

$$a) T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n = 0 \\ 2 & \text{khi } n = 1 \\ 4T(n-1) - 3T(n-2) & \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

Xét phương trình : $T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có : $X^n - 4X^{n-1} + 3X^{n-2} = 0$ (Rút X^{n-2})

Phương trình đặc trưng:

$$X^2 - 4X + 3 = 0 (*) \rightarrow (X - 3)(X - 1) = 0$$

Có 2 nghiệm đơn $X_1 = 3$ và $X_2 = 1$

$$T(n) = 3^n C_1 + 1^n C_2$$

$$\text{Ta có : } T(0) = 1 \rightarrow C_1 + C_2 = 1$$

$$T(1) = 2 \rightarrow 3C_1 + C_2 = 2$$

Giải hệ phương trình ta có: $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

$$\text{Kết luận: } T(n) = \frac{1}{2}(3^n + 1)$$

$$b) T(n) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 0 \\ 1 & \text{khi } n = 1 \\ 2 & \text{khi } n = 2 \\ 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3) & \text{khi } n > 2 \end{cases}$$

Xét phương trình: $T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0$

Đặt $X^n = T(n)$

Ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 5X^{n-2} - 2X^{n-3} = 0$ (Rút X^{n-3})

Phương trình đặc trưng:

$$X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = 0 \rightarrow (X - 2)(X - 1)^2 = 0$$

Có 1 nghiệm đơn $X_1 = 2$ và 1 nghiệm kép $X_2 = 1$

$$T(n) = C_1 2^n + C_2 1^n + C_3 n 1^n$$

$$\text{Ta có: } T(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$T(1) = 1 \rightarrow 2C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$T(2) = 2 \rightarrow 2^2 C_1 + C_2 + 2C_3 = 2$$

Giải hệ phương trình ta có: $C_1 = C_2 = 0, C_3 = 1$

$$T(n) = n$$

$$\text{c) } T(n) = \begin{cases} 1 & \text{khi } n < 2 \\ T(n-1) + T(n-2) & \text{khi } n \geq 2 \end{cases}$$

Xét phương trình: $T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$

$$\text{Đặt } X^n = T(n)$$

$$\text{Ta có: } X^n - X^{n-1} - X^{n-2} = 0 \quad (\text{Rút } X^{n-2})$$

Phương trình đặc trưng:

$$X^2 - X - 1 = 0 \rightarrow \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Có 2 nghiệm đơn: $X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$T(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ta có: $T(0) = 1 \rightarrow C_1 + C_2 = 1$

$$T(1) = 1 \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 1$$

Giải hệ phương trình: $C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

Kết luận:

$$T(n) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$