Introduction to Sphere - Valued Sobolev Maps

Ivan De Biasi

Indice

1 Prerequisiti

1.1 Distribuzioni

Notazione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} u \qquad \text{se} \quad \begin{cases} \exists K \subset \Omega \text{ compatto } : \forall n \quad \operatorname{supp} u_n \subseteq K \\ \forall \alpha \quad D^\alpha u_n \xrightarrow{\text{unif.}} D^\alpha u \end{cases}$$

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \mid T \text{ lin e cont.}\}$ spazio delle distribuzioni su Ω
Notazione: $\langle T, u \rangle = T(u)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T \qquad \text{se} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_n, u \rangle \longrightarrow \langle T, u \rangle$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \sup_n \langle T_n, u \rangle < +\infty \implies \exists \begin{cases} \{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\} \\ T \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} : T_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} T$$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \; : \; \langle T_f, u \rangle = \int_\Omega f(x) u(x) dx$$

Proprietà: $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\dfrac{\partial T}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \; : \; \left\langle \dfrac{\partial T}{\partial x_j}, u \right\rangle = \left\langle T, \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle$ derivata j-esima di T
- ∇T, $\operatorname{div} T$, ...

Proprietà: $\forall j \quad \dfrac{\partial T}{\partial x_j}, \nabla T, \operatorname{div} T, \ldots \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega) \text{ lineare e continuo}$$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$

- $\tilde{\rho} = \rho \circ \cdot_{-1}$
- $T * \rho : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \; : \; \langle T * \rho, u \rangle = \langle T, \tilde{\rho} u \rangle$

Proprietà: $T * \rho \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\forall j \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(T * \rho) = \frac{\partial T}{\partial x_j} * \rho = T * \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

Dimostrazione. ...

1.2 Spazi di Sobolev $W^{1,p}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $p \in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \exists g \in L^p\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \; : \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \right\}$$

Notazione: $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $g = \nabla u$

Proprietà: $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ norma su $W^{1,p}(\Omega)$: $\left(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$ spazio di Banach

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$, $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

- $u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u$ se $u_n, \nabla u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \nabla u$
- $u_n \overset{W^{1,p}(\Omega)}{\rightharpoonup} u$ se $u_n, \nabla u_n \overset{L^p(\Omega)}{\rightharpoonup} u, \nabla u$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$: $\exists C > 0$: $\forall n \quad \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$

- $p \in (1, +\infty) \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega)$: $u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \overset{L^p(\Omega)}{\rightharpoonup} u, \nabla u$
- $p = +\infty \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega)$: $u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u, \nabla u$

Dimostrazione. ...

Corollario: $p \in (1, +\infty) \implies u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$\forall p \in [1, +\infty] \quad W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

- $p \in [1, N) \implies \exists p^* = \dfrac{pN}{N-p}$: $\begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \\ \forall q < p* \qquad W^{1,p}(\Omega) \underset{\to}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \end{cases}$
- $p = N \implies \forall q < +\infty \quad W^{1,p}(\Omega) \underset{\to}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$
- $p > N \implies \exists \alpha_p = \dfrac{p-N}{p}$: $\begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha_p}(\Omega) \\ \forall \beta < \alpha_p \qquad W^{1,p}(\Omega) \underset{\to}{\hookrightarrow} C^{0,\beta}(\Omega) \end{cases}$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$\forall F \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R}) \quad F \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$: $\nabla(F \circ u) = F'(u)\nabla u$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$: $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$

Dimostrazione. ...

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $\psi \in L^p_{loc}(\Omega)$

$\mathrm{D}\,\psi \in L^p(\Omega) \implies \psi \in W^{1,p}(\Omega)$

Dimostrazione.

...to do...

□

Lemma [L^p Poincarè]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $F \in L^p\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$

$\forall i, j \quad \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \iff \exists \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$: $F = \nabla\varphi$

Dimostrazione.

...to do...

□

1.3 Funzioni BV

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \,\middle|\, \exists \mu \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \;:\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \varphi d\mu_i \right\}$$

Notazione: $\mu = Du$

Proprietà: $\|\cdot\|_{BV(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} + \|D\cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$ norma su $BV(\Omega)$: $\left(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)}\right)$ spazio di Banach

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u \in BV(\Omega) \quad \exists \{u_n\} \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \;:\; \begin{cases} u_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \qquad Du_n \xrightarrow{\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)} Du \\ \|Du_n\|_{\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|Du\|_{\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \end{cases}$$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$BV(\Omega)$ immerge come $W^{1,1}(\Omega)$

Dimostrazione. ...

Definizione: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k-rettificabile se $\exists \begin{cases} \Sigma_0 \subseteq \mathbb{R}^N \;:\; \mathcal{H}^k(\Sigma_0) = 0 \\ \{M_i \subseteq \mathbb{R}^N\} \; C^1 \; k\text{-sottovarietà} \end{cases} : \Sigma \subseteq \Sigma_0 \cup \bigcup_i M_i$

Teorema: Dato $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k-rettificabile

- $\mathcal{H}^k$-q.o. $\quad \exists T_x\Sigma$
- $\mathcal{H}^k$-q.o. $\quad \exists \Sigma_{x,r} = \dfrac{\Sigma - x}{r} \;:\; \forall R > 0 \quad \mathcal{H}^k \lfloor_{\Sigma_{x,r}} \xrightarrow{\mathcal{M}(B_R^N)} \mathcal{H}^k \lfloor_{T_x\Sigma}$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f : \Omega \to \mathbb{R}$

- $x \in \Omega$ p.to di Lebesgue per f se $\exists C \in \mathbb{R} \;:\; \lim_{r\to 0^+} \int_{B_r(x)} |f(y) - C| dy = 0$
- $S_f = \{x \in \Omega \mid x \text{ non p.to di Lebesgue per } f\}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in BV(\Omega)$

- S_u $(N-1)$-rettificabile
- $\exists \begin{cases} \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}\, u = \nabla u \mathcal{L}^N \\ \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor_{Su} \\ \mathrm{D}^{\mathrm{C}}\, u \ll \mathcal{H}^{N-1} \end{cases} : \begin{cases} \mathrm{D}\, u = \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}\, u + \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u + \mathrm{D}^{\mathrm{C}}\, u \\ \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u \perp \mathcal{L}^N \end{cases}$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $u \in BV(\Omega)$ e $F \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R})$

$$F \circ u \in BV(\Omega) \;:\; \begin{cases} \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}(F\circ u) = F'(u)\, \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}\, u \qquad \mathrm{D}^{\mathrm{C}}(F \circ u) = F'(u) D^C u \\ \mathrm{D}^{\mathrm{J}}(F \circ u) = (F(u^+) - F(u^-))\, \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor_{Su} = \dfrac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}\, \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, u \end{cases}$$

Dimostrazione. ...

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $\psi \in L^p_{loc}(\Omega)$

$\mathrm{D}\,\psi \in \mathcal{M}(\Omega) \implies \psi \in BV(\Omega)$

Dimostrazione.

...to do...

$\square$

Lemma [BV Poincarè]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $F \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$

$$\forall i, j \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \iff \exists \varphi \in BV(\Omega) \; : \; F = \mathrm{D}\,\varphi$$

Dimostrazione.

Analoga a L^p Poincarè.

□

1.4 Funzioni VMO

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$VMO(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \;\middle|\; \fint_{B_\varepsilon(x)} \fint_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(z)| dydz \xrightarrow{\varepsilon \to 0, \text{ unif in} x} 0 \right\}$$

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, M varietà chiusa, $u \in VMO(\Omega, M)$ e $\{\rho_\varepsilon\}$ famiglia di mollificatori stardand

$$d\left(u * \rho_\varepsilon, M\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0, \text{ unif in } \Omega} 0$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

1.5 Teoria geometrica della misura

Teorema [Formula di coarea]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e M varietà $:$ $\dim(M) < N$

$$\forall u \in C^\infty(\Omega, M) \qquad \int_\Omega |\nabla u| = \int_M \mathcal{H}^{N-m}\left(u^{-1}(y)\right) d\mathcal{H}^{N-m}(y)$$

Dimostrazione. ...

2 Funzioni a valori nelle sfere

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $m \in \mathbb{N}$

- $W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{S}^m\right) = \left\{ u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}\right) \;\middle|\; |u(x)| \overset{\Omega\text{-q.o.}}{=} 1 \right\}$
- $BV\left(\Omega, \mathbb{S}^m\right) = \left\{ u \in BV\left(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}\right) \;\middle|\; |u(x)| \overset{\Omega\text{-q.o.}}{=} 1 \right\}$

2.1 Lifting

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

$$\forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \quad e^{i\varphi} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$

$\varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \; : \; u = e^{i\varphi}$ lifting di u

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $u : \Omega \to \mathbb{S}^1$

$$u \in C^k\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right) \implies \exists \varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}) \; : \; \forall x \in \Omega \quad u(x) = e^{i\varphi(x)}$$

Dimostrazione.

Dato $\pi(t) = e^{it}$ il rivestimento universale di $\mathbb{S}^1$, poichè Ω è semplicemente connesso, si ha $\forall u \in C^0\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right) \quad \exists \varphi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) \; : \; u = \pi \circ \varphi$.

Inoltre poichè π è localmente invertibile con inversa C^∞ e u è locamente non-suriettiva si ha $\forall x_0 \in \Omega \qquad \varphi|_{B_r(x_0)} = \pi^{-1}|_{u(B_r(x_0))} \circ u|_{B_r(x_0)}$ ovvero $\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

□

Teorema: $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato non semplicemente connesso $:$ $\exists u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{S}^1)$ $:$ $\nexists \varphi \in C^0(\Omega)$ $:$ $u = e^{i\varphi}$

Dimostrazione.

Presi $\Omega = B_2 \setminus B_1 \subset \mathbb{R}^2$ e $u(x) = \frac{x}{|x|}$ per assurdo si avrebbe omotopia tra $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$ e una costante.

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$

$$\mathrm{j}\, u = u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1$$

Proprietà: $\forall u \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right) \ : \ \exists \varphi \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$ lifting di $u \qquad \mathrm{j}\, u = \nabla\varphi$

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \mathrm{j}\, u = \nabla u$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $V \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$

$$\mathrm{curl}(V) \in \mathbb{R}^{N\times N}_{\text{skew-sym}} \ : \ (\mathrm{curl}(V))_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Proprietà: $\forall u \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right) \ : \ \mathrm{j}\, u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \mathrm{curl}(\mathrm{j}\, u) = 0$

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ Lipschitz limitato, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ Lipschitz e $\mu = \nu_\gamma \mathcal{H}^1 \lfloor_\gamma$

$$\mathrm{curl}(\mu) \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \delta_{\gamma(b)} - \delta_{\gamma(a)}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,p}\left(\Omega, \mathbb{R}^2\right)$

$$\mathrm{J}\, u = \frac{1}{2}\mathrm{curl}(\mathrm{j}\, u) \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \mathbb{R}^{N\times N}_{\text{skew-sym}}\right) \text{ Jacobiano distribuzionale}$$

Proprietà: $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \mathrm{J}\, u = \det(\nabla u)$

Proprietà: $N = 2 \implies \forall \Psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) \quad \langle \mathrm{J}\, u, \Psi\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \mathrm{j}\, u, \nabla^\perp \Psi\right\rangle$

Proprietà: $N = 3 \implies \forall \Psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \langle \mathrm{J}\, u, \Psi\rangle = \langle \mathrm{j}\, u, \mathrm{curl}(\Psi)\rangle$

Lemma [1]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$

$$\forall j \quad u \perp \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Dimostrazione.

$$u \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right) \implies u_1^2 + u_2^2 = 1 \implies \forall j \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left[u_1^2 + u_2^2\right] = 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + 2u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} = 0$$

$$\implies \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \implies u \perp \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

□

Lemma [2]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{S}^1\right)$

$$\mathrm{j}\, u \equiv 0 \iff \nabla u \equiv 0 \iff u \text{ costante}$$

Dimostrazione.

$$\mathrm{j}\, u \equiv 0 \implies u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0 \implies u_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + u_1 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0 \overset{1}{\implies} u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} - u_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} = 0$$

□

Lemma [3]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \mathrm{j}(u \cdot v) = \mathrm{j}\, u + \mathrm{j}\, v$$

Dimostrazione.

$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad$ si ha $\quad u \cdot v = (u_1 v_1 - u_2 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1)$ da cui

$$\begin{aligned}\mathrm{j}(u \cdot v) &= \mathrm{j}(u_1 v_1 - u_2 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1) = (u_1 v_1 - u_2 v_2)\nabla(u_1 v_2 + u_2 v_1) - (u_1 v_2 + u_2 v_1)\nabla(u_1 v_1 - u_2 v_2) \\ &= \cdots = (u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1)(u_1^2 + u_2^2) + (v_1 \nabla v_2 - v_2 \nabla v_1)(v_1^2 + v_2^2) = \mathrm{j}\, u + \mathrm{j}\, v\end{aligned}$$

□

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

$p \geq 2 \implies \forall u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \mathrm{J}\, u \equiv 0$

Dimostrazione.

$$u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \overset{1}{\implies} \forall i, j \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \perp u \perp \frac{\partial u}{\partial x_j} \implies \frac{\partial u}{\partial x_i} /\!/ \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Poichè $p \geq 2$ vale $(\mathrm{J}\, u)_{ij} = \det \begin{pmatrix} \partial_i u_1 & \partial_i u_2 \\ \partial_j u_1 & \partial_j u_2 \end{pmatrix} = 0 \implies \mathrm{J}\, u \equiv 0$

□

Teorema [L^p lifting]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$\mathrm{J}\, u \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} 0 \implies \exists \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ u = e^{i\varphi}$

Dimostrazione.

.. to do...

□

Corollario: φ unica a meno di una costante in $2\pi\mathbb{Z}$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso, $p \in [1, +\infty]$ e $u : \Omega \to \mathbb{S}^1$

$u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \cap C^0(\Omega, \mathbb{S}^1) \implies \mathrm{J}\, u = 0$

Dimostrazione. ...

Teorema [BV lifting]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in BV(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$\exists \varphi \in BV(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ \begin{cases} u = e^{i\varphi} \\ \|\mathrm{D}\, \varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq 2 \|\mathrm{D}\, u\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \end{cases}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

2.2 Vortex map

Definizione: $\hat{u} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{S}^1 \\ x & \mapsto & \frac{x}{|x|} \end{array}$ vortex map

Teorema: $\hat{u} \in W^{1,p}\left(B_1, \mathbb{S}^1\right) \iff p \in [1, 2)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\mathrm{J}\, u = \pi \delta_0$

Dimostrazione.

... to do ...

□

2.3 Norme e problemi variazionali legati a $\mathrm{J}\,u$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

- $R_p(u) = \min \left\{ \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \;\middle|\; \{u_n\} \subseteq C^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{S}^1\right) \;:\; u_n \xrightarrow{q.o.} u \right\}$
- $L(u) = \min\left\{ \|\mathrm{D}\,\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \varphi \in BV(\Omega) \;:\; u = e^{i\varphi} \right\}$
- $L^{\mathrm{J}}(u) = \inf\left\{ \|\mathrm{D}^{\mathrm{J}}\,\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \varphi \in BV(\Omega) \;:\; u = e^{i\varphi} \right\}$
- $d_\nabla(\mathrm{j}\,u) = \inf\left\{ \|\mathrm{j}\,u - \nabla\varphi\|_{L^1(\Omega)} \mid \varphi \in W^{1,1}(\Omega) \right\} = \min\left\{ \|\mathrm{j}\,u - \mathrm{D}\,\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \varphi \in BV(\Omega) \right\}$
- $E_p(\mathrm{J}\,u) = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla v|^p \;\middle|\; v \in W^{1,p}(\Omega) \;:\; \mathrm{J}\,v = \mathrm{J}\,u \right\}$
- $E_{\mathcal{M}}(\mathrm{J}\,u) = \min\left\{ \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \mu \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \;:\; \frac{1}{2}\operatorname{curl}\mu = \mathrm{J}\,u \right\}$
- $\|\mathrm{J}\,u\|_* = \sup\left\{ \langle \mathrm{J}\,u, \psi\rangle \mid \psi \in C_c^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^{N\times N}_{\text{skew-sym}}\right) \;:\; \|\operatorname{curl}^*\psi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1 \right\}$

Proposizione: $d_\nabla(\mathrm{j}\,u) = E_1(\mathrm{j}\,u)$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Proposizione: $E_{\mathcal{M}}(\mathrm{J}\,u) = d_\nabla(\mathrm{j}\,u)$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Proposizione: $\|\mathrm{J}\,u\|_* = \frac{1}{2} d_\nabla(\mathrm{j}\,u)$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Proposizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

- $\forall u, v \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \|\mathrm{J}\,u - \mathrm{J}\,v\|_* \le \|\nabla u - \nabla v\|_{L^1(\Omega)}$
- $\forall p > 1 \quad \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \|\mathrm{J}\,u - \mathrm{J}\,v\|_* \le \frac{1}{2}\|u - v\|_{L^{p'}(\Omega)} \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \right)$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Corollario: .

- $\mathrm{J} : (W^{1,1}, \text{strong}) \to (\mathcal{D}', \|\cdot\|_*)$ continuo
- $\forall p > 1 \quad \mathrm{J} : (W^{1,p}, \text{weak}) \to (\mathcal{D}', \|\cdot\|_*)$ continuo

Dimostrazione. ...

Proposizione: $L(u) = R_1(\mathrm{j}\,u)$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Proposizione: $\forall p > 1 \quad R_p(u) = \begin{cases} \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} & \text{se } \mathrm{J}\,u = 0 \\ +\infty & \text{se } \mathrm{J}\,u \neq 0 \end{cases}$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso, $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $\varphi \in BV(\Omega) \;:\; u = e^{i\varphi}$
$\mathrm{D}\,\varphi - \mathrm{j}\,u \perp \mathrm{j}\,u$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Corollario: $|\mathrm{D}\,\varphi| = |\mathrm{D}\,\varphi - \mathrm{j}\,u| + |\nabla u|$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \qquad L(u) = \int_\Omega |\nabla u| + d_\nabla(\mathrm{j}\,u)$$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Corollario: $\forall \varphi \in BV(\Omega)$ lifting di u $\qquad \begin{cases} \mathrm{D}^{\mathrm{C}}\,\varphi = 0 \\ \varphi^+ - \varphi^- \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Dimostrazione. ...

Corollario: $L^{\mathrm{J}}(u) \geq d_\nabla(u)$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

2.4 Approssimazioni con mappe (più) lisce

Proposizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall p > 1 \qquad \overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{S}^1\right)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}} = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \mid \mathrm{J}\,u = 0\right\}$$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Corollario: $\forall p > 2 \quad \overline{C^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{S}^1\right)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}} = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

Dimostrazione. ...

Teorema [Schen-Uhlenbeck '83]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e M varietà chiusa

$$\forall p \geq N \quad C^\infty\left(\overline{\Omega}, M\right) \text{ denso in } W^{1,p}(\Omega, M)$$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Teorema [Bethuel-Zheng '88]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall p < m \quad C^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{S}^m\right) \text{ denso in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m)$$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\mathcal{R}^p = \mathcal{R}^p_m(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m) \;\middle|\; \exists \Sigma_u \subseteq \overline{\Omega}\ (N-m-1) \text{ sottovarietà } : \ u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \setminus \Sigma_u, \mathbb{S}^m\right)\right\}$$

Teorema [Bethuek-Zheng '88, Bethuel '91]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall p \in [m, m+1) \quad \mathcal{R}^p_m(\Omega) \text{ denso in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m)$$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Teorema [Bethuel '91]: Dati $B \subset \mathbb{R}^N$ palla, M varietà m-dimensionale e $p < N$

$C^\infty(B, M)$ denso in $W^{1,p}(B, M) \iff \pi_{\lfloor p \rfloor}(M) = 0$

Dimostrazione. ...

Teorema [Bethuel '91]: Date N varietà N-dimensionale e M varietà m-dimensionale

$\forall p \quad \left\{ u \in W^{1,p}(N, M) \;\middle|\; \exists \Sigma_u \subseteq \Omega \ (N - \lfloor p \rfloor - 1) \text{ sottovarietà } : \ u \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \setminus \Sigma_u, \mathbb{S}^m\right) \right\}$ denso in $W^{1,p}(N, M)$

Dimostrazione. ...

Teorema [Bethuel '91]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso, V spazio funzionale e $p \notin \mathbb{N}$

V debolmente denso in $W^{1,p}(\Omega, ?) \iff V$ fortemente denso in $W^{1,p}(\Omega, ?)$

Dimostrazione. ...

Teorema [_ ?]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$\forall m \quad C^\infty(\Omega, \mathbb{S}^m)$ debolmente denso in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m)$

Dimostrazione. ...

Teorema [Bethuel '20]: $C^\infty\left(B^4, \mathbb{S}^2\right)$ non debolemente denso in $W^{1,3}\left(B^4, \mathbb{S}^2\right)$

Dimostrazione. ...

Corollario: $\overline{C^\infty(B^4, \mathbb{S}^2)}^{\|\cdot\|_{W^{1,3}(B^4,\mathbb{S}^2)}} \subset \overline{C^\infty\left(B^4, \mathbb{S}^2\right)}^{W^{1,3}_{\text{weak}}\left(B^4,\mathbb{S}^2\right)} \subset W^{1,3}(B^4, \mathbb{S}^2)$

Dimostrazione. ...

2.5 Significato geometrico di $\mathrm{J}\, u$ in $2D$

Notazione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

Ω regolare se Ω aperto limitato Lipschitz semplicemente connesso

Definizione: Data $u \in C^0\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1\right)$

- $\varphi_u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \ : \ \forall t \in [0, 2\pi] \quad u\left(e^{it}\right) = e^{i\varphi(t)}$
- $\deg(u) = \dfrac{\varphi_u(2\pi) - \varphi_u(0)}{2\pi}$ grado di u

Lemma: Data $u \in W^{1,1}\left(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1\right)$

$$\deg(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) d\mathcal{H}^1(\theta)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare , $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Omega$ e $u \in C^\infty\left(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1\right) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$d_i(u) = \lim_{r \to 0^+} \deg\left(u|_{\partial B_r(a_i)}\right)$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare , $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \Omega$ e $u \in C^\infty\left(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1\right) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$\mathrm{J}\, u = \pi \sum_i d_i(u) \delta_{a_i}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \mathrm{J}\, u \in \overline{\left\{ \sum_{i \in I} d_i \delta_{x_i} \;\middle|\; \begin{array}{c} I \subset \mathbb{N} \text{ finito} \\ \{d_i\} \subset \mathbb{Z} \quad \{x_i\} \subset \Omega \end{array} \right\}}^{\|\cdot\|_*}$

Dimostrazione.

... to do ...

$\square$

Proposizione: Data $u \in W^{1,1}(B_1, \mathbb{S}^1)$

$$\mathrm{J}\, u \overset{\mathcal{D}'(B_1 \setminus \{0\})}{=} 0 \implies \exists d = \lim_{r \to 0^+} \deg\left(u|_{\partial B_r}\right) \in \mathbb{Z} \ : \ \mathrm{J}\, u = \pi d \delta_0$$

Dimostrazione.

... to do ...

$\square$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare , $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$, $u \in C^\infty\left(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1\right) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $d = (d_1(u), \dots, d_n(u))$

$$A(\Gamma, d) = \min \left\{ \sum_{i \in I} |P_i - N_i| \;\middle|\; \left\{ (P_i, N_i) \in \overline{\Omega} \ : \ \sum_i \delta_{P_i} - \delta_{N_i} \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \sum_j d_j(u) \delta_{a_j} \right\} \right\}$$

<u>Proprietà</u>: $A(\Gamma, d) = \min \left\{ \sum_{i \in I} length(\gamma_i) \;\middle|\; \left\{ \gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^2 \ : \ \sum_i \delta_{\gamma_i(b_i)} - \delta_{\gamma_i(a_i)} \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \sum_j d_j(u) \delta_{a_j} \right\} \right\}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare , $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$, $u \in C^\infty\left(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1\right) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $d = (d_1(u), \dots, d_n(u))$

$$\mathrm{J}\, u = \pi \sum_i d_i(u) \delta_{a_i} \implies E_1(\mathrm{J}\, u) = 2\pi A(\Gamma, d)$$

Dimostrazione.

... to do ...

$\square$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2)$

μ 1-rettificabile se $\exists K \subseteq \Omega$ 1-rettificabile e $\mu = \nu_K \mathcal{H}^1 \lfloor_K$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare , $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ 1-rettificabile

$$\exists u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \ : \ \mathrm{J}\, u = \pi \operatorname{curl} \mu \implies \exists \varphi \in BV(\Omega) \ : \ \begin{cases} u = e^{i\varphi} & \mathrm{D}^{\mathrm{ac}}\, \varphi = \mathrm{j}\, u \\ \mathrm{D}^{\mathrm{J}}\, \varphi = -2\pi\mu & \mathrm{D}^{\mathrm{C}}\, \varphi = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione.

... to do ...

$\square$

Corollario: φ unica a meno di $k \in 2\pi\mathbb{Z}$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare e $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

- $\mathcal{R}_u = \{\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ 1-rettificabile $\mid \pi \operatorname{curl} \varphi = \mathrm{J}\, u\}$
- $\mathcal{L}_u = {}^{\{\varphi \in BV(\Omega) \mid \varphi \text{ lifitng di } u\}}\!\big/_{2\pi\mathbb{Z}}$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \exists \iota : \mathcal{R}_u \to \mathcal{L}_u$ biiezione

Dimostrazione.

... to do ...

$\square$

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$$\mathcal{E}_\Omega = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{P_i} - \delta_{N_i} \;\middle|\; \begin{matrix} P_i, N_i \in \overline{\Omega} \\ \sum_{i \in \mathbb{N}} |P_i - N_i| < +\infty \end{matrix} \right\}$$

<u>Proprietà</u>: $\mathcal{E}_\Omega = \partial\{\text{correnti 1-rettificabili in } \Omega\} = \{\text{0-correnti piatte in } \Omega\}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare e $T \in \mathcal{E}_\Omega$

$$A_\Omega(T) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |P_i - N_i| \;\middle|\; \{P_i, N_i\} \subseteq \overline{\Omega}^2 \;:\; T = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{P_i} - \delta_{N_i} \right\}$$

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$\forall T \in \mathcal{E}_\Omega \quad \|T\|_* = A_\Omega(T)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$\overline{\mathcal{E}_\Omega}^{\|\cdot\|_*} = \mathcal{E}_\Omega$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

- $\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \mathrm{J}\, u \in \mathcal{E}_\Omega$
- $\forall T \in \mathcal{E}_\Omega \quad \exists u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \;:\; \mathrm{J}\, u = \pi T$

Dimostrazione.

... to do ...

□

2.6 Significato geometrico di $\mathrm{J}\, u$ in $3D$

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $\Gamma \subset \Omega$ 1-sottovarietà connessa

- $U_\varepsilon(\Gamma) \simeq \Gamma \times B_\varepsilon$ intorno tubolare di Γ
- $C_\Gamma(x, r) = C_r(x) = \{(x, y) \in U_\varepsilon(\Gamma) \mid |y| < r\}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in R_1^1(\Omega)$

$$\Sigma_u = \Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \implies \mathrm{J}\, u = \pi \sum_{i=1}^k \deg\left(u, C_{\Gamma_i}(x, r)\right) \tau_{\Gamma_i} \mathcal{H}^1 \lfloor_{\Gamma_i}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$\mathrm{J}\, u \neq 0 \implies \Omega \setminus \operatorname{supp} \mathrm{J}\, u$ non semplicemente connesso

Dimostrazione.

... to do ...

□

...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $\Gamma = \Gamma_1 \cap \cdots \cap \Gamma_k \subseteq \Omega$ 1-sottovarietà

$\forall i \;\; \exists \tilde{\Gamma}_i \subseteq \mathbb{R}^3$ curva chiusa $:\; \Gamma_i = \tilde{\Gamma}_i \cap \Omega \implies \forall d \in \mathbb{N}^k \quad \exists u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \cap C^\infty\left(\overline{\Omega} \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1\right) \;:\; \forall i \;\; \deg\left(u, \Gamma_i\right) = d_i$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\mathrm{J}\, u = \pi \sum_{i=1}^k d_i \tau_{\Gamma_i} \mathcal{H}^1 \lfloor_{\Gamma_i}$

Dimostrazione.
... to do ... $\square$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $\Gamma = d_1\Gamma_1 \cup \dots \cup d_k\Gamma_k \subseteq \Omega$ 1-sottovarietà
$$A(\Gamma) = A(\Gamma, d) = \inf\{d_1\mathcal{H}^2(\Sigma_1) + \dots + d_k\mathcal{H}^2(\Sigma_k) \mid \forall i \quad \Sigma_i \subseteq \Omega \text{ superficie lisca orientata } : \partial\Sigma_i = \Gamma_i\}$$

Lemma: Date $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie lisca orientata e $\mu = \nu_\Sigma \mathcal{H}^2 \lfloor_\Sigma$
$$\operatorname{curl}\mu = \tau_{\partial\Sigma}\mathcal{H}^1 \lfloor_{\partial\Sigma}$$

Dimostrazione.
... to do ... $\square$

Corollario: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare , $\Gamma \subseteq \Omega$ 1-sottovarietà e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$: $\operatorname{J} u = \pi\tau_\Gamma\mathcal{H}^1 \lfloor_\Gamma$
- $2\pi A(\Gamma) \geq E_{\mathcal{M}}(\operatorname{J} u)$
- $\|\operatorname{J} u\|_* \leq \pi A(\Gamma)$

Dimostrazione.
... to do ... $\square$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare , $\Gamma \subseteq \Omega$ 1-sottovarietà e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$
$$\operatorname{J} u = \pi\tau_\Gamma\mathcal{H}^1 \lfloor_\Gamma \implies E_1(\operatorname{J} u) = 2\pi A(\Gamma)$$

Dimostrazione.
... to do ... $\square$

2.7 Mappe a valori in $\mathbb{S}^2$

Notazione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$
Ω regolare se Ω aperto limitato Lipschitz contrattibile

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$
$$\operatorname{j} u = u_1(\nabla u_2 \wedge \nabla u_3) - u_2(\nabla u_1 \wedge \nabla u_3) + u_3(\nabla u_1 \wedge \nabla u_2)$$
Proprietà: $u \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \implies ju \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right) \cap L^\infty\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)$
$$\operatorname{J} u = \frac{1}{3}\operatorname{div}(\operatorname{j} u)$$
Proprietà: $\operatorname{J} u \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{S}^2\right)$
- $d_\nabla(\operatorname{j} u) = \inf\left\{\|ju - \operatorname{curl}\varphi\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^3)} \mid \varphi \in W^{1,1}\left(\Omega, \mathbb{R}^3\right)\right\}$
- $E_{\mathcal{M}}(\operatorname{J} u) = \min\left\{\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \frac{1}{3}\operatorname{div}\mu = \operatorname{J} u\right\}$
- $E_2(\operatorname{J} u) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2 \;\middle|\; v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2) \ : \ \operatorname{J} u = \operatorname{J} v\right\}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,2}\left(\Omega, \mathbb{S}^2\right)$
$$d_\nabla(\operatorname{j} u) = E_{\mathcal{M}}(\operatorname{J} u) = 3\|\operatorname{J} u\|_*$$

Dimostrazione. ...

Proposizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u : \Omega \to \mathbb{S}^2$
$$u \in W^{1,3}\left(\Omega, \mathbb{S}^2\right) \implies \operatorname{J} u = 0$$

Dimostrazione. ...

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$
$$\forall \theta \in C_c^\infty(B_1 \setminus \{0\}) \quad 3\det(\nabla(\theta u)) = \mathrm{j}\, u \cdot \nabla\left(\theta^3\right) + 3\theta^3 \det(\nabla u)$$

Dimostrazione. ...

2.7.1 Jacobiano per mappe con singolarità puntiformi

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto liimitato, $\Phi \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ e $y \in \mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$ valore regolare
$$\deg(\Phi, \Omega, y) = \sum_{x \in \Phi^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(\det \nabla\Phi(x))$$
Proprietà: $\deg(\Phi, \Omega, y)$ localmente costante rispetto a y

Proposizione: Dati $\Omega = B_1 \subseteq \mathbb{R}^N$, $\Phi \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$
$$\Phi(\partial\Omega) \subseteq \mathbb{S}^{N-1} \implies \forall y \in \Omega \quad \deg(\Phi, \Omega, y) = \deg\left(\Phi, \mathbb{S}^{N-1}\right)$$

Dimostrazione. ...

Proposizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$
$$\exists a_1, \ldots, a_k \in \Omega \ : \ u \in C^1\left(\Omega \setminus \{a_i\}, \mathbb{S}^2\right) \implies \exists r \ : \ \mathrm{J}\, u = \tfrac{4}{3}\pi \sum_i \deg\left(u, \partial B_r(a_i)\right) \delta_{a_i}$$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare , $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Omega$ e $d = (d_1, \ldots, d_k)$
$$A(\Gamma, d) = \inf\left\{ \sum_j |P_j - N_j| \;\middle|\; \{P_j, N_j\} \subseteq \overline{\Omega} \ : \ \sum_j \delta_{P_j} - \delta_{N_j} = \sum_i d_i \delta_{a_i} \right\}$$

Lemma: $\forall P, N \in \mathbb{R}^3 \quad \mu = 4\pi\tau_{[N,P]}\mathcal{H}^1 \lfloor_{[N,P]} \implies \frac{1}{3} \operatorname{div} \mu = \frac{4}{3}\pi\left(\delta_N - \delta_P\right)$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare , $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Omega$, $d = (d_1, \ldots, d_k)$ e $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$
$$\mathrm{J}\, u = \frac{4}{3}\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \implies d_{\nabla}(\mathrm{j}\, u) = E_{\mathcal{M}}(\mathrm{J}\, u) = 3\|\mathrm{J}\, u\|_* = 4\pi A(\Gamma, d)$$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare , $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Omega$, $d = (d_1, \ldots, d_k)$ e $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$
$$\mathrm{J}\, u = \frac{4}{3}\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \implies E_2(\mathrm{J}\, u) = 8\pi A(\Gamma, d)$$

Dimostrazione. ...

2.7.2 Jacobiano per mappe $W^{1,2}$ generiche

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare
$$\mathcal{E}_\Omega = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta_{P_j} - \delta_{N_j} \;\middle|\; \begin{array}{c} P_j, N_j \in \overline{\Omega} \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} |P_j - N_j| < +\infty \end{array} \right\}$$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare
$$\forall u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2) \quad \frac{3}{4\pi} \mathrm{J}\, u \in \mathcal{E}_\Omega$$

Dimostrazione. ...

2.7.3 Ulteriori risultati

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$

$$R_2(u) = \inf \left\{ \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \;\middle|\; \{u_n\} \subseteq C^\infty(\Omega, S^2) \;:\; u_n \xrightarrow{\text{a.e.}} u \right\}$$

Lemma: Dati $Q_l \subseteq \mathbb{R}^3$ cubo di lato l e $g \in Lip(\partial Q_l, \mathbb{S}^2) \;:\; \deg(g, \partial Q_l) = 0$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists u \in Lip\left(\overline{Q_l}, \mathbb{S}^2\right) \;:\; \begin{cases} u|_{\partial Q_l} = g \\ \|\nabla u\|_{L^2(Q_l)} \leq \frac{l}{2} \|g\|_{L^2(\partial Q_l)} + \delta \end{cases}$$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Teorema [Betuel '90]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare e $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$

$$\mathrm{J} = \tfrac{4}{3}\pi \sum_i d_i \delta_{a_i} \implies R_2(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + 8\pi A\left(\{a_i\}, (d_i)\right)$$

Dimostrazione.
... to do ...

□

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare

$$\mathcal{R}_\Omega = \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2) \;\middle|\; \exists \Gamma = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Gamma \;:\; \begin{cases} u \in C^\infty\left(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^2\right) \\ \exists r > 0 \;:\; \forall i \quad u|_{B_r(a_i)}(x) = \frac{x - a_i}{|x - a_i|} \end{cases} \right\}$$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ regolare
$\mathcal{R}_\Omega$ denso in $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$

Dimostrazione. ...

2.8 Mappe a valori in $\mathbb{S}^m$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \;:\; \Omega \simeq B_1$ e $u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m)$

- $\forall i \quad w_i(u) = du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_{m+1}$
- $\mathrm{j}\, u = \sum_i (-1)^{i+1} u_i w_i(u)$
- $\mathrm{J}\, u = \dfrac{1}{m+1} d(\mathrm{j}\, u)$

Proprietà: $\mathrm{j}\, u \in L^1\left(\Omega, \Lambda^m\right) \qquad \mathrm{J}\, u \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \Lambda^{m+1}\right)$

Proposizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \;:\; \Omega \simeq B_1$
$\forall u \in W^{1,m+1}(\Omega, \mathbb{S}^m) \quad \mathrm{J}\, u = 0$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \;:\; \Omega \simeq B_1$ e $u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m)$

$$^*\mathrm{J}\, u \quad \begin{array}{ccc} C_c^\infty\left(\Omega, \Lambda^{N-m-1}\right) & \to & \mathbb{R} \\ \psi & \mapsto & \langle {}^*\mathrm{J}\, u, \psi \rangle = (-1)^{\cdots} \int_\Omega \mathrm{j}\, u \wedge d\psi \end{array}$$

Proprietà: $^*\mathrm{J}\, u$ $(N - m - 1)$ - corrente

Definizione: Data $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$ sottovarietà

- $\tau_\Gamma^\perp$ $\dim(\Gamma)$ - forma unitaria che orienta Γ
- $S_r(\Gamma)$ r-sfera nel normale a Γ

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \;:\; \Omega \simeq B_1$

$$\forall u \in \mathcal{R}_m^p(\Omega) \quad \mathrm{J}\, u = \alpha_m \sum_{\Gamma_j \in \pi_0(\Sigma_u)} \deg\left(u, \mathbb{S}_r(\Gamma_j)\right) \left({}^*\tau_{\Gamma_j}^\perp \right) \mathcal{H}^{N-m-1} \llcorner_{\Gamma_j}$$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ \Omega \simeq B_1$

$\forall u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m) \quad {}^*\mathrm{J}\, u \in \partial\{(N-m)$ - correnti intere rettificabili di $\Omega\} \subset \{(N-m-1)$ - correnti piatte di $\Omega\}$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ \Omega \simeq B_1$ e $u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m)$

- $E_m(\mathrm{J}\, u) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^m \ \middle| \ v \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m) \ : \ \mathrm{J}\, v = \mathrm{J}\, u \right\}$
- $E_{\mathcal{M}}(\mathrm{J}\, u) = \inf \left\{ \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega, \Lambda^m)} \mid \mu \in \mathcal{M}(\Omega, \Lambda^m) \ : \ d\mu = \mathrm{J}\, u \right\}$
- $\| {}^*\mathrm{J}\, u\|_* = \sup \left\{ \langle {}^*\mathrm{J}\, u, \psi \rangle \mid \psi \in C_c^\infty \left(\Omega, \Lambda^{N-m-1}\right) \ : \ \|d\psi\|_\infty \leq 1 \right\}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ \Omega \simeq B_1$ e $u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m)$

- $\mathbb{F}({}^*\mathrm{J}\, u) = \inf \left\{ \alpha_m \mathbb{M}(\Sigma) \mid \Sigma \ (N-m)\text{-corrente} \ : \ \partial\Sigma = \frac{{}^*\mathrm{J}\, u}{\alpha_m} \right\}$
- $\mathbb{F}_I({}^*\mathrm{J}\, u) = \inf \left\{ \alpha_m \mathbb{M}(\Sigma) \mid \Sigma \ (N-m)\text{-corrente intera rettificabile} \ : \ \partial\Sigma = \frac{{}^*\mathrm{J}\, u}{\alpha_m} \right\}$

Proprietà: $\dim(\cdot) \in \{0, N-2, N-1\} \implies \mathbb{F}(\cdot) = \mathbb{F}_I(\cdot)$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \ : \ \Omega \simeq B_1$ e $u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m)$

- $\| {}^*\mathrm{J}\, u\|_* = E_{\mathcal{M}}(\mathrm{J}\, u) = \mathbb{F}({}^*\mathrm{J}\, u)$
- $E_m(\mathrm{J}\, u) = c_m \mathbb{F}_I({}^*\mathrm{J}\, u)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

2.8.1 Risultato di non densità per $p \geq m$

Teorema: Date $H : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ mappa di Hopf e $u_H = H\left(\frac{x}{|x|}\right) : B_1^4 \to \mathbb{S}^2$

- $\forall p < 4 \quad u_H \in W^{1,p}\left(B_1^4, \mathbb{S}^2\right) \ : \ \mathrm{J}\, u_H = 0$
- $\forall q \geq 3 \quad u_H \notin \overline{C^\infty\left(B_1^4, \mathbb{S}^2\right)}^{\|\cdot\|_{W^{1,q}}}$

Dimostrazione. ...

3 Problemi di minimo con condizioni al bordo

3.1 Spazi di Sobolev frazionari

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto Lipschitz, $s \in (0,1)$ e $p \geq 1$

- $[\,\cdot\,]_{s,p} = \left(\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|\cdot(y) - \cdot(x)|^p}{|y-x|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$
- $W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid [u]_{s,p}^p < +\infty \right\}$
- $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} + [\,\cdot\,]_{s,p} \right)^{\frac{1}{p}}$

Proprietà: $\left(W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}\right)$ spazio di Banach

Proposizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz

- $\forall p \geq 1 \quad \forall s \in (0,1) \quad Lip(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$
- $\forall p \geq 1 \quad \forall s_1, s_2 \in (0,1) \quad s_1 < s_2 \implies W^{s_2,p}(\Omega) \subseteq W^{s_1,p}(\Omega)$

Dimostrazione. ...

Teorema [BBM formula, '01]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto Lipschitz

$$\forall p \geq 1 \quad \exists K_{N,p} > 0 \ : \ \lim_{s\to 1^-} (1-s)[u]_{s,p} = \begin{cases} K_{N,p}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p & \text{se } p > 1 \text{ e } u \in W^{1,p}(\Omega) \\ K_{N,p}\|Du\|_{\mathcal{M}(\Omega)} & \text{se } p = 1 \text{ e } u \in BV(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. ...

Teorema [Ponse, '04]: BBM formula vale anche per $\Gamma\text{-}\lim$

Dimostrazione. ...

Teorema [Mazya - Shaposhikova, '02]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto Lipschitz

$$\forall p \geq 1 \quad \exists K'_{N,p} > 0 \ : \ \forall u \in \bigcup_{s>0} W^{s,p}(\Omega) \quad \lim_{s\to 0} s[u]_{s,p} = K'_{N,p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Dimostrazione. ...

3.2 Operatore di traccia

Teorema [Trace theorem]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto Lipschitz e $p \in [1, +\infty)$

- $\exists T : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ lineare limitato $:$ $\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega) \quad Tu = u|_{\partial\Omega}$
- $\exists C_p > 0 \ : \ \forall g \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \quad \exists v \in u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \ : \ \begin{cases} Tv = g \\ \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p[g]_{1-\frac{1}{p},p} \end{cases}$

Dimostrazione. ...

Teorema [Gagliardo - Niremberg inequality]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto Lipschitz

$$\forall p \quad \exists C_p > 0 \ : \ \forall u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \forall \theta \in (0,1) \quad [u]_{\frac{\theta}{p},p} \leq C_p \|Du\|^{\frac{1}{p}}_{\mathcal{M}(\Omega)} \|u\|^p_{L^\infty(\Omega)}$$

Dimostrazione. ...

Corollario: $p \in (1,2) \implies BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \hookrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$

Dimostrazione. ...

3.3 Problemi di Dirichlet

Notazione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$

Ω regolare se $\Omega \simeq B_1$ aperto liscio

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare e $g \in C^\infty(\partial\Omega)$

$$W^{1,p}_g(\Omega, \mathbb{S}^1) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid Tu = g\}$$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare e $g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$

- $W_p(g) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \ \middle| \ u \in W^{1,p}_g(\Omega, \mathbb{S}^1) \right\}$
- $J_p(g) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \ \middle| \ u \in W^{1,p}_g(\Omega, \mathbb{S}^1) \ : \ \mathrm{J}\, u = 0 \right\}$
- $C_p(g) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \ \middle| \ u \in W^{1,p}_g(\Omega, \mathbb{S}^1) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{S}^1) \right\}$

Proprietà: $\forall p \quad W_p(g) \leq J_p(g) \leq C_p(g)$

Teorema: Dati $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare e $g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$ $:$ $\deg(g) = 0$ se $N = 2$

$\forall p \geq 2 \quad \exists \overline{u} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ minimizzatore per $W_p(g)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\forall p \geq 2 \quad W_p(g) = J_p(g) = C_p(g)$

Dimostrazione. ...

Proposizione: Dati $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare e $g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$

- $\forall p \in (1,2) \quad \forall X = W, J \quad \exists u^X_{p,g}$ minimizzatore per $X_p(g)$
- $\forall p \in (1,2) \quad \exists u^C_{p,g}$ minimizzatore per $C_p(g)$ dato $\deg(g) = 0$ se $N = 2$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Proposizione: Dati $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare , $g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $p \in (1,2)$
$u^J_{p,g} = e^{i\varphi_J} \;:\; \varphi_j \in Sol\,(\Delta_p \varphi = 0)$

Dimostrazione. ...

Corollario: $u^J_{p,g} \in C^{1,\alpha}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

- u mappa p-armonica se $u \in Sol\,(\Delta_p u = |\nabla u|^p u)$
- u mappa p-armonica stazionaria se u p-armonica $:\; \forall \{\Phi_t\}_t \;:\; \Phi_0 = Id \quad \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u \circ \Phi_t|^p = 0$

Proposizione: Dati $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare , $g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $p \in (1,2)$
$u^W_{p,g}$ mappa p-armonica stazionaria

Dimostrazione. ...

Corollario: $\exists K \subset\subset \Omega$ compatto $:\; \mathcal{H}^{N-2}(K) < +\infty \;:\; u^W_{p,g} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \setminus K, \mathbb{S}^1)$

Dimostrazione. ...

Lemma: Dati $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare , $g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $p \in (1,2)$
$J_p(g) < C_p(g) \implies W_p(g) < J_p(g)$

Dimostrazione.
... to do ...

$\square$

Teorema [Gaps]: Dati $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ regolare e $p \in (1,2)$
$\exists g \in C^\infty(\partial\Omega, \mathbb{S}^1) \;:\; W_p(g) < J_p(g) < C_p(g) < +\infty$

Dimostrazione. ...