

Elementi Finiti - Esercitazione 8

Implementation del FEM con elementi $RT_0 - P_0^{\text{disc}}$ per il problema bidimensionale di Darcy omogeneo

Prof. Giancarlo Sangalli

Ivan Bioli

09 Maggio 2025

1 Ripasso sul FEM con elementi $RT_0 - P_0^{\text{disc}}$ per il problema bidimensionale di Darcy omogeneo

In questa esercitazione implementeremo un solutore FEM per il problema bidimensionale di Darcy omogeneo, utilizzando la formulazione mista e impiegando elementi $RT_0 - P_0^{\text{disc}}$. L'approccio implementativo sarà analogo a quello usato per gli elementi P^1 : costruiremo un assemblatore locale per ciascun triangolo e successivamente assembleremo la matrice globale inserendo i contributi elementari nei posti corretti.

Consideriamo il seguente problema di Darcy bidimensionale:

$$\begin{cases} -\text{div}(\kappa \nabla p) = f & \Omega, \\ p = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

dove $\kappa = \kappa(\mathbf{x})$ è simmetrica definita positiva uniformemente in \mathbf{x} . Introducendo la variabile ausiliaria $u = -\kappa \nabla p$ e definendo $\mu(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x})^{-1}$, otteniamo la seguente formulazione mista debole: cercare $(u, p) \in V \times Q = H_0(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tali che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\mu u) \cdot v - \int_{\Omega} (\text{div} v) p = 0 & \forall v \in V, \\ -\int_{\Omega} (\text{div} u) q = -\int_{\Omega} f q & \forall q \in Q. \end{cases} \quad (2)$$

Per discretizzare (2), data una triangolazione \mathcal{T}_h di Ω , consideriamo $V_h = RT_0(\mathcal{T}_h) \subset V$ e $Q_h = P_0^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h) \subset Q$. Il corrispondente problema discretizzato diventa: cercare $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h = RT_0(\mathcal{T}_h) \times P_0^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ tali che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\mu_h u_h) \cdot v_h - \int_{\Omega} (\text{div} v_h) p_h = 0 & \forall v_h \in V_h, \\ -\int_{\Omega} (\text{div} u_h) q_h = -\int_{\Omega} f q_h & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (3)$$

Denotiamo con φ_i le funzioni di base dello spazio di Raviart-Thomas di ordine zero $RT_0(\mathcal{T}_h)$ e con ψ_k le funzioni di base di $P_0^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$. In forma matriciale possiamo riscrivere (3) come

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

dove

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \int_{\Omega} (\mu_h \varphi_j) \cdot \varphi_i dx, \quad (5)$$

$$[\mathbf{B}]_{k\ell} = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \varphi_{\ell}) \psi_k dx, \quad (6)$$

$$[\mathbf{f}]_k = - \int_{\Omega} f \psi_k dx. \quad (7)$$

Le funzioni in $P_0^{\text{disc}}(\mathcal{T}_h)$ sono costanti a tratti, quindi una base naturale è data dalle funzioni indicatrici dei triangoli: $\psi_k = \mathbf{1}_{T_k}$. In questo modo, ogni funzione di base è associata a un triangolo. Le funzioni di base di $RT_0(\mathcal{T}_h)$ sono invece associate ai lati della triangolazione. Sia \hat{T} il triangolo di riferimento e T un generico triangolo della triangolazione. Denotiamo la mappa affine da \hat{T} a T con $\mathbf{x} = F_k(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}_k \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_k$. Utilizzando la numerazione di vertici e lati come illustrato in Figure 1, le funzioni di base di Raviart-Thomas sul triangolo di riferimento, normalizzate in modo che l'integrale della loro componente normale sul lato corrispondente sia uguale a 1, sono:

$$\hat{\varphi}_1(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_2(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_3(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - 1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Tuttavia, rispetto ai P^1 occorre una maggiore attenzione nel mappare le funzioni di base dal triangolo di riferimento al triangolo corrente. Infatti, ogni funzione di base è associata a un lato, condiviso a due triangoli (vedi Figure 2), e occorre preservare la continuità all'interfaccia tra i due elementi. È noto che $\varphi = \hat{\varphi} \circ F_k^{-1}$ non è un isomorfismo da $H(T, \operatorname{div})$ a $H(\hat{T}, \operatorname{div})$ perché non preserva le componenti normali delle funzioni di base. Queste vengono invece preservate dalla trasformazione di Piola

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det \mathbf{B}_k} \mathbf{B}_k \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \operatorname{div} \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det \mathbf{B}_k} \widehat{\operatorname{div}} \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}).$$

Inoltre, sul triangolo di riferimento abbiamo fissato la componente normale al lato come uscente e a essa abbiamo allineato la corrispondente funzione di base. Questa proprietà viene preservata dalla trasformazione di Piola, che quindi restituirà una φ_i uscente al triangolo. Per ottenere la continuità su un lato all'interfaccia di due triangoli, fissiamo un orientamento “globale” della normale al lato e a essa allineiamo la funzione di base associata. Se definiamo $[\operatorname{sign}_i^k] = +1$ se l'orientazione della normale uscente al lato i -esimo del triangolo k -esimo è allineata alla normale globale e $[\operatorname{sign}_i^k] = -1$ se l'orientamento è opposto, otteniamo:

$$\varphi_i(\mathbf{x})|_T = \frac{[\operatorname{sign}_i^k]}{\det \mathbf{B}_k} \mathbf{B}_k \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}), \quad \operatorname{div} \varphi_i|_T(\mathbf{x}) = \frac{[\operatorname{sign}_i^k]}{\det \mathbf{B}_k} \widehat{\operatorname{div}} \hat{\varphi}_i(\hat{\mathbf{x}}). \quad (9)$$

Per implementare il metodo FEM con elementi $RT_0 - P_0^{\text{disc}}$ servono quindi i seguenti nuovi oggetti nella struttura dati della mesh:

- **Mesh.edges2nodes**: matrice $2 \times N_{\text{edges}}$, in cui ogni colonna rappresenta un lato e contiene gli indici dei nodi corrispondenti;
- **Mesh.elems2edges**: matrice $3 \times N_{\text{tri}}$, in cui ogni colonna rappresenta un triangolo e contiene gli indici dei tre lati;

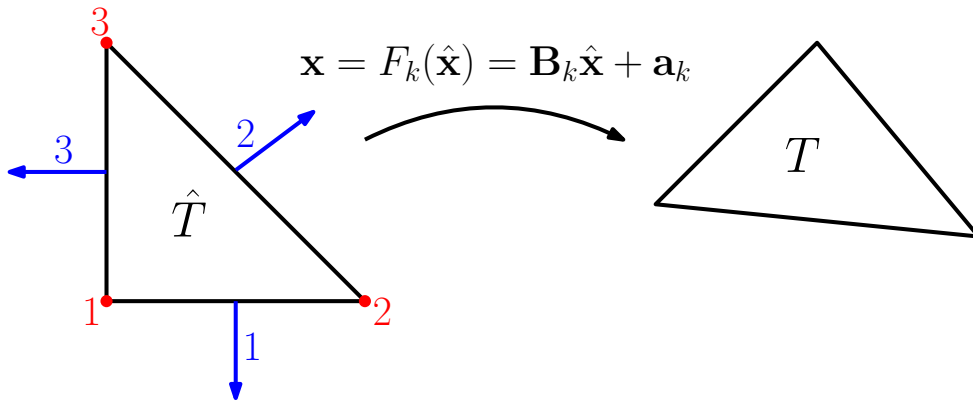


Figura 1: Triangolo di riferimento con corrispondente numerazione di vertici e lati.

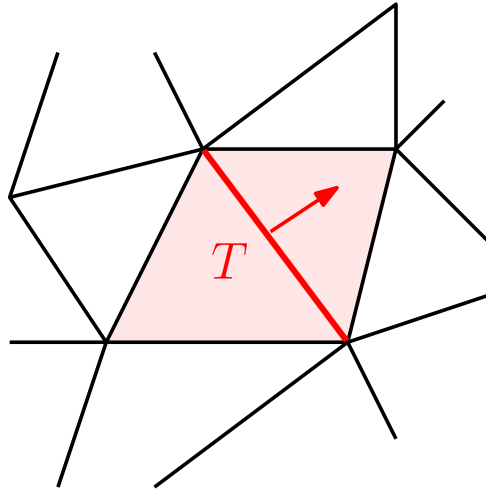


Figura 2: Funzione di base di Raviart-Thomas all'interfaccia tra due elementi.

- **Mesh.elems2orientation**: matrice $3 \times N_{\text{tri}}$, in cui ogni colonna rappresenta un triangolo e contiene i segni dell'orientazione delle normali relative ai lati rispetto a quella globale.

Potete trovare un esempio di come aggiungere questi alla vostra struttura Mesh in nello script `ex08_0.jl`.

2 Assemblaggio locale

Partiamo dall'implementare l'assemblaggio locale. Potete trovare un codice da completare in `Assembly_mixed.jl`.

Esercizio 1

Implementare la funzione

```
1 function shapef_2D_RT0FE(quadrule::TriQuad)
```

che prende in input una regola di quadratura `quadrule` di tipo `TriQuad` e valuta le funzioni di base di Raviart-Thomas nelle coordinate dei punti di quadratura (sull'elemento di riferimento).

Esercizio 2

Implementare la funzione

```
1 function divshapef_2D_RTOFE(quadrule::TriQuad)
```

che prende in input una regola di quadratura `quadrule` di tipo `TriQuad` e calcola la divergenza delle funzioni di base di Raviart-Thomas nelle coordinate dei punti di quadratura

Esercizio 3

Implementare la funzione

```
1 function darcy_assemble_local_mixed!(Ae::Matrix, Be::Matrix, fe::Vector,  
2 mesh::Mesh, cell_index::Integer, f, mu)
```

che assembla le matrici locali e il load-vector locale per l'elemento `cell_index`.

3 Da assemblaggio locale ad assemblaggio globale

Esercizio 4

Implementare la funzione

```
1 function assemble_global_mixed(mesh::Mesh, local_assembler!)
```

che, data una mesh e un assembler locale, la matrice di globale e il vettore dei termini noti.

4 Test del codice

Esercizio 5

Testare il codice su uno o più problemi con soluzione nota. Diagrammare l'errore su p in norma $L^2(\Omega)$ e quello su u in norma $H(\text{div}, \Omega)$, in funzione della mesh-size h . Verificare che i rate di convergenza coincidano con quanto visto a lezione.