



UNIVERSITÀ DI PISA

Metodi numerici *low-rank* per l'equazione di Sylvester

Ivan Bioli

Università di Pisa , Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

16 Luglio 2021

Introduzione

Equazione di Sylvester:

$$AX + XB = C$$

dove $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e l'incognita è $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

- Solutori, in particolare se $C = C_1 C_2^*$ con $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $C_2 \in \mathbb{C}^{m \times s}$ e $s \ll \min\{n, m\}$
- Algoritmo di update della soluzione quando A, B, C subiscono aggiornamenti di rango basso
- Applicazione alle Equazioni di Riccati Algebriche
- Sperimentazione numerica

Introduzione

Equazione di Sylvester:

$$AX + XB = C$$

dove $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e l'incognita è $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

- Solutori, in particolare se $C = C_1 C_2^*$ con $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $C_2 \in \mathbb{C}^{m \times s}$ e $s \ll \min\{n, m\}$
- Algoritmo di update della soluzione quando A, B, C subiscono aggiornamenti di rango basso
- Applicazione alle Equazioni di Riccati Algebriche
- Sperimentazione numerica

Introduzione

Equazione di Sylvester:

$$AX + XB = C$$

dove $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e l'incognita è $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

- Solutori, in particolare se $C = C_1 C_2^*$ con $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $C_2 \in \mathbb{C}^{m \times s}$ e $s \ll \min\{n, m\}$
- Algoritmo di update della soluzione quando A, B, C subiscono aggiornamenti di rango basso
- Applicazione alle Equazioni di Riccati Algebriche
- Sperimentazione numerica

Introduzione

Equazione di Sylvester:

$$AX + XB = C$$

dove $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e l'incognita è $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

- Solutori, in particolare se $C = C_1 C_2^*$ con $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $C_2 \in \mathbb{C}^{m \times s}$ e $s \ll \min\{n, m\}$
- Algoritmo di update della soluzione quando A, B, C subiscono aggiornamenti di rango basso
- Applicazione alle Equazioni di Riccati Algebriche
- Sperimentazione numerica

Introduzione

Equazione di Sylvester:

$$AX + XB = C$$

dove $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e l'incognita è $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

- Solutori, in particolare se $C = C_1 C_2^*$ con $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $C_2 \in \mathbb{C}^{m \times s}$ e $s \ll \min\{n, m\}$
- Algoritmo di update della soluzione quando A, B, C subiscono aggiornamenti di rango basso
- Applicazione alle Equazioni di Riccati Algebriche
- Sperimentazione numerica

Risultati preliminari: la TSVD

Teorema (Teorema di Eckart-Young)

Sia $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e sia $A = U \Sigma V^*$ la sua decomposizione ai valori singolari, dove U e V sono unitarie, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots \sigma_p = 0, \quad p = \min\{m, n\}$$

e sia r un intero positivo minore o uguale a k . Indicando con

$$A_r = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^*$$

e con $\mathcal{S} = \{B \in \mathbb{C}^{m \times n} : rk(B) \leq r\}$ si ha:

$$\min_{B \in \mathcal{S}} \|A - B\|_2 = \|A - A_r\|_2 = \sigma_{r+1}.$$

Truncated Singular Value Decomposition (TSVD): memorizziamo solo i primi r valori/vettori singolari

Esistenza e unicità della soluzione

L'equazione di Sylvester si può riscrivere come

$$\mathcal{A}x = c \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= I_m \otimes A + B^T \otimes I_n, \\ x &= \text{vec}(X), \quad c = \text{vec}(C). \end{aligned}$$

- $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$: non efficiente risolvere il sistema
- **Teorema (di esistenza e unicità della soluzione)**: L'equazione di Sylvester ammette soluzione unica per ogni scelta di $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ se e solo se $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(-B)$ sono disgiunti.

Esistenza e unicità della soluzione

L'equazione di Sylvester si può riscrivere come

$$\mathcal{A}x = c \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= I_m \otimes A + B^T \otimes I_n, \\ x &= \text{vec}(X), \quad c = \text{vec}(C). \end{aligned}$$

- $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$: non efficiente risolvere il sistema
- **Teorema (di esistenza e unicità della soluzione)**: L'equazione di Sylvester ammette soluzione unica per ogni scelta di $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ se e solo se $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(-B)$ sono disgiunti.

Esistenza e unicità della soluzione

L'equazione di Sylvester si può riscrivere come

$$\mathcal{A}x = c \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= I_m \otimes A + B^T \otimes I_n, \\ x &= \text{vec}(X), \quad c = \text{vec}(C). \end{aligned}$$

- $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$: non efficiente risolvere il sistema
- **Teorema (di esistenza e unicità della soluzione)**: L'equazione di Sylvester ammette soluzione unica per ogni scelta di $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ se e solo se $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(-B)$ sono disgiunti.

Problemi di taglia medio-bassa

Algoritmo 1 Algoritmo di Bartels-Stewart

- 1: Calcola le forme normali di Schur: $A^* = URU^*$, $B = VSV^*$
 - 2: Risolvi in Y : $R^*Y + YS = U^*CV$
 - 3: $X = UYV^*$
-

Se $\hat{C} := U^*CV$, l'equazione $R^*Y + YS = U^*CV$ letta sull'elemento (k, j) diventa:

$$\overline{R_{kk}} Y_{kj} + Y_{kj} S_{jj} = \hat{C}_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \overline{R_{ik}} Y_{ij} - \sum_{i=1}^{j-1} Y_{ki} S_{ij}$$

e si ricavano gli elementi di Y in sequenza per righe a partire da Y_{11} .

Costo: $\sim 10n^3 + 10m^3 + \frac{5}{2}(n^2m + m^2n)$

Approssimabilità a rango basso

Supponiamo di avere

$$AX + XB = C, \quad \text{rank}(C) \leq k$$

Teorema

Siano A, B matrici hermitiane definite positive con spettro contenuto nell'intervallo $[a, b]$ dove $0 < a < b < \infty$. Allora la soluzione X soddisfa:

$$\frac{\sigma_{1+kh}(X)}{\|X\|_2} \leq 4\rho^{-h} \quad \rho := \exp\left(\frac{\pi^2}{\log(4b/a)}\right).$$

Se le matrici sono soltanto diagonalizzabili, indicati con $\kappa_{\text{eig}}(A)$, $\kappa_{\text{eig}}(B)$ i numeri di condizionamento delle matrici degli autovettori rispettivamente di A e B , allora

$$\frac{\sigma_{1+kh}(X)}{\|X\|_2} \leq 4\kappa_{\text{eig}}(A)\kappa_{\text{eig}}(B)\rho^{-h}.$$

Approssimabilità a rango basso

Supponiamo di avere

$$AX + XB = C, \quad \text{rank}(C) \leq k$$

- X ammette una ε -approssimazione di rango r se esiste Y di rango al più r tale che $\|X - Y\|_2 < \varepsilon$
- Equivalente a richiedere che $\sigma_{r+1}(X) < \varepsilon$
- Se k è piccolo ci aspettiamo che X ammetta una buona approssimazione di rango basso

Metodi proiettivi

- \mathcal{V} sottospazio di \mathbb{C}^n di dimensione k
- $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{V}
- Cerchiamo una approssimazione X_k della soluzione tale che $\mathcal{R}(X_k) \subset \mathcal{V}$
- $X_k := V_k Y_k$ che verifichi

$$R_k := AX_k + X_k B - C \approx 0.$$

- Imponiamo l'ortogonalità del residuo R_k

$$0 = V_k^* R_k = V_k^* A V_k Y_k + Y_k B - V_k^* C.$$

Metodi proiettivi

- \mathcal{V} sottospazio di \mathbb{C}^n di dimensione k
- $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{V}
- Cerchiamo una approssimazione X_k della soluzione tale che $\mathcal{R}(X_k) \subset \mathcal{V}$
- $X_k := V_k Y_k$ che verifichi

$$R_k := AX_k + X_k B - C \approx 0.$$

- Imponiamo l'ortogonalità del residuo R_k

$$0 = V_k^* R_k = V_k^* A V_k Y_k + Y_k B - V_k^* C.$$

Metodi proiettivi

- \mathcal{V} sottospazio di \mathbb{C}^n di dimensione k
- $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{V}
- Cerchiamo una approssimazione X_k della soluzione tale che $\mathcal{R}(X_k) \subset \mathcal{V}$
- $X_k := V_k Y_k$ che verifichi

$$R_k := AX_k + X_k B - C \approx 0.$$

- Imponiamo l'ortogonalità del residuo R_k

$$0 = V_k^* R_k = V_k^* A V_k Y_k + Y_k B - V_k^* C.$$

Metodi proiettivi

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix}.$$

- \mathcal{V} sottospazio di \mathbb{C}^n di dimensione k
- $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{V}
- Cerchiamo una approssimazione X_k della soluzione tale che $\mathcal{R}(X_k) \subset \mathcal{V}$
- $X_k := V_k Y_k$ che verifichi

$$R_k := AX_k + X_k B - C \approx 0.$$

- Imponiamo l'ortogonalità del residuo R_k

$$0 = V_k^* R_k = V_k^* A V_k Y_k + Y_k B - V_k^* C.$$

Metodi proiettivi

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^* \end{bmatrix}.$$

- \mathcal{V}, \mathcal{W} sottospazi di \mathbb{C}^n
- $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{V}
- $W_j \in \mathbb{C}^{n \times j}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{W}
- Cerchiamo una approssimazione $\tilde{X} = V_k Y W_j^* \approx X$
- Ortogonalità del residuo

$$(W_j \otimes V_k)^*(c - \mathcal{A}\tilde{x})$$



$$0 = V_k^* R W_j = V_k^* A V_k Y + Y W_j^* B W_j - (V_k^* C_1)(W_j^* C_2)^*$$

Metodi proiettivi

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^* \end{bmatrix}.$$

- \mathcal{V}, \mathcal{W} sottospazi di \mathbb{C}^n
- $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{V}
- $W_j \in \mathbb{C}^{n \times j}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{W}
- Cerchiamo una approssimazione $\tilde{X} = V_k Y W_j^* \approx X$
- Ortogonalità del residuo

$$(W_j \otimes V_k)^*(c - \mathcal{A}\tilde{x})$$



$$0 = V_k^* R W_j = V_k^* A V_k Y + Y W_j^* B W_j - (V_k^* C_1)(W_j^* C_2)^*$$

Metodi proiettivi

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^* \end{bmatrix}.$$

- \mathcal{V}, \mathcal{W} sottospazi di \mathbb{C}^n
- $V_k \in \mathbb{C}^{n \times k}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{V}
- $W_j \in \mathbb{C}^{n \times j}$ con colonne base ortonormale di \mathcal{W}
- Cerchiamo una approssimazione $\tilde{X} = V_k Y W_j^* \approx X$
- Ortogonalità del residuo

$$(W_j \otimes V_k)^*(c - \mathcal{A}\tilde{x})$$



$$0 = V_k^* R W_j = V_k^* A V_k Y + Y W_j^* B W_j - (V_k^* C_1)(W_j^* C_2)^*$$

Metodi proiettivi

Per ricavare \mathcal{V} da A e C_1 (e similmente per \mathcal{W} da B e C_2) si usano:

- 1 Spazio di Krylov Standard (a blocchi):

$$\mathcal{V} = \mathcal{K}_k^\square(A, C_1) := \text{range}([C_1, AC_1, A^2C_1, \dots, A^kC_1]).$$

- 2 Spazio di Krylov Esteso (a blocchi)

$$\mathcal{V} = \mathcal{EK}_k(A, C_1) := \mathcal{K}_k^\square(A, C_1) + \mathcal{K}_k^\square(A^{-1}, A^{-1}C_1).$$

usando un processo Processo di Arnoldi Esteso a blocchi.

- 3 ...

Metodi ADI

ADI = Alternating Direction Implicit

Metodi ADI

Supponiamo che A, B abbiano autovalori con parte reale positiva e sia $q > 0$.

$$(qI + A)X(qI + B) - (qI - A)X(qI - B) = 2qC, \quad q \neq 0.$$

Moltiplicando per le inverse

$$X - (qI + A)^{-1}(qI - A)X(qI - B)(qI + B)^{-1} = 2q(qI + A)^{-1}C(qI + B)^{-1}.$$

Posto

$$\mathcal{A} = (qI + A)^{-1}(qI - A)$$

$$\mathcal{B} = (qI - B)(qI + B)^{-1}$$

$$\mathcal{C} = 2q(qI + A)^{-1}C(qI + B)^{-1}$$

si ottiene l'equazione equivalente

$$X - \mathcal{A}X\mathcal{B} = \mathcal{C}$$

$$X - \mathcal{A}X\mathcal{B} = \mathcal{C}$$

ha soluzione la serie (convergente)

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k \mathcal{C} \mathcal{B}^k$$

e questo porta alla sequenza di approssimazioni successive

$$X_0 = \mathcal{C}, \quad X_{k+1} = \mathcal{C} + \mathcal{A}X_k\mathcal{B}.$$

Si può generalizzare

- scegliendo due parametri $p, q > 0$ diversi:

$$X - \mathcal{A}(p, q)XB(p, q) = \mathcal{C}(p, q)$$

dove

$$\mathcal{A}(p, q) = (pI + A)^{-1}(qI - A)$$

$$\mathcal{B}(p, q) = (pI - B)(qI + B)^{-1}$$

$$\mathcal{C}(p, q) = (p + q)(pI + A)^{-1}C(qI + B)^{-1}$$

Si può generalizzare

- scegliendo due parametri diversi ad ogni iterazione, cioè una successione di parametri $\{(p_j, q_j)\}$.
- Il fattore di convergenza di K iterazioni accorpate diventa:

$$\prod_{j=1}^K \max_{s \in [a, b], t \in [c, d]} \left| \frac{(q_j - s)(p_j - t)}{(q_j + s)(p_j + t)} \right|.$$

L'equazione di Lyapunov

$$AX + XA^* = C \quad C = C^*$$

- La soluzione esiste ed è unica per ogni scelta di C se e solo se $\lambda_i + \overline{\lambda_j} \neq 0$ per tutti gli autovalori λ_i, λ_j di A (ad esempio se A è stabile)
- Se X è soluzione lo è anche X^*
- Se si taglia ridotta si usa Bartels-Stewart
- Se $C = -C_1 C_1^*$, $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $s \ll n$ cerchiamo una soluzione di rango basso $\tilde{X} = Z Z^*$

L'equazione di Lyapunov

$$AX + XA^* = C \quad C = C^*$$

- La soluzione esiste ed è unica per ogni scelta di C se e solo se $\lambda_i + \overline{\lambda_j} \neq 0$ per tutti gli autovalori λ_i, λ_j di A (ad esempio se A è stabile)
- Se X è soluzione lo è anche X^*
- Se di taglia ridotta si usa Bartels-Stewart
- Se $C = -C_1 C_1^*$, $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $s \ll n$ cerchiamo una soluzione di rango basso $\tilde{X} = Z Z^*$

L'equazione di Lyapunov

$$AX + XA^* = C \quad C = C^*$$

- La soluzione esiste ed è unica per ogni scelta di C se e solo se $\lambda_i + \overline{\lambda_j} \neq 0$ per tutti gli autovalori λ_i, λ_j di A (ad esempio se A è stabile)
- Se X è soluzione lo è anche X^*
- Se di taglia ridotta si usa Bartels-Stewart
- Se $C = -C_1 C_1^*$, $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $s \ll n$ cerchiamo una soluzione di rango basso $\tilde{X} = Z Z^*$

L'equazione di Lyapunov

$$AX + XA^* = C \quad C = C^*$$

- La soluzione esiste ed è unica per ogni scelta di C se e solo se $\lambda_i + \overline{\lambda_j} \neq 0$ per tutti gli autovalori λ_i, λ_j di A (ad esempio se A è stabile)
- Se X è soluzione lo è anche X^*
- Se di taglia ridotta si usa Bartels-Stewart
- Se $C = -C_1 C_1^*$, $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $s \ll n$ cerchiamo una soluzione di rango basso $\tilde{X} = Z Z^*$

L'equazione di Lyapunov

$$AX + XA^* = C \quad C = C^*$$

- La soluzione esiste ed è unica per ogni scelta di C se e solo se $\lambda_i + \overline{\lambda_j} \neq 0$ per tutti gli autovalori λ_i, λ_j di A (ad esempio se A è stabile)
- Se X è soluzione lo è anche X^*
- Se di taglia ridotta si usa Bartels-Stewart
- Se $C = -C_1 C_1^*$, $C_1 \in \mathbb{C}^{n \times s}$, $s \ll n$ cerchiamo una soluzione di rango basso $\tilde{X} = Z Z^*$

Metodo ADI per l'equazione di Lyapunov

- L'iterazione si semplifica

$$X_0 = 0$$

$$(A + s_j I)X_{j-\frac{1}{2}} = C_1 C_1^* - X_{j-1}(A^* - s_j I)$$

$$(A + s_j I)X_j = C_1 C_1^* - (X_{j-\frac{1}{2}})^*(A^* - s_j I), \quad j = 1, \dots, k$$

- Parametri di shift s_1, \dots, s_N adoperati ciclicamente e calcolati con algoritmo euristico di Penzl. Vengono calcolati dei parametri sub-ottimali risolvendo un problema semplificato.
- Metodo CF-ADI calcola \hat{Z}_j tale che $X_j = \hat{Z}_j \hat{Z}_j^*$ è approssimazione della soluzione:

$$\hat{U}_1 = \sqrt{-2\operatorname{Re}(s_1)}(A + s_1 I)^{-1} C_1, \quad \hat{Z}_1 = \hat{U}_1$$

$$\hat{U}_k = \frac{\sqrt{-2\operatorname{Re}(s_k)}}{\sqrt{-2\operatorname{Re}(s_{k-1})}}(I - (s_k + \bar{s}_{k-1})(A + s_k I)^{-1})\hat{U}_{k-1}$$

$$\hat{Z}_k = [\hat{Z}_{k-1} \hat{U}_k], \quad k = 2, 3, \dots$$

Metodo ADI per l'equazione di Lyapunov

- L'iterazione si semplifica

$$X_0 = 0$$

$$(A + s_j I)X_{j-\frac{1}{2}} = C_1 C_1^* - X_{j-1}(A^* - s_j I)$$

$$(A + s_j I)X_j = C_1 C_1^* - (X_{j-\frac{1}{2}})^*(A^* - s_j I), \quad j = 1, \dots, k$$

- Parametri di shift s_1, \dots, s_N adoperati ciclicamente e calcolati con algoritmo euristico di Penzl. Vengono calcolati dei parametri sub-ottimali risolvendo un problema semplificato.
- Metodo CF-ADI calcola \hat{Z}_j tale che $X_j = \hat{Z}_j \hat{Z}_j^*$ è approssimazione della soluzione:

$$\hat{U}_1 = \sqrt{-2\operatorname{Re}(s_1)}(A + s_1 I)^{-1} C_1, \quad \hat{Z}_1 = \hat{U}_1$$

$$\hat{U}_k = \frac{\sqrt{-2\operatorname{Re}(s_k)}}{\sqrt{-2\operatorname{Re}(s_{k-1})}}(I - (s_k + \bar{s}_{k-1})(A + s_k I)^{-1})\hat{U}_{k-1}$$

$$\hat{Z}_k = [\hat{Z}_{k-1} \hat{U}_k], \quad k = 2, 3, \dots$$

Metodo ADI per l'equazione di Lyapunov

- L'iterazione si semplifica

$$X_0 = 0$$

$$(A + s_j I)X_{j-\frac{1}{2}} = C_1 C_1^* - X_{j-1}(A^* - s_j I)$$

$$(A + s_j I)X_j = C_1 C_1^* - (X_{j-\frac{1}{2}})^*(A^* - s_j I), \quad j = 1, \dots, k$$

- Parametri di shift s_1, \dots, s_N adoperati ciclicamente e calcolati con algoritmo euristico di Penzl. Vengono calcolati dei parametri sub-ottimali risolvendo un problema semplificato.
- Metodo CF-ADI calcola \hat{Z}_j tale che $X_j = \hat{Z}_j \hat{Z}_j^*$ è approssimazione della soluzione:

$$\hat{U}_1 = \sqrt{-2\operatorname{Re}(s_1)}(A + s_1 I)^{-1} C_1, \quad \hat{Z}_1 = \hat{U}_1$$

$$\hat{U}_k = \frac{\sqrt{-2\operatorname{Re}(s_k)}}{\sqrt{-2\operatorname{Re}(s_{k-1})}}(I - (s_k + \bar{s}_{k-1})(A + s_k I)^{-1})\hat{U}_{k-1}$$

$$\hat{Z}_k = [\hat{Z}_{k-1} \hat{U}_k], \quad k = 2, 3, \dots$$

Aggiornamenti di rango basso

X_0 soluzione dell'equazione di Sylvester

$$A_0 X_0 + X_0 B_0 = C_0 ,$$

Calcolare una correzione δX tale che $X_0 + \delta X$ risolva l'equazione perturbata

$$(A_0 + \delta A)(X_0 + \delta X) + (X_0 + \delta X)(B_0 + \delta B) = C_0 + \delta C$$

con $\delta A, \delta B, \delta C$ di rango molto più piccolo rispetto a $\min\{m, n\}$.

Aggiornamenti di rango basso

$$A_0 X_0 + X_0 B_0 = C_0$$

$$(A_0 + \delta A)(X_0 + \delta X) + (X_0 + \delta X)(B_0 + \delta B) = C_0 + \delta C$$

Sottraendo:

$$(A_0 + \delta A)\delta X + \delta X(B_0 + \delta B) = \delta C - \delta A X_0 - X_0 \delta B.$$

Aggiornamenti di rango basso

$$A_0 X_0 + X_0 B_0 = C_0$$
$$(A_0 + \delta A)(X_0 + \delta X) + (X_0 + \delta X)(B_0 + \delta B) = C_0 + \delta C$$

Sottraendo:

$$(A_0 + \delta A)\delta X + \delta X(B_0 + \delta B) = \delta C - \delta A X_0 - X_0 \delta B.$$

Algoritmo 2 Algoritmo per la risoluzione dell'equazione perturbata

- 1: **procedure** UPDATE-SYLV($A_0, \delta A, B_0, \delta B, C_0, \delta C, X_0$)
 - 2: Calcola U, V tali che $\delta C - \delta A X_0 - X_0 \delta B = UV^*$
 - 3: $\delta X = \text{LOW-RANK-SYLV}(A_0 + \delta A, B_0 + \delta B, U, V)$
 - 4: **return** δX
 - 5: **end procedure**
-

Aggiornamenti di rango basso: fattorizzazione

- Supponiamo di avere

$$\delta A = U_A V_A^*, \quad \delta B = U_B V_B^*, \quad \delta C = U_C V_C^*,$$

allora fattorizziamo $\delta C - \delta A X_0 - X_0 \delta B = UV^*$ ponendo

$$U = [U_C, -U_A, -X_0 U_B], \quad V = [V_C, X_0^* V_A, V_B]$$

- Conviene comprimere ulteriormente ottenendo $\tilde{U}\tilde{V}^*$ tramite TSVD
- Costo totale $\mathcal{O}((m+n)s^2 + s^3)$

Aggiornamenti di rango basso: fattorizzazione

- Supponiamo di avere

$$\delta A = U_A V_A^*, \quad \delta B = U_B V_B^*, \quad \delta C = U_C V_C^*,$$

allora fattorizziamo $\delta C - \delta A X_0 - X_0 \delta B = UV^*$ ponendo

$$U = [U_C, -U_A, -X_0 U_B], \quad V = [V_C, X_0^* V_A, V_B]$$

- Conviene comprimere ulteriormente ottenendo $\tilde{U}\tilde{V}^*$ tramite TSVD
- Costo totale $\mathcal{O}((m+n)s^2 + s^3)$

Aggiornamenti di rango basso: fattorizzazione

- Supponiamo di avere

$$\delta A = U_A V_A^*, \quad \delta B = U_B V_B^*, \quad \delta C = U_C V_C^*,$$

allora fattorizziamo $\delta C - \delta A X_0 - X_0 \delta B = UV^*$ ponendo

$$U = [U_C, -U_A, -X_0 U_B], \quad V = [V_C, X_0^* V_A, V_B]$$

- Conviene comprimere ulteriormente ottenendo $\tilde{U}\tilde{V}^*$ tramite TSVD
- Costo totale $\mathcal{O}((m+n)s^2 + s^3)$

Equazione di Riccati algebrica

Equazione di Riccati algebrica continua

$$XA + A^*X - XBX = C \quad C = C^*, B = B^*$$

dove $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e l'incognita è $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Equazione di Riccati algebrica: metodo di Newton

$$XA + A^*X - XBX = C$$

Definita $F(X) = XA + A^*X - XBX - C$, l'equazione è $F(X) = 0$ e si ha

$$X_{k+1} = X_k - (F'_{X_k})^{-1} [F(X_k)], \quad X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

e cioè $H_k = X_{k+1} - X_k$ risolve

$$(A^* - X_k B)H_k + H_k(A - BX_k) = -F(X_k)$$

Equazione di Riccati algebrica: metodo di Newton

$$XA + A^*X - XBX = C$$

Teorema

Supponiamo che $B \succeq 0$, $C \preceq 0$ e che le coppie (A, B) e $(A^*, -C)$ siano stabilizzabili. Se X_0 è una matrice hermitiana tale che $A - BX_0$ è stabile, allora il metodo di Newton genera una successione di matrici hermitiane $\{X_k\}_{k \geq 0}$ tale che:

- ① $A - BX_k$ è stabile per ogni k
- ② $X_1 \succeq X_2 \succeq \cdots \succeq X_+$
- ③ $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_+$
- ④ per ogni norma matriciale $\|\cdot\|$ esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\|X_{k+1} - X_+\| \leq c \cdot \|X_k - X_+\|^2 \quad k \geq 0.$$

Equazione di Riccati algebrica: rango basso

$$XA + A^*X - XBX = C \quad B = B_UB_U^*$$

Si può scrivere il membro destro dell'iterazione come

$$-F(X_k) = X_kBX_k - X_kA - A^*X_k + C = (X_k - X_{k-1})B(X_k - X_{k-1})$$

Dopo il calcolo (eventualmente costoso) di X_1 possiamo calcolare gli incrementi $H_k := X_{k+1} - X_k$ attraverso la risoluzione di

$$(A^* - X_kB)H_k + H_k(A - BX_k) = H_{k-1}BH_{k-1} = H_{k-1}B_UB_U^*H_{k-1}$$

Equazione di Riccati algebrica: rango basso

$$XA + A^*X - XBX = C \quad B = B_U B_U^*$$

Si può scrivere il membro destro dell'iterazione come

$$-F(X_k) = X_k B X_k - X_k A - A^* X_k + C = (X_k - X_{k-1}) B (X_k - X_{k-1})$$

Dopo il calcolo (eventualmente costoso) di X_1 possiamo calcolare gli incrementi $H_k := X_{k+1} - X_k$ attraverso la risoluzione di

$$(A^* - X_k B) H_k + H_k (A - B X_k) = H_{k-1} B H_{k-1} = H_{k-1} B_U B_U^* H_{k-1}$$

Equazione di Riccati algebrica: rango basso

$$XA + A^*X - XBX = C \quad B = B_UB_U^*$$

Si può scrivere il membro destro dell'iterazione come

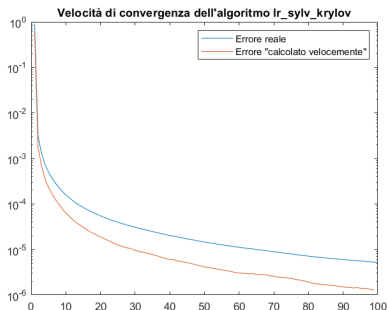
$$-F(X_k) = X_kBX_k - X_kA - A^*X_k + C = (X_k - X_{k-1})B(X_k - X_{k-1})$$

Dopo il calcolo (eventualmente costoso) di X_1 possiamo calcolare gli incrementi $H_k := X_{k+1} - X_k$ attraverso la risoluzione di

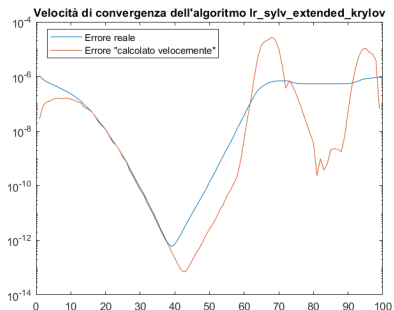
$$(A^* - X_kB)H_k + H_k(A - BX_k) = H_{k-1}BH_{k-1} = H_{k-1}B_UB_U^*H_{k-1}$$

Sperimentazione: metodi di Krylov

Figura: Plot in scala semilogaritmica di errore reale e errore "calcolato velocemente" per i metodi di Krylov. Parametri $m = n = 1000$, $s = 1$.



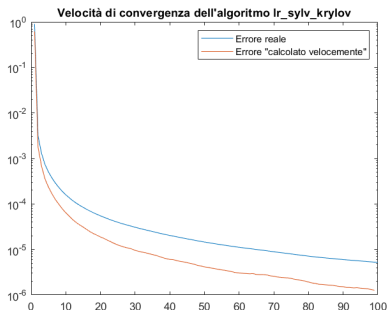
(a) Spazi di Krylov Standard



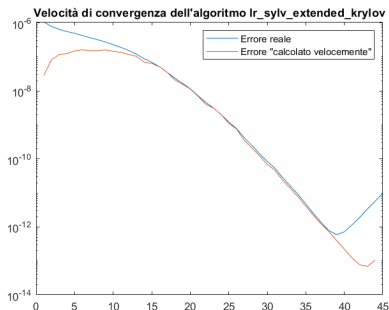
(b) Spazi di Krylov Estesi

Sperimentazione: metodi di Krylov

Figura: Plot in scala semilogaritmica di errore reale e errore "calcolato velocemente" per i metodi di Krylov. Parametri $m = n = 1000$, $s = 1$.



(a) Spazi di Krylov Standard



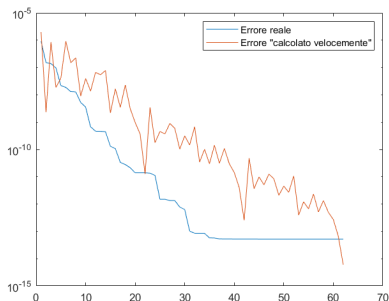
(b) Spazi di Krylov Estesi

Sperimentazione: metodi di Krylov

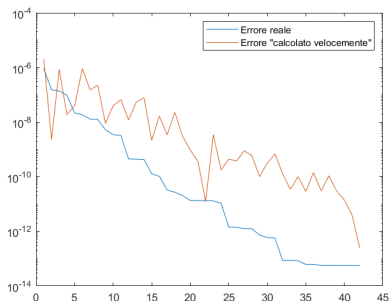
- Per valori "piccoli" di n, m il metodo più efficace è Bartels-Stewart
- Al crescere di n, m gli spazi di Krylov Standard sono inefficienti
- Al crescere di s da $s = 1$ a $s = 5$ aumenta notevolmente la complessità in tempo degli algoritmi di Krylov

Sperimentazione: metodo ADI

Figura: Plot in scala semilogaritmica di errore reale e errore "calcolato velocemente" per il Metodo ADI. Parametri: $n = 1000, s = 1$



(a) $\text{tol} = 10^{-14}$



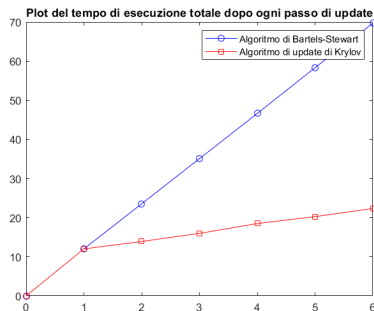
(b) $\text{tol} = 5 \times 10^{-13}$

Sperimentazione: metodo ADI

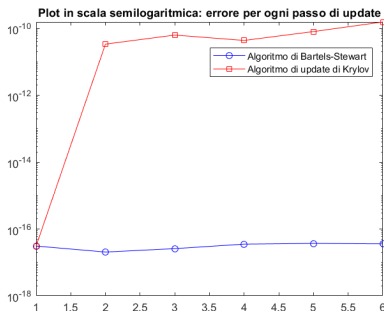
- Prestazioni intermedie tra Bartels-Stewart e metodi di Krylov
- Precisione migliore rispetto ai metodi di Krylov
- Minore aumento della complessità in tempo passando da $s = 1$ a $s = 5$

Sperimentazione: algoritmi di update

Equazione di Sylvester



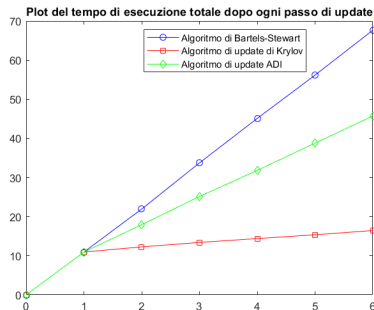
(a) Tempo di esecuzione totale dopo ogni passo di update



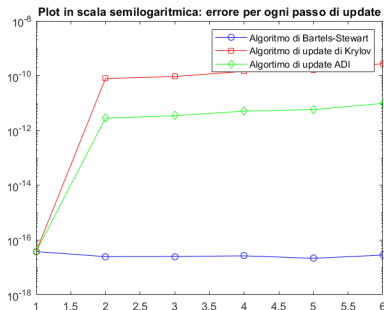
(b) Precisione raggiunta ad ogni passo dagli algoritmi di update per l'equazione di Sylvester

Sperimentazione: algoritmi di update

Equazione di Lyapunov



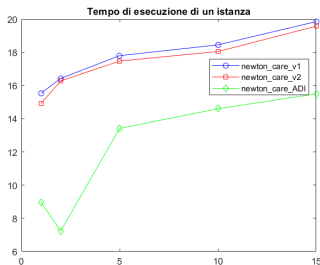
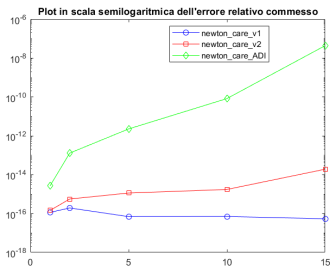
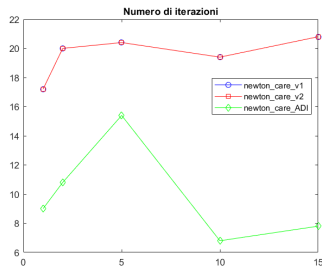
(a) Tempo di esecuzione totale dopo ogni passo di update



(b) Precisione raggiunta ad ogni passo dagli algoritmi di update per l'equazione di Lyapunov

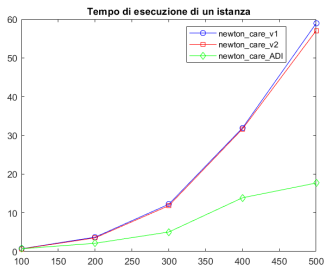
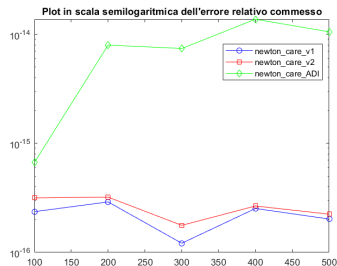
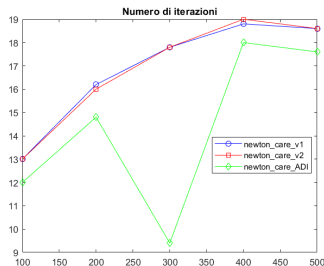
Sperimentazione: metodo di Newton

Performance al variare del rango s di B



Sperimentazione: metodo di Newton

Performance al variare della taglia n del problema



Riferimenti bibliografici principali



Dario Bini, Milvio Capovani e Ornella Menchi. *Metodi numerici per l'algebra lineare*. Zanichelli, 1988. ISBN: 88-08-06438-7.



Dario A. Bini, Bruno Iannazzo e Beatrice Meini. *Numerical Solution of Algebraic Riccati Equations*. Society for Industrial e Applied Mathematics, 2011. DOI: 10.1137/1.9781611972092.



Daniel Kressner, Stefano Massei e Leonardo Robol. «Low-Rank Updates and a Divide-And-Conquer Method for Linear Matrix Equations». In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 41.2 (2019), A848–A876. DOI: 10.1137/17M1161038.



V. Simoncini. «Computational Methods for Linear Matrix Equations». In: *SIAM Review* 58.3 (2016), pp. 377–441. DOI: 10.1137/130912839.