Introduction to Sphere - Valued Sobolev Maps

Ivan De Biasi

Indice

1 Prerequisiti

1.1 Distribuzioni

Notatione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}(\Omega)$
$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} u \qquad \text{se} \qquad \begin{cases} \exists K \subset \Omega \text{ compatto } : \forall n \quad \operatorname{supp} u_n \subseteq K \\ \forall \alpha \quad D^\alpha u_n \xrightarrow{\text{unif.}} D^\alpha u \end{cases}$$

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \mid T \text{ lin e cont.}\}$ spazio delle distribuzioni su Ω
Notatione: $\langle T, u\rangle = T(u)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$
$$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T \qquad \text{se} \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_n, u\rangle \longrightarrow \langle T, u\rangle$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$
$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \sup_n \langle T_n, u\rangle \implies \exists \begin{cases} \{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\} \\ T \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} : T_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} T$$
Dimostrazione: ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$
$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \ : \ \langle T_f, u\rangle = \int_\Omega f(x)u(x)dx$$
Proprietà: $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- $\dfrac{\partial T}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \ : \ \left\langle \dfrac{\partial T}{\partial x_j}, u \right\rangle = \left\langle T, \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle$ derivata j-esima di T
- ∇T, $\operatorname{div} T$, ...

Proprietà: $\forall j \quad \dfrac{\partial T}{\partial x_j}, \nabla T, \operatorname{div} T, \ldots \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\dfrac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ lineare e continuo
Dimostrazione: ...

Notatione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\tilde{\rho} = \rho \circ \cdot_{-1}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$
$T * \rho : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \ : \ \langle T * \rho, u\rangle = \langle T, \tilde{\rho} u\rangle$
Proprietà: $T * \rho \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$
$$\forall j \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(T * \rho) = \frac{\partial T}{\partial x_j} * rho = T * \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$
Dimostrazione: ...

1.2 Spazi di Sobolev $W^{1,p}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $p \in [1, +\infty]$
$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ \middle| \ \exists g \in L^p\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \ : \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \right\}$$
Notatione: $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $g = \nabla u$

Proprietà: $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ norma su $W^{1,p}(\Omega)$: $\left(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$ spazio di Banach

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1,+\infty]$, $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u \qquad \text{se} \qquad u_n, \nabla u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \nabla u$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$: $\exists C > 0$: $\forall n \quad \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$

- $p \in (1,+\infty) \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega)$: $u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \nabla u$
- $p = +\infty \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega)$: $u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \xrightarrow{*} u, \nabla u$

Corollario: $p \in (1,+\infty) \implies u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$

Dimostrazione: ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall p \in [1,+\infty] \quad W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

Dimostrazione: ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1,+\infty]$

- $p \in [1,N) \implies \exists p* = \dfrac{pN}{N-p}$: $\begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega) \\ \forall q < p* \qquad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \end{cases}$
- $p = N \implies \forall q < +\infty \quad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$
- $p > N \implies \exists \alpha_p = \dfrac{p-N}{p}$: $\begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha_p}(\Omega) \\ \forall \beta < \alpha_p \qquad W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{0,\beta}(\Omega) \end{cases}$

Dimostrazione: ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1,+\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\forall F \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R}) \quad F \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \ : \ \nabla(F \circ u) = F'(u)\nabla u$$

Dimostrazione: ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1,+\infty]$

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ : \ \nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$$

Dimostrazione: ...

1.3 Funzioni BV

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \,\middle|\, \exists \mu \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \ : \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \varphi d\mu_i \right\}$$

Notatione: $\mu = Du$

Proprietà: $\|\cdot\|_{BV(\Omega)} = \|\cdot\|_{L(\Omega)} + \|D\cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ norma su $BV(\Omega)$: $\left(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)}\right)$ spazio di Banach

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u \in BV(\Omega) \quad \exists \{u_n\} \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \ : \ \begin{cases} u_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \qquad Du_n \xrightarrow{\mathcal{M}\left(\Omega,\mathbb{R}^N\right)} Du \\ \|Du_n\|_{\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|Du\|_{\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \end{cases}$$

Dimostrazione: ...

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$BV(\Omega)$ immerge come $W^{1,1}(\Omega)$

Dimostrazione: ...

Definizione: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k-rettificabile se $\exists \begin{cases} \Sigma_0 \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ \mathcal{H}^k(\Sigma_0) = 0 \\ \{M_i \subseteq \mathbb{R}^N\} \ C^1 \ k\text{-sottovarietà} \end{cases}$: $\Sigma \subseteq \Sigma_0 \cup \bigcup_i M_i$

Teorema: Dato $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k-rettificabile

- $\mathcal{H}^k$-q.o. $\quad \exists T_x\Sigma$
- $\mathcal{H}^k$-q.o. $\quad \exists \Sigma_{x,r} = \dfrac{\Sigma - x}{r}$: $\forall R > 0 \quad \mathcal{H}^k \lfloor_{\Sigma_{x,r}} \xrightarrow{\mathcal{M}(B_R^N)} \mathcal{H}^k \lfloor_{T_x\Sigma}$

Dimostrazione: ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f : \Omega \to \mathbb{R}$

- $x \in \Omega$ p.to di Lebesgue per f se $\exists C \in \mathbb{R} \ : \ \lim_{r \to 0^+} \int_{B_r(x)} |f(y) - C| dy = 0$
- $S_f = \{x \in \Omega \mid x \text{ non p.to di Lebesgue per } f\}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in BV(\Omega)$

- S_u $(N-1)$-rettificabile
- $\exists \begin{cases} \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}\, u = \nabla u \mathcal{L}^N \\ \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor_{Su} \\ \mathrm{D}^{\mathrm{C}}\, u \ll \mathcal{H}^{N-1} \end{cases} \ : \ \begin{cases} \mathrm{D}\, u = \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}\, u + \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u + \mathrm{D}^{\mathrm{C}}\, u \\ \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u \perp \mathcal{L}^N \end{cases}$

Dimostrazione: ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $u \in BV(\Omega)$ e $F \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R})$

$$F \circ u \in BV(\Omega) \ : \ \begin{cases} \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}(F \circ u) = F'(u)\, \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}\, u \qquad \mathrm{D}^{\mathrm{C}}(F \circ u) = F'(u) D^C u \\ \mathrm{D}^{\mathrm{J}}(F \circ u) = \left(F(u^+) - F(u^-)\right) \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor_{Su} = \dfrac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}\, \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u \end{cases}$$

Dimostrazione: ...

2 Funzioni a valori nelle sfere

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $m \in \mathbb{N}$

- $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m) = \left\{u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}\right) \mid |u(x)| = 1 \quad \Omega\text{-q.o.}\right\}$
- $BV(\Omega, \mathbb{S}^m) = \left\{u \in BV\left(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}\right) \mid |u(x)| = 1 \quad \Omega\text{-q.o.}\right\}$

2.1 Lifting

<u>Proprietà</u>: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$
$\forall \varphi \in u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \quad e^{i\varphi} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$
$\varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ u = e^{i\varphi}$ lifting di u

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $u : \Omega \to \mathbb{S}^1$
$u \in C^k\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right) \implies \exists \varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \Omega \quad u(x) = e^{i\varphi(x)}$
Dimostrazione: Dato $\pi(t) = e^{it}$ il rivestimento universale di $\mathbb{S}^1$, poichè Ω è semplicemente connesso
$\forall u \in C^0\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right) \quad \exists \varphi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ \forall x \in \Omega \quad u(x) = e^{i\varphi(x)}$.
Inoltre poichè π è localmente invertibile con inversa $\mathbb{C}^\infty$ e u è locamente non-suriettiva,
$\forall x_0 \in \Omega$ si ha $\varphi|_{B_r(x_0)} = \pi^{-1}_{u(B_r(x_0))} \circ u_{B_r(x_0)}$ da cui $\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

Teorema: $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato non semplicemente connesso $\ : \ \exists u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{S}^1) \ : \ \nexists \varphi \in C^0(\Omega) \ : \ u = e^{i\varphi}$
Dimostrazione: Presi $\Omega = B_2 \setminus B_1 \subset \mathbb{R}^2$ e $u(x) = \frac{x}{|x|}$ per assurdo si avrebbe omotopia tra $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$ e una costante.

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$
$\mathrm{j}\, u = u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1$
<u>Proprietà</u>: $\forall u \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right) \ : \ \exists \varphi \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$ lifting di u $\qquad \mathrm{j}\, u = \nabla \varphi$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $V \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$
$\mathrm{curl}(V) \in \mathbb{R}^{N \times N}_{\text{skew-sym}} \ : \ (\mathrm{curl}(V))_{ij} = \dfrac{\partial V_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial V_j}{\partial x_i}$
<u>Proprietà</u>: $\forall u \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right) \ : \ \mathrm{j}\, u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \mathrm{curl}(\mathrm{j}\, u) = 0$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$
$\mathrm{J}\, u = \dfrac{1}{2} \mathrm{curl}(\mathrm{j}\, u) \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \mathbb{R}^{N \times N}_{\text{skew-sym}}\right)$ Jacobiano distribuzionale
<u>Proprietà</u>: $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \mathrm{J}\, u = \det(\nabla u)$

Proprietà: $N = 2 \implies \forall \Psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) \quad \langle \mathrm{J}\, u, \Psi \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \mathrm{j}\, u, \nabla^{\perp} \Psi \right\rangle$

Proprietà: $N = 3 \implies \forall \Psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \langle \mathrm{J}\, u, \Psi \rangle = \langle \mathrm{j}\, u, \mathrm{curl}(\Psi) \rangle$