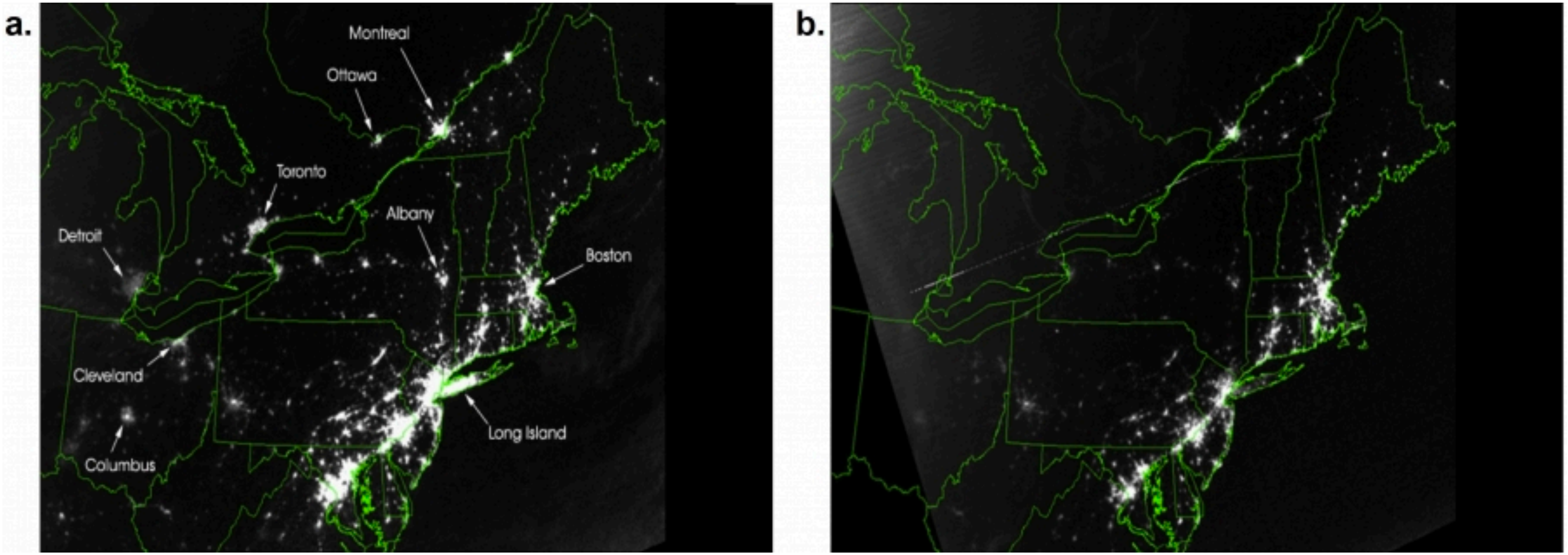
Redes Complexas

Introdução



Fotos de satélite de um blackout no nordeste os Estados Unidos - 2003

Falha em Cascata: Falha em um ponto específico que causou redistribuição de cargas em diferentes pontos da rede, levando a um colapso geral do sistema.

http://networksciencebook.com/

Introdução

- Falhas em cascata são comuns numa diversidade de sistemas:
  - Trafego de Internet
  - Sistema financeiro
  - Processos biológicos
- Vulnerabilidade devido à interconectividade
  - Falhas locais em redes (elétrica, por exemplo) podem ter impacto em todo sistema

Introdução

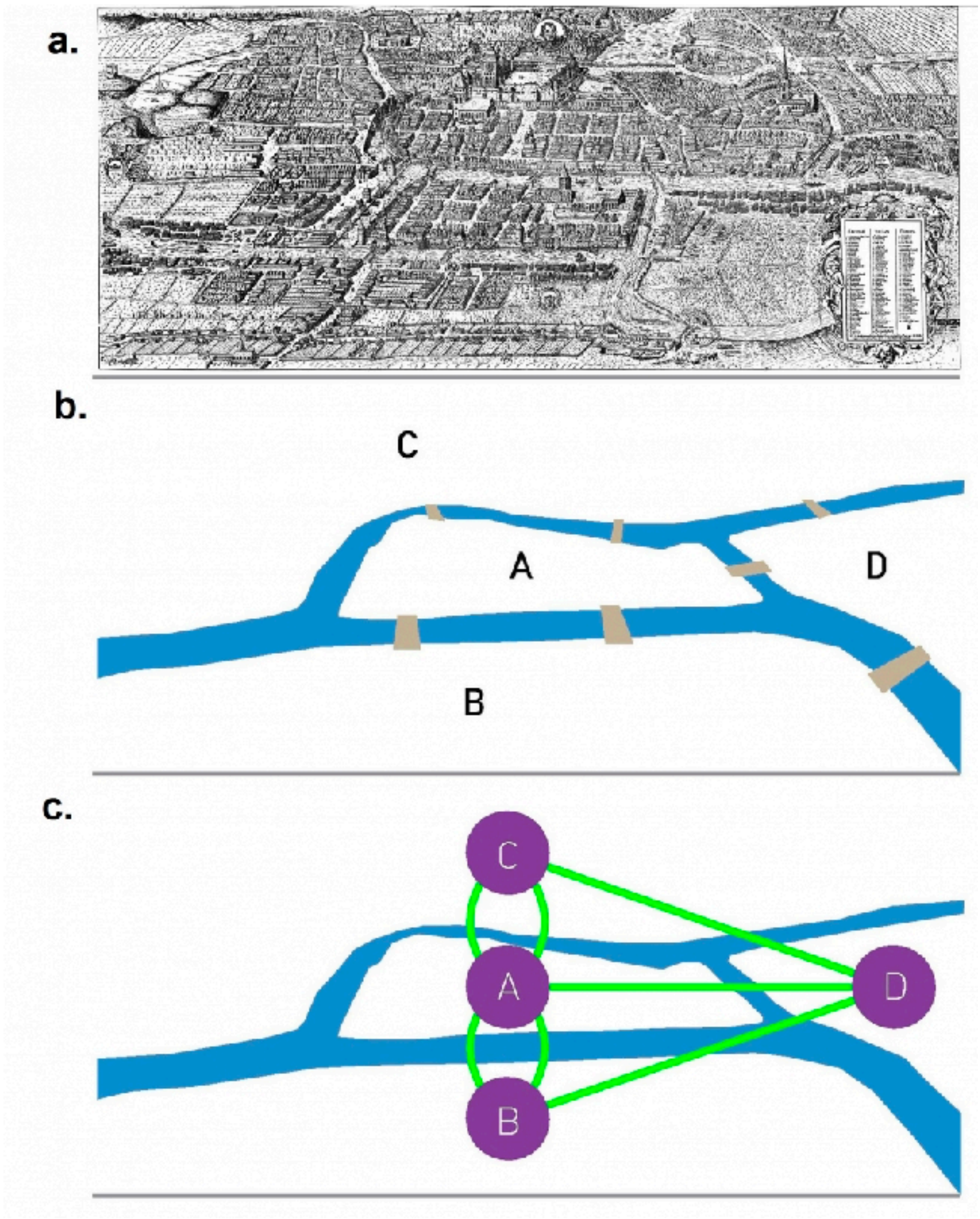
- Sistemas complexos - Sistemas compostos por muitos entes interagentes
  - O mapeamento das interações gera uma **rede**
- **O entendimento de sistemas complexos passa pelo entendimento das redes que os representam!**
- Surgimento da ciência de redes:
  - Emergência de mapas de rede
    - Disponibilidade de dados - capacidade de computação
  - Universalidade das características de redes
    - "a arquitetura de redes emergentes em vários domínios da ciência, natureza e tecnologia são semelhantes entre si, consequência de serem regidas pelos mesmos princípios organizadores. Consequentemente, podemos usar um conjunto comum de ferramentas matemáticas para explorar esses sistemas.”

Características das Ciências de Redes

- Altamente Interdisciplinar
- Empírica e dirigida por dados
- Quantitativa e matemática
- Computacional

- Impactos nas mais diversas áreas:
  - Economia, Saúde, Segurança, Epidemias, Neurociências, Negócios, Ciências (fundamental e aplicada), etc

As 7 pontes de Königsberg

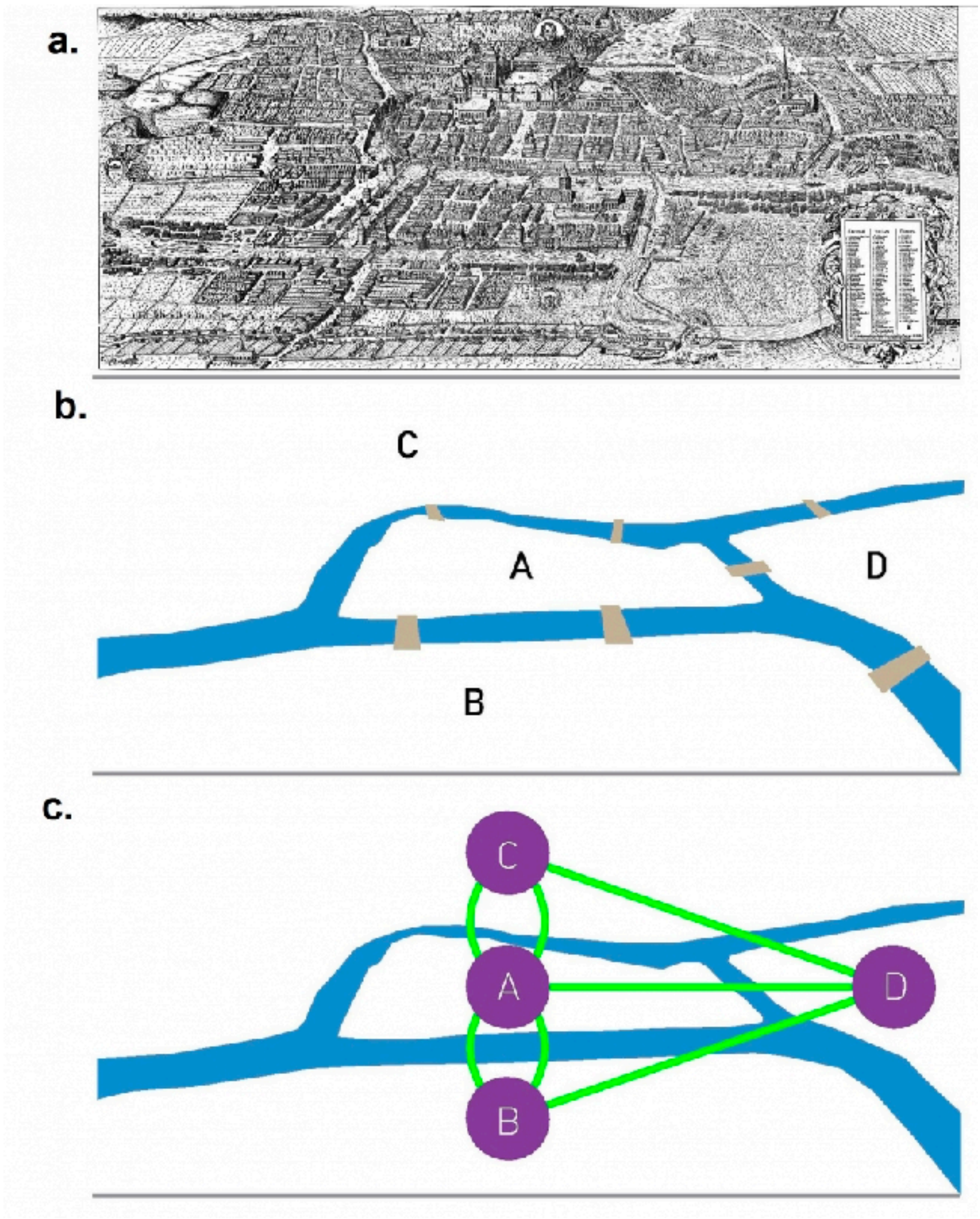


O problema: É possível cruzar todas as pontes sem passar por uma delas duas vezes?

Leonard Euler provou rigorosamente em 1735 que não é possível - Nascimento da Teoria de Grafos

- Nós com número ímpar de arestas devem ser o ponto de chegada ou partida. Caso contrário, chegando a um nó desses pode não haver caminhos não cruzados para sair.
- Um caminho que passe por todas as pontes pode ter apenas um ponto de partida e um ponto de chegada.
- **Conclusão:** Não há caminhos que passem por todas as pontes apenas uma vez se houver mais que dois nós com um número ímpar de arestas

As 7 pontes de Königsberg



Mensagens importantes:

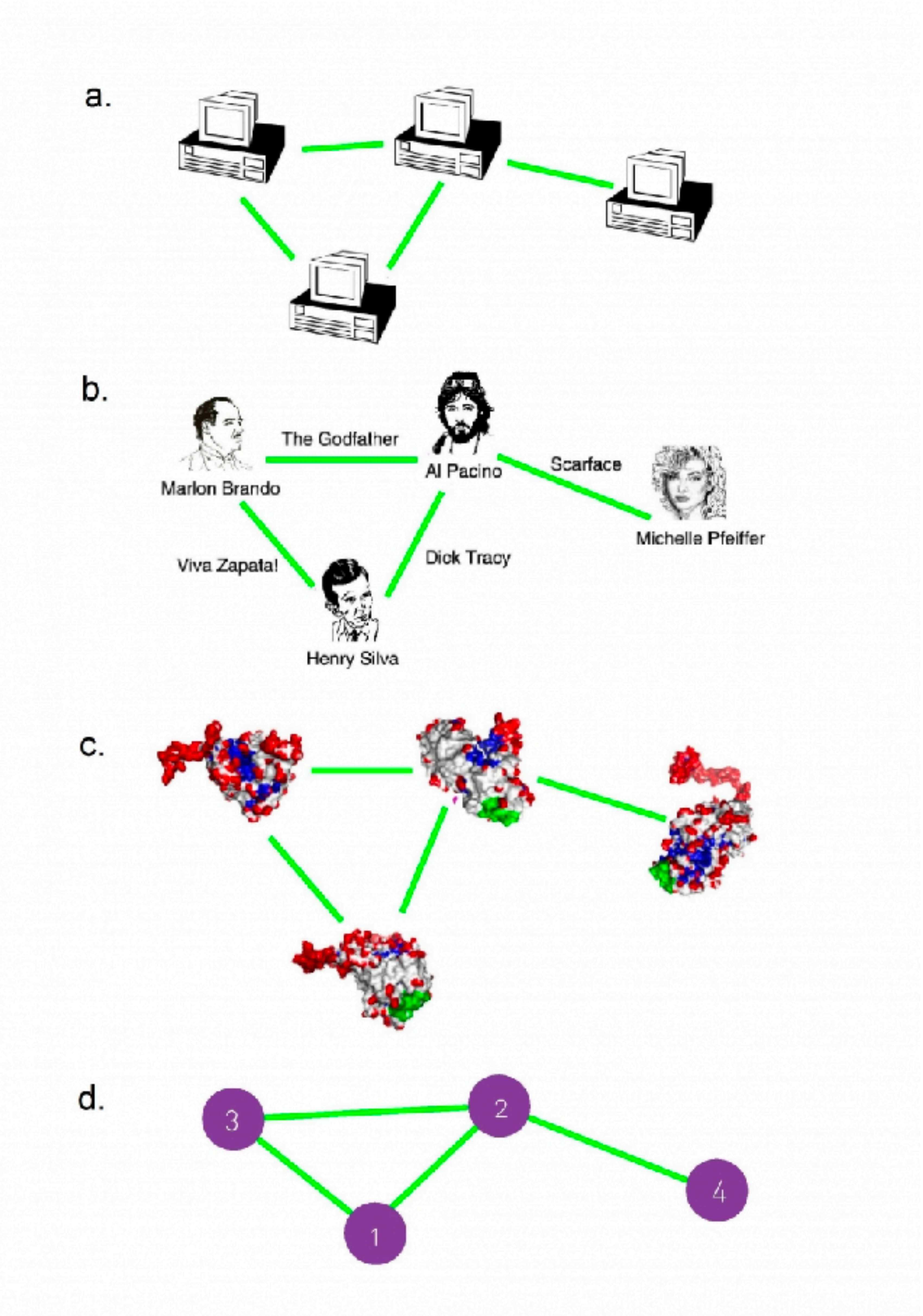
- Alguns problemas são resolvidos mais facilmente se o representarmos por um grafo
- A existência de uma solução para esse problema não depende da nossa ingenuidade ao procurar uma solução. É uma característica intrínseca do grafo

Caracterizando Redes

Precisamos conhecer:

- Número de Nós (vértices): N
- Número de Arestas (conexões, ligações, links): L
    - Arestas direcionais
    - Arestas não-direcionais

- Um mesmo grupo de indivíduos pode ser ligado entre si de diferentes formas (ligações profissionais, amizade, afinidades, etc) formando diferentes redes.



Caracterizando Redes

- Grau de um nó: k_i
- Total de links (rede não direcionada): $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i$
- Grau médio: $\langle k \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2L}{N}$
- No caso de redes direcionais, separamos em k_i^{in} e k_i^{out} e tomamos $L = \sum_i k_i^{in} = \sum_i k_i^{out}$ e $\langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle = \frac{L}{N}$

Caracterizando Redes

- Distribuição de graus, p_k, é a probabilidade de um nó escolhido ao acaso ter grau k
- $\sum_k p_k = 1$
- Em uma rede com N nós, $p_k = \frac{N_k}{N}$
- Note que $\langle k \rangle = \sum_k k p_k$
- A forma funcional de p_k determina importantes propriedades da rede

Redes Ponderadas e Matriz de Adjacências

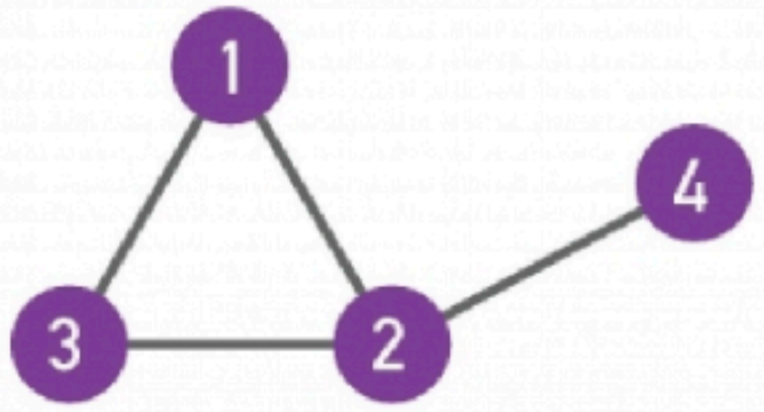
- $A_{ij} = w_{ij}$ se tem um link apontando de i para j com peso w_{ij}. Caso a rede não seja ponderada, $w_{ij} = 1, \forall\, i, j$

- $A_{ij} = 0$ se i e j não estão conectados

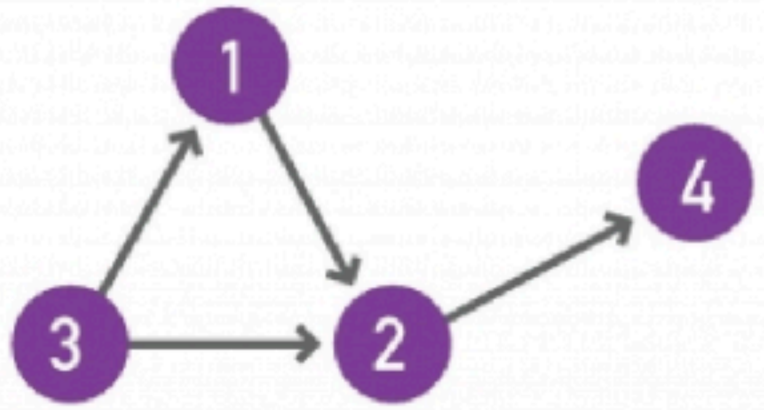
a. **Adjacency matrix**

$$A_{ij} = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix}$$

b. **Undirected network**



c. **Directed network**



$$A_{ij} = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad A_{ij} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$k_2 = \sum_{j=1}^{4} A_{2j} = \sum_{i=1}^{4} A_{i2} = 3 \qquad k_2^{\text{in}} = \sum_{j=1}^{4} A_{2j} = 2,\ k_2^{\text{out}} = \sum_{i=1}^{4} A_{i2} = 1$$

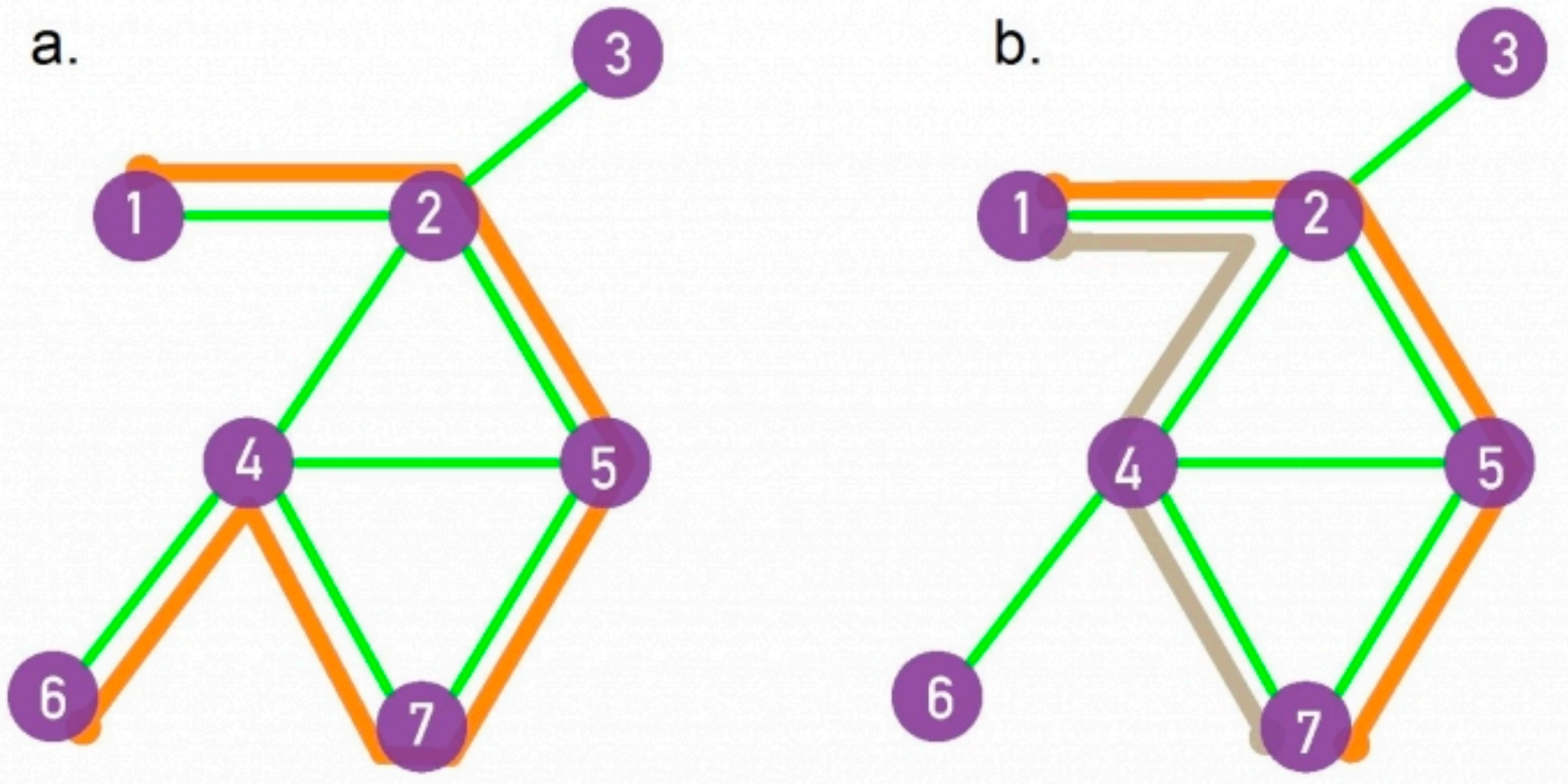
$$A_{ij} = A_{ji} \qquad A_{ii} = 0 \qquad\qquad A_{ij} \neq A_{ji} \qquad A_{ii} = 0$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i\ i=1}^{N} A_{ij} \qquad\qquad L = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}$$

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N} \qquad\qquad \langle k^{\text{in}} \rangle = \langle k^{\text{out}} \rangle = \frac{L}{N}$$

Caminhos e Distâncias

- Distância Física vs. Distância na rede
- Caminho: Lista ordenada de links que conecta dois nós
- Caminho mais curto, d. Note que em redes direcionais $d_{ij} \neq d_{ji}$.
- Distância média do caminho mais curto, $\langle d \rangle$
- Diâmetro: Maior caminho mais curto
- Caminho de Euler
  - Vista cada aresta uma vez
- Caminho Hamiltoniano
  - Visita cada sítio uma vez



Conectividade

- Redes conectadas vs. Não conectadas
- Coeficiente de conectividade local (*local clustering coefficient*) $C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)}$, L_i é o número de arestas entre os k_i vizinhos do nó i
  - $C_i = 0$ se os vizinhos não estão conectados
  - $C_i = 1$ se os vizinhos formam um grafo completo
  - C_i fornece a probabilidade dos vizinhos estarem conectados
- Grau médio de conectividade (Average clustering degree)

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} C_i$$

- Probabilidade de dois vizinhos de um nó escolhido ao acaso estarem conectados