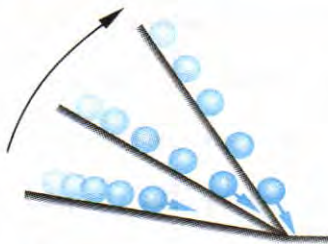


- Автомобиль движется в северном направлении со скоростью 90 км/ч. Найдите модуль и направление его постоянного ускорения при торможении перед светофором за 4 с. Рассчитайте длину тормозного пути автомобиля. **[6,25 м/с<sup>2</sup>; 50 м]**
- Используя данные задачи 3, нарисуйте зависимость скорости автомобиля от времени. Найдите графически длину тормозного пути автомобиля. Постройте график движения автомобиля.
- За какое время, двигаясь равнозамедленно с ускорением  $a$ , тело уменьшает свою скорость вдвое по сравнению с начальной скоростью  $v_0$ ? Какой путь проходит тело за это время?  **$[v_0/(2a); 3v_0^2/(8a)]$**

### § 13. Свободное падение тел

**Падение тел в отсутствие сопротивления воздуха.** Одним из видов равнопеременного движения является свободное падение тел в поле тяготения Земли, когда на тело действует только сила тяжести. То есть свободное падение на Землю является ускоренным.

**Все тела независимо от их массы в отсутствие сил сопротивления воздуха падают на Землю с одинаковым ускорением, называемым ускорением свободного падения.**



#### ▲ 37

*Опыт Галилея.*

1. При фиксированном угле наклона плоскости шар скатывается с постоянным ускорением.

2. При увеличении угла наклона плоскости ускорение шаров возрастает

Впервые это утверждение экспериментально было доказано **Галилео Галилеем**. Из-за отсутствия точных часов Галилей не мог измерять достаточно надёжно малые интервалы времени падения тел на Землю. Учёный исследовал скольжение шаров с наклонной плоскости (рис. 37), угол наклона которой постепенно приближался к прямому. Результаты экспериментов показали, что при любом угле наклона плоскости расстояние, проходимое шаром по этой плоскости, пропорционально квадрату времени движения.

Например, за удвоенный промежуток времени шар проходил расстояние в 4 раза большее, за утроенный — в 9 раз больше и т. д. Выводы Галилея были подтверждены английским учёным **Робертом Бойлем**, наблюдавшим синхронное падение различных предметов в сосуде, из которого был откачан воздух (рис. 38).



Воздух из сосуда был удалён для того, чтобы исключить силу сопротивления воздуха, препятствующую движению тел. Ускорение свободного падения тел на Землю впервые измерил **Кристиан Гюйгенс** в 1656 г. с помощью маятниковых часов. Вблизи поверхности Земли ускорение свободного падения равно

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

На Луне нет атмосферы, поэтому астронавты Д. Скотт и Дж. Ирвин наблюдали синхронное падение птичьего пера и молотка на поверхность Луны, происходящее с одинаковым ускорением. Ускорение свободного падения тел на Луне примерно в 6 раз меньше, чем на Земле:

$$g_{\text{Л}} = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

**Падение тел в воздухе.** В воздухе падение тел происходит иначе, чем в вакууме. На тело, движущееся в воздухе, действует сила сопротивления воздуха. Свободно падающее тело вначале движется, как в вакууме, с ускорением свободного падения, так как сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала при небольшой скорости. Увеличение скорости падения тела приводит к увеличению силы сопротивления воздуха и уменьшению ускорения тела. Когда сила сопротивления воздуха становится равной силе притяжения тела к Земле, ускорение тела оказывается равным нулю. Вблизи Земли тела, падающие с большой высоты, имеют постоянную скорость.

Например, скорость падения капель дождя и градин на Землю около 30 км/ч. В отсутствие атмосферы они достигали бы Земли со скоростью пули. Впрочем, надуманность этой ситуации очевидна: в отсутствие атмосферы не было бы ни капель дождя, ни града, ни жителей Земли.

Лёгкие тела с большой площадью поверхности (снежинки, листья) через короткий промежуток времени начинают двигаться в воздухе равномерно с небольшой скоростью.

Скорость тяжёлых предметов при падении в атмосфере Земли возрастает в течение нескольких первых секунд, а затем остается постоянной (порядка 100 м/с). В таблице 6 приведена примерная конечная скорость падения различных тел с большой высоты на Землю. В воздухе тяжёлые предметы имеют большую установившуюся скорость, чем лёгкие. Значит, расстояние, которое они проходят, прежде чем их скорость станет постоянной, должно быть больше.



### ▲ 38

*Синхронное свободное падение яблока и пера в вакууме*

Таблица 6

**Скорость падения различных тел с большой высоты на Землю**

Падающее тело	Скорость падения на Землю, м/с	Падающее тело	Скорость падения на Землю, м/с
Перо птицы	0,4	Монета	9
Лист бумаги	0,5	Парашютист (нераскрытый парашют)	60
Снежинка	1	Большой камень	100
Парашютист (раскрытый парашют)	7	Пуля (крупного калибра)	200

**ВОПРОСЫ**

1. Приведите примеры равнопеременного движения.
2. При каких условиях падение тел на Землю можно считать равноускоренным движением?
3. Опишите эксперименты Г. Галилея и Р. Бойля, подтвердившие постоянство ускорения тел, свободно падающих на Землю.
4. Чем отличается падение тел в воздухе от их падения в вакууме?
5. Почему раскрытие парашюта существенно уменьшает скорость приземления парашютиста?

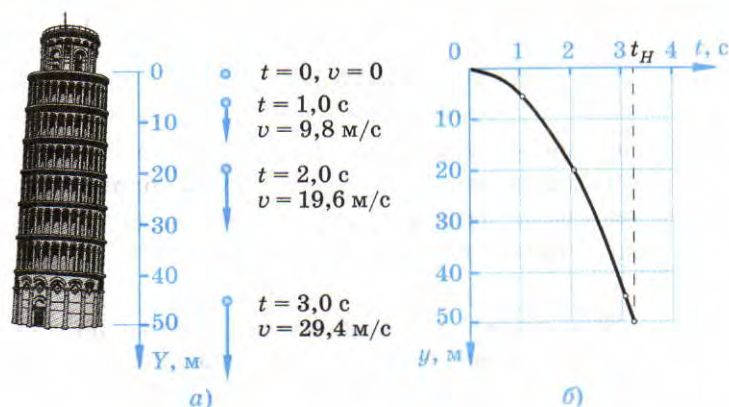
## § 14. Графики зависимости пути, перемещения, скорости и ускорения от времени при равнопеременном движении

**Свободное падение без начальной скорости.** Свободное падение монеты без начальной скорости с высоты  $H$  (рис. 39, *a*) является равнопеременным движением. Закон равнопеременного движения по оси  $Y$ , вдоль которой происходит падение монеты, имеет вид (см. формулу (13))

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}. \quad (14)$$

Прежде всего, следует конкретизировать начальные условия  $\{y_0, v_{0y}$  и  $a_y\}$ , входящие в это выражение. Направим ось  $Y$  вниз и выберем начало от-





## 39

Свободное падение тела в поле тяжести Земли:  
 а) положение тела через каждую секунду движения;  
 б) график свободного падения тела:  $y$  — перемещение (путь) тела,  $t_H$  — время падения тела на Землю с высоты  $H$

счёта в верхней точке. В этом случае  $y_0 = 0$ ,  $v_{0y} = 0$ . Ускорение свободного падения  $\vec{g}$  направлено вниз, следовательно, его проекция на ось  $Y$   $a_y = g$ .

Подставляя начальные условия в формулу (14), получаем окончательный вид закона движения тела при свободном падении без начальной скорости:

$$y = \frac{gt^2}{2}. \quad (15)$$

При прямолинейном движении вдоль координатной оси, когда начальная точка движения совпадает с нулём системы координат, координата одновременно характеризует и перемещение, и путь тела.

Графиком такой квадратичной зависимости от времени является парабола, проходящая через начало координат. По графику можно найти время  $t$  падения монеты на Землю (рис. 39, б). С помощью закона движения (15) это время можно рассчитать, полагая  $y = H$ :

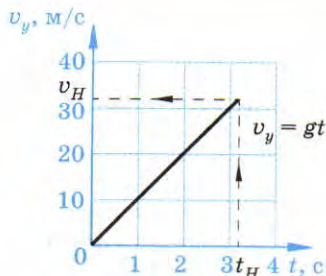
$$H = \frac{gt^2}{2}.$$

Время падения тела на Землю с высоты  $H$ :

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (16)$$

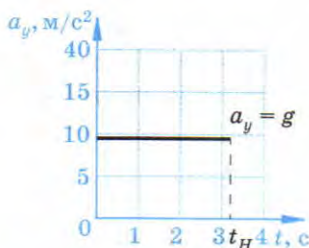
Зависимость скорости движения монеты по оси  $Y$  от времени записывается аналогично формуле (12):

$$v_y = v_{0y} + a_y t. \quad (17)$$



#### 40

*Зависимость скорости свободного падения тела от времени*



#### 41

*Ускорение свободного падения тела постоянно*

равнозамедленно, а вниз движется равноускоренно. Но в целом его движение является равнопеременным, так как при движении и вверх, и вниз его ускорение остается постоянным (равным  $g$ ).

Рассмотрим движение мяча, брошенного вертикально вверх с высоты  $H$  со скоростью  $\vec{v}_0$  (рис. 42, а).

Запишем закон равнопеременного движения мяча (14):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Выберем начало отсчета в точке бросания ( $y_0 = 0$ ) и направим ось  $Y$  вверх. Тогда  $v_{0y} = v_0$ . Ускорение свободного падения направлено вниз (про-

Подстановка значений  $v_{0y} = 0$  и  $a_y = g$  даёт

$$v_y = gt. \quad (18)$$

С математической точки зрения прямая  $v_y(t)$ , проходящая через начало координат, не ограничена. Однако физический смысл имеет лишь отрезок прямой между  $t_0 = 0$  (начало движения) и  $t = t_H$  (время падения тела) (рис. 40).

Зная время падения, можно найти скорость тела в момент падения как графически (см. рис. 40), так и аналитически (т. е. рассчитать по формуле).

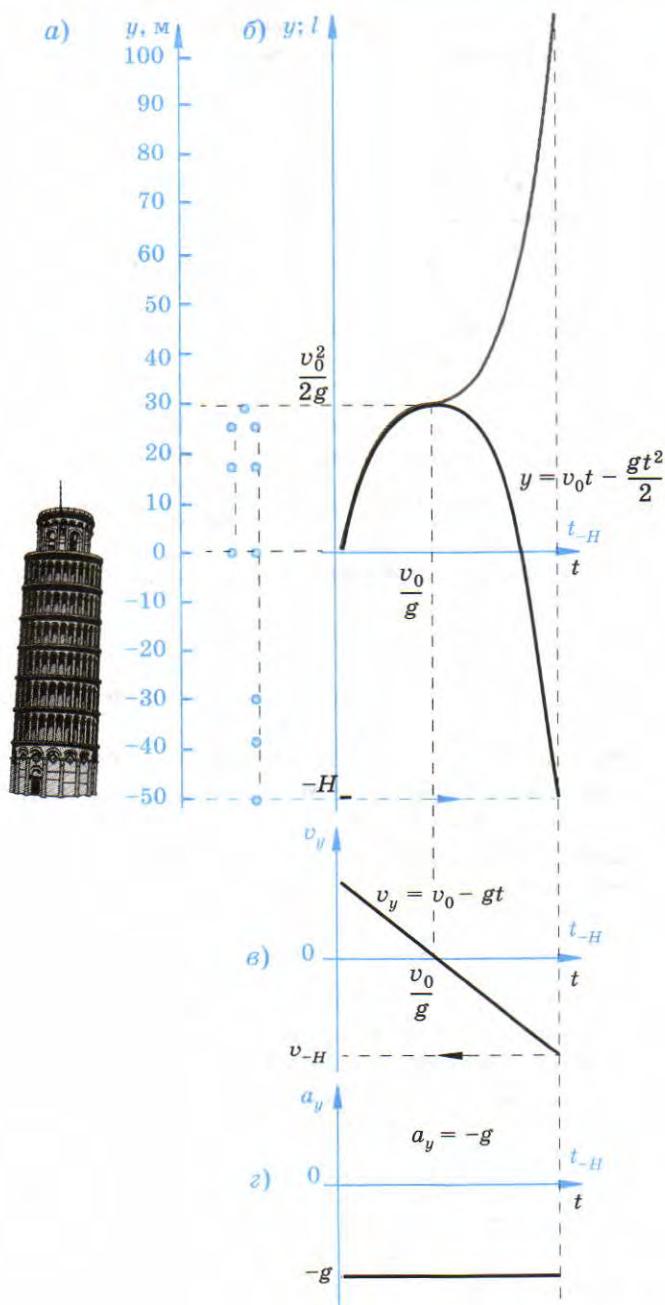
Для расчёта скорости тела подставим время падения из равенства (16) в выражение (18). Тогда

$$v_H = g \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH}.$$

Ускорение по оси  $Y$  ( $a_y = g$ ) является положительной константой, т. е. не зависит от времени. Поэтому графиком  $a_y(t)$  является прямая, параллельная оси времени (рис. 41).

**Одномерное движение в поле тяжести при наличии начальной скорости.** В поле тяжести тело движется с постоянным ускорением, т. е. равнопеременно, независимо от начальной скорости тела и её направления. Брошенный вверх мяч вплоть до высшей точки подъёма движется





## 42

Равнопеременное движение мяча, брошенного вертикально вверх:

- а) положение мяча зафиксировано через каждую секунду, а также в верхней точке и в точке падения;
- б) зависимость перемещения  $y$  и пути  $l$  от времени;
- в) зависимость проекции скорости тела на вертикальную ось от времени;
- г) зависимость проекции ускорения свободного падения тела от времени

тивоположно направлению оси  $Y$ ), поэтому его проекция на ось отрицательна ( $a_y = -g$ ). После подстановки начальных условий  $\{y_0, v_{0y}, a_y\}$  закон движения тела имеет вид

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (19)$$

Для построения графика движения необходим небольшой экскурс в математику.

Графиком любой квадратичной функции  $y = ax^2 + bx$  является парабола. В нашем случае роль  $x$  играет  $t$ ,  $a = -\frac{g}{2}$ ,  $b = v_0$ . Известно, что если коэффициент при квадратичном члене  $a < 0$ , то ветви параболы направлены вниз. Ясно, что график проходит через начало координат: при  $x = 0$  ( $t = 0$ )  $y = 0$ . Парабола имеет вершину (максимум) при  $x_{\max} = -\frac{b}{2a}$  (в данном случае  $t_{\max} = \frac{v_0}{g}$ ). Вершина параболы по оси  $Y$  имеет максимальную координату  $y_{\max} = -\frac{b^2}{4a}$  (в данном случае  $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ ).

Этих сведений вполне достаточно, чтобы качественно (без подстановки числовых значений) построить график движения тела (рис. 42, б).

Графически время падения тела на Землю  $t_{-H}$  можно найти следующим образом. Отметив на оси ординат точку  $-H$ , следует определить соответствующее ей значение времени  $t_{-H}$  на оси абсцисс.

Это время можно рассчитать, если подставить в закон движения (19) вместо  $y$  его значение в точке падения:

$$-H = v_0 t_{-H} - \frac{gt_{-H}^2}{2}.$$

Чтобы найти время падения, надо решить квадратное уравнение относительно  $t_{-H}$ . Можно получить значение этой величины и другим способом, не решая явно квадратное уравнение. Для этого найдём зависимость проекции скорости на ось  $Y$  от времени с помощью формулы (17), учитывая, что  $v_{0y} = v_0$ ,  $a_y = -g$ :

$$v_y = v_0 - gt. \quad (20)$$

Графиком этой зависимости является прямая с отрицательным тангенсом угла наклона, поднятая вверх (по оси  $Y$  относительно нуля отсчёта) на



$v_0$  (рис. 42, в). Прямая пересекает ось  $t$  в точке  $t_{\max}$ , в которой  $v_y = 0$ . Следовательно,

$$v_0 - gt_{\max} = 0,$$

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g}. \quad (21)$$

Как видно из рисунка 42, б, значение  $t_{\max}$  определяет время подъёма тела на максимальную высоту. В этой точке тело останавливается: его скорость становится равной нулю. Соответственно максимальная высота подъёма тела равна координате вершины параболы:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (22)$$

Знак проекции скорости тела на ось  $Y$  при  $t > t_{\max}$  изменяется. Это означает, что изменяется направление движения тела, которое, достигнув высшей точки, начинает падать на Землю (см. рис. 42, в). При этом модуль скорости возрастает, так как движение вниз является равноускоренным.

Промежуток времени, через который тело упадет на Землю,  $t_{-H}$  складывается из двух интервалов времени: времени подъёма на максимальную высоту  $t_{\max}$  и времени свободного падения с максимальной высоты  $H + \frac{v_0^2}{2g}$  на Землю:

$$t_{-H} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2}{g} \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)}.$$

Полученное выражение является одним из корней не решенного нами явно квадратного уравнения. Другой его корень в условиях данной задачи не имеет физического смысла.

Графиком проекции ускорения на ось  $Y$  является прямая, параллельная оси времени ( $a_y = -g$ ), так как ускорение свободного падения постоянно и направлено противоположно оси  $Y$  (рис. 42, з).

## ВОПРОСЫ

1. Запишите закон свободного падения тела, падающего без начальной скорости с высоты  $H$ , выбрав нуль отсчета на Земле, а ось  $Y$  направив вверх. Постройте график зависимости  $y(t)$ .



2. Как выглядят графики зависимости скорости и ускорения свободного падения монеты при выборе координатной оси  $Y$  так же, как и в вопросе 1?
3. Какой физический смысл может иметь отброшенный корень квадратного уравнения (19), не решенного нами явно, когда  $y = -H$ ?
4. Чем объяснить отличие друг от друга графиков перемещения и пути тела, брошенного вверх в поле тяжести (см. рис. 42)?
5. Постройте графики зависимости от времени пути, проекции перемещения, скорости и ускорения тела, брошенного вертикально вниз со скоростью  $v_0$  с высоты  $H$ . Направьте ось  $Y$  вниз, выбрав начало отсчета по оси  $Y$  в точке бросания.

### ЗАДАЧИ

1. Какой путь проходит свободно падающая (без начальной скорости) капля за четвертую секунду от момента отрыва? [34,3 м]
2. С крыши дома через промежуток времени  $t$  одна за другой падают капли. Запишите закон движения капель. Постройте в одних координатных осях  $Y$ ,  $t$  графики движения первой, второй, третьей,  $n$ -й капель.
3. Используя данные задачи 2, найдите расстояние между второй и третьей каплями в момент отрыва седьмой капли. [4,5gτ<sup>2</sup>]
4. Тело свободно падает с высоты  $H$  без начальной скорости. Какой путь оно проходит в последнюю секунду падения на Землю?  $\left[ \frac{g}{2} \left( 2\sqrt{\frac{2H}{g}} - 1 \right) \right]$
5. По данным рисунка 42, а оцените начальную скорость  $v_0$  мяча, брошенного вертикально вверх. Постройте графики перемещения и пути мяча, выбрав начало отсчета на поверхности Земли. [≈ 24 м/с]

## § 15. Баллистическое движение

**Возникновение баллистики.** В многочисленных войнах на протяжении всей истории человечества враждующие стороны, доказывая своё превосходство, использовали сначала камни, копы и стрелы, а затем ядра, пули, снаряды и бомбы.

Успех сражения во многом определялся точностью попадания в цель. При этом точный бросок камня, поражение противника летящим копьем или стрелой фиксировались воином визуально. Это позволяло (при соответствующей тренировке) повторять свой успех в следующем сражении.

Значительно возросшая с развитием техники скорость (и соответственно дальность полёта) снарядов и пуль сделали возможными дистанционные сражения. Однако навыка воина, разрешающей способности его глаза было недостаточно для точного попадания в цель в артиллерийской дуэли первым. Желание побеждать стимулировало появление баллистики (от *греч.* ballo — бросаю).



### Баллистика — раздел механики, изучающий движение тел в поле тяжести Земли.

Пули, снаряды и бомбы, так же как и теннисный, и футбольный мячи, и ядро легкоатлета, при полёте движутся по баллистической траектории. Для описания баллистического движения в качестве первого приближения удобно ввести идеализированную модель, рассматривая тело как материальную точку, движущуюся с постоянным ускорением свободного падения  $\vec{g}$ . При этом пренебрегают изменением  $\vec{g}$  с высотой подъёма тела, сопротивлением воздуха, кривизной поверхности Земли и её вращением вокруг собственной оси. Это приближение существенно облегчает расчет траектории тел. Однако такое рассмотрение имеет определённые границы применимости. Например, при полёте межконтинентальной баллистической ракеты нельзя пренебрегать кривизной поверхности Земли. При свободном падении тел нельзя не учитывать сопротивление воздуха.

**Траектория движения тела в поле тяжести.** Рассмотрим основные параметры траектории снаряда, вылетающего с начальной скоростью  $\vec{v}_0$  из орудия, направленного под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 43).

Движение снаряда происходит в вертикальной плоскости  $XU$ , содержащей  $\vec{v}_0$ . Выберем начало отсчёта в точке вылета снаряда.

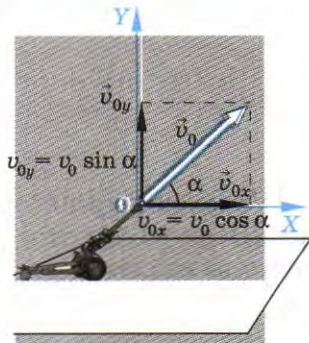
Независимость перемещения тела от порядка перемещения по разным координатным осям — следствие евклидовости физического пространства.

*В евклидовом физическом пространстве перемещение тела по координатным осям  $X$  и  $Y$  можно рассматривать независимо.*

Ускорение свободного падения  $\vec{g}$  направлено вертикально вниз, поэтому по оси  $X$  движение будет равномерным. Это означает, что проекция скорости  $v_x$  остается постоянной, равной её значению в начальный момент времени  $v_{0x}$ .

Закон равномерного движения снаряда по оси  $X$  имеет вид

$$x = x_0 + v_{0x}t. \quad (23)$$



#### ▲ 43

*Плоскость полёта снаряда, содержащая вектор начальной скорости  $\vec{v}_0$ :*

$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y}$ ,  
 $\vec{v}_{0x}$  и  $\vec{v}_{0y}$  — компоненты начальной скорости по координатным осям  $X$  и  $Y$



По оси  $Y$  движение является равнопеременным, так как вектор ускорения свободного падения  $\vec{g}$  постоянен.

Закон равнопеременного движения по оси  $Y$  можно представить в виде

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}. \quad (24)$$

*Криволинейное баллистическое движение тела можно рассматривать как результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного движения по оси  $X$  и равнопеременного движения по оси  $Y$ .*

В выбранной системе координат

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 0; \\ v_{0x} &= v_0 \cos \alpha, & v_{0y} &= v_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ускорение свободного падения направлено противоположно оси  $Y$ , поэтому

$$a_y = -g.$$

Подставляя  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ,  $a_y$  в (23) и (24), получаем закон баллистического движения в координатной форме:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t, \\ y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \quad (25)$$

Уравнение траектории снаряда, или зависимость  $y(x)$ , можно получить, исключая из системы уравнений время. Для этого из первого уравнения системы найдём

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Подставляя его во второе уравнение системы, получаем

$$y = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Сокращая  $v_0$  в первом слагаемом и учитывая, что  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ , получаем **уравнение траектории снаряда:**

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (26)$$

Экспериментальное наблюдение баллистической траектории возможно с помощью струи воды, вытекающей под напором из трубки. Струя принимает форму параболы, так как каждая частица воды движется по баллистической траектории — параболе.

**Траектория баллистического движения.** Построим баллистическую траекторию (26). Графиком квадратичной функции, как известно, является парабола. В рассматриваемом случае парабола проходит через начало координат, так как из (26) следует, что  $y = 0$  при  $x = 0$ . Ветви параболы направлены вниз, так как коэффициент  $\left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right)$  при  $x^2$  меньше нуля (рис. 44).

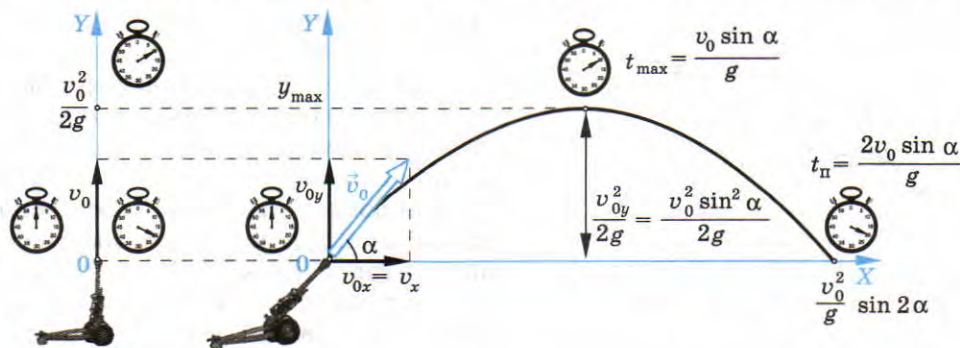
Определим основные параметры баллистического движения: время подъема на максимальную высоту, максимальную высоту, время и дальность полета. Вследствие независимости движений по координатным осям подъем снаряда по вертикали определяется только проекцией начальной скорости  $v_{0y}$  на ось  $Y$ . В соответствии с формулой (21), полученной для тела, брошенного вверх с начальной скоростью  $v_0$ , время подъема снаряда на максимальную высоту равно

$$t_{\max} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Максимальная высота подъема может быть рассчитана по формуле (22), если  $v_{0y}$  подставить вместо  $v_0$ :

$$y_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

На рисунке 44 сопоставляется прямолинейное и криволинейное движение с одинаковой начальной скоростью по оси  $Y$ . В любой момент времени



#### 44

Независимость вертикального и горизонтального движений



тело, брошенное вертикально вверх, и тело, брошенное под углом к горизонту с той же вертикальной проекцией скорости, движутся по оси  $Y$  синхронно.

Так как парабола симметрична относительно вершины, то время полета  $t_{\Pi}$  снаряда в 2 раза больше времени его подъема на максимальную высоту:

$$t_{\Pi} = 2t_{\max} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляя время полёта в закон движения по оси  $X$ , получаем максимальную дальность полёта:

$$x_{\max} = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Так как  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ , то

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (27)$$

Следовательно, *дальность полёта тела при одной и той же начальной скорости зависит от угла, под которым тело брошено к горизонту* (рис. 45).

Дальность полёта максимальна, когда максимален  $\sin 2\alpha$ .

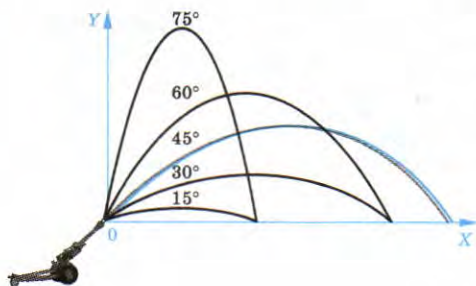
Максимальное значение синуса равно единице при угле  $90^\circ$ , т. е.

$$\sin 2\alpha = 1, \quad 2\alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ.$$

*В отсутствие сопротивления воздуха максимальная дальность полёта тела в поле тяжести достигается при вылете под углом  $45^\circ$  к горизонту.*

При  $\alpha = 45^\circ + \beta$  (навесная траектория) и  $\alpha = 45^\circ - \beta$  (настильная траектория) (см. рис. 45) дальность полёта одинакова (см. формулу (27)).

**Скорость при баллистическом движении.** Для расчёта скорости снаряда в произвольной точке траектории, а также для определения угла  $\beta$ , который образует вектор скорости с горизонталью, достаточно знать проекции скорости на оси  $X$  и  $Y$  (рис. 46).



#### ▲ 45

*Баллистическая траектория снаряда в отсутствие сопротивления воздуха при стрельбе под разными углами к горизонту*

Если  $v_x$  и  $v_y$  известны, то по теореме Пифагора можно найти скорость

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (28)$$

Отношение катета  $v_y$ , противолежащего углу  $\beta$ , к катету  $v_x$ , прилежащему к этому углу, определяет  $\operatorname{tg} \beta$  и соответственно угол  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x}.$$

При равномерном движении по оси  $X$  проекция скорости движения  $v_x$  остается постоянной и равной проекции начальной скорости  $v_{0x}$ :

$$v_x = v_0 \cos \alpha.$$

Зависимость  $v_y(t)$  определяется формулой (17), в которую следует подставить

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha, \quad a_y = -g.$$

Тогда

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

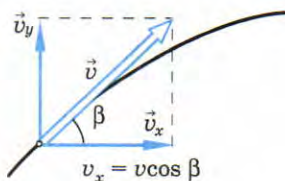
Графики зависимости проекций скорости  $v_x$ ,  $v_y$  от времени приведены на рисунке 47.

В любой точке траектории проекция скорости на ось  $X$  остаётся постоянной. По мере подъёма снаряда проекция скорости на ось  $Y$  уменьшается по линейному закону. При  $t = 0$  она равна  $v_y = v_0 \sin \alpha$ . Найдём промежуток времени, через который проекция этой скорости станет равна нулю:

$$0 = v_0 \sin \alpha - gt, \quad t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

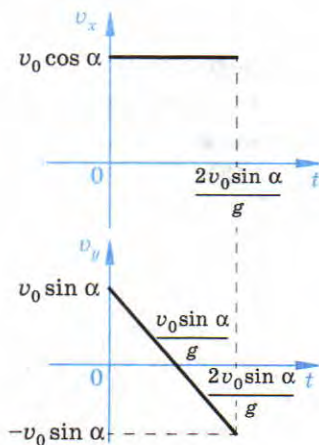
Полученный результат совпадает со временем подъёма снаряда на максимальную высоту.

В верхней точке траектории вертикальная компонента скорости равна нулю.



#### 46

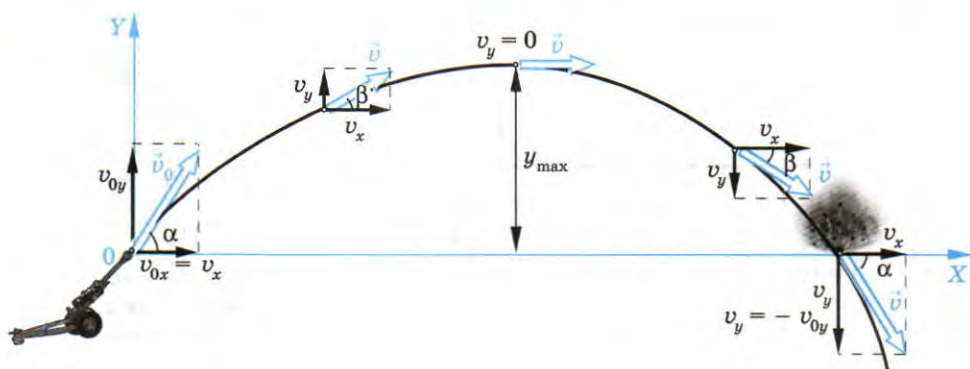
*Определение скорости снаряда и её угла наклона к горизонту по проекциям скорости  $v_x$  и  $v_y$*



#### 47

*Зависимости от времени горизонтальной  $v_x$  и вертикальной  $v_y$  проекций скорости снаряда*





#### ▲ 48

##### *Скорость снаряда в различных точках траектории*

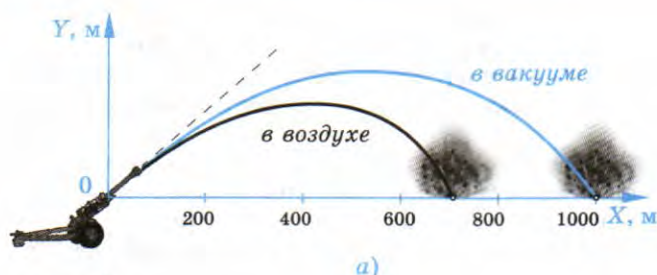
Следовательно, тело больше не поднимается. При  $t > t_{\max}$  проекция скорости  $v_y$  становится отрицательной. Значит, эта составляющая скорости направлена противоположно оси  $Y$ , т.е. тело начинает падать вниз (рис. 48).

Так как в верхней точке траектории  $v_y = 0$ , то скорость снаряда (см. (28))

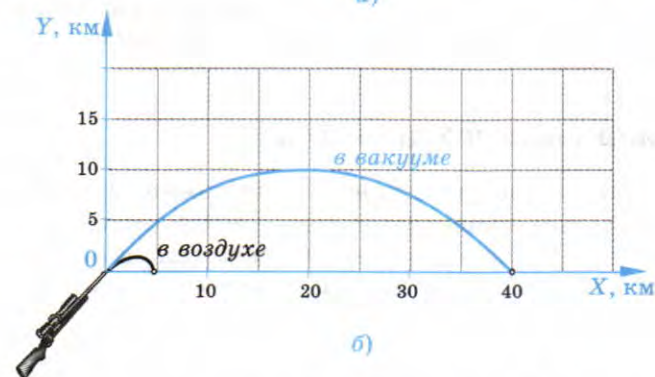
$$v = v_x = v_0 \cos \alpha.$$

**Баллистическое движение в атмосфере.** Полученные результаты справедливы для идеализированного случая, когда можно пренебречь сопротивлением воздуха. Реальное движение тел в земной атмосфере происходит по траектории, существенно отличающейся от параболической (рис. 49) из-за сопротивления воздуха. При увеличении скорости движения тела сила сопротивления воздуха возрастает. Чем больше скорость тела, тем больше отличие реальной траектории от параболы. При движении снарядов и пуль в воздухе максимальная дальность полёта достигается при угле вылета  $30\text{--}40^\circ$ . Расхождение простейшей теории баллистики с экспериментом не означает, что она не верна в принципе. В вакууме или на Луне, где практически нет атмосферы, эта теория даёт правильные результаты. (Для лунных условий во всех формулах следует заменить ускорение свободного падения  $g$  на  $g_{\text{Л}}$ .)

При описании движения тел в атмосфере учёт сопротивления воздуха требует математического расчёта, который мы не будем приводить из-за громоздкости. Отметим лишь, что расчёт траектории запуска и выведения



а)



б)

## 49

Отличие реальной баллистической кривой от параболы при различной скорости вылета:  
 а) снаряда  $v_0 = 100$  м/с;  
 б) пули  $v_0 = 630$  м/с

на требуемую орбиту спутников Земли и их посадки в заданном районе осуществляют с большой точностью мощные компьютеры.

ВОПРОСЫ

1. Какая модель используется для описания баллистического движения тела? Почему?
2. Почему при баллистическом движении тело движется по горизонтали равномерно, а по вертикали равнопеременно?
3. Какой угол должна составлять начальная скорость тела с горизонтом, чтобы дальность полёта в отсутствие сопротивления воздуха была максимальной? Приведите необходимую формулу для аргументации.
4. Как сила сопротивления воздуха влияет на баллистическое движение и на максимальную дальность полёта снарядов и пуль?
5. Определите угол, при котором максимальная высота подъёма снаряда равна максимальной дальности полёта.

ЗАДАЧИ

1. Из окна дома с высоты 19,6 м горизонтально брошена монета со скоростью 5 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, через какой промежуток времени монета упадёт на Землю. На каком расстоянии по горизонтали от дома находится точка падения?

**[2 с; 10 м]**