Introduction to Sphere - Valued Sobolev Maps

Indice

1 Prerequisiti **2**

1.1 Distribuzioni . . . 2

1.2 Spazi di Sobolev $W^{1,p}$ . . . 3

1.3 Funzioni BV . . . 3

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Distribuzioni

Notatione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}(\Omega)$
$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} u$ se $\begin{cases} \exists K \subset \Omega \text{ compatto } : \forall n \quad \operatorname{supp} u_n \subseteq K \\ \forall \alpha \quad D^\alpha u_n \xrightarrow{\text{unif.}} D^\alpha u \end{cases}$

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \mid T \text{ lin e cont.}\}$ spazio delle distribuzioni su Ω
Notatione: $\langle T, u \rangle = T(u)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$
$T_n \xrightharpoonup{*} T$ se $\forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_n, u \rangle \longrightarrow \langle T, u \rangle$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$
$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \sup_n \langle T_n, u \rangle \implies \exists \begin{cases} \{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\} \\ T \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} : T_{n_k} \xrightharpoonup{*} T$$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$
$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \ : \ \langle T_f, u \rangle = \int_\Omega f(x)u(x)dx$$
Proprietà: $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- $\frac{\partial T}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \ : \ \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, u \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle$ derivata j-esima di T
- ∇T, $\operatorname{div} T$, ...

Proprietà: $\forall j \quad \frac{\partial T}{\partial x_j}, \nabla T, \operatorname{div} T, \ldots \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ lineare e continuo

Notatione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\tilde{\rho} = \rho \circ \cdot_{-1}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$
$T * \rho : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \ : \ \langle T * \rho, u \rangle = \langle T, \tilde{\rho} u \rangle$
Proprietà: $T * \rho \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$
$$\forall j \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(T * \rho) = \frac{\partial T}{\partial x_j} * rho = T * \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

1.2 Spazi di Sobolev $W^{1,p}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $p \in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \exists g \in L^p\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \;:\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \right\}$$

Notatione: $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $g = \nabla u$

Proprietà: $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \cdot\|_{L^p(\Omega)}$ norma su $W^{1,p}(\Omega)$: $\left(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$ spazio di Banach

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$, $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u$ se $u_n, \nabla u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \nabla u$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$: $\exists C > 0$: $\forall n \quad \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$

- $p \in (1, +\infty) \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega) \;:\; u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \xrightharpoonup{L^p(\Omega)} u, \nabla u$
- $p = +\infty \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega) \;:\; u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \xrightharpoonup{*} u, \nabla u$

Corollario: $p \in (1, +\infty) \implies u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$\forall p \in [1, +\infty] \quad W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

- $p \in [1, N) \implies \exists p* = \dfrac{pN}{N-p} \;:\; \begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega) \\ \forall q < p* \qquad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \end{cases}$
- $p = N \implies \forall q < +\infty \quad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$
- $p > N \implies \exists \alpha_p = \dfrac{p-N}{p} \;:\; \begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha_p}(\Omega) \\ \forall \beta < \alpha_p \qquad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{0,\beta}(\Omega) \end{cases}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$\forall F \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R}) \quad F \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \;:\; \nabla(F \circ u) = F'(u) \nabla u$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$

$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \;:\; \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$

1.3 Funzioni BV

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \;\middle|\; \exists \mu \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \;:\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \varphi d\mu_i \right\}$$

Notatione: $\mu = Du$

Proprietà: $\|\cdot\|_{BV(\Omega)} = \|\cdot\|_{L(\Omega)} + \|D \cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)}$ norma su $BV(\Omega)$: $\left(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)}\right)$ spazio di Banach

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u \in BV(\Omega) \quad \exists \{u_n\} \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \;:\; \begin{cases} u_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \qquad Du_n \xrightharpoonup{\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)} Du \\ \|Du_n\|_{\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|Du\|_{\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)} \end{cases}$$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$BV(\Omega)$ immerge come $W^{1,1}(\Omega)$

Definizione: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k-rettificabile $\quad \exists \begin{cases} \Sigma_0 \subseteq \mathbb{R}^N \;:\; \mathcal{H}^k(\Sigma_0) = 0 \\ \{M_i \subseteq \mathbb{R}^N\} \; C^1 \text{ sottovarietà} \end{cases} \;:\; \Sigma \subseteq \Sigma_0 \cup \bigcup_i M_i$

Teorema: Dato $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k-rettificabile

- $\mathcal{H}^k$-q.o. $\quad \exists T_x\Sigma$
- $\mathcal{H}^k$-q.o. $\quad \exists \Sigma_{x,r} = \dfrac{\Sigma - x}{r} \; : \; \forall R > 0 \quad \mathcal{H}^k \lfloor_{\Sigma_{x,r}} \xrightarrow{\mathcal{M}(B_R^N)} \mathcal{H}^k \lfloor_{T_x\Sigma}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f : \Omega \to \mathbb{R}$

- $x \in \Omega$ p.to di Lebesgue per f se $\exists C \in \mathbb{R} \; : \; \lim_{r\to 0^+} \displaystyle\int_{B_r(x)} |f(y) - C| dy = 0$
- $S_f = \{x \in \Omega \mid x$ p.to di Lebesgue per $f\}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in BV(\Omega)$

- S_u $(N-1)$-rettificabile
- $\exists \begin{cases} D^{ac}u = \nabla u \mathcal{L}^N \\ D^J u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor_{S_u} \\ D^C u \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} Du = D^{ac}u + D^J u + D^C u \\ D^J u + D^C u \perp \mathcal{L}^N \end{cases}$