Metodi Probabilistici per l'Algebra Lineare Numerica

Ivan De Biasi

Indice

1 Fondamenti di probabilità

Definizione [Funzione generatrice dei momenti]: Data X v.a.
$M_X(\theta) = \mathbb{E}[\exp(\theta X)]$

1.1 Disuguaglianze

Teorema [Jensen]: Data X v.a. e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa
$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$

Dimostrazione. ...

Teorema [Markov]: Data $X \geq 0$ v.a. $: \exists \mathbb{E}[X]$
$$\forall \alpha > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}$$

Dimostrazione. ...

Teorema [Chebyshev]: Data X v.a. $: \exists \mathbb{E}[X], \mathrm{Var}(X)$
$$\forall \alpha > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\alpha^2}$$

Dimostrazione. ...

Teorema [Chernoff]: Data X v.a.
$$\forall \alpha \quad \forall \theta > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[\exp(\theta X)]}{\exp(\theta \alpha)}$$

Dimostrazione. ...

1.2 Proprietà di distribuzioni notevoli

Teorema: Data $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$
$\forall U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonale $\quad UX \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

Dimostrazione. ...

Lemma: Data $\alpha \sim \mathcal{N}(0,1)$
$$\forall c > 0 \qquad \mathbb{E}\left[\frac{c}{\alpha^2 + c}\right] \leq \sqrt{\frac{\pi c}{2}}$$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Proposizione: $X \sim \mathcal{N}(0,1) \implies M_X(\theta) = e^{\frac{\theta^2}{2}}$

Dimostrazione. ...

Proposizione: $X \sim Chi - quadro(1) \implies M_X(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta}}$

Dimostrazione. ...

1.3 Variabili sub-gaussiane e sub-Gamma

Definizione: Data X v.a e $c > 0$

$$X \text{ sub-gaussiana con parametro } c \quad \text{se} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}[\exp(\theta(X - \mathbb{E}[X])] \leq \exp\left(\frac{c\theta^2}{2}\right)$$

Teorema: Data X v.a sub-gaussiana con parametro $c > 0$

$$\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2c^2}\right)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2c^2}\right)$

Dimostrazione. ...

Teorema [Disuguaglianza di Hoeffding]: Date $X_1, \dots, X_N$ v.a $: \forall i \quad X_i$ sub-gaussiana con parametro $c_i > 0$

$$\forall t > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\sum_i (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)}\right)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $Y = X_1 + \cdots + X_N$ sub-gaussiana con parametro $c = \sqrt{c_1^2 + \cdots + c_N^2}$

Dimostrazione. ...

Lemma: Data X v.a $: \mathbb{E}[X] = 0$

X L-limitata $\implies X$ sub-gaussiana con parametro L

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Data X v.a e $\nu, c > 0$

$$X \text{ sub-gamma con parametri } \nu, c \quad \text{se} \quad \forall \theta \in \left(0, \tfrac{1}{c}\right) \quad \mathbb{E}[\exp(\theta(X - \mathbb{E}[X])] \leq \exp\left(\frac{\theta^2\nu}{2(1 - c\theta)}\right)$$

Lemma: Data X v.a $: \mathbb{E}[X] = 0$

$$X, -X \text{ sub-gamma con parametri } \nu, c \implies \forall t > 0 \quad \mathbb{P}(|X| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\nu + ct)}\right)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Lemma: Date $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica, $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ e $Y = X^T AX - \mathrm{tr}(A)$

$Y, -Y$ sub-gamma con parametri $(\nu, c) = (2\|A\|_F, 2\|A\|_2)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: Date $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(|X^T AX - \mathrm{tr}(A)| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4\|A\|_F + 4\varepsilon\|A\|_2}\right)$$

Dimostrazione. ...

2 Risultati vari

2.1 Metodo delle potenze

Definizione: Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica semidefinita positiva $:$ $Spec(A) = \{\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$

$$MP_A(y_0) = \left\{ (y_k, \xi_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} y_k = Ay_{k-1} \\ \xi_k = \dfrac{y_k^T A y_k}{y_k^T y_k} \end{array} \right\}$$

Proprietà: $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n \; : \; y_0 \not\perp u_{\lambda_1} \quad \lim_{k\to+\infty} (y_k, \xi_k) = (u_{\lambda_1}, \lambda_1)$

Teorema: Dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica semidefinita positiva $:$ $Spec(A) = \{\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$ e $MP_A(y_0) = \{(y_k, \xi_k)\}$ metodo delle potenze

$$y_0 \sim \mathcal{N}(0, I_n) \qquad \mathbb{E}\left[\frac{|\lambda_1 - \xi_k|}{\lambda_1}\right] \leq \sqrt{\frac{(n-1)\pi}{2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$$

Dimostrazione.
... to do ...

□

3 Stime per la traccia di matrici

3.1 Stimatore di Girard - Hutchinson

Teorema: Dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e $X \in \mathbb{R}^n$ v.a.

$$\mathbb{E}[XX^T] = I_n \implies \mathbb{E}[X^T A X] = \mathrm{tr}(A)$$

Dimostrazione.

$$\mathbb{E}[X^T A X] = \mathbb{E}[\mathrm{tr}(X^T A X)] = \mathbb{E}[\mathrm{tr}(A X X^T)] = \mathrm{tr}(A\mathbb{E}[XX^T]) = \mathrm{tr}(A)$$

□

Definizione [Stimatore di Girard - Hutchinson]: Dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e $X^{(1)}, \ldots, X^{(N)} \in \mathbb{R}^n$ v.a. $:$ $\forall i \quad \mathbb{E}\left[X^{(i)} {X^{(i)}}^T\right] = I_n$

$$\mathrm{tr}_N(A) = \frac{1}{N} \sum_i {X^{(1)}}^T A X^{(i)}$$

Proprietà: $\mathbb{E}[\mathrm{tr}_N(A)] = \mathrm{tr}(A)$

Teorema: Dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

$$\mathrm{Var}\left(X^T A X\right) = 2\|A\|_F$$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Corollario: $\forall \varepsilon, \delta > 0 \quad \mathbb{P}\left(|\,\mathrm{tr}_N(A) - \mathrm{tr}(A)| \geq \varepsilon\right) \leq \delta \iff N \geq 2\|A\|_F \dfrac{1}{\varepsilon^2} \dfrac{1}{\delta}$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e $X \sim Rademacher(n)$

$$\mathrm{Var}\left(X^T A X\right) = 2\|A - diag(A)\|_F$$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Corollario: $\forall \varepsilon, \delta > 0 \quad \mathbb{P}\left(|\,\mathrm{tr}_N(A) - \mathrm{tr}(A)| \geq \varepsilon\right) \leq \delta \iff N \geq 8n^2\|A\|_F \dfrac{1}{\varepsilon^2} \log\left(\dfrac{2}{\delta}\right)$

Dimostrazione. ...