

Introduction to Sphere - Valued Sobolev Maps

Ivan De Biasi

Indice

1 Prerequisiti	2
1.1 Distribuzioni	2
1.2 Spazi di Sobolev $W^{1,p}$	2
1.3 Funzioni BV	4
1.4 Funzioni VMO	5
1.5 Teoria geometrica della misura	5
2 Funzioni a valori nelle sfere	5
2.1 Lifting	5
2.2 Vortex map	7
2.3 Norme e problemi variazionali legati a J_u	8
2.4 Approssimazioni con mappe (più) lisce	9
2.5 Significato geometrico di J_u in $2D$	10

1 Prerequisiti

1.1 Distribuzioni

Notazione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato
 $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ e $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} u \quad \text{se} \quad \begin{cases} \exists K \subset \Omega \text{ compatto : } \forall n \quad \text{supp } u_n \subseteq K \\ \forall \alpha \quad D^\alpha u_n \xrightarrow{\text{unif.}} D^\alpha u \end{cases}$$

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid T \text{ lin e cont.}\}$ spazio delle distribuzioni su Ω

Notazione: $\langle T, u \rangle = T(u)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$T_n \xrightarrow{*} T \quad \text{se} \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_n, u \rangle \longrightarrow \langle T, u \rangle$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{T_n\} \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \sup_n \langle T_n, u \rangle < +\infty \implies \exists \begin{cases} \{T_{n_k}\} \subseteq \{T_n\} \\ T \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} : T_{n_k} \xrightarrow{*} T$$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \langle T_f, u \rangle = \int_\Omega f(x)u(x)dx$$

Proprietà: $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\frac{\partial T}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, u \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle$ derivata j -esima di T
- $\nabla T, \operatorname{div} T, \dots$

Proprietà: $\forall j \quad \frac{\partial T}{\partial x_j}, \nabla T, \operatorname{div} T, \dots \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega) \text{ lineare e continuo}$$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$

- $\tilde{\rho} = \rho \circ \cdot^{-1}$
- $T * \rho : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \langle T * \rho, u \rangle = \langle T, \tilde{\rho}u \rangle$

Proprietà: $T * \rho \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\forall j \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(T * \rho) = \frac{\partial T}{\partial x_j} * \rho = T * \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$$

Dimostrazione. ...

1.2 Spazi di Sobolev $W^{1,p}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $p \in [1, +\infty]$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \exists g \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \right\}$$

Notazione: $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $g = \nabla u$

Proprietà: $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \cdot\|_{L^p(\Omega)}$ norma su $W^{1,p}(\Omega)$: $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})$ spazio di Banach

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$, $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{array}{ll} \bullet u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u & \text{se } u_n, \nabla u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \nabla u \\ \bullet u_n \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega)} u & \text{se } u_n, \nabla u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \nabla u \end{array}$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $\{u_n\} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$: $\exists C > 0$: $\forall n \quad \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$

- $p \in (1, +\infty) \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega) : u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u, \nabla u$
- $p = +\infty \implies \exists \{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}, u \in W^{1,p}(\Omega) : u_{n_k}, \nabla u_{n_k} \xrightarrow{*} u, \nabla u$

Dimostrazione. ...

Corollario: $p \in (1, +\infty) \implies u_{n_k} \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall p \in [1, +\infty] \quad W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

- $p \in [1, N) \implies \exists p^* = \frac{pN}{N-p} : \begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \\ \forall q < p^* \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \end{cases}$
- $p = N \implies \forall q < +\infty \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$
- $p > N \implies \exists \alpha_p = \frac{p-N}{p} : \begin{cases} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha_p}(\Omega) \\ \forall \beta < \alpha_p \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega) \end{cases}$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\forall F \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R}) \quad F \circ u \in W^{1,p}(\Omega) : \nabla(F \circ u) = F'(u) \nabla u$$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : \nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$$

Dimostrazione. ...

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $\psi \in L_{loc}^p(\Omega)$

$$D\psi \in L^p(\Omega) \implies \psi \in W^{1,p}(\Omega)$$

Dimostrazione.

...to do...

□

Lemma [L^p Poincarè]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $F \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$\forall i, j \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \stackrel{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \iff \exists \varphi \in W^{1,p}(\Omega) : F = \nabla \varphi$$

Dimostrazione.

...to do...

□

1.3 Funzioni BV

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \mid \exists \mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N) : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \varphi d\mu_i \right\}$$

Notazione: $\mu = Du$

Proprietà: $\|\cdot\|_{BV(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^1(\Omega)} + \|D\cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)}$ norma su $BV(\Omega)$: $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ spazio di Banach

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u \in BV(\Omega) \quad \exists \{u_n\} \subset C^\infty(\bar{\Omega}) : \begin{cases} u_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \\ \|Du_n\|_{\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)} \longrightarrow \|Du\|_{\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)} \end{cases}$$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$BV(\Omega)$ immerge come $W^{1,1}(\Omega)$

Dimostrazione. ...

Definizione: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k -rettificabile se $\exists \begin{cases} \Sigma_0 \subseteq \mathbb{R}^N : \mathcal{H}^k(\Sigma_0) = 0 \\ \{M_i \subseteq \mathbb{R}^N\} \text{ } C^1 \text{ } k\text{-sottovarietà} \end{cases} : \Sigma \subseteq \Sigma_0 \cup \bigcup_i M_i$

Teorema: Dato $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N$ k -rettificabile

- \mathcal{H}^k -q.o. $\exists T_x \Sigma$
- \mathcal{H}^k -q.o. $\exists \Sigma_{x,r} = \frac{\Sigma - x}{r} : \forall R > 0 \quad \mathcal{H}^k|_{\Sigma_{x,r}} \xrightarrow{\mathcal{M}(B_R^N)} \mathcal{H}^k|_{T_x \Sigma}$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

- $x \in \Omega$ p.to di Lebesgue per f se $\exists C \in \mathbb{R} : \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B_r(x)} |f(y) - C| dy = 0$
- $S_f = \{x \in \Omega \mid x \text{ non p.to di Lebesgue per } f\}$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in BV(\Omega)$

- S_u ($N-1$)-rettificabile
- $\exists \begin{cases} D^{ac} u = \nabla u \mathcal{L}^N \\ D^J u = (u^+ - u^-) \nu_u \mathcal{H}^{N-1}|_{S_u} \\ D^C u \ll \mathcal{H}^{N-1} \end{cases} : \begin{cases} D u = D^{ac} u + D^J u + D^C u \\ D^J u \perp \mathcal{L}^N \end{cases}$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $u \in BV(\Omega)$ e $F \in C^1(\mathbb{R}) \cap Lip(\mathbb{R})$

$$F \circ u \in BV(\Omega) : \begin{cases} D^{ac}(F \circ u) = F'(u) D^{ac} u & D^C(F \circ u) = F'(u) D^C u \\ D^J(F \circ u) = (F(u^+) - F(u^-)) \nu_u \mathcal{H}^{N-1}|_{S_u} = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-} D^J u \end{cases}$$

Dimostrazione. ...

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $\psi \in L_{loc}^p(\Omega)$

$D\psi \in \mathcal{M}(\Omega) \implies \psi \in BV(\Omega)$

Dimostrazione.

...to do...

□

Lemma [BV Poincarè]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $F \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$\forall i, j \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \stackrel{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \iff \exists \varphi \in BV(\Omega) : F = D\varphi$$

Dimostrazione.

Analoga a L^p Poincarè.

□

1.4 Funzioni VMO

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$VMO(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \mid \int_{B_\varepsilon(x)} \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y) - u(z)| dy dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \text{ unif in } x} 0 \right\}$$

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, M varietà chiusa, $u \in VMO(\Omega, M)$ e $\{\rho_\varepsilon\}$ famiglia di mollificatori standard

$$d(u * \rho_\varepsilon, M) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \text{ unif in } \Omega} 0$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

1.5 Teoria geometrica della misura

Teorema [Formula di Coarea]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e M varietà : $\dim(M) < N$

$$\forall u \in C^\infty(\Omega, M) \quad \int_{\Omega} |\nabla u| = \int_M \mathcal{H}^{N-m}(u^{-1}(y)) d\mathcal{H}^{N-m}(y)$$

Dimostrazione. ...

2 Funzioni a valori nelle sfere

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $m \in \mathbb{N}$

- $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}) \mid |u(x)| \stackrel{\Omega\text{-q.o.}}{=} 1 \right\}$
- $BV(\Omega, \mathbb{S}^m) = \left\{ u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^{m+1}) \mid |u(x)| \stackrel{\Omega\text{-q.o.}}{=} 1 \right\}$

2.1 Lifting

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

$$\forall \varphi \in u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) \quad e^{i\varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$\varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) : u = e^{i\varphi} \quad \text{lifting di } u$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$

$$u \in C^k(\Omega, \mathbb{S}^1) \implies \exists \varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}) : \forall x \in \Omega \quad u(x) = e^{i\varphi(x)}$$

Dimostrazione.

Dato $\pi(t) = e^{it}$ il rivestimento universale di \mathbb{S}^1 , poiché Ω è semplicemente connesso, si ha
 $\forall u \in C^0(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \exists \varphi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) : u = \pi \circ \varphi$.

Inoltre poiché π è localmente invertibile con inversa C^∞ e u è locamente non-suriettiva si ha
 $\forall x_0 \in \Omega \quad \varphi|_{B_r(x_0)} = \pi^{-1}|_{u(B_r(x_0))} \circ u|_{B_r(x_0)} \quad \text{ovvero} \quad \varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$.

□

Teorema: $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato non semplicemente connesso : $\exists u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{S}^1) : \nexists \varphi \in C^0(\Omega) : u = e^{i\varphi}$

Dimostrazione.

Presi $\Omega = B_2 \setminus B_1 \subset \mathbb{R}^2$ e $u(x) = \frac{x}{|x|}$ per assurdo si avrebbe omotopia tra $\text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ e una costante.

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$$\mathbf{j} u = u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1$$

Proprietà: $\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) : \exists \varphi \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ lifting di u $\mathbf{j} u = \nabla \varphi$

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \mathbf{j} u = \nabla u$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $V \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$\operatorname{curl}(V) \in \mathbb{R}_{\text{skew-sym}}^{N \times N} : (\operatorname{curl}(V))_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Proprietà: $\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2) : \mathbf{j} u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \operatorname{curl}(\mathbf{j} u) = 0$

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ Lipschitz limitato, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ Lipschitz e $\mu = \nu_\gamma \mathcal{H}^1 \llcorner \gamma$

$$\operatorname{curl}(\mu) \stackrel{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \delta_{\gamma(b)} - \delta_{\gamma(a)}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$$\mathbf{J} u = \frac{1}{2} \operatorname{curl}(\mathbf{j} u) \in \mathcal{D}'\left(\Omega, \mathbb{R}_{\text{skew-sym}}^{N \times N}\right) \text{ Jacobiano distribuzionale}$$

Proprietà: $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \mathbf{J} u = \det(\nabla u)$

Proprietà: $N = 2 \implies \forall \Psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}) \quad \langle \mathbf{J} u, \Psi \rangle = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{j} u, \nabla^\perp \Psi \rangle$

Proprietà: $N = 3 \implies \forall \Psi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \langle \mathbf{J} u, \Psi \rangle = \langle \mathbf{j} u, \operatorname{curl}(\Psi) \rangle$

Lemma [1]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$\forall j \quad u \perp \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) &\implies u_1^2 + u_2^2 = 1 \implies \forall j \quad \frac{\partial}{\partial x_j} [u_1^2 + u_2^2] = 2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + 2u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} = 0 \\ &\implies \left\langle u, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \implies u \perp \frac{\partial u}{\partial x_j} \end{aligned}$$

□

Lemma [2]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$\mathbf{j} u \equiv 0 \iff \nabla u \equiv 0 \iff u \text{ costante}$$

Dimostrazione.

$$\mathbf{j} u \equiv 0 \implies u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0 \implies u_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + u_1 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} = 0 \stackrel{1}{\implies} u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} - u_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} = 0$$

□

Lemma [3]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \mathbf{j}(u \cdot v) = \mathbf{j} u + \mathbf{j} v$$

Dimostrazione.

$$\forall u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \text{si ha} \quad u \cdot v = (u_1 v_1 - u_2 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1) \text{ da cui}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(u \cdot v) &= \mathbf{j}(u_1 v_1 - u_2 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1) = (u_1 v_1 - u_2 v_2) \nabla(u_1 v_2 + u_2 v_1) - (u_1 v_2 + u_2 v_1) \nabla(u_1 v_1 - u_2 v_2) \\ &= \dots = (u_1 \nabla u_2 - u_2 \nabla u_1)(u_1^2 + u_2^2) + (v_1 \nabla v_2 - v_2 \nabla v_1)(v_1^2 + v_2^2) = \mathbf{j} u + \mathbf{j} v \end{aligned}$$

□

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $p \in [1, +\infty]$

$$p \geq 2 \implies \forall u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad Ju \equiv 0$$

Dimostrazione.

$$u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \stackrel{1}{\implies} \forall i, j \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \perp u \perp \frac{\partial u}{\partial x_j} \implies \frac{\partial u}{\partial x_i} \parallel \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

$$\text{Poichè } p \geq 2 \text{ vale } (Ju)_{ij} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial_i u_1}{\partial_j u_1} & \frac{\partial_i u_2}{\partial_j u_2} \end{pmatrix} = 0 \implies Ju \equiv 0$$

□

Teorema [L^p lifting]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato, $p \in [1, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$Ju \stackrel{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} 0 \implies \exists \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}) : u = e^{i\varphi}$$

Dimostrazione.

... to do...

□

Corollario: φ unica a meno di una costante in $2\pi\mathbb{Z}$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso, $p \in [1, +\infty]$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$

$$u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \cap C^0(\Omega, \mathbb{S}^1) \implies Ju = 0$$

Dimostrazione. ...

Teorema [BV lifting]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato e $u \in BV(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$\exists \varphi \in BV(\Omega, \mathbb{R}) : \begin{cases} u = e^{i\varphi} \\ \|D\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq 2\|Du\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \end{cases}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

2.2 Vortex map

Definizione: $\hat{u} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ vortex map

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & \frac{x}{|x|} \end{array}$$

Teorema: $\hat{u} \in W^{1,p}(B_1, \mathbb{S}^1) \iff p \in [1, 2)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $Ju = \pi\delta_0$

Dimostrazione.

... to do ...

□

2.3 Norme e problemi variazionali legati a $J u$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

- $R_p(u) = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p \mid \{u_n\} \subseteq C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{S}^1) : u_n \xrightarrow{q.o.} u \right\}$
- $L(u) = \min \{ \|D\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \varphi \in BV(\Omega) : u = e^{i\varphi} \}$
- $L^J(u) = \inf \{ \|D^J \varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \varphi \in BV(\Omega) : u = e^{i\varphi} \}$
- $d_{\nabla}(j u) = \inf \{ \|j u - \nabla \varphi\|_{L^1(\Omega)} \mid \varphi \in W^{1,1}(\Omega) \} = \min \{ \|j u - D\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \varphi \in BV(\Omega) \}$
- $E_p(J u) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^p \mid v \in W^{1,p}(\Omega) : J v = J u \right\}$
- $E_{\mathcal{M}}(J u) = \min \{ \|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \mid \mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N) : \frac{1}{2} \operatorname{curl} \mu = J u \}$
- $\|J u\|_* = \sup \left\{ \langle J u, \psi \rangle \mid \psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{\text{skew-sym}}^{N \times N}) : \|\operatorname{curl} {}^*\psi\|_{L^\infty(\Omega)} = 1 \right\}$

Proposizione: $d_{\nabla}(j u) = E_1(j u)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: $E_{\mathcal{M}}(J u) = d_{\nabla}(j u)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: $\|J u\|_* = \frac{1}{2} d_{\nabla}(j u)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

- $\forall u, v \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \|J u - J v\|_* \leq \|\nabla u - \nabla v\|_{L^1(\Omega)}$
- $\forall p > 1 \quad \forall u, v \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \|J u - J v\|_* \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{L^{p'}(\Omega)} (\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)})$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: .

- $J : (W^{1,1}, \text{strong}) \rightarrow (\mathcal{D}', \|\cdot\|_*) \quad \text{continuo}$
- $\forall p > 1 \quad J : (W^{1,p}, \text{weak}) \rightarrow (\mathcal{D}', \|\cdot\|_*) \quad \text{continuo}$

Dimostrazione. ...

□

Proposizione: $L(u) = R_1(j u)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: $\forall p > 1 \quad R_p(u) = \begin{cases} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p & \text{se } J u = 0 \\ +\infty & \text{se } J u \neq 0 \end{cases}$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Lemma: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso, $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $\varphi \in BV(\Omega) : u = e^{i\varphi}$
 $D\varphi - j u \perp j u$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $|D\varphi| = |D\varphi - j u| + |\nabla u|$

Dimostrazione. ...

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad L(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| + d_{\nabla}(j u)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\forall \varphi \in BV(\Omega)$ lifting di u
$$\begin{cases} D^C \varphi = 0 \\ \varphi^+ - \varphi^- \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Dimostrazione. ...

Corollario: $L^J(u) \geq d_{\nabla}(u)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

2.4 Approssimazioni con mappe (più) lisce

Proposizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall p > 1 \quad \overline{C^{\infty}(\bar{\Omega}, \mathbb{S}^1)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}} = \{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) \mid J u = 0\}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\forall p > 2 \quad \overline{C^{\infty}(\bar{\Omega}, \mathbb{S}^1)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}} = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

Dimostrazione. ...

Teorema [Schen-Uhlenbeck '83]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso e M varietà chiusa
 $\forall p \geq N \quad C^{\infty}(\bar{\Omega}, M)$ denso in $W^{1,p}(\Omega, M)$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Teorema [Bethuel-Zheng '88]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall p < m \quad C^{\infty}(\bar{\Omega}, \mathbb{S}^m) \text{ denso in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\mathcal{R}^p = \mathcal{R}_m^p(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m) \mid \exists \Sigma_u \subseteq \Omega \ (N-m-1) \text{ sottovarietà : } u \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus \Sigma_u, \mathbb{S}^m) \right\}$$

Teorema [Bethuel-Zheng '88, Bethuel '91]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso

$$\forall p \in [m, m+1) \quad \mathcal{R}_m^p(\Omega) \text{ denso in } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^m)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Teorema [Bethuel '91]: Dati $B \subset \mathbb{R}^N$ palla, M varietà m -dimensionale e $p < N$
 $C^\infty(B, M)$ denso in $W^{1,p}(B, M) \iff \pi_{[p]}(M) = 0$

Dimostrazione. ...

Teorema [Bethuel '91]: Date N varietà N -dimensionale e M varietà m -dimensionale
 $\forall p \quad \left\{ u \in W^{1,p}(N, M) \mid \exists \Sigma_u \subseteq \Omega (N - |p| - 1) \text{ sottovarietà : } u \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Sigma_u, \mathbb{S}^m) \right\}$ denso in $W^{1,p}(N, M)$

Dimostrazione. ...

Teorema [Bethuel '91]: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso, V spazio funzionale e $p \notin \mathbb{N}$
 V debolmente denso in $W^{1,p}(\Omega, ?) \iff V$ fortemente denso in $W^{1,p}(\Omega, ?)$

Dimostrazione. ...

Teorema [?]: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lipschitz limitato semplicemente connesso
 $\forall m \quad C^\infty(\Omega, \mathbb{S}^m)$ debolmente denso in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{S}^m)$

Dimostrazione. ...

Teorema [Bethuel '20]: $C^\infty(B^4, \mathbb{S}^2)$ non debolemente denso in $W^{1,3}(B^4, \mathbb{S}^2)$

Dimostrazione. ...

Corollario: $\overline{C^\infty(B^4, \mathbb{S}^2)}^{\|\cdot\|_{W^{1,3}(B^4, \mathbb{S}^2)}} \subset \overline{C^\infty(B^4, \mathbb{S}^2)}^{W_{\text{weak}}^{1,3}(B^4, \mathbb{S}^2)} \subset W^{1,3}(B^4, \mathbb{S}^2)$

Dimostrazione. ...

2.5 Significato geometrico di Ju in 2D

Notazione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$
 Ω regolare se Ω aperto limitato Lipschitz semplicemente connesso

Definizione: Data $u \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$

- $\varphi_u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} : \forall t \in [0, 2\pi] \quad u(e^{it}) = e^{i\varphi_u(t)}$
- $\deg(u) = \frac{\varphi_u(2\pi) - \varphi_u(0)}{2\pi}$ grado di u

Lemma: Data $u \in W^{1,1}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$

$$\deg(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) d\mathcal{H}^1(\theta)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$ e $u \in C^\infty(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$d_i(u) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \deg(u|_{\partial B_r(a_i)})$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$ e $u \in C^\infty(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

$$Ju = \pi \sum_i d_i(u) \delta_{a_i}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: $\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad Ju \in \overline{\left\{ \sum_{i \in I} d_i \delta_{x_i} \mid \begin{array}{l} I \subset \mathbb{N} \text{ finito} \\ \{d_i\} \subset \mathbb{Z} \quad \{x_i\} \subset \Omega \end{array} \right\}}^{\|\cdot\|_*}$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: Dato $u \in W^{1,1}(B_1, \mathbb{S}^1)$

$$J u \stackrel{\mathcal{D}'(B_1 \setminus \{0\})}{=} 0 \implies \exists d = \lim_{r \rightarrow 0^+} \deg(u|_{\partial B_r}) \in \mathbb{Z} : J u = \pi d \delta_0$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$, $u \in C^\infty(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $d = (d_1(u), \dots, d_n(u))$

$$A(\Gamma, d) = \min \left\{ \sum_{i \in I} |P_i - N_i| \mid \{(P_i, N_i) \in \bar{\Omega} : \sum_i \delta_{P_i} - \delta_{N_i} \stackrel{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \sum_j d_j(u) \delta_{a_j}\} \right\}$$

$$\text{Proprietà: } A(\Gamma, d) = \min \left\{ \sum_{i \in I} \text{length}(\gamma_i) \mid \{\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \sum_i \delta_{\gamma_i(b_i)} - \delta_{\gamma_i(a_i)} \stackrel{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} \sum_j d_j(u) \delta_{a_j}\} \right\}$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$, $u \in C^\infty(\Omega \setminus \Gamma, \mathbb{S}^1) \cap W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ e $d = (d_1(u), \dots, d_n(u))$

$$J u = \pi \sum_i d_i(u) \delta_{a_i} \implies E_1(J u) = 2\pi A(\Gamma, d)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$$\mu \text{ 1-rettificabile} \quad \text{se} \quad \exists K \subseteq \Omega \text{ 1-rettificabile e } \mu = \nu_K \mathcal{H}^1|_K$$

Teorema: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ 1-rettificabile

$$\exists u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) : J u = \pi \operatorname{curl} \mu \implies \exists \varphi \in BV(\Omega) : \begin{cases} u = e^{i\varphi} & D^{ac} \varphi = j u \\ D^J \varphi = -2\pi \mu & D^C \varphi = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Corollario: φ unica a meno di $k \in 2\pi\mathbb{Z}$

Dimostrazione. ...

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolari $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1)$

- $\mathcal{R}_u = \{\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ 1-rettificabile} \mid \pi \operatorname{curl} \varphi = J u\}$
- $\mathcal{L}_u = \{\varphi \in BV(\Omega) \mid \varphi \text{ lifting di } u\} /_{2\pi\mathbb{Z}}$

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$$\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad \exists \iota : \mathcal{R}_u \rightarrow \mathcal{L}_u \text{ biiezione}$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Definizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$$\mathcal{E}_\Omega = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{P_i} - \delta_{N_i} \mid \sum_{i \in \mathbb{N}} |P_i - N_i| < +\infty \right\}$$

Proprietà: $\mathcal{E}_\Omega = \partial\{\text{correnti 1-rettificabili in } \Omega\} = \{\text{0-correnti piatte in } \Omega\}$

Definizione: Dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolaree $T \in \mathcal{E}_\Omega$

$$A_\Omega(T) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |P_i - N_i| \mid \{P_i, N_i\} \subseteq \overline{\Omega}^2 : T = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{P_i} - \delta_{N_i} \right\}$$

Lemma: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$$\forall T \in \mathcal{E}_\Omega \quad \|T\|_* = A_\Omega(T)$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Proposizione: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

$$\overline{\mathcal{E}_\Omega}^{\|\cdot\|_*} = \mathcal{E}_\Omega$$

Dimostrazione.

... to do ...

□

Teorema: Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare

- $\forall u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) \quad Ju \in \mathcal{E}_\Omega$
- $\forall T \in \mathcal{E}_\Omega \quad \exists u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{S}^1) : Ju = \pi T$

Dimostrazione.

... to do ...

□