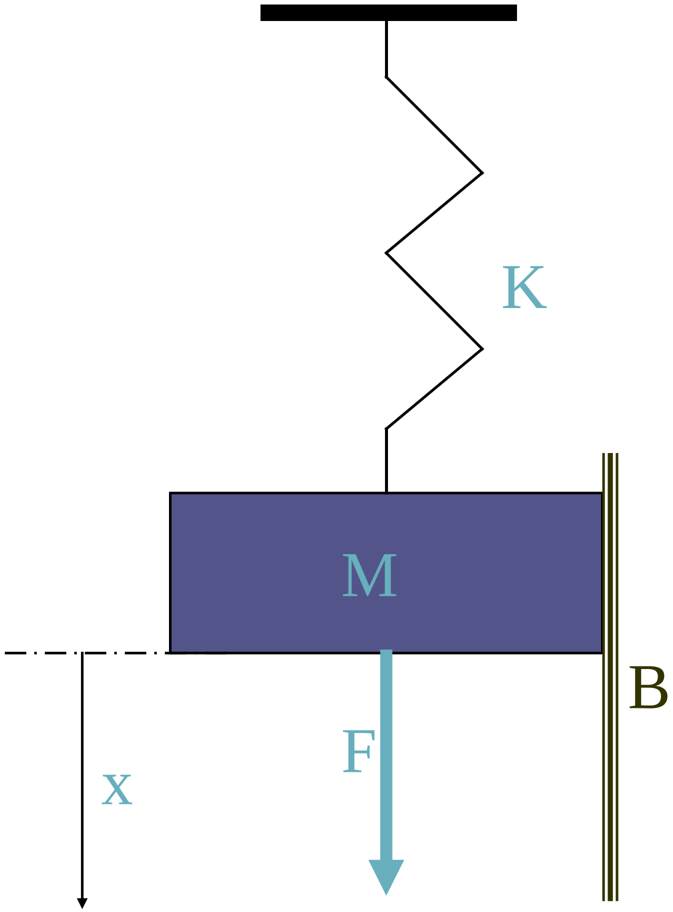
Dinámica del Robot

Electiva I – Robótica Industrial

Modelo dinámico de un robot

- Objetivo: conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo
- Relación matemática entre:
  - La localización del robot definida por sus variables articulares o por las coordenadas de localización de su extremo, y sus derivadas: velocidad y aceleración.
  - Las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones (o en el extremo del robot).
  - Los parámetros dimensionales del robot, como longitud, masas e inercias de sus elementos.

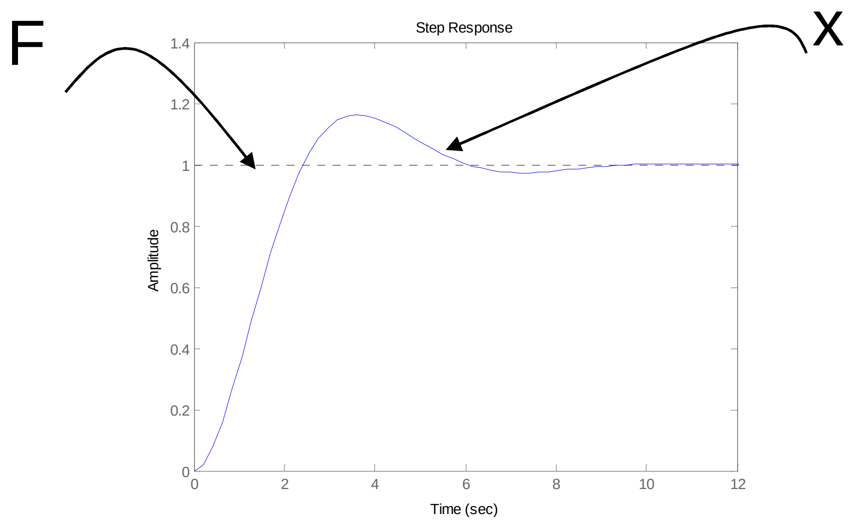
¿Qué es un modelo dinámico? ejemplo



Ecuación del modelo dinámico:

$$F = M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx - Mg$$

Permite relacionar la evolución de x(t) con los cambios de F(t)



Complejidad del modelo dinámico de un robot

- Crece con el numero de GDL del robot
- Interrelación entre los movimientos de las articulaciones (fuerzas de Coriolis)
- Relaciones no lineales
- No siempre es posible su obtención en forma cerrada (ecuaciones diferenciales de orden 2 acopladas a integrar)
- En ocasiones se debe recurrir a procedimientos numéricos iterativos
- Frecuentemente se realizan simplificaciones
- Necesidad de incluir los actuadores y su dinámica

Utilidad del modelo dinámico de un robot

- Simulación del movimiento del robot
- Diseño y evaluación de la estructura mecánica del robot
- Dimensionamiento de los actuadores
- Diseño y evaluación del control dinámico del robot
- Formar parte del propio algoritmo de control (en línea)

Modelos dinámicos directo e inverso de un robot

- Modelo dinámico directo

  Expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen

  $q(t)=f(\tau(t))$

- Modelo dinámico inverso

  Expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de la evolución de las coordenadas articulares y sus derivadas

  $\tau(t)=f(q(t))$

El modelo directo se resuelve por integración del inverso

Formulaciones del modelo dinámico de un robot

- Formulación de Newton-Euler
  - Basado en la segunda ley de Newton

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F} = \dfrac{d}{dt}(\mathrm{m}\mathbf{v}) \\ \sum \mathbf{T} = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\,\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\,\omega) \end{cases}$$

- Formulación de Lagrange
  - Basada en el balance energético

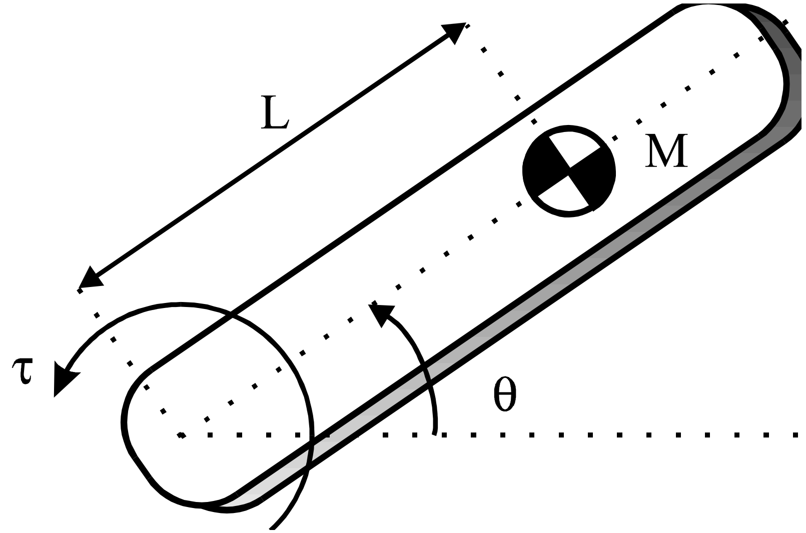
$$\begin{cases} \mathrm{L} = E_c - E_p \\ \tau_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_{\mathrm{i}}} - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial q_{\mathrm{i}}} \end{cases}$$

Formulación de Newton. Ejemplo robot 1 gdl

- Ley de Newton-Ley de Euler:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathrm{m}\mathbf{v})$$

$$\boxed{\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\,\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\,\omega)}$$



- Equilibrio fuerzas/pares:

$$\tau - \mathrm{MgL}\cos\theta = \mathrm{I}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \tau = \mathrm{ML}^2\ddot{\theta} + \mathrm{MgL}\cos\theta$$

Formulación de Lagrange. Ejemplo robot 1 gdl

$$\boxed{\begin{aligned} \mathsf{L} &= E_c - E_p \\ \tau_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_{\mathrm{i}}} - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q_{\mathrm{i}}} \end{aligned}}$$

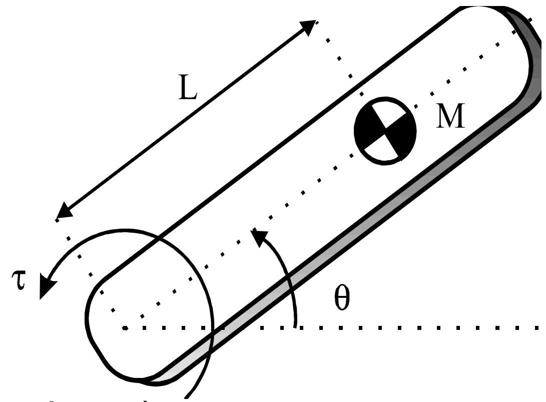
L : Función Lagrangiana.

E_c: energía cinética.

E_p: energía potencial.

τ_{i}: fuerza o pares aplicado sobre qi.

q_{i}: coordenadas generalizadas (articulares).



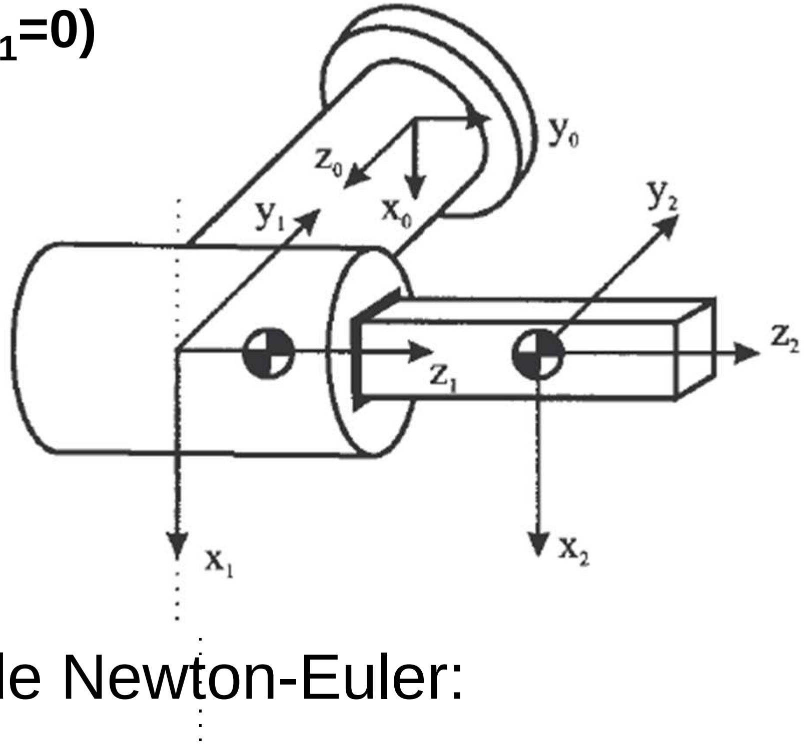
$$\begin{cases} E_c = \dfrac{1}{2}\mathrm{I}\,\dot{\theta}^2 \ \ \text{con} \ \ \mathrm{I} = \mathrm{ML2} \\ E_p = Mgh = MgL\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

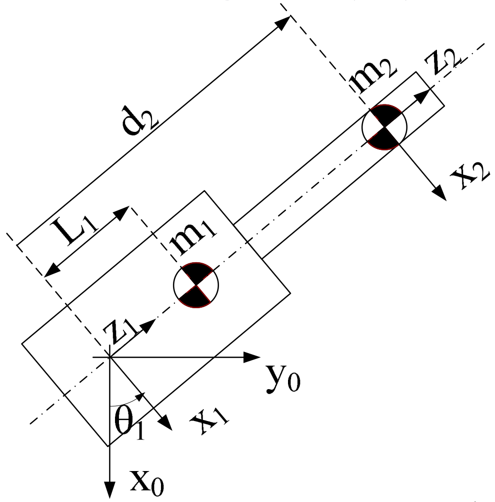
$$\mathsf{L} = Ec - Ep = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - MgLsen\theta \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \theta} &= -\mathrm{MgLcos}\theta \\ \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \mathrm{ML}^2\dot{\theta} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\theta}} &= \mathrm{ML}^2\ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \theta} = \tau$$

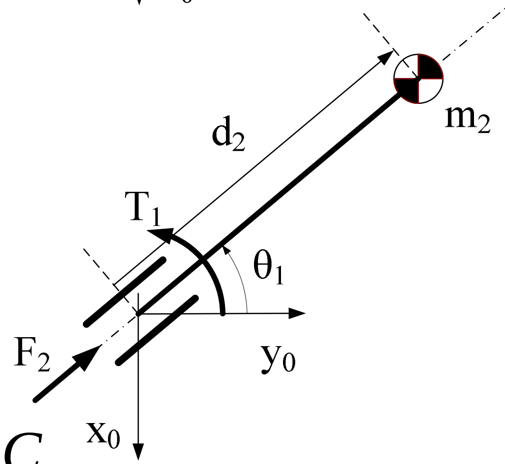
$$\boxed{\mathrm{ML}^2\ddot{\theta} + \mathrm{MgLcos}\theta = \tau}$$

Formulación de Newton. Ejemplo robot 2 gdl (1)

Robot Polar en disposición tumbada (con m_1=0)







Expresiones de Newton-Euler:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathrm{m}\mathbf{v})$$

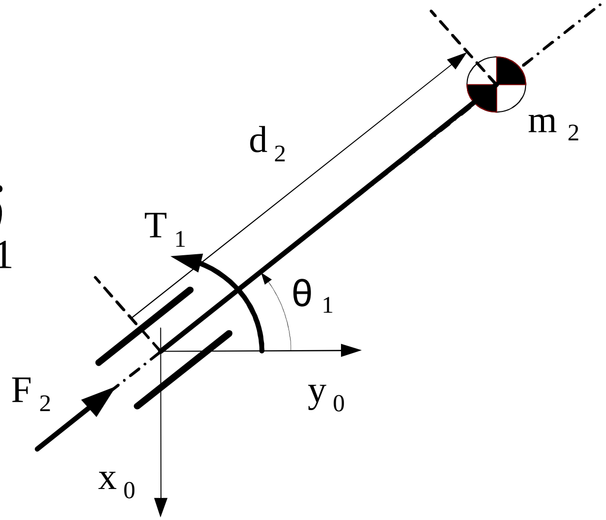
$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathrm{I}\omega)$$

$$T_1 = \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}_1) + m_2 g d_2 C_1$$

$$F_2 = m_2\ddot{d}_2 + m_2 g S_1 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^{\,2}$$

Formulación de Newton. Ejemplo robot 2 gdl (2)

Momento de Inercia **I** de la masa m_2 : $I = m_2 d_2^2$



$$\frac{d}{dt}(\mathrm{I}\dot{\theta}_1) = \frac{d}{dt}(m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1) = 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1$$

$$T_1 = \frac{d}{dt}(I\dot{\theta}_1) + m_2 g d_2 C_1$$

$$F_2 = m_2 \ddot{d}_2 + m_2 g S_1 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2$$

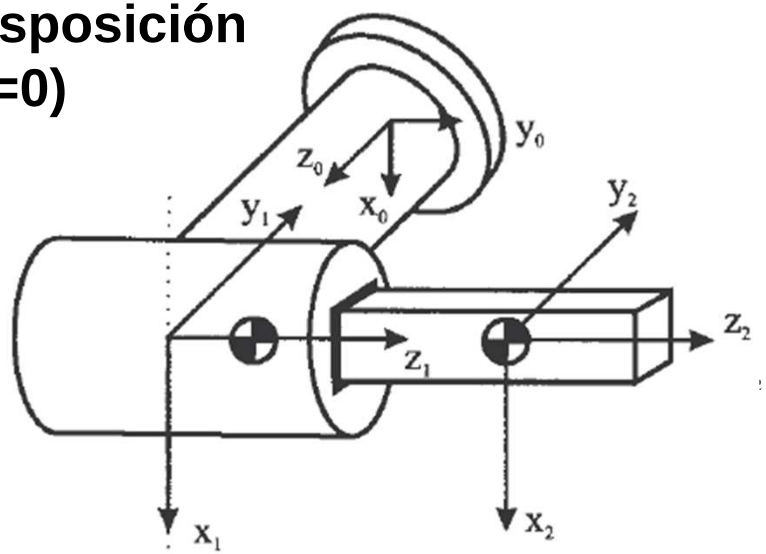
$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g d_2 C_1 \\ F_2 = m_2 \ddot{d}_2 + m_2 g S_1 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{cases}$$

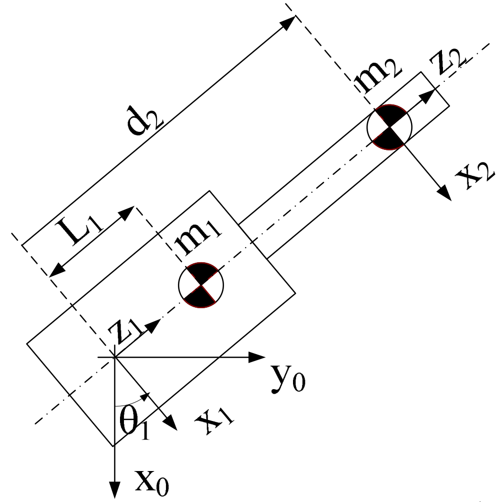
En forma matricial:

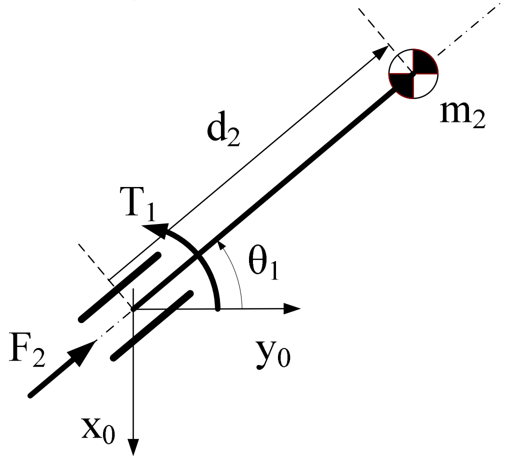
$$\begin{bmatrix} T_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 g d_2 C_1 \\ m_2 g S_1 \end{bmatrix}$$

Formulación de Lagrange.
Ejemplo robot polar 2 gdl (1)

Robot Polar en disposición tumbada (con m_1=0)







Coordenadas y velocidades de la masa m_2:

$$\begin{cases} x_2 = -d_2 S_1 \\ y_2 = d_2 C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = -(S_1 \dot{d}_2 + C_1 d_2 \dot{\theta}_1) \\ \dot{y}_2 = C_1 \dot{d}_2 - S_1 d_2 \dot{\theta}_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (S_1 \dot{d}_2 + C_1 d_2 \dot{\theta}_1)^2 + (C_1 \dot{d}_2 - S_1 d_2 \dot{\theta}_1)^2 =$$

$$= S_1^2 \dot{d}_2^2 + C_1^2 d_2^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 S_1 \dot{d}_2 C_1 d_2 \dot{\theta}_1 + C_1^2 \dot{d}_2^2 + S_1^2 d_2^2 \dot{\theta}_1^2 - 2 C_1 \dot{d}_2 S_1 d_2 \dot{\theta}_1$$

$$\boxed{= \dot{d}_2^2 + d_2^2 \dot{\theta}_1^2}$$

Formulación de Lagrange.
Ejemplo robot polar 2 gdl (2)

$$v_2^2 = \dot{d}_2^2 + d_2^2\dot{\theta}_1^2$$

Energía cinética: $$E_c = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{d}_2^2 + d_2^2\dot{\theta}_1^2)$$

Energía potencial: $$E_p = gm_2h_2 = gm_2y_2 = gm_2d_2S_1$$

Lagrangiana: $$\mathrm{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}m_2(\dot{d}_2^2 + d_2^2\dot{\theta}_1^2) - gm_2d_2S_1$$

Formulación de Lagrange. Ejemplo robot polar 2 gdl (3)

$$\mathsf{L} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{d}_2^2 + d_2^2 \dot{\theta}_1^2) - g m_2 d_2 S_1$$

Derivadas respecto de $\dot{q}_i$ y sus derivadas respecto del tiempo:

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_2 d_2^2 \dot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{d}_2} = m_2 \dot{d}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_1} = m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \ddot{d}_2$$

Derivadas respecto de q_i y sus derivadas respecto del tiempo:

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \theta_1} = -g m_2 d_2 C_1$$

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial d_2} = m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 - g m_2 S_1$$

Formulación de Lagrange.
Ejemplo robot polar 2 gdl (4)

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \Rightarrow$$

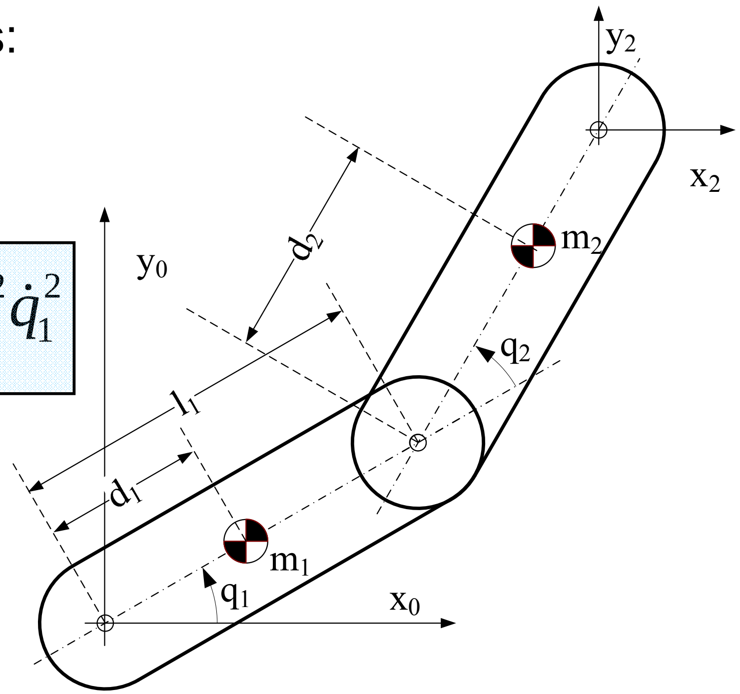
$$\begin{cases} T_1 = m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + g m_2 d_2 C_1 \\ F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + g m_2 S_1 \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 g d_2 C_1 \\ m_2 g S_1 \end{bmatrix}$$

Formulación de Lagrange.
Ejemplo robot articular 2 gdl (1)

Coordenadas y velocidades de los centros de masas:



Masa elemento 1:

$$\begin{cases} x_1 = d_1 C_1 \\ y_1 = d_1 S_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -d_1 S_1 \dot{q}_1 \\ \dot{y}_1 = d_1 C_1 \dot{q}_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = d_1^2 \dot{q}_1^2}$$

Masa elemento 2:

$$\begin{cases} x_2 = l_1 C_1 + d_2 C_{12} \\ y_2 = l_1 S_1 + d_2 S_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -(l_1 S_1 + d_2 S_{12})\dot{q}_1 - d_2 S_{12} \dot{q}_2 \\ \dot{y}_1 = (l_1 C_1 + d_2 C_{12})\dot{q}_1 + d_2 C_{12} \dot{q}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (l_1^2 + d_2^2 + 2 l_1 d_2 C_2)\dot{q}_1^2 + d_2^2 \dot{q}_2^2 + 2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\dot{q}_1 \dot{q}_2}$$

Formulación de Lagrange.
Ejemplo robot articular 2 gdl (2)

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = d_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$v_2^2 = (l_1^2 + d_2^2 + 2 l_1 d_2 C_2)\dot{q}_1^2 + d_2^2 \dot{q}_2^2 + 2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\dot{q}_1 \dot{q}_2$$

Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2 + 2 l_1 d_2 C_2)\right]\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 d_2^2\right]\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\dot{q}_1 \dot{q}_2$$

Energía potencial:

$$E_p = g(m_1 h_1 + m_2 h_2) = g(m_1 y_1 + m_2 y_2) =$$

$$= g(m_1 d_1 S_1 + m_2 l_1 S_1 + m_2 d_2 S_{12})$$

Lagrangiana:

$$\mathsf{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}\left[m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2 + 2 l_1 d_2 C_2)\right]\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 d_2^2\right]\dot{q}_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[m_2 2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\dot{q}_1 \dot{q}_2 - g(m_1 d_1 S_1 + m_2 l_1 S_1 + m_2 d_2 S_{12})$$

Formulación de Lagrange.
Ejemplo robot articular 2 gdl (3)

Lagrangiana:

$$\mathsf{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}\left[m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2)\right]\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 d_2^2\right]\dot{q}_2^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\left[m_2 2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 - g(m_1 d_1 S_1 + m_2 l_1 S_1 + m_2 d_2 S_{12})$$

Derivadas respecto de $\dot{q}_i$ y sus derivadas respecto del tiempo:

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_1} = \left[m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2)\right]\dot{q}_1 + \left[m_2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_1} = \left[m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2)\right]\ddot{q}_1 + \left[-m_2(2l_1 d_2 S_2 \dot{q}_2)\right]\dot{q}_1 + \left[m_2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\ddot{q}_2 + \left[-m_2 d_2 (l_1 S_2 \dot{q}_2)\right]\dot{q}_2 =$$

$$= \left[m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2)\right]\ddot{q}_1 - \left[m_2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\ddot{q}_2 - \left[2m_2 l_1 d_2 S_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 - \left[m_2 d_2 l_1 S_2\right]\dot{q}_2^2$$

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_2} = \left[m_2 d_2^2\right]\dot{q}_2 + \left[m_2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_2} = \left[m_2 d_2^2\right]\ddot{q}_2 + \left[m_2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\ddot{q}_1 + \left[-m_2 d_2 (l_1 S_2 \dot{q}_2)\right]\dot{q}_1 =$$

$$= \left[m_2 d_2^2\right]\ddot{q}_2 + \left[m_2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\ddot{q}_1 - \left[m_2 d_2 l_1 S_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2$$

Formulación de Lagrange.
Ejemplo robot articular 2 gdl (4)

Lagrangiana:

$$\mathsf{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}\left[m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2 + 2 l_1 d_2 C_2)\right]\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 d_2^2\right]\dot{q}_2^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[m_2 2 d_2 (l_1 C_2 + d_2)\right]\dot{q}_1 \dot{q}_2 - g(m_1 d_1 S_1 + m_2 l_1 S_1 + m_2 d_2 S_{12})$$

Derivadas respecto de q_i

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q_1} = -g\left[(m_1 d_1 + m_2 l_1) C_1 + m_2 d_2 C_{12}\right]$$

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q_2} = -\left[m_2 l_1 d_2 S_2\right]\dot{q}_1^2 - \left[m_2 d_2 l_1 S_2\right]\dot{q}_1 \dot{q}_2 - g m_2 d_2 C_{12}$$

Formulación de Lagrange.

Ejemplo robot articular 2 gdl (5)

Expresión de Lagrange

$$\tau_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mathrm{i}} - \frac{\partial L}{\partial q_\mathrm{i}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T_1 = \left[m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2)\right]\ddot{q}_1 + \left[m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2)\right]\ddot{q}_2 - \left[2m_2 l_1 d_2 S_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 - \left[m_2 d_2 l_1 S_2\right]\dot{q}_2^2 + \\ \quad + g\left[(m_1 d_1 + m_2 l_1)C_1 + m_2 d_2 C_{12}\right] \\ T_2 = \left[m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2)\right]\ddot{q}_1 + \left[m_2 d_2^2\right]\ddot{q}_2 - \left[m_2 d_2 l_1 S_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 + \left[m_2 l_1 d_2 S_2\right]\dot{q}_1^2 + \left[m_2 d_2 l_1 S_2\right]\dot{q}_1\dot{q}_2 + g m_2 d_2 C_{12} \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2) & m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2) \\ m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2) & m_2 d_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 d_2 S_2 \dot{q}_2 & -m_2 d_2 l_1 S_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 d_2 S_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} g\left[(m_1 d_1 + m_2 l_1)C_1 + m_2 d_2 C_{12}\right] \\ g m_2 d_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

Ecuación dinámica de un robot multiarticular

Expresión general del modelo dinámico de un robot:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(q)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(q,\dot{q}) + \mathbf{C}(q)$$

Con:

q : vector de coordenadas articulares.

τ : vector de fuerzas o pares que se aplica a cada articulación.

$D(q)$: la matriz de inercias, de dimensión (nxn), cuyos elementos son función de q.

$H(q,\dot{q})$: matriz (nx1) de fuerzas de Coriolis, dependiente de q y $\dot{\text{q}}$.

$C(q)$: matriz (nx1) de fuerzas de gravedad, dependiente de q.

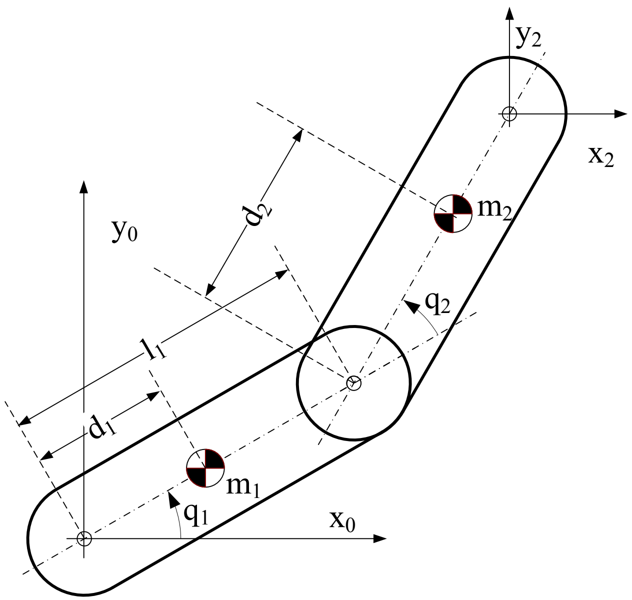
n : número de grados de libertad del robot.

Nota: El término de fuerzas de Coriolis puede expresarse alternativamente como Vector (nx1) o como producto de una Matriz (nxn) por el Vector de velocidades (nx1)

Ejemplo: Modelo dinámico de un robot de 2 grados de libertad

$$\tau = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} + \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2) & m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2) \\ m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2) & m_2 d_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 d_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 d_2 l_1 S_2 \dot{q}_2^2 \\ m_2 l_1 d_2 S_2 \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} g\left[(m_1 d_1 + m_2 l_1)C_1 + m_2 d_2 C_{12}\right] \\ g m_2 d_2 C_{12} \end{bmatrix}$$



O con el término de Corilis expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 d_1^2 + m_2(l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2) & m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2) \\ m_2 d_2(l_1 C_2 + d_2) & m_2 d_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 d_2 S_2 \dot{q}_2 & -m_2 d_2 l_1 S_2 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 d_2 S_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} g\left[(m_1 d_1 + m_2 l_1)C_1 + m_2 d_2 C_{12}\right] \\ g m_2 d_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

Algoritmos computacionales

Para robots con más de 3 gdl la deducción analítica se hace excesivamente compleja.
Alternativamente se han desarrollado algoritmos que permiten obtener el valor del par a partir de q(t) en pasos incrementales

- Lagrange
  - Basado en la representación de D-H
  - Poca eficiencia computacional: $O(n^4)$ (n=nº GDL)
  - Ecuaciones finales bien estructuradas (D,H,C por separado)
- Newton-Euler
  - Basado en operaciones vectoriales
  - Mayor eficiencia computacional: $O(n)$
  - Ecuaciones finales no estructuradas (D,H,C sumados)

Algoritmo computacional de Lagrange (1)

1. Asignar a cada barra un sistema de referencia de acuerdo D-H.
2. Obtener las matrices de transformación ^0A_i para cada barra i.
3. Obtener las matrices U_{ij} definidas por

$$U_{ij}=\delta\, {}^0A_i / \delta q_j = \begin{cases} {}^0A_{j-1}\, Q_j\, {}^{j-1}A_i & \text{si } j \leq i \\ [0] & \text{si } j>i \end{cases}$$

4. Obtener las matrices U_{ijk} definidas por

$$U_{ijk}=\delta U_{ij}/\delta q_k = \begin{cases} {}^0A_{j-1}\, Q_j\, {}^{j-1}A_{k-1}\, Q_k\, {}^{k-1}A_i & \text{si } i \geq k \geq j \\ {}^0A_{k-1}\, Q_k\, {}^{k-1}A_{j-1}\, Q_j\, {}^{j-1}A_i & \text{si } i \geq j \geq k \\ [0] & \text{si } i < j \text{ o } i < k \end{cases}$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación i es de rotación} \qquad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si la articulación i es de traslación}$$

Algoritmo computacional de Lagrange (2)

5. Obtener las matrices de PseudoInercias J_i para cada barra i.

$$J_i = \begin{pmatrix} \Sigma x_{ij}^2 m_j & \Sigma x_{ij} y_{ij} m_j & \Sigma x_{ij} z_{ij} m_j & \Sigma x_{ij} m_j \\ \Sigma y_{ij} x_{ij} m_j & \Sigma y_{ij}^2 m_j & \Sigma y_{ij} z_{ij} m_j & \Sigma y_{ij} m_j \\ \Sigma z_{ij} x_{ij} m_j & \Sigma z_{ij} y_{ij} m_j & \Sigma z_{ij}^2 m_j & \Sigma z_{ij} m_j \\ \Sigma x_{ij} m_j & \Sigma y_{ij} m_j & \Sigma z_{ij} m_j & \Sigma m_j \end{pmatrix}$$

Donde los Σ suponen los productos de cada masa mj de la barra por su distancia a los ejes Xi, Yi o Zi de esa barra. (Si la distribución de masa no es discreta se transformarán en Integrales)

6. Obtener la matriz de Inercia D definida por

$$d_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)} Tr\,(U_{kj}\, J_k\, U^T_{ki}) \qquad i,j=1,2...n$$

Algoritmo computacional de Lagrange (3)

7. Obtener los término h_{ikm} definidos por

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^{n} \mathrm{Traza}\left(\mathbf{U}_{jkm}\mathbf{J}_{j}\mathbf{U}_{ji}^{T}\right)$$

Con i,k,m = 1,2,...,n .

8. Obtener el vector columna H de fuerzas de Coriolis y Centrifugas, cuyos elementos son

$$h_{i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\dot{q}_{k}\dot{q}_{m}$$

9. Obtener el vector columna C de Fuerzas de Gravedad, cuyos elementos son:

$$c_{i} = \sum_{j=1}^{n}\left(-m_{j}\mathbf{g}\mathbf{U}_{ji}\,{}^{j}\mathbf{r}_{j}\right)$$

g: es el vector de gravedad expresado en el sistema de la base $\{S_0\}$y viene expresado por $(g_{x0}\ ,\ g_{y0}\ ,\ g_{z0}\ ,\ 0)$

${}^{i}\mathbf{r}_{j}$: es el vector de coordenadas homogéneas del centro de masas del elemento j expresado en el sistema de referencia del elemento i.

Algoritmo computacional de Lagrange (4)

10. La ecuación del modelo Dinámico es:

$$\tau = Dq'' + H + C$$

Notas:

1. g es el vector gravedad expresado en el sistema {0}
2. τ es el vector de fuerzas y pares motores efectivos aplicados sobre cada coordenada generalizadas
3. las matrices J_i y D son simétricas y semidefinidas positivas

Características del método computacional de Lagrange

- Utiliza el álgebra matricial, implicando un elevado número de operaciones $O(n^4)$
- En la solución parecen explícitamente los términos de Inercia, Coriolis y Gravedad
- Esto permite que si se desea se puede prescindir del término H (fuerzas de coriolis y centrifugas) (por ejemplo si las velocidades son lentas)
- Se han desarrollado otros métodos computacionales más eficientes a partir de la formulación de Lagrange

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (1)

```
% Algoritmo de Lagrange
% Para la solución del modelo dinámico inverso de un robot
%-------------------------------------------------------
% Robot cilíndrico 2 GDL (RD)
%(ver ej. 5.1 libro "Fundamentos de Robótica")
% Definición de la trayectoria
%------------------------------
% Definición simbólica de la posición
st1='sin(t)*t+pi/2';
sd2='sin(5*t)+t+1';
% Obtención simbólica de la velocidad y aceleración
svt1=diff(st1,'t');
svd2=diff(sd2,'t');
sat1=diff(svt1,'t');
sad2=diff(svd2,'t');
```

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (2)

```
% Parámetros dimensionales
L1=10;
m1=20;
m2=10;
g=[0 0 -9.8 0];
r11=[0 0 L1 1]';
r22=[0 0 0 1]';
%Matrices de Derivación
Qr=zeros(4);Qr(1,2)=-1;Qr(2,1)=1;
Qd=zeros(4);Qd(3,4)=1;
```

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (3)

```
% Bucle de paso de tiempo
%--------------------------
for tk=1:1:50;
t=(tk-1)/10;
 % Evaluación numérica de posición, velocidad y aceleración
%------------------------------------------------------
t1=eval(st1);Q1(tk)=t1;
d2=eval(sd2);Q2(tk)=d2;

vt1=eval(svt1);
vd2=eval(svd2);

at1=eval(sat1);
ad2=eval(sad2);
```

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (4)

```
% PASO 1-2 Obtención de las matrices de transformación Aij
%--------------------------------------------------------
% Matrices A00 y A11 son la identidad
A00=eye(4);
A11=eye(4);

%Evalua las matrices A01 y A02
A01 =[cos(t1) 0 -sin(t1)  0;
        sin(t1)   0  cos(t1) 0;
        0          -1   0          0;
        0           0   0          1];
A12 =[1 0 0 0  ;
        0 1 0 0  ;
         0 0 1 d2;
         0 0 0 1 ];
 %Evalua la matriz A02=A01*A2
A02=A01*A12;
```

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (5)

```
% PASO 3 Evaluacion matrices Uij
%-------------------------------
U11=A00*Qr*A01;
U12=zeros(4);
U21=A00*Qr*A02;
U22=A01*Qd*A12;

%PASO 4 Evaluación de las matrices Uijk
%-------------------------------------
U111=A00*Qr*A00*Qr*A01;
U112=zeros(4);
U121=zeros(4);
U122=zeros(4);
U211=A00*Qr*A00*Qr*A02;
U212=A00*Qr*A01*Qd*A12;
U221=A00*Qr*A01*Qd*A12;
U222=A01*Qd*A11*Qd*A12;
```

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (6)

```
% PASO 5 Evaluación matrices de pseudoinercia Ji
%---------------------------------------------
J1=zeros(4);J1(3,3)=L1^2*m1;J1(3,4)=L1*m1;J1(4,3)=L1*m1;J1(4,4)=m1;
J2=zeros(4);J2(4,4)=m2;


% PASO 6 Evaluación de la matriz de Inercias D
%---------------------------------------------
D(1,1)=trace(U11*J1*U11')+trace(U21*J2*U21');
D(1,2)=trace(U22*J2*U21');
D(2,1)=D(1,2);
D(2,2)=trace(U22*J2*U22');
```

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (7)

```
% PASO 7-8 Evaluación de la matriz de Coriolis H
%----------------------------------------------
h111=trace(U111*J1*U11')+trace(U211*J2*U21');
h112=trace(U212*J2*U21');
h121=trace(U221*J2*U21');
h122=trace(U222*J2*U21');
h211=trace(U211*J2*U22');
h212=trace(U212*J2*U22');
h221=trace(U221*J2*U22');
h222=trace(U222*J2*U22');

H(1,1)=h111*vt1*vt1 + h112*vt1*vd2 + h121*vd2*vt1 + h122*vd2*vd2;
H(2,1)=h211*vt1*vt1 + h212*vt1*vd2 + h221*vd2*vt1 + h222*vd2*vd2;
```

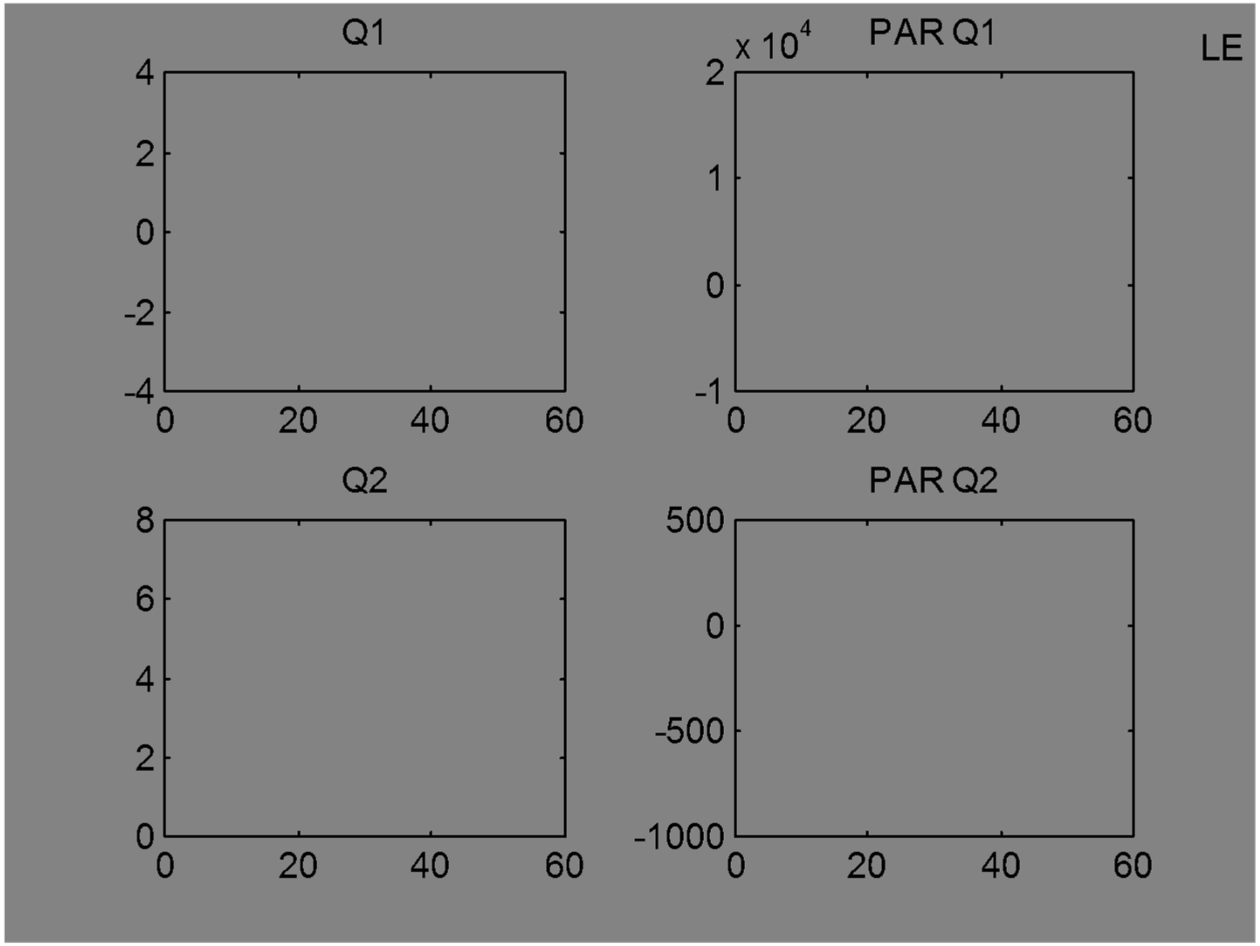
Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (7)

```
% PASO 9 Evaluación de la matriz de Gravedad C
%----------------------------------------------
C(1,1)=-m1*g*U11*r11-m2*g*U21*r22;
C(2,1)=-m1*g*U12*r11-m2*g*U22*r22;


% PASO 10 Evaluación de los pares
%----------------------------------
PARES(:,tk)=D*[at1 ad2]'+H+C;

end % fin del bucle de paso de tiempo
```

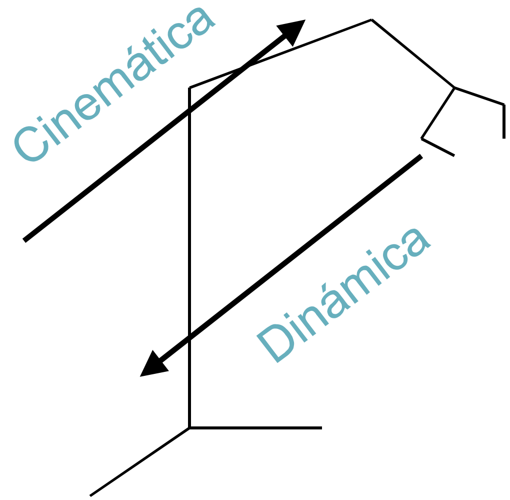
Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (8)

```
% Presentación Gráfica de los resultados
figure(2);
clf
subplot(2,2,1),plot(Q1),title('Q1')
subplot(2,2,2),plot(PARES(1,:)),title('PAR Q1')
subplot(2,2,3),plot(Q2),title('Q2')
subplot(2,2,4),plot(PARES(2,:)),title('PAR Q2')
text(70,2750,'LE')
```

Ejemplo programación del método de Lagrange para un robot 2 gdl (9)



Algoritmo computacional de Newton Euler



Basado en la 2ª ley de Newton $\Sigma F=ma$

Es un procedimiento recursivo en el que para

$i=1,..,n$ se calcula:

- w_i (Velocidades angular del sistema $\{S_i\}$: qi´)
- $w_i´$ (Aceleraciones angular del sistema $\{S_i\}$: qi")
- $v_i´, a_i$ (Aceleraciones lineales del sistema $\{S_i\}$ y del centro de masa de la barra i)

$i=n,..1$ se calcula:

- F_i (Fuerza ejercida en el centro de masa de la barra i)
- N_i (Par ejercido en el centro de masa de la barra i)
- f_i (Fuerza ejercida sobre la articulación i-1, unión barra i-1 con barra i, expresada en {i-1})
- n_i (Par ejercido sobre la articulación i-1, unión barra i-1 con barra i,expresada en {i-1})

Algoritmo computacional de Newton Euler (1)

N-E 1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo con las normas de D-H

Algoritmo computacional de Newton Euler (2)

N-E 2. (1) Establecer las condiciones iniciales para la base del robot

$^{\mathbf{0}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}$: velocidad angular=$[0,0,0]^T$

$^{\mathbf{0}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{0}}$: aceleracion angular=$[0,0,0]^T$

$^{\mathbf{0}}\mathbf{v}_{\mathbf{0}}$: velocidad lineal= $[0,0,0]^T$

$^{0}\dot{\mathbf{v}}_{0}$: aceleracion lineal= $-[g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}]^T$

$^{\mathbf{0}}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}, {}^{\mathbf{0}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{0}}\ y\ {}^{\mathbf{0}}\mathbf{v}_{\mathbf{0}}$ son típicamente nulos salvo que la base del robot esté en movimiento

$[g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}]$ es el vector de gravedad expresado en el sistema $\{S_0\}$ (habitualmente toma el valor [0, 0, -9.8] pues z_0 se sitúa vertical hacia arriba).

Algoritmo computacional de Newton Euler (3)

N-E 2. (2) Establecer las condiciones iniciales para el extremo del robot

Para el extremo del robot se conocerá la fuerza y el par ejercidos externamente ${}^{n+1}\mathbf{f}_{n+1}$ y ${}^{n+1}\mathbf{n}_{n+1}$

Otras condiciones iniciales:

$$\mathbf{z}_0 = [0,0,1]^T$$

${}^{i}\mathbf{p}_i$ = Vector que une el origen de $\{S_{i-1}\}$ con el de $\{S_i\}$ expresadas en $\{S_i\} = [a_i, d_i \operatorname{sen}(\alpha_i), d_i \cos(\alpha_i)]$

${}^{i}\mathbf{s}_i$ = Coordenadas del centro de masas del eslabon i respecto del sistema $\{S_i\}$

${}^{i}\mathbf{I}_i$ = Matriz de inercia del eslabón i expresado en un sistema paralelo al $\{S_i\}$ y con el origen en el centro de masas del eslabón.

Algoritmo computacional de Newton Euler (4)

N-E 3. Obtener las matrices de rotación ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ y sus inversas

$$ {}^{i}\mathbf{R}_{i-1} = \left({}^{i-1}\mathbf{R}_i \right)^{-1} = \left({}^{i-1}\mathbf{R}_i \right)^{T} $$

siendo:

$$ {}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{bmatrix} $$

Algoritmo computacional de Newton Euler (5)

Para **i=1 hasta n** hacer:

N-E 4. Obtener la velocidad angular del sistema $\{S_i\}$

$$
{}^{i}\omega_i = \begin{cases} {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\omega_{i-1} + \mathbf{z}_0\,\dot{\mathrm{q}}_i\right) & \text{si el eslabón i es de rotación} \\ {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\omega_{i-1} & \text{si el eslabón i es de traslación} \end{cases}
$$

N-E 5. Obtener la aceleración angular del sistema $\{S_i\}$

$$
{}^{i}\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\left({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \mathbf{z}_0\,\ddot{\mathrm{q}}_i\right) + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times \mathbf{z}_0\,\dot{\mathrm{q}}_i & \text{si el eslabón i es de rotación} \\ {}^{i}\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{si el eslabón i es de traslación} \end{cases}
$$

Algoritmo computacional de Newton Euler (6)

N-E 6. Obtener la aceleración lineal del sistema $\{S_i\}$

$$
{}^i\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_i \right) + {}^i\mathbf{R}_{i-1}\, {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} & \text{si el eslabón i es de rotación} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}\left(\mathbf{z}_0\, \ddot{q}_i + {}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} \right) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{p}_i + 2\,{}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0\, \dot{q}_i + & \\ \qquad + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{p}_i \right) & \text{si el eslabón i es de traslación} \end{cases}
$$

N-E 7. Obtener la aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón i

$$
{}^i\mathbf{a}_i = {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{s}_i + {}^i\omega_i \times \left({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{s}_i \right) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i
$$

Algoritmo computacional de Newton Euler (7)

Para **i=n hasta 1** hacer :

N-E 8. Obtener la fuerza ejercida sobre el eslabón i

$$ {}^{i}\mathbf{f}_i = {}^{i}\mathbf{R}_{i+1}\,{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + m_i\,{}^{i}\mathbf{a}_i $$

N-E 9. Obtener el par ejercido sobre el eslabón i

$$ {}^{i}\mathbf{n}_i = {}^{i}\mathbf{R}_{i+1}\left[{}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + \left({}^{i+1}\mathbf{R}_i\,{}^{i}\mathbf{p}_i\right)\times{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1}\right] + \left({}^{i}\mathbf{p}_i + {}^{i}\mathbf{s}_i\right)\times m_i\,{}^{i}\mathbf{a}_i + {}^{i}\mathbf{I}_i\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i}\omega_i\times\left({}^{i}\mathbf{I}_i\,{}^{i}\omega_i\right) $$

Algoritmo computacional de Newton Euler (8)

N-E 10. Obtener la fuerza o par aplicado sobre la articulación

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{n}_i^T \; {}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón i es de rotación} \\ {}^i\mathbf{f}_i^T \; {}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0 & \text{si el eslabón i es de traslación} \end{cases}$$

Características del método computacional de N-E

- Es un método recursivo: obtiene información de la articulación i a partir de la i-1 (o viceversa)
- Utiliza el álgebra vectorial
- Su orden de complejidad computacional es O(n)
- Proporciona el valor del par total (sin separar las componentes D, H y C

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (1)

```
% Algoritmo de Newton Euler Para la solución del
modelo
% dinámico inverso de un robot
%------------------------------------------------------
 % Robot cilíndrico 2 GDL (RD)
%(ver ej. 5.2 libro "Fundamentos de Robótica")
 % Definición de la trayectoria y fuerzas en TCP
%--------------------------------------------
% Definición simbólica de la posición
st1='sin(t)/100+pi/2';
sd2='sin(5*t)+1';
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (2)

```
% Obtención simbólica de la velocidad y aceleración
svt1=diff(st1,'t');
svd2=diff(sd2,'t');
sat1=diff(svt1,'t');
sad2=diff(svd2,'t');

%Fuerzas en el extremo
sf3='[0 0 0]';
sn3='[0 -t 0]';
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (3)

```
% Parámetros iniciales
%-----------------------------------
 % Velocidades y aceleraciones de la base del robot
w0=[0 0 0]';
dw0=[0 0 0]';
v0=[0 0 0]';
dv0=[0 0 9.8]';
% Parámetros dimensionales
L1=10;
m1=20;
m2=10;
z0=[0 0 1]';
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (4)

```
% Matriz de rotación entre  {S2} y TCP ({S3})
%-------------------------------------------
R23=eye(3);

% Bucle de paso de tiempo
%------------------------
for tk=1:1:50;
t=(tk-1)/10;
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (5)

```
% Evaluación numérica de posición, velocidad y aceleración
%------------------------------------------------------------
t1=eval(st1);Q1(tk)=t1;
d2=eval(sd2);Q2(tk)=d2;
 vt1=eval(svt1);
vd2=eval(svd2);
 at1=eval(sat1);
ad2=eval(sad2);

 %Evaluación numérica de las fuerzas y pares en el TCP
%-----------------------------------------------
n3=eval(sn3)' ;
f3=eval(sf3)' ;
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (6)

```
% PASO 1-2 Obtención de las matrices de rotación R01 y R12
%---------------------------------------------------------
 R01 =[cos(t1) 0 -sin(t1);sin(t1) 0 cos(t1);0 -1 0];
R12 =[1 0 0;0 1 0;0 0 1];

 % PASO 3 Evaluación de los vectores p,s y de la matriz de inercias
%-----------------------------------------------------------------
p1=[0 0 0]';        %Coordenadas de {S1} respecto {S0}
p2=[0 0 d2]';       %Coordenadas de {S2} respecto {S1}
s1=[0 0 L1]';       %Coordenadas del cdg de 1 respecto {S1}
s2=[0 0 0]';        %Coordenadas del cdg de 2 respecto {S2}
I1=zeros(3);        %Inercias de 1 respecto su cdg en la base {S1}
I2=zeros(3);        %Inercias de 2 respecto su cdg en la base {S2};
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (7)

```
%PASO 4 Evaluación de las velocidades angulares de {Si}
%----------------------------------------------------
w1=R01'*(w0+z0*vt1);
w2=R12'*w1;

% PASO 5 Evaluación de las aceleraciones angulares de {Si}
%-------------------------------------------------------
dw1=R01'*(dw0+z0*at1)+cross(w0,z0*vt1);
dw2=R12'*dw1;
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (8)

```
% PASO 6 Evaluación de las aceleraciones lineales de {Si}
%-------------------------------------------------------
dv1=cross(dw1,p1)+cross(w1,cross(w1,p1))+R01'*dv0;
dv2=R12'*(z0*ad2+dv1)+cross(dw2,p2)+cross(2*w2,(R12'*z0*vd2))+
   cross(w2,cross(w2,p2));

% PASO 7 Evaluación de la aceleración angular de los cdg
%-----------------------------------------------------
a1=cross(dw1,s1)+cross(w1,cross(w1,s1))+dv1;
a2=cross(dw2,s2)+cross(w2,cross(w2,s2))+dv2;
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (9)

```
% PASO 8 Evaluación de las fuerzas sobre los eslabones
%---------------------------------------------------
f2=R23*f3+m2*a2;
f1=R12*f2+m1*a1;

% PASO 9 Evaluación de los pares sobre los eslabones
%---------------------------------------------------
n2=R23*(n3+cross((R23*p2),f3))+cross((p2+s2),m2*a2)+I2*dw2+
   cross(w2,(I2*w2));
n1=R12*(n2+cross((R12*p1),f2))+cross((p1+s1),m1*a1)+I1*dw1+
   cross(w1,(I1*w1));
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (10)

```
% PASO 10 Evaluación de los pares
%----------------------------------
P2=f2'*R12'*z0;
P1=n1'*R01'*z0;
PARES(1,tk)=P1;
PARES(2,tk)=P2;

PARES2(1,tk)=T1;
PARES2(2,tk)=F2;
%-.-.-.--.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.
 end % fin del bucle de paso de tiempo
```

Ejemplo programación del método N-E para un robot 2 gdl (11)

```
% Presentación Gráfica de los resultados
figure(1);
clf
subplot(2,2,1),plot(Q1),title('Q1')
subplot(2,2,2),plot(PARES(1,:)),title('PAR Q1')
subplot(2,2,3),plot(Q2),title('Q2')
subplot(2,2,4),plot(PARES(2,:)),title('PAR Q2')
text(70,2750,'NE')
```

Comparación de métodos

Método	Lagrange-Euler	Newton-Euler
Multiplicaciones	$^{128}/_{3}n^4 + {}^{512}/_{3}n^3 + {}$ $+ {}^{739}/_{3}n^2 + {}^{160}/_{3}n$	$132n$
Sumas	$^{98}/_{3}n^4 + {}^{781}/_{6}n^3 + {}$ $+ {}^{559}/_{3}n^2 + {}^{245}/_{6}n$	$111n - 4$
Representación cinemática	Matrices homogéneas 4×4	Matrices de rotación y vectores de posición
Ecuaciones de movimiento	Ecuaciones diferenciales en forma cerrada	Ecuaciones recursivas

Modelo dinámico en Variables de Estado

Permite resolver computacionalmente el modelo directo:

$$D\ddot{q} + H + C = \tau \Rightarrow D\ddot{q} + N = \tau \Rightarrow \ddot{q} = D^{-1}\left[\tau - N\right]$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -D^{-1}N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D^{-1} \end{bmatrix}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix} \mathrm{q} \\ \dot{\mathrm{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{q} \\ \dot{\mathrm{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}\mathrm{u} \quad \mathrm{con} \quad \mathrm{u} = \mathrm{D}^{-1}(\tau - \mathrm{N})$$

Partiendo de unas condiciones iniciales de q y *d*q/*dt* y de los valores de τ en cada instante de tiempo, se evaluarían los valores del vector u y a partir de él la derivada del vector de estado (q,*d*q/*dt*). A partir de ella se evalúa el estado en el siguiente instante mediante:

$$q(k+1) = \dot{q}(k)\Delta t + q(k)$$

Modelo dinámico en el espacio de la tarea

$$\dot{\upsilon} = \left[v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z \right]^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\upsilon} = \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\upsilon} = \dot{\mathbf{J}}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\,\ddot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\,\ddot{\upsilon} - \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\,\dot{\mathbf{q}}$$

$$\text{Potencia} = \text{Par} \cdot \text{velocidad} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\,\dot{\upsilon} = \tau^{T}\,\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{T}^{T}\,\dot{\upsilon} = \tau^{T}\,\dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{T}\mathbf{J}\,\dot{\mathbf{q}} = \tau^{T}\,\dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}^{T}\mathbf{J} = \tau^{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \mathbf{J}^{T}\mathbf{T}}$$

Sustituyendo en la ecuación del modelo dinámico $\dot{q}$ y τ

$$\tau = \mathbf{D}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} + \mathbf{C} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{J}^{T}\mathbf{T} = \mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\upsilon} - \mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{H} + \mathbf{C} \quad \Rightarrow$$

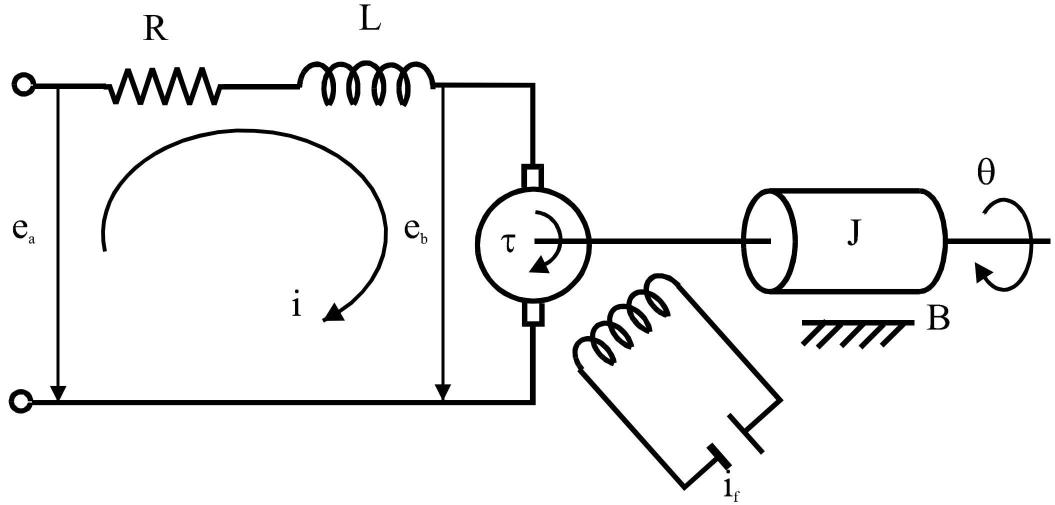
$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{J}^{T}\right)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\ddot{\upsilon} - \left(\mathbf{J}^{T}\right)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{J}^{T}\right)^{-1}\mathbf{H} + \left(\mathbf{J}^{T}\right)^{-1}\mathbf{C} \quad \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{D}_j\ddot{\upsilon} + \mathbf{H}_j + \mathbf{C}_j$$

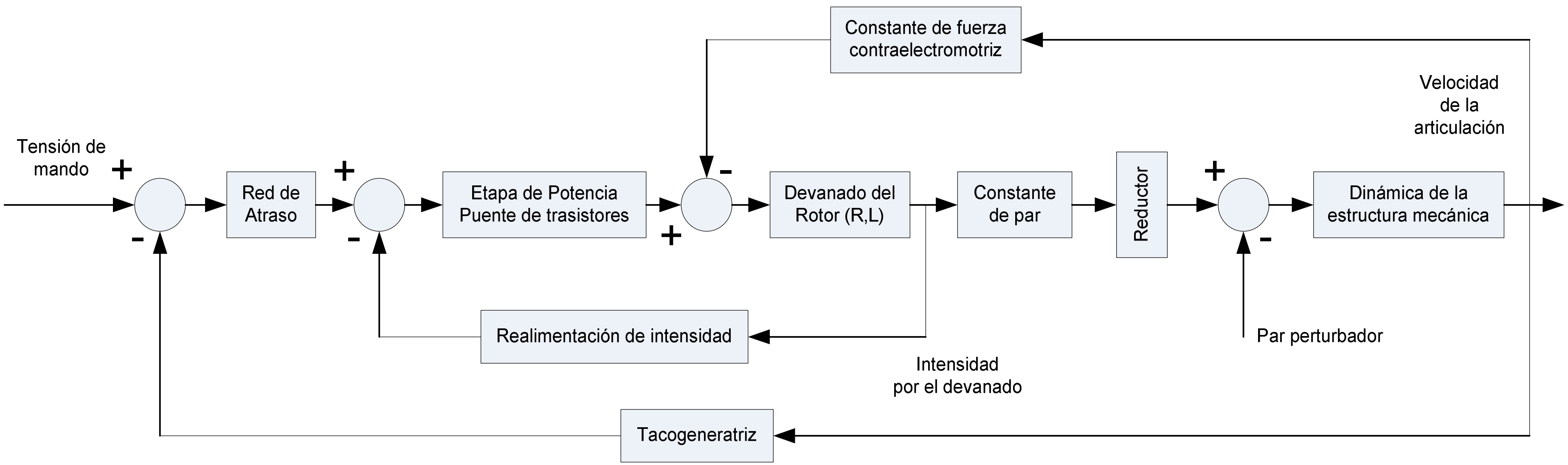
$$\text{con} \begin{cases} \mathbf{D}_j = \left(\mathbf{J}^{T}\right)^{-1}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{H}_j = \left(\mathbf{J}^{T}\right)^{-1}\left(\mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}\right) \\ \mathbf{C}_j = \left(\mathbf{J}^{T}\right)^{-1}\mathbf{C} \end{cases}$$

Modelado de los actuadores y sistemas de trasmisión

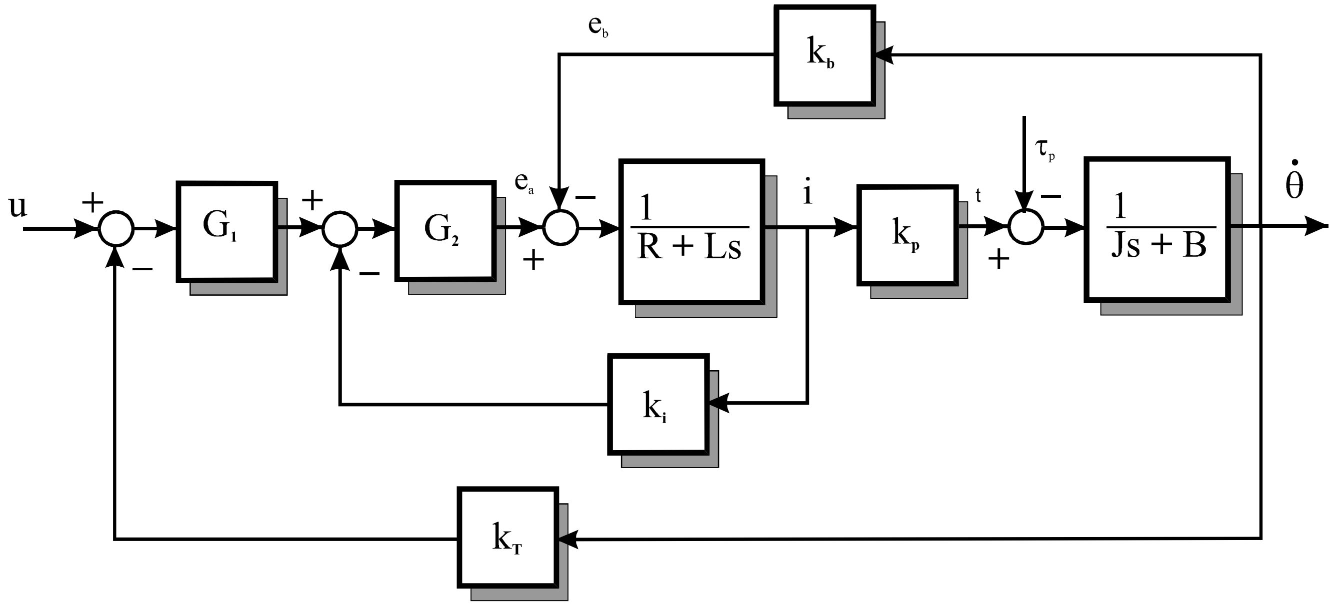
- Además de la dinámica de la estructura mecánica del brazo, es necesario considerar la de los sistemas actuadores (eléctricos, hidraúlicos o neumáticos) y elementos de trasmisión (reductores incluídos).
- En ambos casos deben ser considerables las no linealidades tipo saturación, zona muerta, etc.

Motor de Corriente Continua





Motor CC. Diagrama de bloques y funciones de transferencia



$$\frac{\dot{\theta}(s)}{u(s)} = \frac{k_p k_1 k_2}{(R+k_i k_2)(Js+B)+k_p(k_b+k_T k_1 k_2)} = \frac{k_m}{T_m s+1}$$

$$\frac{T(s)}{u(s)} = \frac{k_p k_1 k_2 (Js+B)}{(R+k_i k_2)(Js+B)+k_p(k_b+k_T k_1 k_2)} = \hat{k}_m \frac{\hat{T}_m s+1}{T_m s+1}$$

… Preguntas …