

UNIVERSITÀ DI PISA



Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Laboratorio Computazionale

Absolute Value Equations

Docente di riferimento:
Prof.ssa Beatrice Meini

Presentata da:
Ivan Bioli

Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Introduzione	3
2	Risultati teorici	5
2.1	Lemmi e Teoremi di Algebra Lineare Numerica	5
2.2	Risultati teorici sulle AVE	7
3	Metodi per la risoluzione di Absolute Value Equations	10
3.1	Metodo delle Iterate di Picard	10
3.2	Metodo di Newton Generalizzato	11
3.3	Metodi di Newton Modificato	14
3.3.1	Caso delle matrici definite positive	16
3.4	Metodo delle Funzioni Approssimanti	17
4	Esperimenti numerici	20
4.1	AVE	20
4.1.1	Metodo delle Iterate di Picard	21
4.1.2	Metodo di Newton Generalizzato	21
4.1.3	Metodo di Newton Modificato	21
4.1.4	Metodo delle Funzioni Approssimanti	22
4.2	GAVE	22
4.2.1	Metodo delle Iterate di Picard per GAVE	22
4.2.2	Metodo di Newton Modificato per GAVE	23
4.2.3	Metodi applicati alla AVE equivalente	23
4.3	Confronto tra metodi	24

1. Introduzione

Considereremo la absolute value equation (AVE)

$$Ax - |x| = b \quad (1.1)$$

e la generalized absolute value equation (GAVE)

$$Ax - B|x| = b \quad (1.2)$$

dove $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e con $|\cdot|$ intendiamo il valore assoluto element-wise, cioè $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^T$.

Nonostante la loro apparente semplicità, nella loro forma generale la AVE (1.1) e la GAVE (1.2) sono NP-Hard. Il loro interesse deriva sostanzialmente dalla equivalenza con il *Linear Complementarity Problem* (LCP), mostrata in [8], che permette di ridurre molti problemi matematici alla risoluzione di una AVE. Le Absolute Value Equations trovano quindi numerose applicazioni in ambito matematico, informatico e ingegneristico, legate soprattutto a problemi di ottimizzazione, programmazione lineare, programmazione quadratica, bimatrici ecc. [6, 10].

Per queste ragioni le AVE e GAVE sono state studiate molto in letteratura, dal punto di vista sia teorico che computazionale. Alcuni si sono concentrati sulla ricerca di condizioni sufficienti per garantire l'esistenza di una soluzione [8, 6, 10, 11, 12, 14], mentre soltanto più recentemente sono state trovate condizioni necessarie e sufficienti (seppur "difficili da verificare") [15, 9]. Altri hanno invece proposto numerosi metodi per la risoluzione di AVE, come il Metodo delle Iterate di Picard [12], il Metodo di Newton Generalizzato [7], il Metodo di Newton Modificato [13], il Metodo delle Funzioni Approssimanti [2] e altri.

In queste pagine cercheremo di riassumere i principali risultati noti in letteratura, sia teorici che computazionali, per poi concentrarci sul confronto tra i vari metodi proposti attraverso esperimenti numerici.

Notazioni e definizioni

Introduciamo in questa sezione alcune notazioni e definizioni che ci saranno utili. Altre, più specifiche, verranno introdotte quando necessarie.

Valori singolari.

Definizione. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definiscono valori singolari di A le radici quadrate degli autovalori di $A^T A$.

Notazione. Indicheremo con $\sigma_{\min}(A)$ e $\sigma_{\max}(A)$ rispettivamente il più piccolo e il più grande valore singolare di A .

Norme. Se $x \in \mathbb{R}^n$ è un vettore, con $\|x\|$ indicheremo (se non diversamente specificato) la norma 2, definita come $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Se A è invece una matrice con $\|A\|$ indicheremo la norma matriciale indotta da $\|\cdot\|$

Valore assoluto. Analogamente a quanto fatto per un vettore, data $A = (a_{i,j})$ matrice, con il valore assoluto indichiamo $|A| = (|a_{i,j}|)$.

Raggio spettrale. Data A matrice indichiamo con $\rho(A)$ il suo raggio spettrale.

Matrici diagonali. Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\text{diag}(v) = \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Segno. Dato un numero reale a definiamo

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -1 & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

In maniera analoga dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ poniamo $\text{sgn}(x) = (\text{sgn}(x_1), \dots, \text{sgn}(x_n))^T$.

2. Risultati teorici

2.1 Lemmi e Teoremi di Algebra Lineare Numerica

Richiamiamo innanzitutto alcuni lemmi e teoremi noti di algebra lineare numerica. Per delle dimostrazioni si faccia riferimento a [1, 3, 5].

Lemma 2.1. *Data un matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ valgono le seguenti relazioni.*

$$(i) \sigma_{\min}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$(ii) \sigma_{\max}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$$

$$(iii) \text{ Se } A \text{ è invertibile } \sigma_{\min}(A) = \frac{1}{\sigma_{\max}(A^{-1})}$$

Lemma 2.2. *Date le matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ valgono le disuguaglianze:*

$$\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\min}(AB) \geq \sigma_{\min}(A)\sigma_{\min}(B) \quad (2.2)$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza deriva dalla analoga per la norma di matrici.

Per quanto riguarda la seconda, per il lemma 2.1 se B è singolare entrambi i membri sono nulli. Se invece B è non singolare possiamo scrivere:

$$\sigma_{\min}(AB) = \min_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \min_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \geq \min_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \min_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sigma_{\min}(A)\sigma_{\min}(B)$$

□

Lemma 2.3. *Data un matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sono equivalenti i seguenti enunciati.*

(i) *I valori singolari di A sono maggiori di 1*

(ii) *Il minimo autovalore di $A^T A$ è maggiore di 1*

(iii) $\|A^{-1}\| < 1$

Teorema 2.4 (Perturbazioni lineari dell'identità e serie di Neumann). *Sia $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $\|H^m\| < 1$ per qualche $m > 0$. Allora $(I - H)$ è invertibile e la sua inversa è descritta dalla serie uniformemente convergente:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} H^k = (I - H)^{-1} \quad (2.3)$$

Lemma 2.5. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, allora:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$$

Lemma 2.6 (Norme di matrici e raggio spettrale). *Per ogni norma di matrice $\|\cdot\|$ e per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vale:*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A) \quad (2.4)$$

Nota. Per il lemma precedente, se $\rho(A) < 1$ il teorema 2.4 è applicabile.

Con stime piuttosto semplici sulla serie di cui sopra e sfruttando il fatto che, se A è invertibile allora

$$(A + E)^{-1} = (A(I + A^{-1}E))^{-1} = (I + A^{-1}E)^{-1}A^{-1}$$

si giunge al seguente modificando le ipotesi di conseguenza.

Lemma 2.7. *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice invertibile e tale che $\|A^{-1}E\| < 1$. Allora $(A + E)$ è non singolare e $(A + E)^{-1}$ può essere scritta nella forma*

$$(A + E)^{-1} = (I + F)A^{-1}$$

dove

$$\|F\| \leq \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|} \quad (2.5)$$

Inoltre

$$\frac{\|A^{-1} - (A + E)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1}E\|}{1 - \|A^{-1}E\|} \quad (2.6)$$

e

$$\|(A + E)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}E\|} \quad (2.7)$$

Corollario 2.7.1. *Sia $D = \text{diag}(x)$ dove $x_i \in [-1, 1] \forall i = 1, 2, \dots, n$. Supponiamo inoltre che $\|A^{-1}\| < 1$. Allora $(A + D)$ è non singolare.*

Dimostrazione. Per il lemma 2.7 basta osservare che

$$\|A^{-1}D\| \leq \|A^{-1}\| \|D\| < 1$$

□

2.2 Risultati teorici sulle AVE

In questa sezione verranno presentati alcuni risultati teorici sulla AVE (1.1) e sulla GAVE (1.2). I risultati maggiormente rilevanti sono ottenuti sostanzialmente grazie all'equivalenza, sotto opportune ipotesi, tra AVE e LCP dimostrata in [8]. Non essendo attualmente in possesso delle conoscenze adeguate a comprendere a pieno tali dimostrazioni, ci limiteremo soltanto ad enunciare i risultati più importanti e a confrontarli.

Condizioni sufficienti

Teorema 2.8 (Esistenza di soluzioni per una AVE [8]). *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che*

$$\sigma_{\min}(A) > 1 \quad (2.8)$$

cioè tale che i valori singolari di A siano maggiori di 1. Allora la AVE

$$Ax - |x| = b$$

ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$.

Nota. A partire da questo enunciato si possono facilmente ottenere formulazioni equivalenti sfruttando il lemma 2.3.

Il teorema precedente si può estendere alla GAVE (1.2). Nel caso in cui B sia non singolare possiamo riscrivere l'equazione (1.2) come:

$$B^{-1}Ax - |x| = B^{-1}b \quad (2.9)$$

Dunque esiste soluzione unica se $\sigma_{\min}(B^{-1}A) > 1$. Sfruttando il fatto i lemmi 2.1 e 2.2 esiste soluzione unica se:

$$\sigma_{\min}(B^{-1}A) \geq \sigma_{\min}(B^{-1})\sigma_{\min}(A) = \frac{1}{\sigma_{\max}(B)}\sigma_{\min}(A) > 1$$

e cioè

$$\sigma_{\min}(A) > \sigma_{\max}(B)$$

Tale risultato è in realtà valido anche nel caso in cui B è singolare, come mostrato in [14].

Teorema 2.9 (Esistenza di soluzioni per una GAVE [14]). *Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tali che*

$$\sigma_{\min}(A) > \sigma_{\max}(B) \quad (2.10)$$

Allora la GAVE

$$Ax + B|x| = b$$

ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$.

Una ulteriore condizione sufficiente per la risoluzione della GAVE (1.2) è proposta in [12].

Teorema 2.10 ([12]). Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con A non singolare e tali che

$$\rho(|A^{-1}B|) < 1 \quad (2.11)$$

Allora la GAVE

$$Ax + B|x| = b$$

ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Vedi teorema 3.1. □

È chiaro come il teorema 2.9 generalizzi 2.8. Infatti la AVE (1.1) è un caso particolare della GAVE (1.2) in cui $B = -I$ e la condizione (2.10) diventa $\sigma_{\min}(A) > \sigma_{\max}(I) = 1$, cioè la (2.8).

Invece i teoremi 2.9 e 2.10 sono indipendenti (cioè uno non implica l'altro e viceversa). In primo luogo il teorema 2.10 richiede l'invertibilità della matrice A , ipotesi non necessaria in 2.9. Anche assumendo la non singolarità di A , le due condizioni non sono equivalenti e non lo sono neanche nel caso particolare in cui $B = -I$. In tal caso infatti la (2.10) si può scrivere come:

$$\sigma_{\min}(A) = \frac{1}{\sigma_{\max}(A^{-1})} > 1$$

e quindi

$$\sigma_{\max}(A^{-1}) < 1$$

Tale condizione non è però equivalente alla (2.11), cioè $\rho(|A^{-1}|) < 1$ come mostrano i seguenti controesempi (i calcoli sono stati svolti con MATLAB):

Controesempio. $\sigma_{\max}(A^{-1}) < 1 \not\Rightarrow \rho(|A^{-1}|) < 1$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -9 & 5 & -10 & 4 \\ -2 & -1 & 7 & 3 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 9 & 5 \\ -5 & 0 & -2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo caso si ha $\sigma_{\max}(A^{-1}) \simeq 0.9322$ e $\rho(|A^{-1}|) \simeq 1.0600$

Controesempio. $\rho(|A^{-1}|) < 1 \not\Rightarrow \sigma_{\max}(A^{-1}) < 1$

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 6 & -1 & -6 & 1 \\ 8 & 1 & -4 & 9 & 10 \\ 9 & -9 & 5 & -6 & -8 \\ -5 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 9 & 0 & -2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

In questo caso si ha $\sigma_{\max}(A^{-1}) \simeq 1.6228$ e $\rho(|A^{-1}|) \simeq 0.9002$

Possiamo dunque combinare i due teoremi di cui sopra in:

Teorema 2.11 ([12]). Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile e tale che

$$\min\{\sigma_{\max}(A^{-1}), \rho(|A^{-1}|)\} < 1 \quad (2.12)$$

Allora la AVE

$$Ax - |x| = b$$

ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$.

Un altro risultato interessante, che ci garantisce l'esistenza di 2^n soluzioni, è il seguente. Per una dimostrazione si veda [8].

Teorema 2.12 (Esistenza di 2^n soluzioni). *Se $b < 0$ e $\|A\|_\infty < \frac{\gamma}{2}$ dove $\gamma = \frac{\min_i |b_i|}{\max_i |b_i|}$, allora la AVE (1.1) ha esattamente 2^n soluzioni distinte, ciascuna delle quali ha componenti tutte non nulle e un diverso pattern dei segni.*

Condizioni necessarie e sufficienti

Presentiamo in questa sezione alcune condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità della AVE (1.1) e della GAVE (1.2). Dal punto di vista teorico l'esistenza di condizioni necessarie e sufficienti è molto importante. Dal punto di vista computazionale però possiamo aspettarci che ogni condizione necessaria e sufficiente sia "difficile da verificare", poiché il problema di risolvere una AVE è NP-hard, come mostrato in [8].

Per quanto riguarda la AVE (1.1) un primo risultato si può trovare in [15].

Teorema 2.13 ([15] Condizioni necessarie e sufficienti per AVE). *La AVE*

$$Ax - |x| = b$$

ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$ se e solo se la matrice $A - D$ è non singolare per ogni matrice diagonale $D = \text{diag}(d_i)$ con $d_i \in [-1, 1]$.

Nel caso B sia invertibile, riscrivendo l'equazione (1.2) come $B^{-1}Ax - |x| = B^{-1}b$, a partire dal teorema precedente si possono ricavare condizioni necessarie e sufficienti per la risolubilità di una GAVE. In [9] viene proposta una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e unicità della soluzione per la GAVE (1.2), senza richiedere però che B sia invertibile.

Teorema 2.14 ([15] Condizioni necessarie e sufficienti per GAVE). *La GAVE*

$$Ax - B|x| = b$$

ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$ se e solo se date due qualsiasi matrici diagonali non negative $D_1, D_2 \geq 0$ tali che $D_1 + D_2 > 0$ la matrice $(A - B)D_1 + (A + B)D_2$ è non singolare

Come ci potevamo aspettare per l'osservazione precedente nelle applicazioni valutare tali condizioni è piuttosto complesso e si devono usare delle stime che di fatto portano alle condizioni sufficienti proposte in precedenza. Il teorema 2.14 permette però di ottenere una condizione sufficiente migliore di quella del teorema 2.10.

Teorema 2.15 ([9] Condizioni sufficienti per GAVE). *Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La GAVE*

$$Ax + B|x| = b$$

ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$ se

$$\sigma_{\max}(B) \leq \sigma_{\max}(A) + \min\{\sigma_{\max}(A - B), \sigma_{\max}(A + B)\} \quad (2.13)$$

3. Metodi per la risoluzione di Absolute Value Equations

3.1 Metodo delle Iterate di Picard

Questo metodo, che indicheremo con *MIP*, è un caso particolare del metodo per la risoluzione della GAVE (1.2) studiato in [12]. Le ipotesi in [12] sono molto più generali, ma risultano difficili da verificare e di fatto tale metodo si applica soltanto nel caso particolare che andremo ad analizzare. Forniremo inoltre una dimostrazione costruttiva per il teorema 2.10.

Teorema 3.1 (Metodo delle Iterate di Picard). *Supponiamo che A sia non singolare e che*

$$\rho(|A^{-1}B|) < 1$$

Allora la successione $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ definita da $x^0 = A^{-1}B$ e

$$x^{k+1} = A^{-1}B|x^k| + A^{-1}b \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

converge alla unica soluzione x^ della GAVE (1.2).*

Dimostrazione. Poniamo $G = |A^{-1}B|$ e sia $k \geq 1$. Sottraendo tra loro

$$x^{k+1} = A^{-1}B|x^k| + A^{-1}b \quad e \quad x^k = A^{-1}B|x^{k-1}| + A^{-1}b$$

otteniamo:

$$|x^{k+1} - x^k| = |A^{-1}B(|x^k| - |x^{k-1}|)| \leq |A^{-1}B| \cdot ||x^k| - |x^{k-1}|| \leq G|x^k - x^{k-1}|$$

Induttivamente $\forall m \geq 1$:

$$\begin{aligned} |x^{k+m} - x^k| &= \left| \sum_{j=0}^{m-1} (x^{k+j+1} - x^{k+j}) \right| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |x^{k+j+1} - x^{k+j}| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} G^{j+1} |x^k - x^{k-1}| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} G^{j+1} \right) |x^k - x^{k-1}| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} G^{j+1} \right) G^{k-1} |x^1 - x^0| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} G^j \right) G^k |x^1 - x^0| \end{aligned}$$

Passando in norma, posto $C = \|(\sum_{j=0}^{\infty} G^j)|x^1 - x^0|\|$, otteniamo:

$$\|x^{k+m} - x^k\| \leq C\|G^k\|$$

Per ipotesi $\rho(G) = \rho(|A^{-1}B|) < 1$, dunque $G^k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ (lemma 2.5). Pertanto la successione $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e di conseguenza convergente $x^k \rightarrow x^*$. Passando al limite la relazione:

$$x^{k+1} = A^{-1}B|x^k| + A^{-1}b$$

otteniamo per continuità

$$x^* = A^{-1}B|x^*| + A^{-1}b$$

e cioè, moltiplicando per A ,

$$Ax^* - B|x^*| = b$$

Per quanto riguarda l'unicità della soluzione, supponiamo che \bar{x} sia un'altra soluzione della GAVE (1.2). Sottraendo $\bar{x} = A^{-1}B|\bar{x}| + A^{-1}b$ da $x^* = A^{-1}B|x^*| + A^{-1}b$ e facendo il modulo otteniamo:

$$|x^* - \bar{x}| = |(A^{-1}B)(|x^*| - |\bar{x}|)| \leq G|x^* - \bar{x}|$$

che possiamo riscrivere come:

$$(I - G)|x^* - \bar{x}| \leq 0$$

Ma allora essendo $(I - G)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} G^j \geq 0$ otteniamo:

$$0 \leq |x^* - \bar{x}| = (I - G)^{-1}(I - G)|x^* - \bar{x}| \leq 0$$

che mostra $|x^* - \bar{x}| \implies x^* = \bar{x}$. □

3.2 Metodo di Newton Generalizzato

In [7] viene proposta una generalizzazione dell'usuale metodo di Newton per la risoluzione della AVE (1.1), sotto l'ipotesi aggiuntiva che i valori singolari di A siano maggiori di 1. Indicheremo nel prosieguo questo metodo con *MNG*.

Osserviamo innanzi tutto che risolvere l'equazione è equivalente a trovare uno zero della funzione

$$g(x) = Ax - |x| - b \tag{3.2}$$

Tale funzione non è differenziabile ovunque poiché il valore assoluto non è derivabile in 0, ma lo è quasi ovunque (essendo Lipschitzia vale anche il teorema di Rademacher). Si può però ricorrere a una versione generalizzata dello Jacobiano (che continueremo a indicare con $\partial g(x)$) ponendo:

$$\partial g(x) = A - D(x), \quad D(x) = \text{diag}(\text{sign}(x)) \tag{3.3}$$

Il *MNG* è descritto dall'iterazione (simile a quella del metodo di Newton usuale):

$$g(x^k) + \partial g(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0 \tag{3.4}$$

Effettuando le sostituzioni delle equazioni 3.2 e 3.4 si può riscrivere l'equazione precedente come:

$$Ax^k - |x^k| - b + (A - D(x^k))(x^{k+1} - x^k) = 0$$

Osserviamo adesso che vale $D(x^k)x^k = |x^k|$ e dunque l'iterazione generica del MNG si riduce alla risoluzione del sistema:

$$(A - D(x^k))x^{k+1} = b$$

Risolvendo in x^{k+1} troviamo:

$$x^{k+1} = (A - D(x^k)) \backslash b \quad (3.5)$$

Chiaramente questo metodo non è sempre applicabile: per risolvere il sistema nel caso di b generico la matrice $(A - D(x^k))$ deve essere non singolare. Possiamo però fornire delle condizioni sufficienti affinché il MNG sia applicabile e converga.

Proposizione 3.2 (Limitatezza delle iterazioni). *Supponiamo che i valori singolari di A siano maggiori di 1. Allora la successione che descrive il MNG, definita da $x^{k+1} = (A - D(x^k)) \backslash b$, è ben definita e limitata. Inoltre esistono un punto di accumulazione \bar{x} e una matrice \tilde{D} con elementi diagonali ± 1 o 0, tali che $(A - \tilde{D})\bar{x} = b$.*

Dimostrazione. Per il lemma 2.7.1 $(A - D(x^k))$ è non singolare e pertanto l'iterazione è ben definita.

Supponiamo per assurdo che la successione $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ non sia limitata. Osserviamo che la successione $\{D(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ è composta da matrici con elementi diagonali ± 1 o 0, che sono in numero finito. Per il lemma dei cassetti esisterebbe dunque una sottosuccessione con elementi non nulli $\{x^{k_j+1}\}_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ tale che $D(x^{k_j}) = \tilde{D}$, con \tilde{D} fissata. Possiamo inoltre supporre a meno di sottosuccessioni che $\frac{x^{k_j}}{\|x^{k_j}\|} \rightarrow \tilde{x}$ per compattezza. Ma allora da

$$(A - \tilde{D}) \frac{x^{k_j+1}}{\|x^{k_j+1}\|} = \frac{b}{\|x^{k_j+1}\|}$$

per $j \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$(A - \tilde{D})\tilde{x} = 0, \quad \|\tilde{x}\| = 1$$

contro la non singolarità di $(A - \tilde{D})$. Dunque la successione $\{x^k\}$ è limitata e pertanto esiste un punto di accumulazione (\tilde{D}, \bar{x}) di $\{(D(x^k), x^{k+1})\}_{i \in \mathbb{N}}$ e passando al limite la (3.5) si ha $(A - \tilde{D})\bar{x} = b$. \square

Lemma 3.3 (Convergenza lineare del MNG). *Supponiamo che $\|(A - D)^{-1}\| < \frac{1}{2}$ per ogni D matrice diagonale con elementi diagonali ± 1 o 0. Allora la successione definita dal MNG (3.5) converge linearmente, a partire da ogni punto, a una soluzione \bar{x} per ogni AVE (1.1) risolubile.*

Dimostrazione. Consideriamo una soluzione \bar{x} della AVE (1.1). Osservando che $|x| = D(x)x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ e sottraendo $(A - D(\bar{x}))\bar{x} = b$ da $(A - D(x^k))x^{k+1} = b$ si ottiene:

$$\begin{aligned} A(x^{k+1} - \bar{x}) &= D(x^k)x^{k+1} - D(\bar{x})\bar{x} = \\ &= D(x^k)(x^{k+1} - x^k + x^k) - D(\bar{x})\bar{x} = \\ &= |x^k| - |\bar{x}| + D(x^k)(x^{k+1} - x^k) = \\ &= |x^k| - |\bar{x}| + D(x^k)(x^{k+1} - \bar{x} + \bar{x} - x^k) \end{aligned}$$

Dunque:

$$(A - D(x^k))(x^{k+1} - \bar{x}) = |x^k| - |\bar{x}| - D(x^k)(x^k - \bar{x})$$

ed essendo $(A - D(x^k))$ invertibile per ipotesi:

$$x^{k+1} - \bar{x} = (A - D(x^k))^{-1}(|x^k| - |\bar{x}| - D(x^k)(x^k - \bar{x}))$$

Passando in norma si ottiene:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - \bar{x}\| &\leq \|(A - D(x^k))^{-1}\| \cdot \| |x^k| - |\bar{x}| - D(x^k)(x^k - \bar{x}) \| \leq \\ &\leq \|(A - D(x^k))^{-1}\| \cdot (\| |x^k| - |\bar{x}| \| + \|D(x^k)\| \|x^k - \bar{x}\|) \leq \\ &\leq \|(A - D(x^k))^{-1}\| \cdot (\|x^k - \bar{x}\| + \|x^k - \bar{x}\|) = \\ &= 2\|(A - D(x^k))^{-1}\| \cdot \|x^k - \bar{x}\| = c\|x^k - \bar{x}\| \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove $c = 2\|(A - D(x^k))^{-1}\| < 1$. Dunque la successione $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge linearmente a \bar{x} con fattore di convergenza almeno c \square

Nota. Le ipotesi per garantire la convergenza del MNG sono necessarie, come si può notare con il seguente esempio di AVE in \mathbb{R} . Consideriamo l'AVE $x - |x| = 1$, che è priva di soluzioni poiché $x - |x| \leq 0$. In questo caso si trova $x^{k+1} = \frac{1}{1 - \text{sgn}(x^k)}$ e dunque abbiamo i seguenti casi:

$$\begin{cases} x^0 > 0 & x^1 = \infty \\ x^0 = 0 & x^1 = 1 & x^2 = \infty \\ x^0 < 0 & x^1 = \frac{1}{2} & x^2 = \infty \end{cases}$$

Possiamo adesso fornire delle condizioni sufficienti per l'esistenza di un'unica soluzione della AVE (1.1) e che allo stesso tempo ci garantiscano l'esistenza di un'unica soluzione.

Teorema 3.4 (Condizioni sufficienti per l'esistenza di un'unica soluzione e per la convergenza lineare del MNG). *Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $\|A^{-1}\| < \frac{1}{3}$. Allora la AVE $Ax - |x| = b$ ammette soluzione unica $\forall b \in \mathbb{R}^n$ e l'iterazione (3.5) del Metodo di Newton Generalizzato converge linearmente all'unica soluzione della AVE comunque si scelga x^0 .*

Dimostrazione. La unicità della soluzione della AVE comunque si scelga b deriva dal teorema 2.8, che richiede come ipotesi soltanto $\|A^{-1}\| < 1$.

Per il lemma 2.7 $(A - D(x^k))^{-1}$ esiste $\forall i$, dato che A^{-1} esiste e

$$\|A^{-1}D(x^k)\| \leq \|A^{-1}\| \|D(x^k)\| < 1$$

Inoltre da (2.7) abbiamo la stima:

$$\|(A - D(x^k))^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \|D(x^k)\|}{1 - \|A^{-1}\| \|D(x^k)\|} < \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{1 - \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Dunque per il lemma 3.3 la successione $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge linearmente all'unica soluzione della AVE qualunque sia il punto iniziale x^0 . \square

Un criterio utile (e facile da verificare) che ci permette di stabilire se abbiamo raggiunto la soluzione in un numero finito di passi è il seguente:

Teorema 3.5 (Condizione di terminazione in tempo finito del MNG). *Supponiamo che i valori singolari di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ siano maggiori di 1. Se nelle iterazioni del MNG $D(x^{k+1}) = D(x^k)$ per qualche k , allora x^{k+1} risolve la AVE (1.1).*

Dimostrazione. Per il corollario 2.7.1 l'iterazione è ben definita e se $D(x^{k+1}) = D(x^k)$ allora:

$$0 = (A - D(x^k))x^{k+1} - b = Ax^{k+1} - D(x^{k+1})x^{k+1} - b = Ax^{k+1} - |x^{k+1}| - b$$

da cui la tesi. \square

Il Metodo di Newton Generalizzato può essere esteso alla GAVE (1.2) considerando l'iterazione generica:

$$x^{k+1} = (A - BD(x^k))^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Non ci soffermiamo troppo su questo metodo poiché per la risoluzione di una GAVE i metodi proposti in seguito risultano più efficienti.

3.3 Metodi di Newton Modificato

Il Metodo di Newton Modificato, che indicheremo con *MNM*, è stato studiato in [13] per la risoluzione della GAVE (1.2). Tale metodo si basa su una modifica dell'iterazione del Metodo di Newton al fine di renderlo applicabile anche a funzioni non globalmente differenziabili, sulla falsariga di quanto studiato in [4].

La GAVE (1.2) è equivalente alla ricerca di uno zero della funzione

$$F(x) = Ax - B|x| - b \quad (3.8)$$

che non è differenziabile ma possiamo riscrivere come $F(x) = H(x) + G(x)$ dove $H(x)$ è una funzione differenziabile, mentre $G(x)$ è Lipschitziana. Nello specifico detta $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice semi-definita positiva poniamo

$$H(x) = Ax + \Omega x, \quad G(x) = -\Omega x - B|x| - b \quad (3.9)$$

Invece della usuale iterazione del Metodo di Newton

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1}F(x^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

che non è applicabile in ogni punto, scegliamo Ω in maniera tale che $A + \Omega$ sia invertibile e poniamo:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - H'(x^k)^{-1}(H(x^k) + G(x^k)) = \\ &= x^k - (A + \Omega)^{-1}(Ax^k - B|x^k| - b) = \\ &= (A + \Omega)^{-1}(\Omega x^k + B|x^k| + b) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nel caso in cui $\Omega = 0$ il *MNM* si riduce a

$$x^{k+1} = A^{-1}(B|x^k| + b) \quad (3.11)$$

che è il Metodo delle Iterate di Picard [12].

I seguenti due teoremi forniscono condizioni sufficienti per la convergenza del *MNM* sotto opportune ipotesi.

Teorema 3.6. Siano $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e sia $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice semi-definita positiva tale che $(A + \Omega)$ sia invertibile. Se

$$\|(A + \Omega)^{-1}\| < \frac{1}{\|\Omega\| + \|B\|} \quad (3.12)$$

l'iterazione (3.10) del MNM è ben definita e la successione generata $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge linearmente, a partire da un qualsiasi punto iniziale, a una soluzione x^* (che supponiamo esista) della GAVE (1.2).

Dimostrazione. Sia x^* una soluzione della GAVE (1.2), allora vale

$$Ax^* - B|x^*| = b \quad (3.13)$$

Possiamo inoltre riscrivere l'iterazione (3.10) come:

$$(A + \Omega)x^{k+1} = \Omega x^k + B|x^k| + b \quad (3.14)$$

Sottraendo (3.13) da (3.14) otteniamo:

$$\begin{aligned} A(x^{k+1} - x^*) &= -\Omega(x^{k+1} - x^k) + B(|x^k| - |x^*|) = \\ &= -\Omega(x^{k+1} - x^* + x^* - x^k) + B(|x^k| - |x^*|) = \\ &= -\Omega(x^{k+1} - x^*) + \Omega(x^k - x^*) + B(|x^k| - |x^*|) \end{aligned}$$

Dunque

$$(A + \Omega)(x^{k+1} - x^*) = \Omega(x^k - x^*) + B(|x^k| - |x^*|)$$

Poichè $(A + \Omega)$ è non singolare, possiamo scrivere

$$x^{k+1} - x^* = (A + \Omega)^{-1}(\Omega(x^k - x^*) + B(|x^k| - |x^*|))$$

Passando in norma otteniamo:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \|(A + \Omega)^{-1}\| \cdot (\|\Omega\| + \|B\|) \cdot \|x^k - x^*\| = k \|x^k - x^*\| \quad (3.15)$$

dove si è usata la disuguaglianza (valida per la norma 2) $\||x^{k+1}| - |x^*|\| \leq \|x^{k+1} - x^*\|$ e abbiamo posto $k = \|(A + \Omega)^{-1}\|(\|\Omega\| + \|B\|) < 1$. Da (3.15) otteniamo dunque che il MNM converge linearmente a x^* a partire da qualsiasi punto iniziale. \square

Teorema 3.7. Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice semi-definita positiva tale che $(A + \Omega)$ sia invertibile. Se

$$\|A^{-1}\| < \frac{1}{2\|\Omega\| + \|B\|} \quad (3.16)$$

l'iterazione (3.10) del MNM è ben definita e la successione generata $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge linearmente, a partire da un qualsiasi punto iniziale, a una soluzione x^* (che supponiamo esista) della GAVE (1.2).

Dimostrazione. Per la disuguaglianza (3.15) basta mostrare che

$$\|(A + \Omega)^{-1}\|(\|\Omega\| + \|B\|) < 1$$

Ma, per il lemma 2.7, dalla condizione (3.16) otteniamo:

$$\|(A + \Omega)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\Omega\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Omega\|} < \frac{\frac{1}{2\|\Omega\| + \|B\|}}{1 - \frac{\|\Omega\|}{2\|\Omega\| + \|B\|}} = \frac{1}{\|\Omega\| + \|B\|}$$

e dunque la tesi. \square

Nei due teoremi precedenti abbiamo lavorato sotto l'ipotesi che esista una soluzione x^* della GAVE (1.2), ma per unicità del limite se almeno una soluzione esiste e valgono le ipotesi dei teoremi precedenti tale soluzione è unica.

Inoltre dai due teoremi precedenti si ricavano facilmente condizioni sufficienti per la convergenza nei casi particolari di una AVE (1.1) (in cui $B = I$) e del Metodo delle Iterate di Picard (in cui $\Omega = 0$).

Nel Metodo di Newton Modificato la matrice dei coefficienti del sistema che andiamo a risolvere sia costante, mentre nel Metodo di Newton Generalizzato ogni volta risolviamo un sistema diverso. Dal punto di vista della complessità dunque la generica iterazione del MNM dovrebbe essere migliore.

Inoltre abbiamo visto come il MNM sia una generalizzazione del Metodo delle Iterate di Picard, che presenta anch'esso una matrice dei coefficienti costante. Potrebbe però accadere che A sia mal condizionata, mentre una matrice Ω opportunamente scelta potrebbe rendere meglio condizionata $(A + \Omega)$

3.3.1 Caso delle matrici definite positive

Analizziamo adesso il MNM applicato nel caso in cui A sia una matrice simmetrica definita positiva e $\Omega = \omega I$ $\omega > 0$.

Indicheremo con $\mu_{\min}(\cdot)$ il più piccolo autovalore di una matrice.

Teorema 3.8. Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica definita positiva e $\Omega = \omega I$ con $\omega > 0$. Se

$$\|B\| < \mu_{\min}(A) \tag{3.17}$$

l'iterazione (3.10) del MNM è ben definita e la successione generata $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge linearmente, a partire da un qualsiasi punto iniziale, a una soluzione x^* (che supponiamo esista) della GAVE (1.2).

Dimostrazione. Per la disuguaglianza (3.15) basta mostrare che

$$\|(A + \Omega)^{-1}\|(\|\Omega\| + \|B\|) < 1$$

Poichè $\|B\| < \mu_{\min}(A)$

$$\begin{aligned} \|(A + \Omega)^{-1}\|(\|\Omega\| + \|B\|) &= \|(A + \omega I)^{-1}\|(\|\omega I\| + \|B\|) = \\ &= \frac{\omega + \|B\|}{\omega + \mu_{\min}(A)} < 1 \end{aligned}$$

segue la tesi. \square

In particolare se $B = I$, cioè nel caso di una AVE, otteniamo il seguente corollario:

Corollario 3.8.1. *Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica definita positiva e $\Omega = \omega I$ con $\omega > 0$. Se*

$$\mu_{\min}(A) > 1 \quad (3.18)$$

la successione MNM converge linearmente, a partire da un qualsiasi punto iniziale, alla unica soluzione x^ della AVE (1.1).*

Le condizioni per la convergenza proposte nel teorema 3.8 e nel corollario 3.8.1 sono indipendenti dalla matrice scalare positiva Ω . Però, grazie alla presenza della matrice scalare positiva Ω , possiamo fare in modo che la matrice $(A + \Omega)$ sia meglio condizionata della matrice A . Inoltre $(A + \Omega)$ può diventare strettamente dominante diagonale. Pertanto ci possiamo aspettare che il MNM applicato alle matrici simmetriche definite positive sia più efficiente del Metodo delle Iterate di Picard.

3.4 Metodo delle Funzioni Approssimanti

Questo metodo, proposto in [2] e applicabile alla AVE (1.1), è più complicato rispetto a quelli analizzati in precedenza, ma assicura (sotto opportune ipotesi) convergenza quadratica anziché lineare. Nel prosieguo indicheremo questo metodo con *MFA*.

Consideriamo la funzione $g(x)$ definita in (3.2). Come già osservato in precedenza tale funzione non è differenziabile in tutto \mathbb{R}^n . L'idea di fondo di questo metodo è quella di approssimare $g(x)$ con una funzione approssimante liscia con differenziale invertibile in ogni punto. Forniamo innanzitutto alcune definizioni che ci torneranno utili.

Definizione (Funzione approssimante). *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione localmente Lipschitziana. $F_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta una **funzione approssimante liscia** per f se $\forall \varepsilon > 0$ F_ε è di classe C^1 e, per ogni compatto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\bar{\varepsilon} > 0$, esiste una costante $L > 0$ tale che $\forall x \in D, \forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$*

$$\|F_\varepsilon(x) - f(x)\| \leq L\varepsilon$$

*Inoltre F_ε è una **approssimazione quadratica** di f se per $y \rightarrow x, \varepsilon \downarrow 0$ vale lo sviluppo:*

$$F_\varepsilon(y) - f(x) - F'_\varepsilon(y)(y - x) = o(\|y - x\|^2) + O(\varepsilon)$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} = \left(\sqrt{x_1^2 + \varepsilon^2}, \dots, \sqrt{x_n^2 + \varepsilon^2} \right)^T$. Possiamo adesso definire la funzione approssimante $G_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ come:

$$G_\varepsilon(x) = Ax - \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - b \quad (3.19)$$

Chiaramente G_ε è una funzione C^∞ con

$$G'_\varepsilon(x) = A - \text{diag}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + \varepsilon^2}}, i = 1, 2, \dots, n\right) \quad (3.20)$$

Teorema 3.9. *Se $\|A^{-1}\| < 1$, allora $G'_\varepsilon(x) = A - \text{diag}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + \varepsilon^2}}, i = 1, 2, \dots, n\right)$ è non singolare. Inoltre esiste una costante $M > 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vale $\|(G'_\varepsilon(x))^{-1}\| \leq M$.*

Dimostrazione. Poniamo $E = -\text{diag}\left(\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + \varepsilon^2}}, i = 1, 2, \dots, n\right)$. Poichè $|\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + \varepsilon^2}}| < 1$ per il corollario 2.7.1 $G'_\varepsilon(x)$ è invertibile. Per il lemma 2.7 otteniamo inoltre la stima:

$$\|(G'_\varepsilon(x))^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}E\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|E\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|} = M$$

□

Teorema 3.10. Siano $g(x)$ e $G_\varepsilon(x)$, definite come in (3.2) e (3.19) rispettivamente. Allora:

(i) G_ε è una funzione approssimante liscia per g

(ii) G_ε è una approssimazione quadratica di g

Dimostrazione. Omessa. Per una dimostrazione (tecnica) si veda [2]

□

Algoritmo

Prima di illustrare l'algoritmo vero e proprio, definiamo $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ come:

$$\theta(x) = \frac{1}{2}\|g(x)\|^2 \quad (3.21)$$

e $\forall \varepsilon > 0$ la relativa funzione approssimante $\theta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\|G_\varepsilon(x)\|^2 \quad (3.22)$$

Algoritmo 3.1. Consideriamo $g, G_\varepsilon, \theta, \theta_\varepsilon$ come definiti in precedenza.

Passo 0. Scegliamo delle costanti $\delta \in (0, 1), \beta \in (0, +\infty), \sigma \in (0, \frac{1}{2}), \rho_1 \in (0, +\infty)$ e $\rho_2 \in (2, +\infty)$. Sia inoltre $x^0 \in \mathbb{R}^n$ un punto arbitrario, poniamo $k = 0$ e $y^0 = x^0$.

Passo 1. Sia $d^k \in \mathbb{R}^n$ soluzione di

$$G_{\varepsilon^k}(y^k) + G'_{\varepsilon^k}(y^k)d^k = 0 \quad (3.23)$$

Se (3.23) non ha soluzione o se non vale

$$-(d^k)^T \nabla \theta_{\varepsilon^k}(y^k) \geq \rho_1 \|d^k\|^{\rho_2} \quad (3.24)$$

poniamo

$$d^k = -\nabla \theta_{\varepsilon^k}(y^k) \quad (3.25)$$

Passo 2. Sia l_k il più piccolo intero non negativo l che soddisfa la disuguaglianza

$$\theta_{\varepsilon^k}(y^k + \delta^l d^k) \leq \theta_{\varepsilon^k}(y^k) + \sigma \delta^l \nabla \theta_{\varepsilon^k}(y^k)^T d^k \quad (3.26)$$

Se

$$\|G_{\varepsilon^k}(y^k + \delta^{l_k} d^k)\| \leq \varepsilon^k \beta \quad (3.27)$$

oppure se

$$\|g(y^k + \delta^{l_k} d^k)\| \leq \frac{1}{2} \|H(x^k)\| \quad (3.28)$$

poniamo

$$y^{k+1} := y^k + \delta^{l_k} d^k, \quad x^{k+1} := y^{k+1}, \quad 0 < \varepsilon^{k+1} \leq \min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^k, \theta(x^{k+1})\right\} \quad (3.29)$$

Sostituiamo k con $k + 1$ e ripetiamo il Passo 1. Altrimenti, poniamo

$$y^{k+1} := y^k + \delta^{l_k} d^k \quad (3.30)$$

e ripetiamo il Passo 1.

I teoremi enunciati in precedenza (3.9, 3.10) ci assicurano la "bontà" della funzione approssimante, ma non sono sufficienti a dimostrare la convergenza quadratica dell'algoritmo appena descritto. Si rimanda a [2] per una trattazione più completa, che permette di giungere alla dimostrazione del seguente:

Teorema 3.11. *Supponiamo che $\|A^{-1}\| < 1$. Allora la successione $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ generata dall'Algoritmo 3.1 converge quadraticamente all'unica soluzione della AVE (1.1).*

4. Esperimenti numerici

In questo capitolo verranno testati, attraverso esperimenti numerici, i metodi proposti nel capitolo precedente. Per effettuare i test abbiamo usato MATLAB R2019b su PC con processore *Intel(R) Core(TM) i7 Q720 1.60GHz*, 8 GB di RAM e *Windows 10 Home (64 bit)*.

4.1 AVE

Abbiamo testato tutti e quattro i metodi proposti su cinque casi della AVE (1.1), basati sulle ipotesi dei teoremi precedenti o proposti in [2, 7].

1. Valori casuali in $(-10, 10)$ per A e valori casuali in $(-1, 1)$ per b .
2. Valori singolari di A maggiori di 1 e valori casuali in $(-1, 1)$ per b . In questo caso la AVE (1.1) ha esattamente una soluzione per il Teorema 2.8.
3. $b < 0$ e $\|A\|_\infty < \frac{\gamma}{2}$ dove $\gamma = \frac{\min_i |b_i|}{\max_i |b_i|}$. In questo caso la AVE (1.1) ha esattamente 2^n soluzioni distinte per il Teorema 2.12.
4. A matrice simmetrica definita positiva con minimo autovalore > 1 e b ricavato da soluzione casuale.
5. $\rho(|A^{-1}|) < 1$ e valori casuali in $(-1, 1)$ per b . In questo caso la AVE (1.1) ha esattamente una soluzione per il Teorema 2.11.

In ciascun caso abbiamo testato i quattro metodi su 100 problemi di taglia 1000 (cioè $A \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$) generati casualmente. Ogni metodo arresta le proprie iterazioni quando si raggiunge la precisione $\|Ax - |x| - b\| < 10^{-6}$ oppure viene superato il numero massimo di iterazioni $\text{itmax} = 100$. Nel primo caso consideriamo l'istanza risolta.

I risultati sono riassunti nelle tabelle seguenti, divisi per metodo. Riportiamo i seguenti dati:

- `fails` = numero di istanze non risolte;
- `it` = numero totale di iterazioni;
- `time` = tempo impiegato (secondi);
- `it_nonfailed` = numero di iterazioni relative alle istanze effettivamente risolte;
- `time_nonfailed` = tempo impiegato nelle istanze effettivamente risolte (secondi);

4.1.1 Metodo delle Iterate di Picard

Caso	fails	it	time	it_nonfailed	time_nonfailed
1	9	2438	16.38	1538	14.13
2	0	331	13.63	331	13.63
3	100	10 000	25.77	-	-
4	0	1416	13.53	1416	13.53
5	0	348	13.88	348	13.88

Su 500 istanze 391 sono state risolte, con un numero medio di 9.29 iterazioni e un tempo medio di 0.141 secondi per ciascuna istanza risolta.

Quasi tutte le istanze non risolte (100 su 109) sono relative al Caso 3, che quindi non si presta alla risoluzione con il Metodo delle iterate di Picard. Inoltre i casi 1 e 4 si sono rivelati particolarmente dispendiosi in termini di iterazioni effettuate.

4.1.2 Metodo di Newton Generalizzato

Caso	fails	it	time	it_nonfailed	time_nonfailed
1	3	679	46.35	379	26.16
2	0	269	18.32	269	18.32
3	0	200	13.16	200	13.16
4	0	366	17.00	366	17.00
5	0	269	18.18	269	18.18

Su 500 istanze 497 sono state risolte, con un numero medio di 2.98 iterazioni e un tempo medio di 0.187 secondi per ciascuna istanza risolta.

Tutte le istanze non risolte (3) sono relative al Caso 1, con un generale equilibrio tra tutti i casi per quanto riguarda il numero di iterazioni effettuate.

4.1.3 Metodo di Newton Modificato

Come in [13] abbiamo effettuato i nostri esperimenti numerici nel caso in cui $\Omega = \omega I$, dove il parametro ω è stato impostato a $\omega = 0.7$.

Caso	fails	it	time	it_nonfailed	time_nonfailed
1	15	2902	24.85	1402	19.73
2	0	345	20.75	345	20.75
3	100	10 000	31.53	-	-
4	0	2168	19.04	2168	19.04
5	0	366	20.49	366	20.49

Su 500 istanze 385 sono state risolte, con un numero medio di 11.12 iterazioni e un tempo medio di 0.208 secondi per ciascuna istanza risolta.

Quasi tutte le istanze non risolte (100 su 115) sono relative al Caso 3, che quindi non si presta alla risoluzione con il Metodo di Newton Modificato. Inoltre i casi 1 e 4 si sono rivelati particolarmente dispendiosi in termini di numero di iterazioni effettuate.

4.1.4 Metodo delle Funzioni Approssimanti

Come in [2] i parametri dell'algoritmo sono stati impostati a $\delta = 0.5$, $\beta = 1$, $\sigma = 0.0005$, $\rho_1 = 10^{-8}$ e $\rho_2 = 2.1$.

Caso	fails	it	time	it_nonfailed	time_nonfailed
1	3	611	49.39	311	31.58
2	0	203	23.36	203	23.36
3	0	360	34.91	360	34.91
4	0	272	20.49	272	20.49
5	0	203	23.34	203	23.34

Su 500 istanze 497 sono state risolte, con un numero medio di 2.71 iterazioni e un tempo medio di 0.269 secondi per ciascuna istanza risolta.

Tutte le istanze non risolte (3) sono relative al Caso 1, con un generale equilibrio tra tutti i casi per quanto riguarda il numero di iterazioni effettuate.

4.2 GAVE

Abbiamo testato entrambi i metodi proposti su quattro casi della GAVE (1.2), basati sulle ipotesi dei teoremi precedenti o proposti in [2, 7].

1. Valori casuali in $(-10, 10)$ per A, B e b ricavato da soluzione casuale.
2. Valori casuali in $(-10, 10)$ per A, B con B riscalata in maniera tale da avere $\rho(|A^{-1}B|) < 1$, b ricavato da soluzione particolare. In questo caso la GAVE (1.2) ha esattamente una soluzione per il Teorema 2.11.
3. Valori casuali in $(-10, 10)$ per A , valori casuali in $(-1, 1)$ per B con riscalamento in maniera tale da avere $\|A^{-1}\| \|B\| < 1$, b ricavato da soluzione particolare.
4. A matrice simmetrica definita positiva con minimo autovalore $> \|B\|$, b ricavato da soluzione casuale.

Oltre ai metodi specifici per le GAVE abbiamo anche riscritto la GAVE (1.2) come

$$B^{-1}A - |x| = B^{-1}b$$

e poi abbiamo applicato a questa i metodi per AVE.

Le dimensioni del problema, le condizioni di arresto e i dati riportati sono analoghi al caso delle AVE. I risultati sono riassunti nelle tabelle seguenti, divisi per metodo.

4.2.1 Metodo delle Iterate di Picard per GAVE

Caso	fails	it	time	it_nonfailed	time_nonfailed
1	100	10 000	41.58	-	-
2	0	362	14.04	362	14.04
3	0	296	18.87	296	18.87
4	0	500	13.79	500	13.79

Su 400 istanze 300 sono state risolte, con un numero medio di 3.86 iterazioni e un tempo medio di 0.16 secondi per ciascuna istanza risolta.

Tutte le istanze non risolte (100) sono relative al Caso 1.

4.2.2 Metodo di Newton Modificato per GAVE

Come in [13] abbiamo effettuato i nostri esperimenti numerici nel caso in cui $\Omega = \omega I$, dove il parametro ω è stato impostato a $\omega = 0.7$.

Caso	fails	it	time	it_nonfailed	time_nonfailed
1	100	10 000	48.72	-	-
2	12	2095	24.70	895	19.52
3	8	1782	27.23	982	23.08
4	0	500	23.09	500	23.09

Su 400 istanze 280 sono state risolte, con un numero medio di 8.49 iterazioni e un tempo medio di 0.23 secondi per ciascuna istanza risolta.

Quasi tutte le istanze non risolte (100 su 120) sono relative al Caso 1.

4.2.3 Metodi applicati alla AVE equivalente

Per convertire tutte le 400 GAVE in AVE sono stati impiegati 134.25 secondi, con quindi un tempo medio di 0.336 secondi per ogni conversione.

Metodo	Caso	fails	it	time	it_nonfailed	time_nonfailed
Picard	1	100	10 000	32.35	-	-
"	2	96	9624	20.49	24	0.64
"	3	95	9526	29.78	26	0.76
"	4	2	690	15.04	490	14.53
MNG	1	100	10 000	682.14	-	-
"	2	1	392	26.44	292	19.79
"	3	5	755	51.57	255	17.34
"	4	0	299	19.98	299	19.98
MNM	1	100	10 000	32.06	-	-
"	2	98	9813	31.47	13	0.41
"	3	94	9434	31.24	34	1.21
"	4	1	595	10.85	495	20.55
MFA	1	100	10 000	935.81	-	-
"	2	0	234	25.53	234	25.53
"	3	1	292	41.66	192	31.17
"	4	0	219	24.29	219	24.29

Su 1600 istanze (400 per metodo) 807 sono state risolte, con un numero medio di 3.19 iterazioni e un tempo medio di 0.218 secondi, che diventano 0.554 secondi includendo il tempo di conversione in AVE, per ciascuna istanza risolta.

Fatta esclusione per il Caso 4, risolto da quasi tutti i metodi, gli unici metodi che hanno risolto una buona parte delle GAVE proposte sono il *MNG* e il *MFA*. Nessun metodo è però riuscito a risolvere il Caso 1, come anche si era verificato con i metodi specifici per GAVE.

4.3 Confronto tra metodi

Per quanto riguarda i metodi per AVEs il Metodo delle Iterate di Picard si è dimostrato abbastanza efficace in termini di problemi risolti, fatta eccezione per il caso 3. Nonostante il numero medio di iterazioni piuttosto elevato, essendo ciascuna iterazione poco dispendiosa, il tempo di esecuzione è il migliore tra i metodi proposti.

Il Metodo di Newton Generalizzato e il Metodo delle Funzioni Approssimanti hanno sostanzialmente le medesime performance in termini di problemi risolti e numero di iterazioni, ma il tempo di esecuzione del *MNG* è nettamente migliore. Infatti le iterazioni del *MFA* hanno una complessità maggiore sia in tempo che in spazio. Entrambi i metodi sono comunque ottimi per la risoluzione della AVE (1.1).

Il Metodo di Newton Modificato invece è risultato il meno efficiente sia per problemi risolti che per numero medio di iterazioni, nonostante il *MIP* ne sia un caso particolare. Questo comportamento è probabilmente dovuto all'aver usato sempre la stessa matrice Ω , mentre, come già osservato, questo metodo si presta particolarmente in casi specifici in cui A è mal condizionata e la scelta di una opportuna Ω può migliorare il condizionamento.

In conclusione il *MIP*, se ne è assicurata la convergenza per ragioni teoriche, è il più veloce tra i metodi proposti. Performance leggermente peggiori in termini di tempo di esecuzione sono assicurate dal *MNG*, che però necessita di un minor numero di iterazioni e risolve un numero maggiore di problemi.

Per quanto riguarda le GAVEs il Metodo delle Iterate di Picard si è dimostrato nettamente migliore, sia per il numero di problemi risolti che per la velocità (numero di iterazioni e tempo di esecuzione). Per il *MNM* valgono le considerazioni fatte in precedenza.

L'applicazione dei metodi per AVE non ha portato significativi miglioramenti e soltanto il *MNG* e il *MFA* hanno risolto un buon numero di problemi. Inoltre il solo tempo di trasformazione della AVE in GAVE è quasi doppio rispetto al tempo di risoluzione con il *MIP*, il che rende questi metodi poco efficienti.

Bibliografia

- [1] Dario Bini, Milvio Capovani e Ornella Menchi. *Metodi numerici per l'algebra lineare*. Zanichelli, 1988.
- [2] Louis Caccetta, Biao Qu e Guanglu Zhou. «A globally and quadratically convergent method for absolute value equations». In: *Computational Optimization and Applications volume 48* (2011), pp. 45–58. doi: <https://doi.org/10.1007/s10589-009-9242-9>.
- [3] Henri Cartan. *Differential Calculus*. Hermann, 1983.
- [4] Danfu Han. «The majorant method and convergence for solving nondifferentiable equations in Banach space». In: *Applied Mathematics and Computation* 118 (2001), pp. 73–82. doi: [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(99\)00183-6](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(99)00183-6).
- [5] Roger A. Horn e Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2^a ed. Cambridge University Press, 2012.
- [6] O. L. Mangasarian. «Absolute value programming». In: *Computational Optimization and Applications* 36 (2007), pp. 43–53. doi: <https://doi.org/10.1007/s10589-006-0395-5>.
- [7] O.L. Mangasarian. «A generalized Newton method for absolute value equations». In: *Optimization Letters* 3 (2009), pp. 101–108. doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-008-0094-5>.
- [8] O.L. Mangasarian e R.R. Meyer. «Absolute value equations». In: *Linear Algebra and its Applications* 419 (2006), pp. 359–367. doi: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.05.004>.
- [9] Francesco Mezzadri. «On the solution of general absolute value equations». In: *Applied Mathematics Letters* 107 (2020), p. 106462. doi: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106462>.
- [10] J. Rohn. «A theorem of the alternatives for the equation $Ax + B|x| = b$ ». In: *Linear and Multilinear Algebra* 52.6 (2004), pp. 421–426. doi: <https://doi.org/10.1080/0308108042000220686>.
- [11] J. Rohn. «On unique solvability of the absolute value equation». In: *Optimization Letters* 3 (2009), pp. 603–606. doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-009-0129-6>.

- [12] J. Rohn, V. Hooshyarbakhsh e R. Farhadsefat. «An iterative method for solving absolute value equations and sufficient conditions for unique solvability». In: *Optimization Letters* 8 (2014), pp. 35–44. doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-012-0560-y>.
- [13] An Wang, Yang Cao e Jing-Xian Chen. «Modified Newton-Type Iteration Methods for Generalized Absolute Value Equations». In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 181 (2019), pp. 216–230. doi: <https://doi.org/10.1007/s10957-018-1439-6>.
- [14] S.-L. Wu e C.-X. Li. «A note on unique solvability of the absolute value equation». In: *Optimization Letters* (2019). doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-019-01478-x>.
- [15] S.-L. Wu e C.-X. Li. «The unique solution of the absolute value equations». In: *Applied Mathematics Letters* 76 (2017), pp. 195–200. doi: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.08.012>.