Metodi numerici *low-rank* per l'equazione di Sylvester

Candidato: Ivan Bioli
Relatore: Prof. Dario Andrea Bini

16 Luglio 2021

Considereremo l'equazione matriciale lineare $AX+XB=C$ con A,B matrici quadrate reali o complesse, C di dimensioni compatibili e incognita X. Tale equazione, per matrici dei coefficienti generiche, è detta equazione di Sylvester. Se invece $B=A^*$ e $C=C^*$, dove A^* è la trasposta coniugata di A, l'equazione prende il nome di equazione di Lyapunov e la soluzione, se esiste, può essere scelta hermitiana. Tali equazioni sono state largamente trattate in letteratura durante il secolo scorso, sia dal punto di vista teorico che computazionale, e sono tutt'ora oggetto di ricerca per le numerose applicazioni in cui compaiono, tra cui l'analisi della stabilità e la riduzione dimensionale di sistemi dinamici e la risoluzione di equazioni alle derivate parziali.

In questo elaborato ci si è concentrati più sull'aspetto computazionale che su quello teorico, con l'obiettivo di fornire una panoramica dei principali strumenti numerici per la risoluzione dell'equazione di Sylvester e un esempio di applicazione di tali tecniche. Inizialmente vengono presentati alcuni algoritmi per la risoluzione numerica delle equazioni di Sylvester e di Lyapunov, sia nel caso di problemi di taglia moderata che nel caso di taglia grande con C di rango basso. Successivamente, sulla base del lavoro svolto in [3], viene proposto un algoritmo per aggiornare velocemente la soluzione di tali equazioni quando i coefficienti A,B,C vengono sottoposti a modifiche di rango basso. Infine, vengono adoperati gli strumenti sviluppati in precedenza per mostrare come è possibile accelerare il metodo di Newton per la risoluzione di Equazioni di Riccati Algebriche. Tramite la sperimentazione numerica viene dimostrato il vantaggio degli approcci che sfruttano la fattorizzazione *low-rank* dei coefficienti in termini di complessità in tempo, pur sacrificando in parte la precisione raggiunta.

Nel Capitolo 1 vengono introdotte alcune notazioni e alcuni risultati preliminari che saranno utili durante l'intero elaborato.

Nel Capitolo 2, dopo aver fornito condizioni teoriche per garantire esistenza e unicità della soluzione, viene presentato l'algoritmo di Bartels-Stewart. Tale algoritmo sfrutta la decomposizione di Schur reale o complessa e, pur essendo stato introdotto già nel 1972, si rivela tutt'oggi tra i più efficienti per la risoluzione di problemi di taglia moderata. Successivamente viene discussa la approssimabilità della soluzione X dell'equazione di Sylvester tramite matrici di rango basso, condizione necessaria per poter applicare solutori low-rank per il calcolo di approssimazioni della soluzione X tramite matrici di rango basso. In particolare vengono trattati i metodi proiettivi, basati sugli Spazi di Krylov a blocchi, e il metodo Alternating-Direction-Implicit (ADI). I precedenti metodi vengono infine specializzati al caso dell'equazione di Lyapunov, con una particolare attenzione alle tecniche per la scelta dei parametri di shift del metodo ADI.

Nel Capitolo 3 viene trattato il problema degli aggiornamenti di rango basso. Data X_0 soluzione dell'equazione di Sylvester $A_0X + B_0X = C_0$, si vuole calcolare un aggiornamento δX tale che $X := X_0 + \delta X$ sia soluzione dell'equazione perturbata $(A_0 + \delta A)X + X(B_0 + \delta B) = C_0 + \delta C$. Sottraendo le due equazioni si trova che l'aggiornamento δX deve risolvere $(A_0 + \delta A)\delta X + \delta X(B_0 + \delta B) = \delta C - \delta AX_0 - X_0\delta B$, vale a dire un'equazione di Sylvester con membro destro di rango basso a cui si possono applicare i solutori trattati nel precedente capitolo. Viene presentato l'algoritmo introdotto in [3], prestando particolare attenzione alle tecniche per ottenere una fattorizzazione di rango basso del membro destro dell'equazione perturbata. L'algoritmo viene poi specializzato al caso di equazioni di Lyapunov stabili, cioè in cui le parti reali degli autovalori di A sono negative e C_0 è semidefinita negativa.

Il Capitolo 4 tratta l'applicazione delle tecniche descritte nei capitoli precedenti all'Equazione di Riccati Algebrica Continua (*Continuous-Time Algebraic Riccati Equation*, CARE), cioè un'equazione matriciale della forma $XA + A^*X - XBX = C$ dove $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e X è l'incognita. Viene presentato il metodo di Newton per la risoluzione di CARE, fornendo un teorema con condizioni sufficienti a garantirne la convergenza. Infine, viene illustrato come ottenere le iterate del suddetto metodo di Newton tramite approssimazioni successive di rango basso nel caso in cui la matrice dei coefficienti B ammetta una fattorizzazione di rango basso.

Nel Capitolo 5 viene concentrata la sperimentazione numerica relativa a tutti i metodi proposti nel corso dell'elaborato. L'implementazione degli algoritmi è stata svolta in Matlab, con i listings necessari riportati in Appendice. Inizialmente viene trattato il caso dell'equazione di Sylvester, con il problema della divergenza del metodo basato su Spazi di Krylov Estesi a blocchi a causa di errori di round-off. Vengono poi confrontati dal punto di vista della complessità in tempo e della precisione raggiunta gli algoritmi proposti, vale a dire l'algoritmo di Bartels-Stewart e i solutori low-rank basati su Spazi di Krylov. Passando poi all'equazione di Lyapunov, viene aggiunto al confronto anche il metodo ADI. In secondo luogo vengono illustrati i risultati sperimentali relativi agli algoritmi di update per l'equazione di Sylvester e per l'equazione di Lyapunov stabile, con i vari metodi confrontati ad ogni passo di aggiornamento in termini di precisione raggiunta e tempo di esecuzione. La sperimentazione si conclude con il confronto delle possibili implementazioni dell'algoritmo di Newton per la risoluzione di CARE. I risultati della sperimentazione numerica si rivelano consistenti con quanto ci si aspettava teoricamente: gli algoritmi low-rank si dimostrano più efficienti in termini di tempo di esecuzione, ma raggiungono una precisione inferiore rispetto a solutori basati sull'algoritmo di Bartels-Stewart.

Riferimenti bibliografici principali

[1] Dario Bini, Milvio Capovani e Ornella Menchi. *Metodi numerici per l'algebra lineare.* Zanichelli, 1988. ISBN: 88-08-06438-7.

[2] Dario A. Bini, Bruno Iannazzo e Beatrice Meini. *Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations.* Society for Industrial e Applied Mathematics, 2011. DOI: 10.1137/1.9781611972092.

[3] Daniel Kressner, Stefano Massei e Leonardo Robol. «Low-Rank Updates and a Divide-And-Conquer Method for Linear Matrix Equations». In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 41.2 (2019), A848–A876. DOI: 10.1137/17M1161038.

[4] V. Simoncini. «Computational Methods for Linear Matrix Equations». In: *SIAM Review* 58.3 (2016), pp. 377–441. DOI: 10.1137/130912839.