

Elementi Finiti - Esercitazione 5

Il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet

Prof. Giancarlo Sangalli

Ivan Bioli

05 Maggio 2025

1 Condizioni al bordo di Dirichlet omogenee

Ripartiamo da quanto visto durante la scorsa esercitazione. Nel caso di condizioni di Dirichlet omogenee, lo spazio $V_h \subset V$ è un sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ e contiene quindi funzioni nulle su $\partial\Omega$. Pertanto, si ha che

$$V_h = \text{Span}\{\varphi_i : \mathbf{v}_i \notin \partial\Omega\}.$$

L'assemblaggio iniziale ha incluso tutti i gradi di libertà, compresi quelli di bordo (non conviene distinguere tra indici interni e indici di bordo durante l'assemblaggio). Tuttavia, per il calcolo effettivo, è sufficiente rimuovere le righe e colonne corrispondenti ai nodi di bordo. Se indichiamo con $\tilde{\mathbf{A}}$ la matrice assemblata su tutti i nodi e con \mathbf{I} e \mathbf{B} gli insiemi degli indici dei nodi interni e di bordo rispettivamente, con $\mathbf{I} \cap \mathbf{B} = \emptyset$ e $\mathbf{I} \cup \mathbf{B} = \{1, \dots, N_{\text{points}}\}$, allora la matrice risultante è la sottomatrice di $\tilde{\mathbf{A}}$ associata agli indici \mathbf{I} . Usando la notazione di Julia

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}[\mathbf{I}, \mathbf{I}].$$

Esercizio 1

Determinare gli indici dei nodi interni e dei nodi di bordo. A tal fine, utilizzare la funzione `get_boundary_nodes` presente in `Meshing.jl`. Successivamente, integrare queste informazioni nella struttura della mesh utilizzando la funzione `set_dirichletdofs!`. Il codice di riferimento è il seguente:

```
1  # Build the mesh with mesh-size h
2  out_file = mesh_circle(h)
3  T, p = get_nodes_connectivity(out_file)
4  msh = Mesh(T, p)
5  # Get Dirichlet dofs
6  bnd_tags, bnd_coords = get_boundary_nodes(out_file)
7  set_dirichletdofs!(msh, bnd_tags)
```

Esercizio 2

Verificare che $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}[\mathbf{I}, \mathbf{I}]$ ha nucleo $\{\mathbf{0}\}$.

Suggerimento: Potete usare la funzione `LinearAlgebra.nullspace`.

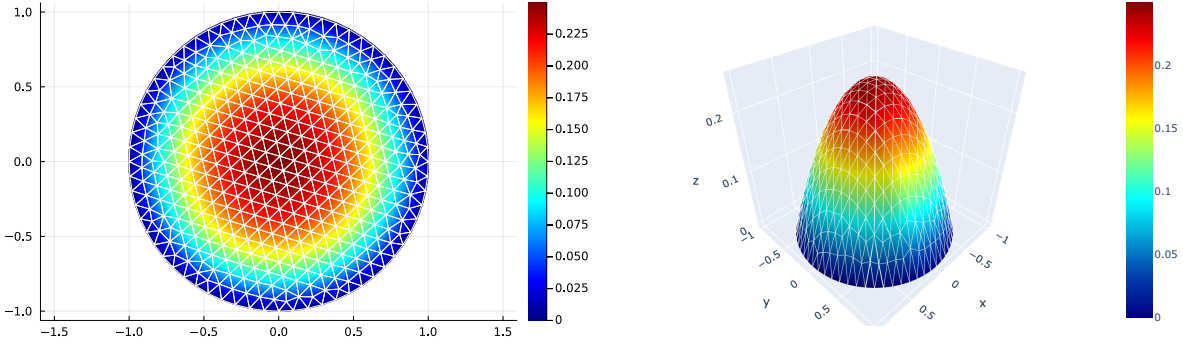


Figura 1: Plot della soluzione $u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)$.

1.1 Test per il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee

Esercizio 3

Consideriamo il problema di Poisson sul cerchio unitario con condizioni di Dirichlet omogenee:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}. \quad (1)$$

Per il caso particolare $f = 1$, la soluzione esatta è

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2).$$

Vogliamo approssimare questa soluzione mediante il metodo degli elementi finiti e tracciare il diagramma degli errori $\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)}$ e $|u_h - u|_{H^1(\Omega)}$ in funzione di h .

Parte I

Assemblare e risolvere il sistema lineare

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\text{II}} \mathbf{u}_{\text{I}} = \mathbf{f}_{\text{I}}.$$

Parte II

Ricostruire l'intero vettore dei coefficienti

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_{\text{I}}, \mathbf{u}_{\text{B}}], \quad \mathbf{u}_{\text{B}} = \mathbf{0}.$$

Parte III

Tracciare il grafico della soluzione approssimata u_h utilizzando le funzioni `plot_flat` e `plot_surf` in `Meshing.jl`. Dovreste ottenere dei risultati simili a quelli riportati nella Figura 1.

Parte IV

Calcolare l'errore:

1. $\max_i |u_i - u(\mathbf{v}_i)| \approx \|u_h - u\|_{L^\infty(\Omega)}$
2. Approssimare $\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)}$ usando le regole di quadratura Q_0 e Q_2 . Sfruttare che u_h è lineare affine sui triangoli della mesh, e dunque per valutarla in un punto $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{v}_{i_1} + \beta \mathbf{v}_{i_2} + \gamma \mathbf{v}_{i_3}$ combinazione convessa dei vertici $\mathbf{v}_{i_1}, \mathbf{v}_{i_2}, \mathbf{v}_{i_3}$ di un triangolo della mesh è sufficiente calcolare

$$u_h(\mathbf{p}) = \alpha u_h(\mathbf{v}_{i_1}) + \beta u_h(\mathbf{v}_{i_2}) + \gamma u_h(\mathbf{v}_{i_3}) = \alpha u_{i_1} + \beta u_{i_2} + \gamma u_{i_3}.$$
3. Costruire il grafico dell'errore rispetto alla mesh size h e stimare l'ordine di accuratezza del metodo.
4. *Facoltativo*: approssimare $|u_h - u|_{H^1(\Omega)}$ usando le regole di quadratura Q_0 e Q_2 . Confrontare i risultati ottenuti per diversi valori di h e discutere le differenze osservate con le due regole di quadratura.

2 Condizioni di Dirichlet non omogenee

Consideriamo adesso il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet *non* omogenee

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}. \quad (2)$$

Se $u|_{\partial\Omega} = g$, possiamo “rilevare” $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ all'interno del dominio ostruendo un'estensione $\tilde{g} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\tilde{g}|_{\partial\Omega} = g$. Definiamo quindi una nuova incognita $\tilde{u} := u - \tilde{g}$ che soddisfa condizioni al bordo di Dirichlet *omogenee*. Sostituendo questa espressione nel problema variazionale, otteniamo

$$\text{Trovare } \tilde{u} \text{ tale che } a(\tilde{u} + \tilde{g}, v) = \langle f, v \rangle_{V' \times V}, \quad \forall v \in V,$$

dove sia \tilde{u} che v sono nulle al bordo. Portando i termini noti al secondo membro, il problema si riscrive come:

$$\text{Trovare } \tilde{u} \text{ tale che } a(\tilde{u}, v) = \langle f, v \rangle_{V' \times V} - a(\tilde{g}, v), \quad \forall v \in V,$$

Nel metodo agli elementi finiti, una \tilde{g} può essere calcolata in modo semplice imponendo che $\tilde{g} = g$ sui nodi di bordo e $\tilde{g} = 0$ sui nodi interni. Si noti che con questa scelta, \tilde{g} coincide con g su $\partial\Omega$ solo se quest'ultima è una funzione lineare a tratti; altrimenti, \tilde{g} rappresenta un'interpolazione discreta di g sui nodi di bordo. Denotando con \mathbf{I} l'insieme degli indici dei nodi interni e con \mathbf{B} quello dei nodi di bordo, possiamo scrivere

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathbf{B}} g(\mathbf{v}_j) \varphi_j(\mathbf{x}), \quad \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathbf{I}} u_j \varphi_j(\mathbf{x}).$$

In forma matriciale, indicando $g_j = g(\mathbf{v}_j)$, si ha:

$$\begin{aligned} a(\tilde{g}, \varphi_i) &= \sum_{j \in \mathbf{B}} a(\varphi_j, \varphi_i) g_j = \tilde{\mathbf{A}}_{i\mathbf{B}} \mathbf{g}_{\mathbf{B}} \\ a(\tilde{u}, \varphi_i) &= \sum_{j \in \mathbf{I}} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \tilde{\mathbf{A}}_{i\mathbf{I}} \mathbf{u}_{\mathbf{I}}. \end{aligned}$$

Se dividiamo la matrice \mathbf{A} a blocchi, dividendo nodi interni da quelli di bordo (e assumendo che gli indici siano ordinati mettendo prima quelli interni e poi quelli di bordo), questa assume una del tipo

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{II}} & \tilde{\mathbf{A}}_{\text{IB}} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{\text{BI}} & \tilde{\mathbf{A}}_{\text{BB}} \end{bmatrix}.$$

A questo punto il vettore dei coefficienti \mathbf{u} è $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_\text{I}, \mathbf{u}_\text{B}]$ dove $\mathbf{u}_\text{B} = \mathbf{g}_\text{B}$ e \mathbf{u}_I risolve

$$a(\tilde{g}, \varphi_i) = \sum_{j \in \text{I}} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = \langle f, \varphi_i \rangle_{V' \times V} - a(\tilde{g}, \varphi_i) \quad \forall i \in \text{I},$$

cioè in forma algebrica

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\text{II}} \mathbf{u}_\text{I} = \mathbf{f}_\text{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{\text{IB}} \mathbf{g}_\text{B}. \quad (3)$$

Esercizio 4

Implementare la funzione

```
1 function impose_dirichlet(A, b, g, mesh)
```

che impone le condizioni di Dirichlet al sistema lineare risultante dalla discretizzazione agli elementi finiti di un problema variazionale, cioè a partire da $\tilde{\mathbf{A}}$ e \mathbf{f} assembla il sistema (3). La funzione prende in input:

- **A**: la matrice di stiffness globale;
- **b**: il vettore dei termini noti globale;
- **g**: la funzione che definisce le condizioni di Dirichlet;
- **mesh**: l'oggetto mesh contenente la discretizzazione del dominio;

e restituisce:

- **A_cond**: la matrice di stiffness modificata estraendo solamente i nodi interni;
- **b_cond**: il vettore dei termini noti modificato con l'imposizione delle condizioni di Dirichlet;
- **uh**: il vettore soluzione con le condizioni di Dirichlet già applicate.

Potete trovare un codice da completare in `Assembly.jl`.

2.1 Test per il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet non omogenee

Esercizio 5

Verificare la correttezza della propria implementazione risolvendo il problema di Poisson con condizioni non omogenee (2). Scegliere una soluzione u non polinomiale e da essa stessa definire $f = -\Delta u$ e $g = u|_{\partial\Omega}$. Diagrammare l'errore in funzione della mesh-size come nell'Esercizio 3.