a) $T(n) = \begin{cases} 1 & khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 & khi\ n > 0 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1) + 7]x^n + T(0)$

$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1$ (*)

Xét $2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1} = 2xf(x)$

Xét $7\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 7(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - x^0)$ mà $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$\rightarrow 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 7(\frac{1}{1-x} - 1)$

Thay vào (*), ta có:

$f(x) = 2x[f(x) - 1] + 7\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) + 1$

$f(x) = 2xf(x) - 2x + \frac{7}{1-x} - 6 \rightarrow (1-2x)f(x) = \frac{6x+1}{1-x}$

$f(x) = \frac{6x+1}{(1-x)(1-2x)}$ $\rightarrow f(x) = \frac{-7}{1-x} + \frac{8}{1-2x}$

$f(x) = -7\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$ -

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+3} - 7)x^n \rightarrow T(n) = 2^{n+3} - 7$

b) $T(n) = \begin{cases} 1 & khi\ n = 0 \\ 2 & khi\ n = 1 \\ 7T(n-1) - 12T(n-2) & khi\ n \geq 2 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}[7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + xT(1) + T(0)$

$f(x) = 7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n + 2x + 1$
(*)

Xét $7\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\,x^n = 7x\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)\,x^{n-1}$

$$= 7x(f(x) - 1)$$

Xét $12\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)\,x^n = 12x^2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)\,x^{n-2}$

$$= 12x^2 f(x)$$

Thay vào (*):

$f(x) = 7x(f(x) - 1) - 12x^2 f(x) + 2x + 1$

$(1 - 7x + 12x^2)f(x) = -5x + 1$

$f(x) = \frac{-5x+1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x}$

$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2.3^n - 4^n)(x^n) \rightarrow T(n) = 2.3^n - 4^n$

c) $T(n+1) = T(n) + 2(n+2)\ khi\ n \geq 1$

Thay n=n-1, ta có: $T(n) = T(n-1) + 2(n+1)$

$$T(n) = \begin{cases} 3\ khi\ n = 0 \\ T(n-1) + 2(n+1)\ khi\ n \geq 1 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[T(n-1) + 2(n+1)]x^n + T(0)$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1)x^n + 3$ (*)

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = xf(x)$

Xét $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$

Thay vào (*):

$f(x) = xf(x) + 2(\frac{1}{(1-x)^2} - 1) + 3 \rightarrow (1-x)f(x) = \frac{2}{(1-x)^2} + 1$

$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}$ (**)

Xét $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

$[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n]' = [\frac{1}{(1-x)^2}]'$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)n.x^{n-1} = -\frac{-2(1-x)}{(1-x)^4}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)n.x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Thay n=n+1, ta có: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1).x^{n} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Thay vào (**) :

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1).x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)+1]x^{n}$

$T(n) = (n+2)(n+1)+1 = n^2+3n+3$

a)