
3.1 Hemissets

Hem anomenat terminació projectiva d'un conjunt semiesfèric A de n punts al conjunt projectiu $A \cup -A$ de $2n$ punts.

En l'altre sentit tenim el concepte d'**hemisset**, aquest ens serà molt útil per associar un conjunt semiesfèric amb el seu conjunt projectiu i, per tant, relacionar tipus d'ordre afí amb tipus d'ordre projectiu.

Definició 3.1.1. *Es defineix l'**hemisset d'un conjunt projectiu** P amb $2n$ punts com la intersecció de P amb un hemisferi tancat, és a dir, un hemisset és un subconjunt de n punts de P en una semiesfera.*

Definició 3.1.2. *És defineix l'**hemisset afí d'un conjunt projectiu** P amb $2n$ punts com la intersecció de P amb un hemisferi obert, és a dir, un hemisset afí és un hemisset que no conté cap parella d'antípodes.*



Lema 3.1.3. *Un conjunt projectiu P és la terminació projectiva d'un conjunt semiesfèric A si i només si A és un hemisset afí de P.*

Demostració. Sigui P un conjunt projectiu i A un conjunt semiesfèric.
($\Longrightarrow$) Sigui $P = A \cup -A$ un conjunt projectiu, volem veure que A és hemisset afí, és a dir, que A està contingut en un hemisferi obert o que no conté parelles d'antípodes. Qualsevol hemisferi obert Σ que conté A, aquest no té cap punt de P a la frontera. $-A$ són les antípodes de A i, per tant, la clausura de Σ, hemisferi tancat, interseca P en A. En conclusió, A està contingut en un hemisferi obert.
($\Longleftarrow$) Sigui A un hemisset afí, és a dir podem definir A com $A = \Sigma \cap P$ on Σ és algun hemisferi tancat. Volem veure que P és la terminació projectiva de A. Podem veure que $\forall p \in P \setminus A$ està en l'interior de $-\Sigma$ i, per tant, $-p \in P \cap \Sigma = A$ que implica $-p \in -A$. En conclusió, $P = A \cup -A$. □

Observació 3.1.4. Un conjunt semiesfèric està en posició general si i només si la seua terminació projectiva ho està.

Aleshores, donat un subconjunt de l'esfera, aquest el podem definir com hemisset si compleix les següents propietats:

Corol·lari 3.1.5. *(Caracterització dels hemissets) Sigui P un conjunt projectiu en posició general amb $|P| \geq 6$. Aleshores $B \subseteq P$ és hemisset de P sí, i només si:*

1. *B conté almenys un punt de cada parella d'antípodes de P.*

2. *L'embolcall convex de B no conté l'origen O en el seu interior, és a dir, tots els punts de B poden estar continguts en un mateix hemisferi.*

   A més a més, B és hemisset afí de P sí, i només si:

3. $|B| = \dfrac{|P|}{2}$

Demostració. Partim d'un conjunt projectiu P en posició general amb $|P| \geq 6$.
($\Longrightarrow$) Sigui B un hemisset de P, llavors B són els punts del conjunt projectiu en un hemisferi tancat i, per tant, es compleix (2). Veiem ara que tot hemisferi de $\mathbb{S}^2$ conté almenys un punt de cada parella d'antípodes.
Suposem $P = (x_1, x_{-1}, \cdots, x_n, x_{-n})$ on x_{-i} és l'antípoda del punt x_i. Definim Σ com un hemisferi de l'esfera i suposem que existeix un índex i tal que $x_i, x_{-i} \notin \Sigma$.
Sigui $v \in \mathbb{S}^2$ el centre de Σ. Per qualsevol altre punt p de l'hemisferi es verifica $\langle v, p \rangle \geq 0$. D'altra banda, si $x_i \notin \Sigma$ aleshores $\langle v, x_i \rangle < 0$ i com és l'antípoda de x_{-i}, $-x_i = x_{-i}$, això implica que:

$$\langle v, x_{-i} \rangle = \langle v, -x_i \rangle = -\langle v, x_i \rangle > 0$$

Per tant, $x_{-i} \in \Sigma$ que és una contradicció. Queda demostrat que tot hemisferi de l'esfera conté almenys un punt de cada parella d'antípodes de P i, per tant, es compleix (1).
($\Longleftarrow$) Si es compleix (2) podem concloure a partir de la implicació anterior que també succeeix la premissa (1) i com la definició de hemisset és exactament la intersecció dels punts de P amb un hemisferi tancat per la propietat (2) també implica directament que B és un hemisset.

Les implicacions per caracteritzar hemisset afí surten directament.
($\Longrightarrow$) Per definició es compleix que el nombre de punts de B és la meitat del nombre de punts de P.
($\Longleftarrow$) Suposant que $|P| = 2n$, llavors $|B| = n$. A més, com hi ha com a mínim un punt de cada parella d'antípodes en el mateix hemisferi llavors de les n possibles parelles no pot succeir tenir les dues en el conjunt B i, per tant, és hemisset afí. $\square$

3.1.1 Identificació dels hemissets

Sigui P un conjunt projectiu de $2n$ punts etiquetats de la forma següent.

$$P = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{-1}, x_{-2}, \cdots, x_{-n})$$

on x_{-i} és l'antípoda del punt x_i $\forall i = 1, \cdots, n$; és a dir que $x_{-i} = -x_i$.

Com ja hem explicat anteriorment si cada punt x_i del conjunt el visualitzem com el vector ortogonal del pla que passa per l'origen O, en intersecar aquest pla amb l'esfera, s'origina el gran cercle x_i^*. El gran cercle x_i^* separa la parella d'antípodes en dos hemisferis diferents, cadascun d'ells és el centre de l'hemisferi en el qual estan continguts.

A més a més, a partir de la definició geomètrica del producte escalar, podem afirmar que qualsevol altre punt de l'hemisferi compleix que té producte escalar no negatiu amb aquest x_i, centre de l'hemisferi, ja que l'angle entre ells sempre estarà entre 0 i 90 graus.

Anomenem Σ_i a l'hemisferi de l'esfera amb centre el punt $x_i \in P$.

$$\Sigma_i := \{u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, x_i \rangle \geq 0\}$$

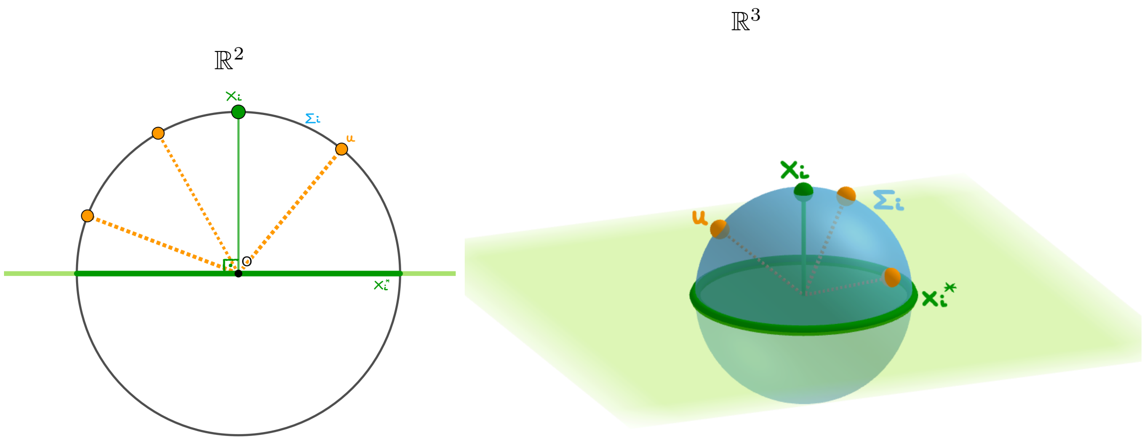
Denotem per Σ_{-i} a l'altre hemisferi que origina x_i, és a dir, l'hemisferi amb centre x_{-i}:

$$\Sigma_{-i} := \{u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, x_{-i} \rangle \geq 0\}$$

És obvi que

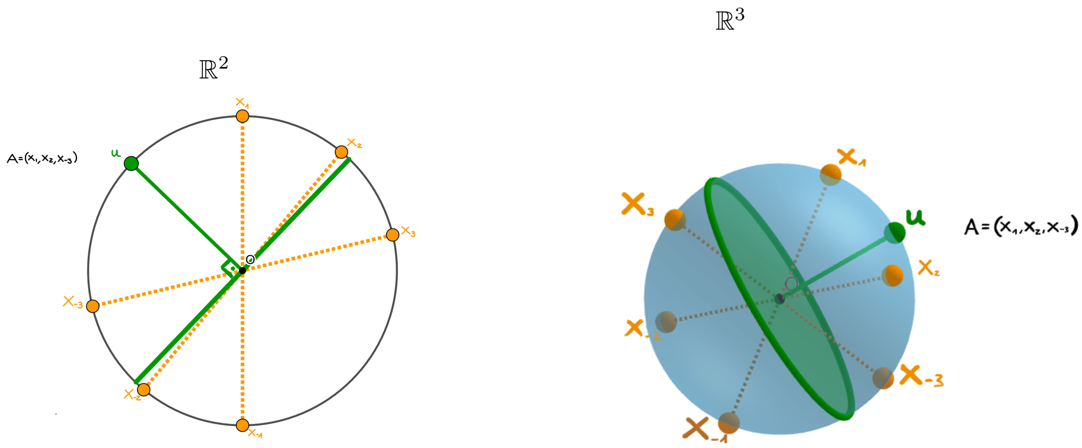
$$\Sigma_i \cap \Sigma_{-i} = x_i^*$$

$$x_i^* = \{u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, x_i \rangle = 0 = \langle u, x_{-i} \rangle\}$$



Llavors, com els hemissets afins són interseccions d'un conjunt projectiu amb un hemisferi obert, podem identificar tots els hemissets afins possibles d'un conjunt projectiu a partir de diferents punts de l'esfera i el producte escalar amb la desigualtat estricta. És a dir, es pot identificar qualsevol hemisset afí amb diferents punts de l'esfera, els quals tenen producte escalar positiu amb els n punts diferents del hemisset afí.

Definició 3.1.6. *Donat $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{-1}, x_{-2}, \cdots, x_{-n})$ un conjunt projectiu i A un hemisset afí de P, definim el conjunt $\widetilde{A} = \{u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, x_i \rangle > 0 \quad \forall x_i \in A\}$. El conjunt $\widetilde{A}$ és el que anomenem* ***identificador de l'hemisset afí A****.*



3.1.2 Hemissets i dualitat

Del fet que cada hemisset afí es pot identificar amb diferents punts de l'esfera podem deduir el següent resultat.

Lema 3.1.7. *Existeix una bijecció φ entre els hemissets afins d'un conjunt projectiu P i les cel·les de l'arranjament dual P^*.*

És a dir, per a cada hemisset afí A de P, hi ha una cel·la en l'arranjament dual P^* tal que tots els punts de la cel·la corresponen als punts de l'hemisset afí A a través de la bijecció φ.

Demostració. Demostrarem aquest resultat a partir dels identificadors dels hemissets afins. Veurem que tots els punts d'una mateixa cel·la de l'arranjament dual de P^* són l'identificador d'un dels hemissets afins que hi ha en el conjunt projectiu.

Considerem un conjunt projectiu P de $2n$ punts, etiquetat de la forma:

$$P = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{-1}, x_{-2}, \cdots, x_{-n})$$

on x_{-i} és l'antípoda del punt x_i per $i = 1, \cdots, n$.

Com hem introduït en la Secció 2.2, denotem per x_j^* el dual del punt x_j, que és el gran cercle format per la intersecció de $\mathbb{S}^2$ amb el pla que conté O i és ortogonal al vector x_j. Aquests grans cercles x_j^* corresponen als cercles duals que formen la clausura dels hemisferis Σ_j, on Σ_j és l'hemisferi centrat en x_j per a $j = \pm 1, \cdots, \pm n$.

Denotem per Σ^* l'arranjament de tots aquests grans cercles x_i^*, arranjament que forma un conjunt idèntic a P^*.

Les cel·les que s'originen en l'esfera per l'arranjament Σ^* són les regions d'intersecció de n hemisferis Σ_j oberts. Aquests punts de les cel·les tenen producte escalar positiu amb n diferents $x_j \in P$ i, per tant, compleixen la definició d'identificador d'hemisset afí.
En conclusió, aquests punts són tots els identificadors del mateix hemisset afí, és a dir, cada cel·la diferent de l'arranjament de P^* correspon a un identificador d'hemisset afí diferent. $\square$

Continuant amb la mateixa notació veiem com la cel·la que es forma en l'esfera per la intersecció de tots els hemisferis generats per Σ_i en l'arranjament dels grans cercles correspon a l'hemisset afí $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, donat que per definició:

$$\Sigma_i := \{u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, x_i \rangle > 0\}$$

i, per tant,

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \Sigma_i := \{u \in \mathbb{S}^2 : \langle u, x_i \rangle > 0 \quad \forall i = 1, \cdots, n\}$$

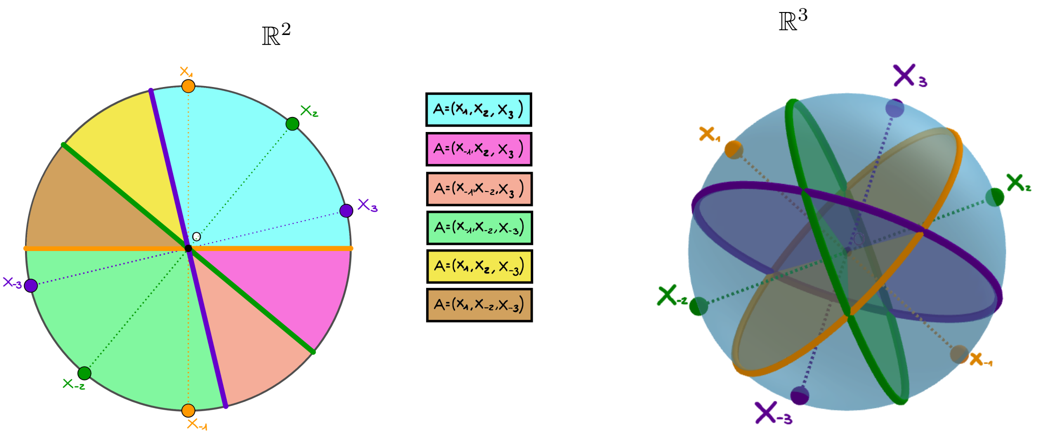
Com a conseqüencia veiem que l'dentificador de l'hemisset afí $A = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\widetilde{A}$, compleix:

$$\widetilde{A} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \Sigma_i$$

De manera anàloga, per a qualsevol altra cel·la de l'arranjament, si en lloc d'agafar l'hemisferi Σ_i amb centre en x_i, agafem l'hemisferi oposat Σ_{-i} que té com a centre el punt $-x_i$, obtindrem una nova cel·la formada pel conjunt d'identificadors de l'hemisset afí $(\pm x_1, \pm x_2, \cdots, \pm x_i, \cdots, \pm x_n)$. Això significa que si seleccionem Σ_i, el punt x_i formarà part de l'hemisset, mentre que si seleccionem Σ_{-i}, el punt $-x_i$ és qui forma part de l'hemisset.

Per tant, si φ és la bijecció entre els hemissets afins de A de P i les cel·les de l'arranjament dual P^*

$$p \in \varphi(A) \Longleftrightarrow p \in \widetilde{A}$$



A més a més, podem veure que dos hemissets que estan en bijecció amb dues cel·les del mateix arranjament dual tenen els elements relacionats. En efecte,

Lema 3.1.8. *Sigui P un conjunt projectiu amb arranjament dual P^*. Suposem que hi ha dues cel·les $\varphi(A)$ i $\varphi(B)$ separades per una única aresta formada pel gran cercle x_i^* on x_i és un punt de P. Aleshores, l'únic element que tenen diferent els hemissets amb els que estan en bijecció les cel·les $\varphi(A)$ i $\varphi(B)$ és el punt x_i.*
A més, aquesta diferència és que un d'ells conté el punt x_i i l'altre la seua antípoda x_{-i}.

Demostració. Siguin A i B dos hemissets afins que estan en bijecció amb les cel·les de l'arranjament $\varphi(A)$ i $\varphi(B)$ separades solament pel gran cercle dual x_i^*.

El gran cercle x_i^* de l'arranjament està generat pels punts x_i i $x_{-i} = -x_i$ del conjunt projectiu. Aquests són els centres dels hemisferis Σ_i i Σ_{-i}, i cadascun forma part de la intersecció d'hemisferis que generen $\varphi(A)$ i $\varphi(B)$ respectivament.

Si ens situem en qualsevol punt de $\varphi(A)$ i creuem l'aresta x_i^*, estem canviant d'hemisferi a l'oposat. Per tant, qualsevol punt u de l'esfera que haguem escollit no formarà part de l'hemisferi Σ_i sinó que serà de l'hemisferi Σ_{-i}. És a dir, $\langle u, x_i \rangle < 0$ i $\langle u, x_{-i} \rangle > 0$.
A més, com no hem creuat cap altre gran cercle de l'arranjament, els punts de la nova cel·la formen part dels mateixos altres hemisferis i continuen complint $\langle u, x_j \rangle > 0$ pels mateixos x_j que abans.

En conclusió, l'únic punt que ha canviat en els identificadors dels hemisset són x_i per x_{-i} i, per tant, l'únic punt que es diferencia entre els hemissets A i B són x_i i $-x_i$ respectivament. $\square$

Finalment, per tancar la Secció, a partir del Lema 3.1.7 obtenim el següent resultat.

Corol·lari 3.1.9. *Sigui P un conjunt projectiu de $2n$ punts en posició genera amb $n \geq 3$. Aleshores en P hi ha $2\binom{n}{2} + 2$ hemissets afins diferents.*

Demostració. Donat un conjunt projectiu P de $2n$ punts, pel Lema 2.2.9 podem afirmar que en l'arranjament dual P^* de n grans cercles hi ha $2\binom{n}{2} + 2$ cel·les.
Aleshores si apliquem el Lema 3.1.7 tenim que el conjunt P té $2\binom{n}{2} + 2$ hemisets afins diferents. $\square$

3.2 Relació entre tipus d'ordre afí i projectiu

Un cop definits els hemissets i emparentats els conjunts semiesferics amb els conjunts projectius, ja podem relacionar els tipus d'ordre afí amb els tipus d'ordre projectiu.

Donat un conjunt projectiu simple i etiquetat de $2n$ punts, en ell trobem diferents conjunts semiesfèrics de mida n amb tipus d'ordre afí. Aquests tipus d'ordre afí, són les diferents classes d'equivalència $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ de conjunts semiesfèrics diferents.
És a dir, a partir d'un conjunt projectiu simple i etiquetat de $2n$ punts obtenim diferents hemissets afins de mida n que, en assignar-los-hi l'orientació a partir de la funció chirotope, s'originen les diferents classes d'equivalència χ_i.

$$\chi_i \in LOT_n^{aff} \ \ \forall i \in \{1, \cdots, m\}$$

Aleshores, si aquest conjunt projectiu de $2n$ punts simple i etiquetat l'anomenem P i li assignem tipus d'ordre projectiu $[\chi]$, $[\chi] \in LOT_n^{proj}$. Llavors, $[\chi]$ conté els $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$, tipus d'ordre afí diferents que s'obtenen de tots els conjunts semiesferics de P.

L'objectiu d'aquesta Secció és relacionar els tipus d'ordre afí diferents entre ells, és a dir, volem determinar quan dos tipus d'ordre afí χ_i, χ_j estan relacionats.

3.2.1 Reorientació

Donat un conjunt semiesfèric A en assignar-li una orientació a partir del chirotope obtenim el tipus d'ordre afí χ_A contingut en LOT_n^{aff}. Per tant,

Definició 3.2.1. *Donats dos tipus d'ordre afí χ_A, χ_B de conjunts semiesfèrics de mida n, diem que un és una **reorientació** de l'altre si i només si, existeix $S \subseteq [n]$ tal que*

$$\chi_A(a_1, a_2, a_3) = (-1)^{\varepsilon_S} \chi_B(a_1, a_2, a_3)$$

per tot índex $a_i \in [n]$ on $\varepsilon_S := \#\{i : a_i \in S\}$

Notació 2.

$$\chi_A \approx \chi_B \iff \chi_A \text{ és reorientació de } \chi_B$$

A partir d'aquest concepte podem relacionar els tipus d'ordre afins diferents entre ells. Concretament, la relació de reorientació implica que dos tipus d'ordre afins diferents estan relacionats si els dos tipus d'ordre afí es poden trobar en el mateix tipus d'ordre projectiu.

3.3 Reorientació d'hemissets

Un cop definits i desenvolupats els conceptes d'hemissets fent ús de la relació de reorientació, podem agrupar diferents conjunts semiesfèrics.

Lema 3.3.1. *Siguin A i B dos hemissets afins diferents. Aleshores $\chi_A \approx \chi_B$ si i només si existeix un hemisset afí B' de la terminació projectiva $A \cup -A$ tal que $\chi_{B'} = \chi_B$.*

Demostració. Sigui A un hemisset afí de n punts.

($\Longleftarrow$) Sigui B' hemisset afí de la terminació projectiva $A \cup -A$. Per veure que $\chi_{B'} = \chi_B$ n'hi ha prou en veure que $\chi_{B'} \approx \chi_A$.

Per definició, aquesta implicació és directa, ja que si apliquem el Lema 3.1.7 podem afirmar que els hemissets B' i A que són de la mateixa terminació projectiva, estan en bijecció amb dues cel·les de l'arranjament dual i, per tant, pel Lema 3.1.8 podem afirmar que l'orientació de cada hemisset es diferencia de l'altre depenent dels punts que tenen en comú, és a dir, es compleix que:

$$\chi_{B'}(a_i, a_j, a_k) = (-1)^{n-r} \chi_A(a_i, a_j, a_k)$$

on r és el nombre de punts de la terminació projectiva que pertanyen als dos hemissets B' i A.
Es compleix, doncs, la definició de reorientació, $\chi_{B'} \approx \chi_A$ i, per tant, $\chi_B \approx \chi_A$.

($\Longrightarrow$) Suposem $\chi_B \approx \chi_A$. VOlem veure que existeix un hemisset de $B' \subset A \cup -A$ tal que $\chi_B = \chi_{B'}$.
Per definició, existeix $S \subseteq [n]$ tal que

$$\chi_A(a_1, a_2, a_3) = (-1)^{\varepsilon_S} \chi_B(a_1, a_2, a_3)$$

per tot índex $a_i \in [n]$ sent $\varepsilon_S = \#\{i : a_i \in S\}$.

Ara bé, pel Lema 3.1.8 podem assegurar que existeix un hemisset B' de la terminació projectiva de A tal que:

$$\chi_A(a_1, a_2, a_3) = (-1)^r \chi_{B'}(a_1, a_2, a_3)$$

per tot índex $a_i \in [n]$ sent r el nombre de punts amb índex que no tenen en comú els dos hemissets.

I, per tant, es compleix que $\varepsilon_S = r$, és a dir:

$$\chi_B(a_1, a_2, a_3) = \chi_{B'}(a_1, a_2, a_3) \quad \forall a_i \in [n]$$

En conclusió, existeix $B' \subset A \cup -A$ tal que $\chi_B = \chi_{B'}$. □

Per tant, no solament agrupem diferents conjunts semiesfèrics en una mateixa classe d'equivalència si aquests tenen el mateix tipus d'ordre afí.
Ara agrupem conjunts semiesfèrics amb tipus d'ordre diferent en una mateixa classe més gran depenent del conjunt projectiu en el qual pertanyen.

$$(\mathbb{R}^2)^n \setminus \phi \big/ \approx$$

És a dir, els conjunts semiesfèrics amb diferents orientacions estan en la mateixa classe d'equivalència si aquests són reorientacions entre ells, que equival a dir que hemissets afins diferents formen la mateixa terminació projectiva.

En conclusió, obtenim classes d'equivalència de tipus d'ordre afí que són molt més grolleres que abans i engloben molts més conjunts semiesfèrics diferents.

Ara sí, que sí, podem definir tipus d'ordre projectiu de forma general.

Definició 3.3.2. *Anomenem **tipus d'ordre projectiu** a una classe d'equivalència de conjunts semiesfèrics amb diferents tipus d'ordre afí, però que són reorientacions entre ells. És a dir, un conjunt de diferents tipus d'ordre afí que compleixen que cadascun és reorientació d'un altre.*

Aplicant la Notació 1, obtenim la següent igualtat.

$$LOT_n^{proj} = {(\mathbb{R}^2)^n \setminus \phi} \big/ {\approx}$$

En definitiva, un tipus d'ordre projectiu és una classe d'equivalència de diferents tipus d'ordre afí agrupats per la relació de reorientació. Per tant, fent ús del Lema 3.3.1 i del Lema 2.2.9, obtenim el següent resultat.

Corol·lari 3.3.3. *Tota classe d'equivalència per reorientació de* LOT_n^{proj} *té* $2\binom{n}{2} + 2$ *elements.*

Demostració. Sigui $[\chi] \in LOT_n^{proj}$ un tipus d'ordre projectiu qualsevol d'un conjunt projectiu P de $2n$ punts.
Volem veure quants elements té $[\chi]$, és a dir, quants tipus d'ordre afí diferents conté un tipus d'ordre projectiu qualsevol.

$$[\chi] = \{\chi_A, \chi_B, \cdots, \chi_N\} \ tq \ \chi_A \approx \chi_B \approx \cdots \approx \chi_N$$

Si A és un hemisset afí de P, aleshores $P = A \cup -A$.
Suposem que A té tipus d'ordre afí χ_A.

Pel Lema 3.3.1, existeixen hemissets afins $\{B', \cdots, N'\}$ en la terminació projectiva $A \cup -A$ amb tipus d'ordre afí $\{\chi_{B'}, \cdots, \chi_{N'}\}$, respectivament, tals que $\chi_B = \chi_{B'}$ per cadascun d'ells.

Ara bé, si apliquem el Corol·lari 3.1.9, veiem com el nombre total d'hemissets afins diferents de la terminació projectiva $A \cup -A$ és $2\binom{n}{2} + 2$.

Per tant, hi ha $2\binom{n}{2} + 2$ tipus d'ordre afí diferents i el nombre d'elements de $[\chi]$ és $2\binom{n}{2} + 2$ per qualsevol classe d'equivalència de reorientació $[\chi]$. $\square$

Capítol 4

Embolcall convex

Per assolir l'objectiu d'aquest treball ens cal introduir el concepte de punt extrem o vèrtex d'embolcall convex. Recordem que l'embolcall convex d'un conjunt és el politop resultant d'intersecar tots els convexos que contenen el conjunt. En el cas semiesfèric el podem caracteritzar com segueix.

Definició 4.0.1. *Donat un conjunt semiesfèric A, definim el seu* ***embolcall convex*** *com la intersecció de tots els hemisferis tancats que contenen el conjunt:*

$$conv(A) = \bigcap_{hemisferis\ tancats\ \Sigma \supseteq A} \Sigma$$

Per tant, donat un conjunt semiesfèric A, podem introduir la següent definició.

Definició 4.0.2. *Un punt p d'un conjunt semiesfèric A és un* ***vèrtex de l'embolcall del conjunt*** *o* ***punt extrem de l'embolcall convex*** *si existeix un gran cercle C que separa p de $A \setminus \{p\}$.*

En altres paraules, p és un ***punt extrem de l'embolcall convex de A*** *si p i $A \setminus \{p\}$ es troben en diferents components connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus C$.*

El següent resultat permet tenir una caracterització geomètrica.

Proposició 4.0.3. *Diem que un punt p d'un conjunt semiesfèric A és un punt extrem de l'embolcall convex de A si i només si, existeix un punt $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle v, p \rangle = 0$ i per a tot $q \in A \setminus \{p\}$ $\langle v, q \rangle > 0$.*

Demostració. Suposem que tenim un conjunt semiesfèric A de punts on p és un punt extrem de l'embolcall convex de A.
($\Longrightarrow$) Per definició, existeix un gran cercle que separa $A \setminus \{p\}$ del punt p en dos components connexes diferents, és a dir, existeix un hiperplà que passa pel punt p i tota la resta de punts de A els deixa en un mateix costat d'aquest.
Si imposem que el pla tingui vector normal v, implica que $\langle v, p \rangle = 0$ i tots els altres punts $q \in A \setminus \{p\}$ satisfan $\langle v, q \rangle > 0$ o $\langle v, q \rangle < 0$, podem imposar que v sigui el vector amb desigualtat $\langle v, q \rangle > 0$.

Si ho expressem en conceptes de l'esfera, l'hiperplà és un gran cercle que deixa el punt p en un hemisferi tancat de centre $-v$ i els punts $q \in A \setminus \{p\}$ en una altra component connexa, un hemisferi obert de centre $v \in \mathbb{S}^2$. Per tant, hem trobat un $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle v, p\rangle = 0$ i $\langle v, q\rangle > 0$ per a tot $q \in A \setminus \{p\}$.

($\Longleftarrow$) Suposem que existeix un vector $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle v, p\rangle = 0$ i $\langle v, q\rangle > 0$ per a tot $q \in A \setminus \{p\}$. El vector v defineix un punt de l'esfera, centre d'un hemisferi que conté el punt p en la seua clausura.
Aquest gran cercle que delimita l'hemisferi i conté p, per la condició $\langle v, q\rangle > 0 \ \ \forall q \in A\setminus\{p\}$ implica que tots els altres punts de A estan estrictament en un mateix hemisferi i, per tant, es comprova que p i $A \setminus \{p\}$ estan en diferents components connexes i es conclou que p és vèrtex de l'embolcall convex de A. $\square$

Ara podem introduir el concepte d'aresta de l'embolcall convex. Dos vèrtexs de l'embolcall formen una aresta de l'embolcall convex.

Definició 4.0.4. *Sigui A un conjunt semiesèric i $(p, q) \in A \times A$ una parella ordenada, amb $p \neq q$. Diem que (p, q) és* ***aresta extrema de A*** *o* ***aresta de l'embolcall convex*** *si per a tot $r \in A \setminus \{p, q\}$ el signe de l'orientació del chirotope afí és positiu, és a dir, $\chi(p, q, r) = +$.*

En definitiva, que la recta $\overrightarrow{pq}$ conté tota la resta de punts del conjunt en un dels seus costats, i seguint l'orientació descrita, tota la resta de punts estan exactament a l'esquerra de la recta.

En conclusió, el conjunt d'arestes de l'embolcall convex està format per totes les parelles ordenades (p, q) de punts del conjunt que mantenen la resta del conjunt a la seua esquerra, és a dir, que les rectes $\overrightarrow{pq}$ de les arestes defineixen el que és l'embolcall convex del conjunt.

Definició 4.0.5. *Un* ***ordre CCW dels punts extrems del conjunt semiesfèric*** *A és l'ordenació $(p_1, p_2, \cdots, p_h)$ dels punts extrems de A tal que per tot $i = 1, 2, \cdots, h$; (p_i, p_{i+1}) és una aresta extrema de A.*

Ara bé, anàlogament al punt extrem, podem caracteritzar el concepte d'aresta de l'embolcall convex del conjunt a partir del producte escalar.

Proposició 4.0.6. *Sigui A un conjunt semiesfèric i $(p, q) \in A \times A$ una parella ordenada. Aleshores, (p, q) és una aresta de l'embolcall convex de A si i només si, existeix un punt $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle v, p\rangle = 0$, $\langle v, q\rangle = 0$ i per a tot $r \in A \setminus \{p, q\}$ $\langle v, r\rangle > 0$.*

Demostració. Suposem que (p, q) és aresta de l'embolcall convex de A.
($\Longrightarrow$) Llavors existeix un pla que passa per p i q que deixa a tots els altres punts en el costat esquerre de la semiesfera. Si definim v com el vector ortogonal a aquest pla, es verifica $\langle v, p\rangle = 0$ i $\langle v, q\rangle = 0$.

A més, com tots els altres punts $r \in A \setminus \{p, q\}$ estan en un costat del pla, podem afirmar que $\langle v, r\rangle > 0$.
Per tant, hem trobat un $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle v, p\rangle = 0$, $\langle v, q\rangle = 0$ i $\langle v, r\rangle > 0$ per a tot $r \in A \setminus \{p, q\}$.

($\Longleftarrow$) Suposem ara que existeix un $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle v, p\rangle = 0$, $\langle v, q\rangle = 0$ i $\langle v, r\rangle > 0$ per a tot $r \in A \setminus \{p, q\}$.
El punt v defineix un gran cercle v^* que conté p i q i tota la resta de punts en un mateix hemisferi de centre v. Això implica que hi ha un pla que passa per p i q i deixa la resta

de punts en un costat d'aquest. Imposem que sigui la part esquerra. Aleshores, amb el signe del chirotope afí es compleix que $\chi(p,q,r) = +$ per a tot $r \in A \setminus \{p,q\}$ i, per tant, queda demostrat que (p,q) és aresta de l'embolcall convex de A. $\square$

Observació 4.0.7. Si assumim que estem en posició general i $|A| \geq 2$, un punt $p \in A$ és extrem si i només si, existeix un únic $q \in A$ tal que (p,q) és aresta de l'embolcall convex.

Definició 4.0.8. *Sigui A un conjunt semiesfèric, diem que A està en **posició convexa** si tot punt de A és extrem.*

Finalment, també podem caracteritzar l'embolcall convex d'un conjunt semiesfèric A a partir del producte escalar o el signe del chirotope afí:

Proposició 4.0.9. *Sigui A un conjunt semiesfèric A, amb $|A| \geq 3$. Aleshores,*

$$conv(A) = \{r \in \mathbb{S}^2 : \ \forall\ (p,q) \ \text{aresta extrema de } A\ , \ \ \chi(p,q,r) \geq 0\}$$

$$conv(A) = \{r \in \mathbb{S}^2 : \ \forall\, p \ \text{ punt extrem de } A, \ \ \langle r,p\rangle \geq 0\}$$

.

Demostració. Això és conseqüència de la Proposició 4.0.6 i la Proposició 4.0.3.
En efecte, l'embolcall convex és la intersecció dels hemisferis que contenen A i, per tant, acabarà donant lloc una regió de l'esfera on la frontera d'aquesta estarà formada per punts del conjunt, que seran vèrtexs i arestes i, en conseqüència, compliran en les proposicions esmentades donant lloc a les noves propietats. $\square$

4.1 Vèrtex de l'embolcall i de l'arranjament dual

Podem veure, doncs, que el producte escalar és eina clau per demostrar la bijecció entre hemissets i cel·les i caracteritzar el concepte de vèrtex de l'embolcall.

És, per tant, que a conseqüència del Lema 3.1.7 i de la Proposició 4.0.3, obtenim el resultat següent:

Corol·lari 4.1.1. *Sigui P un conjunt projectiu amb A un dels hemissets afins. Un punt $p \in A$ és extrem de l'embolcall convex de A si i només si el gran cercle p^* de l'arranjament dual P^* forma una de les arestes de la cel·la $\varphi(A)$, on φ és la bijecció entre els hemissets afins de P i les cel·les de l'arranjament dual P^*.*

Demostració. Denotem per φ la bijecció entre els hemissets i les cel·les de l'arranjament dual, és a dir, $A = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, aleshores:

$$\varphi(A) = \widetilde{A} = \{u \in \mathbb{S}^2 : \ \langle u, x_i\rangle > 0 \ \ \forall x_i \in A\}$$

.
$(\implies)$ Suposem que el punt x_i de l'hemisset afí A és vèrtex de l'embolcall convex de A. Volem veure que x_i^* forma l'aresta de la cel·la $\varphi(A)$, és a dir, que hi ha punts de x_i^* que són en la frontera de la cel·la. Donat que $\varphi(A) = \widetilde{A} = \{u \in \mathbb{S}^2 : \ \langle u, x\rangle > 0 \ \forall x \in A\}$, la seua clausura és $\overline{\varphi(A)} = \{u \in \mathbb{S}^2 : \ \langle u, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in A\}$.

Com x_i és punt extrem de l'embolcall de A, existeix $u \in \mathbb{S}^2$ tal que $\langle u, x_i\rangle = 0$ i $\langle u, x_j\rangle > 0$ per a tot $x_j \in A \setminus x_i$.

És a dir, hem trobat un punt $u \in x_i^*$ i a més en la clausura de $\overline{\varphi(A)}$, cosa que confirma que existeixen punts del gran cercle x_i^* que formen l'aresta de la cel·la la qual està en bijecció amb l'hemisset afí on x_i és vèrtex de l'embolcall.
($\Longleftarrow$) Les arestes de la cel·la, per la demostració anterior, estan formades pels grans cercles x_i^*, que són les clausures dels hemisferis Σ_i^*, els hemisferis de centre x_i. Per tant, tot punt del gran cercle anul·la el producte escalar amb el centre de l'hemisferi, és a dir, que si $u \in x_i^*$ aleshores $\langle u, x_i \rangle = 0$.
Ara bé, si agafem solament els punts de l'aresta, aquells punts de $\mathbb{S}^2$ que formen l'arc d'aquest gran cercle de la cel·la, veiem que $\langle u, x_i \rangle = 0$ i $\langle u, x_k \rangle > 0$ per a tot $x_k \in A \setminus \{x_i\}$. En definitiva, es compleix la Definició 4.0.3 i, per tant, x_i és punt extrem de l'embolcall convex de A. $\square$

Corol·lari 4.1.2. *Existeix una bijecció entre les cel·les de l'arranjament i els hemissets afins, on cada aresta de la cel·la està en bijecció amb un vèrtex de l'embolcall convex del hemisset afí.*

Capítol 5

Embolcall convex d'un tipus d'ordre

L'objectiu d'aquest Capítol és desenvolupar el resultat principal d'aquest treball.

Primer que tot, veurem que donada una classe de reorientació d'un tipus d'ordre afí la mitjana de nombre de vèrtexs de l'embolcall convex del conjunt semiesfèric és sempre el mateix:

Lema 5.0.1. *La mitjana de punts extrems entre els tipus d'ordre afí per una classe d'equivalència de reorientació és* $4 - \dfrac{8}{n^2 - n + 2}$.

Demostració. Volem veure que

$$\mathbb{E}(X_n|[\chi]) = 4 - \frac{8}{n^2 - n + 2}$$

Dir que volem calcular la mitjana de punts extrems en una classe de reorientació, pel Corol·lari 3.3.3, és equivalent a preguntar-nos quant és la mitjana de punts extrems entre els $2\binom{n}{2} + 2$ tipus d'ordre afí possibles de la terminació projectiva.

A més, com estem en un conjunt projectiu, aplicant el Lema 3.1.7 sabem que els hemissets del tipus d'ordre afí estan en bijecció amb les cel·les de l'arranjament dual d'aquest conjunt projectiu, que com hem vist també a partir del Teorema 2.2.7 són $2\binom{n}{2}+2$.

Encara més, si apliquem el Corol·lari 4.1.1, podem afirmar que els vèrtexs de l'embolcall convex dels hemissets estan en bijecció amb les arestes de les cel·les.

En conclusió, és equivalent:

1. La mitjana de punts extrems entre els $2\binom{n}{2}+2$ tipus d'ordre afí diferents de la classe de reorientació.

2. La mitjana d'arestes entre les $2\binom{n}{2} + 2$ cel·les diferents de l'arranjament dual del conjunt.

Si denotem per X_{n_i} als punts extrems de l'hemisset afí χ_i, tenim:

$$\mathbb{E}(X_n|[\chi]) = \sum_{i=1}^{C} X_{n_i}\mathbb{P}(\chi_i) = \sum_{i=1}^{C} |c_i|\mathbb{P}(c_i)$$

on $C = 2\binom{n}{2} + 2 = \#$ total d'hemissets afins $\chi_i = \#$ total de cares c_i i $|c_i| =$ Nombre d'arestes de la cara i.

Ara bé, com hi ha bijecció entre cel·les i tipus d'ordre afí, aquestes també estan distribuïdes uniformement i, per tant:

$$\sum_{i=1}^{C} |c_i|\mathbb{P}(c_i) = \frac{1}{2\binom{n}{2}+2}\sum_{i=1}^{C}|c_i| = \frac{4\binom{n}{2}}{2\binom{n}{2}+2}$$

Donat que $\sum_{i=1}^{C}|c_i|$ és equivalent al nombre total d'arestes i que podem trobar com a resultat del Lema 2.2.9.

En definitiva:

$$\mathbb{E}(X_n|[\chi]) = 4 - \frac{8}{n^2 - n + 2}$$

□

Ara sí que sí, ja tenim totes les eines per demostrar el Teorema principal.

Teorema 5.0.2. ***(Mitjana de punts extrems d'un tipus d'ordre)*** *Per $n \geq 3$, el nombre de vèrtexs de l'embolcall convex d'un tipus d'ordre aleatori simple etiquetat elegit uniformement entre tots els tipus d'ordre simples etiquetats de tamany n en el pla, té mitjana*

$$4 - \frac{8}{n^2 - n + 2}$$

.

Demostració. Donat que és el mateix tenir els punts en un pla que formant un conjunt semiesfèric, ens podem referir en la demostració a tipus d'ordre afí.

A més a més, donat que tots els tipus d'ordre afí estan distribuïts uniformement i tenen la mateixa probabilitat de ser elegits, és equivalent calcular l'esperança que la mitjana. Sigui M el nombre de vèrtex de l'embolcall convex d'un tipus d'ordre afí X qualssevol i n_i el nombre de punts extrems del conjunt semiesfèric N_i, conjunt que té tipus d'ordre afí X. Llavors,

$$\mathbb{E}(M) = \sum_{N_i \in X} n_i \mathbb{P}(N_i) = \sum_{N_i \in X} n_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{N_i \in X} n_i$$

on n és el nombre total d'elements en X i $\mathbb{P}(N_i)$ és la probabilitat de seleccionar N_i, que és igual per a tots els elements a causa de la distribució uniforme.
Per tant, en efecte l'esperança es equivalent a la mitjana.

Daltra banda,, trobar la mitjana de punts extrems en un tipus d'ordre afí aleatori és equivalent a calcular l'esperança dels vèrtexs de l'embolcall convex d'un tipus d'ordre afí aleatori.

Per tant, si definim X_n com el nombre de punts extrems en un tipus d'ordre afí, volem trobar doncs $\mathbb{E}(X_n)$.

En la Secció 3.2 hem vist que tot tipus d'ordre afí està inclòs en un tipus d'ordre projectiu. Aquest tipus d'ordre projectiu és la classe d'equivalència formada per la relació de reorientació. Per tant, aplicant la propietat d'esperança total tenim

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_n|[\chi_i])\mathbb{P}([\chi_i])$$

on els $[\chi_i]$ són totes les classes de reorientació possibles de LOT_n^{proj} que equivalen als tipus d'ordre projectiu en els quals pertanyen el tipus d'ordre afí.
A més, com tots els tipus d'ordre projectiu són agrupacions de tipus d'ordre afí distribuïts uniformement, llavors el tipus d'ordre projectiu també està distribuït uniformement i, per tant, $[\chi_1], [\chi_2], \cdots, [\chi_N]$ tenen la mateixa probabilitat. És a dir:

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_n | [\chi_i]) \frac{1}{N}$$

Finalment, a partir del Lema 5.0.1, que demostra que per tota classe de reorientació el nombre de punts extrems d'un tipus d'ordre afí és el mateix, ja podem concloure la mitjana total de punts extrems i demostrar el teorema:

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{N} (4 - \frac{8}{n^2 - n + 2}) \frac{1}{N} = 4 - \frac{8}{n^2 - n + 2}$$

□

En definitiva, la mitjana de vèrtexs de l'embolcall convex d'un tipus d'ordre aleatori simple etiquetat tendeix a 4 quan el nombre de punts del conjunt que formen el tipus d'ordre tendeix a infinit.

El nombre de vèrtexs de l'embolcall convex d'un tipus d'ordre és un invariant combinatori, és a dir, una propietat que es manté constant davant de transformacions del conjunt. La propietat de ser invariant es coneix com *invariància* i el seu descobriment ha sigut un pas important per al procés de classificació d'objectes matemàtics.

La conclusió, però, dista molt de la realitat. Els mètodes de mostreig d'algoritmes per veure aquest resultat donen com a resultat que l'invariant tendeix a infinit i, per tant, podem concloure que aquests algoritmes no tenen realment una distribució uniforme en els tipus d'ordre del conjunt.

Capítol 6

Conclusions

S'ha assolit satisfactòriament l'objectiu principal del treball. S'ha provat el Teorema i s'han desenvolupat tots els conceptes necessaris per a fer-ne una correcta demostració.

Hem caracteritzat la funció chirotope segons la situació del conjunt. D'aquesta manera, l'orientació, propietat principal de l'estudi, s'ha adaptat al problema.
A més, hem vist que és equivalent treballar amb punts del pla que amb punts de l'esfera unitària i, per tant, podíem canviar l'espai geomètric per facilitar la demostració sense variar cap de les propietats del conjunt.

S'han definit nous elements en el conjunt esfèric per poder caracteritzar cadascun dels objectes principals del Teorema. No obstant això, s'han utilitzat eines bàsiques com el producte escalar i la intersecció de conjunts per relacionar els tipus d'ordre amb aquests elements de l'esfera.

D'altra banda, s'han necessitat dues relacions d'equivalència diferents per englobar diferents tipus d'ordre i poder relacionar qualsevol orientació d'un conjunt amb la d'un altre. Així, s'han obtingut diferents classes d'equivalència amb les quals s'han agrupat totes les situacions possibles i s'ha demostrat el resultat principal.

Finalment, cal destacar que es podria continuar aquesta investigació intentant provar el Teorema per la situació global, és a dir, veure si és cert el mateix resultat per a qualsevol configuració de punts i no solament per a conjunts en posició general.

Des del meu punt de vista, aquest treball de final de grau ha superat les meves expectatives. He pogut aplicar moltes de les eines estudiades al llarg del grau, enfocant-les a les branques de la matemàtica que més m'han cridat l'atenció durant la carrera, com ara la geometria i la combinatòria.

He après a elaborar definicions formals, a organitzar conceptes i a desenvolupar-los per tal que una demostració sigui rigorosa i clara. A més, he après que no s'ha de donar tot per entès fàcilment i que s'ha d'esprémer cada concepte al màxim per tal de poder-ne extreure totes les conclusions possibles. Preguntar-se sovint "què passaria si..." o "com seria si..." És crucial per provar com d'assimilat es té un concepte.

En conclusió, fer una bona investigació requereix moltes hores de treball i dedicació, en les quals cada nova conclusió obtinguda o resultat trobat, per petit que sigui, proporciona una gran satisfacció després de tot el temps invertit.

Bibliografia

[1] Goaoc, Xavier; Welzl, Emo: *Convex Hulls of Random Order Types*

[2] Aigner, Martin; Günter, M.Ziegler: Proofs form the book.