Elementi Finiti - Esercitazione 7
Il problema di diffusione e trasporto

Prof. Giancarlo Sangalli   Ivan Bioli

21 Maggio 2025

1 Il problema di diffusione e trasporto

Consideriamo il seguente problema di diffusione e trasporto:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g_D & \text{su } \Gamma_D, \\ \varepsilon \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \Gamma_N, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, e $\Gamma_D \neq \emptyset$. Le condizioni per garantire la buona positura, usando il teorema di Lax-Milgram, sono:

- $\varepsilon(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ per ogni $x \in \Omega$,
- $\sigma - \frac{1}{2}\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} \geq 0$ in Ω,
- $\boldsymbol{\beta}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Gamma_N$ (ossia, Γ_N rappresenta la parte di bordo in uscita, *outflow*).

In tal caso, la forma bilineare associata

$$a(w, v) = \int_\Omega \varepsilon \nabla w \cdot \nabla v + \int_\Omega (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla w)\, v + \int_\Omega \sigma\, w\, v$$

risulta coerciva e continua su $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma_D}$.

2 Il problema della rampa

Consideriamo il seguente problema definito sul quadrato unitario $\Omega = (0,1)^2$:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \Gamma_N, \end{cases} \tag{2}$$

dove Γ_N rappresenta i lati superiore e inferiore del quadrato, mentre Γ_D corrisponde ai lati destro e sinistro. Prendiamo $\boldsymbol{\beta} = [1, 0]^\top$ e $\varepsilon > 0$ uno scalare. La soluzione esatta è della forma $u(x, y) = w(x)$, dove $w(x)$ risolve il seguente problema:

$$\begin{cases} -\varepsilon w'' + \beta w' = 1 \quad \text{in } (0,1), \\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

per $\beta = 1$. Si può verificare che la soluzione è data da:

$$w(x) = \frac{1}{\beta}\left(x - \frac{e^{\beta(x-1)/\varepsilon} - e^{-\beta/\varepsilon}}{1 - e^{-\beta/\varepsilon}}\right).$$

Esercizio 1

Implementare la funzione

```
function transport_assemble_local!(Ke::Matrix, fe::Vector, mesh::Mesh,
                    cell_index::Integer, f, k, β; stab=nothing, δ=0.5)
```

che assembla la matrice di stiffness locale e il load vector locali per il problema di trasporto, senza alcun termine di stabilizzazione. I parametri `stab` e δ sono presenti nella segnatura della funzione, ma non devono essere utilizzati.

La funzione prende in input:

- `Ke`: la matrice di stiffness locale da assemblare;
- `fe`: il vettore dei carichi locali da assemblare;
- `mesh`: la mesh che discretizza il dominio;
- `cell_index`: l'indice della cella corrente;
- `f`: la funzione del termine sorgente;
- `k`: la funzione del coefficiente diffusivo (quello che noi abbiamo chiamato ε);
- β: la funzione della velocità di advection;

e restituisce:

- `Ke`: la matrice di stiffness locale assemblata;
- `fe`: il vettore dei carichi locali assemblato.

Suggerimento: utilizzare la regola di quadratura `Q2_ref` per assemblare sia la matrice che il vettore.

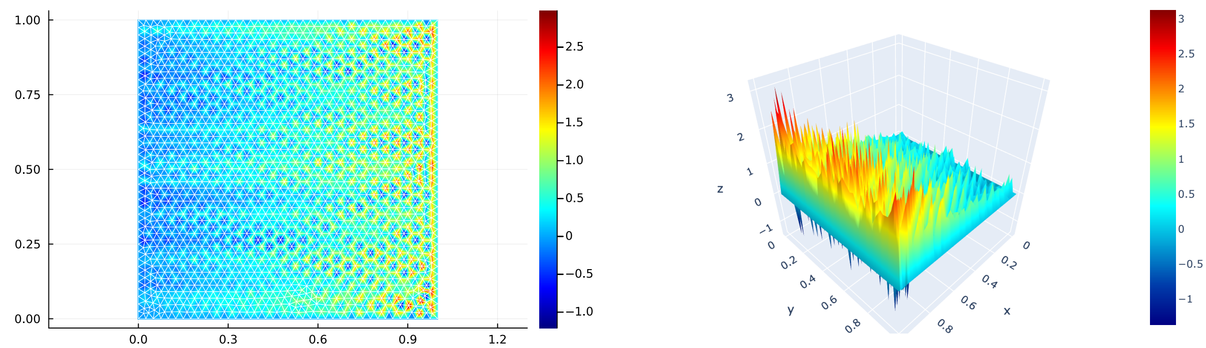


Figura 1: Soluzione del problema (2) con il metodo di Galerkin "standard" per $\varepsilon = 10^{-4}$.

Esercizio 2

Applicare la funzione `transport_assemble_local!` per risolvere il problema (2), per diversi valori di ε. In particolare, utilizzare $\varepsilon = 1$ per verificare il corretto funzionamento dell'implementazione: in questo caso, ci si aspetta di osservare gli stessi tassi di convergenza riscontrati nel problema di Poisson. Inoltre, osservare che per valori di $\varepsilon = 10^{-4}$ o inferiori, cioè in regime di trasporto dominante, il metodo di Galerkin "standard" produce oscillazioni numeriche spurie. In tali casi, la soluzione ottenuta dovrebbe risultare simile a quella mostrata in Figura 1.

Esercizio 3

Il metodo di diffusione artificiale non consistente, detto *NCAD (Non Consistent Artificial Diffusion)*, modifica il parametro ε sostituendolo con ε_h in modo che il *numero di Péclet locale*

$$Pe_h = \frac{\|\boldsymbol{\beta}\|\, h}{\varepsilon_h}$$

sia dell'ordine dell'unità. Ad esempio, si può porre:

$$\varepsilon_h|_T = \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{\beta}\|\, h_T.$$

Estendere la funzione `transport_assemble_local!` per includere il termine di stabilizzazione secondo il metodo NCAD, da attivare quando `stab == "NCAD"`.

Suggerimento: Calcolare $h_T = \max\{\left\|\mathbf{v}_1^T - \mathbf{v}_2^T\right\|, \left\|\mathbf{v}_2^T - \mathbf{v}_3^T\right\|, \left\|\mathbf{v}_3^T - \mathbf{v}_1^T\right\|\}$ come massimo tra la norma delle colonne di `Bk` e della differenza tra di esse.

Suggerimento: il resto della funzione resta invariato rispetto all'esercizio precedente. Usare il parametro `stab` per decidere se aggiungere o meno la stabilizzazione.

Esercizio 4

Ripetere i test utilizzando la stabilizzazione NCAD, per diversi valori di ε. Verificare il comportamento overdiffusivo nei pressi del boundary layer per $\varepsilon = 10^{-4}$ (si veda Figura 2).

Esercizio 5

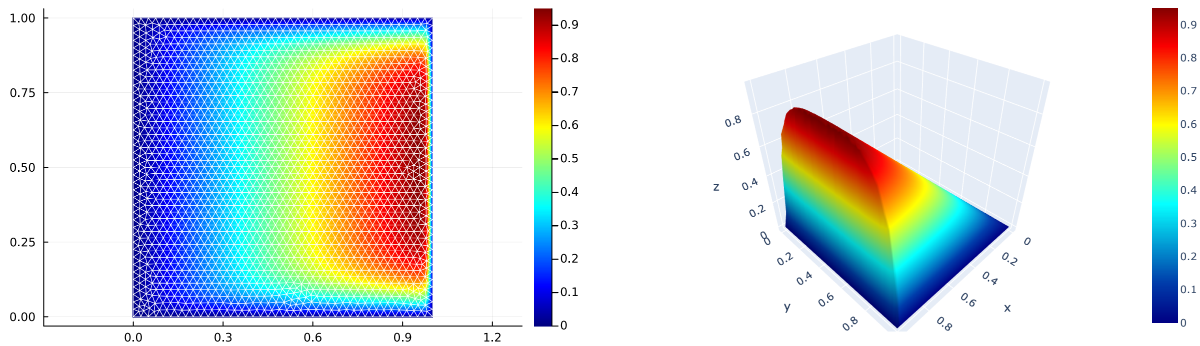


Figura 2: Soluzione del problema (2) *con stabilizzazione NCAD per* $\varepsilon = 10^{-4}$.

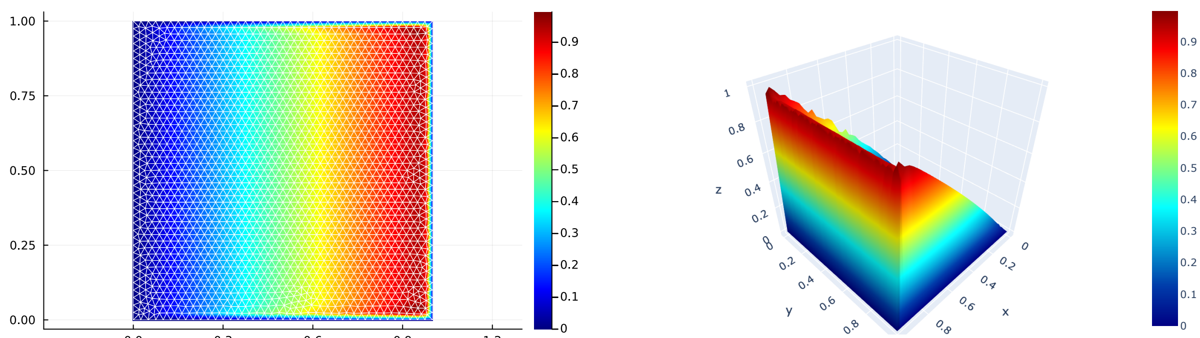


Figura 3: Soluzione del problema (2) *con stabilizzazione NCSD per* $\varepsilon = 10^{-4}$.

Per ovviare ai limiti del metodo NCAD, è stato introdotto il metodo *NCSD (Non Consistent Streamline Diffusion)*, che modifica la forma bilineare come segue:

$$a_h(w, v) = a(w, v) + \int_\Omega \varepsilon_h \left(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \nabla w\right) \left(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \nabla v\right), \qquad \text{dove } \mathbf{n}_{\boldsymbol{\beta}}(x) = \frac{\boldsymbol{\beta}(x)}{\|\boldsymbol{\beta}(x)\|}.$$

Questo termine aggiunge diffusione solo nella direzione di $\boldsymbol{\beta}$ e consente di evitare l'eccesso di diffusione nei boundary layer caratteristici.

Estendere la funzione `transport_assemble_local!` per includere il termine di stabilizzazione secondo il metodo NCSD, attivabile quando `stab == "NCSD"`.

Ripetere i test utilizzando la stabilizzazione NCSD, per diversi valori di ε, e verificare che, per $\varepsilon = 10^{-4}$, il comportamento numerico sia simile a quanto mostrato in Figura 3.

Esercizio 6

Sia NCAD che NCSD sono metodi non consistenti. Ad esempio, per NCSD si ha:

$$a_h(u - u_h, v_h) = \int_\Omega \varepsilon_h \left(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \nabla u\right) \left(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \nabla v_h\right) = \mathcal{O}(h).$$

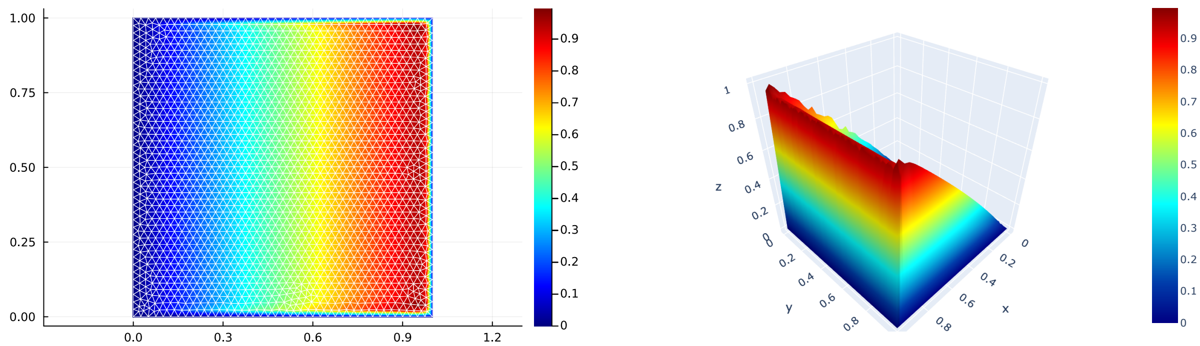


Figura 4: Soluzione del problema (2) *con stabilizzazione SUPG per* $\varepsilon = 10^{-4}$.

Ci si può dunque aspettare un errore di consistenza, che penalizza l'ordine di convergenza del metodo, in particolare per discretizzazioni di ordine elevato.

Il metodo SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) rappresenta una formulazione consistente che mantiene le stesse proprietà stabilizzanti del metodo NCSD. La forma bilineare viene modificata come segue:

$$a_h(w, v) = a(w, v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tau_h \int_T (-\varepsilon \Delta w + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla w) (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v), \qquad \text{dove } \tau_h = \delta \frac{h_T}{\|\boldsymbol{\beta}\|_{\mathrm{L}^\infty(T)}}.$$

Anche il funzionale viene modificato per garantire la consistenza:

$$\langle f_h, v \rangle = \langle f, v \rangle + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f \, (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v).$$

Estendere la funzione `transport_assemble_local!` per includere il termine di stabilizzazione secondo il metodo SUPG, attivabile quando `stab == "SUPG"`. Ripetere i test utilizzando la stabilizzazione SUPG, per diversi valori di ε, e verificare che, per $\varepsilon = 10^{-4}$, il comportamento numerico sia simile a quanto mostrato in Figura 4.

3 Il problema del layer caratteristico interno

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} -10^{-4} \, \Delta u + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u \text{ definito come in Figura 5} & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Verificare il comportamento del metodo di Galerkin standard e delle stabilizzazioni NCAD, NCSD e SUPG. Confrontare i risultati ottenuti con quelli mostrati in Figura 6.

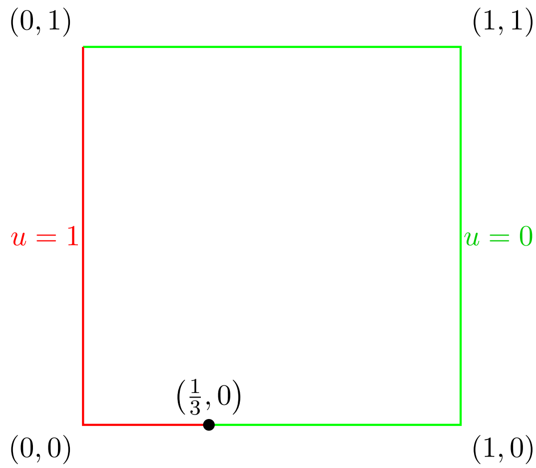
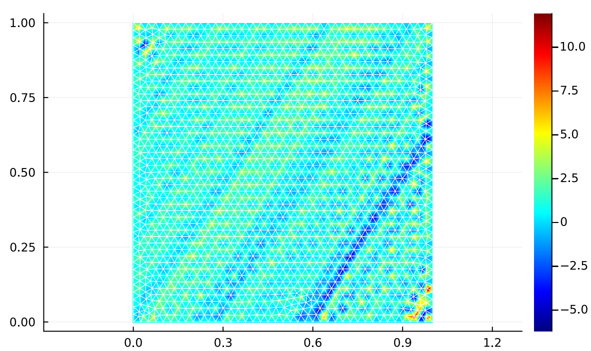
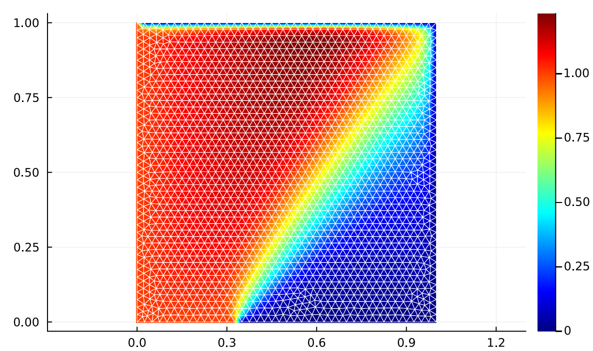


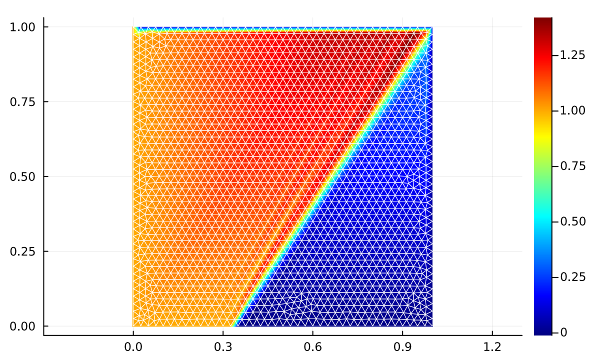
Figura 5: Condizioni al bordo per il problema del layer caratteristico interno (4).



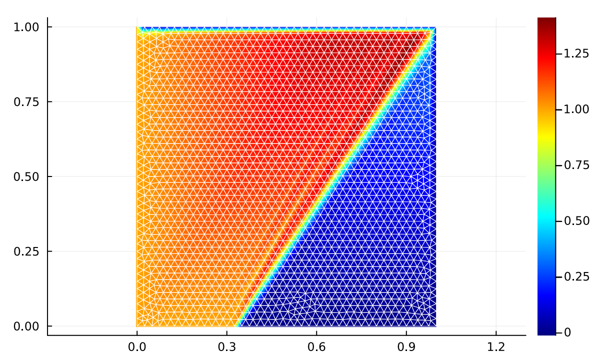
(a) Standard



(b) NCAD



(c) NCSD



(d) SUPG

Figura 6: Risultati per il problema del layer caratteristico interno (4).

4 Problema di trasporto con soluzione liscia

Come discusso in precedenza, la stabilizzazione SUPG è consistente, e questo consente di ottenere un metodo con lo stesso ordine di convergenza della formulazione di Galerkin "standard", nel caso in cui la soluzione sia sufficientemente regolare. Al contrario, i metodi NCAD e NCSD presentano una convergenza limitata dall'errore di consistenza.

Verifichiamo questo comportamento considerando il seguente problema di trasporto:

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

dove $\boldsymbol{\beta} = [1,\, 0]^\top$ e f è scelto in modo tale che la soluzione esatta sia $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Calcolare l'errore nelle norme L^2 e H^1 per la formulazione di Galerkin standard e per le versioni stabilizzate NCAD, NCSD e SUPG, e diagrammarlo in funzione della mesh-size h. Provare diversi valori di ε e analizzare come varia la convergenza dei diversi metodi.