Caminhadas Aleatórias

Caminhadas aleatórias desempenham um papel importante na Física Estatística e podem ser usadas para descrever os mais diversos tipos de sistemas físicos ou naturais. Um exemplo recente do uso de caminhadas aleatórias no estudo de situações a princípio não relacionadas à física é o trabalho de Simão, Rosendo e Wardil [1]. Neste trabalho, os autores mostram que o sistema proposto no artigo de Pluchino, Biondo e Rapisarda [2] para avaliar o papel da sorte e do talento no sucesso ou insucesso das pessoas pode ser mapeado numa caminhada aleatória em uma dimensão. De fato, no artigo de Pluchino, Biondo e Rapisarda [2], é proposto que um fator importante para a dinâmica de distribuição de riquezas atual é o paradigma meritocrático existente. Eles argumentam que o que vive-se hoje é uma "falsa meritocracia" [2]. Assim, usando um modelo que visa capturar os eventos de sorte e de mérito ao longo da vida de um conjunto de pessoas, os autores propõem que o sucesso de um indivíduo na sociedade é determinado não apenas pelo seu talento, mas também por fatores aleatórios que representam um grande conjunto de elementos que estão fora do nosso controle e que influenciam os resultados de nossas decisões. No entanto, muitas vezes esses fatores agem de modo extremamente sutil em nossas vidas, quase imperceptível, de modo que é fácil construir narrativas em que o sucesso de um individuo é consequência inevitável de seu talento e esforço, enquanto na verdade ele é o resultado de uma sequência de passos extremamente complexa e sensível a mudanças.

Apesar de ser um tema extremamente interessante e relevante do ponto de vista científico e social, nosso objetivo aqui não é explorar essa questão e os diversos modelos existentes na literatura acerca do tema. Pretendemos apenas motivar o estudo de caminhadas aleatórias e suas principais características como uma introdução aos métodos da Física Estatística. Para o leitor mais interessado, além dos artigos já citados [1,2], recomendamos também a leitura da dissertação de mestrado de Francisco Rosendo [3]. De forma bastante simplificada, o trabalho utiliza uma sequência de eventos de sorte ou de azar que podem ou não ser aproveitados por indivíduos dependendo de uma característica de cada indivíduo que simularia o papel do mérito individual. Assim, partindo da origem, um indivíduo que passasse por mais eventos de sorte que de azar teria ao final de um período um capital maior que o inicial. Essa sequência de eventos é equivalente a uma caminhada aleatória em uma dimensão. Perceba que se mapearmos os eventos de sorte como passos para direita e os de azar como passos para esquerda, ao final da caminhada, a distância ao ponto de partida seria proporcional ao capital acumulado pelo indivíduo.

Assim como o problema descrito, vários outros sistemas interessantes na grande área do conhecimento que chamamos de sistemas complexos pode ser mapeada numa caminhada aleatória. Obviamente, vários sistemas físicos também podem ser mapeados dessa forma.

Vamos, agora, explorar através de experimentos computacionais algumas das principais características de caminhadas aleatórias. O trabalho proposto é o exercício 2.5 do livro

"Statistical Mechanics: Entropy, order parameters and complexity" de J. Sethna [4]. A leitura do capítulo 1 e seções 2.1 e 2.2 do referido livro podem auxiliar na realização dessa tarefa.

Ao final da tarefa um relatório sucinto em formato pdf deve ser enviado via Moodle.

1) Gerando caminhadas aleatórias

Podemos gerar e analisar eficientemente caminhadas aleatórias no computador.

(a) Escreva uma rotina para gerar caminhadas aleatórias de N passos em d (=1 ou 2) dimensões, com cada passo tendo comprimento uniformemente distribuído no intervalo (-1/2, 1/2) em cada dimensão. (Primeiro, gere os passos como um array N x d e, então, faça uma soma cumulativa.) Faça um gráfico de x_t por t para poucas caminhadas de 10.000 passos, onde x_t é a posição do caminhante após t passos.
(b) Faça um gráfico de x por y para poucas caminhadas aleatórias bidimensionais com N = 10, 1.000, e 100.000 (tente manter a razão de aspecto do gráfico XY em um.) Se você multiplicar o número de passo por 100, a distância final da caminhada aumenta por cerca de 10 vezes?

Cada caminhada aleatória é diferente e imprevisível, mas o ensemble de caminhadas aleatórias tem propriedades elegantes e previsíveis.

P.s.: Um ensemble é uma construção usada com frequência na física estatística e se refere a um conjunto muito grande de sistemas preparados exatamente da mesma forma e, portanto, sujeitos exatamente às mesmas condições. Ao analisar esse ensemble, conseguimos extrair propriedades gerais (estatísticas) acerca do fenômeno que pretendemos estudar. Neste caso, um conjunto grande de caminhadas aleatórias geradas com sequências diferentes de números aleatórios pode ser entendida como um ensemble.

2) Escreva uma rotina para determinar os pontos finais de W caminhadas aleatórias com N passos cada em d=2 dimensões. Faça um gráfico de dispersão das coordenadas finais de 10.000 caminhadas aleatórias com N=1 e 10, superpostos no mesmo gráfico. Perceba que as caminhadas longas estão distribuídas em um padrão simétrico e circular, enquanto as caminhadas de um único passo têm uma distribuição de probabilidades quadrada.

   Essa é uma simetria emergente! Apesar do caminhante dar passos maiores nas diagonais de um quadrado, um caminhante que dá vários passos tem uma simetria rotacional quase perfeita.

   A propriedade mais útil de uma caminhada aleatória é o teorema central do limite. Os pontos finais de um ensemble de caminhadas aleatórias de N passos em uma dimensão com passos com desvio quadrático médio (RMS) de tamanho a tem uma distribuição de probabilidades Gaussiana (ou Normal) quando $N \to \infty$,

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

com $\sigma = \sqrt{N}\, a$.

(c) Calcule o desvio quadrático médio (RMS), a para passos uniformemente distribuidos no intervalo (-1/2, 1/2) em uma dimensão. Escreva uma rotina que plota um histograma dos pontos finais de W caminhadas aleatórias com N passos e 50 caixas (bins), junto com a previsão da equação acima para x no intervalo $(-3\sigma, 3\sigma)$. Faça um histograma com W=10.000 e N=1, 2, 3 e 5. Quão rápido a distribuição Gaussiana se torna uma boa aproximação para uma caminhada aleatória?

Referências

[1] SIMÃO, RICARDO ; ROSENDO, F. ; Lucas Wardil . The Talent vs Luck model as an ensemble of one-dimensional random walks. Advances In Complex Systems, 2021.

[2] PLUCHINO, BIONDO e RAPI- SARDA: TALENT VERSUS LUCK: THE ROLE OF RANDOMNESS IN SUCCESS AND FAILURE. Advances in Complex Systems, 21(03n04):1850014, May 2018

[3] Francisco Rosendo Martins de Andrade, Efeitos aleatórios no sucesso: análise crítica de um modelo, UFMG (2021). Disponível em: https://www.fisica.ufmg.br/posgraduacao/wp-content/uploads/sites/2/2021/09/efeitos-aleat%C3%B3rios-no-sucesso1.pdf

[4] J. Sethna, Statistical Mechanics: Entropy, order parameters and complexity, Oxford University Press (2020). Disponível em: https://www.lassp.cornell.edu/sethna/StatMech//