



ÁREA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS Y  
AUTOMÁTICA  
UNIVERSIDAD MIGUEL HERNÁNDEZ DE ELCHE  
Arturo Gil Aparicio

# ROBÓTICA

TEMA 8: Cinemática de robots paralelos.

# Índice

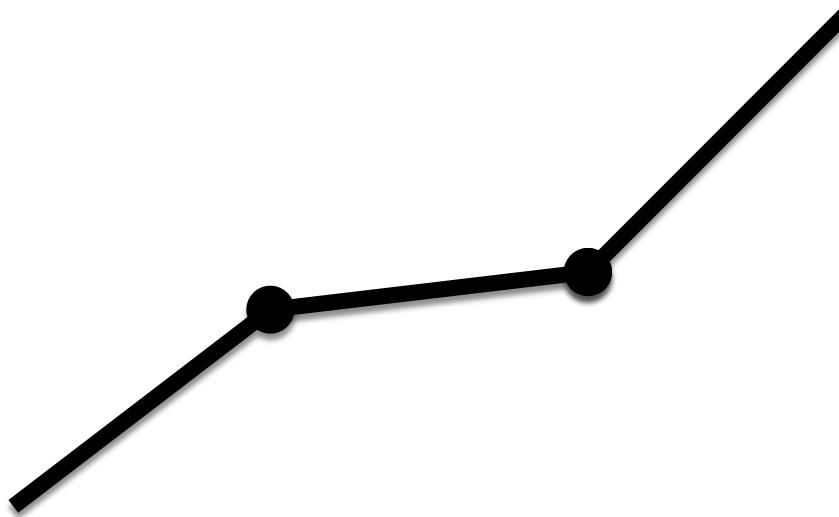
- 8.1 Introducción a los robots paralelos
- 8.2 Criterio de Grübler
- 8.3 Cinemática
  - 8.3.1 Cinemática inversa
  - 8.3.2 Cinemática directa
- 8.4 Estructuras clásicas
  - Robot 5R
  - Robot 3RRR
  - Robot Delta

# Índice

- 8.1 Introducción a los robots paralelos
- 8.2 Criterio de Grübler
- 8.3 Cinemática
  - 8.3.1 Cinemática inversa
  - 8.3.2 Cinemática directa
- 8.4 Estructuras clásicas
  - Robot 5R
  - Robot 3RRR
  - Robot Delta

# Robots paralelos: definición

- Comenzamos con la definición de un robot paralelo.
- A partir de lo que conocemos... un robot serie.
- Por ejemplo:

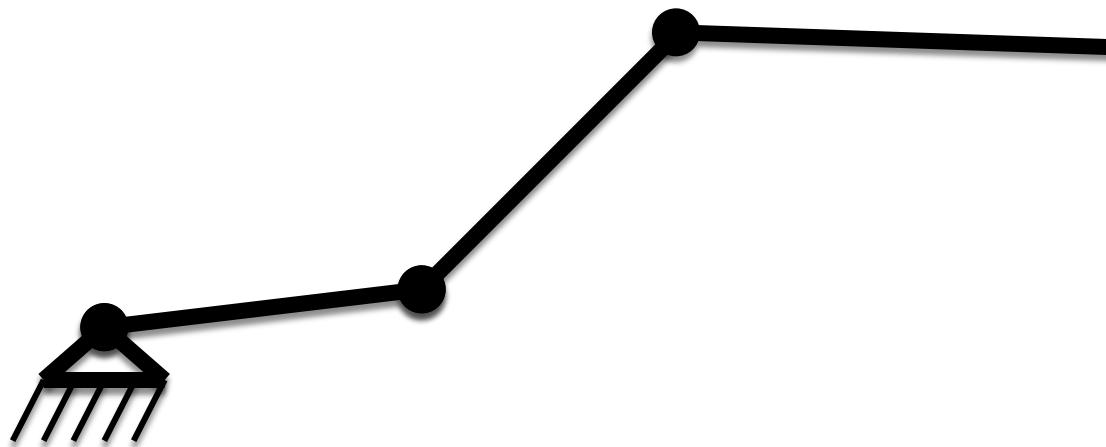


# Robots paralelos: definición

- Hablamos de cadena cinemática:
  - Conjunto de sólidos rígidos unidos mediante articulaciones (eslabones).
  - Cada articulación va a permitir un movimiento relativo entre los eslabones.
- Distinguimos diferentes tipos de articulaciones:
  - Esférica: Si permite tres giros y restringe 3 translaciones.
  - Prismática: Si permite una translación y restringe el resto.
  - Rotacional: Permite una única rotación relativa entre dos eslabones.

# Robots paralelos: definición

- Uno de los eslabones está unido a tierra:

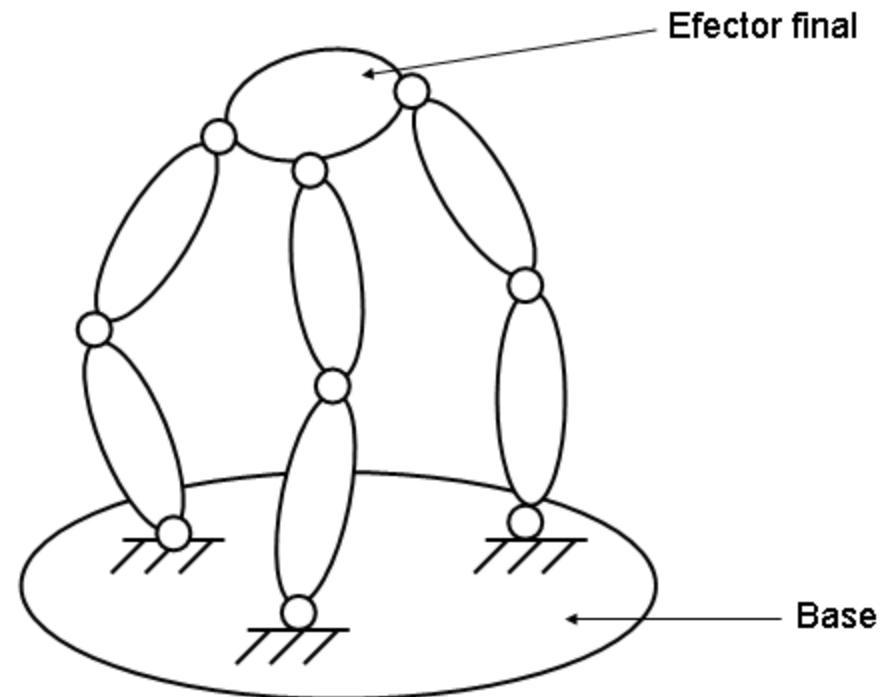
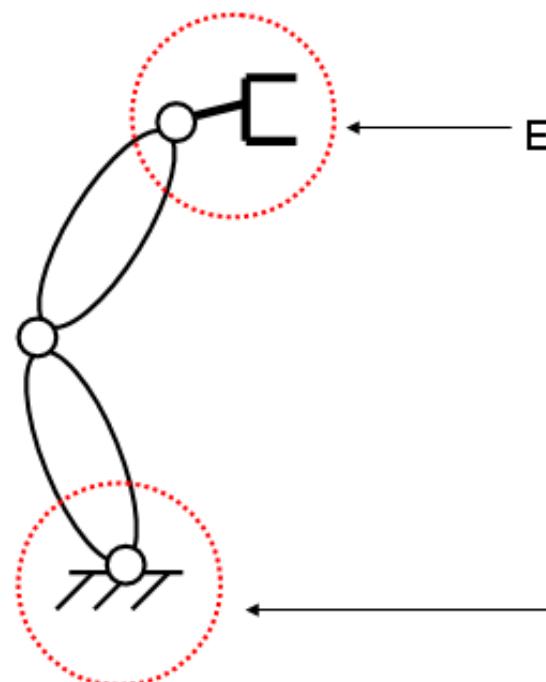


# Robots paralelos: definición

- FINALMENTE definimos robot paralelo como aquél en el que el extremo efector está unido a la base por más de una cadena cinemática.
- O bien, será un robot paralelo si tiene, al menos, una cadena cinemática cerrada.

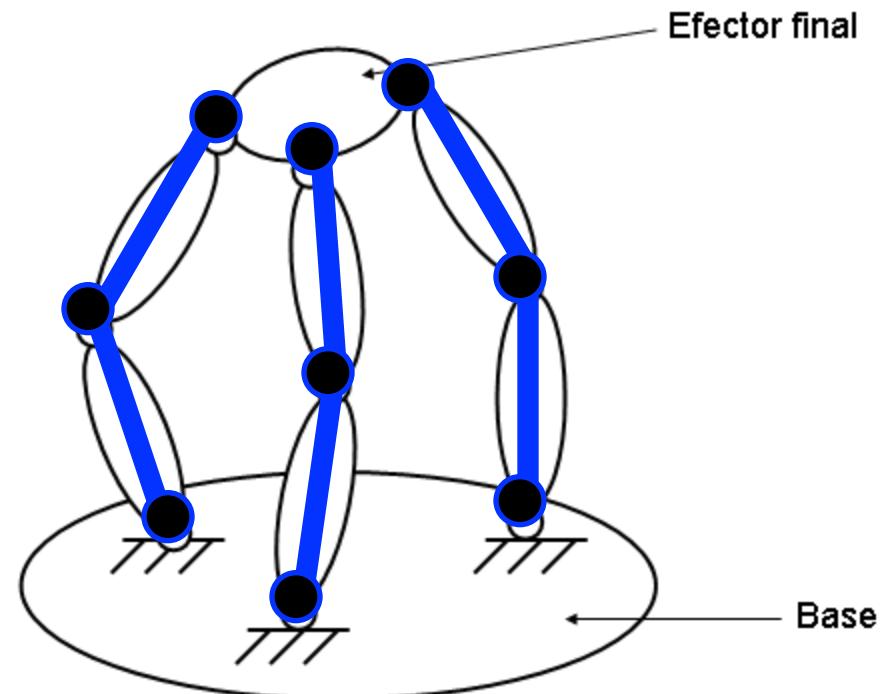
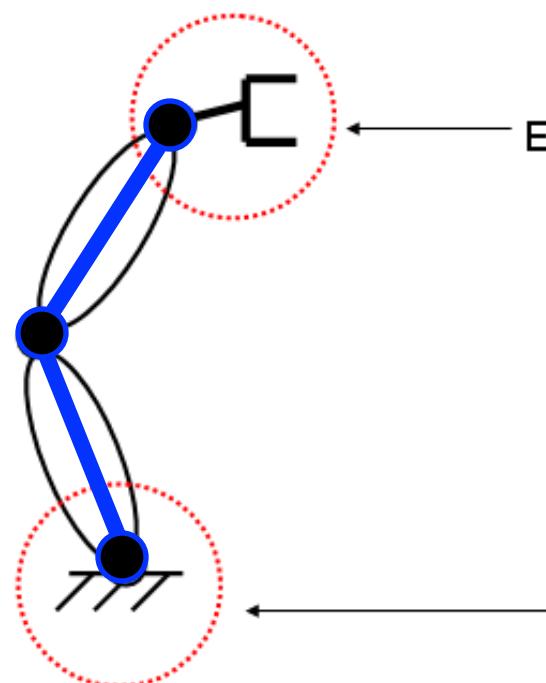
# Robots paralelos

## □ Robots serie



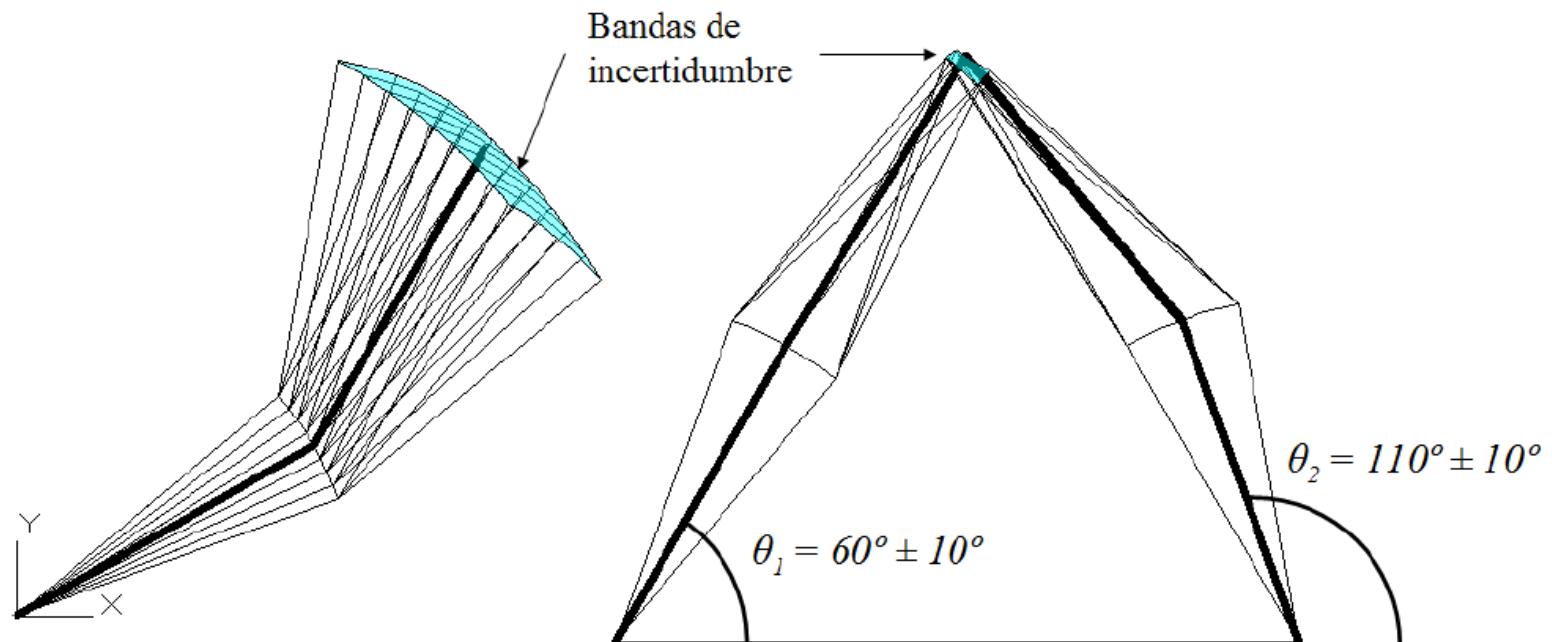
# Robots paralelos

## □ Robots serie



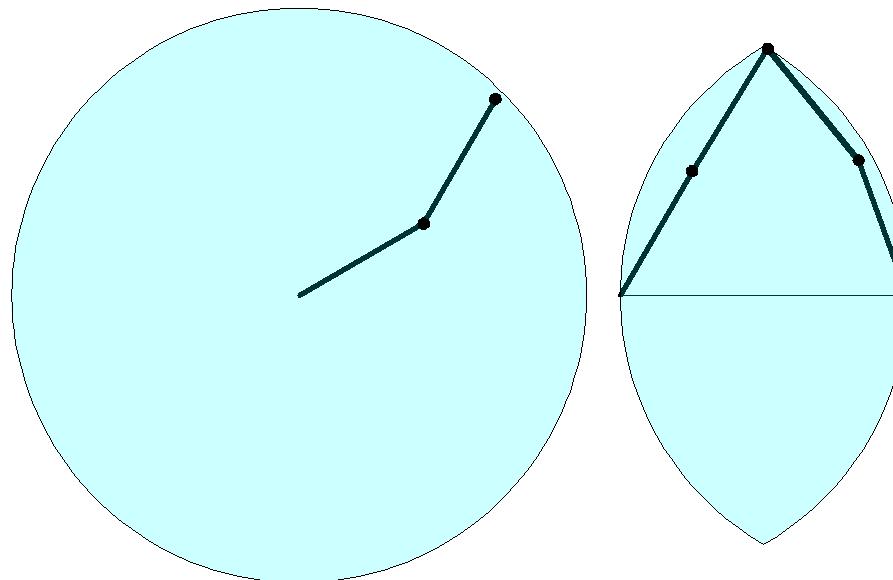
# Robots paralelos vs. Robots serie

- Mayor velocidad de operación
- Mayor precisión



# Robots paralelos vs. Robots serie

- Inconvenientes
  - Espacio de trabajo reducido



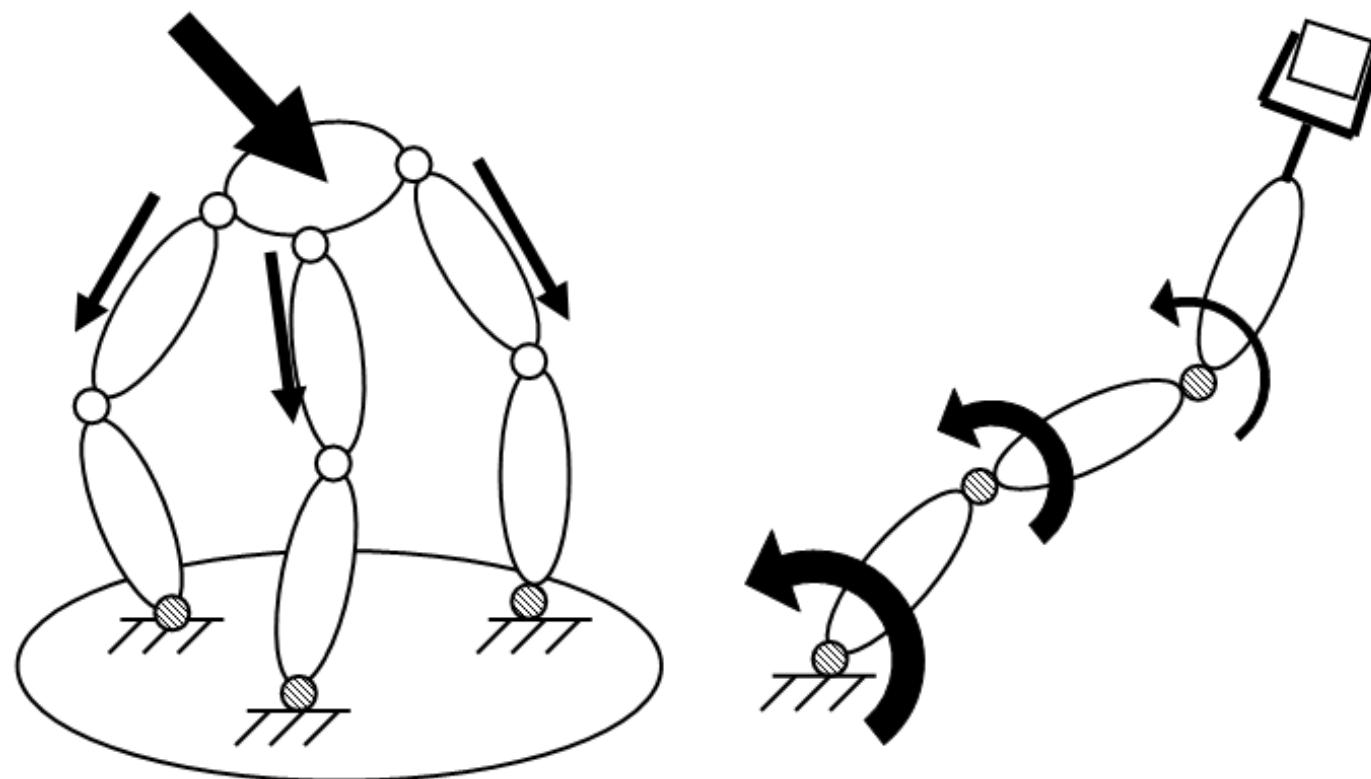
- Inconvenientes
  - Configuraciones singulares
  - Mayor complejidad matemática
  - No formulación general de modelo dinámico

# Robots paralelos vs. Robots serie

- Aparecen configuraciones singulares:
  - Por ejemplo, configuraciones del mecanismo en las que se pierde un grado de libertad.
  - O bien, configuraciones en las que no se puede predecir su movimiento.

# Robots paralelos vs. Robots serie

- Mayor capacidad de carga



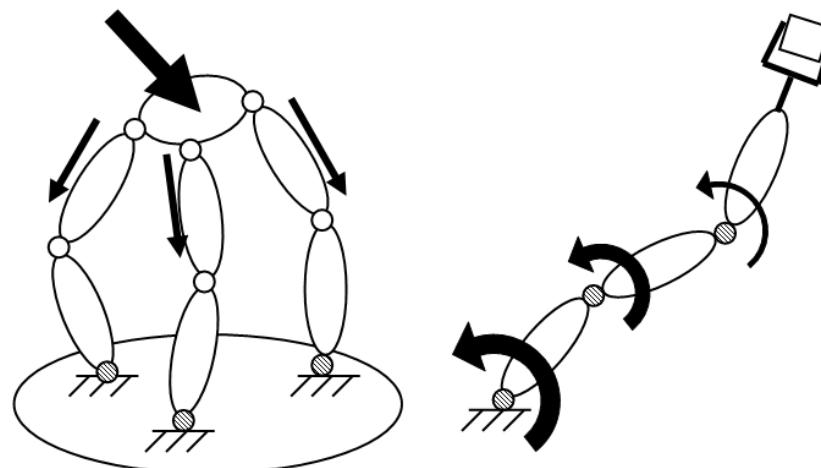
# Robots paralelos vs. Robots serie

- Capacidad de carga específica:
  - Máxima carga que puede transportar el robot en función de su peso.
  - Relación con la dinámica del robot manipulador.
  - Ratio: carga/peso del conjunto
  - En un robot serie no suele superar el 30%.
  - Ejemplo KR 1000 → 1000kg/4950kg

Modelo	CCE*	Modelo	CCE*
KR 30-3 (M)	0,045	KR 240 R2500 PRIME (P)	0,218
KR 40 PA (M)	0,057	KR 300 R2500 ULTRA (P)	0,278
KR 30-3 F (M)	0,035	KR 1000 L750 TITAN (MP)	0,158
KR 90 R2700 PRO (P)	0,085	KR 500-3 F (MP)	0,211
KR 120 R2900 EXTRA (P)	0,111	KR 1000 1300 TITAN PA (MP)	0,277

# Robots paralelos vs. Robots serie

- En el caso de un robot paralelo, la carga en el efecto final se reparte entre cadenas cinemáticas diferentes, dando lugar.
- En el caso de un robot serie el peso de los eslabones, por ejemplo, el peso de los eslabones alejados de la base aplica fuerzas y pares considerables a los actuadores de la base.

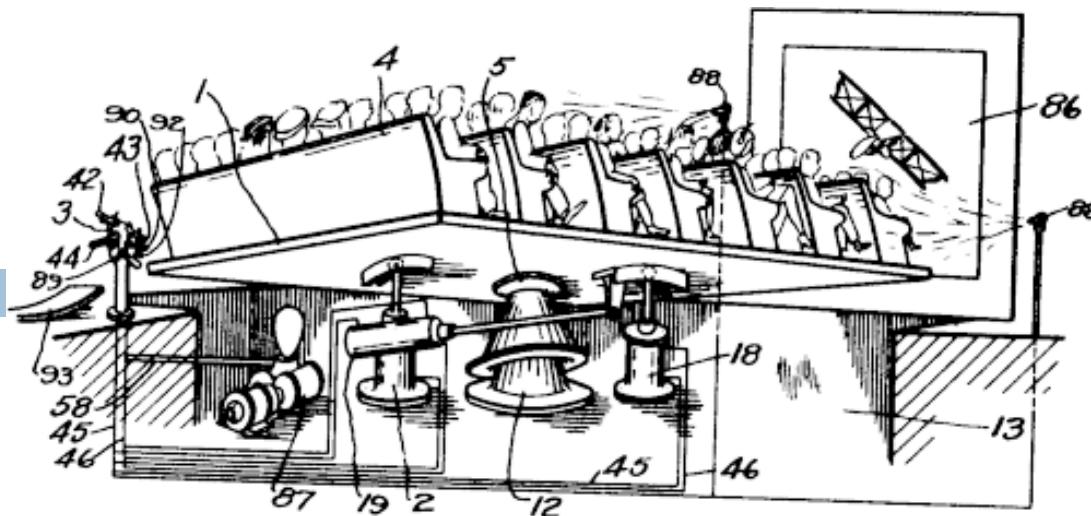
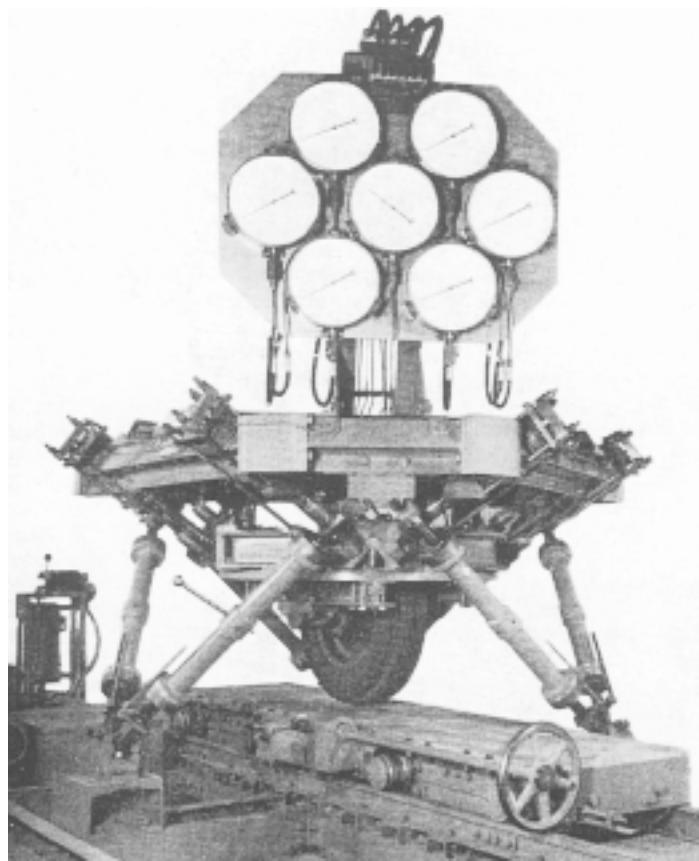
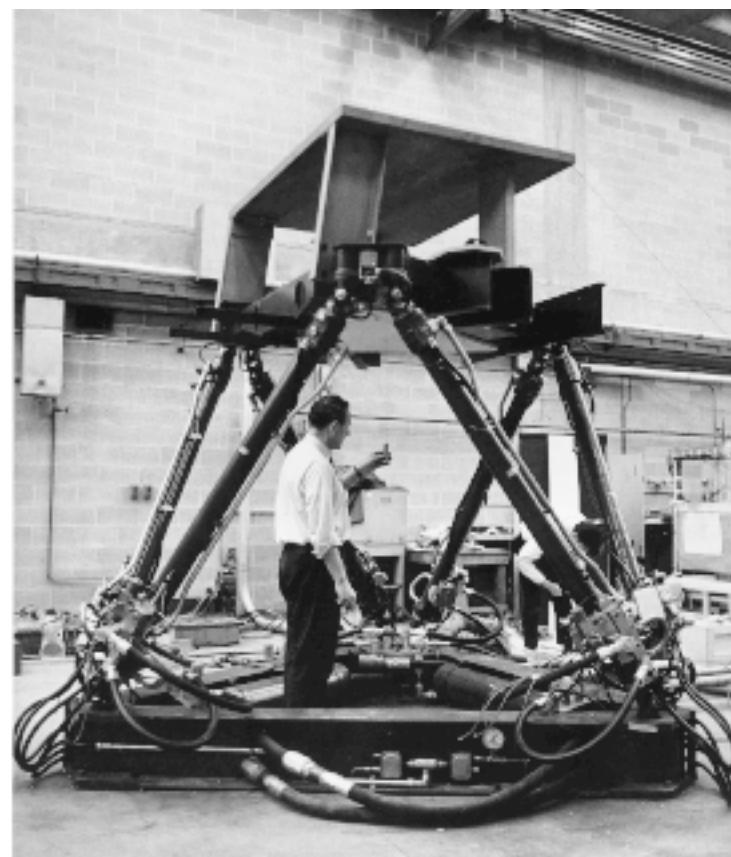


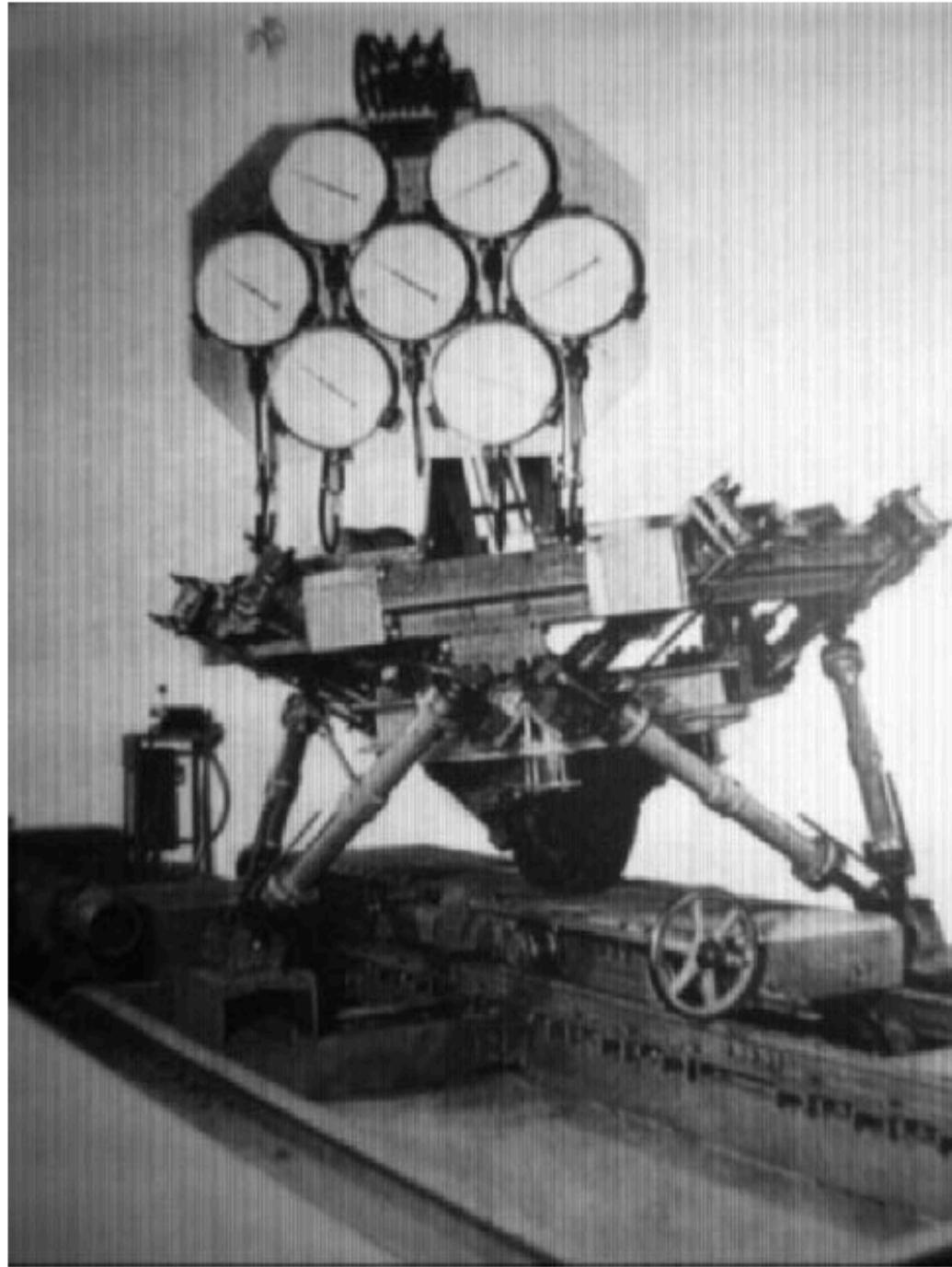
# Robots paralelos vs. Robots serie

- Así pues podemos pensar que en un robot paralelo la mayor parte de la fuerza/par de los actuadores se va a emplear de forma más directa en fuerza/par en el extremo efector.
- La estructura mecánica del robot puede ser más ligera.
- Se consiguen mejores ratios carga/peso total

# Un poco de historia

- La andadura de este tipo de robots comienza aproximadamente al mismo tiempo que los robots serie.
- La implantación de los robots de tipo serie en la industria ha sido más generalizada.
- Por ejemplo:
  - Primera patente de mecanismo paralelo en 1931 (a).
  - Plataforma de Cough en 1947 para pruebas de neumáticos Dunlop (b).
  - Simulador de vuelo de K. Cappel (c)

**a****b****c**



Gough (1955)  
Plataforma para la  
simulación del  
desgaste durante el  
aterrizaje de aviones.

# Robots paralelos vs. Robots serie



# Robots paralelos

- Caracterizados por:
  - Los actuadores unen directamente base y extremo del robot.
    - Los actuadores están en la base, con lo que no añaden peso suspendido.
    - Se transmite la fuerza directamente al extremo. Gran ratio fuerza/peso. Grandes aceleraciones.
    - Pega principal:
  - Ejemplos:
    - [IRB360](#) (PDF)
      - ¿Cuántos grados de libertad tiene el mecanismo?
        - (VÍDEO 1) [Robot delta](#)
      - ¿Qué característica principal se observa?
      - ¿Cómo podemos añadir un grado de libertad extra?
        - (VÍDEO 2) [IRB360](#) (1), (VÍDEO 3) [IRB360](#) (2)
    - ADEPT QUATTRO:
      - ¿Cuántos grados de libertad tiene el mecanismo? (VIDEO4) [Adept](#)
      - ¿Qué característica principal se observa? (VIDEO5) [Adept quattro](#)

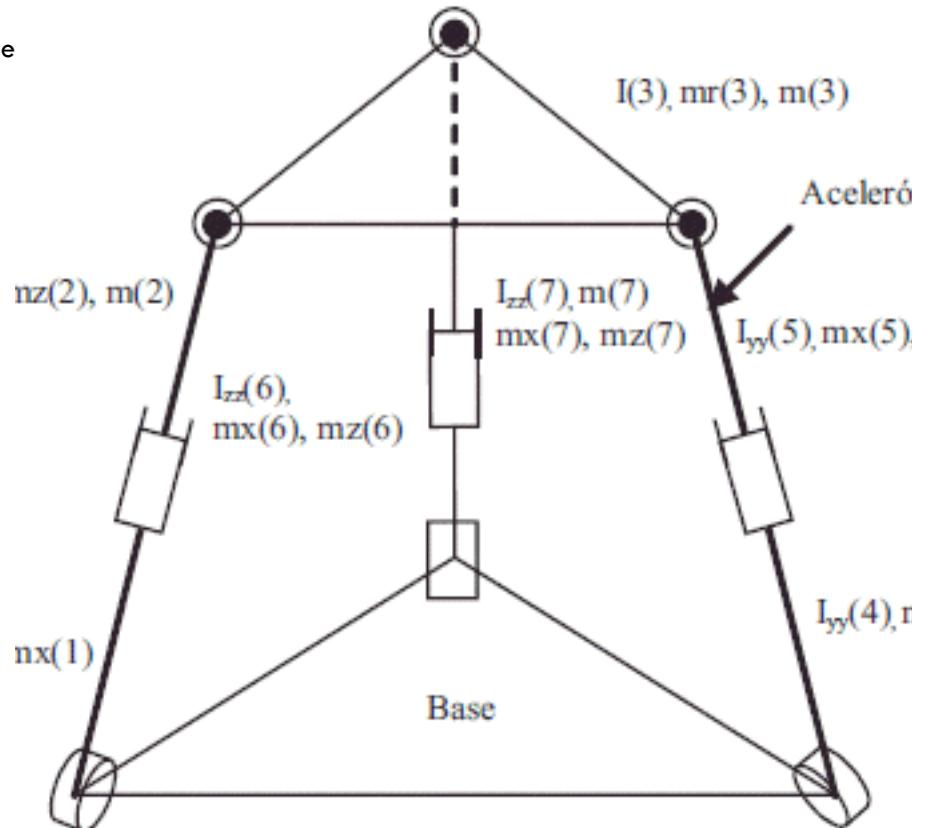


# Robots paralelos

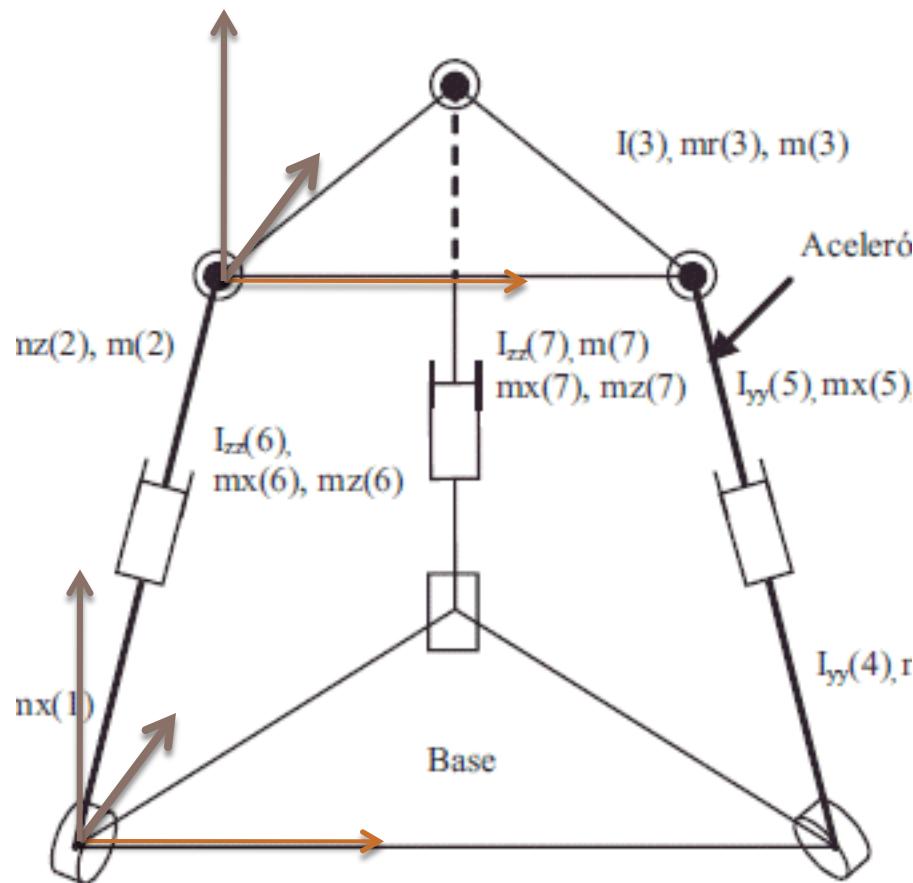
## □ Cinemática inversa:

### □ Ejemplo:

- Robot paralelo 3RPS ([VÍDEO6](#))
- ¿Cuántos grados de libertad tiene?
- Dado T, calcule las longitudes L1, L2 y L3 de los actuadores
- ¿Cuántas soluciones tiene la cinemática inversa?



# Robots paralelos

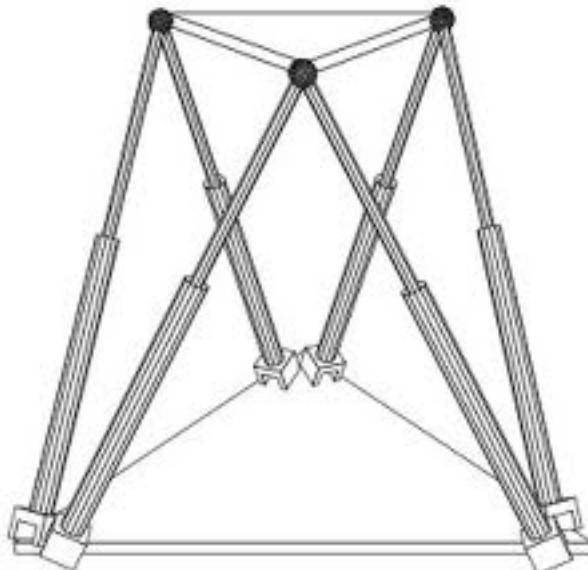


# Robots paralelos

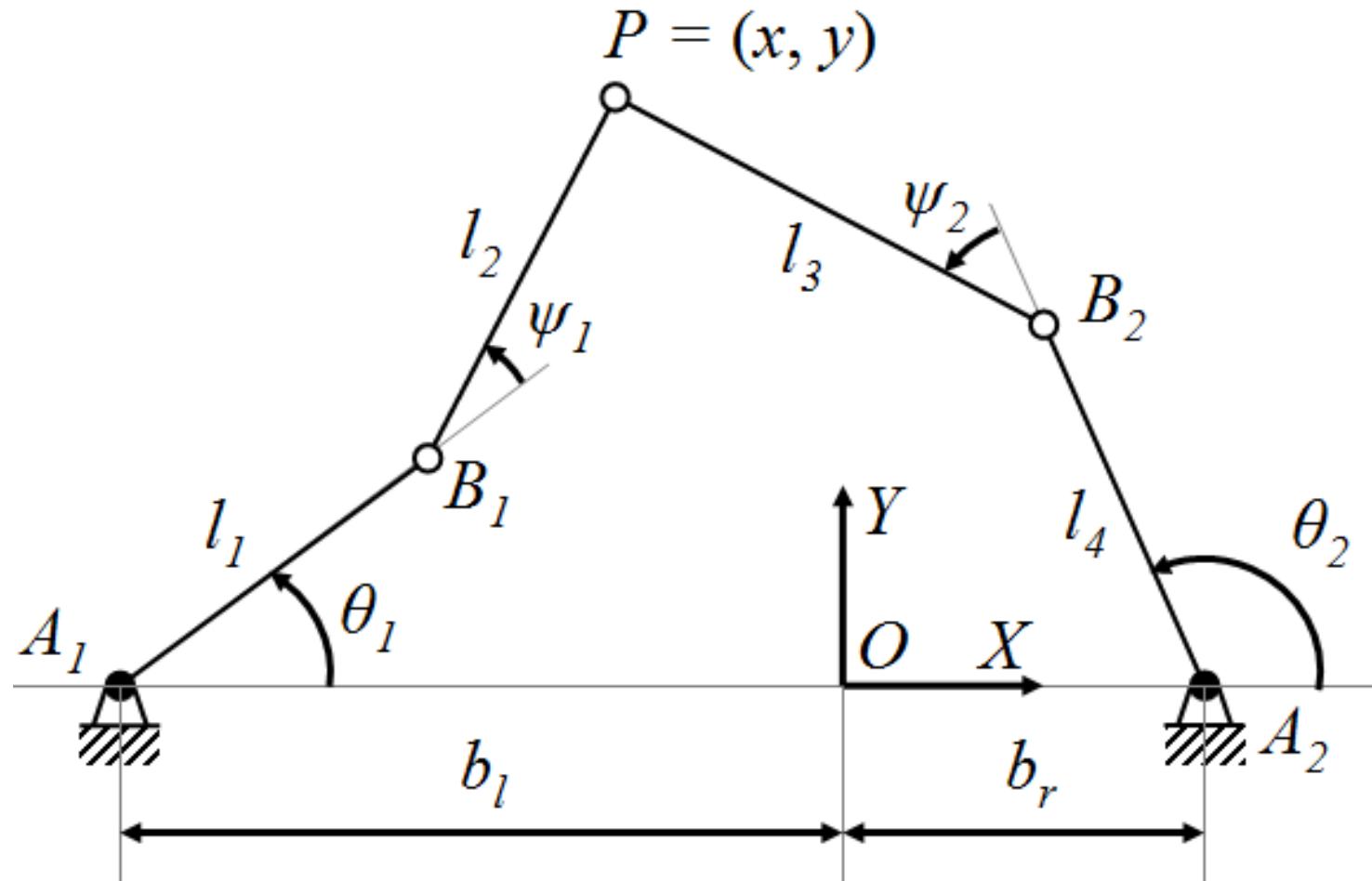
## □ Cinemática inversa:

### □ Ejemplo, plataforma stewart ([VIDEO7](#)):

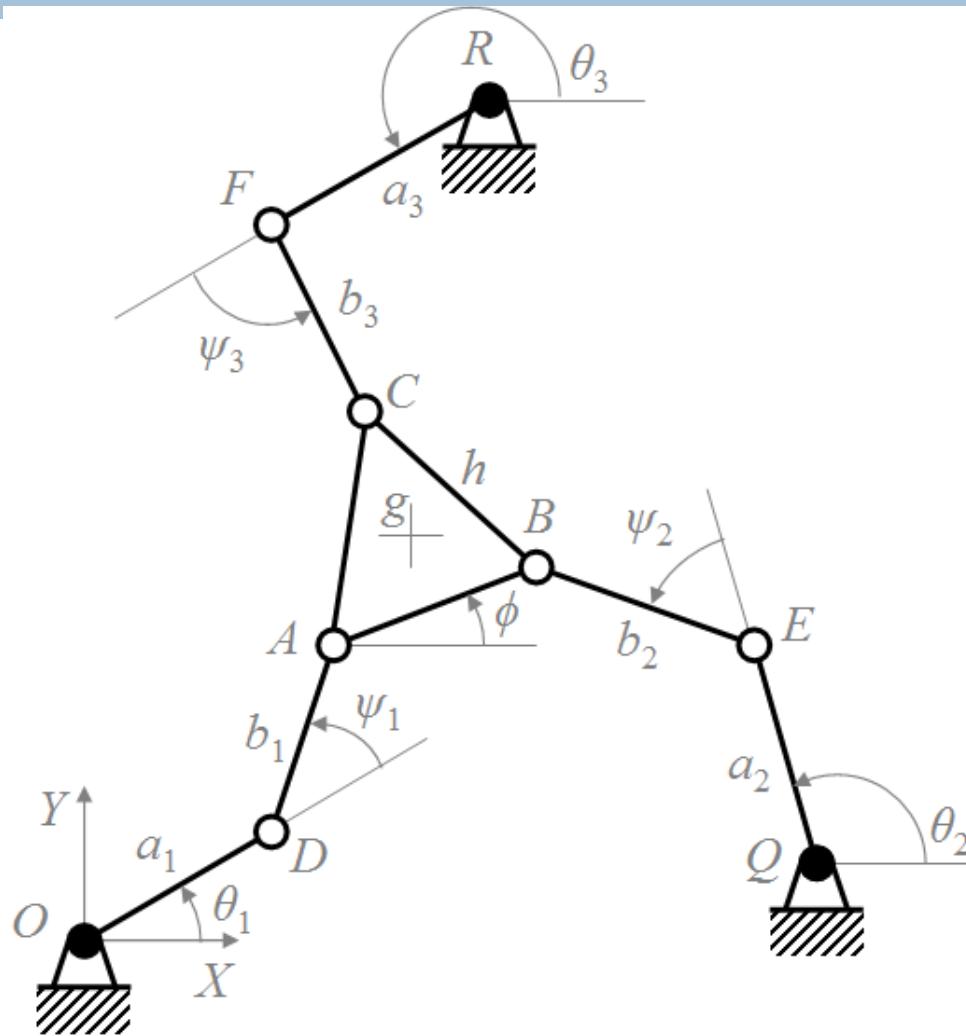
- Dado T, calcule las longitudes L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>,..., L<sub>6</sub> de los actuadores.



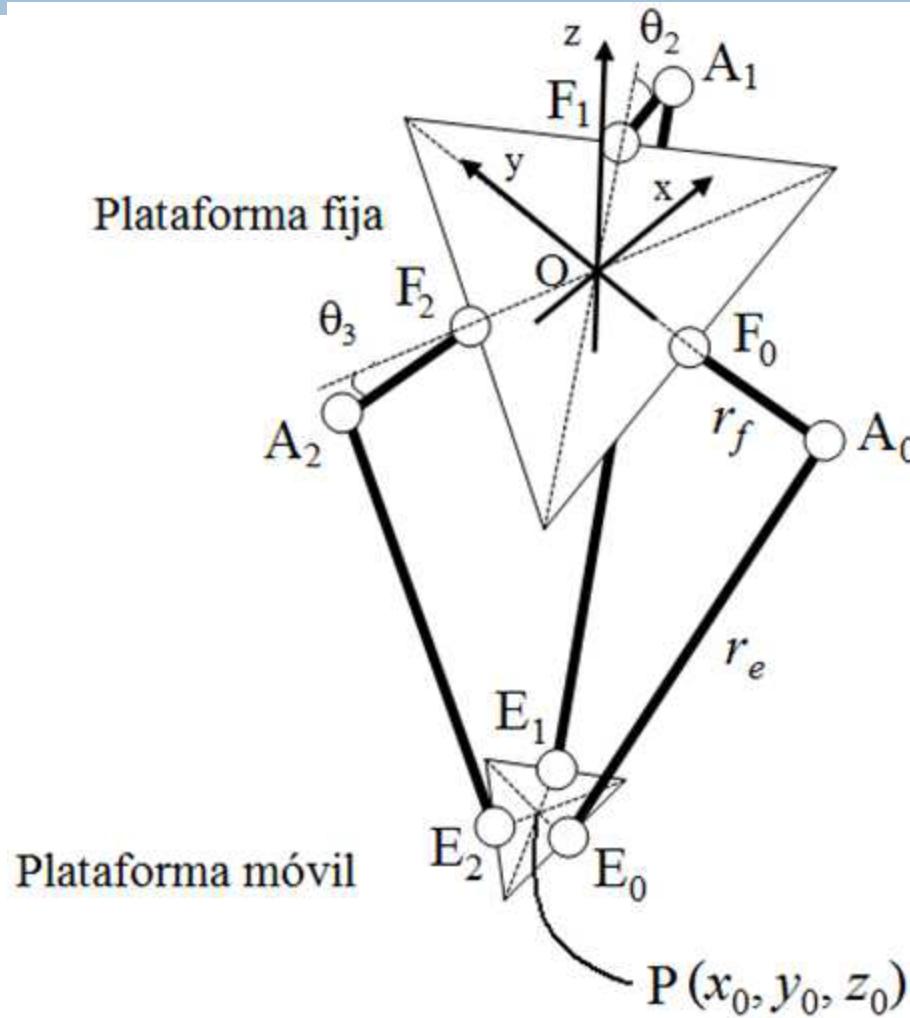
# Robot 5R



# Robot 3RRR



# Robot Delta



# Robots paralelos vs. Robots serie

- Así pues podemos pensar que en un robot paralelo la mayor parte de la fuerza/par de los actuadores se va a emplear de forma más directa en fuerza/par en el extremo efector.
- La estructura mecánica del robot puede ser más ligera.
- Se consiguen mejores ratios carga/peso total

# Índice

- 8.1 Introducción a los robots paralelos
- 8.2 Criterio de Grübler
- 8.3 Cinemática
  - 8.3.1 Cinemática inversa
  - 8.3.2 Cinemática directa
- 8.4 Estructuras clásicas
  - Robot 5R
  - Robot 3RRR
  - Robot Delta

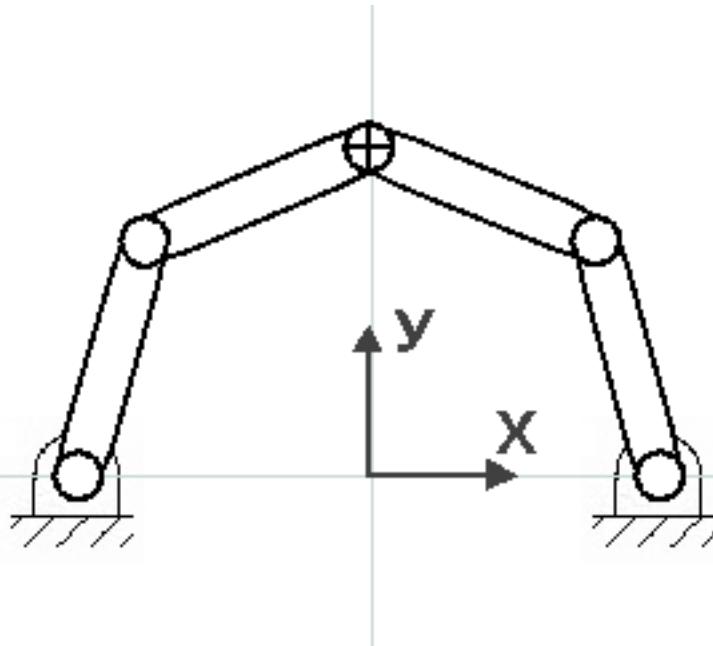
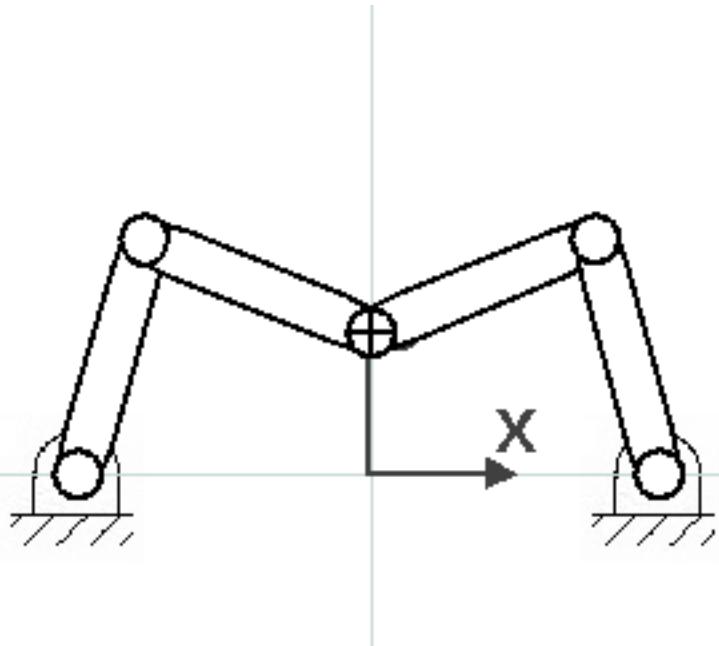
# Criterio de Grübler

- Nos va a permitir analizar el movimiento de los mecanismos paralelos de una forma sencilla.
- En el análisis de un mecanismo paralelo podemos empezar por pensar el número de GDL de la estructura.

# Criterio de Grübler

- Debemos tener siempre varios conceptos en la mente:
  - Nos interesa saber el número de GDL del extremo efector del mecanismo.
  - Es decir: queremos saber si se puede colocar en una posición del espacio con una determinada orientación... o bien únicamente en un plano.
  - Debemos pensar que en un robot paralelo no todas las articulaciones son activas:
    - Activa: movida directamente por un actuador.
    - Pasiva: Se mueve como reacción a las fuerzas generadas por el resto de eslabones y articulaciones.
  - Finalmente, hay que pensar también en el “estado” del mecanismo. Por estado nos referimos al mínimo número de variables necesarias para especificar su configuración (p.e. la forma que adopta en el espacio).

# Ejemplo: Robot 5R

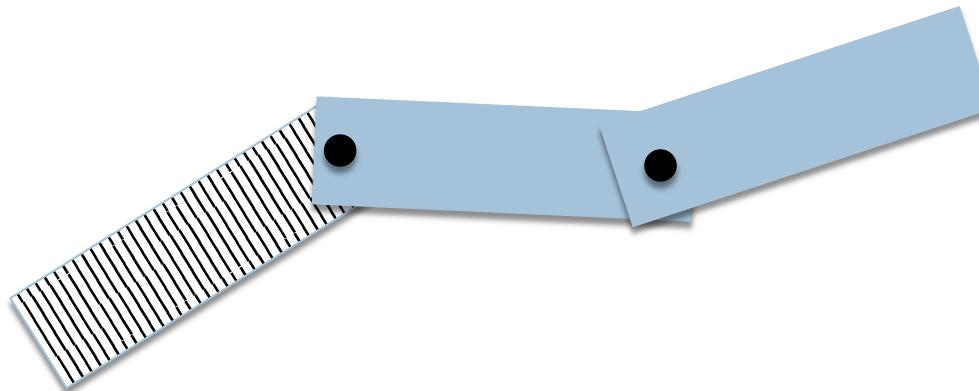


# Criterio de Grübler

- Nomenclatura:
  - F: Grados de libertad del mecanismo.
  - j: número de articulaciones del mecanismo.
  - $f_i$ : grados de libertad de la articulación i. Número de movimientos permitidos por la articulación i.
  - $c_i$ : número de restricciones al movimiento impuestas por Nos interesa saber el número de GDL del extremo efector del mecanismo.
  - n: número de eslabones del mecanismo.
  - $\lambda$ : grados de libertad del espacio en el que se mueve el mecanismo.  $\lambda=3$  (movimiento restringido a un plano),  $\lambda=6$  (movimiento en el espacio)

# Criterio de Grübler

- Supongamos  $n$  eslabones uno de ellos fijado a tierra.



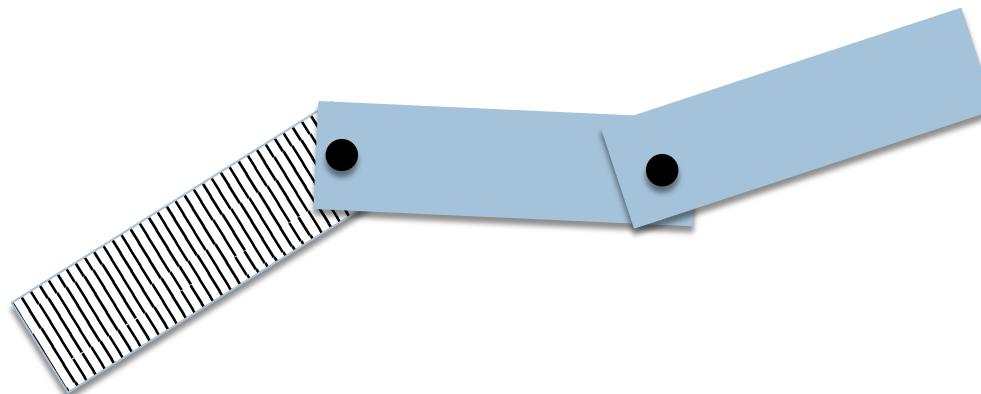
- Por tanto, hay  $n-1$  eslabones que se mueven libremente.
- Si no hubiera restricciones al movimiento relativo tendríamos
  - $F=\lambda(n-1)$
  - F: Grados de libertad

# Criterio de Grübler

- Lógicamente, los eslabones deben estar unidos para que podamos construir un mecanismo:
  - Cada articulación va a introducir una restricción en el movimiento.

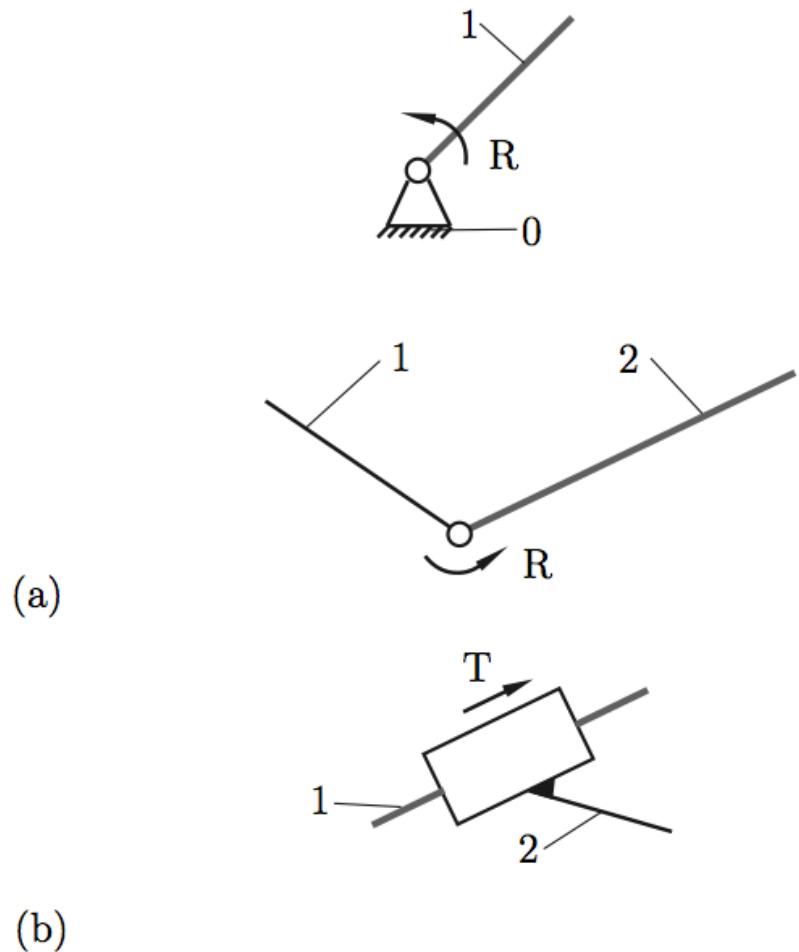
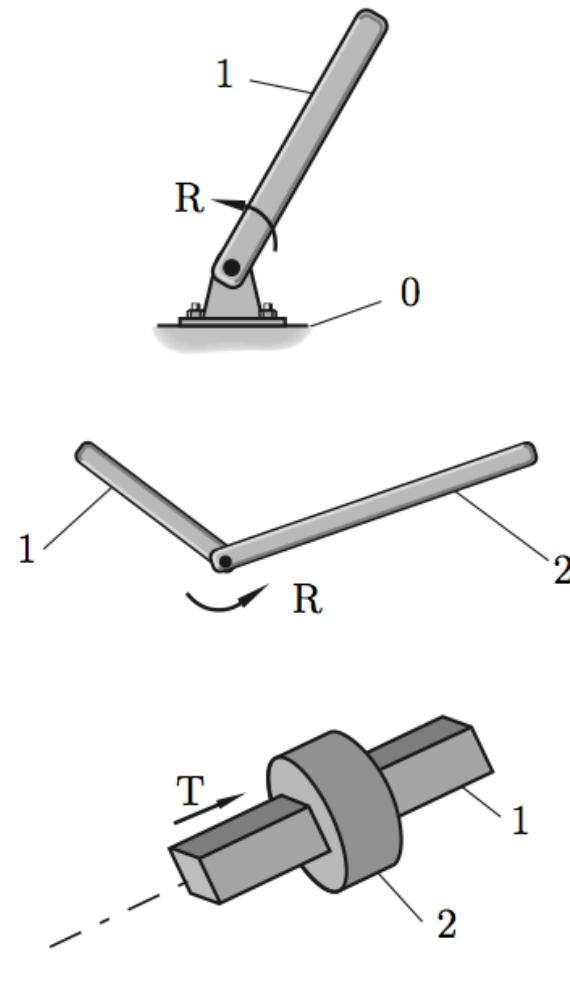
$$F = \lambda(n-1) - \sum c_i$$

- O bien, va a permitir un cierto número de GDLs.



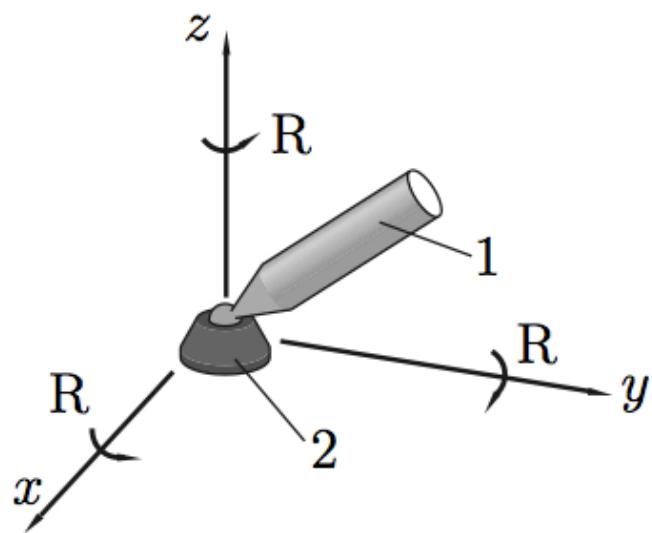
# Criterio de Grübler

- Tipos de articulaciones (de [1]):

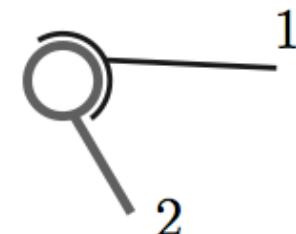


# Criterio de Grübner

## □ Esférica

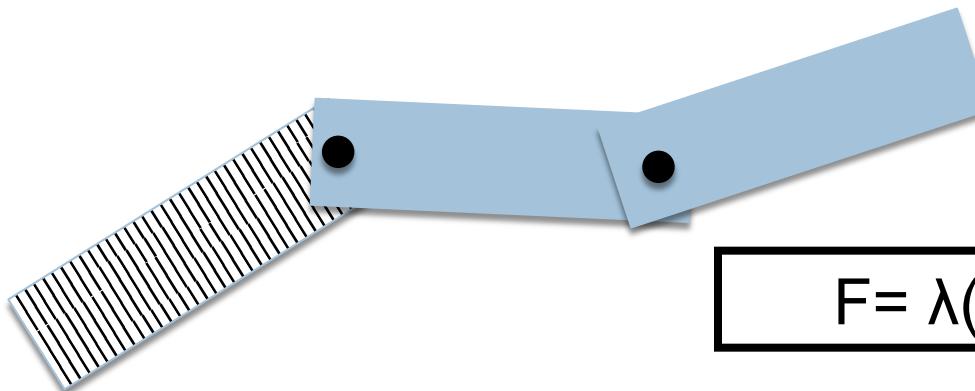


Schematic representation



# Criterio de Grübler

- P.e.: Una articulación rotacional  $f_i=1$ .
- Vamos a considerar el siguiente mecanismo:



$$F = \lambda(n-1) - \sum c_i$$

- $\lambda = 3$ ,  $n=3$  (incluyendo la base),  $c_i=2$
- $3(3-1)-2*2 = 2$ GDL
- Algo que ya se intuía. Es un brazo serie de 2GDL.
- El análisis se puede complicar cuando hay más de un bucle, o bien se trate de un mecanismo paralelo más complejo.

# Criterio de Grübler

- Se puede derivar una ecuación que, en ocasiones, es más sencilla de aplicar.
- Recibe el nombre de criterio Grübler o criterio de Kutzbach.
- Para cada articulación tenemos que:  $\lambda = f_i + c_i$

$$F = \lambda(n-1) - \sum c_i$$

- Si sustituímos en:

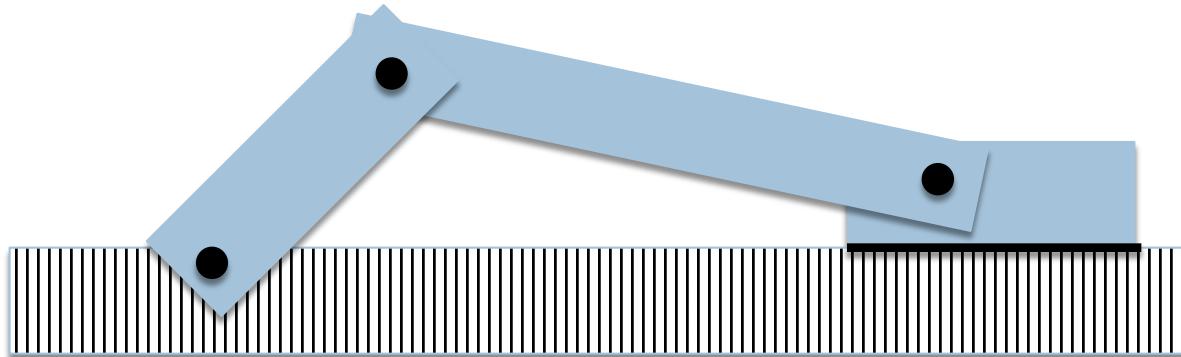
$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

- Queda:
  - Que recibe el nombre de los primeros que lo aplicaron a la teoría de mecanismos.

# Ejemplos:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

- Mecanismo de biela manivela.
- $F=3(4-4-1)+4=1\text{ GDL}$

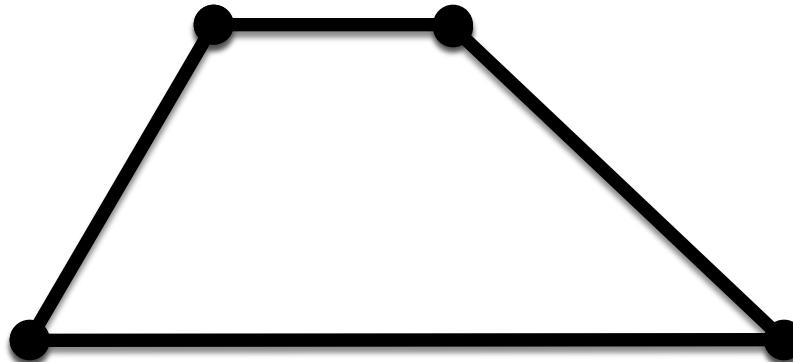


- $n=4$ (incluyendo la tierra),  $j=4$ ,  $f_i=1\text{ GDL}$  (3 rotaciones y una traslación).

# Ejemplos:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

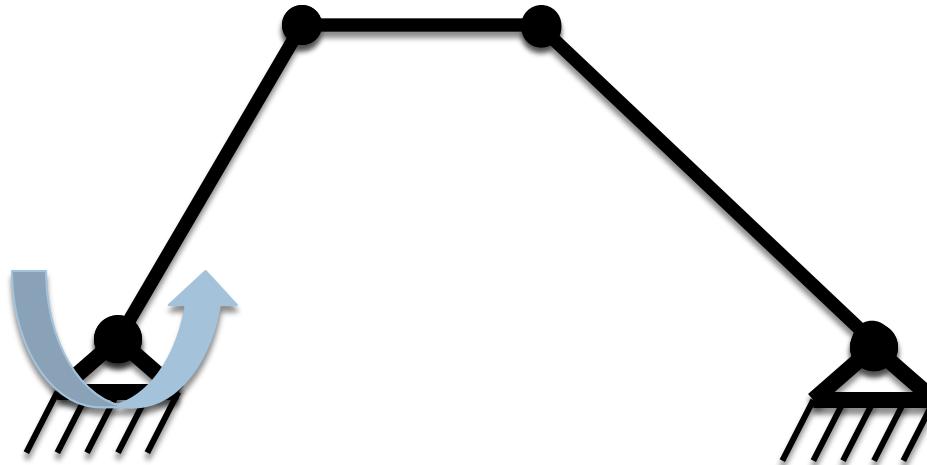
- Mecanismo de cuatro barras.



# Ejemplos:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

- Mecanismo de cuatro barras.

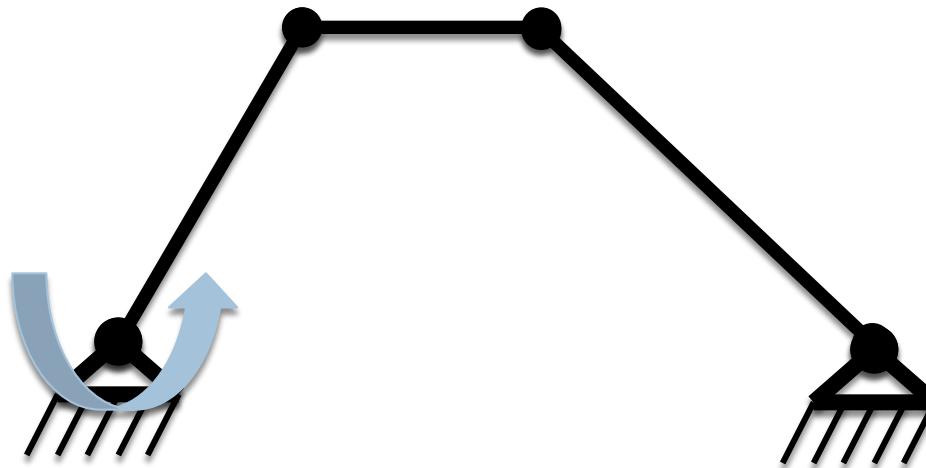


- 
- Lo podemos entender de esta manera...: Dada la rotación del eje indicado, y bajo unas condiciones iniciales, podemos establecer el movimiento del resto de elementos.

# Ejemplos:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

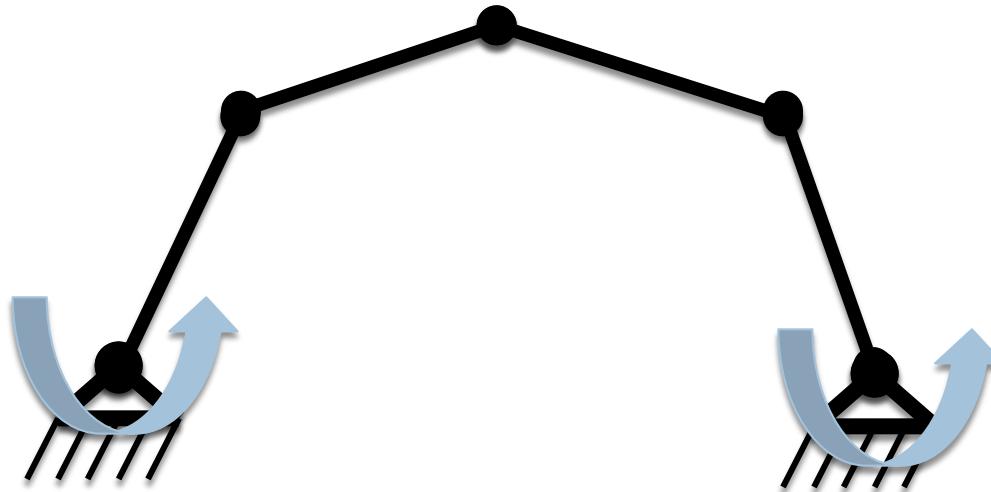
- Sin embargo, necesitaríamos dos giros para establecer la configuración del mecanismo sin lugar a duda.



# Ejemplos:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

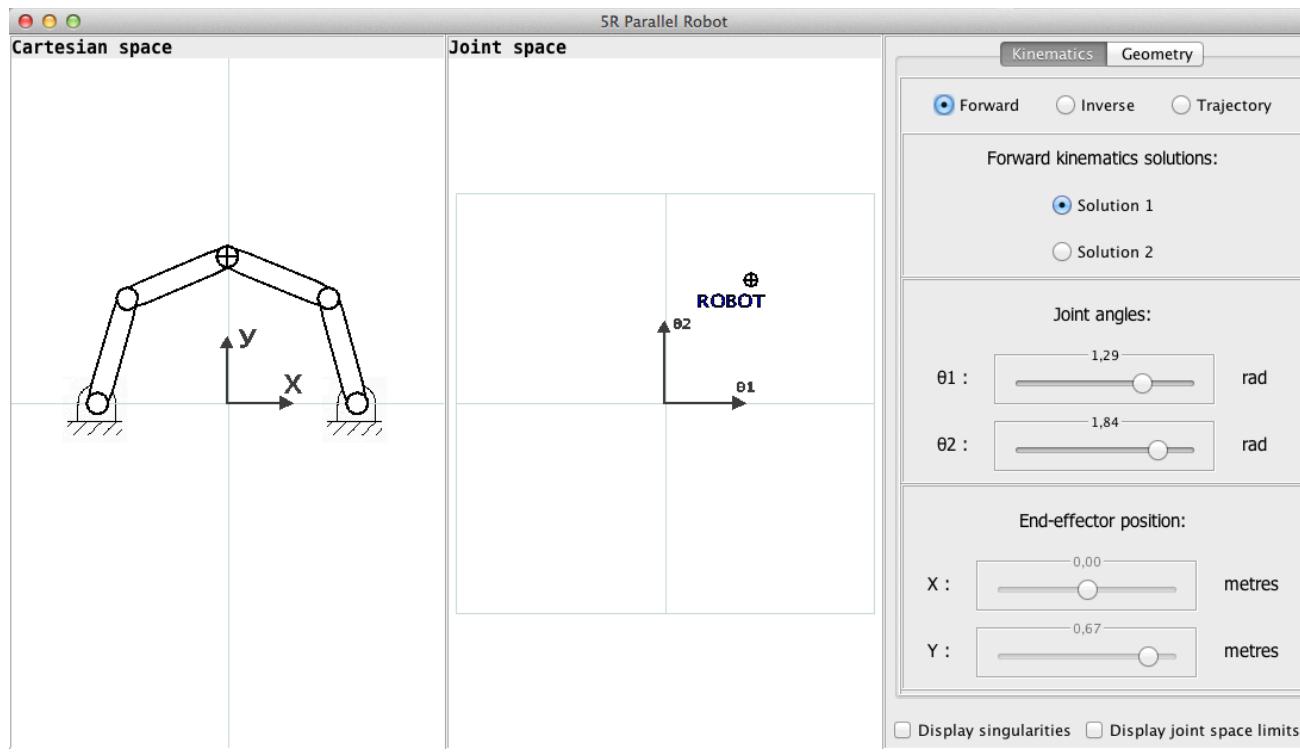
- Mecanismo de cinco barras.



- También robot 5R, dado 5 articulaciones rotacionales.
- Se indican las dos articulaciones que son activas.
- ¿F?
-

# Ejemplos:

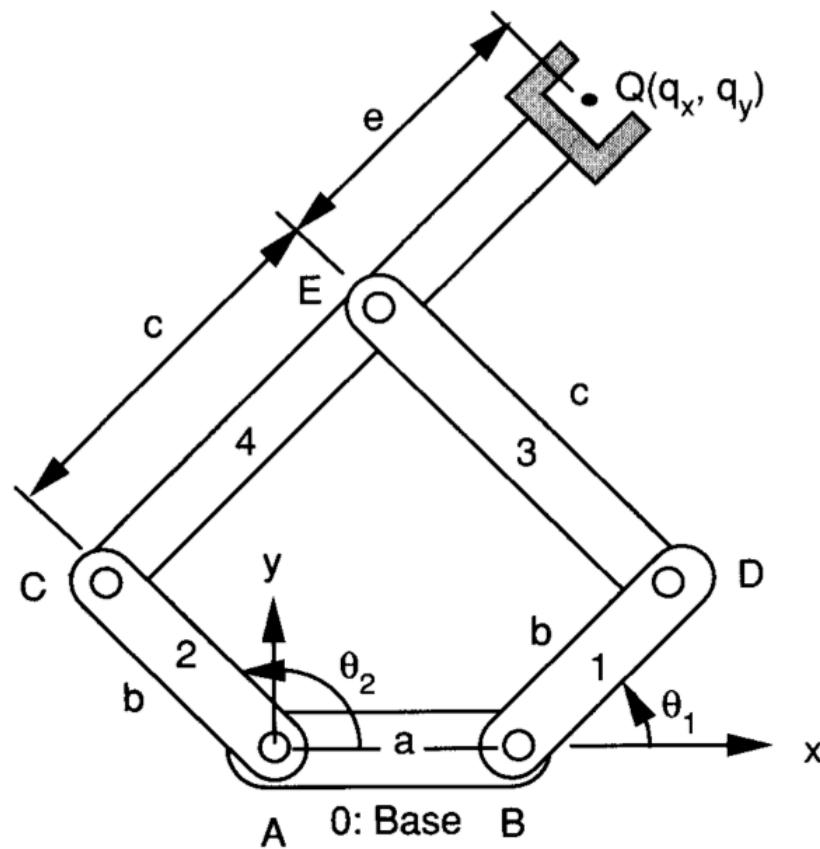
- Simula el robot 5R:
  - En LABEL: arvc.umh.es/label
    - <http://arvc.umh.es/label/5R.html>
  - En ARTE: arvc.umh.es/arte



# Ejemplos:

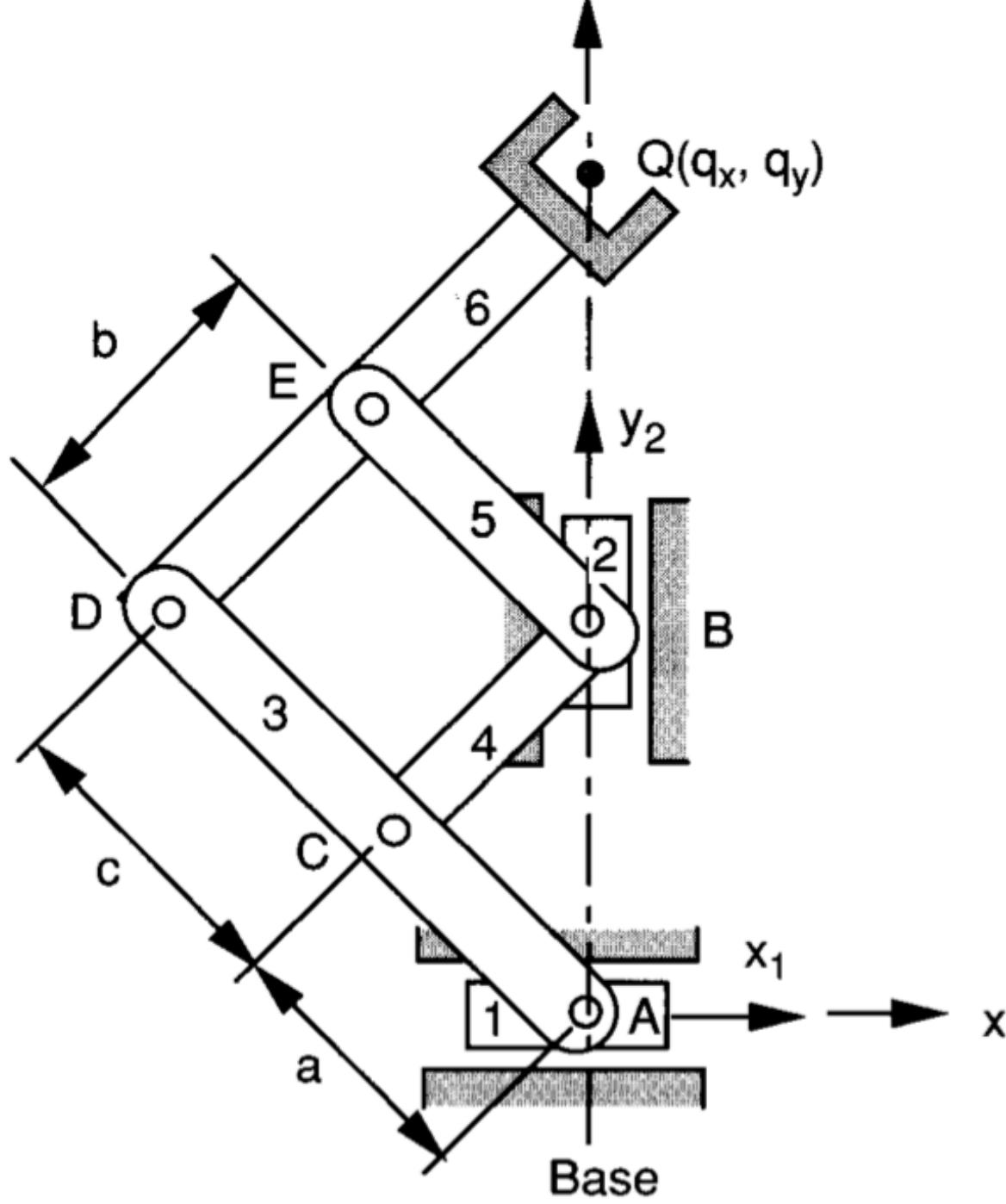
$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

- Mecanismo de cinco barras.



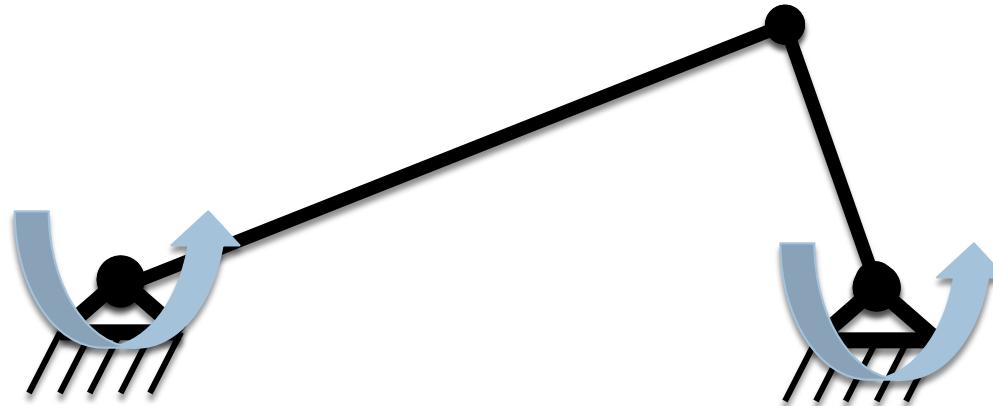
# Ejercicios:

□ ¿F?



# Ejemplos:

- ¿Mecanismo?

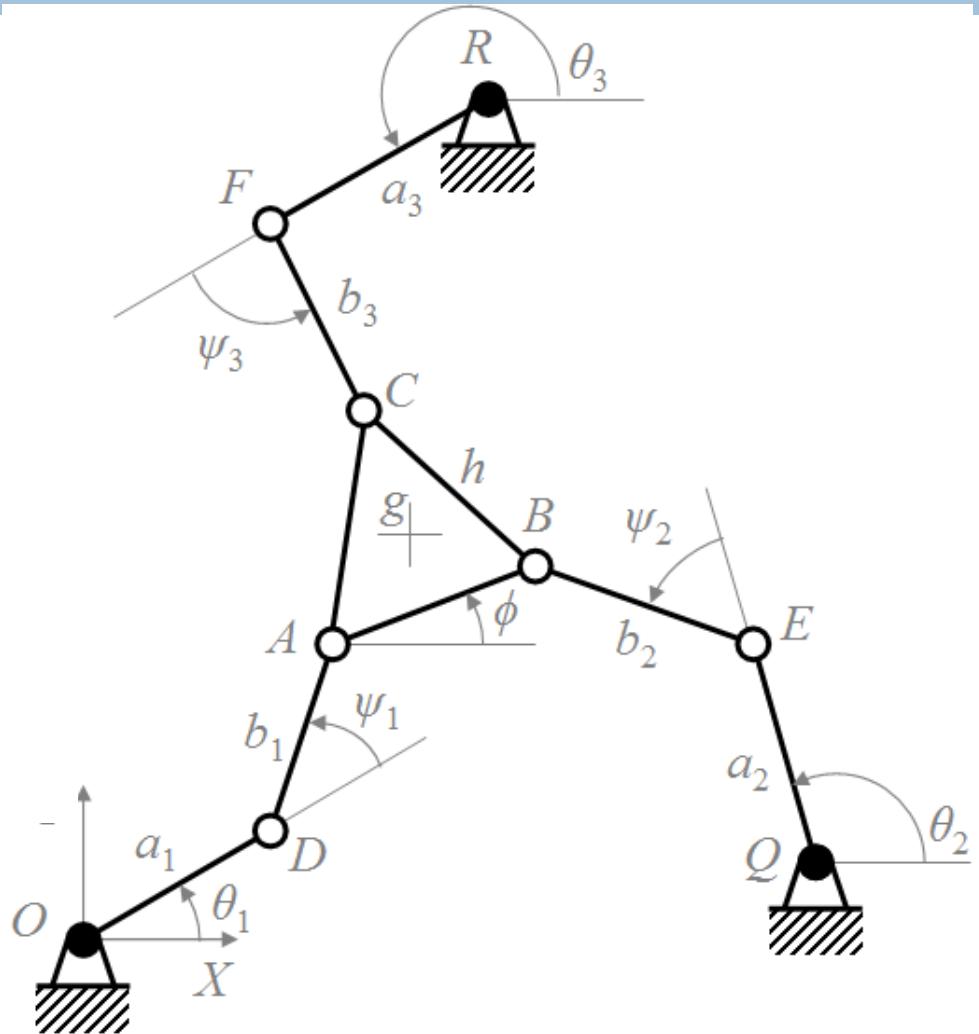


- ¿F?



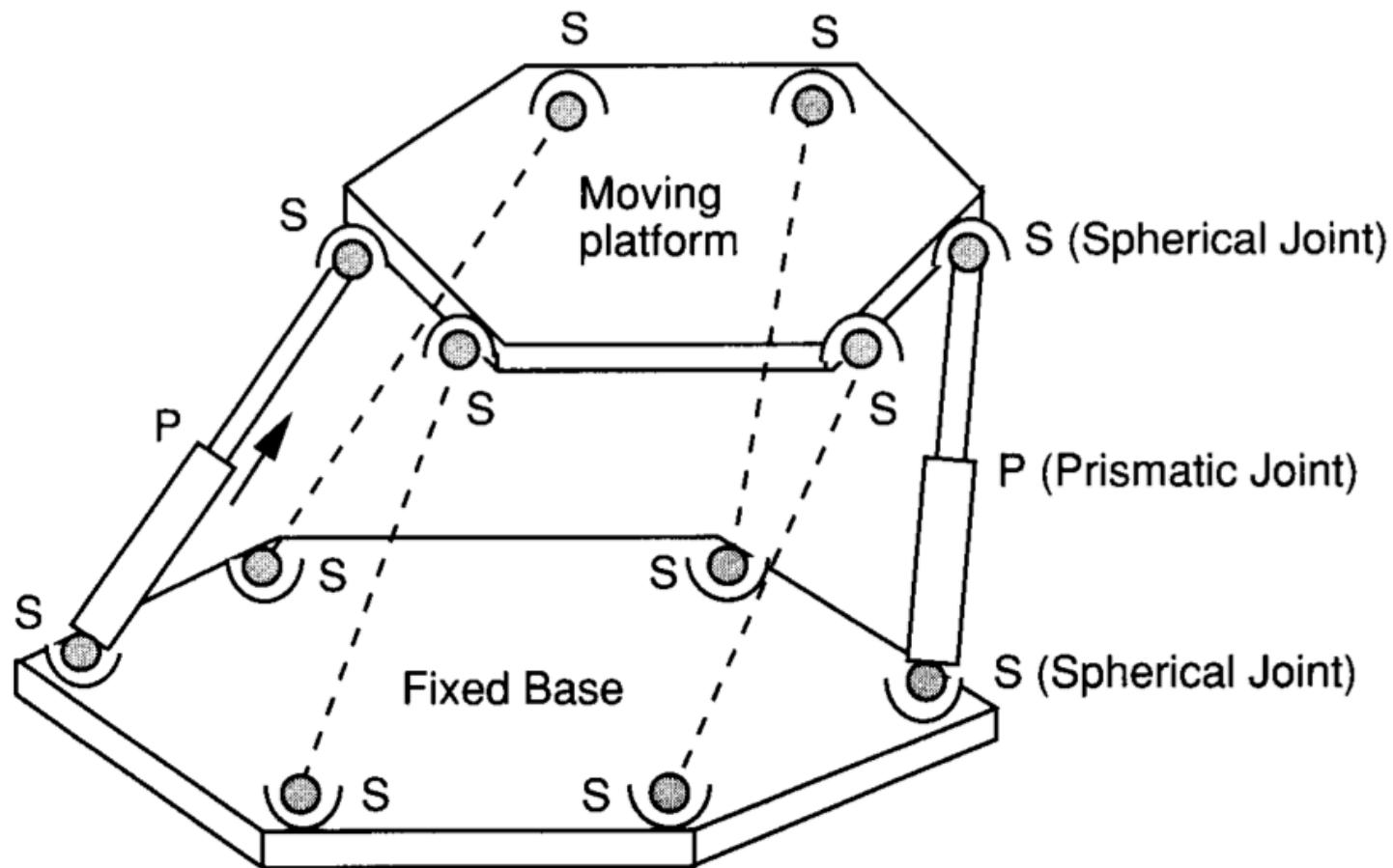
# Robot 3RRR

- ¿F?



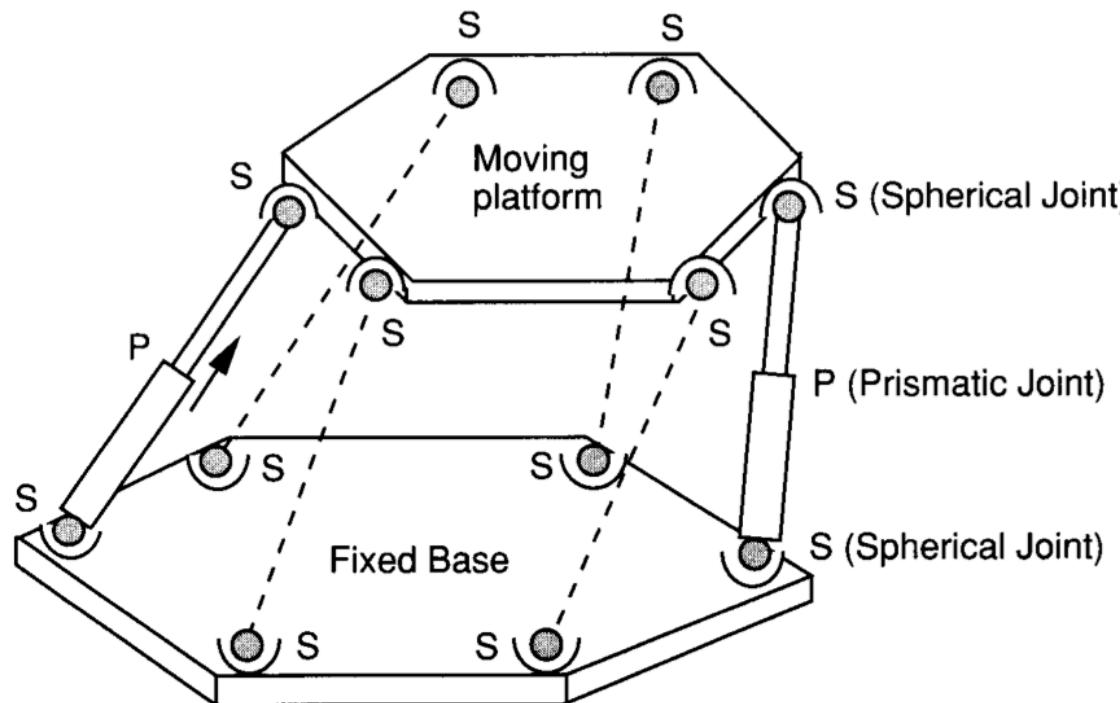
# Plataforma Stewart-Gough

- Aplicar criterio de Grübler.



# Plataforma Stewart-Gough

- Aplicar criterio de G



- ¿F?



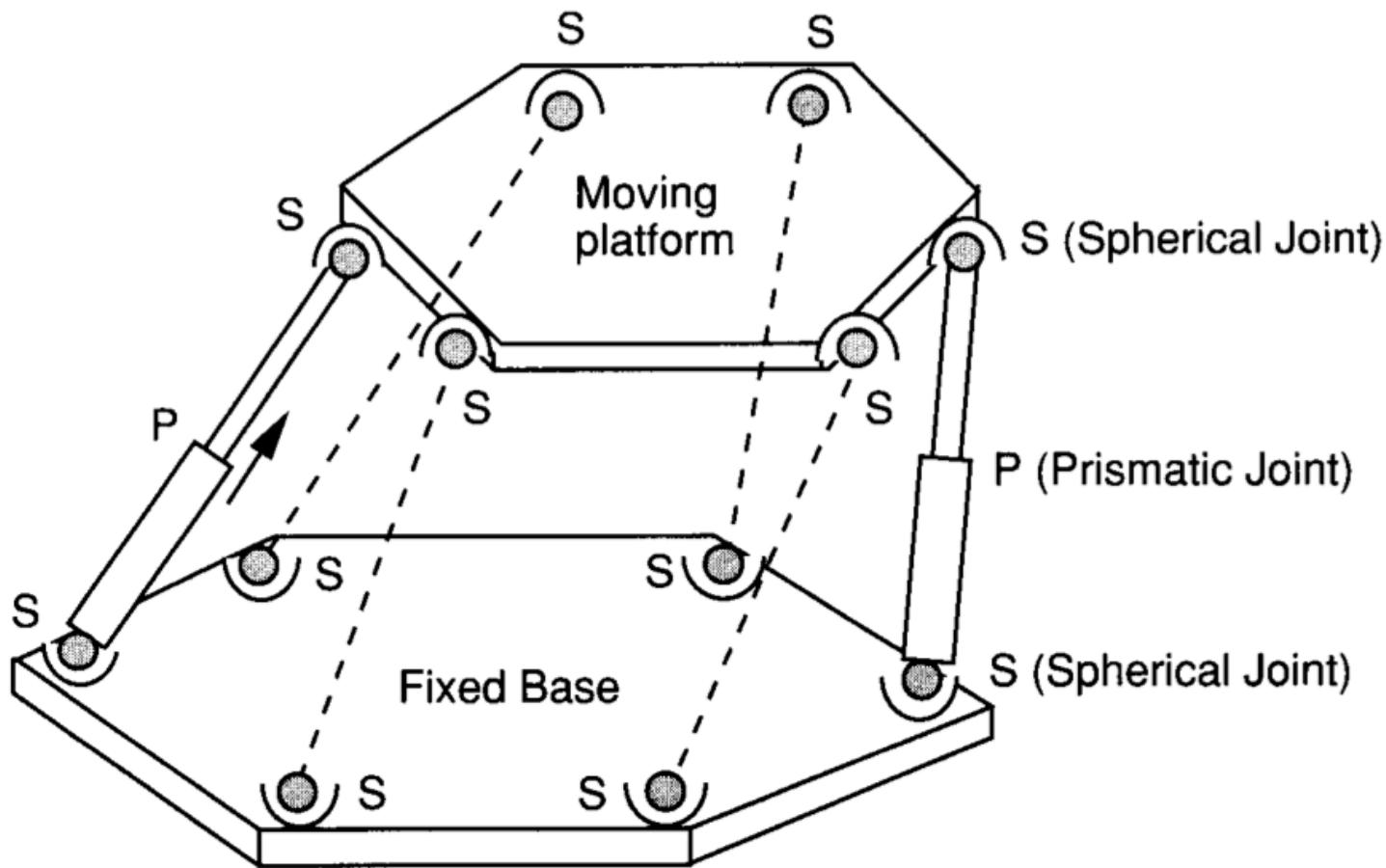
# Grados de libertad accesorios

- Aplicar criterio de Grübler. Si lo hacemos al caso anterior aparece  $F=...$
- Existen ciertas combinaciones de articulaciones que hacen aparecer grados de libertad pasivos.
- Podemos observar que hay ciertas partes del mecanismo que se pueden mover de forma incontrolada.
- Aparecen debido a combinaciones como la S-P-S del mecanismo anterior.
- Al no ser GDL útiles los debemos eliminar de la ecuación de Grübler.

# Grados de libertad accesorios

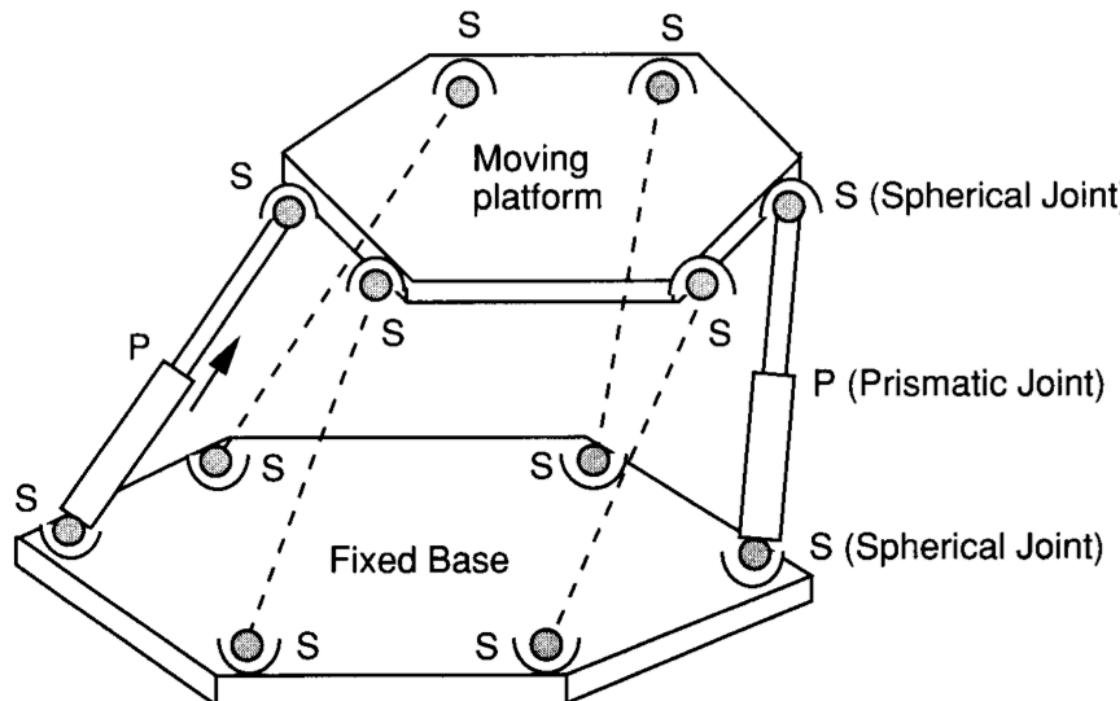
- Aplicar criterio de Grubler.

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i - f_p$$



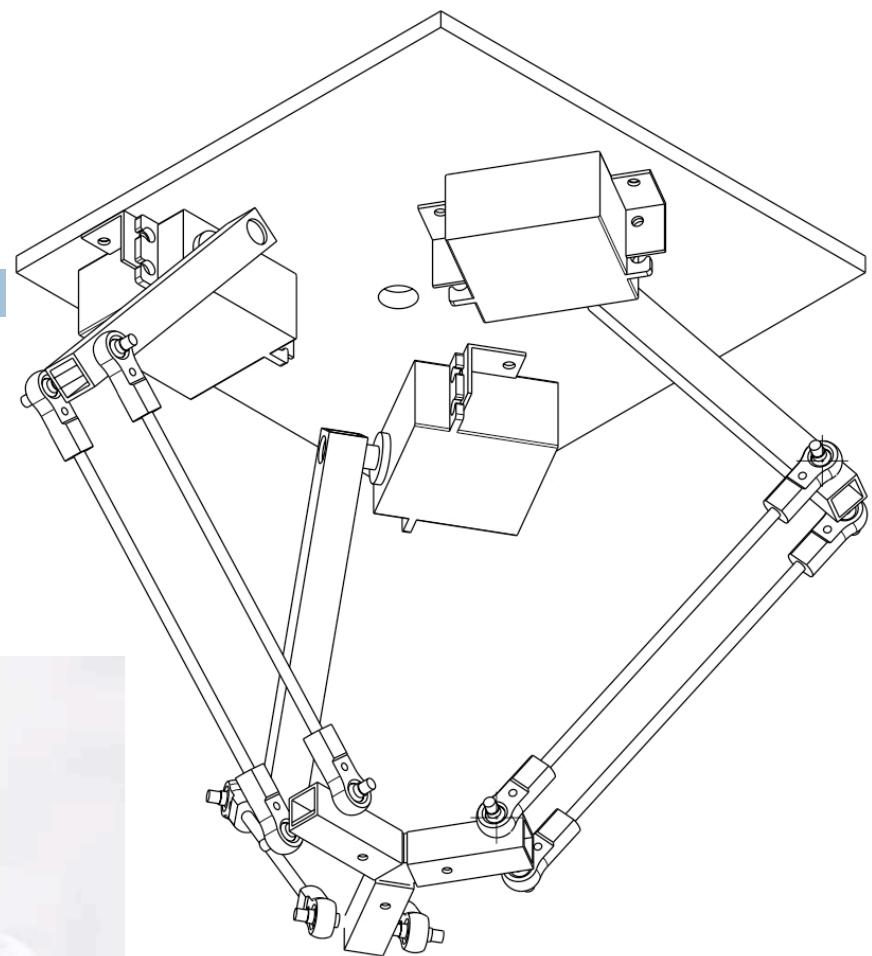
# Plataforma Stewart-Gough

- Aplicar criterio de G



- ¿F?
- 
-

# Robot Delta



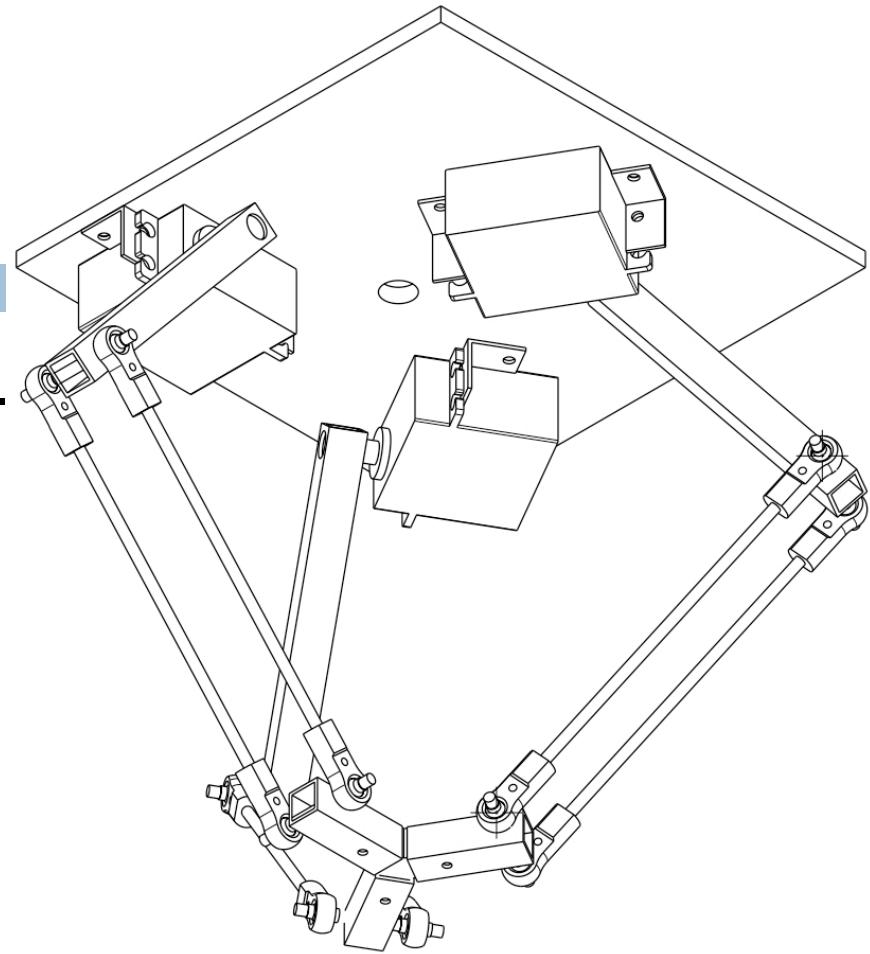
# Robot Delta



Source: ABB Ltd

# Robot Delta

- Aplicad el criterio de Grübler..



# Índice

- 8.1 Introducción a los robots paralelos
- 8.2 Criterio de Grübler
- 8.3 Cinemática
  - 8.3.1 Cinemática inversa
  - 8.3.2 Cinemática directa
- 8.4 Estructuras clásicas
  - Robot 5R
  - Robot 3RRR
  - Robot Delta

# CINEMÁTICA

59

- **Cinemática:** Estudio del movimiento sin considerar las causas que lo generaron.
  - ANÁLISIS DE POSICIÓN/ORIENTACIÓN.
  - ANÁLISIS DE LA VELOCIDAD (JACOBIANA).
  - ANÁLISIS DE LA ACELERACIÓN.
- **Dinámica:** Estudio del movimiento considerando las fuerzas y momentos que lo causaron.

# Definiciones

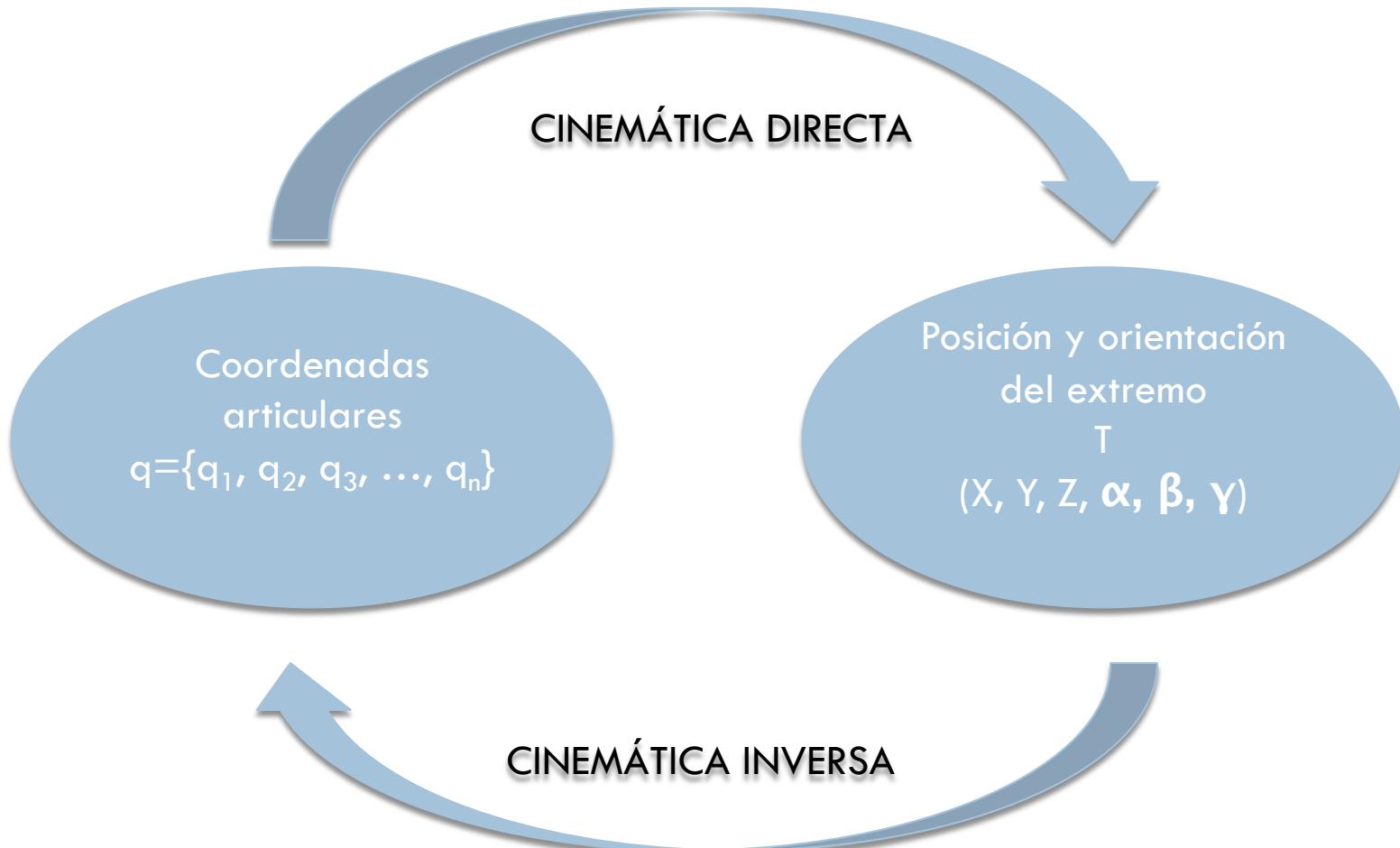
60

- **Cinemática del robot:** Estudio del movimiento del extremo (y resto de eslabones) respecto de un sistema de referencia (base).
  - Posición del extremo.
  - Orientación del extremo.
  - Velocidades/aceleraciones.
- El estudio de la posición del brazo robótico plantea que, si conocemos  $\theta_i(t)$ ,  $i: 1 \dots n$ , podemos calcular  $X(t)$   $Y(t)$   $Z(t)$ ,  $\alpha(t)$   $\beta(t)$   $\gamma(t) \dots$
- Y al revés! Dado  $X(t)$   $Y(t)$   $Z(t)$ ,  $\alpha(t)$   $\beta(t)$   $\gamma(t)$  calcular  $\theta_i(t)$ ,  $i: 1 \dots n$  ([vídeo 1](#), [vídeo 2](#))

# Cinemática directa e inversa

- **Problema cinemático directo:** Determinación de la posición y orientación del extremo respecto del sistema de referencia de la base, supuestas conocidas las coordenadas articulares  $q=\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  y los parámetros geométricos del brazo (p. e. longitud de los eslabones).
- **Problema cinemático inverso:** Determinación de las coordenadas articulares  $q=\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  del brazo que permiten llevar el extremo a una posición y orientación determinadas.

# Cinemática directa e inversa



# Cinemática directa e inversa

## □ Problema cinemático directo:

- Nos centramos en el análisis de la posición. Dado  $q=\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$  calcular T.
- También debemos considerar dentro de un análisis cinemático directo el cálculo de la velocidad del extremo a partir de las velocidades articulares.
- Así como la aceleración.

## □ Problema cinemático inverso:

- Igualmente nos centraremos en el análisis de la posición. Dado T, calcular q.
- También se debe considerar el cálculo de las velocidades articulares para conseguir una velocidad v del extremo.

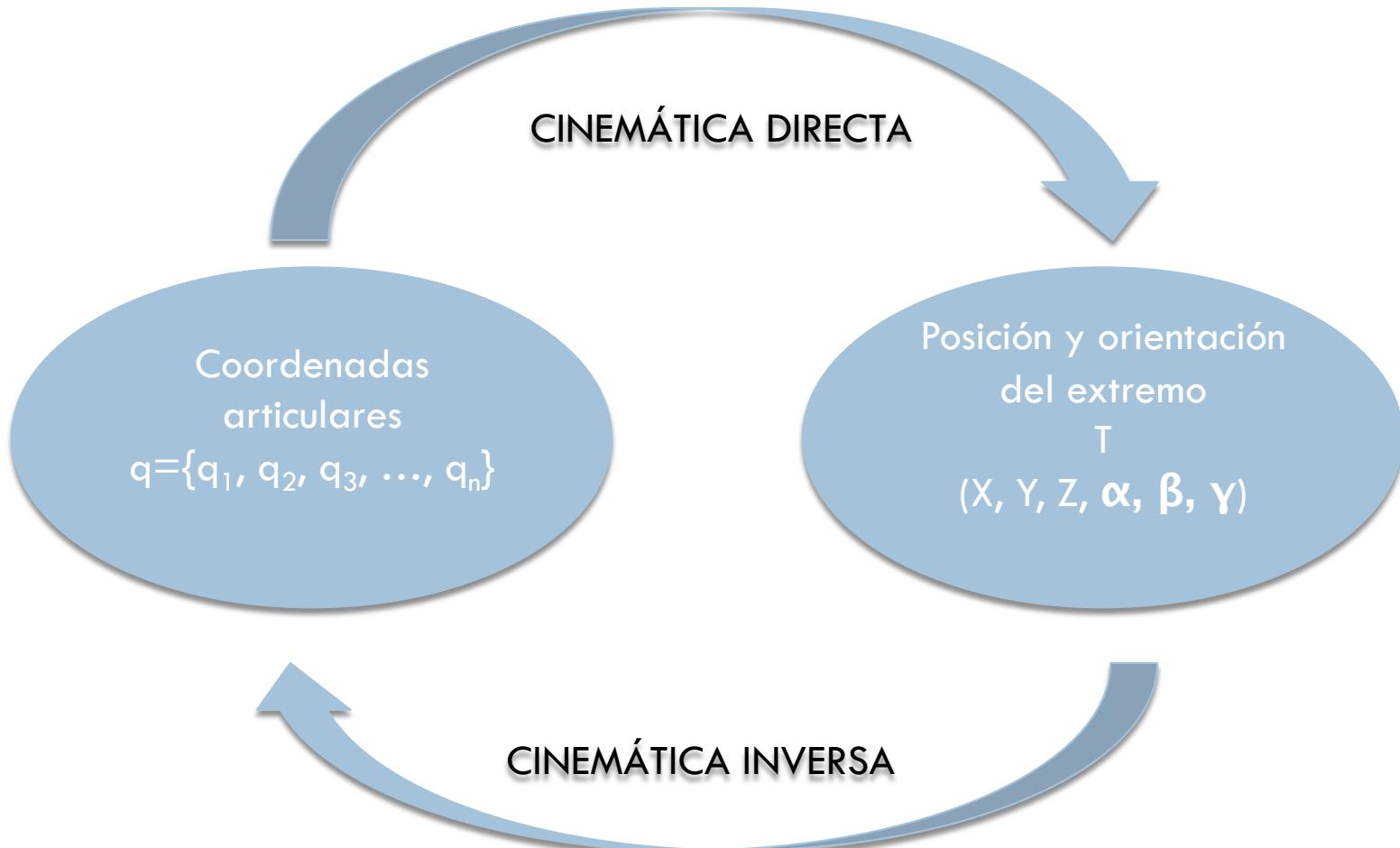
# Cinemática directa e inversa

- **Repasa las soluciones al problema cinemático directo/inverso en Youtube y iTunesU**
- <http://www.youtube.com/playlist?list=PLCIKgnzRFYe72qDYmj5CRpR9ICNnQehup>
- <https://itunes.apple.com/es/itunes-u/robotica-umh1770-curso-2013/id681094508?mt=10>

# Índice

- 8.1 Introducción a los robots paralelos
- 8.2 Criterio de Grübler
- 8.3 Cinemática
  - 8.3.1 Cinemática inversa
  - 8.3.2 Cinemática directa
- 8.4 Estructuras clásicas
  - Robot 5R
  - Robot 3RRR
  - Robot Delta

# Cinemática directa e inversa



# Cinemática inversa

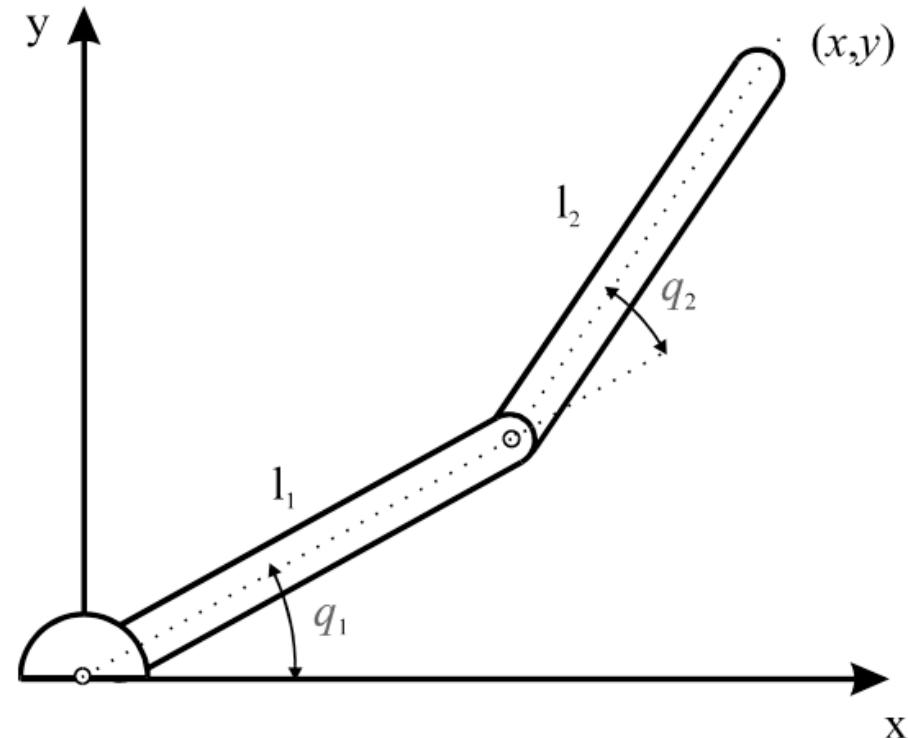
- La **cinemática inversa** plantea hallar el valor de las coordenadas articulares  $q=\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  que permiten llevar el extremo del brazo a una posición y orientación determinadas.
- Es decir: dado  $T$ , hallar  $q$ .
- El análisis depende de la topología del brazo y del número de GDL.
- En ocasiones existen soluciones múltiples: diferentes valores de  $q$  que llevan al efecto a la misma posición y orientación en el espacio.

# Métodos para la resolución del problema cinemático inverso

- **Métodos geométricos.**
  - En base a relaciones trigonométricas extraídas directamente de la geometría del brazo.
  - **Desacoplo cinemático:** se denomina así a la situación en la que la posición y la orientación del extremo del robot se pueden resolver de forma separada.
- **Métodos algebraicos:** Solución a partir de las matrices de transformación homogénea.
  - Es decir: conocido T y conocido también la forma de  $T=f(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , hallar  $q$ .

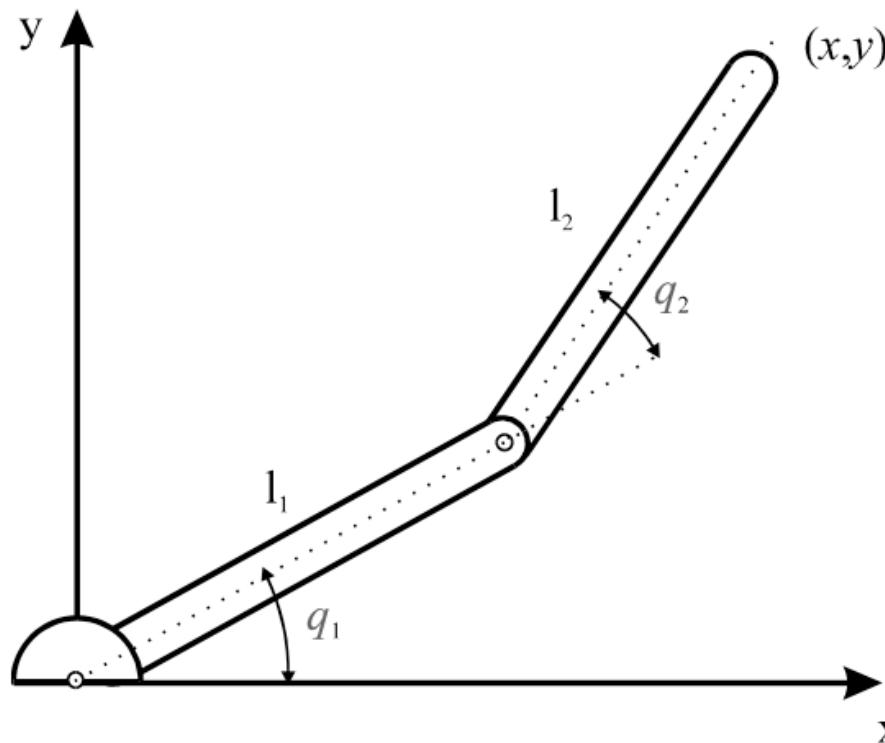
# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

- Conocido  $(x, y)$ , cómo podemos calcular  $(q_1, q_2)$ ?
- Una solución se puede plantear a partir de las ecuaciones de la cin. directa (T)



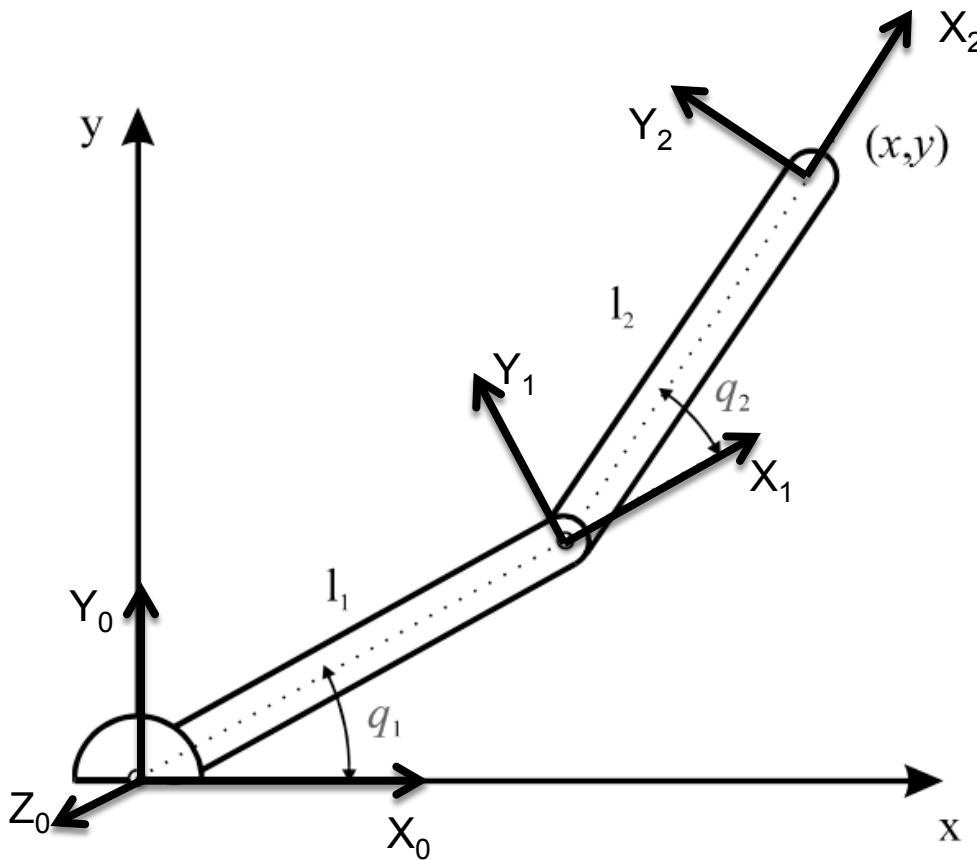
# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

- Planteamos un análisis cinemático con lo que sabemos hasta ahora.
- Colocamos los sistemas D-H



# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

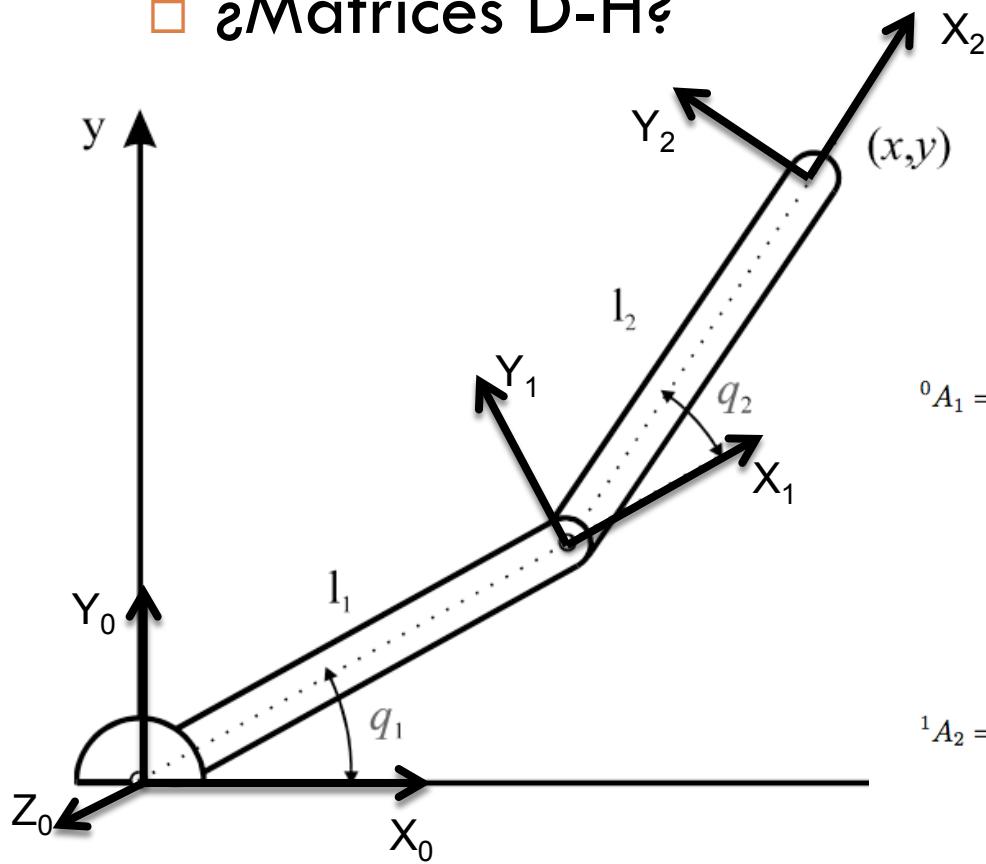
- ¿Tabla D-H?



Theta	d	a	alpha
$q_1$	0	$L_1$	0
$q_2$	0	$L_2$	0

# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

## □ ¿Matrices D-H?



$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1 \cdot \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1 \cdot \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cdot \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \cdot \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

## □ ¿Matriz T?

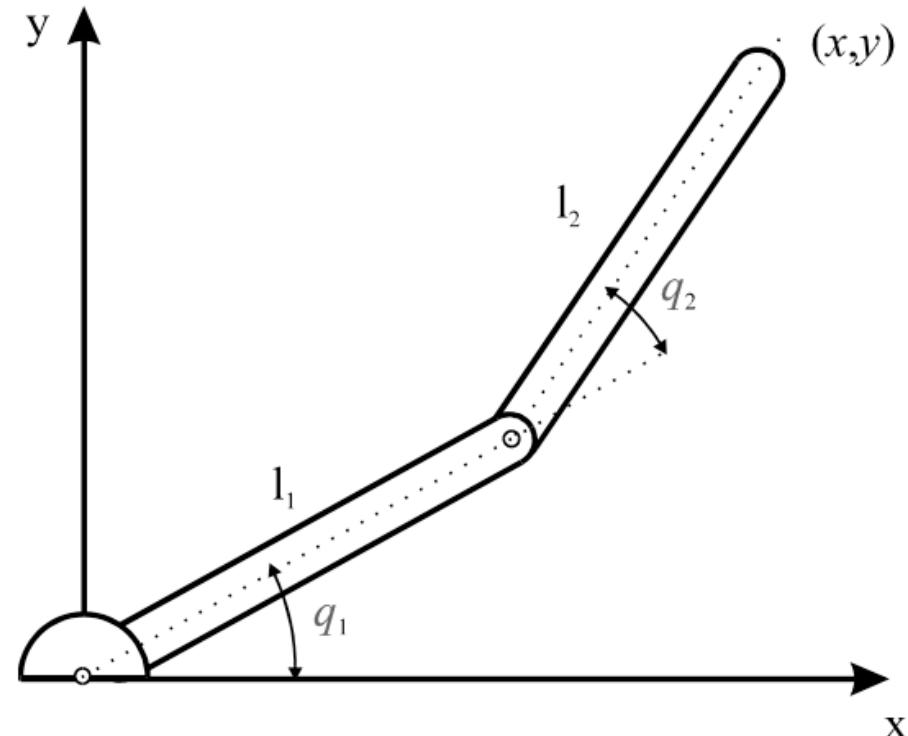
$$T = {}^0A_1{}^1A_2 =$$

$$\begin{bmatrix} \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 - \sin q_1 \cos q_2 & 0 & l_1 \cos q_1 + l_2(\cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2) \\ \cos q_1 \sin q_2 + \sin q_1 \cos q_2 & \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 & 0 & l_1 \sin q_1 + l_2(\sin q_1 \cos q_2 + \cos q_1 \sin q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) & 0 & l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0 & l_2 \cdot \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

- Buscamos  $q_1$  y  $q_2$  a partir de las ecuaciones de posición.



$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

## Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

$$q_2 = \text{acos}\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)$$

Ejemplo: cinemática  
inversa del robot  
planar de 2GDL

## □ Hallamos ahora

$q_1$

$$\frac{y}{x} = \frac{l_1 \sin q_1 + l_2 (\sin q_1 \cos q_2 + \cos q_1 \sin q_2)}{l_1 \cos q_1 + l_2 (\cos(q_1) \cos(q_2) - \sin(q_1) \sin(q_2))} \quad (23)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin q_1 (l_1 + l_2 \cos q_2) + l_2 \cos q_1 \sin q_2}{\cos q_1 (l_1 + l_2 \cos q_2) - l_2 \sin q_1 \sin q_2} \quad (24)$$

dividimos por  $\cos q_1 (l_1 + l_2 \cos q_2)$  numerador y denominador

$$\frac{y}{x} = \frac{\tan q_1 + \frac{l_2 \sin q_2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)}}{1 - \tan q_1 \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}} \quad (25)$$

En esta ltima expresin aplicamos la identidad trigonomtrica:

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad (26)$$

Ejemplo: cinemática  
inversa del robot  
planar de 2GDL

□ Hallamos ahora  $q_1$

$$\frac{y}{x} = \frac{\tan q_1 + \frac{l_2 \sin q_2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)}}{1 - \tan q_1 \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}} = \tan(q_1 + B) \quad (27)$$

Donde,

$$\tan B = \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2} \quad (28)$$

As pues, podemos resolver:

$$\frac{y}{x} = \tan(q_1 + B) \quad (29)$$

$$q_1 = \arctan(y/x) - B \quad (30)$$

$$\tan B = \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2}$$

$$\tan B^2 = \frac{(l_2 \sin q_2)^2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)^2}$$

$$\tan^2 B + 1 = \frac{(l_2 \sin q_2)^2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)^2} + 1$$

$$\tan^2 B + 1 = \frac{1}{\cos^2 B} = \frac{(l_2 \sin q_2)^2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)^2} + 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 B} = \frac{l_2^2(1 - \cos^2 q_2)}{(l_1 + l_2 \cos q_2)^2} + 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 B} = \frac{l_2^2(1 - \cos^2 q_2) + (l_1 + l_2 \cos q_2)^2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 B} = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)^2}$$

Ahora sustituimos el  $\cos q_2$  de la ecuación 18

$$\frac{1}{\cos^2 B} = \frac{R^2}{(l_1 + l_2 \cos q_2)^2}$$

$$\cos B = \frac{(l_1 + l_2 \cos q_2)}{R}$$

$$\theta_1 = \arctan(y/x) \pm \arccos \frac{R^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 R}$$

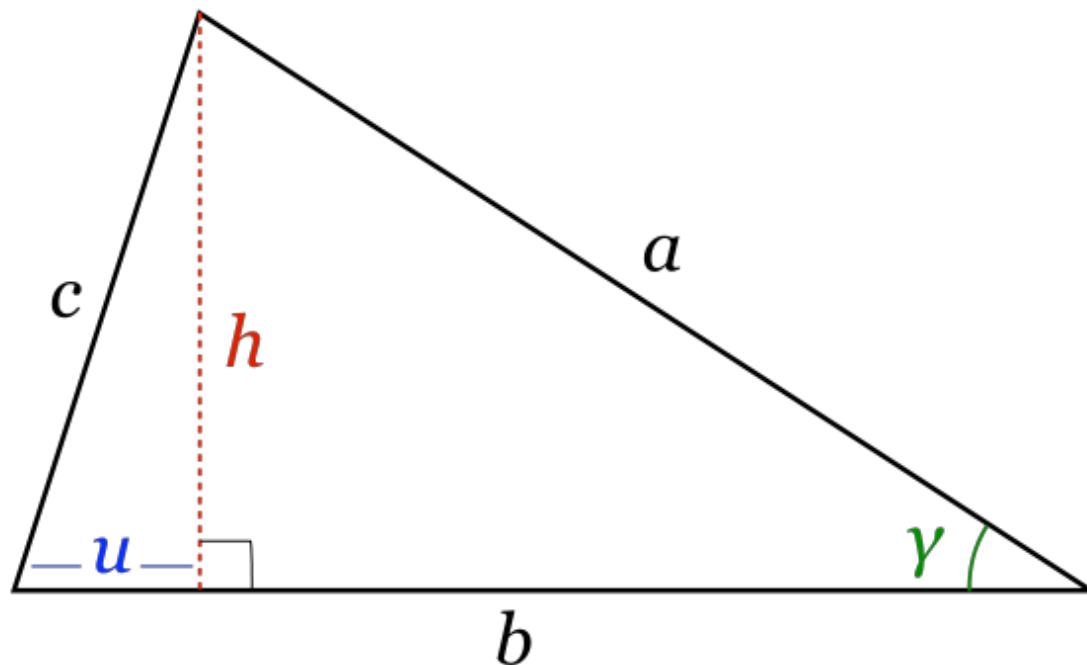
$$\cos B = \frac{(l_1 + l_2(\frac{R^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}))}{R}$$

$$\cos B = \frac{R^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 R}$$

$$B = \arccos(\frac{R^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 R})$$

# MÉTODO GEOMÉTRICO: ejemplo

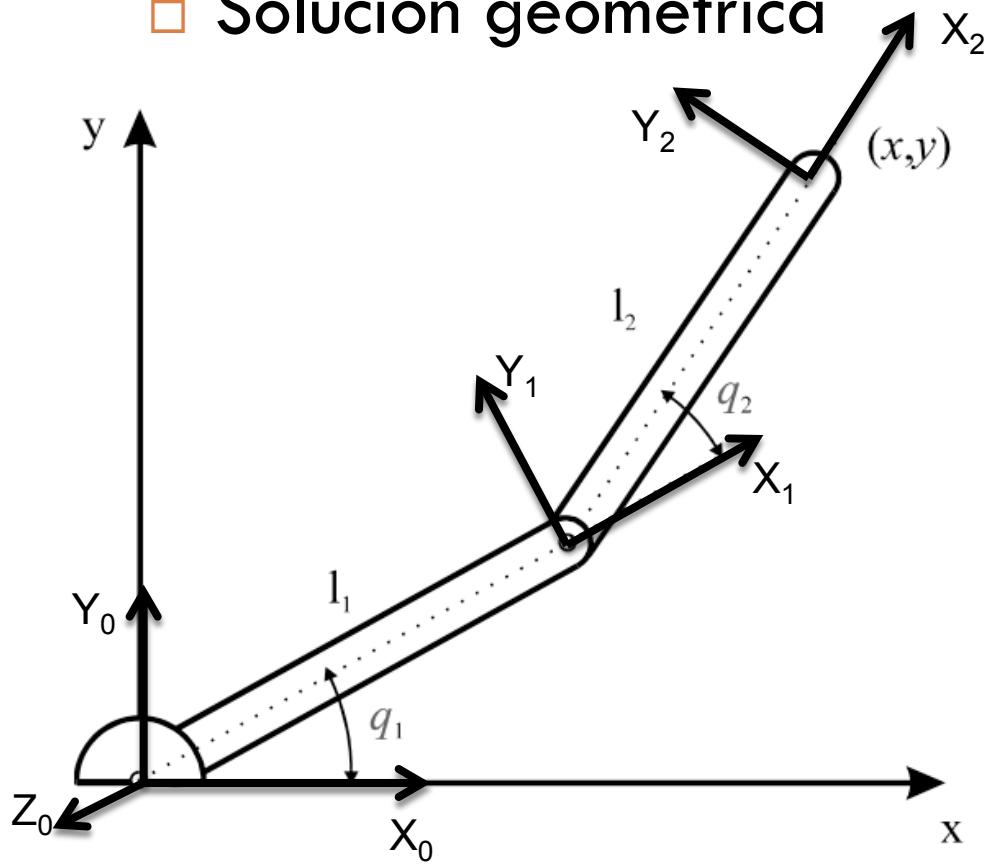
- Haremos uso del Teorema del coseno



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

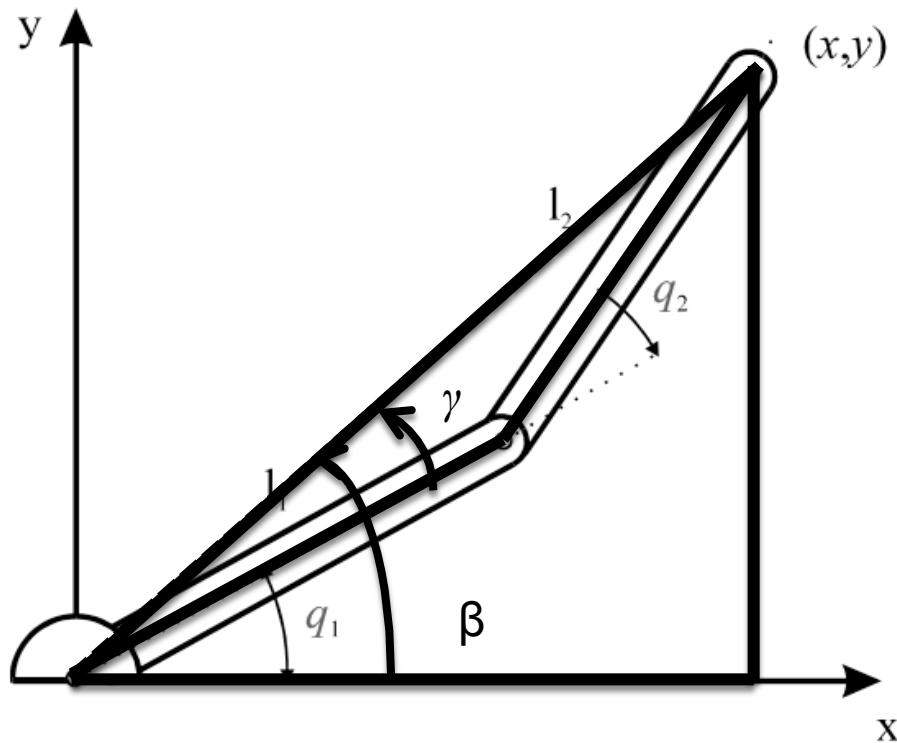
# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

## □ Solución geométrica



# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

- Utilizamos ahora métodos geométricos.



$$\beta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

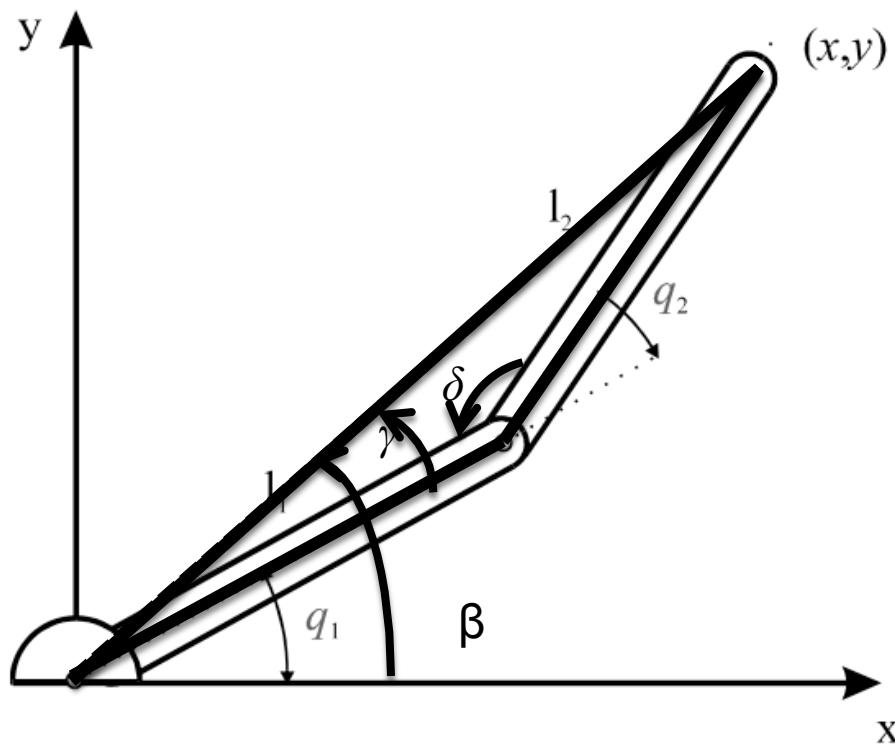
$$l_2^2 = l_1^2 + r^2 - 2rl_1 \cos(\gamma)$$

$$\gamma = \arccos \left( \frac{l_1^2 + r^2 - l_2^2}{2rl_1} \right)$$

$$q_1 = \beta - \gamma$$

# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

- Utilizamos ahora métodos geométricos.



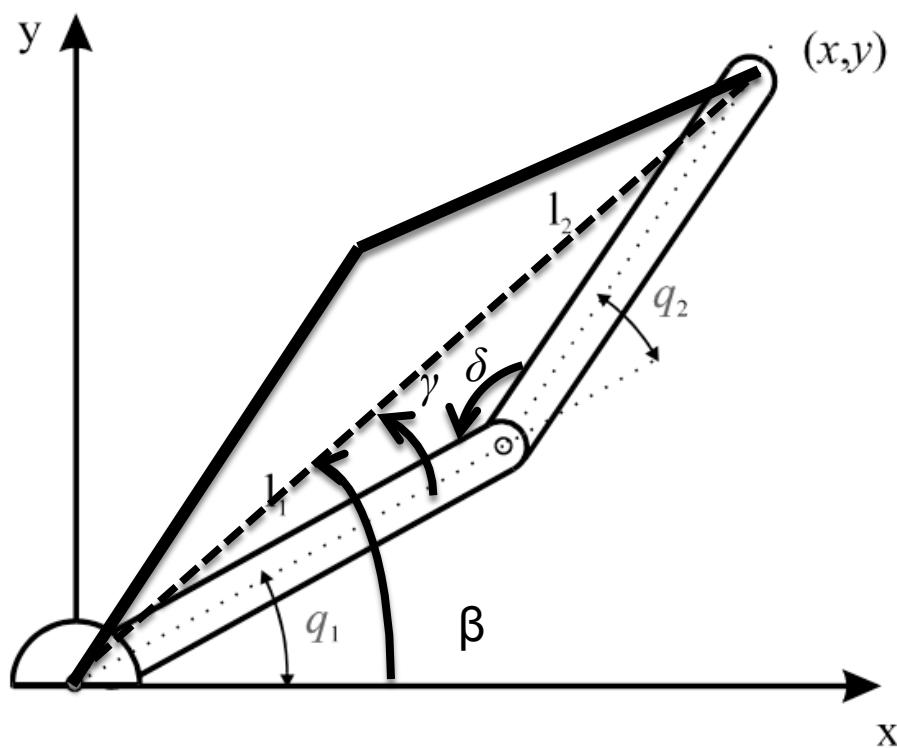
$$q_2 = \pi - \delta$$

$$r^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\delta)$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - r^2}{2l_1l_2}\right)$$

# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

## □ Solución alternativa!



## □ Codo abajo

$$q_1 = \beta - \gamma$$

$$q_2 = \pi - \delta$$

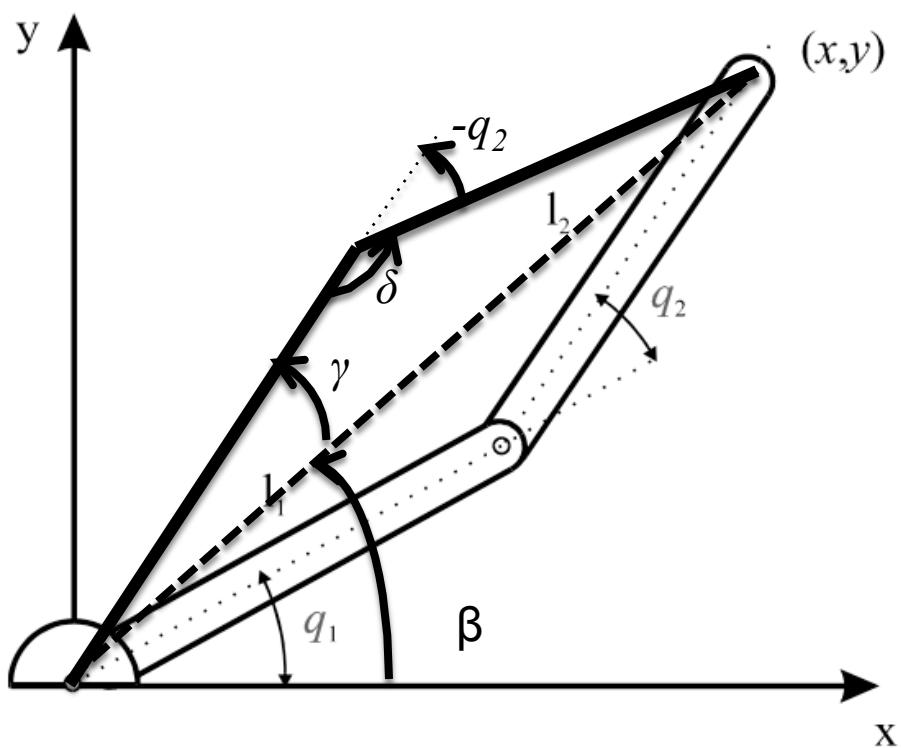
## □ Codo arriba

$$q_1 = \beta + \gamma$$

$$q_2 = \delta - \pi$$

# Ejemplo: cinemática inversa del robot planar de 2GDL

## □ Solución alternativa!



## □ Codo abajo

$$q_1 = \beta - \gamma$$

$$q_2 = \pi - \delta$$

## □ Codo arriba

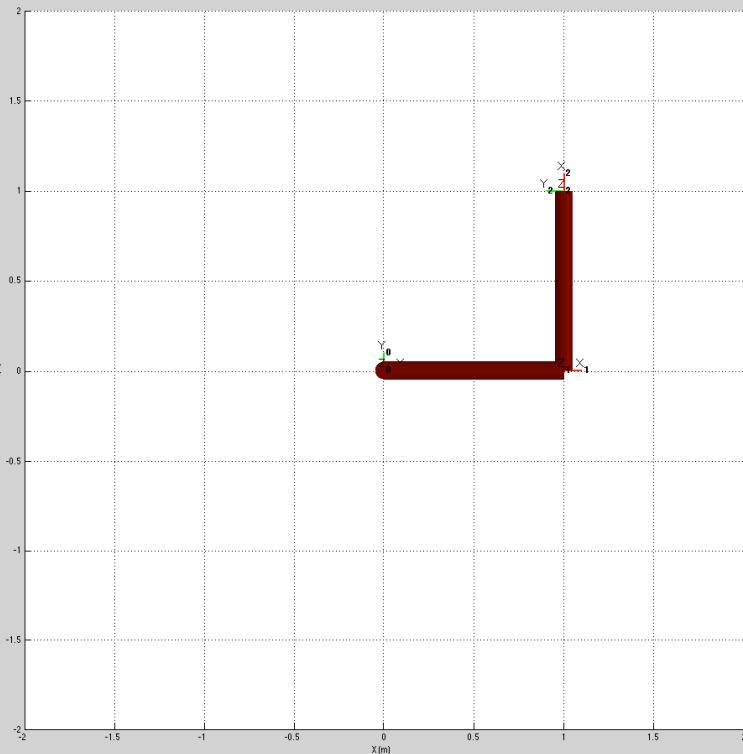
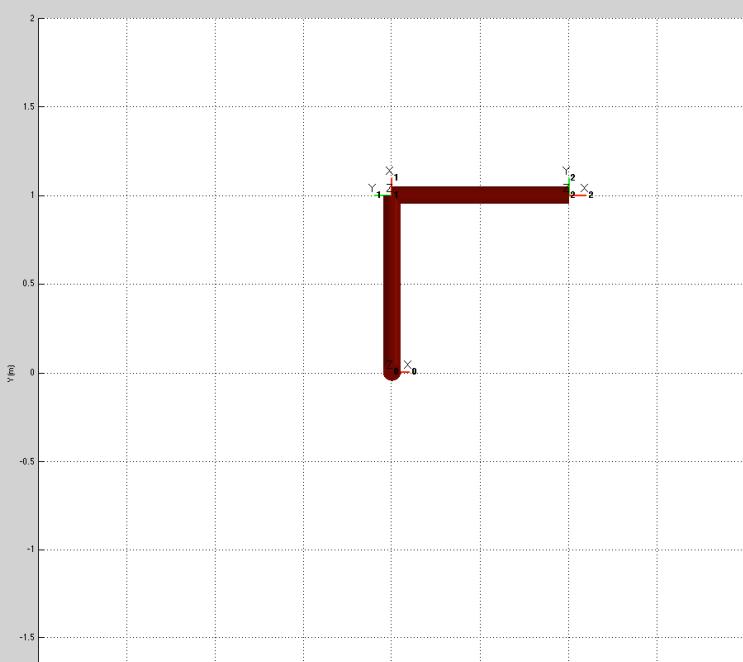
$$q_1 = \beta + \gamma$$

$$q_2 = \delta - \pi$$

# Ejemplo: cinemática inversa de un robot planar de 2GD

## □ Ejemplo:

```
>> T=directkinematic(robot, [0 pi/2])  
  
T =  
  
0.0000 -1.0000 0 1.0000  
1.0000 0.0000 0 1.0000  
0 0 1.0000 0  
0 0 0 1.0000  
  
>> drawrobot3d(robot, [0 pi/2])  
>> qinv = inversekinematic(robot, T)  
  
Computing inverse kinematics for the Example 2DOF planar arm robot  
qinv =  
  
1.5708 0.0000  
-1.5708 1.5708  
  
>> drawrobot3d(robot, qinv(:,1))  
>> drawrobot3d(robot, qinv(:,2))
```



# Cinemática inversa

## □ Repasa la cinemática inversa de brazos serie:

- [http://arvc.umh.es/arte/lectures\\_en.html](http://arvc.umh.es/arte/lectures_en.html)
- También en Youtube y iTunesU:
  - [http://www.youtube.com/watch?v=JHR3z\\_TC31E](http://www.youtube.com/watch?v=JHR3z_TC31E)
  - <https://itunes.apple.com/esitunes-u/robotica-umh1770-curso-2013/id681094508?mt=10#>

## □ Repásala con ARTE:

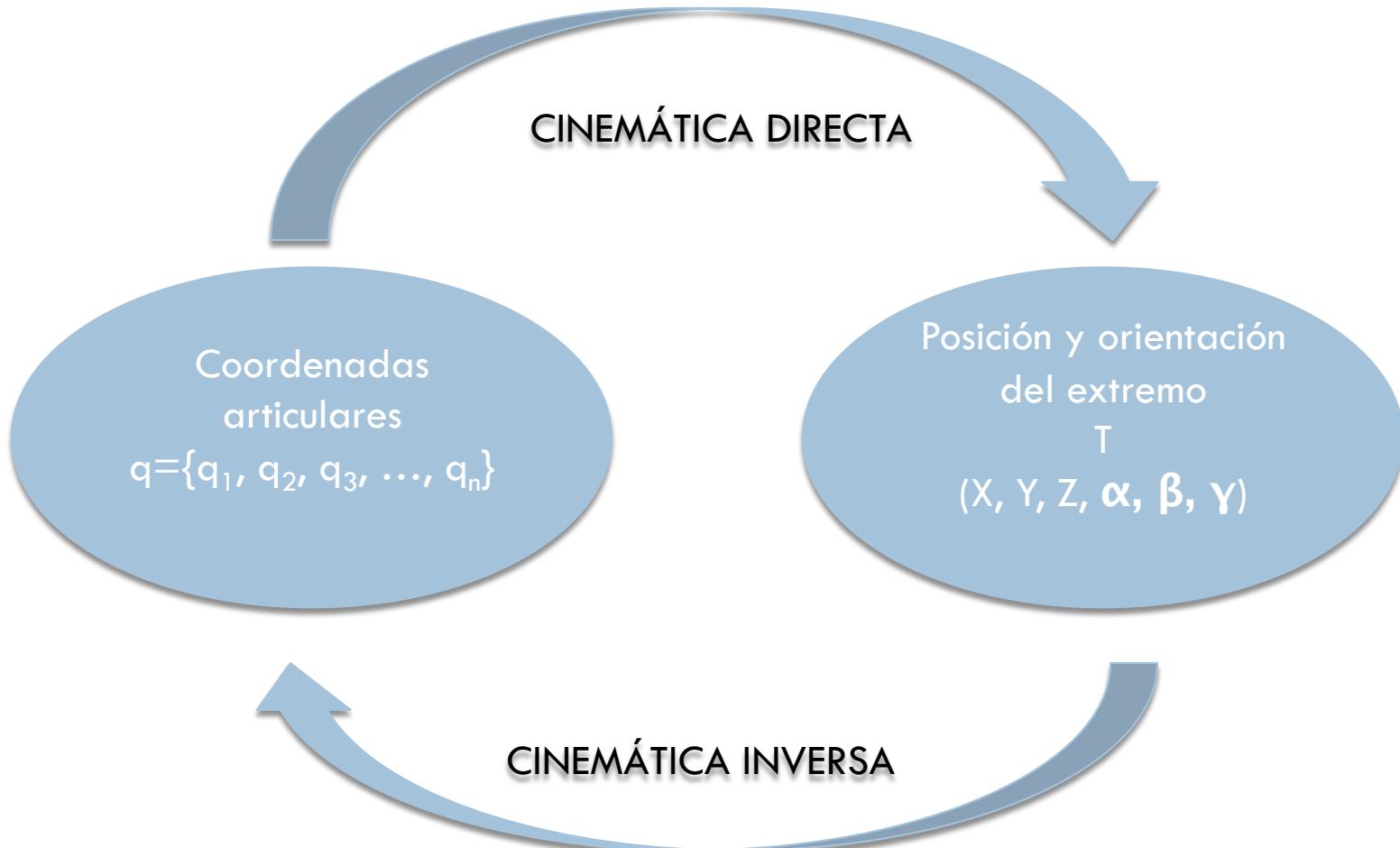
- <http://arvc.umh.es/arte>
- [http://arvc.umh.es/arte/practicals/pr2/practice2\\_english.pdf](http://arvc.umh.es/arte/practicals/pr2/practice2_english.pdf)
- <http://www.youtube.com/watch?v=h1xnJw3-a7M&list=PLCIKgnzRFYe72qDYmj5CRpR9ICNnQehup&index=20>



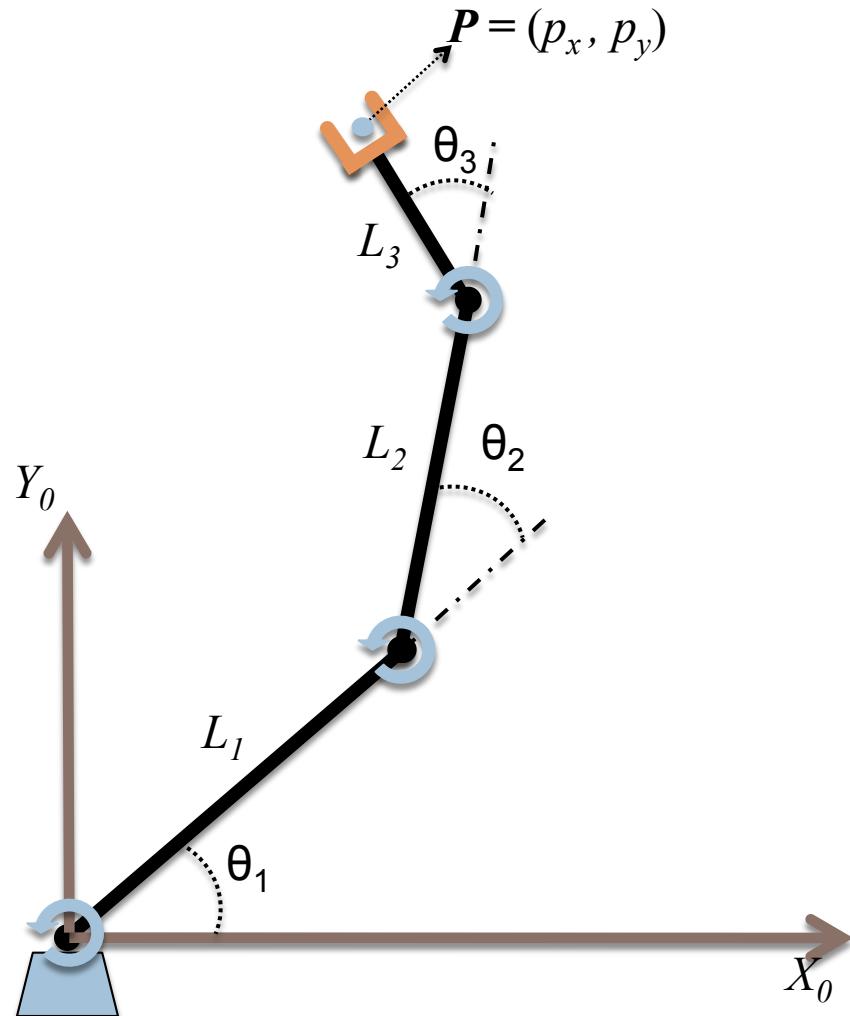
# Índice

- 8.1 Introducción a los robots paralelos
- 8.2 Criterio de Grübler
- 8.3 Cinemática
  - 8.3.1 Cinemática inversa
  - 8.3.2 Cinemática directa
- 8.4 Estructuras clásicas
  - Robot 5R
  - Robot 3RRR
  - Robot Delta

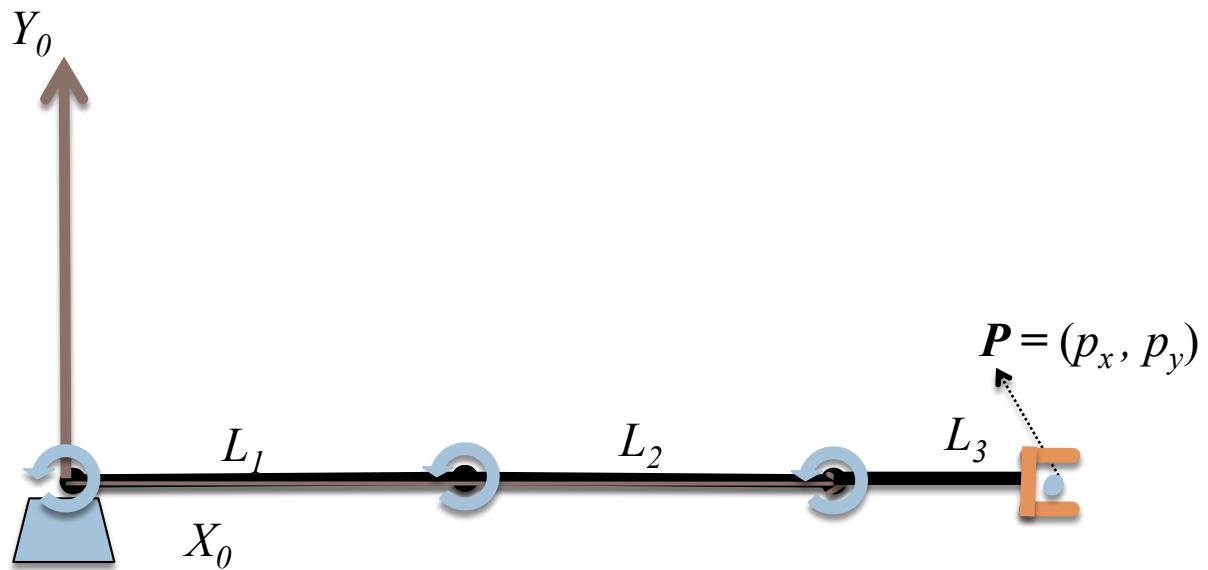
# Cinemática directa e inversa



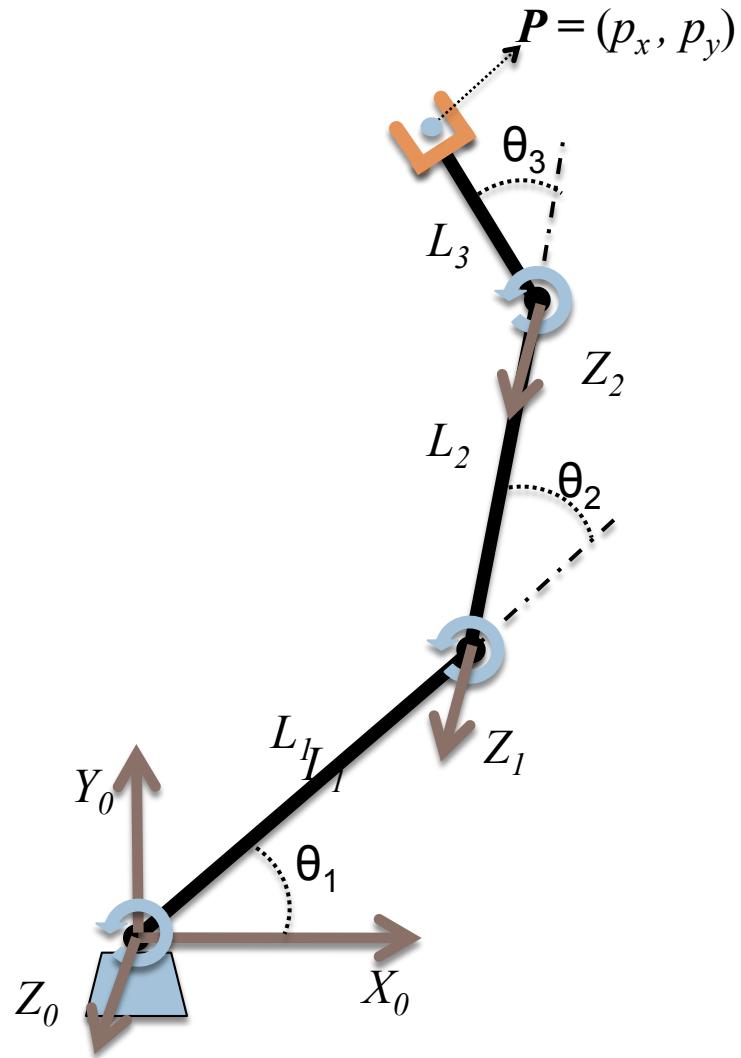
# Ejemplo: robot de 3 GDL



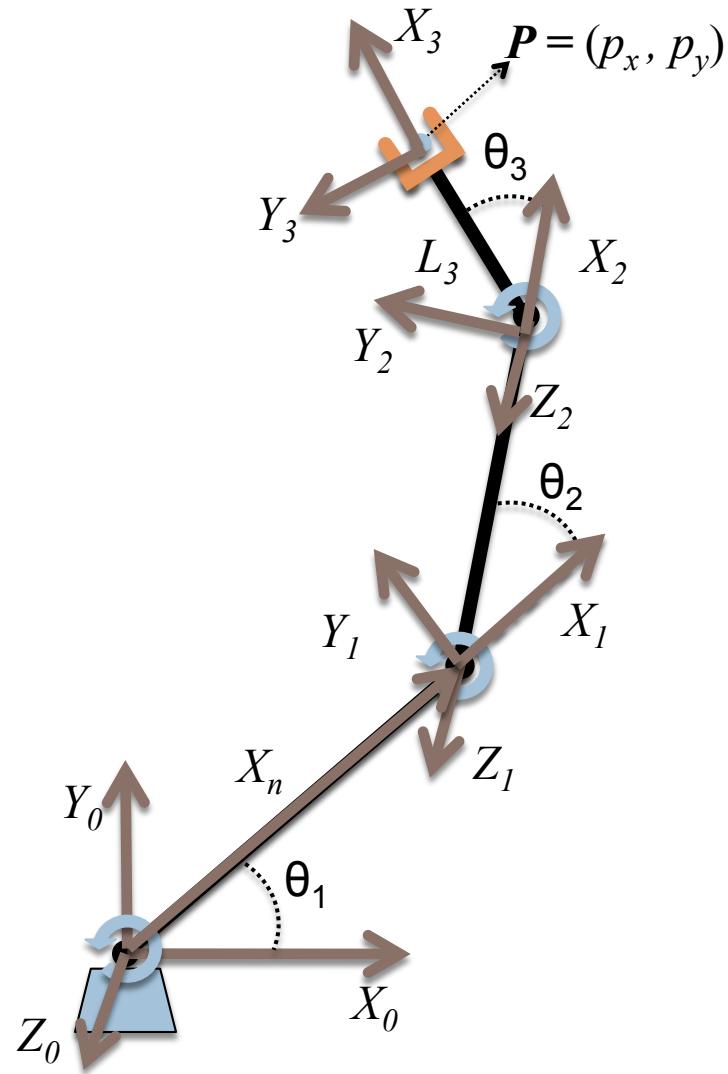
# Ejemplo: robot de 3 GDL



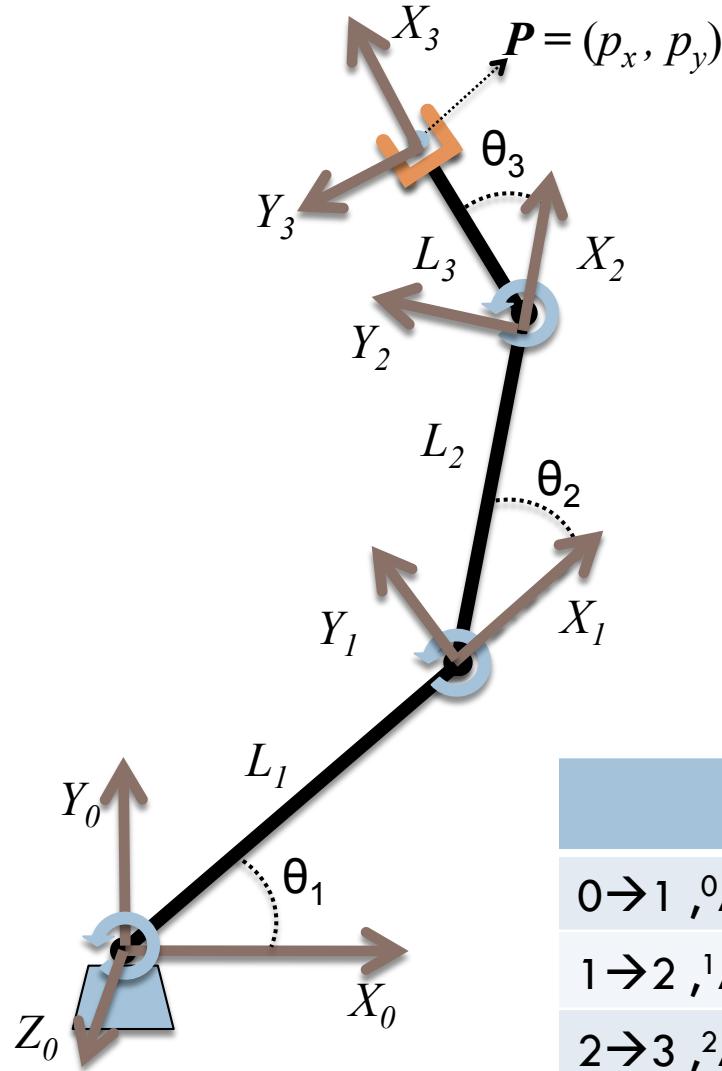
# Ejemplo: robot de 3 GDL



# Ejemplo: robot de 3 GDL



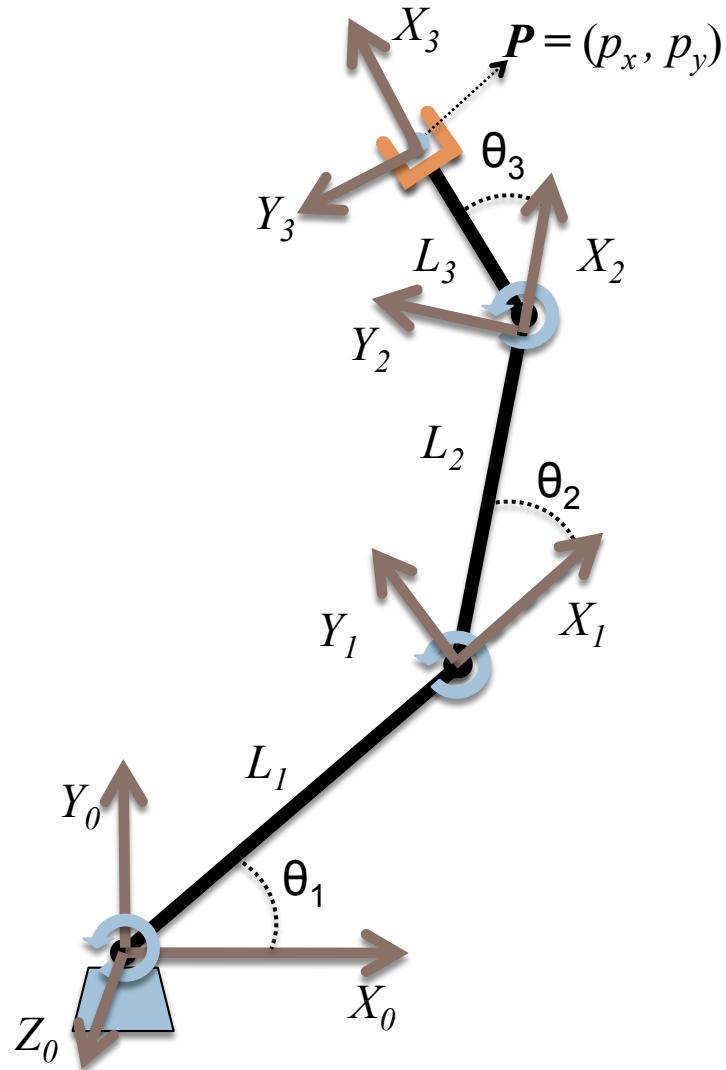
# Ejemplo: robot de 3 GDL



□ Colocados los sistemas, hacemos la tabla de D-H

	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
$0 \rightarrow 1, {}^0A_1$	$\theta_1$	0	$L_1$	0
$1 \rightarrow 2, {}^1A_2$	$\theta_2$	0	$L_2$	0
$2 \rightarrow 3, {}^2A_3$	$\theta_3$	0	$L_3$	0

# Ejemplo: robot de 3 GDL



□ Las matrices de DH quedan:

$${}^0 A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & l_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & l_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2 A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & l_3 \cdot \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & l_3 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: robot de 3 GDL

- Y si multiplicamos:

$$T = {}^0T_3 = {}^0A_1{}^1A_2{}^2A_3$$

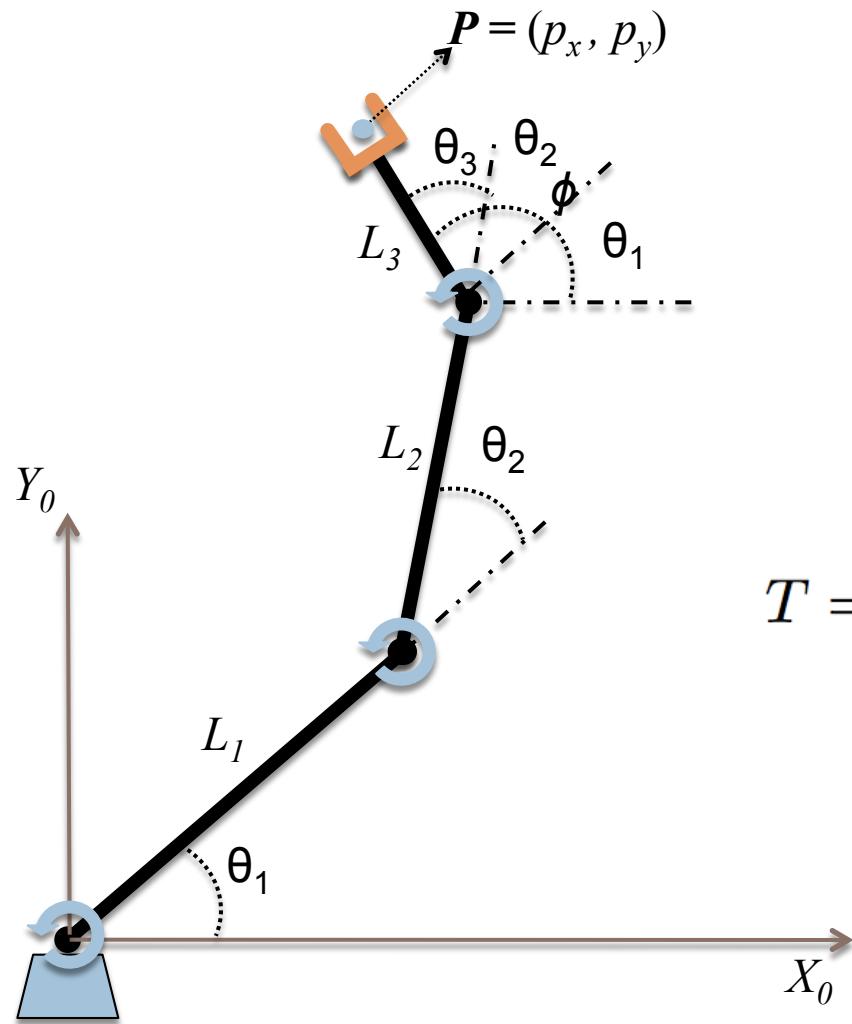
- Se puede demostrar que:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Que tiene la forma de

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & p_x \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: robot de 3 GDL



$$T = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & p_x \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Cinemática directa

- Repasa la cinemática directa de brazos serie:
  - [http://arvc.umh.es/arte/lectures\\_es.html](http://arvc.umh.es/arte/lectures_es.html)
  - También en Youtube y iTunesU:
    - [http://www.youtube.com/watch?v=JHR3z\\_TC31E](http://www.youtube.com/watch?v=JHR3z_TC31E)
    - <https://itunes.apple.com/esitunes-u/robotica-umh1770-curso-2013/id681094508?mt=10#>
- Repásala con ARTE:
  - <http://arvc.umh.es/arte>
  - [http://arvc.umh.es/arte/practicals/pr1/practice1\\_english.pdf](http://arvc.umh.es/arte/practicals/pr1/practice1_english.pdf)
  - <http://www.youtube.com/watch?v=Qg5HdVuTI3A>

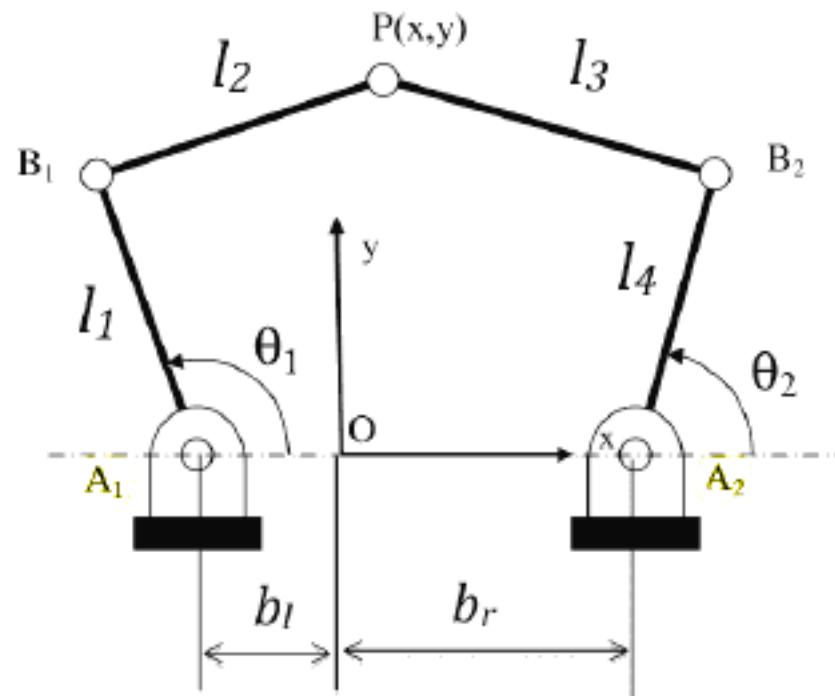


# Índice

- 8.1 Introducción a los robots paralelos
- 8.2 Criterio de Grübler
- 8.3 Cinemática
  - 8.3.1 Cinemática inversa
  - 8.3.2 Cinemática directa
- 8.4 Estructuras clásicas
  - Robot 5R
  - Robot 3RRR
  - Robot Delta

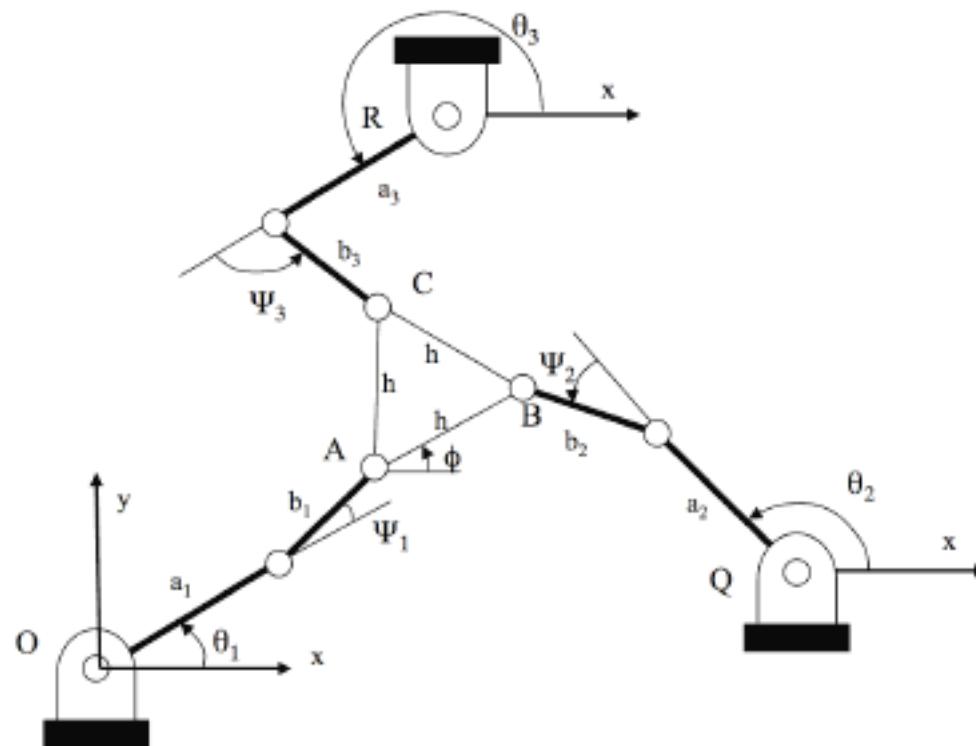
# Robot 5R

- 5 eslabones
- 5 articulaciones rotacionales.



# Robot 3RRR

- ¿eslabones?
- n articulaciones rotacionales.
- Criterio de Grübler



R

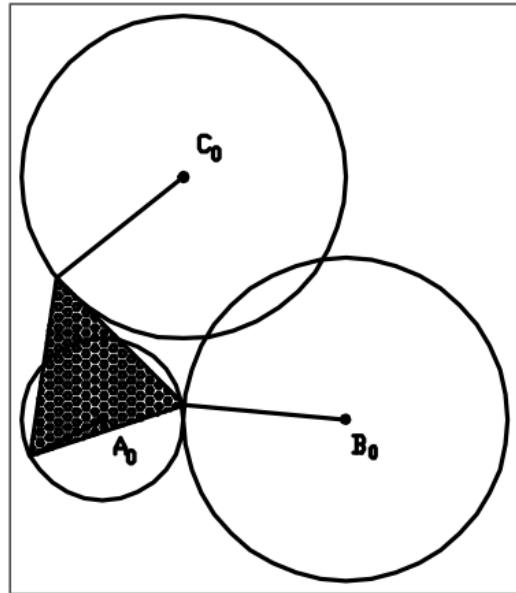


Figure 2: Position L1

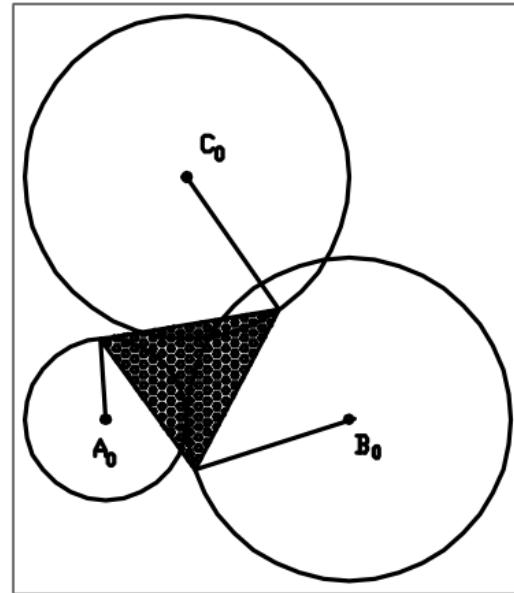


Figure 3: Position L2

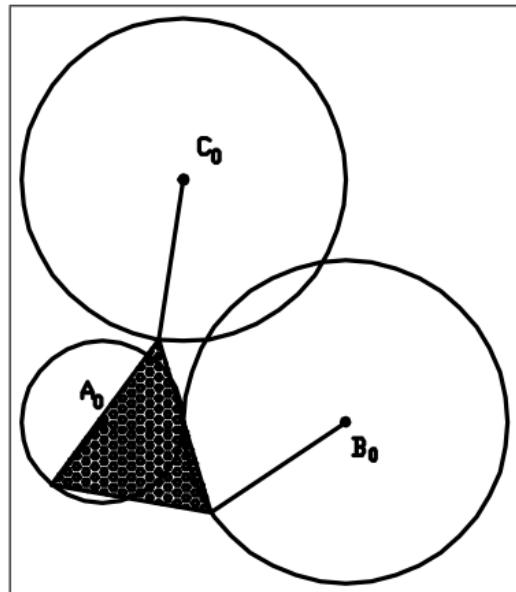


Figure 4: Position L3

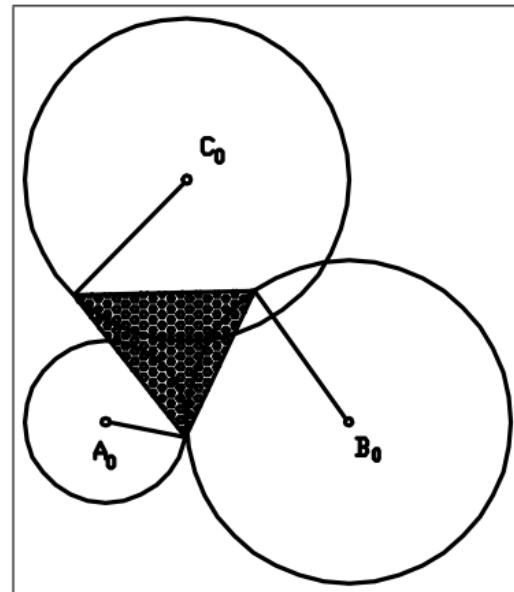
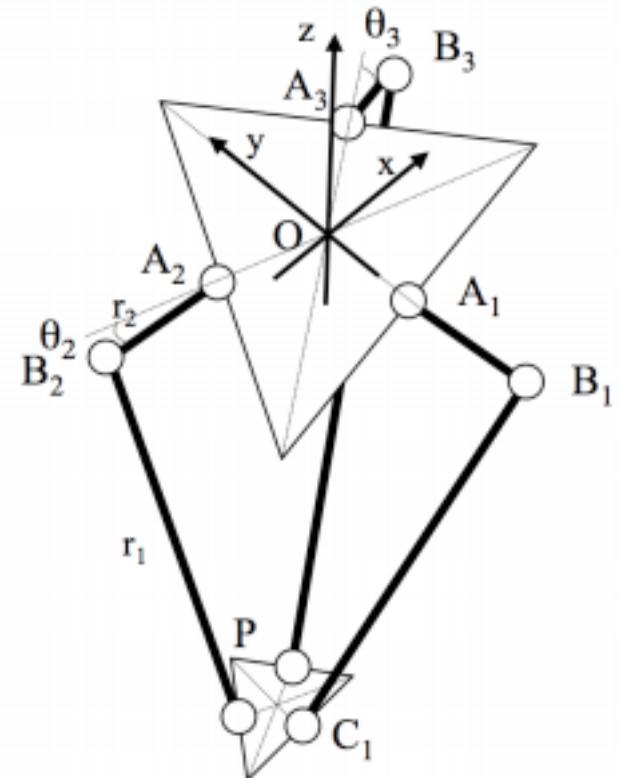


Figure 5: Position L4

# Robot Delta

- ¿eslabones?
- n articulaciones rotacionales.
- Criterio de Grübler



# Recursos

- Librería ARTE (A Robotics Toolbox for Education):
  - <http://arvc.umh.es/arte>
  - Librería para Matlab. Gratuita. Están incluidos un gran número de robots serie industriales. El robot 5R está incluído dentro de ARTE.
- PARALLEL UMH: Laboratorio virtual y remoto de robots paralelos. Simula los robots paralelos online. Mueve un robot paralelo real de forma remota.
  - <http://arvc.umh.es/label>
- Vídeos de clase y tutoriales en los canales de Youtube y iTunes
  - <http://www.youtube.com/playlist?list=PLCIKgnzRFYe72qDYmj5CRpR9ICNnQehup>
  - <https://itunes.apple.com/esitunes-u/robotica-umh1770-curso-2013/id681094508?mt=10>

# Bibliografía

- [1] Mechanisms and robot analysis with Matlab. D. B. Marghitu. 2009. Springer. DOI  
[10.1007/978-1-84800-391-0](https://doi.org/10.1007/978-1-84800-391-0). ISBN: 978-1-84800-390-3