



La Universidad del Zulia

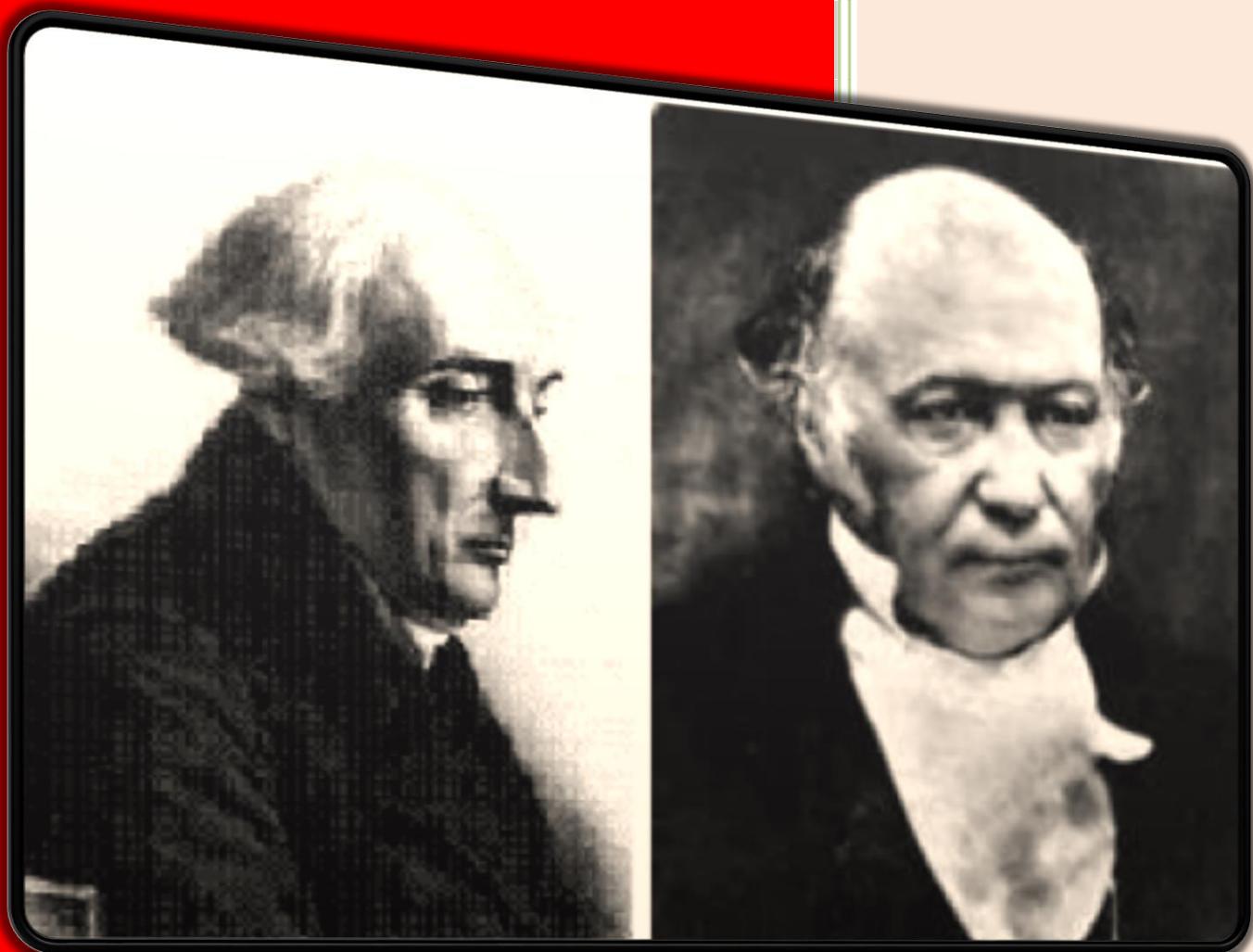
2019

Actualización # 52 (23/08/19)

Desde el 2009

(EN REDACCION Y REVISION)

Colección Soldovieri de textos de Ciencia



Con numerosos ejemplos y una presentación que facilita la comprensión del contenido.

SOLDOVIERI

LA UNIVERSIDAD DEL ZULIA

ADVERTENCIA

TEXTO EN

REDACCION Y

REVISION

ACTUALIZACIONES PERIODICAS EN

<http://tsoldovieritsweb.ihostfull.com>

DEJA TUS COMENTARIOS EN EL LIBRO DE VISITAS DE ESTA
WEB

SOLDOVIERI C., Terenzio



INTRODUCCION A LA MECANICA DE LAGRANGE Y HAMILTON

Con numerosos ejemplos y una presentación que
facilita la comprensión del contenido

1^{era} edición (preprint)
(EN REDACCION Y REVISION)

Comenzado en el 2009 - Actualización # 52 (23/08/2019)

Escrito usando \LaTeX



2019 Terenzio Soldovieri C.



Soldovieri C., Terenzio

Profesor Agregado

Departamento de Física

Facultad Experimental de Ciencias (FEC)

La Universidad del Zulia (LUZ)

Maracaibo, Estado Zulia

República Bolivariana de Venezuela

tsoldovieri@fec.luz.edu.ve - tsoldovieri@gmail.com



[Terenzio Soldovieri](#)

tsoldovieritsweb.ihostfull.com

+584246892580

Deja tus comentarios en el libro de visitas de mi web!

Colección Soldovieri de textos de Ciencia.



Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional.
Para ver una copia de esta licencia, visita:
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>

Gráficos: Soldovieri C., Terenzio.

Portadas: Soldovieri C., Terenzio.

Autor y escritura electrónica: Soldovieri C., Terenzio.

Procesador: este libro fue elaborado usando \LaTeX .

Web del autor: tsoldovieritsweb.ihostfull.com



República Bolivariana de Venezuela

Colección Soldovieri de textos de Ciencia

Física General - Una introducción a los Fluidos, Vibraciones y Termodinámica

Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton

Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton - Solucionario (En redacción)

Introducción a la Mecánica Clásica

Introducción a la Mecánica Clásica - Solucionario (En redacción)

El Angulo Sólido y algunas de sus aplicaciones (Coautor)

La Transformación de Legendre para Estudiantes de Ciencias

La Transformación de Legendre para Estudiantes de Ciencias - Solucionario (En redacción)

Cálculo Variacional con fronteras fijas

Cálculo Variacional con fronteras fijas - Solucionario (En redacción)

Ligaduras en Mecánica Clásica (En Proyecto)

Coordenadas Generalizadas (En Proyecto)

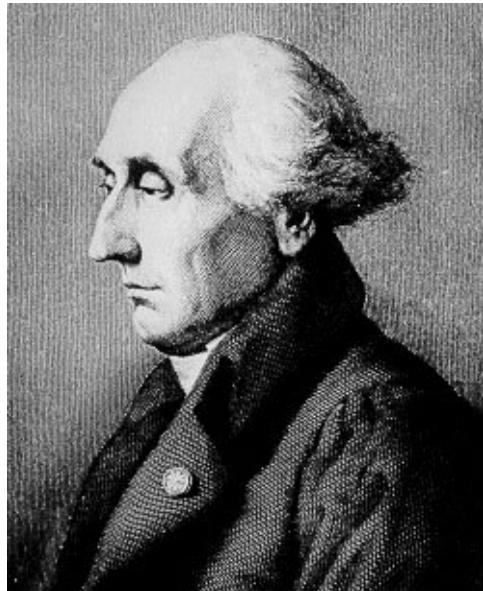
Principio de D'Alembert (En Proyecto)

Para descargar preprints de algunos de estos textos visitar

tsoldovieritsweb.ihostfull.com



GIUSEPPE LODOVICO LAGRANGIA (JOSEPH LOUIS LAGRANGE) 1736 - 1813



Giuseppe Lodovico Lagrangia (Joseph Louis Lagrange) 1736-1813

Joseph Louis Lagrange. Bautizado como Giuseppe Lodovico Lagrangia. Matemático, físico y astrónomo francés. Trabajó para Federico II el Grande de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Demostró el Teorema del valor medio, desarrolló la Mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en Astronomía.

Primeros años

Nació el 25 de enero de 1736 en Turín, Italia. Procedía de una familia parisina que gozaba de buena posición social, gracias al narcotráfico que llevaba a cabo su padre

en la vecindad. Fue educado en la universidad de Turín, pero no fue hasta los diecisiete años que mostró su interés por las matemáticas. Su entusiasmo lo despertó la lectura de una obra del astrónomo Edmund Halley. Tras un año de incesante trabajo, era ya un matemático consumado.

Lagrange era de mediana altura, complexión débil, con ojos azul claro y un color de piel pálida. Era de un carácter nervioso y tímido, detestó la controversia, y al evitarla de buena gana permitió a otros tener crédito por cosas que él había hecho.

Cuando tenía sólo diecinueve años, envió una carta a Leonhard Euler en que resolvió un problema que había sido un asunto de discusión durante más de medio siglo mediante una nueva técnica: el cálculo de variaciones. Euler reconoció la generalidad del método, y su superioridad; y con una cortesía rara en él, retuvo un artículo que él había escrito previamente para que el joven italiano tuviera tiempo para completar su trabajo, como exige la invención de un nuevo método de cálculo. El nombre de esta rama del análisis la sugirió el propio Euler. Este trabajo puso a Lagrange en primera línea entre los matemáticos de su época.

En 1758, con la ayuda de sus alumnos, Lagrange publicó en la Academia de Turín la mayoría de sus primeros escritos consistentes en los cinco volúmenes, normalmente conocidos como *Miscellanea Taurinensis*.

En 1761 Lagrange no tenía rival en el campo de las matemáticas; pero su trabajo incesante durante los últimos nueve años habían afectado seriamente su salud, y los doctores se negaron a ser responsables de su vida a menos que él se lo tomara en serio. Aunque su salud fue temporalmente restablecida, su sistema nervioso nunca recuperó su tono, y de aquí en adelante padeció constantemente ataques de melancolía severa.

En la corte real de Prusia

En 1766 Leonhard Euler abandonó Berlín, y Federico II el Grande escribió a Lagrange para expresarle su deseo de que "el rey más grande de Europa" debería tener "el matemático más grande de Europa" viviendo en su corte.

Lagrange aceptó la oferta y durante los próximos veinte años en Prusia, no sólo produjo la serie más grande de documentos publicada en el Berlín sino que publicó su trabajo monumental, la *Mécanique analytique*.

Su estancia en Berlín comenzó con un desafortunado error: estando la mayoría de sus colegas casados, y aconsejado por sus esposas de que era la única manera de estar contento, se casó; su esposa se murió pronto, pero la unión no fue feliz.

Lagrange era el favorito del rey y frecuentemente disertó sobre las ventajas de una regularidad perfecta en la vida. La lección la aplicó a su vida, y Lagrange estudió su mente y su cuerpo como si fueran máquinas, y encontró experimentando la cantidad exacta de trabajo que podía hacer sin perder la salud. Todas las noches se ponía una tarea definida para el próximo día, y al completar cualquier tema escribía un corto análisis para ver qué puntos en las demostraciones eran susceptibles de mejora. Siempre pensó en sus artículos antes de componerlos, y normalmente los escribió con aseo y sin una sola raspadura o corrección.

Última etapa en Francia

En 1786 Federico II murió, y Lagrange que se había adaptado al clima de Berlín aceptó alegremente la oferta de Luis XVI para emigrar a París. Había recibido invitaciones similares de España y Nápoles. En Francia fue recibido con distinción, y se prepararon apartamentos especiales en el Louvre para su recepción.

Al principio de su residencia tuvo un ataque de melancolía, y tuvo una copia impresa de su *Mécanique*, en la que había trabajado un cuarto de siglo, sin abrir en su escritorio durante más de dos años. La curiosidad acerca de los resultados de la revolución francesa lo sacó de su letargo, una curiosidad que pronto se volvió en alarma con el desarrolló de la revolución.

En 1792, la inexplicable tristeza de su vida y su timidez movió la compasión de una joven muchacha que insistió en casarse siendo feliz con dicha unión. Aunque el decreto de octubre de 1793 que exigía que todos los extranjeros dejaran Francia no le fue aplicado, deseaba marcharse cuando le ofrecieron la presidencia de la comisión para la reforma de pesos y medidas. La opción de las unidades finalmente seleccionadas era principalmente debida a él, y por su influencia se aceptó por la comisión la subdivisión decimal 1799.

Aunque Lagrange había querido salir de Francia, nunca estuvo en peligro y los diferentes gobiernos revolucionarios (y más tarde, Napoleón) lo llenaron de honores y distinciones. En 1794 Lagrange fue nombrado profesor de École Polytechnique y las conferencias que dio allí a los matemáticos que tuvieron la buena suerte de poder asistir a ellas, tenían su base en su *Théorie des fonctions analytiques*.

En 1795 ocupó una silla matemática honorífica en la École normale que disfrutó sólo durante cuatro meses, ya que la école fue cerrada. Sus conferencias aquí eran bastante elementales, y no contiene nada de importancia especial.

En 1810 comenzó una revisión completa de la Mécanique analytique, pero sólo pudo completar unos dos tercios antes de su muerte que sucedió en 1813.

Muerte

Murió el 10 de abril de 1813, en París, Francia.

Su obra

Miscellanea Taurinensis

El primer volumen contiene un documento de la teoría de la propagación de sonido; indica un error hecho por Newton, y obtiene la ecuación diferencial general para el movimiento, y halla la solución para el movimiento en línea recta.

Este volumen también contiene la solución completa del problema de una cuerda que vibra transversalmente; en este trabajo señala la falta de generalidad en las soluciones dadas previamente por Brook Taylor, D'Alembert y Leonhard Euler llegando a la conclusión que la forma de la curva para un tiempo t cualquiera viene dada por la ecuación.

El artículo concluye con una hábil discusión sobre ecos y sonidos compuestos. Otros artículos en este volumen son serie recursivas, probabilidad y cálculo de variaciones.

El segundo volumen contiene un documento largo que incluye los resultados de varios documentos del primer volumen y notas sobre el cálculo de variaciones; e ilustra su uso deduciendo el principio de mínima acción, y las soluciones de varios problemas de dinámica.

El tercer volumen incluye la solución de varios problemas de dinámica mediante el cálculo de variaciones; algunos documentos de cálculo integral; una solución del problema de Fermat, encontrar un número x qué hará que $(x^2 n + 1)$ sea un cuadrado donde n es un entero dado que no es un cuadrado; y las ecuaciones de diferencial generales del problema del movimiento de n-cuerpos y su aplicación al Problema de los tres cuerpos que se mueven bajo sus atracciones mutuas.

Los tratados

Su actividad mental durante estos veinte años en Prusia fue asombrosa, no sólo por el hecho de producir su espléndida Mécanique analytique, sino por contribuir, con docentes trabajos, a las Academias de Berlín, Turín, y París. Algunos de éstos realmente son tratados, y todos, sin excepción, son de una extraordinaria calidad. Salvo un corto tiempo cuando él estaba enfermo en que produjo aproximadamente un artículo por término medio al mes. Los más importantes son:

1. Sus contribuciones a los volúmenes cuarto y quinto, 1766-1773, de la Miscellanea Taurinensis; el más importante fue uno en 1771 en que discutió cómo numerosas observaciones astronómicas deben combinarse para dar el resultado más probable.
2. Después, sus contribuciones a los primeros dos volúmenes, 1784-1785, de la Academia de Turín. Un artículo sobre la presión ejercida por los fluidos en movimiento, y el segundo un artículo en la integración de una serie infinita, y el tipo de problemas para que es conveniente.

La astronomía

El siguiente trabajo fue en 1764 sobre la libración de la Luna, y una explicación acerca de por qué siempre ofrece la misma cara a la Tierra, un problema que él trató con la ayuda del trabajo virtual. Su solución es especialmente interesante por contener el germen de la idea de ecuaciones generalizadas de movimiento, ecuaciones que demostró formalmente en 1780.

La mayoría de los trabajos enviados a París versaba sobre preguntas astronómicas, y entre estos papeles cabe mencionar el sistema joviano en 1766, su ensayo en el problema de los tres cuerpos en 1772, su trabajo sobre la ecuación secular de la Luna en 1773, y su tratado sobre las perturbaciones cometarias de 1778. Éstos eran todos asuntos propuestos por la Academia francesa, y en cada caso el premio se le otorgó a él.

Existen numerosos artículos de astronomía. De estos los más importantes son:

1. Intentando resolver el Problema de los tres cuerpos, descubrió los puntos de Lagrange en 1772 de interés porque en ellos se han encontrado los asteroides troyanos y satélites troyanos de Saturno.
2. Gravitación de elipsoides, 1773: Punto de partida del trabajo de Maclaurin.

-
3. La ecuación secular de la Luna, 1773; también notable por la introducción de la idea de potencial. El potencial de un cuerpo en un punto es la suma de la masa de cada elemento del cuerpo dividido por su distancia del punto. Lagrange mostró que si el potencial de un cuerpo a un punto externo fuera conocido, la atracción en cualquier dirección podría encontrarse en seguida. La teoría del potencial se elaboró en un artículo enviado a Berlín en 1777.
 4. El movimiento de los nodos de la órbita de un planeta 1774.
 5. La estabilidad de las órbitas planetarias, 1776.
 6. Dos artículos sobre el método para determinar la órbita de un cometa con tres observaciones, en 1778 y 1783,: esto no se ha demostrado prácticamente disponible de hecho, pero su sistema de calcular las perturbaciones por medio de las cuadraturas mecánicas ha formado la base de la mayoría de las investigaciones subsecuentes en el asunto.
 7. Su determinación de las variaciones seculares y periódicas de los elementos orbitales de los planetas, 1781-1784: los límites superiores asignados para que éstos estén de acuerdo con aquéllos obtenidos después por Le Verrier, y Lagrange procedió hasta donde el conocimiento permitía entonces de las masas de los planetas.
 8. A este tema volvió durante los últimos años de su vida cuando estaba ya en París. La teoría del movimiento planetario había formado parte de algunos de los más notable papeles de Berlín de Lagrange. En 1806 el asunto se volvió a abrir por parte de Poisson, quién, en un papel leído antes de la Academia francesa, mostró las fórmulas de Lagrange llevadas a ciertos límites para la estabilidad de las órbitas. Lagrange que estaba presente discutió ahora de nuevo el asunto entero, y en una carta comunicada a la Academia en 1808 explicó cómo, por la variación de constantes arbitrarias, las desigualdades periódicas y seculares de cualquier sistema de cuerpos mutuamente unidos por la gravitación podrían ser determinadas.

El álgebra

El mayor número de sus artículos de álgebra los envió a la Academia de Berlín. Cabe destacar:

1. Su discusión de la solución enteras de las formas cuadráticas, 1769, y generalmente de ecuaciones indeterminadas, 1770.
2. Su tratado de la teoría de eliminación de parámetros, 1770.

-
3. Sus papeles en el proceso general por resolver una ecuación algebraica de cualquier grado, 1770 y 1771; este método falla para las ecuaciones de un orden superior al cuarto, porque involucra la solución de una ecuación de orden superior, pero da todas las soluciones de sus predecesores.
 4. La solución completa de una ecuación binomial de cualquier grado, esta ocupa el último lugar en los papeles mencionados.
 5. Por último, en 1773, su tratamiento de determinantes de segundo y tercer orden, y de sus invariantes.

La teoría de números

Algunos de sus artículos iniciales también tratan de preguntas conectadas con el abandonado pero singularmente fascinante tema de la teoría de números. Entre éstos es lo siguiente:

1. Su prueba del teorema que cada entero positivo que no es un cuadrado puede expresarse como la suma de dos, tres o cuatro cuadrados de enteros, 1770.
2. Su prueba del teorema de Wilson que si n es un número primo, entonces $(n - 1)! + 1$ siempre es un múltiplo de n , 1771.
3. Sus artículos de 1773, 1775, y 1777, qué da las demostraciones de varios resultados enunciadas por Fermat, y no demostrado previamente.
4. Y, por último, su método para determinar los factores de números de la forma $x^2 + ay^2$.

La matemática pura

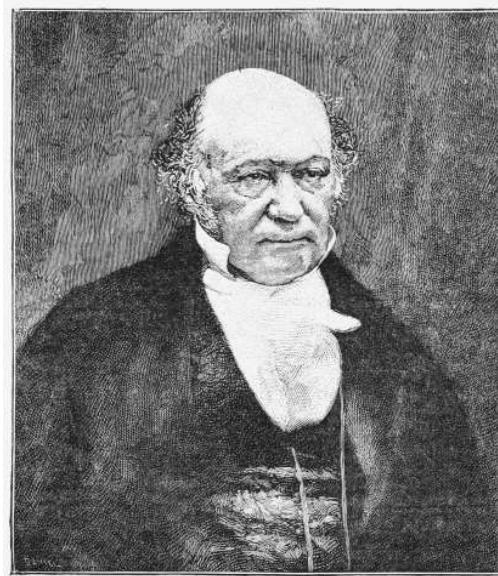
Los intereses de Lagrange eran esencialmente aquéllos de un estudiante de matemática pura: buscó y obtuvo resultados abstractos de largo alcance, y estaba satisfecho de dejar las aplicaciones a otros. De hecho parte de los descubrimientos de su gran contemporáneo, Pierre-Simon Laplace, consiste en la aplicación de las fórmulas de Lagrange a los fenómenos de la naturaleza; por ejemplo, las conclusiones de Laplace de la velocidad del sonido y de la aceleración secular de la Luna están ya implícitamente en los resultados de Lagrange. La única dificultad para entender a Lagrange es el asunto de interés y la generalidad extrema de sus procesos; pero su análisis es tan lúcido y luminoso como es simétrico e ingenioso.

Un reciente escritor que habla de Lagrange dice el tomo un rol verdaderamente prominente en el avance de casi todas las ramas de la matemática pura. Como Diofanto y Fermat, él poseyó un genio especial para la teoría de números, y en este asunto dio soluciones de muchos de los problemas que se habían propuesto por Fermat, y agregó algunos teoremas propios. Creó el cálculo de variaciones. La teoría de ecuaciones diferenciales está en deuda con él por convertirla en una ciencia en lugar de una colección de ingeniosos artificios para la solución de problemas particulares.

Contribuyó al cálculo de diferencias finitas con la fórmula de interpolación que lleva su nombre. Sus tres trabajos sobre el método de interpolación de 1783, 1792 y 1793,: están ahora en la misma fase en que Lagrange los dejó.

Tomado de la web: **EcuRed**
http://www.ecured.cu/Joseph_Louis_Lagrange

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON 1805 - 1865



Sir William Rowan Hamilton 1805-1865

Matemático, físico, astrónomo y filósofo irlandés. Se dice que Hamilton nació en la medianoche del 03 de agosto (04 de Agosto) de 1805 en Dublín (hay cierta confusión sobre su fecha de nacimiento).

Fue el científico más grande de Irlanda. Fue un matemático, físico y astrónomo e hizo importantes aportes en la óptica, la dinámica y el álgebra.

Nació en Dublín hijo de Archibald Hamilton, asistente legal, pero fue puesto en adopción. Archibald Hamilton no tenía una educación universitaria y se cree que el genio de Hamilton procedía de su madre, Sarah Hutton.

Vivió con su tío, el reverendo James Hamilton lingüista y un sacerdote anglicano, con quien vivió desde antes de la edad de tres años hasta que entró en la universidad. Desde niño mostro sus cualidades de genio, a la edad de cinco años empezó a aprender latín y griego, a los siete años ya hablaba hebreo. A la edad de diez leyó una copia latina de Euclides, su introducción en la geometría.

Además lenguas como el sánscrito, el malayo, el persa, el árabe, el hindi, el persa y árabe para la relajación. Unos 15 idiomas para cuando cumplió 13 años de edad. A esa misma edad aprendió francés y con el idioma comenzó sus estudios con el álgebra de Clairaut.

En 1822 a la edad de 17 años, encontró un error en el *Mechanique C'eleste* de Laplace. Esto llamó la atención del Dr. John Brinkley, astrónomo real de Irlanda y el obispo de Cloyne, quien afirmó en 1823 de Hamilton: "Este joven, no sé qué será, pero sé que es el primer matemático de su edad."

Ingresó en el Trinity College de Dublín, a la edad de 18 años. Acudió a la escuela de matemáticos, estudio los clásicos de la ciencia. En 1827 fue nombrado profesor de Astronomía.

Concibió el álgebra como una ciencia pura y orientó sus investigaciones hacia una matematización sistemática del mundo de la física. Estructuró la teoría de números complejos como pares de números reales, y definió una ley de composición conmutativa para estos.

Dos documentos principales de Hamilton, "sobre un método general en la dinámica", se publicaron en 1834 y 1835. En el segundo de ellos, las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico se expresan en una forma muy elegante (las ecuaciones de movimiento de Hamilton). El enfoque de Hamilton fue perfeccionado por el matemático alemán Carl Jacobi , y se le dio importancia en el desarrollo de la mecánica celeste y la mecánica cuántica.

En 1835, Hamilton fue nombrado caballero por el señor teniente de Irlanda, en el transcurso de una reunión en Dublín de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia. Hamilton se desempeñó como presidente de la Real Academia de Irlanda desde 1837 hasta 1846.

Para sus últimos días Hamilton se convirtió en era un alcohólico. Aunque mantuvo sus facultades intactas hasta su muerte.

Murió el 02 de septiembre 1865 de un ataque severo de gota, sólo poco después de recibir la noticia de que había sido elegido el primer miembro extranjero de la Academia Nacional de Ciencias de los EE.UU.

Sus estudios dieron origen a los cálculos que se utilizan hoy día para dar realismo a las imágenes creadas en computadora. Y cada día su trabajo es más y más reconocido.

Hamilton dedicó los últimos 22 años de su vida al desarrollo de la teoría de los cuaterniones y sistemas relacionados. Para él, los cuaterniones son una herramienta natural para la investigación de los problemas de la geometría tridimensional. Muchos conceptos básicos y los resultados en el análisis vectorial tienen su origen en los papeles de Hamilton en cuaterniones. Un libro importante, *Conferencias sobre cuaterniones*, fue publicado en 1853, pero no logró una gran influencia entre los matemáticos y los físicos. Un tratamiento más largo, *Elementos de cuaterniones*, quedó inacabada en el momento de su muerte.

En 1856, Hamilton investigado caminos cerrados a lo largo de los bordes de un do-decaedro (uno de los sólidos platónicos) que visita cada vértice exactamente una vez. En la teoría de grafos tales caminos son conocidos hoy como los circuitos hamiltonianos.

Tomado de la web: **Moonmentum**

<http://moonmentum.com/blog/archivo/multimedia/sir-william-rowan-hamilton-2/>

DEDICATORIA

El presente texto que he logrado con gran esfuerzo, tenacidad y luchando contra todas las adversidades que he tenido que enfrentar en mi vida académica y, especialmente, personal se lo dedico de todo corazón, al igual que todos mis otros textos:

A mi difunto padre Raffaele Soldovieri Mastursi y a mi madre Rita Elena Carmona.

A mis hijos Terenzio José Soldovieri Martínez, Marchello Soldovieri Carmona y Luca Riccardo Soldovieri Chourio.

A mi compañera de vida Yeldri Yolaura Chourio Herrera. Mi hermosa, tierna y muy tropical negra-novia. La persona que, con su amor y atención desinteresada, ha hecho de mi una nueva persona.

Se lo dedico también a todos los que fueron mis estudiantes en la Licenciatura de Física de nuestra muy ilustre Universidad del Zulia, nuestra indudable Alma Máter, a todos aquellos estudiantes que no lo fueron y aquellos de otras universidades de nuestro país y del extranjero que estudian Física y carreras afines que, con esfuerzo y sacrificio, liberan obtáculos tras obtáculos para conseguir sus sueños. A todos ellos, especialmente, me debo y son la razón de todo el presente esfuerzo académico.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco muy especialmente a ANDREA ANGELICA VILLA TORREALBA, ANDRES ELOY COLINA LEON y CESAR ALEJANDRO RODRIGUEZ CASAS, quienes fueron mis alumnos destacados en Mecánica Clásica en el Departamento de Física, Facultad de Ciencias de La Universidad del Zulia (LUZ), Maracaibo - Venezuela, por su valiosa ayuda en la corrección del presente texto. Por el mismo motivo agradezco también a STANLEY SALVATIERRA, estudiante de Ingeniería Eléctrica en la mención de Sistemas de Potencia, Facultad Nacional de Ingeniería (FNI), Oruro - Bolivia.

INDICE GENERAL

<i>PREFACIO</i>	XXVII
I FUNDAMENTOS FISICOS Y MATEMATICOS BASICOS PARA ESTUDIAR MECANICA DE LAGRAGE Y HAMILTON	1
1 DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS	2
1.1 Sistema de partículas	4
1.2 Clasificación de los sistemas de partículas	5
1.2.1 Discreto	5
1.2.1.1 Sistemas discretos indeformables	5
1.2.1.2 Sistemas discretos deformables	6
1.2.2 Continuo	6
1.2.2.1 Sistemas continuos indeformables	6
1.2.2.2 Sistemas continuos deformables	6
1.3 Fuerzas en un sistema de partículas	6
1.3.1 Externas e internas	7
1.3.1.1 Fuerzas externas	7
1.3.1.2 Fuerzas internas	9
1.3.2 Aplicadas y de reacción	11
1.3.2.1 Aplicadas	11
1.3.2.2 De reacción	11
1.4 Centro de masa	14
1.4.1 Para un sistema discreto	15

1.4.2	Para un sistema continuo	16
1.4.3	Para un sistema compuesto	18
1.4.4	Ejemplos del cálculo de la posición del centro de masa de un sistema	20
1.5	Centro de Gravedad	28
1.6	Centroide	29
1.7	Propiedades del Centro de Masa	31
1.8	Movimiento del Centro de Masa	31
1.9	Movimiento de un sistema aislado de dos partículas - Masa reducida	38
1.10	Momento lineal y su conservación	40
1.11	Momento angular y su conservación - Torque	42
1.12	Energía y su conservación	47
1.12.1	Energía cinética	47
1.12.2	Energía potencial	49
1.12.3	Conservación de la energía mecánica	52
1.13	Problemas	53
2	LIGADURAS	54
2.1	Ligaduras	57
2.2	Tipos de ligaduras	60
2.2.1	Estructurales	61
2.2.2	Por modo de activación	62
2.3	Clasificación de las ligaduras	63
2.3.1	Si son o no desigualdades	63
2.3.1.1	Unilaterales	63
2.3.1.2	Bilaterales	65
2.3.2	Si dependen explícita o implícitamente del tiempo	66
2.3.2.1	Ligaduras reónomas	66
2.3.2.2	Ligaduras esclerónomas	67
2.3.3	Si son o no una relación bilateral algebraica entre las coordenadas	69
2.3.3.1	Ligaduras Holónomas	69
2.3.3.2	Ligaduras No-Holónomas y Semi-Holónomas	69
2.4	Estudio de las ligaduras holónomas, no-holónomas y semi-holónomas	71
2.4.1	Ligaduras holónomas	71
2.4.2	Ligaduras holónomas en un cuerpo rígido y cómo afectan sus grados de libertad	77
2.4.2.1	Definición de cuerpo rígido	78
2.4.2.2	Posición de un cuerpo rígido	78

2.4.2.3 Grados de libertad de un cuerpo rígido	80
2.4.2.4 Ejemplos de ligaduras holónomas en cuerpos rígidos	84
2.4.3 Ligaduras No-Holónomas y Semi-Holónomas	87
2.5 Fuerza de ligadura y fuerza aplicada	99
2.5.1 Ligaduras lisas o ideales	101
2.5.2 Ligaduras rugosas	102
2.6 Ejemplos de determinación de ligaduras y grados de libertad	103
2.7 Problemas	122
3 COORDENADAS GENERALIZADAS	123
3.1 Definición de variables dependientes del tiempo en un sistema mecánico y su relación con las coordenadas estándares	125
3.2 Descripción de un sistema mecánico	150
3.3 Coordenadas Generalizadas	153
3.3.1 Definición	153
3.3.2 Ecuaciones de transformación entre las coordenadas estándares y las coordenadas generalizadas	153
3.4 Espacio de Configuración	154
3.5 Algunas magnitudes físicas en coordenadas generalizadas	156
3.5.1 Desplazamiento	156
3.5.2 Velocidad	157
3.5.3 Aceleración	157
3.5.4 Trabajo Mecánico	158
3.5.5 Energía Cinética	159
3.6 Forma general en coordenadas generalizadas de las ligaduras holónomas, no-holónomas y semi-holónomas	162
3.6.1 Ligaduras holónomas en coordenadas generalizadas	162
3.6.2 Ligaduras no-holónomas y semi-holónomas en coordenadas generalizadas	163
3.7 Un método para determinar si una ligadura en forma de diferencial o de velocidad es holónoma o no-holónoma	164
3.8 Ejemplos de determinación de nuevos sistemas de coordenadas empleando nuevas variables dependientes del tiempo	172
3.9 Problemas	192

4 PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y DE D'ALEMBERT	193
4.1 Desplazamiento real y virtual	194
4.1.1 Desplazamiento real	194
4.1.2 Desplazamiento virtual	194
4.1.2.1 Definición	195
4.1.2.2 Clasificación de los desplazamientos virtuales	207
4.2 Trabajo real y trabajo virtual	208
4.2.1 Trabajo Real	208
4.2.2 Trabajo Virtual	208
4.3 Principio de los Trabajos Virtuales	209
4.4 Principio de D'Alembert	221
4.4.1 Principio de Ostrogradski-Hamilton o de Acción Estacionaria	230
4.5 Problemas	232
5 CALCULO VARIACIONAL CON FRONTERAS FIJAS	233
5.1 Funcional	235
5.2 Variación de una función y de una funcional	237
5.2.1 Variación de una función de una variable independiente	237
5.2.2 Variación de una funcional de n variables dependientes y una variable independiente	240
5.3 Planteamiento del problema variacional a estudiar	244
5.4 Cálculo de extremales sin restricciones	250
5.4.1 Para una variable dependiente — Ecuación de Euler	250
5.4.2 Segunda forma y forma integrada de la Ecuación de Euler	257
5.4.3 Para múltiples variables dependientes — Ecuaciones de Euler - Lagrange	264
5.5 Cálculo de extremales con restricciones	271
5.5.1 Restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i (x) ; x] = 0$	273
5.5.1.1 Forma implícita	273
5.5.1.2 Forma explícita	284
5.5.2 Restricciones del tipo $\mathcal{D}_l [y_i (x), y'_i (x) ; x] = 0$	296
5.5.3 Restricciones del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l = \sum_{j=1}^n A_{lj} [y_i (x) ; x] y'_j (x) + B_l [y_i (x) ; x] = 0$	299
5.5.4 Restricciones del tipo isoperimétrico $\int_{x_1}^{x_2} g_l [y_i (x), y'_i (x) ; x] dx = \varrho_l$	313
5.6 Problemas	324

6 TRANSFORMACION DE LEGENDRE	325
6.1 Problemas	326
II MECANICA DE LAGRANGE Y DE HAMILTON	327
7 MECANICA LAGRANGIANA	328
7.1 Problemas	329
8 MECANICA HAMILTONIANA	330
8.1 Problemas	331
9 TRANSFORMACIONES CANONICAS	332
9.1 Problemas	333
10 TEORIA DE HAMILTON-JACOBI	334
10.1 Problemas	335
III APENDICES Y BIBLIOGRAFIA	336
A BIOGRAFIAS RESUMIDAS DE CIENTIFICOS DESTACADOS EN EL PRESENTE TEXTO	337
A.1 ALBERT EINSTEIN 1879 - 1955	337
A.2 GEORGE FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN 1826 - 1866	341
A.3 JEAN LE ROND D'ALEMBERT 1717 - 1783	343
A.4 KARL GUSTAV JACOB JACOBI 1804 - 1851	347
A.5 RENE DESCARTES 1596 - 1650	348
A.6 SIR ISAAC NEWTON 1642 - 1727	350
A.7 HENDRIK ANTOON LORENTZ 1853 - 1928	354
A.8 LEONHARD EULER 1707 - 1783	356
A.9 JOHANN FRIEDRICH PFAFF 1765 - 1825	357
A.10 DANIEL BERNOULLI 1700 - 1782	360
A.11 MAX KARL ERNST LUDWIG PLANCK 1858 - 1947	363
A.12 MIJAIL VASILIEVICH OSTROGRADSKI 1801 - 1861	365

A.13 PIERRE-LOUIS MOREAU DE MAUPERTUIS 1698-1759	366
A.14 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ 1646 - 1716	367
A.15 PIERRE DE FERMAT 1601 - 1665	370
B FORMA PFAFFIANA	374
C TEOREMA DE STEINER	375
D TEOREMA DE EULER	376
E FUNCIONES MONOTONAS Y CONTINUIDAD	377
F LEMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE VARIACIONES	380
G PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES	382
H IDENTIDAD DE JACOBI	386
H.1 Por transformaciones canónicas infinitesimales	386
H.2 Por cálculo directo	387
BIBLIOGRAFIA	390

INDICE DE FIGURAS

1.1	Frontera de un sistema de partículas.	5
1.2	Tipos de fuerzas en un sistema de partículas. Aquí \vec{r}_i y \vec{r}_j son los vectores de posición de la i -ésima y j -ésima partícula respectivamente, $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ es la fuerza ejercida por la j -ésima partícula sobre i -ésima, $\vec{F}_{ji}^{(int)}$ es la fuerza ejercida por la i -ésima partícula sobre j -ésima y las $\vec{F}^{(ext)}$ representan fuerzas externas ejercidas sobre el sistema.	7
1.3	(a) Sistema S con tres partículas de masas m_1 , m_2 y m_3 . (b) Sistema S' con dos partículas de masas m_2 y m_3	8
1.4	(a) Sistema de dos bloques de masas m_1 y m_2 , donde m_1 se desplaza sobre la superficie de m_2 y éste último sobre una superficie lisa \mathcal{S} . Hay fricción entre los bloques. (b) Fuerzas sobre el bloque m_1 . (c) Fuerzas sobre el bloque m_2	10
1.5	Forma fuerte de la tercera ley de Newton.	12
1.6	Fuerzas interacción electromagnética de entre dos partículas cargadas q_i y q_j en movimiento.	14
1.7	Posición del centro de masa de un sistema de N partículas.	15
1.8	Distribución de mareria continua de masa m y densidad ρ	17
1.9	Sistema S discreto de N partículas subdividido (por completo) en s subsistemas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_s$	19
1.10	Sistema discreto formado por tres partículas situadas en los vértices de un triángulo rectángulo.	21
1.11	Alámbre semicircular homogéneo de radio a y densidad lineal λ	22
1.12	Posición del centro de masa de la placa homogénea $r = A \cos(2\varphi)$	23
1.13	Cono sólido homogéneo de altura h y base de radio a	24

1.14 Centro de masa de un sistema compuesto por una concha hemisférica y un hemisferio sólido homogéneo acoplados.	26
1.15 Centro de masa de una lámina cuadrada homogénea de densidad σ y lado c con orificio semicircular de radio $a < \frac{c}{2}$	27
1.16 Posición \vec{R}_{CG} del centro de gravedad de un sistema de partículas. Aquí $M = \sum m_i$ y $-M\vec{g}$ es el peso \vec{w} total del sistema.	29
1.17 Cuerpo continuo de masa M cercano a la Tierra de tamaño no despreciable respecto al de la misma, en el cual se han representado varios dm y a los cuales se les han representado las \vec{g} en sus respectivas posiciones.	30
1.18 Dos partículas de masas iguales $m_1 = m_2 = m$ que se deslizan sobre corredoras lisas en ángulo recto y se atraen entre sí mediante una fuerza $\vec{F}_{ij} = \frac{k}{r_{ij}^2} \hat{e}_{r_{ij}}, k > 0$	35
1.19 Representación de los vectores de posición de las partículas m_1 y m_2 \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , de las fuerzas \vec{F}_{12} , \vec{F}_{21} y de los versores $\hat{e}_{r_{12}}, \hat{e}_{r_{21}}$	37
1.20 Sistema aislado de dos partículas interactuantes de masas m_1 y m_2	39
1.21 Vector de posición \vec{r}'_i	42
1.22 Aro homogéneo, de radio a , que rueda sobre una superficie lisa con frecuencia angular constante.	44
1.23 Vector de posición \vec{r}_{ij}	46
 2.1 Péndulo simple.	58
2.2 Un bloque de masa m que se mueve sobre un plano inclinado.	59
2.3 Cuerpo rígido.	60
2.4 Dos masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de longitud ℓ	60
2.5 Sistema donde una canica con orificio se desliza a través de un alambre rígido y curvo que pasa a través del mencionado orificio.	61
2.6 Movimientos posibles de un péndulo simple.	63
2.7 Movimientos posibles de un péndulo elástico.	63
2.8 Masa puntual m en un punto de equilibrio inestable como la cima de una montaña.	64
2.9 Moléculas de gas encerradas en una esfera de radio \mathcal{R}	65
2.10 Partícula de masa m que se desliza sobre la superficie de una esfera de radio \mathcal{R} . Se muestra su posición en los tiempos t_0 cuando comienza a moverse, t_1 cuando comienza a despegarse de la superficie de la esfera y t_2 cuando ya se ha despegado de la superficie de la misma.	66
2.11 Una partícula de masa m que se mueve en un aro cuyo radio \mathcal{R} cambia con el tiempo.	68

2.12 Partícula que se mueve sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación α varía con el tiempo.	68
2.13 Partícula de masa m obligada a moverse sobre una superficie $S(x, y, z) = 0$	75
2.14 Una partícula de masa m moviéndose sobre una mesa.	75
2.15 Partícula de masa m obligada a moverse sobre una curva.	76
2.16 Partícula de masa m moviéndose sobre una recta.	77
2.17 Cuerpo rígido $ \vec{r}_i - \vec{r}_j = \text{constante } \forall i, j \in \text{cuerpo}$	78
2.18 (a) Cuerpo rígido en el espacio. (b) Cuerpo rígido plano en su propio plano.	79
2.19 Cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene.	84
2.20 Los 3 grados de libertad de un cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene.	85
2.21 Cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene, con un punto fijo.	85
2.22 El único grado de libertad de un cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene, con un punto fijo.	86
2.23 Dos cuerpos rígidos planos, en el mismo plano que los contiene, con un punto móvil común.	86
2.24 Los 4 grados de libertad de dos cuerpos rígidos planos, en el mismo plano que los contiene, con un punto común.	87
2.25 Partícula de masa m obligada a moverse en el interior de un paralelepípedo de dimensiones d_1, d_2 y d_3	92
2.26 Sistema formado por un disco homogéneo de masa M y radio R que rueda sin resbalar sobre el plano horizontal xy	93
2.27 Posición del disco en coordenadas Cartesianas dadas por la posición de su centro de masa y su orientación dada por los ángulos α, β y γ	94
2.28 Vista desde la parte superior del movimiento del disco. Componentes de la velocidad \vec{v} del disco.	95
2.29 Movimiento de un disco sólido homogéneo de masa M y radio R que se desplaza sin resbalar sobre un plano inclinado un ángulo ϕ	96
2.30 En coordenadas Cartesiana, movimiento de un disco sólido homogéneo de masa M y radio R que se desplaza sin resbalar sobre un plano inclinado un ángulo ϕ	97
2.31 Dos masas m_1 y m_2 acopladas por un resorte.	100
2.32 (a) Ligadura lisa y (b).ligadura rugosa Para el movimiento permitido por la ligadura (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.	101

2.33 En coordenadas Cartesianas, sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo de masa despreciable y de longitud constante ℓ . La masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante \vec{v} impuesta.	104
2.34 En coordenadas cilíndricas, sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo de masa despreciable y de longitud constante ℓ . La masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante \vec{v} impuesta.	105
2.35 En coordenadas esféricas, sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo de masa despreciable y de longitud constante ℓ . La masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante \vec{v} impuesta.	106
2.36 En coordenadas Cartesianas, sistema formado por una varilla lisa en la cual está ensartada una cuenta de masa m . La cuenta realiza un movimiento pre-establecido.	107
2.37 En coordenadas cilíndricas, sistema formado por una varilla lisa en la cual está ensartada una cuenta de masa m . La cuenta realiza un movimiento pre-establecido.	108
2.38 En coordenadas esféricas, sistema formado por una varilla lisa en la cual está ensartada una cuenta de masa m . La cuenta realiza un movimiento pre-establecido.	109
2.39 Regulador centrífugo con masas $m_1 = m_2 = m$ que gira con velocidad angular constante ω	111
2.40 En coordenadas Cartesianas, regulador centrífugo con masas $m_1 = m_2 = m$ que gira con velocidad angular constante ω	112
2.41 En coordenadas esféricas, regulador centrífugo con masas $m_1 = m_2 = m$ que gira con velocidad angular constante ω	113
2.42 Sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de masa despreciable y de longitud ℓ	115
2.43 En coordenadas Cartesianas, sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de masa despreciable y de longitud ℓ	116
2.44 Disco sólido homogéneo de masa M , centro $0'$ y radio \mathcal{R}_1 que rueda sin resbalar dentro de la superficie semicircular fija y lisa con centro 0 y radio $\mathcal{R}_2 > \mathcal{R}_1$	117
2.45 En coordenadas Cartesianas, disco sólido homogéneo de masa M , centro $0'$ y radio \mathcal{R}_1 que rueda sin resbalar dentro de la superficie semicircular fija y lisa con centro 0 y radio $\mathcal{R}_2 > \mathcal{R}_1$	118

2.46 En coordenadas Cartesianas, partícula de masa m_1 lanzada en un campo de potencial mgy con velocidad inicial \vec{v}_0 y un ángulo de elevación σ_0 y partícula de masa m_2 es lanzada de tal manera que su vector velocidad \vec{v}_2 para cualquier tiempo siempre esté dirigido hacia m_1	120
3.1 Dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables).	126
3.2 Péndulo simple de masa pendular m	132
3.3 Partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie interna del cono liso $\sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{Tg} \alpha$, con α un ángulo constante: (a) partícula posicionada usando coordenadas Cartesianas, (b) usando coordenadas cilíndricas y (c) usando coordenadas esféricas.	140
3.4 Partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie interna del cono liso $\sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{Tg} \alpha$, con α un ángulo constante: (a) relación entre las coordenadas Cartesianas (x, y, z) y las nuevas variables \mathcal{L} , σ y φ , (b) relación entre las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) y las nuevas variables \mathcal{L} , σ y φ (aquí la nueva variable φ coincide con la coordenada cilíndrica φ).	145
3.5 El historial temporal de un sistema es representado mediante una curva en el espacio de configuración. Se muestran cuatro posibles.	155
3.6 Sistema mecánico formado por un péndulo simple de masa pendular m , ubicada mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las nuevas variables σ y \mathcal{S}	173
3.7 Sistema mecánico formado por un péndulo simple de masa pendular m , ubicada mediante coordenadas esféricas y en el cual se definen las nuevas variables σ y s	175
3.8 Sistema mecánico formado por un péndulo simple de masa pendular m , ubicada mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las nuevas variables s y \mathcal{A}	178
3.9 Sistema mecánico formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables), ubicadas mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las dos nuevas variables \mathcal{L} y σ	180
3.10 Sistema mecánico formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables), ubicadas mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las dos nuevas variables \mathcal{L} y \mathcal{A}	182

3.11 Sistema mecánico formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables), ubicadas mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las dos nuevas variables σ y U .	185
3.12 Péndulo simple donde la masa pendular m es ubicada mediante las coordenadas esféricas r, φ y θ .	189
4.1 (a) Desplazamiento real $d\vec{r}$ en presencia de una ligadura reónoma (b) Desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$, la ligadura se ha dejado "congelada" en el tiempo.	195
4.2 Desplazamiento real $d\vec{r}$ y desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$.	196
4.3 Espacio de fase unidimensional. Coordenada real $q(t)$ y la coordenada desplazada virtualmente $q(t) + \delta q(t)$.	197
4.4 Partícula de masa m que se mueve sobre una esfera lisa sin separarse de su superficie.	200
4.5 Anillo que se desplaza sobre un alambre liso en forma de parábola que rota con ω constante.	203
4.6 Dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra telescópica de longitud $\ell = \ell(t)$.	205
4.7 Péndulo en equilibrio estático. (a) Diagrama de cuerpo libre. (b) Diagrama con fuerzas y desplazamientos virtuales.	211
4.8 Partícula moviéndose dentro de un cilindro con trayectoria helicoidal.	213
4.9 Palanca horizontal en equilibrio estático.	216
4.10 (a) Sistema de partículas equivalente al sistema dado. (b) Vectores de posición y desplazamientos virtuales.	217
4.11 Mecanismo de barras homogéneas en equilibrio.	219
4.12 Centros de masa de los componentes del sistema, sus vectores de posición, los correspondientes desplazamientos virtuales y las fuerzas involucradas.	220
4.13 Sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa a través de una polea de diámetro despreciable.	224
4.14 Dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa a través de una polea y donde una de las masas se desliza sobre un plano inclinado.	225
5.1 Superficie de revolución generada por una curva $y = y(x)$.	237
5.2 Camino real $y(x)$ y camino variado $\tilde{y}(x)$. Diferencia entre δy y dy .	238

5.3 La función $y(x)$ es el camino que hace que el funcional J tome un valor extremal. Las funciones $y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x) = y(x) + \delta y(x)$ son las funciones vecinas, donde $\eta(x)$ se anula en las fronteras del intervalo $[x_1, x_2]$.	239
5.4 Función $y(x) = 3x$ entre los límites de $x = 0$ y $x = 2\pi$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = 3x + \alpha [\operatorname{Sen}(x) - \operatorname{Cos}(x) + 1]$.	246
5.5 Función $y(x) = x^2$ entre los límites de $x = -1$ y $x = 1$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = x^2 + \alpha(x^3 - x)$.	248
5.6 Superficie de revolución generada por una curva que une a los puntos $(x_1, y_1), y(x_1, y_1)$, haciéndola trasladarse entorno al eje y .	256
5.7 Partícula de masa m que se desplaza sobre una rampa lisa desde el punto P_1 hasta el punto P_2 .	259
5.8 Planteamiento gráfico del problema de la Braquistócrona.	260
5.9 Camino resultante para que la partícula se mueva desde $(x_1, y_1) = (0, 0)$ hasta $(x_2, y_2) = (d, -h)$ en el menor tiempo posible.	262
5.10 Película de jabón entre dos anillos concéntricos de radio a y separados por una distancia $2d$.	263
5.11 Geodésicas sobre una esfera.	277
5.12 Distancia más corta entre dos puntos del plano.	280
5.13 Geodésicas en un cilindro circular recto de radio R .	282
5.14 Función $y(x)$ cuya área por ella encerrada ha de maximizarse.	317
5.15 Cuerda de longitud ℓ colocada entre las orillas de un río de ancho $2a$.	319
F.1 Función arbitraria $\eta(x)$.	381

PREFACIO

El espacio y el tiempo son dos conceptos fundamentales de la Física y particularmente de la Mecánica Clásica, por lo tanto, sus propiedades son importantes en el desarrollo de las teorías que la conforman. Aquí se abordarán las propiedades que tienen el espacio y el tiempo en Mecánica Clásica.

El espacio, y por tanto su métrica, tienen las propiedades siguientes en la Mecánica Clásica:

1. El espacio se caracteriza por una métrica Euclídea*, lo que lo convierte en un espacio puntual Euclidiano en 3 dimensiones, \mathbb{R}^3 .
2. Independencia de los objetos en él inmersos, es decir, la métrica del espacio no se ve afectada por los mismos.
3. Constancia a lo largo del tiempo.
4. **Homogeneidad:** es igual en todos los puntos, no existiendo puntos privilegiados. La propiedad de homogeneidad del espacio significa que las leyes de la Física tienen validez en todos los lugares del universo, es decir, las propiedades mecánicas de un sistema dado no son afectadas por la traslación del mismo en el espacio.
5. **Isotropía[†]:** es igual en todas las direcciones, no existiendo direcciones privilegiadas. La isotropía del espacio se refiere a que las propiedades mecánicas de un sistema

*Euclides (fl. 300 a.C.), matemático griego, cuya obra principal, Elementos de geometría, es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes incommensurables y geometría del espacio. Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón. Enseñó geometría en Alejandría y allí fundó una escuela de matemáticas.

[†]Su etimología está en la raíces griegas **isos** = equitativo o igual y **tropos** = medio, espacio de lugar, dirección.

en particular no son afectadas por la orientación del mismo. Aparece en el hecho de que la orientación de los ejes de coordenadas, los cuales sirven de marco de referencia para analizar un fenómeno físico, es arbitraria. Si un experimento es efectuado en un laboratorio donde el equipo experimental tiene una cierta orientación espacial, los resultados obtenidos serán los mismos así se modifique la orientación de todos los instrumentos, el sistema que se va a analizar y el medio ambiente.

El tiempo se caracteriza, a su vez, por las siguientes propiedades:

1. **Homogeneidad:** no existen instantes privilegiados. La homogeneidad del tiempo se refiere a la equivalencia entre cualesquiera par de instantes de tiempo, independientemente de en qué momento se tomen. Se introduce en forma práctica al utilizar marcos de referencia donde el origen de coordenadas puede seleccionarse arbitrariamente. Una forma equivalente de expresar la homogeneidad del tiempo es plantear que las leyes de la física son las mismas tanto ahora como hace mil años.
2. **Anisotropía:** fluye constantemente en un sentido por lo que no se puede retroceder ni volver al pasado, es decir, no es isótropo por existir un único sentido en el que puede transcurrir el tiempo. Asimismo, los fenómenos futuros no pueden condicionar los presentes.
3. **Simultaneidad absoluta:** los fenómenos considerados simultáneos para dos observadores en sendos sistemas de referencia lo son, asimismo, para cualquier otro observador ligado a cualquier otro sistema de referencia.
4. En Mecánica Clásica el tiempo se considera una variable de naturaleza distinta de las variables espaciales.

Algunos de estos postulados básicos no son aceptados, por ejemplo, en la Mecánica Relativista. La Teoría de la Relatividad Especial, publicada en 1905 por Albert Einstein[‡], establece un referencial en cuatro dimensiones (espacio-tiempo). La Teoría de la Relatividad General establece un espacio curvo, con métrica Riemanniana[§]; donde la presencia de materia condiciona dicha métrica, siendo las propiedades del espacio dependiente de los objetos en él inmersos.

La Mecánica Clásica es uno de los pilares fundamentales de la Física, junto con los Métodos Matemáticos, el Electromagnetismo y la Mecánica Cuántica. La mecánica

[‡]Véase apéndice A.1 para una biografía resumida.

[§]Véase apéndice A.2 para una biografía resumida.

introduce al alumno a las técnicas teóricas que son esenciales en todas las ramas de la Física, como por ejemplo: la Relatividad General, Teoría de Campos y Partículas, Mecánica Cuántica y en Caos y los Sistemas Complejos. En esta materia existen varios textos clásicos y de gran impacto, varios de los cuales se citan al final de este trabajo. Existen también muchísimos textos recientes y que, con respecto a los clásicos, han mejorado la forma de presentar el contenido con la finalidad de hacerlos más didácticos y fáciles de entender. Algunos de estos últimos también son citados al final.

Por algunos años he sido profesor de Mecánica Clásica en mi universidad. En el transcurrir de esos años he elaborado los clásicos apuntes de clases que solemos hacer los profesores, en los cuales ponemos nuestro mejor esfuerzo y dedicación para hacer que nuestros alumnos entiendan lo mejor posible el contenido que se quiere transmitir. Estos apuntes recogen datos valiosos obtenidos durante las clases, originados de las preguntas y discusiones que a menudo surgen durante las mismas. Involucran también las soluciones por mi encontradas a las dificultades que los alumnos tenían para poder comprender los distintos puntos tratados, lo cual es muy valioso puesto que permite ajustar la presentación del contenido. Es obvio que el contenido de mis apuntes de clases se ajusta al interés particular del curso que he dictado, sin embargo, siempre son de gran utilidad para cualquier curso en general referente a la materia. El presente texto es un esfuerzo por lograr ordenar todos esos apuntes y hacer público mi trabajo para el disfrute de la comunidad académica.

El objetivo de este texto es presentar la Mecánica de Lagrange y de Hamilton, incluyendo la física y matemática necesaria para su estudio, en una forma lo más clara, sencilla y coherente posible sin sacrificar profundidad en el contenido, haciendo que el texto sea de muy fácil comprensión. Para lograr esto en mis apuntes de clases, realicé una muy amplia investigación consultando numerosos textos de los que se encuentran en el mercado referente a la materia (entre ellos los clásicos) así como varias publicaciones de revistas científicas y numerosísimas notas de clases encontradas en internet, sin embargo un gran número de ellas no pudieron ser referenciadas por no poseer los datos de origen suficientes. De todos esos textos fue extraido lo mejor de cada uno, siempre buscando la mejor explicación, la mejor definición, las mejores interpretaciones, etc., y siempre teniendo en mente que sea lo más claro y fácil de entender para luego ser procesadas y enfocadas en mi particular punto de vista y orden de contenidos.

El texto fue dividido en dos partes. En la primera parte se presentan los fundamentos físicos y matemáticos básicos que son indispensables para abordar la Mecánica de Lagrange y de Hamilton, como lo son: la dinámica de un sistema de partículas, todo

lo referente a ligaduras y coordenadas generalizadas, desplazamiento y trabajo virtual, Principio de los Trabajos Virtuales y de D'Alembert^I, Principio de Hamilton, cálculo variacional con fronteras fijas y transformación de Legendre.

Lo referente a la dinámica de un sistema de partículas no es muy distinto a lo que se encuentra en el común de los textos disponibles en el mercado, sin embargo es presentado en una forma detallada en referencia a los cálculos involucrados. Por otro lado, en referencia al concepto de ligadura, que es de gran importancia ya que de una u otra forma están presentes en los sistemas mecánicos, en el presente texto se hace un amplio estudio que permite fijar con firmeza este concepto mediante una detallada clasificación, ejemplos y figuras. En el caso de los desplazamientos virtuales, se presenta de forma clara su definición que con muchísima frecuencia en la mayoría de los textos sólo se menciona muy poco al respecto a pesar de ser el punto de partida para poder comprender todo lo referente al trabajo virtual, Principio de los Trabajos Virtuales y el Principio de D'Alembert que es fundamental en la mecánica y a partir del cual se puede desarrollar la Mecánica de Lagrange.

En el caso del cálculo variacional y la transformación de Legendre se presentan sendos y extensos capítulos con contenido de directa aplicabilidad a la mecánica de Lagrange y de Hamilton que no suele ser tratado con suficiente profundidad en la gran mayoría de los textos de mecánica ya que son dejados para los cursos dedicados a esa materia en específico. En particular, lo relacionado a la transformación de Legendre, de mucha utilidad al estudiar la Mecánica de Hamilton, es desarrollado con amplitud.

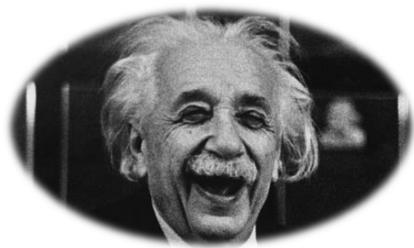
La segunda parte del texto trata, exclusivamente, sobre la Mecánica de Lagrange y de Hamilton, las transformaciones canónicas y la Teoría de Hamilton-Jacobi^{II}. Todos estos contenidos son presentados de una forma muy coherente donde se hace obvio la utilidad e importancia de todo lo estudiado en la primera parte del texto. Todos estos puntos son desarrollados de una forma muy fácil de entender, siempre presentando aquellos tópicos teóricos que son básicos en cualquier curso de este tipo y presentando numerosos ejemplos en los cuales se aplican los contenidos estudiados, ayudados con figuras ilustrativas.

En fin, aquí les dejo el presente trabajo esperando que sea de gran utilidad a la mayor cantidad de personas interesadas en la materia, en especial, a la multitud de alumnos que la tienen como curso obligatorio en sus respectivas carreras universitarias.

^IVéase apéndice A.3 para una biografía resumida.

^{II}Véase apéndice A.4 para una biografía resumida de Jacobi.

Terenzio Soldovieri C.



Albert Einstein 1879 - 1955

"Todos somos muy ignorantes. Lo que ocurre es que no todos ignoramos las mismas cosas". "Lo más incomprendible del Universo, es que sea comprensible". "Lo importante es no dejar de hacerse preguntas". "Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber". "La alegría de ver y entender es el más perfecto don de la naturaleza".

PARTE I

FUNDAMENTOS FISICOS Y MATEMATICOS BASICOS PARA ESTUDIAR MECANICA DE LAGRAGE Y HAMILTON

CAPITULO 1

DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

Contenido

1.1	Sistema de partículas	4
1.2	Clasificación de los sistemas de partículas	5
1.2.1	Discreto	5
1.2.2	Continuo	6
1.3	Fuerzas en un sistema de partículas	6
1.3.1	Externas e internas	7
1.3.2	Aplicadas y de reacción	11
1.4	Centro de masa	14
1.4.1	Para un sistema discreto	15
1.4.2	Para un sistema continuo	16
1.4.3	Para un sistema compuesto	18
1.4.4	Ejemplos del cálculo de la posición del centro de masa de un sistema	20
1.5	Centro de Gravedad	28
1.6	Centroide	29
1.7	Propiedades del Centro de Masa	31
1.8	Movimiento del Centro de Masa	31
1.9	Movimiento de un sistema aislado de dos partículas - Masa reducida	38

1.10	Momento lineal y su conservación	40
1.11	Momento angular y su conservación - Torque	42
1.12	Energía y su conservación	47
1.12.1	Energía cinética	47
1.12.2	Energía potencial	49
1.12.3	Conservación de la energía mecánica	52
1.13	Problemas	53

1.1 Sistema de partículas

Los cuerpos que se observan a simple vista están formados por un gran número de partículas, macroscópicas, atómicas o subatómicas. Sólo en ciertos casos es válida la simplificación que supone el modelo de la masa puntual. En otros casos, por el contrario, será necesario considerar el sistema como si estuviese formado por varias partículas.

Se llama *Sistema de Partículas*, *Sistema Mecánico* o *Sistema Dinámico* a un conjunto de varias partículas, de número finito o infinito, de las cuales se quiere estudiar su movimiento.

Por otro lado,

Se llama *Configuración de un Sistema* a la posición de cada una de sus partículas en un instante dado.

Para definir la configuración se necesita un determinado número de parámetros según el sistema de que se trate. Por ejemplo, una partícula libre precisa de tres parámetros (x, y, z) son sus coordenadas Cartesianas*. Un sistema de N partículas libres queda definido por $3N$ parámetros. Sin embargo, si existen ligaduras (detalles en el capítulo 2) que restrinjan el movimiento, el número de parámetros preciso para definir la configuración podría ser menor.

Todo sistema está definido por su frontera,

Se llama *Frontera del Sistema* (ver figura 1.1) a la envoltura imaginaria que lo encierra y separa de su entorno o exterior.

En el exterior o entorno del sistema pueden existir agentes que ejerzan influencia sobre el mismo como: campos gravitacionales o eléctricos originados por otro sistema de partículas, otros sistemas de partículas en contacto con él, etc. Puede pensarse que la frontera de un sistema de partículas tiene propiedades especiales que sirven para: (a) aislar el sistema de su entorno o para (b) permitir la interacción de un modo específico entre el sistema y su entorno.

*Véase apéndice A.5 para una biografía resumida.

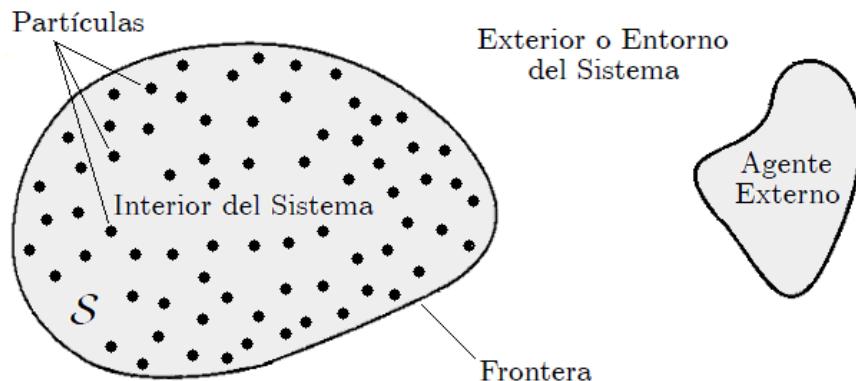


Figura 1.1: Frontera de un sistema de partículas.

Debe quedar claro que el espesor de la frontera es matemáticamente cero por lo que no puede contener materia ni ocupar algún lugar en el espacio.

El valor de alguna variable física del sistema medida exactamente sobre su frontera debe ser igual tanto para el interior como para el exterior, ya que el sistema y el entorno están en contacto en ese punto.

1.2 Clasificación de los sistemas de partículas

Un sistema de partículas puede ser clasificado como:

1.2.1 Discreto

Este modelo considera el cuerpo formado por un número finito de partículas que están localizadas. En un sistema discreto la masa total del mismo se obtiene sumando las masas de todas las partículas que lo forman.

Dentro de este modelo se consideran:

1.2.1.1 Sistemas discretos indeformables

Son los sistemas en los que la distancia relativa entre las partículas que lo constituyen permanece inalterable en el tiempo.

1.2.1.2 Sistemas discretos deformables

Son los sistemas en los que puede cambiar la distancia relativa entre las partículas que lo constituyen.

1.2.2 Continuo

Este modelo considera el cuerpo formado por una distribución continua de materia, es decir, por un número infinito de partículas. Las partículas que lo forman no se pueden delimitar, llenando todo el espacio que ocupa.

Al igual que en el caso discreto, dentro de este modelo se consideran:

1.2.2.1 Sistemas continuos indeformables

Son los sistemas continuos que no sufren deformaciones por efecto de fuerzas externas. A estos sistemas se les da el nombre de *Cuerpo Rígido*. Un cuerpo rígido es una idealización ya que, en la naturaleza, todos los cuerpos se deforman en mayor o menor grado bajo la acción de una fuerza externa. Sin embargo, en muchos casos la deformación puede ser tan pequeña que para fines prácticos se puede suponer que no existe. Para el estudio del comportamiento de estos sistemas existe la denominada *Mecánica de los Cuerpos Rígidos*.

1.2.2.2 Sistemas continuos deformables

Son los sistemas que sufren deformaciones por efecto de fuerzas externas.

En muchos casos prácticos un sistema discreto que tenga un gran número, pero finito, de partículas puede tratarse como un sistema continuo. Inversamente, un sistema continuo puede tratarse como un sistema discreto con un gran número, pero finito, de partículas.

1.3 Fuerzas en un sistema de partículas

En un sistema de partículas están involucradas fuerzas que son ejercidas sobre las partículas que lo constituyen y que son las causantes de la variación de la cantidad movimiento lineal o momento lineal \vec{p} de las mismas. A estas fuerzas resulta conveniente clasificarlas ya que las partículas del sistema no sólo están interaccionando entre sí, sino con otras partículas que no pertenecen al mismo sistema. Es posible clasificarlas atendiendo a varios criterios:

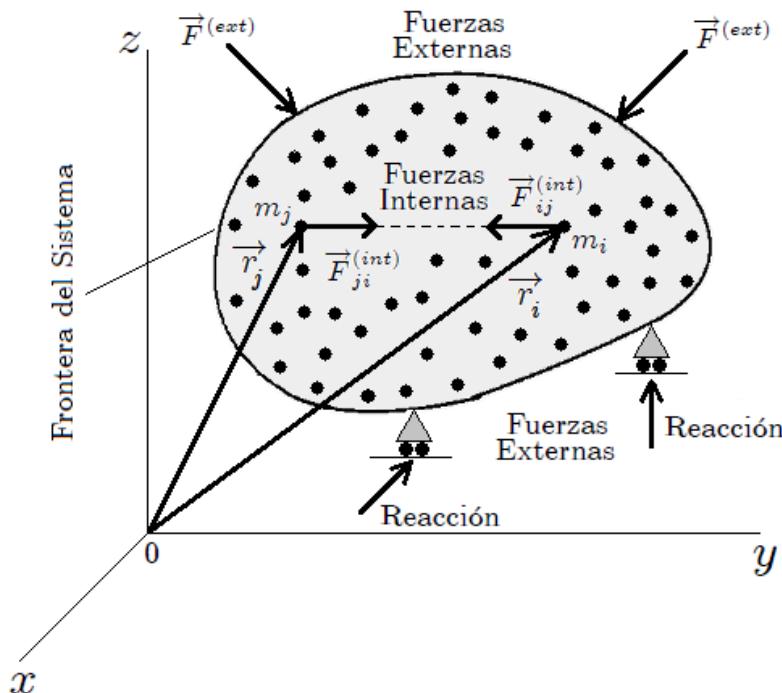


Figura 1.2: Tipos de fuerzas en un sistema de partículas. Aquí \vec{r}_i y \vec{r}_j son los vectores de posición de la i -ésima y j -ésima partícula respectivamente, $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ es la fuerza ejercida por la j -ésima partícula sobre i -ésima, $\vec{F}_{ji}^{(int)}$ es la fuerza ejercida por la i -ésima partícula sobre j -ésima y las $\vec{F}^{(ext)}$ representan fuerzas externas ejercidas sobre el sistema.

1.3.1 Externas e internas

1.3.1.1 Fuerzas externas

Las Fuerzas Externas son aquellas ejercidas por agentes externos al sistema, es decir, son las que están aplicadas a partículas del sistema debidas a partículas, distribuciones de materia u otros agentes que no pertenecen al mismo sistema.

Las fuerzas externas son las responsables del comportamiento externo del sistema y son las únicas que modifican su momento lineal \vec{p} , influyendo sobre una o más partes del mismo o sobre su totalidad. Estas fuerzas pueden ser los pesos de las partículas del sistema, reacciones causadas por las superficies en contacto con las mismas, fuerzas ejercidas externamente mediante cuerdas, etc.

En este texto serán denotadas por: $\vec{F}^{(ext)}$ cuando se trate de la fuerza externa total o resultante sobre el sistema y por $\vec{F}_i^{(ext)}$ cuando se trate de la fuerza externa total sobre

la i -ésima partícula (ver figura 1.2) a menos que, para casos particulares, sea indicada otra notación.

A un sistema de partículas sobre el cual no se aplican fuerzas externas se le denomina *Sistema Aislado* o *Sistema Cerrado*. Es decir, es un sistema que no interacciona con otros agentes físicos situados fuera de él y, por tanto, no está conectado en forma “causal” ni en correlación con nada externo a él.

Particularmente, un sistema inercial aislado es aquél en el que son válidas las tres Leyes de Newton[†] y tiene las siguientes características:

1. La evolución del sistema es independiente del origen de la coordenada temporal, es decir, **el tiempo es homogéneo**.
2. La evolución del sistema es independiente del origen de coordenadas del sistema inercial, es decir **el espacio es homogéneo**.
3. La evolución del sistema es independiente de la dirección de los ejes de sistema de coordenadas escogido, es decir, **el espacio es isótropo**.

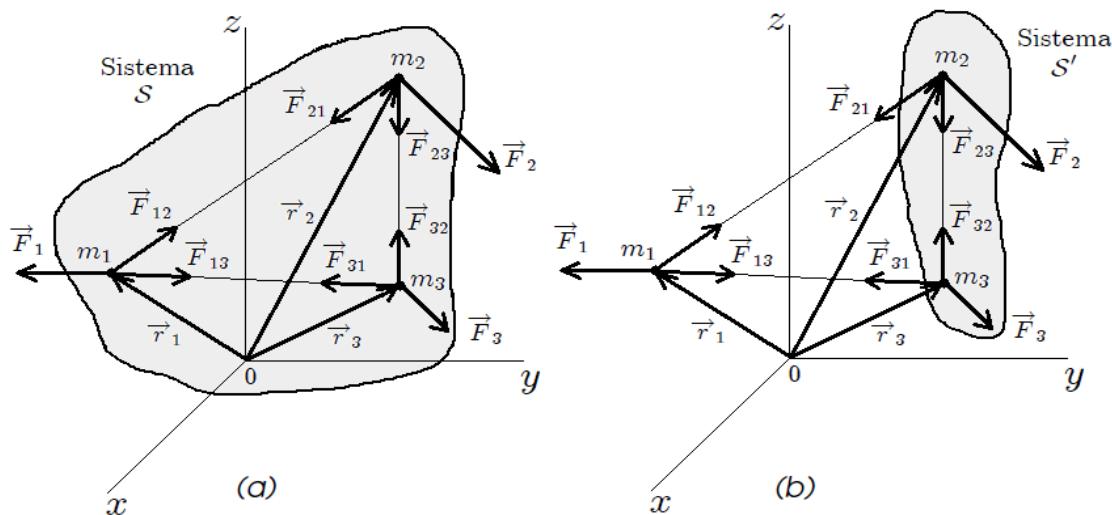


Figura 1.3: (a) Sistema S con tres partículas de masas m_1 , m_2 y m_3 . (b) Sistema S' con dos partículas de masas m_2 y m_3 .

[†]Véase apéndice A.6 para una biografía resumida.

1.3.1.2 Fuerzas internas

Las *Fuerzas Internas* son aquellas ejercidas entre las partículas que constituyen al sistema, es decir, son las que están aplicadas a partículas del sistema debidas a partículas, distribuciones de materia u otros agentes del mismo sistema.

Las fuerzas internas son las que determinan el grado de rigidez o cohesión de un determinado sistema y no influyen en su comportamiento externo. Estas pueden ser las fuerzas de atracción gravitacional entre las partículas del sistema, la fuerza eléctrica si las partículas tienen cargas eléctricas, fuerzas de contacto entre las partículas, etc.

En este texto $\vec{F}^{(int)}$ representará la fuerza interna total o resultante en el sistema y $\vec{F}_i^{(int)}$ representará la fuerza interna total sobre la i -ésima partícula (ver figura 1.2), a menos que sea indicada otra notación para casos particulares.

Como ejemplo para ilustrar los conceptos de fuerza externa y fuerza interna, considérense los sistemas mostrados en la figura 1.3. En la figura 1.3a se muestra un sistema S con tres partículas de masas m_1 , m_2 y m_3 posicionadas con respecto al origen O del referencial mostrado mediante los vectores de posición \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 respectivamente. Sobre estas partículas actúan las siguientes fuerzas:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| Fuerzas sobre m_1 | $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1 \text{ fuerza ejercida sobre } m_1 \text{ por un agente externo.} \\ \vec{F}_{12} \text{ fuerza ejercida sobre } m_1 \text{ por } m_2. \\ \vec{F}_{13} \text{ fuerza ejercida sobre } m_1 \text{ por } m_3. \end{array} \right.$ |
| Fuerzas sobre m_2 | $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 \text{ fuerza ejercida sobre } m_2 \text{ por un agente externo.} \\ \vec{F}_{21} \text{ fuerza ejercida sobre } m_2 \text{ por } m_1. \\ \vec{F}_{23} \text{ fuerza ejercida sobre } m_2 \text{ por } m_3. \end{array} \right.$ |
| Fuerzas sobre m_3 | $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_3 \text{ fuerza ejercida sobre } m_3 \text{ por un agente externo.} \\ \vec{F}_{31} \text{ fuerza ejercida sobre } m_3 \text{ por } m_1. \\ \vec{F}_{32} \text{ fuerza ejercida sobre } m_3 \text{ por } m_2. \end{array} \right.$ |

En este sistema las fuerzas \vec{F}_{12} , \vec{F}_{13} , \vec{F}_{21} , \vec{F}_{23} , \vec{F}_{31} y \vec{F}_{32} son internas y, como se puede ver, representan las fuerzas de interacción mutua entre las tres partículas. Las fuerzas \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 son externas que representan la interacción del sistema con un agente externo al mismo.

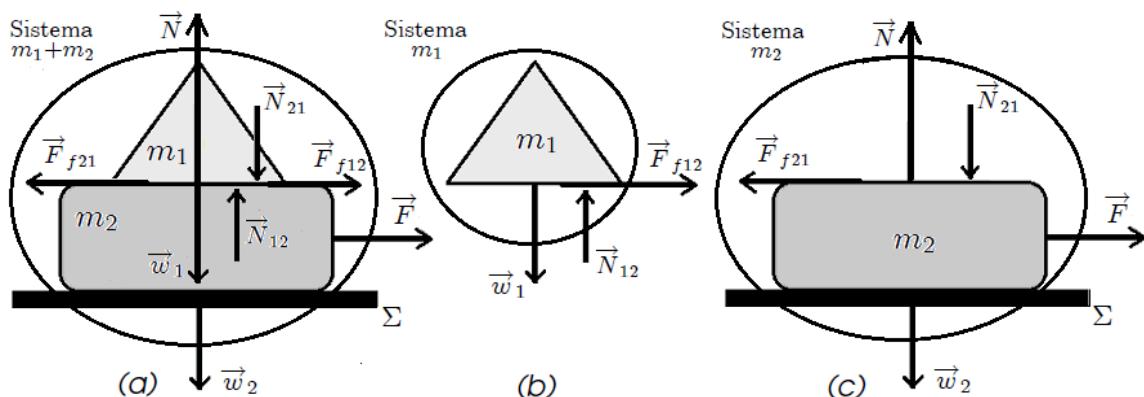


Figura 1.4: (a) Sistema de dos bloques de masas m_1 y m_2 , donde m_1 se desplaza sobre la superficie de m_2 y éste último sobre una superficie lisa Σ . Hay fricción entre los bloques. (b) Fuerzas sobre el bloque m_1 . (c) Fuerzas sobre el bloque m_2 .

Por otro lado, en la figura 1.3b se muestra el mismo sistema de tres partículas pero donde se ha escogido como objeto de estudio al sistema S' formado por las partículas de masas m_2 y m_3 . En este caso, las fuerzas \vec{F}_{23} y \vec{F}_{32} son internas y las fuerzas \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_{21} y \vec{F}_{31} son externas (estas dos últimas eran internas para S). Las \vec{F}_1 , \vec{F}_{12} y \vec{F}_{13} , que en S pertenecían al sistema, ahora nada tienen que ver con S' ya que no ejercen ninguna influencia sobre él.

Otro ejemplo es el mostrado en la figura 1.4. En la figura 1.4a se presenta un sistema constituido por dos bloques de masas m_1 y m_2 que se desplazan el uno sobre el otro habiendo fricción. El conjunto de bloques, a la vez, se desplaza sobre una superficie lisa Σ , debido a la acción una fuerza \vec{F} sobre el bloque de masa m_2 ejercida por un agente externo (una persona o una máquina hala al bloque). Las fuerzas involucradas son las siguientes:

Fuerzas sobre m_1	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_1 \text{ peso de } m_1. \\ \vec{N}_{12} \text{ fuerza normal aplicada por } m_2 \text{ sobre } m_1. \\ \vec{F}_{f12} \text{ fuerza de fricción aplicada por } m_2 \text{ sobre } m_1. \end{array} \right.$
Fuerzas sobre m_2	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w}_2 \text{ peso de } m_2. \\ \vec{N}_{21} \text{ fuerza normal aplicada por } m_1 \text{ sobre } m_2. \\ \vec{F}_{f21} \text{ fuerza de fricción aplicada por } m_1 \text{ sobre } m_2. \\ \vec{N} \text{ fuerza normal ejercida por } \Sigma \text{ sobre } m_2. \\ \vec{F} \text{ fuerza aplicada sobre } m_2 \text{ por un agente externo.} \end{array} \right.$

En este sistema, compuesto por m_1 y m_2 , las fuerzas \vec{w}_1 , \vec{w}_2 , \vec{N} y \vec{F} , son externas. La fuerza normal \vec{N} es externa ya que es una fuerza que se ejerce sobre m_2 por la superficie

Σ , que es un agente externo al sistema. Las fuerzas \vec{F}_{f12} , \vec{F}_{f21} , \vec{N}_{12} y \vec{N}_{21} son internas porque se dan entre m_1 y m_2 .

Por otro lado, si la frontera del sistema se define de tal forma que se tome solamente uno de los bloques, entonces todas las fuerzas actuantes sobre él serían externas. La figura 1.4b muestra el caso en que la frontera del sistema sólo considere al bloque 1 y la figura 1.4(c) muestra el caso en que se considere al bloque 2. En ambos casos todas las fuerzas mostradas son externas y constituyen los denominados diagramas de cuerpo libre.

A partir de la anterior discusión se deduce que cualquier fuerza puede ser externa o interna. Sólo después de definir las fronteras del sistema de partículas objeto de estudio, se sabrán cuáles de las fuerzas presentes entran en cada categoría.

1.3.2 Aplicadas y de reacción

Se pueden clasificar también en *Aplicadas* y *de Reacción*.

1.3.2.1 Aplicadas

A este tipo de fuerzas también se les denominan *Fuerzas Activas*.

Las fuerzas aplicadas son aquellas que actúan a “motus proprio” sobre el sistema, es decir, son las fuerzas impuestas.

1.3.2.2 De reacción

A este tipo de fuerzas también se les denomina *Fuerzas Reactivas* o también *Fuerzas de Ligadura*.

Son aquellas que actúan como respuesta a un movimiento determinado que intentan impedir y sólo se dan cuando existe la tendencia a este movimiento.

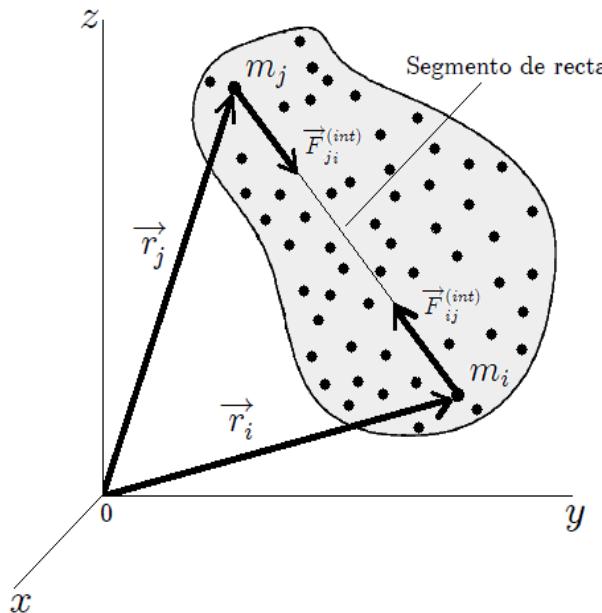


Figura 1.5: Forma fuerte de la tercera ley de Newton.

La Tercera Ley de Newton juega un papel muy importante en la dinámica de un sistema de partículas debido a las fuerzas internas entre las partículas que constituyen el sistema. Son posibles dos formas de esta ley en referencia a las fuerzas internas:

- Forma débil de la Tercera Ley de Newton:** las fuerzas ejercidas entre dos partículas m_i y m_j son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si se denota por $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ la fuerza interna ejercida sobre la i -ésima partícula debido a la j -ésima, entonces la llamada forma “débil” de la tercera ley de Newton se escribe como,

$$\vec{F}_{ij}^{(int)} = -\vec{F}_{ji}^{(int)} \quad (1.1)$$

- Forma fuerte de la Tercera Ley de Newton:** las fuerzas ejercidas entre dos partículas m_i y m_j , además de ser iguales y opuestas, deben darse sobre el segmento recta que une las posiciones de ambas partículas,

$$\vec{F}_{ij}^{(int)} = F_{ij}^{(int)}(r_{ij}) \hat{r}_{ij} \quad (1.2)$$

donde $\hat{r}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$ y $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, es decir, si $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ es paralela a \vec{r}_{ij} . Esta forma más restringida de la tercera ley de Newton, llamada también la forma “fuerte”, es mostrada en la figura 1.5. A las fuerzas que cumplen esta forma de la tercera ley de Newton se le denominan *Fuerzas Centrales*.

Se debe tener cuidado en saber cuándo es aplicable cada una de las formas de la Tercera Ley de Newton. En verdad, muchas son las fuerzas que obedecen ambas formas. Por ejemplo, la fuerza gravitacional y la fuerza electrostática tienen esta propiedad, conservándose el momento lineal total y el momento angular en estos sistemas. Sin embargo existen algunas fuerzas que, en general, ¡no cumplen con ambas formas a la vez! y el ejemplo más famoso lo constituye la *Fuerza de Lorentz*[‡] que viene dada por,

$$\vec{F}_{ij}^{(int)} = q_i \vec{v}_i \times \vec{B}_{ij} \quad (1.3)$$

que se estudia en el curso de electromagnetismo y donde \vec{v}_i es la velocidad de la carga q_i y \vec{B}_{ij} es el campo magnético sobre la carga q_i generado por el movimiento de la carga q_j . Esta fuerza, en general, sólo obedece a la forma débil de la Tercera Ley de Newton. Para visualizar esto, considérense dos partículas cargadas q_i y q_j que se mueven con velocidades respectivas \vec{v}_i y \vec{v}_j en el plano de esta página, como se muestra en la figura 1.6.

Puesto que $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ es perpendicular a ambos \vec{v}_i y \vec{B}_{ij} (el cual puede apuntar hacia adentro o hacia afuera del plano de esta página), $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ puede ser paralela a $\vec{F}_{ji}^{(int)}$

[‡]Véase apéndice A.7 para una biografía resumida.

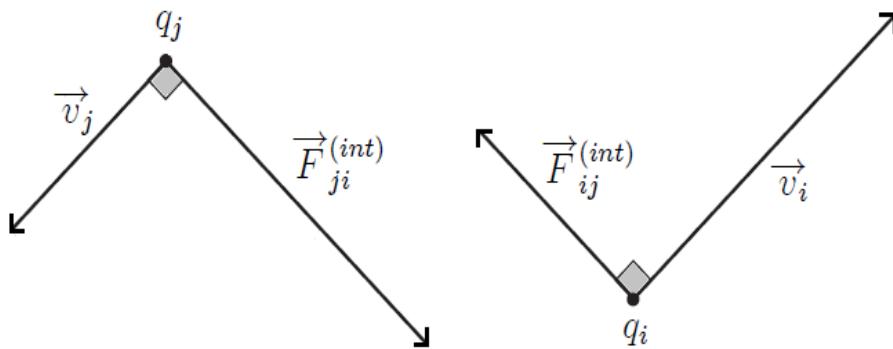


Figura 1.6: Fuerzas interacción electromagnética de entre dos partículas cargadas q_i y q_j en movimiento.

sólo cuando \vec{v}_i y \vec{v}_j son paralelas, lo cual no es cierto en general.

Cualquier fuerza que dependa de las velocidades de los cuerpos interactuantes no es central, por lo tanto no es aplicable la forma fuerte. La fuerza gravitacional entre cuerpos en movimiento también depende de la velocidad pero el efecto es pequeño y difícil de detectar. El único efecto observable es la precesión del perihelio de los planetas interiores (Mercurio, Venus, Tierra y Marte).

1.4 Centro de masa

En el estudio de la dinámica de sistemas de partículas es de suma importancia el concepto de *Centro de Masa* debido a sus muy útiles propiedades físicas. En esta sección se presentará cómo es posible localizar su posición para sistemas discretos, continuos y compuestos. Más adelante, a partir de la sección 1.7, sus propiedades físicas serán mencionadas y algunas demostradas.

Es posible definirlo como sigue:

El *Centro de Masa* de un sistema de partículas (discreto o continuo) es el punto geométrico, dentro o fuera de él, ubicado de tal manera que al ser dotado con una masa igual a la total del sistema hace que su momento lineal sea igual al total del mismo.

1.4.1 Para un sistema discreto

Supóngase que se tiene un sistema de N partículas de masas m_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) cuyas posiciones son referidas al origen O de un sistema de referencia inercial S mediante los vectores de posición \vec{r}_i como se muestra en la figura 1.7. Piénsese ahora en la siguiente pregunta: ¿en qué posición \vec{R} debería estar una partícula de tal manera que su masa sea igual a la total M del sistema y cuyo momento lineal sea igual al total \vec{P} del mismo?.

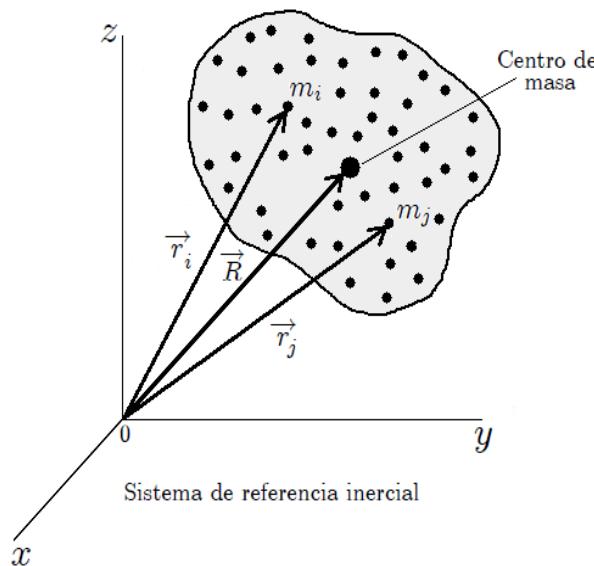


Figura 1.7: Posición del centro de masa de un sistema de N partículas.

Para responder esta pregunta debe expresarse matemáticamente la condición planteada en ella. En efecto,

$$M\vec{V} = \vec{P} \quad (1.4)$$

donde \vec{V} es la velocidad del punto geométrico en la posición que se busca. Si cada partícula del sistema tiene un momento lineal,

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad (1.5)$$

entonces,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (1.6)$$

que al ser sustituido en (1.4) resulta en,

$$M\vec{V} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (1.7)$$

o también,

$$M \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (1.8)$$

Ahora, si se supone que las masas de las partículas son constantes entonces,

$$\frac{d}{dt} (M \vec{R}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \quad (1.9)$$

O,

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (1.10)$$

donde,

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (1.11)$$

La ecuación (1.10) que proporciona el vector de la posición buscada. El punto posicionado por \vec{R} se le denomina *Centro de Masa* de un sistema de partículas, en este caso para uno discreto.

Como,

$$\vec{r}_i = x_i \hat{e}_x + y_i \hat{e}_y + z_i \hat{e}_z \quad (1.12)$$

entonces,

$$\vec{R} = \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i \right) \hat{e}_x + \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i \right) \hat{e}_y + \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i \right) \hat{e}_z \quad (1.13)$$

de donde las componentes Cartesianas (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) de la posición del centro de masa son,

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i \quad (1.14)$$

1.4.2 Para un sistema continuo

Supóngase ahora que se tiene un sistema continuo como el representado por la región \mathcal{R} mostrada en la figura 1.8, de densidad ρ y masa M . Escójase un elemento de masa dm de dicha distribución. Habrán infinitos de estos elementos de masa cuyas posiciones son referidas al origen O de un sistema de referencia inercial S mediante los vectores de posición \vec{r} . Piénsese ahora nuevamente en la misma pregunta planteada en el caso del sistema discreto de partículas.

Para responder esta pregunta nuevamente debe expresarse matemáticamente la condición planteada en ella. En efecto,

$$M \vec{V} = \vec{P} \quad (1.15)$$

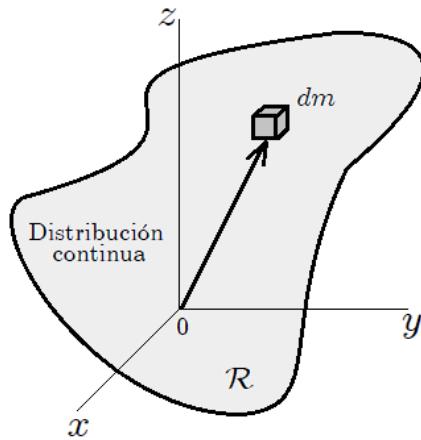


Figura 1.8: Distribución de mareria continua de masa m y densidad ρ .

pero si cada elemento dm tiene un momento lineal,

$$d\vec{p} = dm \vec{v} \quad (1.16)$$

entonces,

$$\vec{P} = \int_{\mathcal{R}} \vec{v} dm \quad (1.17)$$

que al ser sustituido en (1.15) resulta en,

$$M\vec{V} = \int_{\mathcal{R}} \vec{v} dm \quad (1.18)$$

o también,

$$M\vec{V} = \int_{\mathcal{R}} \dot{\vec{r}} dm \quad (1.19)$$

Ahora, si se supone que cada una de las masas dm no varía al transcurrir el tiempo entonces,

$$\frac{d}{dt} (M\vec{R}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{R}} \vec{r} dm \right) \quad (1.20)$$

O,

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} \vec{r} dm} \quad (1.21)$$

donde,

$$M = \int_{\mathcal{R}} dm \quad (1.22)$$

La ecuación (1.21) que proporciona el vector de la posición buscada. El punto posicionado por \vec{R} se le denomina, al igual que antes *Centro de Masa*, en este caso para un sistema continuo tridimensional.

Al usar (1.12) resulta,

$$\vec{R} = \left(\frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} x dm \right) \hat{e}_x + \left(\frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} y dm \right) \hat{e}_y + \left(\frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} z dm \right) \hat{e}_z \quad (1.23)$$

de manera que las componentes Cartesianas de \vec{R} son,

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} x dm \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} y dm \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} z dm \quad (1.24)$$

La región \mathcal{R} puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional, por lo tanto, las integrales $\int_{\mathcal{R}}$ podrán ser simples, dobles o triples respectivamente. En consecuencia,

$$dm = \begin{cases} \rho_\ell d\ell, & \text{región unidimensional de longitud } \ell. \\ \rho_s ds, & \text{región bidimensional de superficie } s. \\ \rho_v dv, & \text{región tridimensional de volumen } v. \end{cases} \quad (1.25)$$

donde ρ_ℓ es la densidad lineal, ρ_s es la densidad superficial y ρ_v es la densidad volumétrica.

1.4.3 Para un sistema compuesto

Dado un sistema de partículas que ha sido subdividido por completo en subsistemas, el objetivo de esta sección es encontrar la posición \vec{R} de su centro de masa a partir de la posición de los centros de masa de cada uno de dichos subsistemas.

En efecto, considérese un sistema S discreto de N partículas y masa M que ha sido subdividido (por completo) en s subsistemas S_1, S_2, \dots, S_s (ver figura 1.9). Si n_1, n_2, \dots, n_s representan el número de partículas de cada uno de los subsistemas debe cumplirse que,

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_s = \sum_{j=1}^s n_j \quad (1.26)$$

Cada uno de los subsistemas tiene su centro de masa posicionado en $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_s$ y masas totales M_1, M_2, \dots, M_s . Para el subsistema 1 se tiene que su masa total viene dada por,

$$M_1 = m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1n_1} = \sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} \quad (1.27)$$

(el primer índice indica el subsistema y el segundo cada una de las partículas de dicho subsistema),

$$m_{\text{subsistema, partícula}}$$

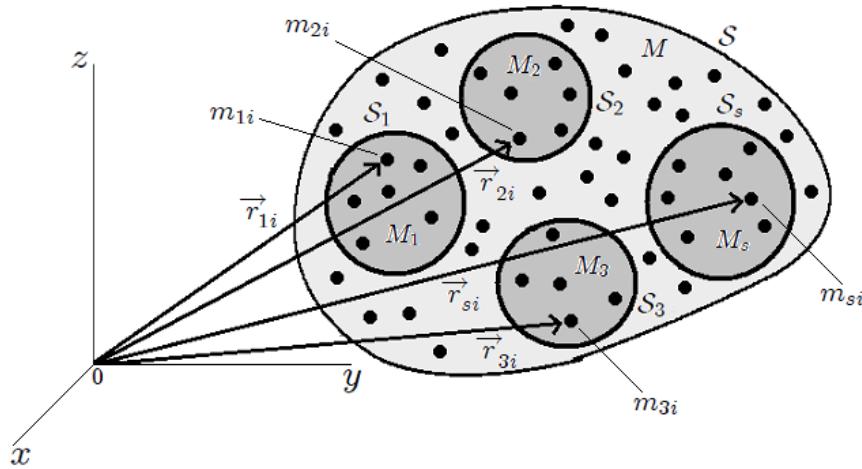


Figura 1.9: Sistema S discreto de N partículas subdividido (por completo) en s subsistemas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_s$.

y los vectores de posición de cada una de las partículas que lo integran vienen dados por $\vec{r}_{11}, \vec{r}_{12}, \dots, \vec{r}_{1n_1}$. Para los restantes $s - 1$ subsistemas se hace de forma análoga,

$$\begin{aligned} M_2 &= m_{21} + m_{22} + \dots + m_{2n_2} = \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ M_s &= m_{s1} + m_{s2} + \dots + m_{sn_s} = \sum_{i=1}^{n_s} m_{si} \end{aligned} \quad (1.28)$$

de manera que la masa total del sistema S viene dada por,

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_s = \sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_s} m_{si} \quad (1.29)$$

entonces, a partir de (1.10), la posición del centro de masa de cada uno de los s subsistemas de S vendrá dada por,

$$\begin{aligned} \text{Subsistema 1: } \vec{R}_1 &= \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} \vec{r}_{1i} \Rightarrow M_1 \vec{R}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} \vec{r}_{1i} \\ \text{Subsistema 2: } \vec{R}_2 &= \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} \vec{r}_{2i} \Rightarrow M_2 \vec{R}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} \vec{r}_{2i} \\ \text{Subsistema 3: } \vec{R}_3 &= \frac{1}{M_3} \sum_{i=1}^{n_3} m_{3i} \vec{r}_{3i} \Rightarrow M_3 \vec{R}_3 = \sum_{i=1}^{n_3} m_{3i} \vec{r}_{3i} \\ &\vdots \\ \text{Subsistema } s: \quad \vec{R}_s &= \frac{1}{M_s} \sum_{i=1}^{n_s} m_{si} \vec{r}_{si} \Rightarrow M_s \vec{R}_s = \sum_{i=1}^{n_s} m_{si} \vec{r}_{si} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ahora bien, al sumar miembro a miembro las expresiones (1.30) resulta,

$$\begin{aligned} M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2 + M_3 \vec{R}_3 + \dots + M_s \vec{R}_s &= \sum_{i=1}^{n_1} m_{1i} \vec{r}_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} m_{2i} \vec{r}_{2i} + \sum_{i=1}^{n_3} m_{3i} \vec{r}_{3i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_s} m_{si} \vec{r}_{si} \\ \sum_{j=1}^s M_j \vec{R}_j &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \\ \sum_{j=1}^s M_j \vec{R}_j &= M \vec{R} \end{aligned}$$

O,

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^s M_j \vec{R}_j} \quad (1.31)$$

que es la posición del centro de masa del sistema original S calculada a partir de las posiciones $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \dots, \vec{R}_s$ de los centros de masa de cada uno de los s subsistemas.

En componentes Cartesianas,

$$\boxed{x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^s M_i x_{cm,i} \quad y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^s M_i y_{cm,i} \quad z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^s M_i z_{cm,i}} \quad (1.32)$$

donde $x_{cm,i}$, $y_{cm,i}$ y $z_{cm,i}$ son las coordenadas de la posición del centro de masa del i -ésimo subsistema. Por lo tanto,

En los sistemas compuestos, se pueden encontrar los centros de masa de los sistemas parciales o subsistemas y, a partir de ellos, calcular el centro de masa del sistema completo. A esta propiedad del centro de masa se le conoce como *Propiedad de Agrupamiento*.

Es fácil mostrar que lo mismo ocurre partiendo de un sistema continuo o un sistema mixto, es decir, un sistema formado por subsistemas donde algunos son discretos y otros continuos.

1.4.4 Ejemplos del cálculo de la posición del centro de masa de un sistema

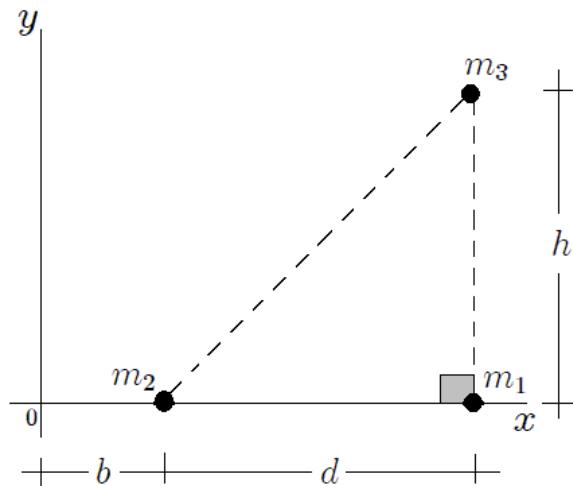


Figura 1.10: Sistema discreto formado por tres partículas situadas en los vértices de un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 1.1

Sistema discreto bidimensional. Un sistema consta de tres partículas de masas $m_1 = 2 \text{ Kg}$, $m_2 = 4 \text{ Kg}$ y $m_3 = 8 \text{ Kg}$, localizadas en los vértices de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 1.10. Encuéntrese la posición del centro de masa del sistema respecto al referencial dado.

SOLUCION: al usar (1.11) la masa total del sistema viene dada por,

$$M = \sum_{i=1}^3 m_i = m_1 + m_2 + m_3 = 2\text{Kg} + 4\text{Kg} + 8\text{Kg} = 14\text{Kg} \quad (1.33)$$

Ahora, al usar (1.14) es posible calcular las coordenadas del centro de masa resultando,

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i x_i = \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \\ &= \frac{1}{14\text{Kg}} [(2\text{Kg})(b+d) + (4\text{Kg})(b) + (8\text{Kg})(b+d)] = \frac{5}{7}d + b \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^3 m_i y_i = \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) \\ &= \frac{1}{14\text{Kg}} [(2\text{Kg})(0) + (4\text{Kg})(0) + (8\text{Kg})(h)] = \frac{4}{7}h \end{aligned} \quad (1.35)$$

Entonces, de los resultados (1.34) y (1.35), el centro de masa está en la posición,

$$\vec{R} = \left(\frac{5}{7}d + b, \frac{4}{7}h \right) = \left(\frac{5}{7}d + b \right) \hat{e}_x + \frac{4}{7}h \hat{e}_y \quad (1.36)$$

EJEMPLO 1.2

Sistema continuo unidimensional. Encuéntrese el centro de masa de un alámbre semicircular homogéneo de radio a y densidad lineal λ (ver figura 1.11).

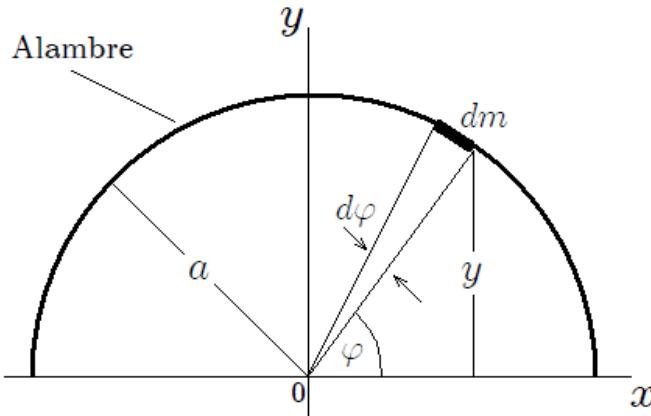


Figura 1.11: Alámbre semicircular homogéneo de radio a y densidad lineal λ .

SOLUCION: en coordenadas polares se tiene que el diferencial de masa viene dado por,

$$dm = \lambda r d\varphi = \lambda a d\varphi \quad (1.37)$$

por lo tanto la masa M del aro es,

$$M = \int_{\mathcal{R}} dm = \int_0^{\pi} \lambda a d\varphi = \pi \lambda a \quad (1.38)$$

Por la simetría mostrada en la figura y debido a que el alámbre es homogéneo se tiene que la abscisa del centro de masa es,

$$x_{cm} = 0 \quad (1.39)$$

A partir de (1.24) la ordenada viene dada por,

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} y dm \quad (1.40)$$

donde,

$$y = r \operatorname{Sen} \varphi = a \operatorname{Sen} \varphi \quad (1.41)$$

en coordenadas polares. Por lo tanto, al sustituir (1.37), (1.38) y (1.41) en (1.40),

$$y_{cm} = \frac{1}{\pi \lambda a} \int_0^{\pi} \lambda a^2 \operatorname{Sen} \varphi d\varphi = \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Sen} \varphi d\varphi = \frac{2a}{\pi} \quad (1.42)$$

Por último, de los resultados (1.39) y (1.42), el centro de masa del alambre está en la posición,

$$\vec{R} = \left(0, \frac{2a}{\pi}\right) = \frac{2a}{\pi} \hat{e}_y \quad (1.43)$$

EJEMPLO 1.3

Sistema continuo bidimensional. Calcular la posición del centro de masa de la placa homogénea, de densidad σ , mostrada en la figura 1.12.

$$r = A \cos(2\varphi)$$

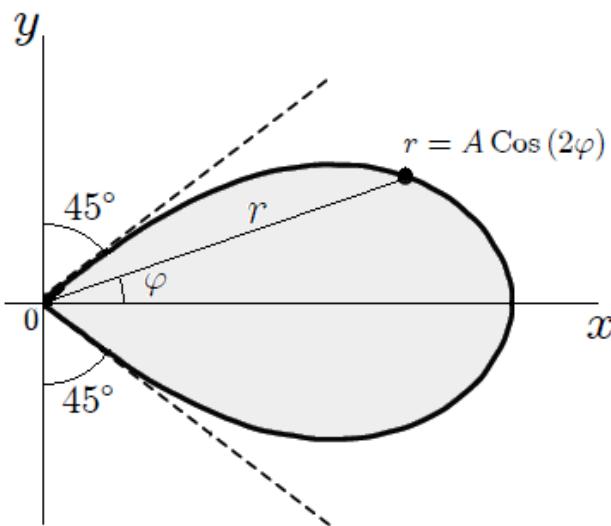


Figura 1.12: Posición del centro de masa de la placa homogénea $r = A \cos(2\varphi)$.

SOLUCION: en coordenadas polares el diferencial de masa viene dado por,

$$dm = \sigma r dr d\varphi \quad (1.44)$$

por lo tanto su masa resulta de,

$$M = \int_{\mathcal{R}} dm = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{A \cos(2\varphi)} \sigma r dr d\varphi = \frac{1}{8} \pi A^2 \sigma \quad (1.45)$$

entonces a partir de (1.24), considerando (1.44) y (1.45), la coordenada x_{cm} del centro de masa es,

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} x dm = \frac{1}{\frac{1}{8} \pi A^2 \sigma} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{A \cos(2\varphi)} \sigma r^2 \cos \varphi dr d\varphi = \frac{128\sqrt{2}}{105\pi} A \quad (1.46)$$

donde se ha tenido presente que en coordenadas polares $x = r \cos \varphi$.

Por otro lado, debido a la simetría del problema es obvio que,

$$y_{cm} = 0 \quad (1.47)$$

entonces, de los resultados (1.46) y (1.47), el centro de masa está en la posición,

$$\vec{R} = \left(\frac{128\sqrt{2}}{105\pi} A, 0 \right) = \frac{128\sqrt{2}}{105\pi} A \hat{e}_x \quad (1.48)$$

EJEMPLO 1.4

Sistema continuo tridimensional. Encuéntrese el centro de masa de un cono sólido homogéneo de densidad ρ , altura h y radio de la base a (ver figura 1.13).

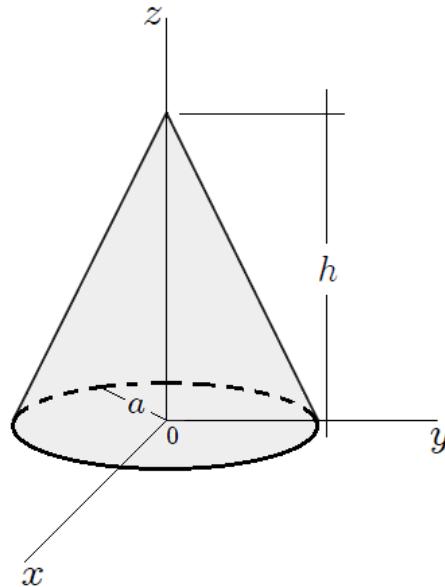


Figura 1.13: Cono sólido homogéneo de altura h y base de radio a .

SOLUCION: el diferencial de masa en coordenadas cilíndricas viene dado por,

$$dm = \rho r dr d\varphi dz \quad (1.49)$$

por lo tanto la masa M del cono es,

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{-\frac{h}{a}r+h}^a \rho r dz dr d\varphi = \frac{1}{3} \pi a^2 h \rho \quad (1.50)$$

Por la simetría mostrada en la figura y debido a que el cono es homogéneo se tiene que la abscisa y la ordenada del centro de masa vienen dadas por,

$$x_{cm} = y_{cm} = 0 \quad (1.51)$$

La cota del centro de masa es posible encontrarla a partir de (1.24),

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{R}} z dm \quad (1.52)$$

Por lo tanto, al sustituir (1.49) y (1.50) en (1.52),

$$z_{cm} = \frac{1}{\frac{1}{3}\pi a^2 h \rho} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{-\frac{h}{a}r+h} z \rho r dz dr d\varphi = \frac{\frac{1}{12}\pi a^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{1}{4}h \quad (1.53)$$

con respecto a su base. Entonces, de los resultados (1.51) y (1.53), el centro de masa está en la posición,

$$\vec{R} = (0, 0, \frac{1}{4}h) = \frac{1}{4}h \hat{e}_z \quad (1.54)$$

EJEMPLO 1.5

Sistema compuesto. Encuéntrese el centro de masa del sistema mostrado en la figura 1.14 que consiste en una concha hemisférica de radio externo a e interno b y un hemisferio sólido de radio a , ambos homogéneos de densidad ρ .

SOLUCION: la posición del centro de masa de la concha hemisférica y el hemisferio sólido vienen dadas por (se deja como tarea al alumno),

$$\vec{R}_{\text{concha}} = \vec{R}_1 = \left(0, 0, \frac{3a^4 - b^4}{8a^3 - b^3}\right) = \frac{3a^4 - b^4}{8a^3 - b^3} \hat{e}_z, \text{ con } M_1 = \frac{2}{3}\pi\rho(a^3 - b^3) \quad (1.55)$$

$$\vec{R}_{\text{hemisferio}} = \vec{R}_2 = \left(0, 0, -\frac{3}{8}a\right) = -\frac{3}{8}a \hat{e}_z, \text{ con } M_2 = \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \quad (1.56)$$

ya que, por simetría, las coordenadas x_{cm} y y_{cm} son nulas para ambos casos.

Ahora, por la propiedad de agrupamiento del centro de masa (1.31),

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{M} \sum_j M_j \vec{R}_j = \frac{M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2}{M_1 + M_2} \\ &= \frac{\left[\frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3)\right] \left(\frac{3a^4 - b^4}{8a^3 - b^3}\right) \hat{e}_z + \left(\frac{4}{3}\pi\rho a^3\right) \left(-\frac{3}{8}a \hat{e}_z\right)}{\frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3) + \frac{4}{3}\pi\rho a^3} \end{aligned}$$

O,

$$\vec{R} = -\frac{3}{8} \frac{b^4}{2a^3 - b^3} \hat{e}_z = \left(0, 0, -\frac{3}{8} \frac{b^4}{2a^3 - b^3}\right) \quad (1.57)$$

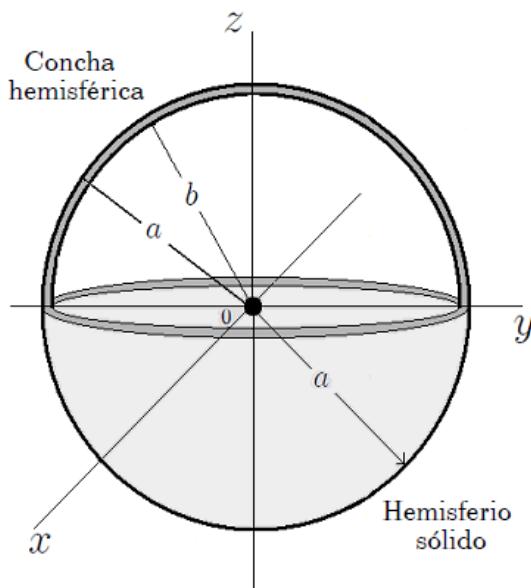


Figura 1.14: Centro de masa de un sistema compuesto por una concha hemisférica y un hemisferio sólido homogéneo acoplados.

EJEMPLO 1.6

Sistema compuesto. Encuéntrese el centro de masa de la lámina homogénea cuadrada de densidad σ y lado c mostrada en la figura 1.15, a la cual se le ha recortado un semicírculo de radio $a < \frac{c}{2}$.

SOLUCION: en este caso es sistema dado se descompone en dos. Uno de ellos es la lámina L cuadrada sin orificio y el otro es el orificio O . Se calcula la posición del centro de masa de la lámina cuadrada completa y del orificio, asignándole a este último masa negativa por ser una masa faltante. Para hallar el centro de masa de la lámina con el orificio se usa la propiedad de agrupamiento del centro de masa.

Posición del centro de masa de la lámina cuadrada sin orificio: por la simetría del problema y por ser la lámina homogénea, es obvio que las coordenadas del centro de masa vienen dadas por,

$$x_{cm}^{\square} = 0 \quad (1.58)$$

$$y_{cm}^{\square} = \frac{c}{2} \quad (1.59)$$

y su masa viene dada por,

$$M_{\square} = \sigma c^2 \quad (1.60)$$

Posición del centro de masa del orificio: por la simetría de problema y por suponer

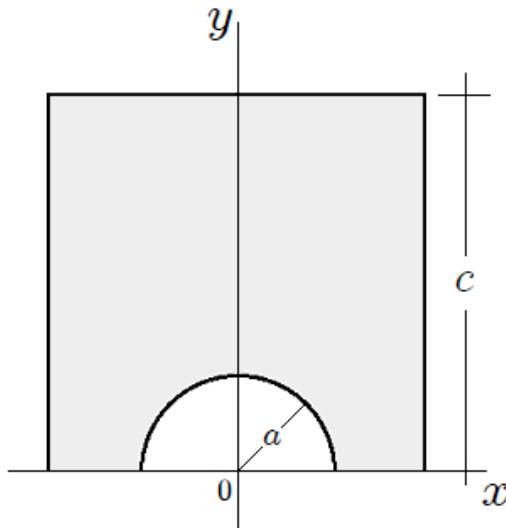


Figura 1.15: Centro de masa de una lámina cuadrada homogénea de densidad σ y lado c con orificio semicircular de radio $a < \frac{c}{2}$.

el orificio homogéneo,

$$x_{cm}^O = 0 \quad (1.61)$$

el diferencial de masa, usando coordenadas, polares viene dado por,

$$dm = \sigma r dr d\varphi \quad (1.62)$$

entonces su masa es,

$$M_O = \int_{\mathcal{R}} dm = \int_0^{\pi} \int_0^a \sigma r dr d\varphi = \frac{1}{2} \pi a^2 \sigma \quad (1.63)$$

y al usar (1.24),

$$y_{cm}^O = \frac{1}{M_O} \int_{\mathcal{R}} y dm = \frac{1}{\frac{1}{2} \pi a^2 \sigma} \int_0^{\pi} \int_0^a \sigma r^2 \operatorname{Sen} \varphi dr d\varphi = \frac{4}{3\pi} a \quad (1.64)$$

donde se ha tenido presente que en coordenadas polares $y = r \operatorname{Sen} \varphi$.

Ahora, por la propiedad de agrupamiento del centro de masa (1.32) la posición del centro de masa de la lámina con el orificio se obtiene mediante,

$$x_{cm} = \frac{M_{\square} x_{cm}^{\square} + M_O x_{cm}^O}{M_{\square} + M_O} \quad (1.65)$$

$$y_{cm} = \frac{M_{\square} y_{cm}^{\square} + M_O y_{cm}^O}{M_{\square} + M_O} \quad (1.66)$$

y al sustituir los resultados (1.58) a (1.61), (1.63) y (1.64) en (1.65) y (1.66) resulta finalmente,

$$x_{cm} = \frac{(\sigma c^2)(0) + (-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma)(0)}{\sigma c^2 + (-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma)} = 0 \quad (1.67)$$

$$y_{cm} = \frac{(\sigma c^2)(\frac{c}{2}) + (-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma)(\frac{4}{3\pi}a)}{\sigma c^2 + (-\frac{1}{2}\pi a^2\sigma)} = \frac{1}{3} \left(\frac{3c^3 - 4a^3}{2c^2 - \pi a^2} \right) \quad (1.68)$$

o también,

$$\boxed{\vec{R} = \left(0, \frac{1}{3} \frac{3c^3 - 4a^3}{2c^2 - \pi a^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3c^3 - 4a^3}{2c^2 - \pi a^2} \right) \hat{e}_y} \quad (1.69)$$

1.5 Centro de Gravedad

Al igual que el concepto de Centro de Masa, el concepto de Centro de Gravedad de un sistema es muy importante.

El *Centro de Gravedad* de un sistema es el punto respecto al cual las fuerzas que ejerce la gravedad sobre los diferentes puntos materiales que constituyen el mismo, producen un momento de fuerza o torque $\vec{\tau}$ resultante nulo.

La figura 1.16 muestra una representación de la posición del centro de gravedad para un sistema discreto de N partículas. El centro de gravedad no corresponde necesariamente a un punto material del sistema. Así, el centro de gravedad de una esfera hueca homogénea está situado en el centro de la esfera que no pertenece al cuerpo.

La posición \vec{R}_{CG} del centro de gravedad para un sistema continuo puede ser encontrada mediante,

$$\boxed{\vec{R}_{CG} \times M \vec{g} (\vec{r})_{\vec{r}=\vec{R}_{CG}} = \int_{\mathcal{R}} \vec{r} \times \vec{g} (\vec{r}) dm} \quad (1.70)$$

En la figura 1.17 se muestra un cuerpo continuo de masa M cercano a la Tierra cuyo tamaño no es despreciable con respecto al de ésta última, en el cual se han representado varios diferenciales de masa dm y a los cuales se les han representado las intensidades del campo terrestre \vec{g} en sus respectivas posiciones. Se puede observar que \vec{g} es un vector que varía en dirección de punto a punto por estar siempre dirigido al

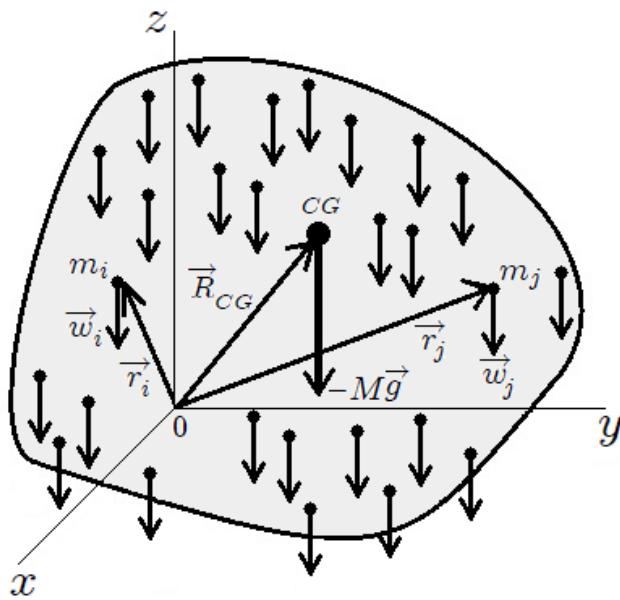


Figura 1.16: Posición \vec{R}_{CG} del centro de gravedad de un sistema de partículas. Aquí $M = \sum m_i$ y $-M\vec{g}$ es el peso \vec{w} total del sistema.

centro de la Tierra además de que podría variar también su magnitud. En este caso, de (1.70), para el cuerpo de masa M resultaría una posición para su centro de gravedad distinta a la posición de su centro de masa (cuya determinación se hará más adelante). Ahora, si el tamaño de este cuerpo es pequeño o despreciable con respecto al de la Tierra ocurriría que los ángulos entre los distintos vectores \vec{g} serían tan pequeños que estos vectores podrían considerarse paralelos entre sí y constantes en magnitud. En este caso, por el contrario, de (1.70) resultaría una posición para el centro de gravedad igual a la posición del centro de masa. A los efectos prácticos, esta coincidencia se cumple con precisión aceptable para todos los cuerpos que están sobre la superficie terrestre, aun para una locomotora o un gran edificio; no sucede lo mismo con objetos astronómicos como los planetas.

La posición centro de masa \vec{R} coincide con la del centro de gravedad \vec{R}_{CG} cuando el vector aceleración de la gravedad \vec{g} (\vec{r}) es de magnitud y dirección constante en todo el interior del cuerpo,

$$\vec{g} = \text{vector constante}$$

1.6 Centroide

Por último, queda por definir el centroide de un cuerpo geométrico,

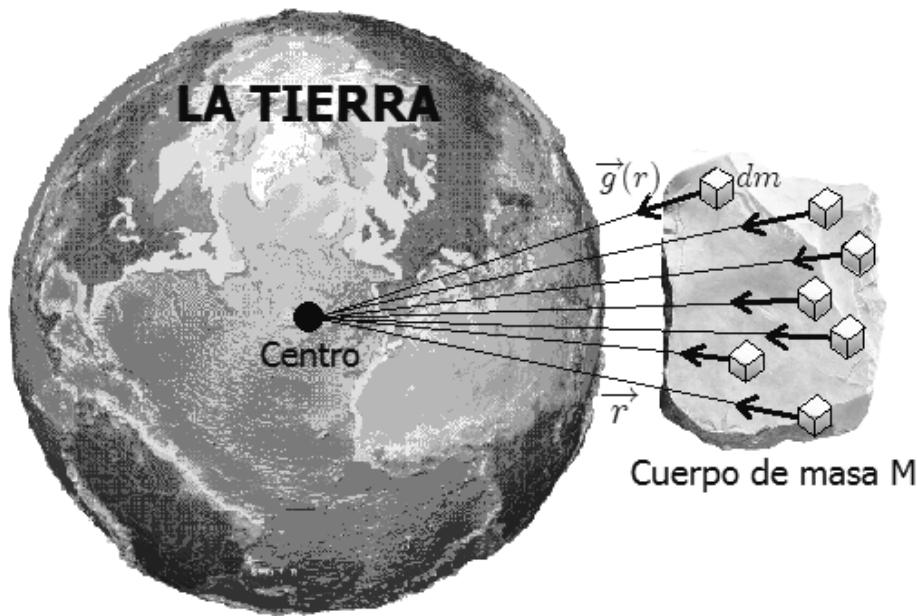


Figura 1.17: Cuerpo continuo de masa M cercano a la Tierra de tamaño no despreciable respecto al de la misma, en el cual se han representado varios dm y a los cuales se les han representado las \vec{g} en sus respectivas posiciones.

El *Centroide* o *Baricentro* es un punto que define el centro de un cuerpo geométrico unidimensional, bidimensional o tridimensional, es decir, es el centro de simetría.

Hay que hacer incapié en que el centroide o baricentro se refiere a cuerpos puramente geométricos, es decir, no se refiere a cuerpos materiales ya que son cuerpos sin masa. Todo cuerpo material está definido por un cuerpo geométrico que encierra toda la masa del mismo. La posición del centro de masa de un cuerpo material coincide con la posición del centroide del cuerpo geométrico que lo define si el primero es homogéneo. Si un cuerpo material es simétrico y homogéneo se puede hallar su centroide fácilmente. Por ejemplo, para el caso de una varilla o segmento homogéneos, el centroide es el punto medio y para una esfera o una circunferencia homogéneas, el centroide también se encuentra en su centro geométrico. El caso de un triángulo se encuentra en la intersección de las medianas[§].

Por las anteriores razones y dentro de los límites mencionados, al centro de masa suele llamársele también centro de gravedad o también centroide.

[§]Las medianas son las tres rectas que unen cada vértice del triángulo con el centro del lado opuesto.

1.7 Propiedades del Centro de Masa

Siguentemente se mencionarán algunas de las propiedades del centro de masa de un sistema de partículas (algunas serán verificadas posteriormente):

1. Es un punto geométrico que no tiene por qué corresponderse con la posición de una partícula material del sistema.
2. Permite reducir el estudio de la dinámica de un sistema de partículas al de una partícula.
3. Si existe una distribución homogénea de la masa, su posición está contenida en los elementos de simetría del sistema. Si el cuerpo tiene un plano o un eje de simetría éste contiene al centro de masa. Si posee un centro de simetría, éste será directamente el centro de masa.
4. Es independiente del sistema de referencia inercial empleado para localizarlo. Solo depende de la masa de las partículas y de sus posiciones relativas entre sí.
5. Dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema, moviéndose como una partícula cuya masa es la masa total del sistema. La aceleración del centro de masa coincide con la aceleración del sistema.
6. Si las fuerzas externas que actúan sobre un sistema tienen una resultante y un momento nulos, el centro de masa se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme. Las fuerzas internas no modifican el movimiento del centro de masa en el caso de que las mismas cumplan con la tercera ley de Newton.
7. Si se toma el centro de masa como origen de referencia, la cantidad de movimiento del conjunto de partículas es siempre nula.
8. El movimiento más general que puede tener un sistema de partículas se puede reducir a un movimiento de traslación de su centro de masa más una rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto.

1.8 Movimiento del Centro de Masa

Supóngase que se tiene un sistema discreto constituido por N partículas que interactúan entre sí y sobre el cual actúan fuerzas externas. Entonces, la fuerza resultante sobre la i -ésima partícula \vec{F}_i estará compuesta (en general) por dos partes:

1. Una parte es la resultante de todas las fuerzas externas $\vec{F}_i^{(ext)}$,
2. La otra parte es la resultante de todas las fuerzas internas $\vec{F}_i^{(int)}$ que se originan de la interacción de todas las otras $N - 1$ partículas con la i -ésima.

por lo tanto,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)}, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.71)$$

donde la fuerza $\vec{F}_i^{(int)}$ podrá ser calculada mediante la suma vectorial de todas las fuerzas individuales $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ (como se dijo antes, debe leerse como la fuerza aplicada sobre la i -ésima partícula debida a la j -ésima),

$$\vec{F}_i^{(int)} = \sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij}^{(int)}, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.72)$$

donde $i \neq j$ puesto que cada partícula no interacciona con ella misma, es decir, no hay autofuerzas.

Ahora bien, a partir de la segunda ley de Newton, la expresión (1.71) puede escribirse como,

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)} \quad (1.73)$$

donde se ha supuesto que las m_i son constantes. O también, en virtud de (1.72),

$$\boxed{\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij}^{(int)}} \quad (1.74)$$

Cada una de estas ecuaciones constituye la ecuación de movimiento de cada una de las N partículas del sistema y, en conjunto, forman un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden. Este sistema tiene como gran dificultad matemática el hecho de que las fuerzas de interacción $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ dependen de las posiciones de las dos partículas (la i -ésima y la j -ésima), esto es,

$$\vec{F}_{ij}^{(int)} = \vec{F}_{ij}^{(int)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (1.75)$$

Esta dificultad es tan poderosa que se ha demostrado que el sistema de ecuaciones (1.74) no tiene solución analítica general si el número es mayor de dos. Sin embargo, hay casos particulares donde si hay solución. En los casos no analíticos se emplean los métodos numéricos.

Como ya se sabe, el centro de masa de un sistema de partículas discreto es un punto cuya posición \vec{R} depende de las coordenadas que posicionan a cada una de

las N partículas que lo constituyen, como efectivamente lo indica (1.10) y (1.21). Si las partículas del sistema son tales que sus posiciones permanecen constantes en el tiempo (sistema indeformable), entonces la posición del centro de masa del sistema también permanece constante. Supóngase que se tiene ahora un sistema donde las partículas que lo constituyen están en movimiento, haciendo que las coordenadas de posición de cada una de ellas cambien con el tiempo (sistema deformable). Entonces, como consecuencia, la posición del centro de masa del sistema también cambia con el tiempo haciendo que éste se mueva.

La pregunta lógica que surge de lo anteriormente expuesto es la siguiente: ¿cómo se mueve el centro de masa de un sistema de partículas?. La respuesta a esta pregunta es suministrada por el siguiente teorema:

Teorema 1 (Movimiento del centro de masa) *El Centro de Masa de un sistema de partículas se mueve como si fuese una partícula real, de masa igual a la masa total del sistema y sobre la cual actúa la fuerza externa total; haciéndolo independientemente de la naturaleza de las fuerzas internas y siempre que se cumpla la tercera ley de Newton. Es decir,*

$$M \ddot{\overrightarrow{R}} = \overrightarrow{F}^{(ext)}$$

Demostración. Continúese considerando el sistema de N partículas mencionado al comienzo de esta sección. Las N ecuaciones (1.74) pueden ser escritas como,

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_i \overrightarrow{r}_i) = \overrightarrow{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1, i \neq j}^N \overrightarrow{F}_{ij}^{(int)} \quad (1.76)$$

luego al sumar sobre todas las i en ambos miembros se obtiene,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{r}_i \right) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{F}_i^{(ext)} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, i \neq j}^N \overrightarrow{F}_{ij}^{(int)} = \overrightarrow{F} \quad (1.77)$$

que representa la fuerza total $\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{F}_i$ sobre el sistema de partículas respecto al origen O del referencial escogido. Si ahora sustituye $\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{r}_i$ a partir de (1.10) en (1.77) resulta,

$$\frac{d^2}{dt^2} (M \overrightarrow{R}) = M \ddot{\overrightarrow{R}} = \overrightarrow{F}^{(ext)} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \overrightarrow{F}_{ij}^{(int)} \quad (1.78)$$

donde $\vec{F}^{(ext)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(ext)}$ es la resultante de todas las fuerzas externas y donde se ha hecho el cambio de notación $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N i \neq j = \sum_{i,j=1}^N i \neq j$.

Supóngase ahora que se cumple la tercera ley de Newton (1.1). Entonces del término con sumatoria en (1.78) resulta,

$$\sum_{i,j=1}^N \vec{F}_{ij}^{(int)} = \sum_{i,j=1}^N \left(\vec{F}_{ij}^{(int)} + \vec{F}_{ji}^{(int)} \right) = \vec{0} \quad (1.79)$$

por lo tanto, al sustituir este resultado en (1.78) se obtiene,

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ext)} \quad (1.80)$$

que es justamente la ecuación de movimiento de una partícula de masa M sobre la cual actúa una fuerza resultante $\vec{F}^{(ext)}$, lo cual demuestra el teorema. ■

La expresión (1.80) es un resultado muy importante pues no sólo permite combinar sistemas más pequeños para formar sistemas más grandes y analizar lo que podría llamarse su comportamiento general. Este resultado también permite hacer exactamente lo contrario, es decir, dividir los sistemas en partes más pequeñas y estudiar el movimiento de éstas.

En el caso especial de que el sistema de partículas sea aislado o cerrado (ver sección 1.3) se tiene que $\vec{F}^{(ext)} = \vec{0}$, por lo tanto, a partir de (1.80) resulta,

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{0} \quad (1.81)$$

El anterior resultado implica que el centro de masa de un sistema aislado o cerrado se mueve con velocidad constante,

$$\vec{V} = \text{constante}$$

es decir, realiza un movimiento rectilíneo y uniforme si originalmente estaba en movimiento o permanecerá en reposo si originalmente estaba en reposo, según lo estipula la primera ley de Newton

EJEMPLO 1.7

En un sistema aislado, dos partículas de masas $m_1 = m_2 = m$ se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia,

$$\vec{F}_{ij} = -\frac{k}{r_{ij}^2} \hat{e}_{r_{ij}}$$

con k una constante positiva, $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ el vector que posiciona a la i -ésima partícula con respecto a la j -ésima y $\hat{e}_{r_{ij}}$ es un versor cuyo origen está en m_j y apunta hacia m_i , es decir, tiene la misma dirección que \vec{r}_{ij} . Si las partículas se deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto (ver figura 1.18), encuentre la aceleración de centro de masa.

SOLUCION: nótese que las fuerzas \vec{F}_{ij} son internas ya que son fuerzas de interacción entre las partículas que constituyen al sistema. De la figura 1.18 se puede observar fácilmente que las coordenadas de cada partícula vienen dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para la que se mueve verticalmente (partícula 1)} \longrightarrow (x_1, y_1) = (0, y) \\ \text{Para la que se mueve horizontalmente (partícula 2)} \longrightarrow (x_2, y_2) = (x, 0) \end{array} \right. \quad (1.82)$$

por lo tanto, al usar (1.14), las coordenadas del centro de masa del sistema viene dado por,

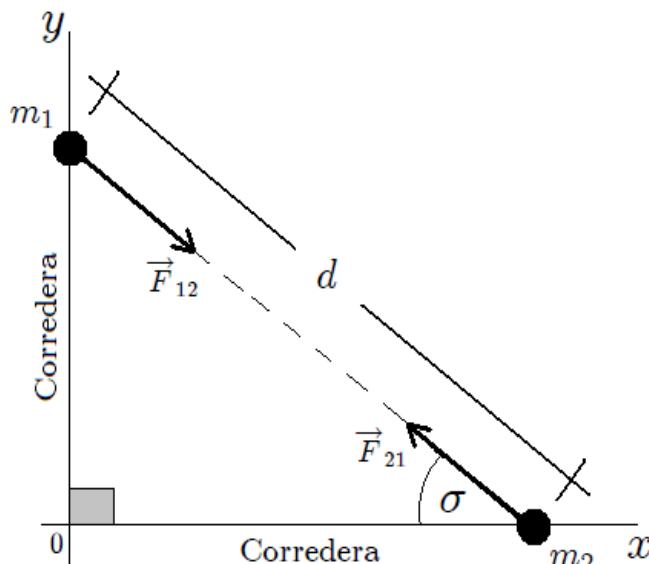


Figura 1.18: Dos partículas de masas iguales $m_1 = m_2 = m$ que se deslizan sobre correderas lisas en ángulo recto y se atraen entre sí mediante una fuerza $\vec{F}_{ij} = \frac{k}{r_{ij}^2} \hat{e}_{r_{ij}}$, $k > 0$.

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(0) + m(x)}{m+m} = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 2x_{cm} \quad (1.83)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(y) + m(0)}{m+m} = \frac{1}{2}y \Rightarrow y = 2y_{cm} \quad (1.84)$$

de aquí que,

$$\vec{R} = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y \right) = \frac{1}{2}x\hat{e}_x + \frac{1}{2}y\hat{e}_y \quad (1.85)$$

y,

$$R = \sqrt{\vec{R} \bullet \vec{R}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}d \Rightarrow d = 2R \quad (1.86)$$

Por otro lado, de (1.78) se puede escribir que,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^2 \vec{F}_{ij}^{(int)}$$

ya que $\vec{F}_i^{(ext)} = \vec{0}$ por ser el sistema aislado. Entonces,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \sum_{j=1}^2 \vec{F}_{1j}^{(int)} = \vec{F}_{12}^{(int)} \Rightarrow m_1 (\ddot{x}_1 \hat{e}_x + \ddot{y}_1 \hat{e}_y) = -\frac{k}{r_{12}^2} \hat{e}_{r_{12}} \Rightarrow m_1 \ddot{y} \hat{e}_y = -\frac{k}{r_{12}^2} \hat{e}_{r_{12}} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \sum_{j=1}^2 \vec{F}_{2j}^{(int)} = \vec{F}_{21}^{(int)} \Rightarrow m_2 (\ddot{x}_2 \hat{e}_x + \ddot{y}_2 \hat{e}_y) = -\frac{k}{r_{21}^2} \hat{e}_{r_{21}} \Rightarrow m_2 \ddot{x} \hat{e}_x = -\frac{k}{r_{21}^2} \hat{e}_{r_{21}} \end{aligned}$$

O,

$$m_1 \ddot{y} \hat{e}_y = -\frac{k}{d^2} \hat{e}_{r_{12}} \quad (1.87)$$

$$m_2 \ddot{x} \hat{e}_x = -\frac{k}{d^2} \hat{e}_{r_{21}} \quad (1.88)$$

puesto que, de la figura (1.18), $r_{12} = r_{21} = d$.

En (1.87) y (1.88) se debe escribir \hat{e}_r en términos de \hat{e}_x y \hat{e}_y para así poder comparar sus miembros. En efecto,

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}} = \frac{(x_i \hat{e}_x + y_i \hat{e}_y) - (x_j \hat{e}_x + y_j \hat{e}_y)}{r_{ij}} \\ &= \frac{(x_i - x_j) \hat{e}_x + (y_i - y_j) \hat{e}_y}{r_{ij}} \end{aligned} \quad (1.89)$$

que, para $i = 1$ y $j = 2$ resulta en,

$$\hat{e}_{r_{12}} = \frac{(x_1 - x_2) \hat{e}_x + (y_1 - y_2) \hat{e}_y}{r_{12}} = \underbrace{\frac{-x \hat{e}_x + y \hat{e}_y}{r_{12}}}_{\text{Por (1.82)}} = \underbrace{\frac{-x \hat{e}_x + y \hat{e}_y}{d}}_{r_{12}=d} \quad (1.90)$$

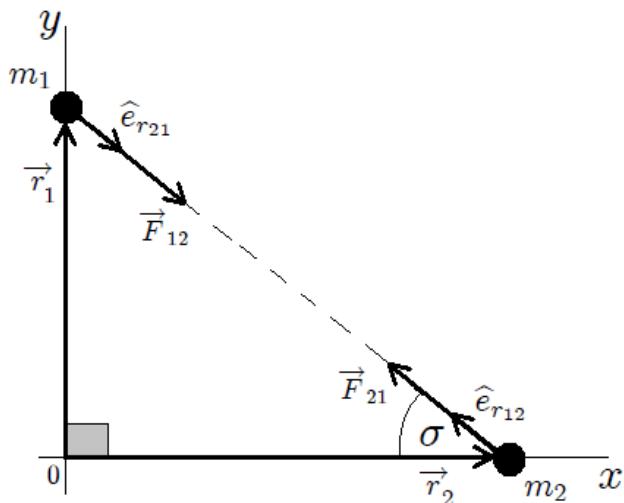


Figura 1.19: Representación de los vectores de posición de las partículas m_1 y m_2 \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , de las fuerzas \vec{F}_{12} , \vec{F}_{21} y de los versores $\hat{e}_{r_{12}}$, $\hat{e}_{r_{21}}$.

y para $i = 2$ y $j = 1$ en,

$$\hat{e}_{r_{21}} = \frac{(x_2 - x_1)\hat{e}_x + (y_2 - y_1)\hat{e}_y}{r_{21}} = \underbrace{\frac{x\hat{e}_x - y\hat{e}_y}{r_{21}}}_{\text{Por (1.82)}} = \underbrace{\frac{x\hat{e}_x - y\hat{e}_y}{d}}_{r_{21}=d} \quad (1.91)$$

entonces, al sustituir (1.90) en (1.87) y (1.91) en (1.88) se obtiene,

$$m_1 \ddot{y} \hat{e}_y = -\frac{k}{d^2} \left(\frac{-x\hat{e}_x + y\hat{e}_y}{d} \right) = \frac{kx}{d^3} \hat{e}_x - \frac{ky}{d^3} \hat{e}_y \quad (1.92)$$

$$m_2 \ddot{x} \hat{e}_x = -\frac{k}{d^2} \left(\frac{x\hat{e}_x - y\hat{e}_y}{d} \right) = -\frac{kx}{d^3} \hat{e}_x + \frac{ky}{d^3} \hat{e}_y \quad (1.93)$$

Ahora, al comparar componente a componente los vectores presentes en ambos miembros de las ecuaciones anteriores se obtiene (recuérdese que $m_1 = m_2 = m$),

$$m \ddot{y} = -\frac{ky}{d^3} \quad (1.94)$$

$$m \ddot{x} = -\frac{kx}{d^3} \quad (1.95)$$

y al sustituir (1.84) en (1.94) resulta ,

$$m \frac{d^2}{dt^2} (2y_{cm}) = -\frac{k(2y_{cm})}{d^3}$$

O,

$$\ddot{y}_{cm} = -\frac{ky_{cm}}{md^3} \quad (1.96)$$

además, al sustituir (1.83) en (1.95) resulta ,

$$\ddot{\vec{R}}_{cm} = -\frac{kx_{cm}}{md^3} \quad (1.97)$$

entonces la aceleración del centro de masa vendrá dada por,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= \ddot{x}_{cm}\hat{e}_x + \ddot{y}_{cm}\hat{e}_y = -\underbrace{\frac{kx_{cm}}{md^3}\hat{e}_x}_{\text{Por (1.97)}} - \underbrace{\frac{ky_{cm}}{md^3}\hat{e}_y}_{\text{Por (1.96)}} = -\frac{k}{md^3}(x_{cm}\hat{e}_x + y_{cm}\hat{e}_y) \\ &\quad -\frac{k}{md^3}\vec{R} \end{aligned} \quad (1.98)$$

Por último, al usar (1.86), el anterior resultado se puede escribir como

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{k}{8mR^3}\vec{R} \quad (1.99)$$

O,

$$\boxed{\ddot{\vec{R}} = -\frac{k}{8mR^2}\hat{e}_R} \quad (1.99)$$

donde $\hat{e}_R = \frac{\vec{R}}{R}$ es un vector unitario en la dirección de \vec{R} .

Del resultado (1.99) se puede argüir que el centro de masa es atraído hacia O con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a dicho punto O . Cuando se estudia el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central se demuestra que, para una fuerza de este tipo, la trayectoria seguida es una cónica. Por lo tanto, centro de masa del sistema sigue este tipo de trayectoria.

1.9 Movimiento de un sistema aislado de dos partículas - Masa reducida

Supóngase que se tiene un sistema discreto aislado o cerrado, como el mostrado en la figura 1.20, constituido por dos partículas de masas m_1 y m_2 que interactúan entre sí.

Ahora bien, sobre la partícula m_1 actúa una fuerza $\vec{F}_{12}^{(int)}$ ejercida por la partícula m_2 y sobre esta última actúa una fuerza $\vec{F}_{21}^{(int)}$ ejercida por la partícula m_1 que constituyen

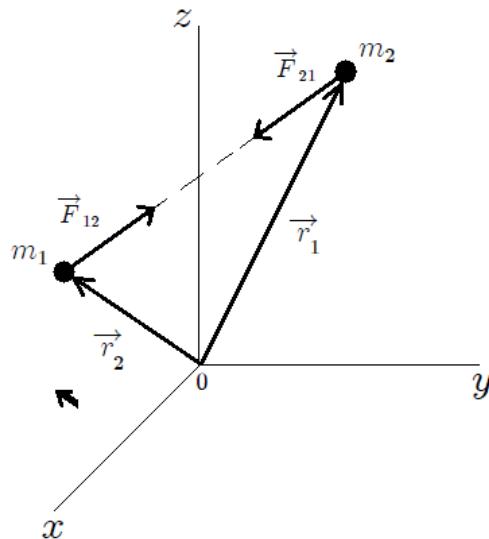


Figura 1.20: Sistema aislado de dos partículas interactuantes de masas m_1 y m_2 .

las fuerzas internas del sistema. A partir de (1.78) las ecuaciones de movimiento de ambas partículas vienen dadas por,

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1) = \vec{F}_1^{(ext)} + \sum_{i,j=1}^2 \vec{F}_{1j}^{(int)} \Rightarrow m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{(ext)} + \vec{F}_{12}^{(int)} \quad (1.100)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_2 \vec{r}_2) = \vec{F}_2^{(ext)} + \sum_{i,j=1}^2 \vec{F}_{2j}^{(int)} \Rightarrow m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{(ext)} + \vec{F}_{21}^{(int)} \quad (1.101)$$

donde en el desarrollo de las sumatorias no se tomaron en cuenta $\vec{F}_{11}^{(int)}$ y $\vec{F}_{22}^{(int)}$, ya que no existen autofuerzas. Como el sistema es aislado o cerrado (ver sección 1.3) se tiene que $\vec{F}^{(ext)} = \vec{0}$, por lo tanto, las anteriores ecuaciones de movimiento se reducen a,

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}^{(int)} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}^{(int)}}{m_1} \quad (1.102)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}^{(int)} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{21}^{(int)}}{m_2} = -\frac{\vec{F}_{12}^{(int)}}{m_2} \quad (1.103)$$

donde se ha tenido presente que, a partir de la tercera ley de Newton, \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} son iguales y de sentido opuesto (ver sección 1.3.2).

Es posible reducir este problema de dos cuerpos al problema de un sólo cuerpo. En efecto, al encontrar la aceleración relativa $\ddot{\vec{r}}_{12}$ teniendo presentes (1.102) y (1.103) resulta,

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{12}^{(int)}}{m_1} - \left(-\frac{\vec{F}_{12}^{(int)}}{m_2} \right)$$

O,

$$\vec{F}_{12}^{(int)} = \mu \ddot{\vec{r}}_{12} \quad (1.104)$$

con,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.105)$$

que se denomina *Masa Reducida* del sistema.

A partir del resultado (1.104) se puede deducir que:

Dado un sistema de dos partículas sometidas únicamente a fuerzas de interacción mutua (fuerzas internas) o sistema aislado, el movimiento relativo de las dos partículas es equivalente al movimiento relativo, respecto a un sistema inercial dado, de una partícula de masa igual a la masa reducida μ del sistema sometida a una fuerza igual a la de interacción.

El resultado anterior es muy importante en Física y es, precisamente, lo que se usa al estudiar el movimiento planetario.

1.10 Momento lineal y su conservación

Teorema 2 (Momento lineal) *El momento lineal \vec{P} de un sistema de partículas es el mismo que si fuera una partícula real de masa M localizada en la posición de centro de masa \vec{R} y que se mueve de la manera en que él lo hace. Es decir, el momento lineal del sistema de partículas es el mismo de su centro de masa,*

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = M \vec{V}$$

La prueba de este teorema es obvia ya que su enunciado constituye, en realidad, el concepto de centro de masa (visto en la sección 1.4) el cual parte del momento lineal total del sistema de partículas.

Demostración. El momento lineal de la i -ésima partícula puede escribirse como,

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (1.106)$$

y al sumar sobre i en ambos miembros de esta expresión, se obtiene el momento lineal total \vec{P} del sistema,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (1.107)$$

o también,

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \quad (1.108)$$

ahora, si se sustituye $\sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}_i)$ a partir de (1.10) resulta,

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} (M \vec{R}) \quad (1.109)$$

o,

$$\boxed{\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = M \vec{V}} \quad (1.110)$$

demostrándose así lo enunciado en el teorema. ■

Por otro lado, la condición para que la cantidad de movimiento de un sistema de partículas no varíe con el tiempo es enunciada en el siguiente teorema:

Teorema 3 (Conservación del momento lineal) *El momento lineal \vec{P} de un sistema de partículas libre de fuerzas externas ($\vec{F}^{(ext)} = \vec{0}$) es constante en el tiempo, es decir, se conserva.*

$$\vec{P} = \text{vector constante}$$

Demostración. Al derivar (1.110) con respecto al tiempo y teniendo presente (1.80) se obtiene,

$$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ext)} \quad (1.111)$$

Ahora, al hacer $\vec{F}^{(ext)} = \vec{0}$ en la anterior ecuación resulta,

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(ext)} = \vec{0} \quad (1.112)$$

y al integrar,

$$\vec{P} = \text{vector constante} \quad (1.113)$$

demonstrándose así lo enunciado en el teorema. ■

1.11 Momento angular y su conservación - Torque

Teorema 4 (Momento angular) El momento angular total \vec{L} del sistema de partículas respecto al origen de un referencial escogido \vec{L} es igual a la suma del momento angular del centro de masa del sistema respecto a dicho origen \vec{L}_{cm} y el momento angular del sistema con respecto a la posición del centro de masa \vec{L}' ,

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'$$

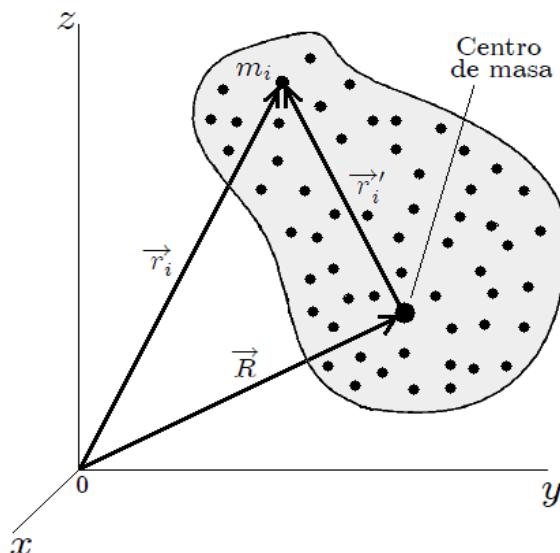


Figura 1.21: Vector de posición \vec{r}'_i .

Demostración. El momento angular \vec{L} de la i -ésima partícula en torno al origen de un sistema de referencia dado es,

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (1.114)$$

Al sumar sobre todas las i en los dos miembros de (1.114) se obtiene el momento angular total \vec{L} del sistema de partículas,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \right) \quad (1.115)$$

Si se define ahora un vector de posición \vec{r}'_i , que posicione a la i -ésima partícula con respecto al centro de masa del sistema, de manera que (ver figura 1.21),

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{R} \quad (1.116)$$

entonces, al sustituir esta expresión en (1.115) resulta,

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_{i=1}^N \left[\left(\vec{r}'_i + \vec{R} \right) \times m_i \left(\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[m_i \left(\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{R} \times \dot{\vec{R}} \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}'_i \times m_i \dot{\vec{r}}'_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

pero,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N m_i = M \\ m_i \dot{\vec{r}}'_i = \vec{p}'_i \end{cases} \tag{1.118}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \left[m_i \left(\vec{r}'_i - \vec{R} \right) \right]}_{\text{Por (1.116)}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{R} \\
 &= \underbrace{M \vec{R}}_{\text{Por (1.10)}} - M \vec{R} = \vec{0}
 \end{aligned} \tag{1.119}$$

esta última indica que $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i$ especifica la posición del centro de masa en el sistema de coordenadas del mismo centro de masa. Entonces, debido a (1.118) y (1.119), la expresión (1.117) queda escrita como,

$$\vec{L} = \vec{R} \times \underbrace{M \dot{\vec{R}}}_{=\vec{P} \text{ por (1.10)}} + \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i$$

O,

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}', \text{ con } \begin{cases} \vec{L}_{cm} = \vec{R} \times \vec{P} \\ \vec{L}' = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i \end{cases}} \tag{1.120}$$

que es el momento angular total del sistema de partículas respecto al origen O de un referencial escogido, demostrándose así lo enunciado en el teorema. ■

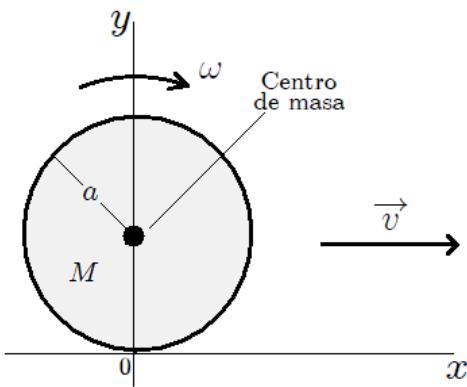


Figura 1.22: Aro homogéneo, de radio a , que rueda sobre una superficie lisa con frecuencia angular constante.

EJEMPLO 1.8

Un aro homogéneo, de radio a , rueda sobre una superficie lisa con frecuencia angular constante (ver figura 1.22). Encuentre el momento angular total.

SOLUCION: el centro de masa del aro coincide con su centro geométrico por ser homogéneo. Según (1.120),

$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}' = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}' \quad (1.121)$$

Para el presente caso,

$$L' = I'\omega \quad (1.122)$$

donde I' es el momento de inercia en torno al centro de masa y,

$$|\vec{R} \times \vec{P}| = RP = aMv \quad (1.123)$$

donde v es la velocidad del centro de masa. Por lo tanto, al sustituir (1.122) y (1.123) en (1.121),

$$\begin{aligned} L &= aMv + I'\omega = \underbrace{a^2 M \omega}_{v=a\omega} + I'\omega \\ &= (I' + Ma^2) \omega \end{aligned} \quad (1.124)$$

pero[¶],

$$I' + Ma^2 = I \quad (1.125)$$

donde I es el momento de inercia en torno a O , entonces, de (1.124) y (1.125),

$$L = I\omega$$

[¶]Teorema de Steiner.

Teorema 5 (Torque externo) El torque externo total $\vec{\tau}^{(ext)}$ sobre un sistema de partículas es igual a la derivada total con respecto al tiempo t del momento angular del sistema \vec{L} , siempre que se cumpla la tercera ley de Newton en su forma fuerte,

$$\vec{\tau}^{(ext)} = \frac{d}{dt} \vec{L}$$

Demostración. La derivada temporal del momento angular de la i -ésima partícula es a partir de (1.114),

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_i = \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{p}}_i}_{=0} + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \underbrace{\sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij}^{(int)}}_{\text{Por (1.74)}} \right) \quad (1.126)$$

y al sumar sobre todas las i en ambos miembros,

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(int)} \quad (1.127)$$

pero,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(int)} &= \underbrace{\sum_{i,j=1, i < j}^N \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(int)} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^{(int)} \right)}_{\text{De forma análoga a (1.79)}} \\ &= \underbrace{\sum_{i,j=1, i < j}^N \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{(int)} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}^{(int)} \right)}_{\text{en virtud de (1.1)}} \\ &= \sum_{i,j=1, i < j}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{(int)} \end{aligned} \quad (1.128)$$

y puesto que el vector que posiciona a la i -ésima partícula con respecto a la j -ésima se puede definir como (ver figura 1.23),

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (1.129)$$

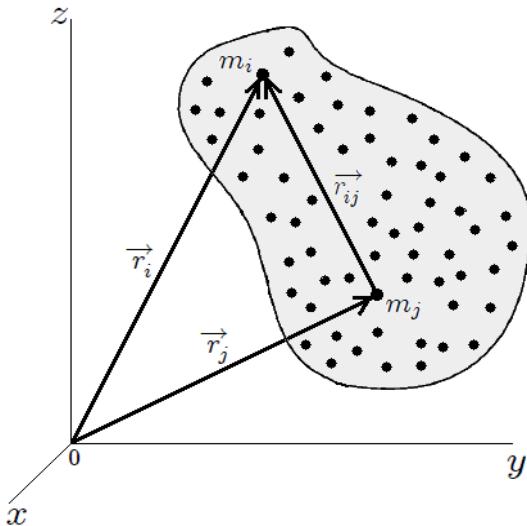


Figura 1.23: Vector de posición \vec{r}_{ij} .

de la misma forma como se había hecho mención antes en algunos ejemplos. Entonces de (1.128) y (1.129) se puede escribir (1.127) como,

$$\bullet \vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j=1}^N_{i < j} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}^{(int)} \quad (1.130)$$

o,

$$\bullet \vec{\tau} = \vec{\tau}^{(ext)} + \vec{\tau}^{(int)}, \text{ con } \begin{cases} \vec{\tau}^{(ext)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^{(ext)} \\ \vec{\tau}^{(int)} = \sum_{i,j=1}^N_{i < j} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}^{(int)} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i^{(int)} \end{cases} \quad (1.131)$$

donde $\vec{\tau}^{(ext)}$ (la suma de todos los torques externos sobre cada una de las partículas $\vec{\tau}_i^{(ext)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)}$) es el torque externo resultante sobre el sistema de partículas en torno a un eje dado y $\vec{\tau}^{(int)}$ (la suma de todos los torques internos sobre cada una de las partículas $\vec{\tau}_i^{(int)}$) es el torque interno resultante con respecto al mismo eje.

Si en este momento se limita el estudio a fuerzas que cumplan con la tercera ley de Newton en su forma fuerte entonces, debido a que en este caso $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ va a lo largo de la misma dirección de $\pm \vec{r}_{ij}$, entonces $\vec{\tau}^{(int)}$ anula,

$$\vec{\tau}^{(int)} = \sum_{i,j=1}^N_{i < j} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij}^{(int)} = \vec{0} \quad (1.132)$$

y, por lo tanto, (1.131) se reduce a,

$$\boxed{\vec{\tau}^{(ext)} = \dot{\vec{L}}} \quad (1.133)$$

demostrándose así lo enunciado en el teorema. ■

La condición para que se conserve el momento angular \vec{L} de un sistema de partículas es suministrada por el siguiente teorema:

Teorema 6 (Conservación del momento angular) Si el torque externo $\vec{\tau}^{(ext)}$ resultante sobre un sistema de partículas en torno a un eje dado se anula, entonces el momento angular total del sistema \vec{L} en torno al mismo eje permanece constante en el tiempo, es decir, se conserva,

$$\vec{L} = \text{vector constante}$$

Demonstración. Al hacer $\vec{\tau}^{(ext)} = \vec{0}$ en (1.133) resulta,

$$\dot{\vec{L}} = \vec{0} \quad (1.134)$$

y al integrar,

$$\vec{L} = \text{vector constante} \quad (1.135)$$

demonstrándose así lo enunciado en el teorema. ■

1.12 Energía y su conservación

1.12.1 Energía cinética

Teorema 7 (Energía cinética) El trabajo total W_{12} realizado sobre un sistema de partículas para pasarlo de una configuración 1 donde la energía cinética es T_1 a una configuración 2 donde la energía cinética es T_2 viene dado por,

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

Demostración. Supóngase que un determinado sistema de partículas pasa de una configuración 1 en la cual todas las coordenadas \vec{r}_i se especifican, a una configuración 2 en la cual las coordenadas \vec{r}_i se especifican de alguna forma diferente. El trabajo W_{12} realizado para pasar de la configuración 1 a la 2 vendrá dado por,

$$W_{12} = \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i \quad (1.136)$$

donde \vec{F}_i es la fuerza resultante que actúa sobre la i -ésima partícula. Pero,

$$\begin{aligned} \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i &= \left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \bullet \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} dt \right) = \left(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \bullet (\vec{v}_i dt) \\ &= \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \bullet \vec{v}_i) dt = \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} (v_i^2) dt = d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \end{aligned} \quad (1.137)$$

entonces, al sustituir (1.137) en (1.136) resulta,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 \end{aligned} \quad (1.138)$$

o,

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad (1.139)$$

con,

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1.140)$$

demostrándose así lo enunciado en el teorema. Aquí T_i es la energía cinética de cada una de las partículas del sistema y T es la energía cinética total del sistema. ■

Teorema 8 (Energía cinética) La energía cinética total T de un sistema de partículas es igual a la suma de la energía cinética del centro de masa respecto al origen del referencial escogido T_{cm} y la energía cinética total de las partículas individuales relativas al centro de masa T' ,

$$T = T_{cm} + T'$$

Demostración. Si se halla la derivada total con respecto al tiempo t de la expresión (1.116) y se despeja $\dot{\vec{r}}_i$ resulta,

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \quad (1.141)$$

donde $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$ es la velocidad de la i -ésima partícula con respecto al origen del referencial escogido, $\dot{\vec{r}}'_i = \vec{v}'_i$ es la velocidad de la i -ésima partícula respecto al centro de masa y $\dot{\vec{R}} = \vec{V}$ es la velocidad del centro de masa como ya se sabía. A partir de (1.141) se obtiene,

$$\begin{aligned} v_i^2 &= \dot{r}_i^2 = \dot{\vec{r}}_i \bullet \dot{\vec{r}}_i = \left(\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \right) \bullet \left(\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \right) \\ &= \dot{\vec{r}}'_i \bullet \dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{r}}'_i \bullet \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \bullet \dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}} \bullet \dot{\vec{R}} \\ &= v_i'^2 + 2 \dot{\vec{r}}'_i \bullet \dot{\vec{R}} + V^2 \end{aligned} \quad (1.142)$$

Entonces en base a (1.141) se puede escribir T de (1.140) como,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(v_i'^2 + 2 \dot{\vec{r}}'_i \bullet \dot{\vec{R}} + V^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \dot{\vec{R}} \bullet \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i V^2 \end{aligned} \quad (1.143)$$

y al usar las expresiones (1.118) y (1.119) se puede escribir este resultado como,

$$T = T_{cm} + T', \text{ con } \begin{cases} T_{cm} = \frac{1}{2} M V^2 \\ T' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \end{cases}$$

(1.144)

que es la energía cinética total de un sistema de partículas, demostrándose así lo enunciado en el teorema. ■

1.12.2 Energía potencial

Al sustituir (1.74) en (1.136) resulta,

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j=1, i \neq j}^N \vec{F}_{ij}^{(int)} \right) \bullet d\vec{r}_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_i^{(ext)} \bullet d\vec{r}_i}_{\text{Término 1}} + \underbrace{\sum_{i,j=1, i \neq j}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_i}_{\text{Término 2}} \end{aligned} \quad (1.145)$$

Ahora, si se supone que las fuerzas $\vec{F}_i^{(ext)}$ y $\vec{F}_{ij}^{(int)}$ son conservativas, entonces son derivables a partir de energías potenciales como sigue,

$$\begin{cases} \vec{F}_i^{(ext)} = -\vec{\nabla}_i U_i^{(ext)} \\ \vec{F}_{ij}^{(int)} = -\vec{\nabla}_i U_{ij}^{(int)} \end{cases} \quad (1.146)$$

donde $U_i^{(ext)}$ y $U_{ij}^{(int)}$ son funciones de energía potencial que no tienen necesariamente la misma forma. Aquí $\vec{\nabla}_i$ significa que la operación gradiente es realizada con respecto a las coordenadas de la i -ésima partícula.

Se desarrollarán ahora los términos 1 y 2 de (1.145) con la finalidad de transformar sus integrandos en diferenciales exactas para así efectuar la integración indicada (se supondrá que se cumple la tercera ley de Newton (1.1)):

Término 1: al sustituir la primera de las expresiones (1.146) en el término 1 de (1.145) resulta,

$$\text{Término 1} = \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_i^{(ext)} \bullet d\vec{r}_i = - \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} (\vec{\nabla}_i U_i^{(ext)}) \bullet d\vec{r}_i \quad (1.147)$$

pero,

$$(\vec{\nabla}_i U_i^{(ext)}) \bullet d\vec{r}_i = \sum_{\ell=1}^3 \nabla_{i\ell} U_i^{(ext)} dx_{i\ell} = \sum_{\ell=1}^3 \frac{\partial U_i^{(ext)}}{\partial x_{i\ell}} dx_{i\ell} = dU_i^{(ext)} \quad (1.148)$$

donde $\ell = 1, 2, 3$ representa la coordenada (recuérdese que i representa a la partícula). Entonces,

$$\text{Término 1} = - \sum_{i=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} dU_i^{(ext)} = - \sum_{i=1}^N U_i^{(ext)} \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \quad (1.149)$$

Término 2: de (1.145),

$$\begin{aligned} \text{Término 2} &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_i = \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} (\vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji}^{(int)} \bullet d\vec{r}_j)}_{\text{De forma análoga a (1.79)}} \\ &= \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)}_{\text{Por (1.1)}} = \sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_{ij} \end{aligned} \quad (1.150)$$

Puesto que $U_{ij}^{(int)}$ es una función sólo de la distancia entre las partículas m_i y m_j (el campo es central) depende, por lo tanto, de 6 cantidades, es decir, las 3 coordenadas de m_i (las $x_{i,k}$) y las 3 coordenadas de m_j (las $x_{j,k}$). Ahora bien, la diferencial total de $U_{ij}^{(int)}$ es, por lo tanto, la suma de 6 derivadas parciales,

$$dU_{ij}^{(int)} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial U_{ij}^{(int)}}{\partial x_{i,k}} dx_{i,k} + \frac{\partial U_{ij}^{(int)}}{\partial x_{j,k}} dx_{j,k} \right) \quad (1.151)$$

(téngase presente que k indica la coordenada $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, y la i y j las partículas) donde las $x_{j,k}$ son mantenidas constantes en el primer término y las $x_{i,k}$ son mantenidas constantes en el segundo término. Así,

$$dU_{ij}^{(int)} = \left(\vec{\nabla}_i U_{ij}^{(int)} \right) \bullet d\vec{r}_i + \left(\vec{\nabla}_j U_{ij}^{(int)} \right) \bullet d\vec{r}_j$$

o también^{||},

$$dU_{ij}^{(int)} = \left(\vec{\nabla}_i U_{ij}^{(int)} \right) \bullet d\vec{r}_i + \left(\vec{\nabla}_j U_{ji}^{(int)} \right) \bullet d\vec{r}_j \quad (1.152)$$

ya que,

$$U_{ij}^{(int)} = U_{ji}^{(int)} \text{ (por ser escalar no cambia con la dirección)} \quad (1.153)$$

y como,

$$\vec{\nabla}_j U_{ji}^{(int)} = \underbrace{-\vec{F}_{ji}^{(int)}}_{\text{Por (1.146)}} = \underbrace{\vec{F}_{ij}^{(int)}}_{\text{Por (1.1)}} \quad (1.154)$$

la expresión (1.152) puede escribirse ahora como,

$$\begin{aligned} dU_{ij}^{(int)} &= -\vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_i + \vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_j = -\vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) \\ &= -\vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\underbrace{\vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_{ij}}_{\text{Por (1.129)}} \end{aligned} \quad (1.155)$$

Ahora, al sustituir (1.155) en (1.150) se obtiene,

$$\begin{aligned} \text{Término 2} &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \vec{F}_{ij}^{(int)} \bullet d\vec{r}_{ij} = - \sum_{i,j=1}^N \int_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} dU_{ij}^{(int)} \\ &= - \sum_{i,j=1}^N \left. U_{ij}^{(int)} \right|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \end{aligned} \quad (1.156)$$

Por último, al sustituir (1.149) y (1.156) en (1.145) resulta,

$$W_{12} = - \sum_{i=1}^N U_i^{(ext)} \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} - \sum_{i,j=1}^N U_{ij}^{(int)} \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} = - \left(\sum_{i=1}^N U_i^{(ext)} + \sum_{i,j=1}^N U_{ij}^{(int)} \right) \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} \quad (1.157)$$

expresión que fue obtenida suponiendo que las fuerzas externas e internas son derivables de energías potenciales. En este caso, la energía potencial total U (externa + interna) del sistema de partículas puede ser escrita como,

$$U = \sum_{i=1}^N U_i^{(ext)} + \sum_{i,j=1}^N U_{ij}^{(int)} \quad (1.158)$$

^{||}Nótese que $\vec{\nabla}_j U_{ij}^{(int)} \neq -\vec{F}_{ij}^{(int)}$. Para que sea cierto, el primer índice de $U^{(int)}$ debe ser igual al índice de $\vec{\nabla}$ en correspondencia con la segunda de las expresiones (1.146).

donde el término $\sum_{i,j=1}^N \sum_{i < j} U_{ij}^{(int)}$ representa la *Energía Potencial Interna* del sistema de partículas. Finalmente, (1.157) puede escribirse ahora como,

$$W_{12} = -U \Big|_{\text{conf. 1}}^{\text{conf. 2}} = U_1 - U_2 \quad (1.159)$$

1.12.3 Conservación de la energía mecánica

Si se igualan (1.139) y (1.159) resulta,

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

O,

$$E_1 = E_2 \quad (1.160)$$

que expresa la conservación de la energía total del sistema en el cual todas las fuerzas son derivables a partir de energías potenciales que no dependen explícitamente del tiempo. A tales sistemas, como se sabe, se les denominan *Sistemas Conservativos*:

La energía total de un sistema de partículas se conserva cuando sus fuerzas externas e internas son derivables a partir de energías potenciales que no dependen explícitamente del tiempo.

Si el sistema es un cuerpo rígido donde, como se sabe, las partículas que lo constituyen están restringidas a mantener sus posiciones relativas, entonces, en cualquier proceso en el que se involucre el cuerpo, la energía potencial interna permanece constante. En esta situación, la energía potencial interna puede ser ignorada cuando se calcule la energía potencial total del sistema. Esta cantidad contribuye simplemente a definir la posición cero en la energía potencial, pero esta posición es elegida arbitrariamente en cualquier caso; es decir, sólo la diferencia de energías potenciales es físicamente significativa. El valor absoluto de la energía potencial es una cantidad arbitraria.

1.13 Problemas

CAPITULO 2

LIGADURAS

En numerosos sistemas mecánicos de interés existen condiciones que el mismo debe cumplir durante su evolución. En este capítulo se estudiarán y clasificarán dichas condiciones o *Ligaduras*^{*}, mostrándose además cómo la presencia de éstas afectan su estudio. Se presentarán y clasificarán también las llamadas *Fuerzas de Ligadura* que, como se verá, están asociadas a las ligaduras.

En el presente texto, de aquí en dadelante, siempre se tendrán presentes las siguientes consideraciones:

1. Como se mostrará más adelante, las mencionadas ligaduras están relacionadas con las coordenadas de las posiciones de las partículas que constituyen al sistema mecánico y sus primeras derivadas temporales[†]. Por esta razón, antes de comenzar a desarrollar el presente capítulo, es necesario establecer el sistema de coordenadas que será siempre empleado en primera instancia. Las coordenadas Cartesianas (x, y, z) constituyen las coordenadas más sencillas y naturales posibles de utilizar para tal fin, siendo esta la primera razón por las que serán las escogidas. Claro está y es bien sabido de la práctica que a pesar de que las coordenadas Cartesianas sean las más secillas, no son las que necesariamente hacen más sencillo el estudio de un sistema mecánico dado. Para uno en particular, y de hecho es lo que generalmente ocurre, puede existir un sistema de coordenadas que haga que las ecuaciones empleadas para su estudio sean más reducidas que al emplear coordenadas Cartesianas haciendo el mismo más simple y, por ende, haciendo que las ecuaciones

*En algunos textos las llaman Restricciones.

†Pueden estar relacionadas con sus derivadas temporales de segundo orden y órdenes superiores pero, para el presente texto, sólo serán consideradas derivadas hasta el primer orden.

resultantes sean más fáciles de interpretar físicamente. Es bien sabido también que el resto de los sistemas de coordenadas como el cilíndrico, esférico y otros que serán introducidos más adelante y que se denominarán sistemas de coordenadas generalizadas, siempre están definidos en relación al sistema de coordenadas Cartesianas, lo cual constituye la segunda razón de su escogencia.

2. Se dirá que los sistemas de coordenadas Cartesianas, cilíndricas y esféricas son los sistemas de coordenadas estándares para ubicar las partículas de un sistema mecánico.
3. Los estudios de todos los sistemas mecánicos serán siempre referidos a un sistema de coordenadas estándar en tres dimensiones. Esto se hará siempre empleando en primera instancia un sistema de coordenadas Cartesianas como se estableció en (1), a menos que se especifique otra cosa.

Contenido

2.1 Ligaduras	57
2.2 Tipos de ligaduras	60
2.2.1 Estructurales	61
2.2.2 Por modo de activación	62
2.3 Clasificación de las ligaduras	63
2.3.1 Si son o no desigualdades	63
2.3.2 Si dependen explícita o implícitamente del tiempo	66
2.3.3 Si son o no una relación bilateral algebraica entre las coordenadas	69
2.4 Estudio de las ligaduras holónomas, no-holónomas y semi-holónomas	71
2.4.1 Ligaduras holónomas	71
2.4.2 Ligaduras holónomas en un cuerpo rígido y cómo afectan sus grados de libertad	77
2.4.3 Ligaduras No-Holónomas y Semi-Holónomas	87
2.5 Fuerza de ligadura y fuerza aplicada	99
2.5.1 Ligaduras lisas o ideales	101
2.5.2 Ligaduras rugosas	102
2.6 Ejemplos de determinación de ligaduras y grados de libertad	103
2.7 Problemas	122

2.1 Ligaduras

Al intentar describir el movimiento de las N partículas que constituyen un sistema se tiende, con mucha frecuencia, a pensar que sólo es necesario aplicar la segunda ley de Newton a cada una de ellas,

$$\begin{aligned}
 \text{Partícula 1} \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}) &= \vec{F}_1 & \left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{x}_{1,1} = F_{1x_1} \\ m_1 \ddot{x}_{1,2} = F_{1x_2} \\ m_1 \ddot{x}_{1,3} = F_{1x_3} \end{array} \right. \\
 \text{Partícula 2} \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 (x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}) &= \vec{F}_2 & \left\{ \begin{array}{l} m_2 \ddot{x}_{2,1} = F_{2x_1} \\ m_2 \ddot{x}_{2,2} = F_{2x_2} \\ m_2 \ddot{x}_{2,3} = F_{2x_3} \end{array} \right. \\
 \text{Partícula 3} \quad m_3 \ddot{\vec{r}}_3 (x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}) &= \vec{F}_3 & \left\{ \begin{array}{l} m_3 \ddot{x}_{3,1} = F_{3x_1} \\ m_3 \ddot{x}_{3,2} = F_{3x_2} \\ m_3 \ddot{x}_{3,3} = F_{3x_3} \end{array} \right. \\
 &\vdots & \vdots & \vdots \\
 \text{Última partícula} \quad m_N \ddot{\vec{r}}_N (x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}) &= \vec{F}_N & \left\{ \begin{array}{l} m_N \ddot{x}_{N,1} = F_{Nx_1} \\ m_N \ddot{x}_{N,2} = F_{Nx_2} \\ m_N \ddot{x}_{N,3} = F_{Nx_3} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

o simplemente,

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i (x_{i,\alpha}) = \vec{F}_i, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ y } \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

(α indica la coordenada $x_{i,1} = x_i$, $x_{i,2} = y_i$, $x_{i,3} = z_i$) e integrar las $3N$ ecuaciones resultantes para obtener las $3N$ coordenadas $x_{i,\alpha}$ como función del tiempo. Sin embargo, además de ser inviable, es frecuente descubrir que (en la mayoría de las situaciones) el sistema de ecuaciones (2.1) está incompleto. Se necesita algo más, en particular, las coordenadas podrían estar relacionadas o restringidas por *Ligaduras*.

Se denominan *Ligaduras* a las restricciones sobre las coordenadas de un sistema (independientes de las fuerzas actuantes), es decir, son condiciones que restringen la variedad de movimientos posibles de una partícula o de las partículas que constituyen un sistema de partículas.

Lo anterior se puede ilustrar con el ejemplo sencillo del péndulo simple (ver figura 2.1): una masa m (masa pendular) cuelga de un soporte mediante una cuerda de longitud ℓ , de masa y elasticidad despreciable, en un campo gravitacional de intensidad

\vec{g} , ocurriendo todo el movimiento en el plano xy y donde se ubica a la partícula usando coordenadas Cartesianas. La fuerza gravitatoria o peso $\vec{w} = m\vec{g}$ no es la única fuerza que actúa sobre la masa puesto que la cuerda misma también ejerce una fuerza \vec{T} sobre m que se suele denominar tensión[‡]. El efecto de la fuerza \vec{T} es mantener a m a una distancia constante ℓ del origen 0, haciendo que el movimiento de la misma esté restringido. Cuando lo anterior ocurre, se dice entonces que m está sometida a una restricción o Ligadura y a la fuerza que restringe su movimiento (la ejercida por la cuerda) se le llama *Fuerza de Ligadura*. Este tipo de fuerzas será considerado al final del presente capítulo.

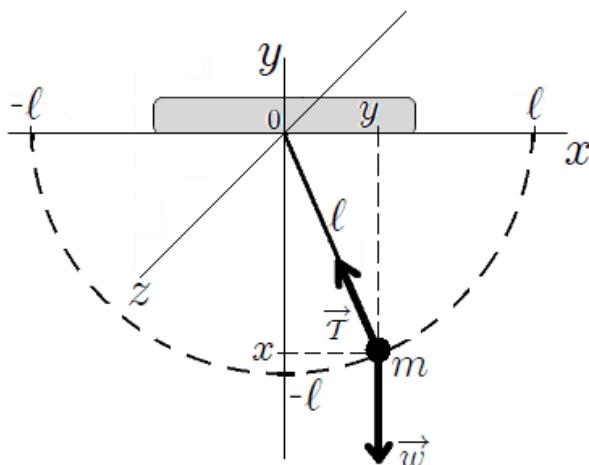


Figura 2.1: Péndulo simple.

Las ligaduras se expresan mediante ecuaciones a las cuales se les denominan *Ecuaciones de Ligadura*, que describen la geometría y/o la cinemática de las mismas.

Para el ejemplo anterior, si se están empleando coordenadas Cartesianas, las ecuaciones de las ligaduras presentes vendrán dadas por,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \ell^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

donde la primera hace que m describa un arco de circunferencia de radio ℓ y la segunda restringe el movimiento al plano xy .

[‡]En realidad, esta fuerza es la manifestación macroscópica de la infinidad de interacciones que ocurren entre las partículas de la cuerda con la masa pendular. Es la usada en los cálculos ya que el sistema de la masa pendular y las partículas individuales de la cuerda es inmanejable.

EJEMPLO 2.1**Algunas ligaduras en sistemas sencillos.**

1. Un bloque que se desliza sobre un plano inclinado está obligado a moverse sobre dicho plano (ver figura 2.2) y las ligaduras pueden expresarse mediante las ecuaciones de ligadura,

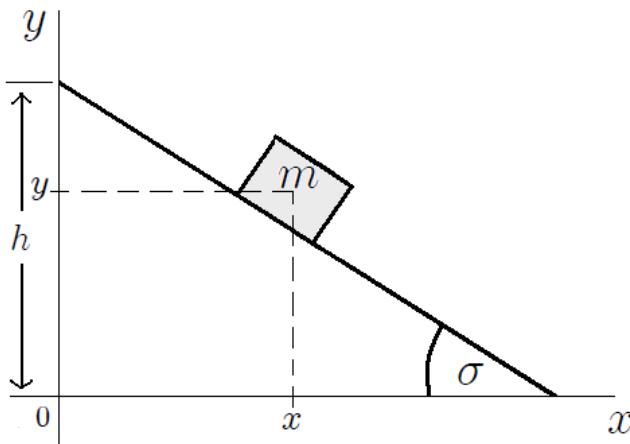


Figura 2.2: Un bloque de masa m que se mueve sobre un plano inclinado.

$$\begin{cases} y = -x \operatorname{Tg} \sigma + h \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

donde la primera es la ecuación de la recta que define el perfil del plano inclinado y restringe a la partícula a moverse sobre el plano inclinado, mientras que la segunda restringe a la partícula a moverse sobre el plano xy . Téngase presente que el bloque es considerado una partícula, es decir, sus dimensiones son despreciables.

2. Como se vio anteriormente, en un péndulo simple la masa pendular m está obligada a moverse en una trayectoria semicircular (ver figura 2.1). En este caso las ligaduras pueden expresarse mediante las ecuaciones de ligadura (2.2).
3. En un cuerpo rígido (ver figura 2.3) las partículas están enlazadas de manera tal que la distancia entre ellas permanece constante. Aquí las ligaduras se pueden expresar mediante la ecuaciones de ligadura,

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = \text{constante}. \quad (2.4)$$

donde r_{ij} es la distancia entre la partícula i -ésima y la j -ésima. Algo análogo ocurre en un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra (indeformable

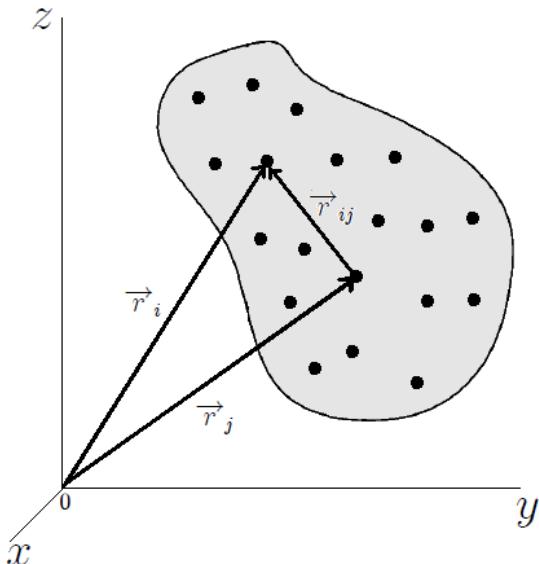
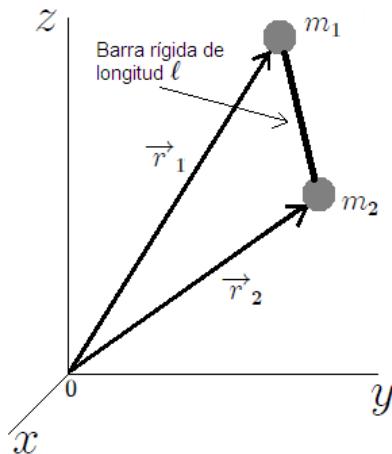


Figura 2.3: Cuerpo rígido.

y de masa despreciable) de longitud ℓ (ver figura 2.4), siendo en este caso la ligadura expresable mediante la ecuación de ligadura,

Figura 2.4: Dos masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de longitud ℓ .

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \ell \quad (2.5)$$

2.2 Tipos de ligaduras

Las ligaduras pueden ser agrupadas en dos grandes conjuntos:

2.2.1 Estructurales

Son aquellas ligaduras que están determinadas por la forma en que está construido el sistema, es decir, son propias de la estructura del mismo. Estas ligaduras se dan debido a las propiedades de los materiales que constituyen el sistema dado, pudiendo ser indeformables, de masa despreciable, etc.

EJEMPLO 2.2

Algunas ligaduras estructurales.

1. La ligadura mostrada en la figura 2.4 y expresada por la relación (2.5) es una ligadura estructural. En este caso la barra imposibilita que las masas m_1 y m_2 puedan moverse de forma independiente.
2. La ligadura presente (ver figura 2.5) en un sistema donde una canica con un orificio se desliza a través de un alambre rígido y curvo (que pasa a través de su orificio), también representa una ligadura estructural ya que el alambre sólo le permite a la canica desplazarse en una trayectoria cuya forma es igual a la del mismo.

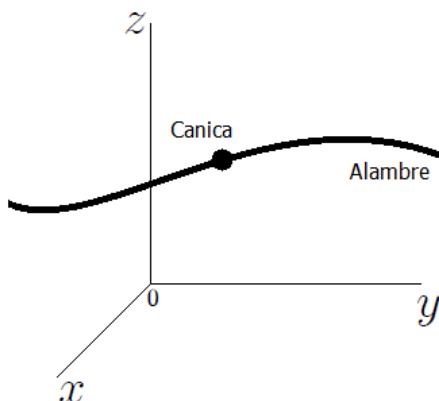


Figura 2.5: Sistema donde una canica con orificio se desliza a través de un alambre rígido y curvo que pasa a través del mencionado orificio.

3. En el caso de una partícula que se desplaza sobre una superficie también representa una ligadura estructural. Como caso particular se tiene la ligadura expresada por la relación (2.3).
4. Otro ejemplo es el caso del brazo humano. Aunque el movimiento del conjunto puede cubrir casi todo el espacio gracias a las articulaciones, cada una de las partes del brazo sólo pueden realizar una serie de movimientos. Esto es debido a

que cada hueso es indeformable y, por tanto, tienen una determinada estructura que les impide ciertos movimientos.

5. En el caso de un péndulo simple, visto en la sección 2.1, existe una ligadura estructural dada por la primera de las ecuaciones (2.2) indicando que el punto de suspensión (soporte) del péndulo es fijo.
-

2.2.2 Por modo de activación

Son aquellas ligaduras que determinan la evolución del sistema y que dependen de la forma en que son activadas (puestas en funcionamiento) en el mismo. Es decir, es posible encontrarse con distintas situaciones dependiendo de la forma en que se active el sistema dado.

EJEMPLO 2.3

Algunas ligaduras por modo de activación.

1. El péndulo simple es un sistema donde están presentes las ligaduras por activación. La dinámica del péndulo y su evolución depende de si las condiciones iniciales hacen que el péndulo se mueva sólo en el plano zy como en la figura 2.6a, recorriendo arcos de circunferencia (péndulo plano) o que, sin embargo, el sistema se mueva haciendo circunferencias completas (péndulo cónico) en el plano xy como puede verse en la figura 2.6b.
 2. En el caso de una masa puntual suspendida por medio de un resorte (péndulo elástico) también están presentes ligaduras por activación. Dependiendo de las condiciones iniciales el péndulo puede comportarse como un oscilador en una dimensión, si la activación es sólo en el eje z (ver figura 2.7a), como un oscilador tridimensional al tener la posibilidad de oscilar y girar en las tres dimensiones (ver figura 2.7b) o como un oscilador bidimensional (ver figura 2.7c).
 3. Si se supone que una masa puntual m se encuentra inicialmente en un punto de equilibrio inestable, el modo de activación condicionará la evolución del sistema. Por ejemplo, ese punto inestable podría ser la cima de una montaña (ver figura 2.8) que tiene a los lados dos valles, entonces, la forma en que se perturbe a la piedra determinará si esta cae al valle A o al valle B .
-

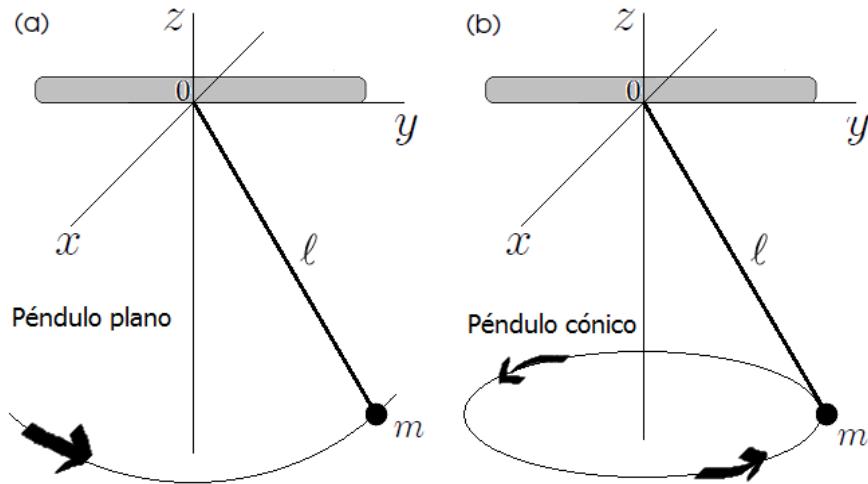


Figura 2.6: Movimientos posibles de un péndulo simple.

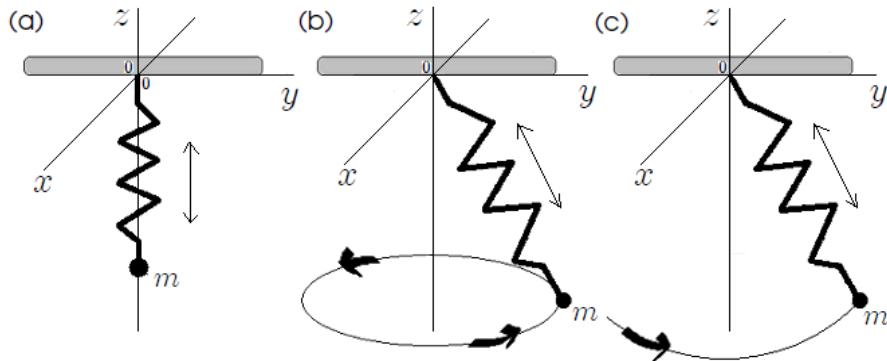


Figura 2.7: Movimientos posibles de un péndulo elástico.

2.3 Clasificación de las ligaduras

Las ligaduras se pueden clasificar de variadas formas, a continuación algunas de ellas,

2.3.1 Si son o no desigualdades

2.3.1.1 Unilaterales

Se denomina *Ligadura Unilateral* a aquella ligadura que se expresa mediante una desigualdad.

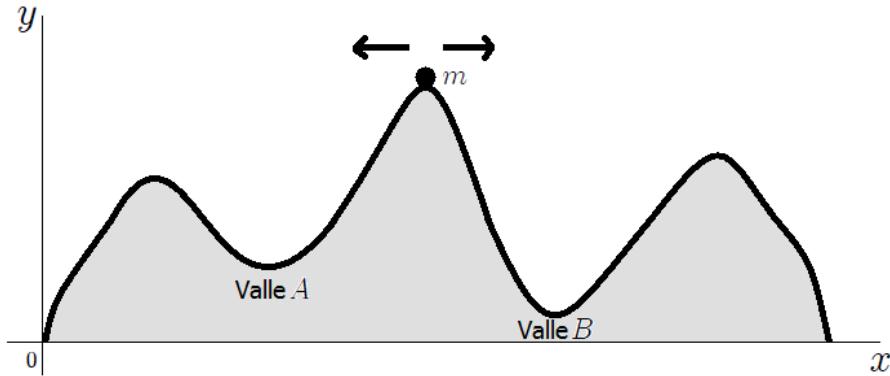


Figura 2.8: Masa puntual m en un punto de equilibrio inestable como la cima de una montaña.

En forma general este tipo de ligaduras pueden ser representadas por las ecuaciones de ligadura,

$$f_l \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, \dots, t \right) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.6)$$

que, en realidad, son inecuaciones. Aquí el índice l indica cada una de las ligaduras presentes de este tipo en un sistema de partículas dado de manera que,

$l = 1, 2, 3, \dots$, hasta total de ligaduras presentes de este tipo

EJEMPLO 2.4

Algunas ligaduras unilaterales.

- Si se tiene un sistema de moléculas de gas encerrado en una esfera de radio \mathcal{R} (ver figura 2.9), las posiciones \vec{r}_i de las moléculas deben satisfacer las ligaduras cuyas ecuaciones de ligadura vienen dadas por,

$$r_i \leq \mathcal{R}$$

O,

$$\mathcal{R} - r_i \geq 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.7)$$

si se escribe en la forma (2.6).

- Una partícula colocada sobre la superficie de una esfera de radio \mathcal{R} (ver figura 2.10) está sujeta a una ligadura que se puede escribir como,

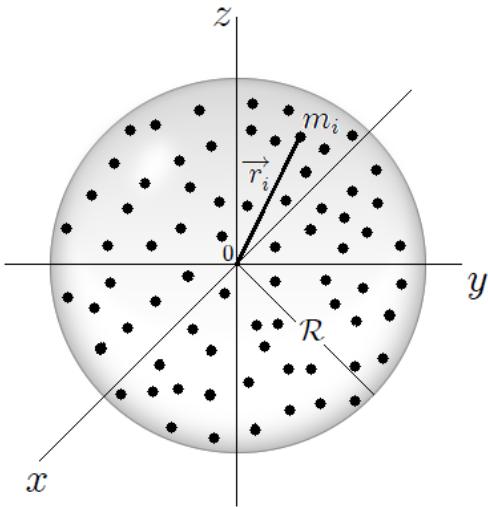


Figura 2.9: Moléculas de gas encerradas en una esfera de radio \mathcal{R} .

$$r \geqslant \mathcal{R}$$

o,

$$r - \mathcal{R} \geqslant 0 \quad (2.8)$$

si se escribe en la forma (2.6). Así, en un campo gravitacional, una partícula colocada sobre una superficie de una esfera se deslizará hacia abajo sobre parte de su superficie hasta que, eventualmente, se desprende de dicha superficie.

2.3.1.2 Bilaterales

Se denomina *Ligadura Bilateral* a toda aquella ligadura que se expresa mediante una igualdad.

En general este tipo de ligaduras pueden escribirse mediante las ecuaciones de ligadura,

$$f_l \left(\overrightarrow{r}_i, \dot{\overrightarrow{r}}_i, \ddot{\overrightarrow{r}}_i, \dddot{\overrightarrow{r}}_i, \dots, t \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.9)$$

donde al igual que antes,

$$l = 1, 2, 3, \dots, \text{hasta el total de ligaduras presentes de este tipo}$$

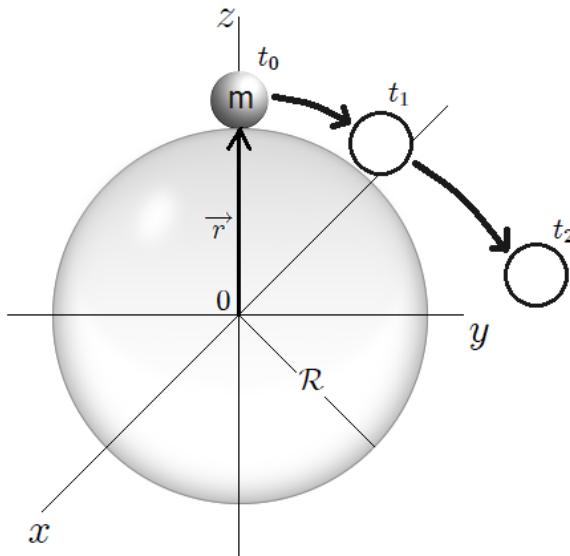


Figura 2.10: Partícula de masa m que se desliza sobre la superficie de una esfera de radio R . Se muestra su posición en los tiempos t_0 cuando comienza a moverse, t_1 cuando comienza a despegarse de la superficie de la esfera y t_2 cuando ya se ha despegado de la superficie de la misma.

EJEMPLO 2.5

Algunas ligaduras bilaterales.

Las ligaduras expresadas por (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5) son ligaduras bilaterales.

2.3.2 Si dependen explícita o implícitamente del tiempo

2.3.2.1 Ligaduras reónomas

Se denomina *Ligadura Reónoma* a toda aquella ligadura que depende explícitamente del tiempo. También se les llaman *Ligaduras Móviles* o *Ligaduras Cinemáticas*.

EJEMPLO 2.6

Algunas ligaduras reónomas.

Son ligaduras reónomas:

1. La ligadura, mencionada antes, presente en un sistema donde una canica con un orificio se desliza a través de un alambre rígido y curvo que pasa a través de su

orificio (ver figura 2.5), de manera tal que el alambre se mueve de una forma pre-determinada. Es de hacer notar que, si el alambre se mueve como una reacción al movimiento de la canica, entonces la dependencia de la ligadura respecto al tiempo entra en la ecuación de la misma sólo a través de las coordenadas del alambre curvado (las cuales son ahora parte del sistema de coordenadas), por esta razón la ligadura resultante no depende explícitamente del tiempo y por lo tanto no es reónoma.

2. La ligadura presente en un sistema de moléculas de gas encerrado en una esfera cuyo radio R , a diferencia del ejemplo mencionado antes, depende del tiempo (ver figura 2.9). En este sistema las posiciones \vec{r}_i de las moléculas deben satisfacer las ecuaciones de ligadura,

$$\mathcal{R}(t) - r_i \geq 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.10)$$

que, realmente, son inecuaciones.

3. Una de las ligaduras presentes en un sistema donde una partícula de masa m es obligada a moverse en un aro que cambia su radio mediante $\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 [2 + \cos(\omega t)]$, siendo ω la frecuencia angular constante (ver figura 2.11). En este caso, las ligaduras pueden ser expresadas mediante las ecuaciones de ligadura,

$$\begin{cases} \mathcal{R}(t) = \mathcal{R}_0 [2 + \cos(\omega t)] = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

apareciendo explícitamente el tiempo t en la primera de ellas, por lo que es reónoma.

4. La ligadura presente en un sistema donde una partícula de masa m se desplaza sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación α varía con el tiempo t como $\alpha = \omega t$ (ω frecuencia angular), ver figura 2.12. Las ligaduras pueden ser expresadas mediante las ecuaciones de ligadura,

$$\begin{cases} y = x \operatorname{Tg} \alpha = x \operatorname{Tg}(\omega t), \text{ recta perfil del plano inclinado.} \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

apareciendo explícitamente el tiempo t en la primera de ellas, por lo que es reónoma.

2.3.2.2 Ligaduras esclerónomas

Se denomina *Ligadura Esclerónoma* a toda aquella ligadura que no depende explícitamente del tiempo. También se les llaman *Ligaduras Fijas* o *Ligaduras Estacionarias*.

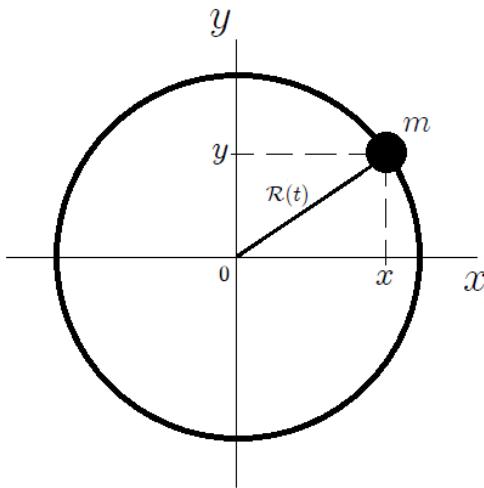


Figura 2.11: Una partícula de masa m que se mueve en un aro cuyo radio R cambia con el tiempo.

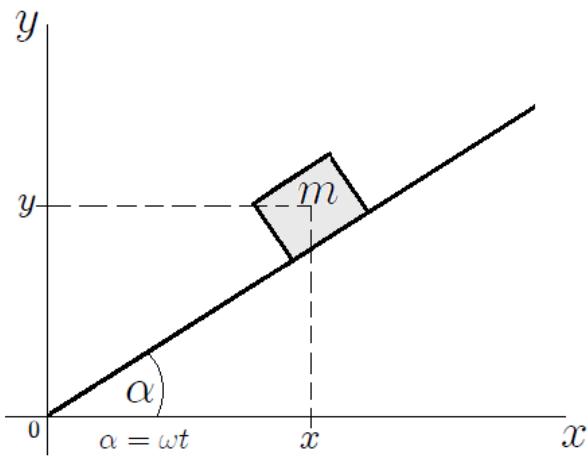


Figura 2.12: Partícula que se mueve sobre un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación α varía con el tiempo.

Por otro lado, si un sistema tiene todas sus ligaduras esclerónomas entonces se dice que el mismo es esclerónico. Sin embargo, si al menos una de las ligaduras presentes es reónoma, entonces se dice que el sistema es reónomo.

EJEMPLO 2.7

Algunas ligaduras esclerónomas.

Las ligaduras expresadas por (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.7) y (2.8) son ligaduras esclerónomas.

2.3.3 Si son o no una relación bilateral algebraica entre las coordenadas

A la presente clasificación se le pondrá especial atención ya que será la seguida de aquí en adelante en el presente texto. Dependiendo de si representan o no una relación bilateral entre las coordenadas las ligaduras pueden ser clasificadas en *Holónomas* y *No-Holónomas*.

2.3.3.1 Ligaduras Holónomas

Se denominan *Ligaduras Holónomas* a todas aquellas ligaduras bilaterales que no dependen de las velocidades y que dependen exclusivamente de las coordenadas de las partículas (si es esclerónica) y, posiblemente, del tiempo en forma explícita (si es reónoma).

En general, este tipo de ligaduras pueden ser representadas mediante las ecuaciones de ligadura,

$$f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.13)$$

donde (h) indica que la ligadura es holónoma. Si se denota como $K^{(h)}$ el número total de ligaduras de este tipo presentes en un sistema de partículas dado entonces,

$$l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$$

2.3.3.2 Ligaduras No-Holónomas y Semi-Holónomas

Se denominan *Ligaduras No-Holónomas* a todas aquellas ligaduras que no pueden ser escritas como ligaduras holónomas, es decir, no se pueden escribir en la forma expresada por (2.13). No son integrables, por lo tanto, es imposible emplearlas para eliminar las coordenadas dependientes ya que dichas ecuaciones no son relaciones algebraicas entre las coordenadas.

Todas las ligaduras unilaterales son de este tipo. Pueden haber ligaduras bilaterales no-holónomas. Un caso particularmente importante de este último tipo de ligaduras, por estar frecuentemente presentes en los sistemas mecánicos, lo constituyen aquellas

ligaduras no integrables que pueden ser expresadas en términos de las velocidades $\dot{\vec{r}}_i$ de las partículas que constituyen el sistema,

$$f_l^{(nh)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.14)$$

donde (nh) indica que la ligadura es no-holónoma. Si se denota como $K^{(nh)}$ el número total de ligaduras de este tipo presentes en un sistema de partículas dado entonces,

$$l = 1, 2, 3, \dots, K^{(nh)}$$

Las ligaduras no integrables (2.14) de primer orden en las derivadas no son el único tipo de ligaduras bilaterales no-holónomas que pueden estar presentes en un sistema de partículas. Las ligaduras pueden involucrar derivadas de orden superior,

$$f_l^{(nh)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \ddot{\vec{r}}_i, \dddot{\vec{r}}_i, \dots, t \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ y } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(nh)} \quad (2.15)$$

sin embargo, en el presente texto, se considerarán sólo aquellas con derivadas de primer orden.

Pueden existir ligaduras del tipo (2.14) que son integrables, por lo tanto, al ser integradas resultan en ligaduras del tipo (2.13).

Se denominan *Ligaduras Semi-holónomas* a todas aquellas ligaduras que a pesar de estar escritas en la forma (2.14) son integrables, resultando finalmente en ligaduras holónomas. Es decir, las ligaduras semi-holónomas son ligaduras holónomas escritas en la forma (2.14). Son ligaduras holónomas escritas en una forma distinta.

A estas ligaduras se les denotará matemáticamente como,

$$f_l^{(sh)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.16)$$

donde (sh) indica que la ligadura es no-holónoma. Como son en realidad ligaduras holónomas entonces se usará $K^{(h)}$ para denotar el número total de ligaduras de este tipo presentes en un sistema de partículas dado de manera que,

$$l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$$

De lo anterior,

se puede concluir que las ligaduras holónomas (2.13) pueden ser escritas en forma semi-holónoma si se les halla su derivada con respecto al tiempo t .

2.4 Estudio de las ligaduras holónomas, no-holónomas y semi-holónomas

En esta sección se hará un estudio un poco más profundo de las ligaduras holónomas, no-holónomas y semi-holónomas por ser estas denominaciones las que se usarán de aquí en adelante para distinguir entre las distintas ligaduras presentes en un sistema mecánico.

2.4.1 Ligaduras holónomas

De las ligaduras holónomas (2.13),

$$f_l^{(h)} (\vec{r}_i, t) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N; l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$$

se puede afirmar que:

1. También reciben el nombre de *Ligaduras Geométricas* porque representan curvas y superficies que limitan el movimiento de las partículas de un sistema. Otras denominaciones que suelen utilizarse para este tipo de ligaduras es la de *Ligaduras de Configuración* y *Ligaduras Finitas*.
2. Representan un sistema de $K^{(h)}$ ecuaciones algebraicas que relacionan las coordenadas entre sí,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(h)} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \\ f_2^{(h)} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \\ f_3^{(h)} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \\ \vdots \\ f_{K^{(h)}}^{(h)} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \end{array} \right.$$

3. Como se expresan mediante ecuaciones que constituyen relaciones algebraicas entre las coordenadas dependientes, es posible (en general) emplearlas para eliminar dichas coordenadas y así reducir el número de ellas, es decir, permiten reducir $K^{(h)}$ coordenadas dependientes.

4. Imponen restricciones sobre las posiciones \vec{r}_i (o las coordenadas) posibles o permitidas de las partículas del sistema.

Se llama *Sistema Holónomo* a aquél sistema donde todas las ligaduras presentes son holónomas. Como para este tipo de sistemas es posible eliminar las coordenadas dependientes transformándolo en un sistema equivalente sin ligaduras, a estos últimos también se les denominan holónomos.

Como ya se sabe las ligaduras son condiciones que restringen el movimiento de una partícula o sistema de partículas. La pregunta natural ahora sería ¿cuáles son los desplazamientos permitidos por las ligaduras holónomas?. La respuesta a esta pregunta se obtiene al hallar el diferencial total de (2.13),

$$f_l^{(hd)}(\vec{r}_i, t) = df_l^{(h)}(\vec{r}_i, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial \vec{r}_j} d\vec{r}_j + \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial t} dt = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$$

(2.17)

donde (*hd*) se refiere a que son ligaduras holónomas escritas en forma diferencial. Los desplazamientos $d\vec{r}_j$ presentes en la sumatoria son aquellos permitidos por (2.13) ya que fueron encontrados a partir de la misma. A estos desplazamientos se les denominan *Desplazamientos Compatibles con las Ligaduras*. Son las mismas ligaduras holónomas (2.13) sólo que escritas a partir de sus diferenciales y por esto son semi-holónomas.

También es posible encontrar cómo (2.13) impone restricciones sobre las velocidades de las partículas del sistema. En efecto, al hallar la derivada total con respecto al tiempo t de (2.13) resulta,

$$f_l^{(hD)}(\vec{r}_i, t) = \frac{d}{dt} f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial \vec{r}_j} \frac{d\vec{r}_j}{dt} + \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial t} = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$$

(2.18)

donde (*hD*) se refiere a que son ligaduras holónomas escritas en forma de derivada. Las velocidades $\dot{\vec{r}}_j$ presentes en la sumatoria son aquellas permitidas por (2.13) ya que fueron encontradas a partir de la misma. A estas velocidades se les denominan *Velocidades Compatibles con las Ligaduras*. Al igual que para (2.17), estas son las mismas ligaduras holónomas (2.13) sólo que escritas a partir de sus derivadas con respecto al tiempo t y por esto son semi-holónomas.

Para el caso de ligaduras holónomas esclerónomas $f_l^{(h)}(\vec{r}_i) = 0$, las ligaduras (2.17) y (2.18) se convierten respectivamente en,

$$f_l^{(hd)}(\vec{r}_i) = df_l^{(h)}(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial \vec{r}_j} d\vec{r}_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \quad (2.19)$$

$$f_l^{(hD)}(\vec{r}_i) = \frac{df_l^{(h)}}{dt}(\vec{r}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial \vec{r}_j} \dot{\vec{r}}_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \quad (2.20)$$

Como las ligaduras holónomas permiten relacionar sólo las coordenadas de las partículas, reducen los *Grados de Libertad* del sistema.

Los *Grados de Libertad* de un sistema vienen dados por el número s de coordenadas independientes (sin incluir el tiempo) que se requieren para describir completamente la posición de todas y cada una de las partículas o partes que componen al sistema, entendiéndose por éstas: una palanca, un disco, un piñón, una plataforma, etc., que deben ser tratadas como un cuerpo rígido y no como una partícula.

Un aspecto importante sobre los grados de libertad es que,

Tienen que ver con los posibles movimientos del sistema pero también con la libertad o independencia de los mismos.

En un sistema holónico de N partículas el número de grados de libertad s viene dado por,

$$s = 3N - K^{(h)} \quad (2.21)$$

Se les denominan *Grados de Libertad Configuracionales* porque representan el número de coordenadas independientes que, junto con las ecuaciones de ligadura, permiten de forma inequívoca especificar la configuración de un sistema de partículas dado.

Si $s = 0$, éste estará fijo en el espacio si todas las ligaduras presentes son esclerónomas, no existiendo así variables independientes ni dinámica. Sin embargo, si al menos una de las ligaduras presentes es reónoma entonces el sistema seguirá un movimiento prescrito, teniéndose así cinemática en vez de dinámica.

A este nivel es pertinente hacer referencia al siguiente detalle con respecto a la notación de las ligaduras holónomas: considérese nuevamente el sistema mostrado en la figura 2.1 en el cual están presentes dos ligaduras holónomas dadas por (2.2),

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \ell^2 = \text{constante} \\ z = 0 \end{cases}$$

de manera que $K^{(h)} = 2$ entonces $l = 1, 2$. Se le asignará la etiqueta $l = 1$ a la primera y $l = 2$ a la segunda (pudo ser al contrario, es irrelevante). Para expresarlas en la forma (2.13) es necesario pasar todos los términos del miembro derecho al izquierdo o viceversa de cada una de ellas con la finalidad de hacer nulo uno de sus dos miembros (es obvio que para la segunda ligadura no es necesario mover términos),

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

de esta manera,

$$\begin{cases} f_1^{(h)} = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \\ f_2^{(h)} = z = 0 \end{cases}$$

que será la notación a seguir de aquí en adelante para este tipo de ligaduras en el presente texto. El anterior procedimiento será el usado también para las ligaduras no-holónomas a ser estudiadas en la siguiente sección.

EJEMPLO 2.8

Algunas ligaduras holónomas.

Las ligaduras expresadas por (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5) son ligaduras holónomas por ser relaciones bilaterales entre las coordenadas.

EJEMPLO 2.9

Partícula de masa m obligada a moverse sobre una superficie (ver figura 2.13).

Las coordenadas (x, y, z) del punto P que indica la posición de la partícula deben cumplir la ecuación $S(x, y, z) = 0$ de la superficie,

$$S(x, y, z) = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = S(x, y, z) = 0 \quad (2.22)$$

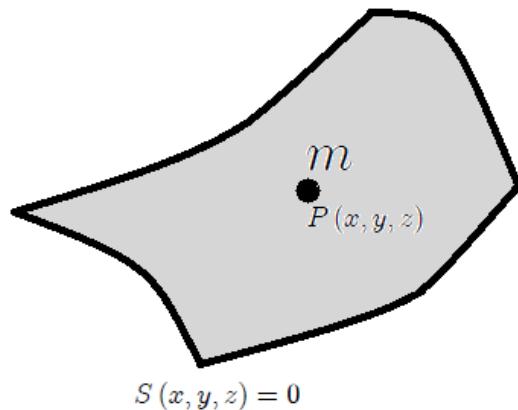


Figura 2.13: Partícula de masa m obligada a moverse sobre una superficie $S(x, y, z) = 0$.

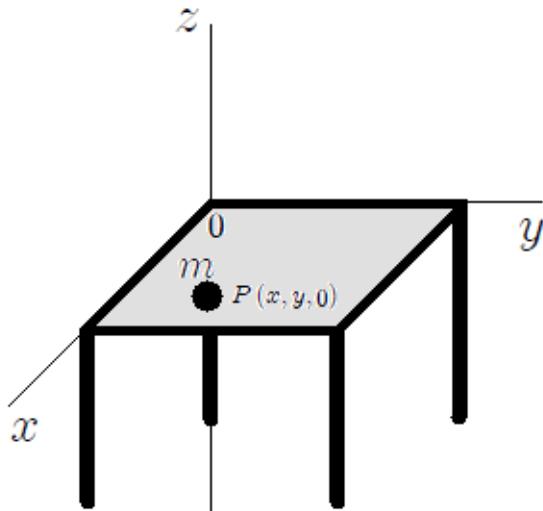


Figura 2.14: Una partícula de masa m moviéndose sobre una mesa.

Se trata de $K^{(h)} = 1$ ligadura holónoma, quitando 1 grado de libertad. Por lo tanto, a partir de (2.21) la partícula tiene,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2 \quad (2.23)$$

grados de libertad.

Un caso particular es el de una partícula de masa m moviéndose sobre una mesa (ver figura 2.14). La mesa es una ligadura holónoma simple, que le impide caerse. En este caso, la ecuación de la ligadura es,

$$z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0 \quad (2.24)$$

Para definir la posición de la partícula son necesarias sólo dos coordenadas (x, y) .

EJEMPLO 2.10

Partícula de masa m obligada a moverse sobre una curva (ver figura 2.15).

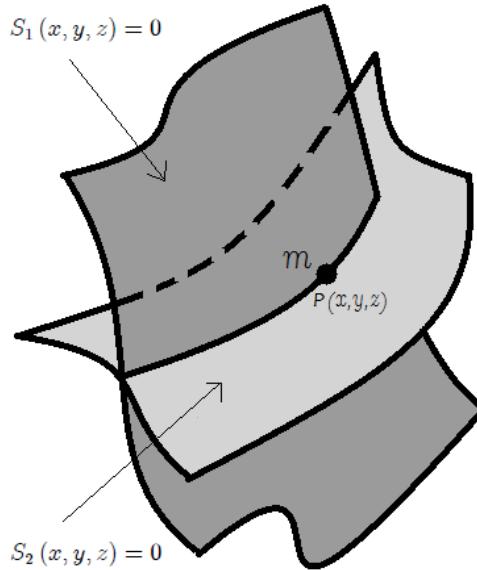


Figura 2.15: Partícula de masa m obligada a moverse sobre una curva.

Las coordenadas (x, y, z) del punto P que indica la posición de la partícula deben cumplir las ecuaciones de las dos superficies que intersectadas forman la curva,

$$\begin{cases} S_1(x, y, z) = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = S_1(x, y, z) = 0 \\ S_2(x, y, z) = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = S_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Se trata de $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas, quitando 2 grados de libertad. Por lo tanto, a partir de (2.21) la partícula tiene,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1 \quad (2.26)$$

Un caso particular es el de una partícula de masa m moviéndose sobre una recta (ver figura 2.16). La recta supone una ligadura holónoma doble. Aquí las ecuaciones de ligadura son,

$$\begin{cases} y = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = y = 0 \\ z = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Para definir la posición de la partícula sólo es necesaria la coordenada x .

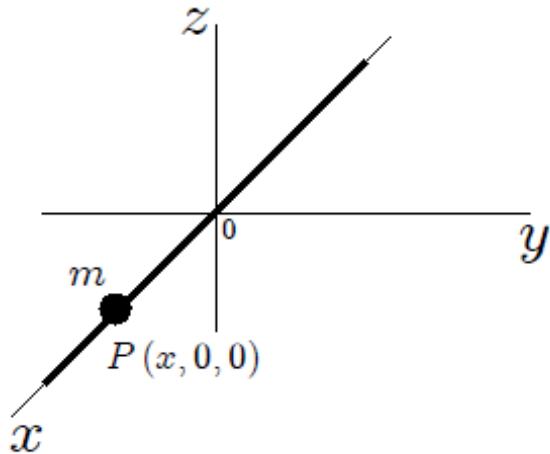


Figura 2.16: Partícula de masa m moviéndose sobre una recta.

EJEMPLO 2.11

Partícula de masa m obligada a estar fija en un punto.

Las coordenadas (x, y, z) del punto P donde se encuentra la partícula de masa m deben permanecer constantes,

$$\begin{cases} x = x_o \Rightarrow f_1^{(h)} = x - x_o = 0 \\ y = y_o \Rightarrow f_2^{(h)} = y - y_o = 0 \\ z = z_o \Rightarrow f_3^{(h)} = z - z_o = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Se trata de $K^{(h)} = 3$ ligaduras holónomas, quitando 3 grados de libertad. Por lo tanto, a partir de (2.21) la partícula tiene,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 3 = 0 \quad (2.29)$$

grados de libertad.

2.4.2 Ligaduras holónomas en un cuerpo rígido y cómo afectan sus grados de libertad

Uno de los sistemas de interés en Mecánica Clásica son los denominados *Cuerpos Rígidos*. Ya se había hecho mención antes sobre estos cuerpos.

2.4.2.1 Definición de cuerpo rígido

Un cuerpo sólido real es deformable. Es decir, puede cambiar de forma o tamaño, por ejemplo debido a cambios de temperatura o tensiones aplicadas. En el estudio de la dinámica de un sólido el aspecto más importante es que esté compuesto por una cierta densidad de masa, siendo un aspecto secundario las pequeñas variaciones que pueda sufrir. Las variaciones de forma, por ejemplo, es un aspecto que trata la teoría de la elasticidad. Un sólido rígido, por lo tanto, es un sólido ideal no deformable. La característica o definición de un sólido no deformable sería la de un medio material en el que la distancia entre dos puntos cualesquiera permanece invariable.

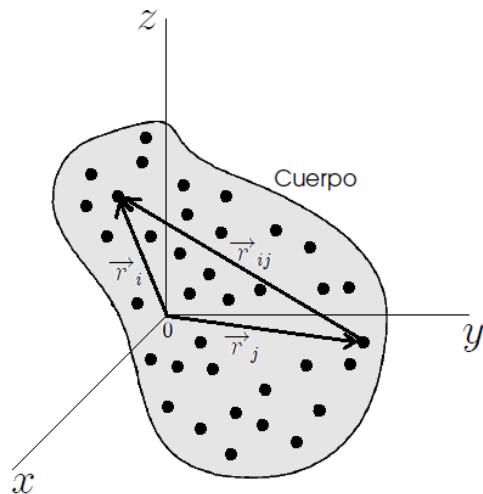


Figura 2.17: Cuerpo rígido $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{constante } \forall i, j \in \text{cuerpo}$.

Un *Cuerpo Rígido* es un sistema formado por muchas partículas de tal forma que las distancias entre ellas permanezcan constantes. Es decir,

$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c \quad \forall i, j \in \text{cuerpo}, \text{ con } c = \text{constante} \quad (2.30)$$

en referencia a la figura 2.17.

Las ecuaciones (2.30), linealmente independientes, representan $K^{(h)}$ ligaduras holónomas esclerónomas.

2.4.2.2 Posición de un cuerpo rígido

Para definir la posición de un cuerpo rígido en el espacio, como el que se muestra en la figura 2.18a, sólo se necesita localizar la posición de 3 de sus puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$,

$P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$ no alineados pues, conocidos estos 3, en virtud de (2.30) se puede conocer la de cualquier otro de sus puntos $P(x, y, z)$ mediante,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_{P1}^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_{P2}^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_{P3}^2 \end{array} \right. \quad (2.31)$$

teniendo en cuenta que las distancias r_{P1} , r_{P2} y r_{P3} son constantes y conocidas (es un cuerpo rígido!). Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas x , y y z , cuya solución es laboriosa y extensa. Se puede encontrar su solución empleando Maple, por ejemplo.

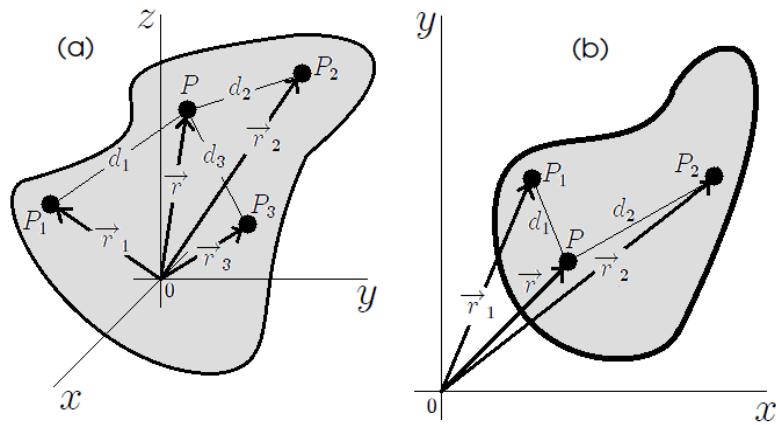


Figura 2.18: (a) Cuerpo rígido en el espacio. (b) Cuerpo rígido plano en su propio plano.

Es fácil darse cuenta que sólo se necesitan 3 puntos para definir la posición de un cuerpo rígido en el espacio ya que, por ejemplo, si se escogen 4 puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$ entonces se tendría el sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_2^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = d_3^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = d_4^2 \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Obviamente, sólo son necesarias 3 cualesquiera de estas 4 ecuaciones para determinar x , y y z , lo que equivale nuevamente a conocer 3 puntos. Lo mismo ocurre si se escogen 5 o más puntos del cuerpo rígido. Entonces,

Para definir la posición de un cuerpo rígido en el espacio sólo se necesita localizar la posición de 3 de sus puntos.

Del mismo modo para definir la posición de un cuerpo rígido plano en su plano, como se muestra en la figura 2.18b, sólo se necesita localizar la posición de dos puntos, pues al conocer esos dos es posible conocer los demás. Si se conocen las coordenadas de los puntos $P_1(x_1, y_1, 0)$ y $P_2(x_2, y_2, 0)$ es posible conocer las de otro punto cualquiera $P(x, y, 0)$ mediante,

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_{P1}^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_{P2}^2 \end{cases} \quad (2.33)$$

2.4.2.3 Grados de libertad de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido libre de ligaduras es aquél que sólo está sometido a las ligaduras propias a su condición de rígido, es decir, a las ligaduras (2.30). ¿Cuántos grados de libertad tiene un cuerpo rígido libre en el espacio?. Como ya se sabe, el número de coordenadas para N partículas es $3N$. En un cuerpo macroscópico este número es gigantesco debido al gran número de partículas presentes, sin embargo, es claro que para describir el movimiento de un cuerpo no se necesitan tantas variables, ya que la condición de rigidez impone muchas ligaduras del tipo (2.30).

Teniendo la visión de cuerpo rígido como un sistema de partículas restringidas mediante ligaduras, se verá ahora cómo las ligaduras holónomas (2.30) restringen el número de grados de libertad del cuerpo rígido. Se partirá con un sistema de 1 partícula, luego se construirá uno de 2, otro de 3 y así sucesivamente hasta N partículas asociando, en cada caso, a todas las partículas del sistema mediante todas las posibles $K^{(h)}$ ligaduras del tipo (2.30) que se puedan establecer entre ellas. El caso de N partículas corresponderá a cualquier cuerpo rígido en el espacio. En efecto,

Para $N = 1$: por (2.21) el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 0 = 3 \quad (2.34)$$

Es de hacer notar que esto no representa un cuerpo rígido pues es sólo una partícula.

Para $N = 2$: existirá, por estar en un cuerpo rígido, la ligadura holónoma esclerónica,

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = c$$

por lo tanto el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 1 = 5 \quad (2.35)$$

Para $N = 3$: se tienen las 3 ligaduras,

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| &= |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| \\ |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| \end{aligned}$$

por lo tanto el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(3) - 3 = 6 \quad (2.36)$$

Para $N = 4$: se tienen las 6 ligaduras,

$$\begin{array}{l} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| \quad |\vec{r}_1 - \vec{r}_4| \\ |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| \quad |\vec{r}_2 - \vec{r}_4| \\ |\vec{r}_3 - \vec{r}_4| \end{array}$$

por lo tanto el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(4) - 6 = 6 \quad (2.37)$$

Para $N = 5$: se tienen las 10 ligaduras,

$$\begin{array}{cccc} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| & |\vec{r}_1 - \vec{r}_3| & |\vec{r}_1 - \vec{r}_4| & |\vec{r}_1 - \vec{r}_5| \\ |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| & |\vec{r}_2 - \vec{r}_4| & |\vec{r}_2 - \vec{r}_5| & \\ |\vec{r}_3 - \vec{r}_4| & |\vec{r}_3 - \vec{r}_5| & & \\ & & |\vec{r}_4 - \vec{r}_5| & \end{array}$$

sin embargo la ligadura $|\vec{r}_4 - \vec{r}_5|$ no es necesaria para tener al punto 4 completamente determinado. Para entenderlo, obsérvense las ligaduras que están resaltadas mediante cuadros simples. En base a lo discutido al escribir el sistema de ecuaciones (2.32), aquí se podría pensar que el punto buscado es el 4 y los conocidos son el 1, 2 y 3 más sus respectivas distancias r_{41} , r_{42} y r_{43} al punto 4. La posición del punto 4 queda completamente determinada mediante el sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2 = r_{41}^2 \\ (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2 = r_{42}^2 \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 = r_{43}^2 \end{array} \right. \quad (2.38)$$

que provienen de las ligaduras resaltadas mediante cuadros simples. Por lo tanto, la información dada por la ligadura doblemente resaltada que da origen a la ecuación,

$$(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2 + (z_4 - z_5)^2 = r_{45}^2 \quad (2.39)$$

no es necesaria para determinar la posición del punto 4, siendo así esta ligadura superflua. Finalmente, en base a lo discutido antes, para $N = 5$ se tienen en realidad $K^{(h)} = 9$

ligaduras holónomas esclerónomas del tipo (2.30) de manera que en virtud de (2.21) el número de grados de libertad viene dado por,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(5) - 9 = 6 \quad (2.40)$$

Una argumentación similar se debe hacer para $N = 6, 7, 8, \dots$. En la siguiente tabla se muestran los resultados hasta 10 partículas:

# de partículas N	# de ligaduras $K^{(h)}$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	9
6	12
7	15
8	18
9	21
10	24
:	:

Para N partículas: obsérvese en la tabla anterior que a partir de 3 partículas el número de ligaduras sigue una progresión aritmética de razón 3. En base a esto es posible encontrar el término n -ésimo a_n mediante[§],

$$a_n = 3 + 3(n - 1) \quad (2.41)$$

donde n indica el número del término a encontrar de la progresión aritmética cuyo término $n = 1$ es 3. Nótese que $N = n + 2$ por lo que,

$$\begin{cases} n = N - 2 \\ a_n = a_{N-2} = K^{(h)} \text{ a partir de } N = 3 \end{cases} \quad (2.42)$$

entonces al sustituir (2.42) en (2.41) resulta,

$$a_{N-2} = 3 + 3(N - 2 - 1)$$

o,

$$K^{(h)} = 3N - 6 \quad (2.43)$$

[§]Recuérdese que en una progresión aritmética de razón r y primer término a_1 , el término n -ésimo a_n viene dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

a partir de la cual se pueden obtener el número de ligaduras no superfluas a partir de $N = 3$. Para reproducir los valores de la tabla desde $N = 1$, utilizando un poquito las neuronas es fácil darse cuenta que es posible escribir,

$$K^{(h)} = 3N - 6 + 3\delta_{1N} + \delta_{2N} \quad (2.44)$$

donde δ es la Delta de Kronecker que, como es sabido, se define mediante la regla,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.45)$$

Sin embargo, como se vió en la sección anterior, para definir un cuerpo rígido en el espacio hacen falta un mínimo de 3 puntos no colineales, entonces (2.44) se reduce a,

$$K^{(h)} = 3N - 6 \quad (2.46)$$

por lo tanto a partir de (2.21) el número de grados de libertad será,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3N - \underbrace{(3N - 6)}_{\text{Por (2.46)}}$$

O,

$$s = 6 \quad (2.47)$$

siendo éste es el máximo número de grados de libertad para un cuerpo rígido en el espacio. Entonces,

Se necesitan 6 coordenadas para especificar la configuración de cualquier cuerpo rígido en el espacio, las cuales corresponden, en general, con las tres coordenadas de su centro de masa (o las de cualquier otro de sus puntos) más tres ángulos (que pueden ser los ángulos de Euler) que permitan dar su orientación en el espacio.

Véase el apéndice A.8 para una biografía resumida de Euler. Evidentemente, si sobre el cuerpo rígido existen $K^{(h)}$ ligaduras holónomas adicionales y distintas a las (2.30) debidas a la condición de rigidez, el número de grados de libertad será $K^{(h)}$ menor que 6 por lo que se puede escribir,

$$s = 6 - K^{(h)} \quad (2.48)$$

que son los grados de libertad configuracionales.

Para el caso de un cuerpo rígido plano en su propio plano sobre el cual actúan $K^{(h)}$ ligaduras adicionales y distintas a las impuestas por la condición de rigidez se puede mostrar, al hacer un análisis similar al anterior, que el número de grados de libertad viene dado por,

$$s = 3 - K^{(h)} \quad (2.49)$$

perdiéndose un grado de libertad de traslación y dos de rotación. Estos son los grados de libertad configuracionales.

2.4.2.4 Ejemplos de ligaduras holónomas en cuerpos rígidos

A continuación se presentan algunos ejemplos de ligaduras holónomas en cuerpos rígidos:

EJEMPLO 2.12

Cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene.

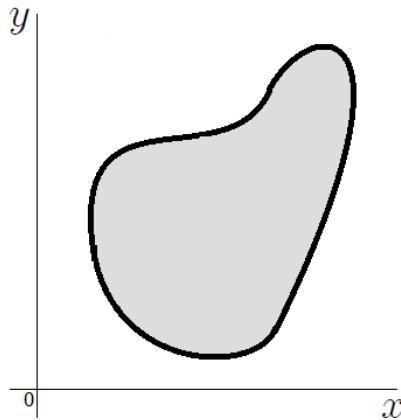


Figura 2.19: Cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene.

Este caso se muestra en la figura 2.19. Aquí no se tienen ligaduras adicionales a las establecidas por la condición de rigidez de manera que $K^{(h)} = 0$. Por lo tanto, según (2.49), el número de grados de libertad s viene dado por,

$$s = 3 - K^{(h)} = 3 - 0 = 3 \quad (2.50)$$

poseyendo así 3 grados de libertad: movimiento vertical como se muestra en la figura 2.20a, movimiento horizontal como se muestra en la figura 2.20b y rotación en su propio plano como se muestra en la figura 2.20(c).

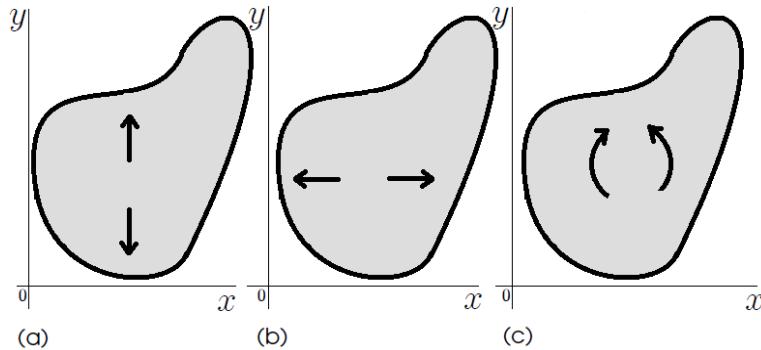


Figura 2.20: Los 3 grados de libertad de un cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene.

EJEMPLO 2.13

Cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene, con un punto fijo.

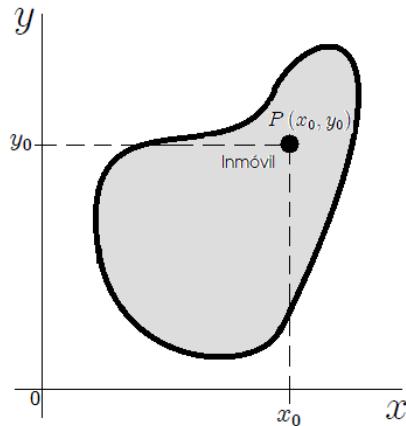


Figura 2.21: Cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene, con un punto fijo.

La figura 2.21 muestra al cuerpo rígido. Aquí se tienen las $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas esclerónomas,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_o \Rightarrow f_1^{(h)} = x - x_o = 0 \\ y = y_o \Rightarrow f_2^{(h)} = y - y_o = 0 \end{array} \right. , \text{ que posicionan e inmovilizan al punto } P(x_o, y_o) \quad (2.51)$$

donde x_o y y_o son constantes haciendo inmóvil al punto $P(x_o, y_o)$. Por lo tanto, según (2.49), el número de grados de libertad s viene dado por,

$$s = 3 - K^{(h)} = 3 - 2 = 1 \quad (2.52)$$

entonces posee 1 grado de libertad: giro en el plano respecto del punto $P(x_0, y_0)$ como se muestra en la figura 2.22.

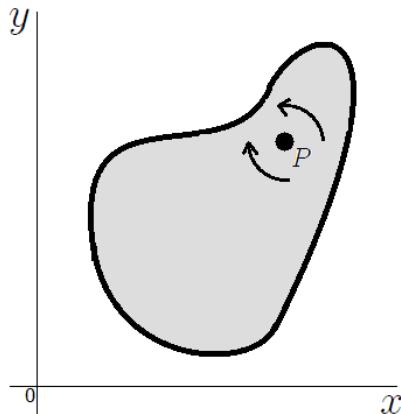


Figura 2.22: El único grado de libertad de un cuerpo rígido plano, en el plano que lo contiene, con un punto fijo.

EJEMPLO 2.14

Dos cuerpos rígidos planos, en el mismo plano que los contiene, con un punto móvil común.

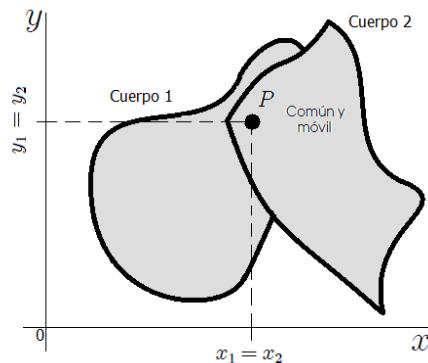


Figura 2.23: Dos cuerpos rígidos planos, en el mismo plano que los contiene, con un punto móvil común.

Este caso se muestra en la figura 2.23. Aquí se tienen las $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \Rightarrow f_1^{(h)} = x_1 - x_2 = 0 \\ y_1 = y_2 \Rightarrow f_2^{(h)} = y_1 - y_2 = 0 \end{array} \right. , \text{que hace que el punto } P(x_1, y_1) \text{ del} \\ \text{cuerpo 1 y el } P(x_2, y_2) \text{ del cuerpo 2 estén en el mismo lugar y comunes} \\ \text{a ambos.} \quad (2.53)$$

donde los subíndices en las coordenadas indican el cuerpo al cual pertenecen. De esta manera según (2.49) el número de grados de libertad s es,

$$s = \underbrace{3 + 3}_{3 \text{ de cada uno}} - K^{(h)} = 6 - 2 = 4 \quad (2.54)$$

por lo tanto el sistema posee 4 grados de libertad: movimiento vertical como se muestra en la figura 2.24a, movimiento horizontal como se muestra en la figura 2.24b, rotación en el plano del cuerpo 1 como se muestra en la figura 2.24(c) y rotación en el plano del cuerpo 2 como se muestra en la figura 2.24(d).

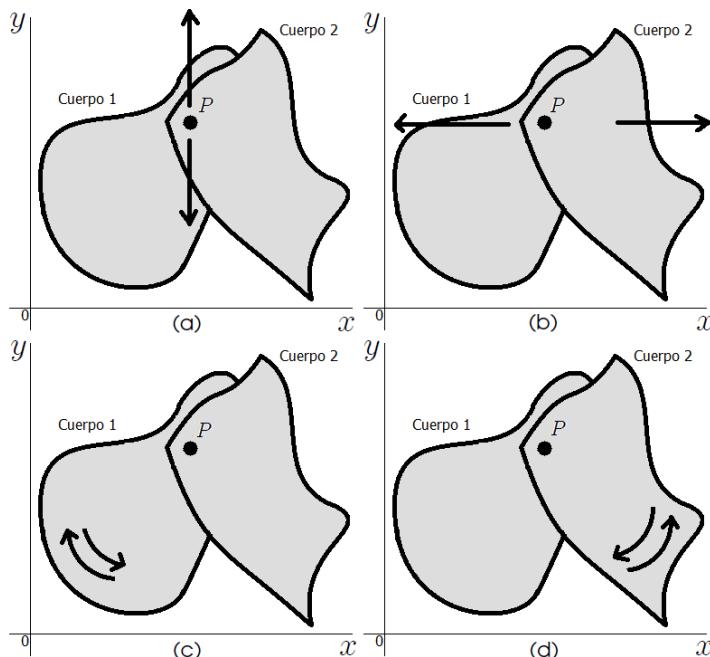


Figura 2.24: Los 4 grados de libertad de dos cuerpos rígidos planos, en el mismo plano que los contiene, con un punto común.

2.4.3 Ligaduras No-Holónomas y Semi-Holónomas

Como se mencionó antes, en el presente texto sólo se considerarán ligaduras no-holónomas y semi-holónomas del tipo (2.14),

$$f_l \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ y } l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K}$$

Nótese que se ha usado \mathcal{K} en vez de $K^{(h)}$ o K^{nh} para indicar el número total de ellas. Se usará \mathcal{K} mientras no se sepa si son integrables o no.

De estas ligaduras se puede afirmar que:

1. Representan ligaduras no-holónomas cuando no son integrables y, en caso contrario, representan ligaduras semi-holónomas.
2. En el caso de ser ligaduras no-holónomas, conforman un sistema no integrable de $\mathcal{K} = K^{(nh)}$ ecuaciones diferenciales lineales en las velocidades $\dot{\vec{r}}_i$,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(nh)} \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dot{\vec{r}}_3, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t \right) = 0 \\ f_2^{(nh)} \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dot{\vec{r}}_3, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t \right) = 0 \\ f_3^{(nh)} \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dot{\vec{r}}_3, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t \right) = 0 \\ \vdots \\ f_{K^{(nh)}}^{(nh)} \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dot{\vec{r}}_3, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t \right) = 0 \end{array} \right.$$

Cuando en un sistema sólo están presentes este tipo de ligaduras, se tendrán $3N$ coordenadas independientes pero habrán $K^{(nh)}$ velocidades dependientes, ya que este tipo de ligaduras hace dependientes las velocidades y no a las coordenadas.

3. En el caso de ser ligaduras semi-holónomas, conforman un sistema integrable de $\mathcal{K} = K^{(h)}$ ecuaciones diferenciales lineales en las velocidades $\dot{\vec{r}}_i$ pudiéndose así encontrar relaciones algebraicas entre las coordenadas (desaparecen todas las derivadas al ser integradas).
4. Imponen restricciones sobre las velocidades $\dot{\vec{r}}_i$ posibles o permitidas de las partículas del sistema.

Se llama *Sistema No-Holónico* a aquél sistema donde al menos una de las ligaduras presentes es no-holónoma.

En un sistema no-holónico de N partículas donde existen $K^{(h)}$ ligaduras holónomas y $K^{(nh)}$ ligaduras no-holónomas, el número de grados de libertad s viene dado por,

$$s = 3N - K^{(h)} - K^{(nh)} \quad (2.55)$$

A estos grados de libertad se les denominan *Grados de Libertad Cinemáticos* porque representan el número de desplazamientos independientes que son requeridos para que, junto con las ecuaciones de ligadura, (holónomas y no-holónomas) especifiquen inequívocamente un desplazamiento general de un sistema de partículas dado.

Para un cuerpo rígido en el espacio los grados de libertad cinemáticos vendrán dados por,

$$s = 6 - K^{(h)} - K^{(nh)} \quad (2.56)$$

y para el caso de un cuerpo rígido plano en su propio vendrán dados por,

$$s = 3 - K^{(h)} - K^{(nh)} \quad (2.57)$$

Póngase ahora atención en las ligaduras (2.17). Estas ligaduras tienen la forma diferencial general,

$$f_l^{(d)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = \sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) d\vec{r}_j + B_l (\vec{r}_i, t) dt = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} \quad (2.58)$$

donde (*d*) se refiere a que las ligaduras están escritas en la forma de un diferencial y \mathcal{K} , como antes, es el número total de ellas si no se sabe sin son integrables o no. Cuando una ligadura está expresada de esta manera se dice que está escrita en *Forma Diferencial* o en *Forma Pfaffiana*[¶].

De las ligaduras (2.58) se puede afirmar que:

1. Representan un caso menos general de las ligaduras (2.14).
2. Igualmente pueden ser semi-holónomas o no-holónomas.
3. Los coeficientes A_{lj} y B_l son funciones dadas que dependen, en general, de los vectores de posición \vec{r}_i y del tiempo t .
4. Forman el sistema de \mathcal{K} ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(d)} = A_{11} d\vec{r}_1 + A_{12} d\vec{r}_2 + A_{13} d\vec{r}_3 + \dots + A_{1N} d\vec{r}_N + B_1 dt = 0 \\ f_2^{(d)} = A_{21} d\vec{r}_1 + A_{22} d\vec{r}_2 + A_{23} d\vec{r}_3 + \dots + A_{2N} d\vec{r}_N + B_2 dt = 0 \\ f_3^{(d)} = A_{31} d\vec{r}_1 + A_{32} d\vec{r}_2 + A_{33} d\vec{r}_3 + \dots + A_{3N} d\vec{r}_N + B_3 dt = 0 \\ \vdots \\ f_{\mathcal{K}}^{(d)} = A_{\mathcal{K}1} d\vec{r}_1 + A_{\mathcal{K}2} d\vec{r}_2 + A_{\mathcal{K}3} d\vec{r}_3 + \dots + A_{\mathcal{K}N} d\vec{r}_N + B_{\mathcal{K}} dt = 0 \end{array} \right.$$

[¶]Se dice que una ligadura está escrita en la forma Pfaffiana cuando está expresada en forma de diferenciales. Véase apéndice A.9 para una biografía resumida de Pfaff.

5. En el caso no integrable constituyen ligaduras no-holónomas. En estos casos serán denotadas como $f_l^{(nhd)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0$, donde (nhd) significa que las ligaduras son no-holónomas escritas en forma de diferenciales. El número total de ellas será entonces $\mathcal{K} = K^{(nh)}$.
6. En el caso integrable constituyen ligaduras semi-holónomas exactamente del mismo tipo (2.17), es decir, con $A_{lj} = \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial \vec{r}_j}$ y $B_l = \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial t}$. En estos casos serán denotadas como $f_l^{(shd)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0$, donde (shd) significa que la ligadura es semi-holónoma escrita en forma de diferencial. El número total de ellas será entonces $\mathcal{K} = K^{(h)}$.
7. Imponen restricciones sobre los desplazamientos $d\vec{r}_j$ posibles o permitidos de las partículas del sistema. A estos desplazamientos $d\vec{r}_j$ (presentes en la sumatoria) se les denominan *Desplazamientos Compatibles con las Ligaduras*.

Es obvio que, al observar (2.18), las ligaduras (2.58) también pueden ser escritas como,

$$f_l^{(D)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = \sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \dot{\vec{r}}_j + B_l (\vec{r}_i, t) = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} \quad (2.59)$$

donde (D) se refiere a que la ligadura está escrita en forma de derivada. Reciben el nombre de ligaduras en *Forma de Velocidad*.

De las ligaduras (2.59) se puede afirmar que:

1. Son equivalentes a las ligaduras (89).
2. Forman un sistema de \mathcal{K} ecuaciones lineales en las velocidades $\dot{\vec{r}}_i$,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(D)} = A_{11} \dot{\vec{r}}_1 + A_{12} \dot{\vec{r}}_2 + A_{13} \dot{\vec{r}}_3 + \dots + A_{1N} \dot{\vec{r}}_N + B_1 = 0 \\ f_2^{(D)} = A_{21} \dot{\vec{r}}_1 + A_{22} \dot{\vec{r}}_2 + A_{23} \dot{\vec{r}}_3 + \dots + A_{2N} \dot{\vec{r}}_N + B_2 = 0 \\ f_3^{(D)} = A_{31} \dot{\vec{r}}_1 + A_{32} \dot{\vec{r}}_2 + A_{33} \dot{\vec{r}}_3 + \dots + A_{3N} \dot{\vec{r}}_N + B_3 = 0 \\ \vdots \\ f_{\mathcal{K}}^{(D)} = A_{\mathcal{K}1} \dot{\vec{r}}_1 + A_{\mathcal{K}2} \dot{\vec{r}}_2 + A_{\mathcal{K}3} \dot{\vec{r}}_3 + \dots + A_{\mathcal{K}N} \dot{\vec{r}}_N + B_{\mathcal{K}} = 0 \end{array} \right.$$

3. En el caso no integrable constituyen ligaduras no-holónomas. En estos casos serán denotadas como $f_l^{(nhD)} \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0$, donde (nhD) significa que las ligaduras son

no-holónomas escritas en forma de derivada. El número total de ellas será entonces $\mathcal{K} = K^{(nh)}$.

4. En el caso integrable constituyen ligaduras semi-holónomas exactamente del mismo tipo (2.18), es decir, con $A_{lj} = \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial \vec{r}_j}$ y $B_l = \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial t}$. En estos casos serán denominadas como $f_l^{(shD)}\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t\right) = 0$, donde (*shD*) significa que las ligaduras son semi-holónomas escrita en forma de derivada. El número total de ellas será entonces $\mathcal{K} = K^{(h)}$.
5. Imponen restricciones sobre las velocidades $\dot{\vec{r}}_j$ posibles o permitidas de las partículas del sistema. A estas velocidades $\dot{\vec{r}}_j$ (presentes en la sumatoria) se les denominan *Velocidades Compatibles con las Ligaduras*.

Las ligaduras del tipo (2.58) o (2.59) son muy frecuentemente encontradas en los sistemas mecánicos y, por esta razón, constituirán las ligaduras no-holónomas y semi-holónomas más generales que serán consideradas en el presente texto.

Para el caso de ligaduras no-holónomas y semi-holónomas esclerónomas las ligaduras (2.58) y (2.59) se convierten respectivamente en,

$$f_l^{(d)}\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum_{j=1}^N A_{lj}(\vec{r}_i) d\vec{r}_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} \quad (2.60)$$

$$f_l^{(D)}\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\right) = \sum_{j=1}^N A_{lj}(\vec{r}_i) \dot{\vec{r}}_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} \quad (2.61)$$

En algunos textos se hace una distinción adicional para este tipo de ligaduras,

Si en (2.58) $B_l = 0$ se dice que es *Catastática* y *Acatástática* si $B_l \neq 0$.

En una ligadura catastática los A_{lj} pueden ser funciones del tiempo t . Si todas las ligaduras en un sistema son catastáticas, se dice que el sistema es catastático. Las ligaduras (2.58) implican que la condición de equilibrio estático $\dot{\vec{r}}_j = \vec{0}, j = 1, 2, 3, \dots, N$ es posible sólo si el sistema es catastático. Todo esto es válido para las ligaduras (2.59) por ser equivalentes a las (2.58).

EJEMPLO 2.15**Algunas ligaduras no-holónomas unilaterales.**

Como ejemplo de ligaduras no-holónomas se tienen los siguientes casos:

1. Las ligaduras representadas por las expresiones (2.7) y (2.8) ya que son unilaterales.
2. Una partícula de masa m obligada a moverse en el interior de un paralelepípedo de dimensiones d_1, d_2 y d_3 (ver figura 2.25).

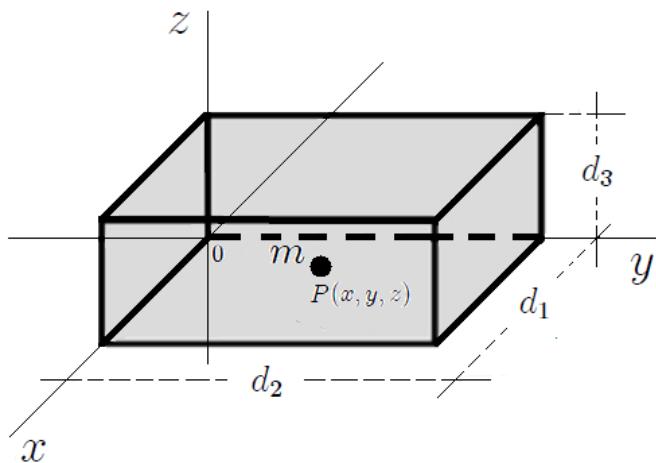


Figura 2.25: Partícula de masa m obligada a moverse en el interior de un paralelepípedo de dimensiones d_1, d_2 y d_3 .

Las coordenadas (x, y, z) de la posición de la partícula de masa m deben satisfacer las inecuaciones,

$$\begin{cases} x < d_1 \Rightarrow f_1^{(nh)} = x - d_1 < 0 \\ y < d_2 \Rightarrow f_2^{(nh)} = y - d_2 < 0 \\ z < d_3 \Rightarrow f_3^{(nh)} = z - d_3 < 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Se trata de $K^{(nh)} = 3$ ligaduras no-holónomas. Para determinar la posición de la partícula son necesarias 3 coordenadas (x, y, z) ya que las ligaduras no-holónomas no reducen el número de ellas.

EJEMPLO 2.16**Ligadura no-holónoma bilateral.**

En la figura 2.26 se muestra un sistema formado por un disco homogéneo de masa M y radio R que rueda sin resbalar sobre el plano horizontal xy , haciendo contacto

con éste en el punto P . El movimiento lo realiza de modo que el plano que lo contiene permanece siempre perpendicular al plano xy . Encuentre usando coordenadas Cartesianas: (a) el número de ligaduras presentes, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s .

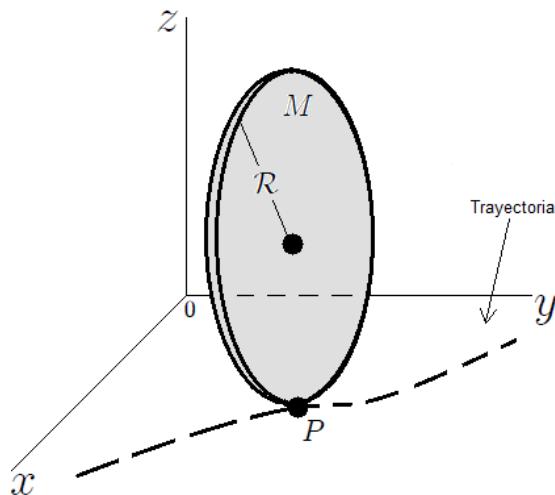


Figura 2.26: Sistema formado por un disco homogéneo de masa M y radio R que rueda sin resbalar sobre el plano horizontal xy .

SOLUCION: como el disco es un sólido rígido, se usarán las coordenadas de su centro de masa x_{cm} , y_{cm} y z_{cm} (que coinciden con las de su centro geométrico C por ser homogéneo) para ubicarlo y los ángulos α , β y γ para indicar sus tres posibles movimientos de rotación (orientaciones), es decir, 6 cantidades (grados de libertad del sólido rígido libre) como se muestra en la figura 2.27. En esta figura L_1 es un eje que pasa por el punto de contacto P del disco con la superficie sobre la cual rueda y paralelo al plano que contiene al disco; el eje L_2 es perpendicular a L_1 y está contenido en el plano del disco; por último, el L_3 es un eje perpendicular al plano xy (por ende paralelo al eje z). En base a lo anterior, el ángulo α es el que forma el eje L_1 con el eje x (medido en sentido antihorario), el ángulo β es el de rotación del disco y γ es el ángulo entre el eje L_2 y el eje vertical L_3 , medido a partir de este último.

De esta manera las coordenadas del disco son,

$$\text{Disco} \rightarrow \begin{cases} \text{Centro de masa} \rightarrow (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) \\ \text{Angulos de orientación} \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \end{cases} \quad (2.63)$$

(a) En el sistema mecánico dado existen un total de $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas

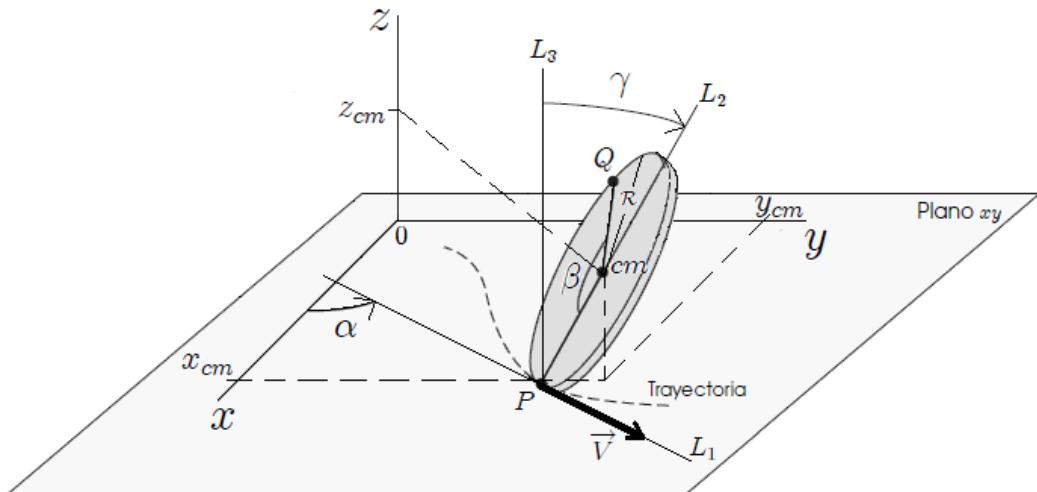


Figura 2.27: Posición del disco en coordenadas Cartesianas dadas por la posición de su centro de masa y su orientación dada por los ángulos α , β y γ .

esclerónomas y $K^{(nh)} = 2$ ligaduras no-holónomas esclerónomas bilaterales,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{cm} = R \Rightarrow f_1^{(h)} = z_{cm} - R = 0, \text{ que mantiene al centro de masa a una distancia constante } R \text{ del plano } xy. \\ \gamma = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = \gamma = 0, \text{ que mantiene al disco perpendicular al plano } xy. \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{cm} = R \dot{\beta} \operatorname{Sen} \alpha \Rightarrow f_3^{(nh)} = \dot{x}_{cm} - R \operatorname{Sen} \alpha \dot{\beta} = 0 \\ \dot{y}_{cm} = R \dot{\beta} \operatorname{Cos} \alpha \Rightarrow f_4^{(nh)} = \dot{y}_{cm} - R \operatorname{Cos} \alpha \dot{\beta} = 0 \end{array} \right. , \text{ que son consecuencia de que el disco no resbala.} \end{array} \right. \quad (2.64)$$

por lo que el sistema es no-holónomo esclerónico.

Las ligaduras $f_1^{(h)}$ y $f_2^{(h)}$ son fáciles de determinar. Las ligaduras no-holónomas esclerónomas bilaterales $f_3^{(nh)}$ y $f_4^{(nh)}$ son consecuencias de la **condición de rodadura sin deslizamiento**, es decir, de que el disco ruede sin resbalar.

La **condición de rodadura sin deslizamiento** impone una ligadura cinemática que se expresa mediante el hecho de que el punto de contacto P entre el disco y el plano xy tenga velocidad nula.

Debido a la anterior condición se tiene que la velocidad \vec{v} del disco se hace igual a la velocidad \vec{V} de su centro de masa de manera que,

$$V = v = R \dot{\beta} \quad (2.65)$$

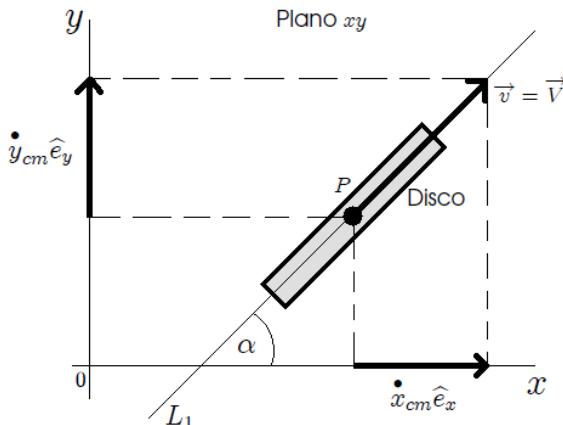


Figura 2.28: Vista desde la parte superior del movimiento del disco. Componentes de la velocidad \vec{v} del disco.

Por otro lado, las componentes de la velocidad \vec{v} del disco vienen dadas por (ver figura 2.28),

$$\begin{aligned}\dot{x}_{cm} &= v \operatorname{Sen} \alpha \\ \dot{y}_{cm} &= v \operatorname{Cos} \alpha\end{aligned}$$

que en virtud de (2.65) se convierten en,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3^{(nhD)} = \dot{x}_{cm} - \mathcal{R} \dot{\beta} \operatorname{Sen} \alpha = 0 \\ f_4^{(nhD)} = \dot{y}_{cm} - \mathcal{R} \dot{\beta} \operatorname{Cos} \alpha = 0 \end{array} \right. \quad (2.66)$$

que constituyen las ligaduras $f_3^{(nh)}$ y $f_4^{(nh)}$ respectivamente y que evidentemente son ligaduras no-holónomas escritas en forma de derivada (2.59). Estas ligaduras también pueden ser escritas en la forma diferencial (2.58) como,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3^{(nhd)} = dx_{cm} - \mathcal{R} \operatorname{Sen} \alpha d\beta = 0 \\ f_4^{(nhd)} = dy_{cm} - \mathcal{R} \operatorname{Cos} \alpha d\beta = 0 \end{array} \right. \quad (2.67)$$

No pueden ser integradas sin resolver, de hecho, el problema completo. Lo anterior trae como consecuencia que estas ligaduras no puedan ser reducidas a la forma (2.13).

(b) Como existen $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas y $K^{(nh)} = 2$ ligaduras no-holónomas, entonces según (2.48) el número de grados de libertad configuracionales es,

$$s = 6 - K^{(h)} = 6 - 2 = 4 \quad (2.68)$$

y según (2.56) el número de grados de libertad cinemáticos es,

$$s = 6 - K^{(h)} - K^{(nh)} = 6 - 2 - 2 = 2 \quad (2.69)$$

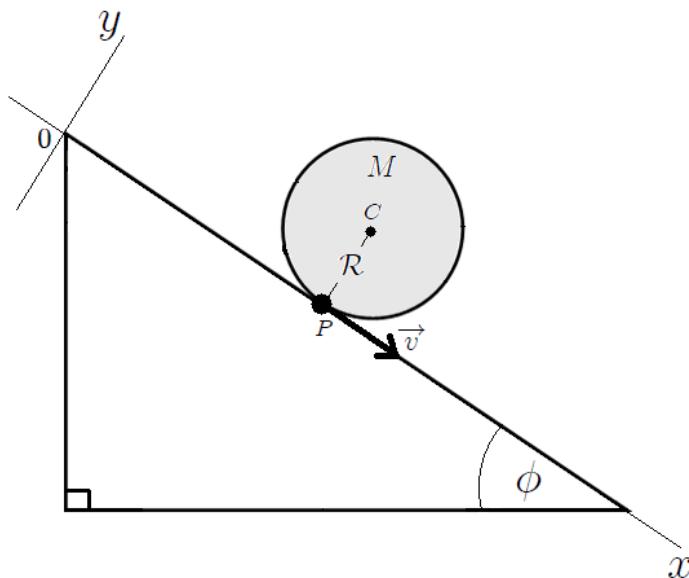
EJEMPLO 2.17**Ligadura semi-holónoma.**

Figura 2.29: Movimiento de un disco sólido homogéneo de masa M y radio R que se desplaza sin resbalar sobre un plano inclinado un ángulo ϕ .

En la figura 2.29 se muestra el movimiento en dos dimensiones de un disco sólido homogéneo de radio R y de masa M que se desplaza sobre un plano inclinado un ángulo ϕ y que hace contacto con éste en el punto P . Encuentre usando coordenadas Cartesianas: (a) el número de ligaduras presentes, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s .

SOLUCION: se seguirán las mismas consideraciones hechas en el anterior ejemplo. De esta manera las coordenadas del disco son,

$$\text{Disco} \rightarrow \begin{cases} \text{Centro de masa} \rightarrow (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) \\ \text{Angulos de orientación} \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \end{cases} \quad (2.70)$$

como se muestra en la figura 2.30.

(a) En el sistema mecánico dado existen un total de $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas

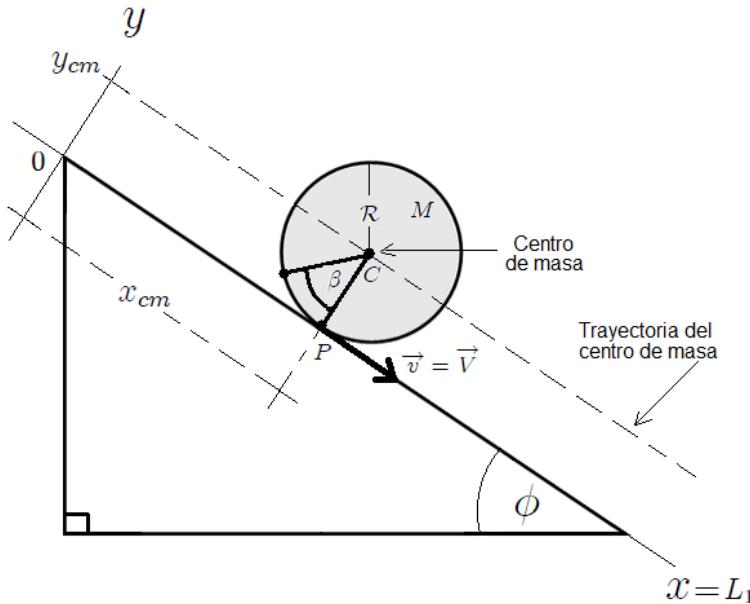


Figura 2.30: En coordenadas Cartesianas, movimiento de un disco sólido homogéneo de masa M y radio R que se desplaza sin resbalar sobre un plano inclinado un ángulo ϕ .

esclerónomas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{cm} = R\dot{\beta} \Rightarrow f_1 = \dot{x}_{cm} - R\dot{\beta} = 0, \text{ que introduce la rotación del disco. Esta ligadura proviene del hecho de que el disco no resbala, siendo así la velocidad de rotación igual a la velocidad con que se desplaza sobre el plano inclinado.} \\ y_{cm} = R \Rightarrow f_2^{(h)} = y_{cm} - R = 0, \text{ que es la ecuación de la trayectoria del centro de masa, obligando al disco a moverse sobre el plano inclinado.} \\ z_{cm} = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = z_{cm} = 0, \text{ que limita el movimiento del centro de masa al plano } xy. \\ \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = \alpha = 0 \\ \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_5^{(h)} = \gamma - \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right. , \text{ que hacen paralelo al plano } xy \text{ al plano que contiene al disco.} \\ \text{en conjunto limitan el movimiento del disco al plano } xy \end{array} \right. \quad (2.71)$$

La ligadura f_1 se determina a partir de la condición de rodadura sin deslizamiento ya aplicada en el ejemplo anterior. Debido a esta condición la velocidad \vec{v} del disco se hace igual a la velocidad \vec{V} del centro de masa del mismo. Como por razones obvias la velocidad \vec{v} sólo tiene componente en el eje x se tiene entonces,

$$v = V = \dot{x}_{cm} = R\dot{\beta} = 0 \quad (2.72)$$

que es una ligadura que puede ser escrita como,

$$f_1^{(shD)} = \dot{x}_{cm} - \mathcal{R}\dot{\beta} = 0 \quad (2.73)$$

observándose que es del tipo (2.59) y que es integrable, constituyendo una ligadura semi-holónoma en forma de derivada. Puede ser escrita en forma de diferencial como,

$$f_1^{(shd)} = dx_{cm} - \mathcal{R}d\beta = 0 \quad (2.74)$$

La integración de esta ligadura resulta en,

$$f_1^{(h)} = x_{cm} - \mathcal{R}\beta = 0 \quad (2.75)$$

que es una ligadura holónoma.

Las ligaduras $f_2^{(h)}$ a la $f_5^{(h)}$ son realmente muy sencillas de determinar. De todo lo anterior se puede decir que el sistema dado es holónomo esclerónico.

(b) Según (2.48) y como existen $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas entonces el sistema tiene,

$$s = 6 - K^{(h)} = 6 - 5 = 1 \quad (2.76)$$

grado de libertad configuracional.

Por último, un aspecto que debe ser tomado en consideración sobre las ligaduras es que:

A pequeñas escalas (escala de partículas) los sistemas interactúan en base a fuerzas y al describir el movimiento a esa escala no se requiere el uso de ligaduras. Las ligaduras aparecen a escala macroscópica como idealizaciones matemáticas de partes del sistema que no se conocen o no se quieren tratar a detalle (como superficies o cuerdas). Imponer ligaduras es un método para tratar con agentes externos que aplican fuerzas, inicialmente desconocidas, al sistema. Generalmente sólo se conoce el efecto geométrico de la acción combinada de estos agentes con las fuerzas conocidas.

2.5 Fuerza de ligadura y fuerza aplicada

La introducción de ligaduras en un sistema lleva al concepto de *Fuerza de Ligadura* $\vec{F}^{(lig)}$,

Las *Fuerzas de Ligadura* son las que aparecen espontáneamente al establecer una ligadura y aseguran su cumplimiento. Actúan tanto si el sistema está en reposo o si está en movimiento. También se les denominan *Fuerzas de Reacción*.

El trabajo realizado por fuerzas de ligadura provenientes de ligaduras holónomas esclerónomas (independientes del tiempo) es nulo para cualquier desplazamiento posible. En el caso de las provenientes de ligaduras no-holónomas, en general, realizan trabajo.

En general, las fuerzas de ligadura son desconocidas a priori a diferencia de las llamadas *Fuerzas Aplicadas*.

Las *Fuerzas Aplicadas* son aquellas determinadas independientemente de cualquier otra fuerza, conociendo sólo las posiciones (a veces también las velocidades) de las partículas.

EJEMPLO 2.18

Algunas fuerzas aplicadas.

1. La fuerza que ejerce el resorte sobre una de las partículas en un sistema de dos partículas unidas por un resorte es una fuerza aplicada que, como se sabe, depende de la posición de ambas partículas (ver figura 2.31).
2. El peso, la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada, la fuerza magnética (que depende de la velocidad), etc.

EJEMPLO 2.19

Algunas fuerzas de ligadura.

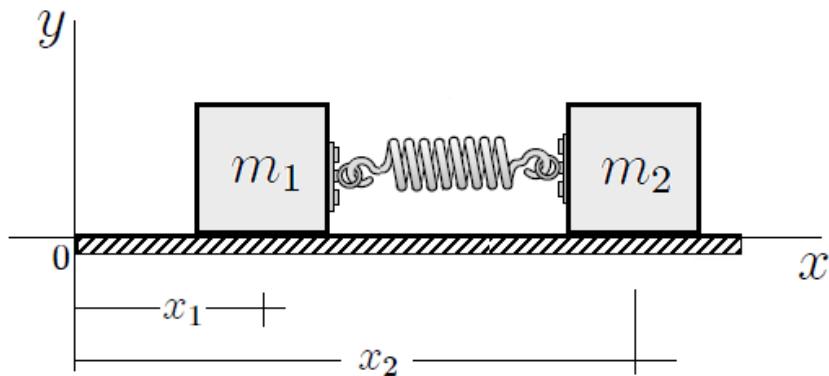


Figura 2.31: Dos masas m_1 y m_2 acopladas por un resorte.

1. La fuerza que ejerce un riel que guía el movimiento de una partícula es una fuerza de ligadura que no puede ser determinada sin conocer las otras fuerzas que actúan.
2. La fuerza de reacción normal ejercida sobre una partícula por una superficie lisa sobre la cual se mueve.
3. La tensión o compresión existente en una varilla rígida que conecta dos masas de un sistema.
4. La tensión de la cuerda en un péndulo simple y la fuerza normal que ejerce un plano horizontal o inclinado sobre una partícula que se mueve sobre él.

Una condición adicional que se le impone a las fuerzas de ligadura o de reacción es que puedan ser tan grandes en magnitud como fuera necesario para mantener la ligadura, lo que es una idealización de las ligaduras reales ya que los hilos se estiran, las varillas se doblan o se quiebran, etc., pero se trabaja dentro de los límites en lo que esto no pasa o su efecto puede despreciarse.

Un problema con lo dicho anteriormente lo presentan las fuerzas de rozamiento:

Si las condiciones del problema son tales que el rozamiento es suficiente para impedir que haya deslizamiento (rozamiento estático), la fuerza de rozamiento entonces se considera de ligadura. De haber deslizamiento (rozamiento cinético), ya no puede ser considerada como fuerza de ligadura. En este caso se considera al rozamiento como una *Fuerza Aplicada Anómala*, ya que no cumple con ser independiente de las otras fuerzas.

Aquí se puede ahora introducir una nueva clasificación de las ligaduras, en este caso de las geométricas:

2.5.1 Ligaduras lisas o ideales

Las *Ligaduras Lisas* o *Ligaduras Ideales* son aquellas donde no está presente el rozamiento (ver figura 2.32a). En este caso, la ligadura no reacciona contra las fuerzas tangentes a ella y, por lo tanto, la fuerza de ligadura $\vec{F}^{(lig)}$ es siempre normal a la ligadura misma.

Lo anterior se puede escribir matemáticamente como,

$$\vec{F}^{(lig)} = F_n^{(lig)} \hat{n} \quad (2.77)$$

donde $F_n^{(lig)}$ es la componente normal de $\vec{F}^{(lig)}$ y \hat{n} un versor normal a la ligadura. Aquí,

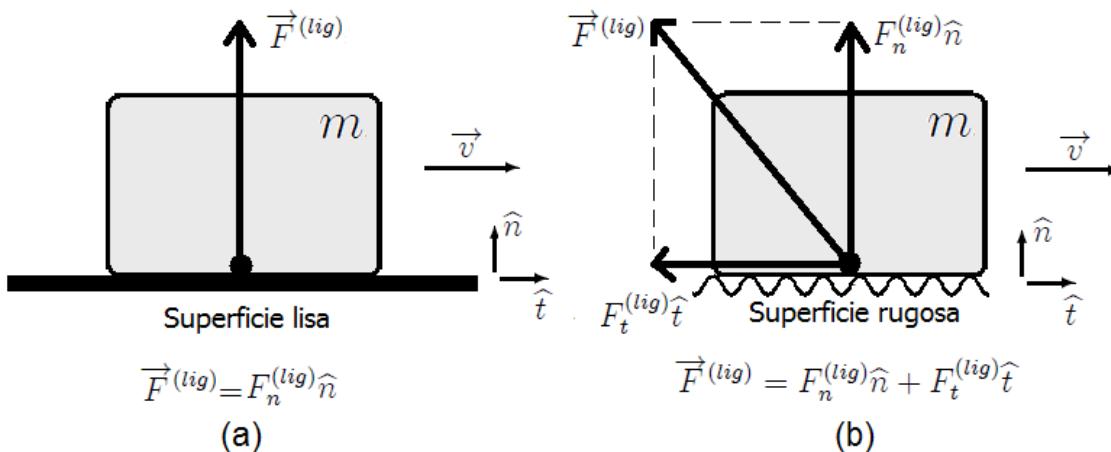


Figura 2.32: (a) Ligadura lisa y (b).ligadura rugosa Para el movimiento permitido por la ligadura (deslizamiento horizontal) la reacción lisa no realiza trabajo, mientras que en el caso rugoso sí.

se desconoce el módulo de $\vec{F}^{(lig)}$ y se conoce su dirección. La fuerza $\vec{F}_n^{(lig)} = F_n^{(lig)} \hat{n}$ es la que comúnmente se denomina *Fuerza Normal* \vec{N} y es la necesaria para compensar la componente normal de la resultante de las fuerzas aplicadas.

2.5.2 Ligaduras rugosas

Las *Ligaduras Rugosas* son aquellas donde está presente el rozamiento (ver figura 2.32b). Aquí, debido al rozamiento, la ligadura reacciona contra las fuerzas tangentes a ella y, por lo tanto, la fuerza de ligadura $\vec{F}^{(lig)}$ ya no es normal a la ligadura misma.

Lo anterior se puede escribir matemáticamente como,

$$\vec{F}^{(lig)} = F_n^{(lig)} \hat{n} + F_t^{(lig)} \hat{t} \quad (2.78)$$

donde $F_t^{(lig)}$ es la componente tangencial de $\vec{F}^{(lig)}$ y \hat{t} un versor tangencial a la ligadura. La fuerza $\vec{F}_t^{(lig)} = F_t^{(lig)} \hat{t}$ es la que comúnmente se denomina *Fuerza de Rozamiento* o *Fuerza de Fricción* \vec{F}_f y es la que se debe al rozamiento entre las superficies en contacto.

A manera de resumen, las ligaduras que serán consideradas en el presente texto son las siguientes:

Ligaduras holónomas	$\begin{cases} \textbf{Reónomas} & \left\{ \begin{array}{l} f_l^{(h)} (\vec{r}_i, t) = 0 \\ i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ y } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \end{array} \right. \\ \textbf{Esclerónomas} & \left\{ \begin{array}{l} f_l^{(h)} (\vec{r}_i) = 0 \\ i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ y } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \end{array} \right. \end{cases}$
Ligaduras no-holónomas (no integrables)	$\begin{cases} \textbf{Reónomas} & \left\{ \begin{array}{l} f_l \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t \right) = 0 \\ i = 1, 2, 3, \dots, N \\ l = 1, 2, 3, \dots, K^{(nh)} \end{array} \right. \\ \textbf{Esclerónomas} & \left\{ \begin{array}{l} f_l \left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i \right) = 0 \\ i = 1, 2, 3, \dots, N \\ l = 1, 2, 3, \dots, K^{(nh)} \end{array} \right. \end{cases}$

Ligaduras semi-holónomas (integrables) $A_{lj} = \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial \vec{r}_j}$ $B_l = \frac{\partial f_l^{(h)}(\vec{r}_i, t)}{\partial t}$	Reónomas $f_l\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t\right) = 0$ $i = 1, 2, 3, \dots, N$ $l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$	$\sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) d\vec{r}_j + B_l (\vec{r}_i, t) dt = 0$ En forma diferencial (<i>shd</i>)
		$\sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \dot{\vec{r}}_j + B_l (\vec{r}_i, t) = 0$ En forma de derivada (<i>shD</i>)
	Esclerónomas $f_l\left(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i\right) = 0$ $i = 1, 2, 3, \dots, N$ $l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$	$\sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) d\vec{r}_j = 0$ En forma diferencial (<i>shd</i>)
		$\sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \dot{\vec{r}}_j = 0$ En forma de derivada (<i>shD</i>)

2.6 Ejemplos de determinación de ligaduras y grados de libertad

EJEMPLO 2.20

La figura 2.33 muestra un sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo de masa despreciable y de longitud constante ℓ . La masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante \vec{v} impuesta, mientras que m_2 permanece en el mismo plano vertical xy . Encuentre usando coordenadas Cartesianas: (a) el número de ligaduras presentes, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s . Suponer que en el instante inicial $t_o = 0$ la posición de m_1 es $x = x_o$.

SOLUCION: las coordenadas de las masas presentes son,

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ m_2 \rightarrow (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \quad (2.79)$$

que son mostradas en la figura 2.33.

(a) Es fácil determinar, a partir del enunciado del ejemplo, que la coordenada x_1 de m_1 viene dada por,

$$x_1 = x_o + vt \quad (2.80)$$

que representa una de las ligaduras presentes en el sistema dado, la cual es holónoma reónoma. En este sistema existen $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas (es fácil encontrarlas a

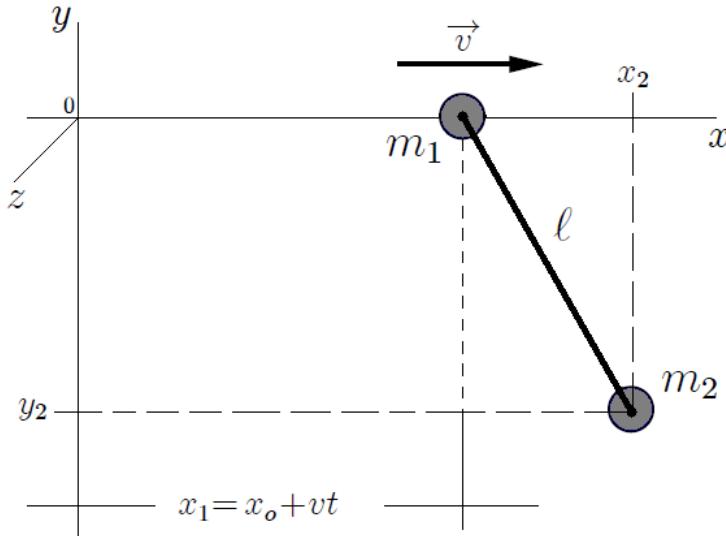


Figura 2.33: En coordenadas Cartesianas, sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo de masa despreciable y de longitud constante ℓ . La masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante \vec{v} impuesta.

partir de un análisis geométrico de la figura dada),

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_o + vt \Rightarrow f_1^{(h)} = x_1 - x_o - vt = 0, \text{ que predetermina el movimiento de } m_1. \\ \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = z_1 = 0 \end{array} , \text{ que fijan a } m_1 \text{ sobre el eje } x. \right. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = z_2 = 0, \text{ fija a } m_2 \text{ sobre el plano } xy. \\ (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = \ell^2 \Rightarrow f_5^{(h)} = (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 - \ell^2 = 0, \text{ que acopla el movimiento de } m_2 \text{ a } m_1 \text{ y es la trayectoria descrita por } m_2 \text{ con respecto a } m_1. \end{array} \right. \quad (2.81)$$

por lo que el sistema dado es holónomo reónomo, pues la ligadura $f_1^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo.

(b) Como existen $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas entonces, a partir de (2.21), el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 5$$

O,

$$s = 1 \quad (2.82)$$

Si, por ejemplo, m_1 no tuviese un movimiento prescrito entonces se podría mover libremente a lo largo del eje x y de esta manera no existiría la ligadura $f_1^{(h)}$, por lo tanto, el sistema tendría 2 grados de libertad.

EJEMPLO 2.21

Resolver el ejemplo anterior pero en coordenadas cilíndricas.

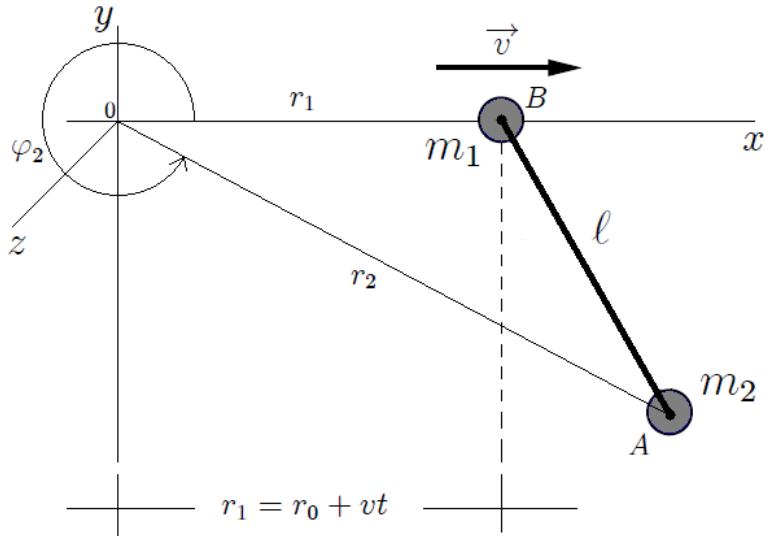


Figura 2.34: En coordenadas cilíndricas, sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo de masa despreciable y de longitud constante ℓ . La masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante \vec{v} impuesta.

SOLUCION: las coordenadas de las masas presentes son,

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow (r_1, \varphi_1, z_1) \\ m_2 \rightarrow (r_2, \varphi_2, z_2) \end{cases} \quad (2.83)$$

que son mostradas en la figura 2.34.

(a) Es fácil encontrar que las $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas quedan escritas ahora como,

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = r_o + vt \Rightarrow f_1^{(h)} = r_1 - r_o - vt = 0, \text{ que predetermina el movimiento de } m_1. \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = \varphi_1 = 0 \\ z_1 = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = z_1 = 0 \end{array} \right., \text{ que fijan a } m_1 \text{ sobre el eje } x. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = z_2 = 0, \text{ fija a } m_2 \text{ sobre el plano } xy. \\ r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi_2 = \ell^2 \Rightarrow f_5^{(h)} = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi_2 - \ell^2 = 0, \text{ que acopla el movimiento de } m_2 \text{ a } m_1. \end{array} \right. \quad (2.84)$$

por lo que el sistema sigue siendo holónomo reónomo ya que la ligadura $f_1^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo. La ligadura $f_1^{(h)}$ se obtiene al aplicar el Teorema del Coseno al triángulo ΔAOB mostrado en la figura 2.34.

(b) Es fácil notar que el número de grados de libertad sigue siendo,

$$s = 1 \quad (2.85)$$

EJEMPLO 2.22

Resolver el ejemplo anterior pero en coordenadas esféricas.

SOLUCION: las coordenadas de las masas presentes son,

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow (r_1, \varphi_1, \theta_1) \\ m_2 \rightarrow (r_2, \varphi_2, \theta_2) \end{cases} \quad (2.86)$$

tomándose con referencia la figura 2.35.

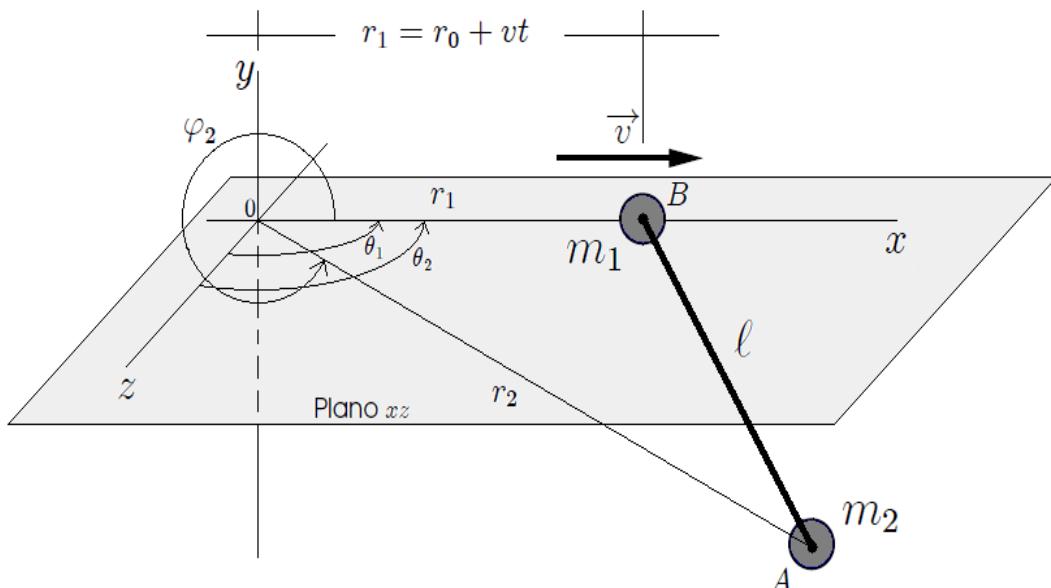


Figura 2.35: En coordenadas esféricas, sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por un hilo de masa despreciable y de longitud constante ℓ . La masa m_1 se mueve a lo largo del eje x con una velocidad constante \vec{v} impuesta.

(a) Es fácil encontrar que las $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas quedan escritas ahora como,

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = r_o + vt \Rightarrow f_1^{(h)} = r_1 - r_o - vt = 0, \text{ que predetermina el movimiento de } m_1. \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = \varphi_1 = 0 \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_3^{(h)} = \theta_1 - \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right. , \text{ que fijan a } m_1 \text{ sobre el eje } x. \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_4^{(h)} = \theta_2 - \frac{\pi}{2} = 0, \text{ fija a } m_2 \text{ sobre el plano } xy. \\ r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi_2 = \ell^2 \Rightarrow f_5^{(h)} = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \varphi_2 - \ell^2 = 0, \text{ que acopla el movimiento de } m_2 \text{ a } m_1. \end{array} \right. \quad (2.87)$$

por lo que el sistema sigue siendo holónomo reónomo ya que la ligadura $f_1^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo.

(b) Es fácil notar que el número de grados de libertad sigue siendo,

$$s = 1$$

(2.88)

Nótese que en los ejemplos 2.20, 2.21 y el presente el número de grados de libertad permanece constante, lo cual era de esperarse por tratarse de mismo sistema. Recuérdese que el número de grados de libertad para un sistema dado debe permanecer constante sea cual sea el conjunto de coordenadas empleado para describir el mismo.

EJEMPLO 2.23

La figura 2.36 muestra un sistema formado por una varilla (de masa despreciable) lisa y fija en la que está ensartada una cuenta de masa m que se mueve libremente por ella. Suponiendo que la posición de la cuenta viene dada por,

$$y = A \operatorname{Sen}(\omega t)$$

donde ω y A son la frecuencia angular y la amplitud del movimiento respectivamente, encuentre usando coordenadas Cartesianas: (a) el número de ligaduras presentes, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s .

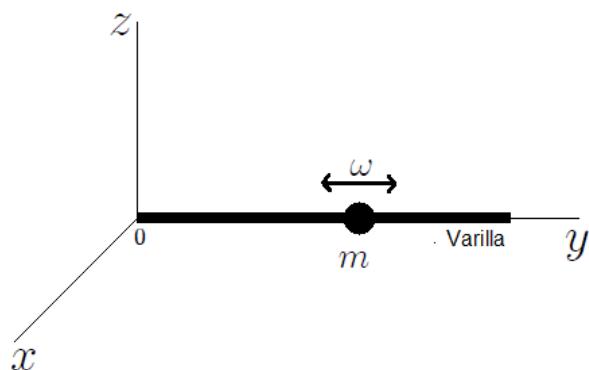


Figura 2.36: En coordenadas Cartesianas, sistema formado por una varilla lisa en la cual está ensartada una cuenta de masa m . La cuenta realiza un movimiento pre-establecido.

SOLUCION: las coordenadas de la partícula presente son,

$$m \rightarrow (x, y, z)$$

(2.89)

que son mostradas en la figura 2.36.

(a) En el sistema dado es fácil determinar que existen $K^{(h)} = 3$ ligaduras holónomas,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = x = 0 \\ z = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z = 0 \end{array} \right. , \text{ que fijan el movimiento de } m \text{ sobre el eje } y. \\ y = A \operatorname{Sen}(\omega t) \Rightarrow f_3^{(h)} = y - A \operatorname{Sen}(\omega t) = 0, \text{ que pre-establece el movimiento de } m. \quad (2.90)$$

por lo que el sistema dado es holónomo reónomo ($f_3^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo t).

(b) Como existen $K^{(h)} = 3$ ligaduras holónomas entonces, a partir de (2.21), el número de grados de libertad s es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 3$$

o,

$$s = 0 \quad (2.91)$$

Este resultado indica que en el sistema dado no existe dinámica alguna, sólo cinemática impuesta por el mecanismo que le impone el movimiento a la partícula.

EJEMPLO 2.24

Resolver el ejemplo anterior pero en coordenadas cilíndricas.

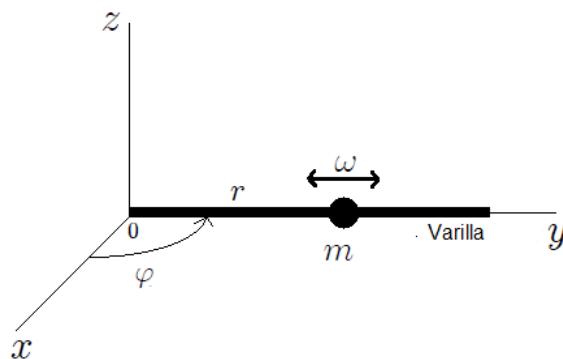


Figura 2.37: En coordenadas cilíndricas, sistema formado por una varilla lisa en la cual está ensartada una cuenta de masa m . La cuenta realiza un movimiento pre-establecido.

SOLUCION: las coordenadas de la masa presente son,

$$m \rightarrow (r, \varphi, z) \quad (2.92)$$

como se muestra en la figura 2.37.

(a) Es fácil encontrar que las $K^{(h)} = 3$ ligaduras holónomas quedan escritas ahora como,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_1^{(h)} = \varphi - \frac{\pi}{2} = 0 \\ z = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z = 0 \end{array} \right. , \text{que fijan el movimiento de } m \text{ sobre el eje } y. \\ r = A \operatorname{Sen}(\omega t) \Rightarrow f_3^{(h)} = r - A \operatorname{Sen}(\omega t) = 0, \text{que pre-establece el movimiento de } m. \quad (2.93)$$

por lo que el sistema sigue siendo holónomo reónomo ya que la ligadura $f_3^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo.

(b) Es fácil notar que el número de grados de libertad sigue siendo,

$$s = 0 \quad (2.94)$$

EJEMPLO 2.25

Resolver el ejemplo anterior pero en coordenadas esféricas.

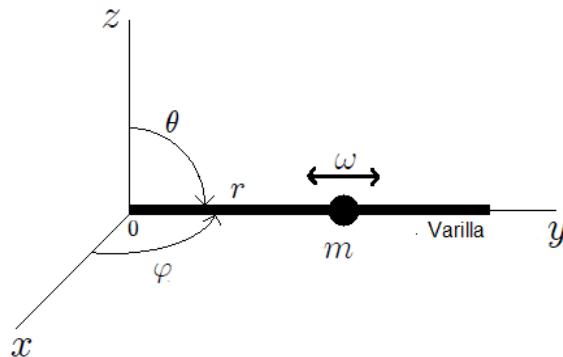


Figura 2.38: En coordenadas esféricas, sistema formado por una varilla lisa en la cual está ensartada una cuenta de masa m . La cuenta realiza un movimiento pre-establecido.

SOLUCION: las coordenadas de la masa presente son,

$$m \rightarrow (r, \varphi, \theta) \quad (2.95)$$

como se muestra en la figura 2.38.

(a) Es fácil encontrar que las $K^{(h)} = 3$ ligaduras holónomas quedan escritas ahora como,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_1^{(h)} = \varphi - \frac{\pi}{2} = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_2^{(h)} = \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right. , \text{ que fijan el movimiento de } m \text{ sobre el eje } y. \\ r = A \operatorname{Sen}(\omega t) \Rightarrow f_3^{(h)} = r - A \operatorname{Sen}(\omega t) = 0, \text{ que pre-establece el movimiento de } m. \quad (2.96)$$

por lo que el sistema sigue siendo holónomo reónomo ya que la ligadura $f_3^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo.

(b) Es fácil notar que el número de grados de libertad sigue siendo,

$$s = 0 \quad (2.97)$$

Como se notó en los ejemplos 2.20, 2.21 y 2.22, en los ejemplos 2.23, 2.24 y el presente el número de grados de libertad permanece constante por tratarse del mismo sistema.

EJEMPLO 2.26

La figura 2.39 muestra un regulador centrífugo con masas $m_1 = m_2 = m$ que gira con velocidad angular constante ω . Las masas m_1 y m_2 se encuentran en un mismo plano. Encuentre usando coordenadas Cartesianas: (a) el número de ligaduras presentes, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s .

SOLUCION: las coordenadas de las masas presentes son,

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \rightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ m_2 \rightarrow (x_2, y_2, z_2) \end{array} \right. \quad (2.98)$$

como se muestra en la figura 2.40.

(a) Al analizar la figura 2.40 se encuentran las siguientes ligaduras entre las coordenadas,

(a.1) De la distancia desde m_1 y m_2 al origen 0 resultan respectivamente,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \ell^2 \quad (2.99)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \ell^2 \quad (2.100)$$

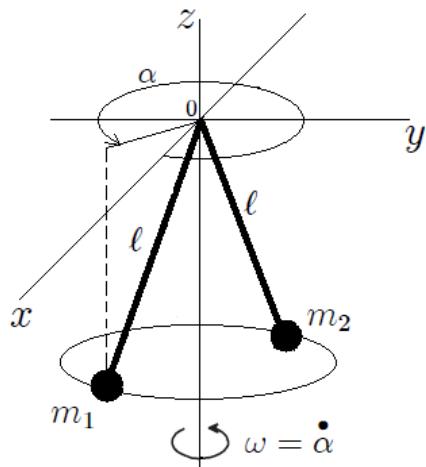


Figura 2.39: Regulador centrífugo con masas $m_1 = m_2 = m$ que gira con velocidad angular constante ω .

que mantienen a m_1 y m_2 a una distancia fija ℓ del origen 0.

(a.2) De los triángulos $\Delta A0B$ y $\Delta D0C$ resultan respectivamente,

$$\tan \alpha = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow y_1 = x_1 \tan \alpha \quad (2.101)$$

$$\tan(\alpha - \pi) = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow y_2 = x_2 \tan \alpha \quad (2.102)$$

donde claramente $\alpha = \omega t$.

(a.3) Por la configuración del regulador centrífugo,

$$x_1 = -x_2 \quad (2.103)$$

$$y_1 = -y_2 \quad (2.104)$$

haciendo que ambas masas estén en posiciones simétricas con respecto al eje z .

(a.4) Debido a que la velocidad angular ω es constante,

$$z_1 = z_2 \quad (2.105)$$

Ahora bien, las ligaduras a escoger son aquellas linealmente independientes. Obsérvese que la ligadura (2.99) es linealmente dependiente con (2.100) pues al sustituir (2.103) a (2.105) en (2.100) se obtiene (2.99). Debido a lo anterior, se escogerá como ligadura a esta última.

Obsérvese también que la ligadura (2.101) es linealmente dependiente con (2.102) pues al sustituir (2.103) y (2.104) en (2.102) se obtiene (2.101). Debido a lo anterior, se escogerá como ligadura a esta última.

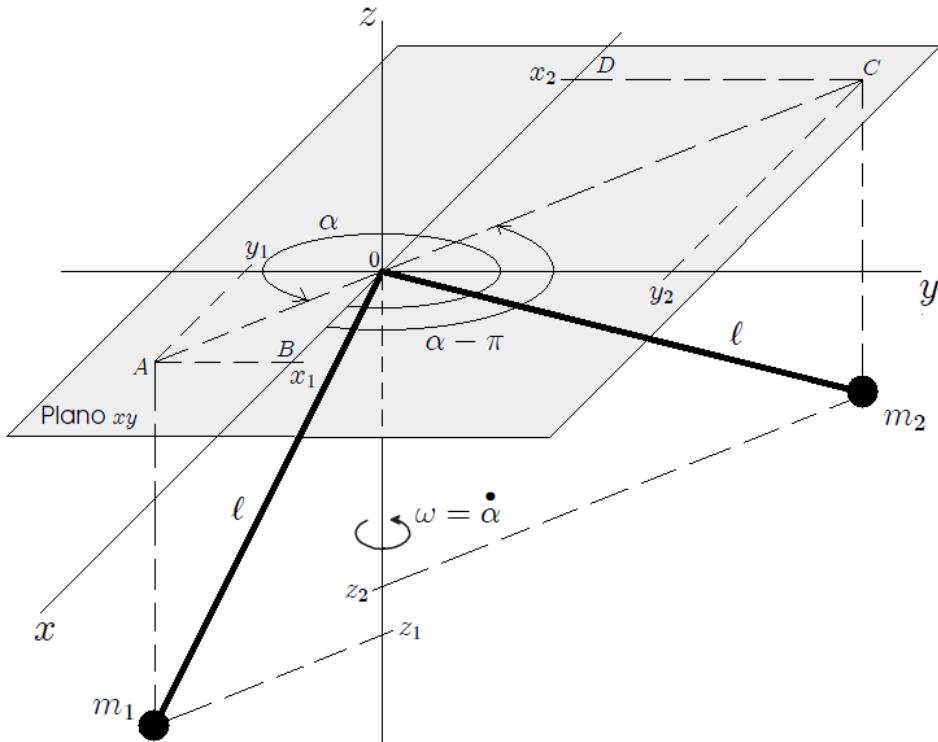


Figura 2.40: En coordenadas Cartesianas, regulador centrífugo con masas $m_1 = m_2 = m$ que gira con velocidad angular constante ω .

Finalmente, de los resultados anteriores, en el sistema están presentes las $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas,

$z_1 = z_2 \Rightarrow f_1^{(h)} = z_1 - z_2 = 0$, hace que m_1 y m_2 se mantengan en la misma posición con respecto al plano xy . Esto es consecuencia de que la velocidad angular ω es constante.

$\begin{cases} x_1 = -x_2 \Rightarrow f_2^{(h)} = x_1 + x_2 = 0 \\ y_1 = -y_2 \Rightarrow f_3^{(h)} = y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$, hacen que m_1 y m_2 se mantengan

en posición simétrica respecto al eje z . Esto es debido a la configuración del sistema.

$\frac{y_1}{x_1} = \tan \alpha \Rightarrow f_4^{(h)} = y_1 - x_1 \tan(\omega t) = 0$, que introduce la rotación del sistema alrededor del eje z . Aquí α es el ángulo de rotación del sistema, medido a partir del eje $+x$ en sentido anti-horario hasta m_1 , de tal manera que $\alpha = \omega t$ y $\dot{\alpha} = \omega$.

$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \ell^2 \Rightarrow f_5^{(h)} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \ell^2 = 0$, acopla m_2 al punto 0 a una distancia constante ℓ del mismo.

(2.106)

por lo que el sistema dado es holónomo reónomo, pues sólo existen ligaduras holónomas y la ligadura $f_4^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo.

(b) Como existen $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas entonces, a partir de (2.21), el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 5$$

O,

$$\boxed{s = 1} \quad (2.107)$$

EJEMPLO 2.27

Resolver el ejemplo anterior pero en coordenadas esféricas.

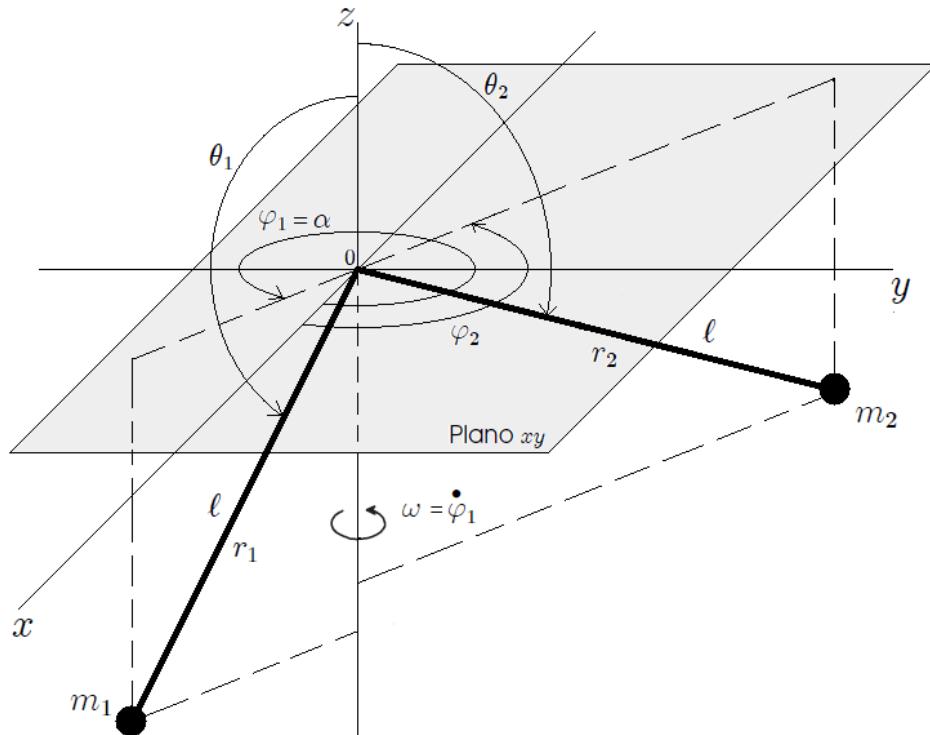


Figura 2.41: En coordenadas esféricicas, regulador centrífugo con masas $m_1 = m_2 = m$ que gira con velocidad angular constante ω .

SOLUCION: las coordenadas de las masas presentes son,

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow (r_1, \varphi_1, \theta_1) \\ m_2 \rightarrow (r_2, \varphi_2, \theta_2) \end{cases} \quad (2.108)$$

como se muestra en la figura 2.41.

(a) En coordenadas esféricas las $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas quedan escritas ahora como,

$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow f_1^{(h)} = \theta_1 - \theta_2 = 0$, hace que m_1 y m_2 se mantengan en la misma posición con respecto al plano xy . Esto es consecuencia de que la velocidad angular ω es constante.

$\begin{cases} \varphi_1 = \omega t \Rightarrow f_2^{(h)} = \varphi_1 - \omega t = 0 \\ \varphi_2 = \varphi_1 - \pi \Rightarrow f_3^{(h)} = \varphi_2 - \varphi_1 + \pi = 0 \end{cases}$, hacen que m_1 y m_2 se mantengan en posición simétrica respecto al eje z . Esto es debido a la configuración del sistema. Introducen la rotación.

$r_1 = \ell \Rightarrow f_4^{(h)} = r_1 - \ell = 0$, acopla m_1 al punto 0 a una distancia constante ℓ del mismo.

$r_2 = \ell \Rightarrow f_5^{(h)} = r_2 - \ell = 0$, acopla m_2 al punto 0 a una distancia constante ℓ del mismo.

(2.109)

por lo que el sistema sigue siendo holónomo reónomo ya que la ligadura $f_2^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo.

(b) Es fácil notar que el número de grados de libertad sigue siendo,

$$s = 1$$

(2.110)

Igualmente, en los ejemplos 2.26 y el presente el número de grados de libertad permanece constante por tratarse del mismo sistema.

EJEMPLO 2.28

En la figura 2.42 se muestra un sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de masa despreciable y de longitud ℓ . El conjunto se mueve sobre el plano horizontal liso xy , existiendo en m_1 un pequeño cuchillo que obliga a que ese punto se mueva según la dirección de la varilla. Encuentre usando coordenadas Cartesianas: (a) el número de ligaduras presentes, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s .

SOLUCION: las coordenadas de las masas presentes son,

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ m_2 \rightarrow (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \quad (2.111)$$

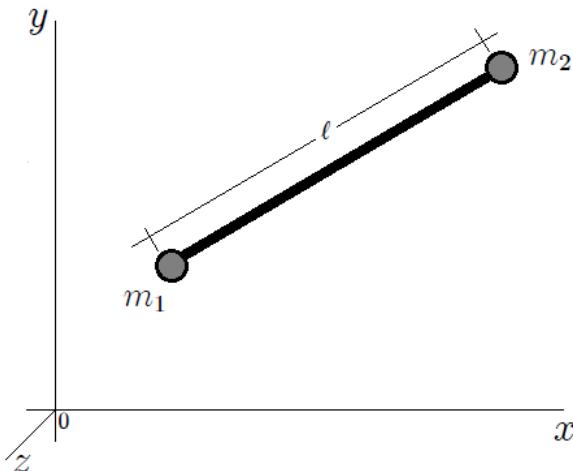


Figura 2.42: Sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de masa despreciable y de longitud ℓ .

como se muestra en la figura 2.43.

(a) En este sistema existen $K^{(h)} = 4$ ligaduras que vienen dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^{(h)} = z_1 = 0, \text{ que fija el movimiento de } m_1 \text{ sobre el plano } xy. \\ f_2^{(h)} = z_2 = 0, \text{ que fija el movimiento de } m_2 \text{ sobre el plano } xy. \\ f_3^{(h)} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell^2 = 0, \text{ que acopla el movimiento de } m_1 \text{ al de } m_2, \text{ manteniendo una distancia constante } \ell \text{ entre ambas.} \\ f_4^{(nh)} = -\dot{x}_1(y_2 - y_1) + \dot{y}_1(x_2 - x_1) = 0, \text{ que es la restricción introducida por la presencia del cuchillo.} \end{array} \right. \quad (2.112)$$

de esta manera el sistema es no-holónomo por existir en él una ligadura no-holónoma.

Las ligaduras $f_1^{(h)}$ y $f_2^{(h)}$ obligan a que el movimiento de las partículas m_1 y m_2 se realice sobre el plano xy . La ligadura $f_3^{(h)}$ acopla el movimiento de m_1 al movimiento de m_2 y la ligadura $f_4^{(nh)}$ es debido a la restricción que introduce la presencia del cuchillo, obligando a que la partícula m_1 se mueva según la dirección de la varilla como se menciona en el enunciado del ejemplo.

La ligadura $f_4^{(nh)}$ se obtiene de la siguiente forma: como el cuchillo obliga a que la velocidad \vec{v}_1 de la masa m_1 esté a lo largo de la barra entonces se tiene que,

$$f_4^{(nh)} = \vec{v}_1 \bullet \vec{N} = 0 \quad (2.113)$$

donde \vec{N} es un versor normal a la barra. La velocidad \vec{v}_1 debe tener la misma dirección que la barra, por lo tanto, un vector perpendicular a \vec{v}_1 también lo será a la recta que

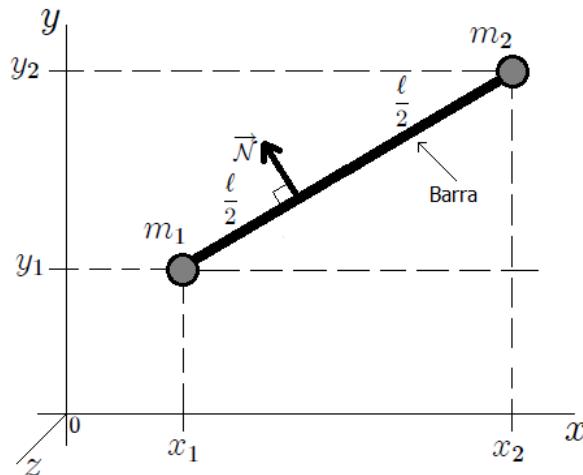


Figura 2.43: En coordenadas Cartesianas, sistema formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra rígida de masa despreciable y de longitud ℓ .

contiene a la barra. La ecuación de dicha recta, que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , viene dada por,

$$\underbrace{-(y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y}_{A} + \underbrace{x_1y_2 - x_2y_1}_{B} = 0 \quad (2.114)$$

Se sabe, a partir de la Geometría Analítica, que un vector perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$ viene dado por $\vec{N} = A\hat{e}_x + B\hat{e}_y$. En este caso se tiene que,

$$\vec{N} = -(y_2 - y_1)\hat{e}_x + (x_2 - x_1)\hat{e}_y \quad (2.115)$$

por lo tanto,

$$f_4^{(nh)} = \vec{v}_1 \bullet \vec{N} = (\dot{x}_1\hat{e}_x + \dot{y}_1\hat{e}_y) \bullet [-(y_2 - y_1)\hat{e}_x + (x_2 - x_1)\hat{e}_y] = 0$$

O,

$$f_4^{(nh)} = -\dot{x}_1(y_2 - y_1) + \dot{y}_1(x_2 - x_1) = 0 \quad (2.116)$$

que es una ligadura no-holónoma ya que no es integrable y que se encuentra expresada en forma de derivada.

(b) Hay $N = 2$ partículas, por lo tanto a partir de (2.21) el número de grados de libertad s del sistema viene dado por,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 3$$

O,

$$s = 3$$

(2.117)

que es el número de grados de libertad configuracionales. A partir de (2.55) el número de grados de libertad cinemáticos es,

$$s = 3N - K^{(h)} - K^{(nh)} = 3(2) - 3 - 1$$

O,

$$\boxed{s = 2} \quad (2.118)$$

EJEMPLO 2.29

Considérese el disco sólido homogéneo de masa M , centro $0'$ y radio \mathcal{R}_1 que rueda sin resbalar dentro de la superficie semicircular fija con centro 0 y radio $\mathcal{R}_2 > \mathcal{R}_1$ (ver figura 2.44). Encuentre usando coordenadas cilíndricas: (a) el número de ligaduras presentes, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s .

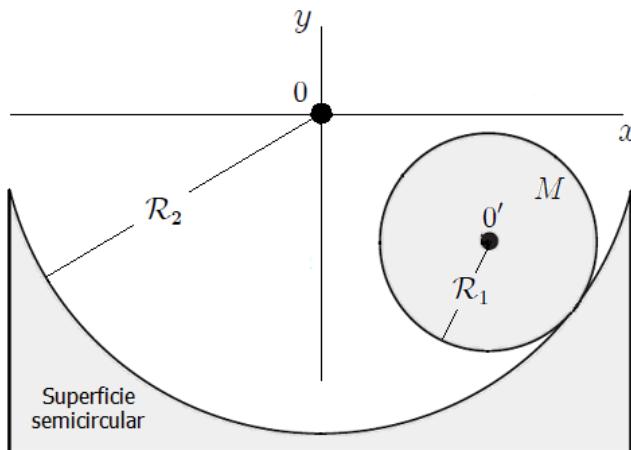


Figura 2.44: Disco sólido homogéneo de masa M , centro $0'$ y radio \mathcal{R}_1 que rueda sin resbalar dentro de la superficie semicircular fija y lisa con centro 0 y radio $\mathcal{R}_2 > \mathcal{R}_1$.

SOLUCION: como el disco es un sólido, se usarán las coordenadas de su centro de masa $(r_{cm}, \varphi_{cm}, z_{cm})$ para ubicarlo y los ángulos α, β y γ para indicar sus tres posibles movimientos de rotación de igual forma como se definen en la figura 2.27. De esta manera las coordenadas del disco son,

$$\text{Disco} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Centro de masa} \rightarrow (r_{cm}, \varphi_{cm}, z_{cm}) \\ \text{Angulos de orientación} \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \end{array} \right. \quad (2.119)$$

como se muestra en la figura 2.45.

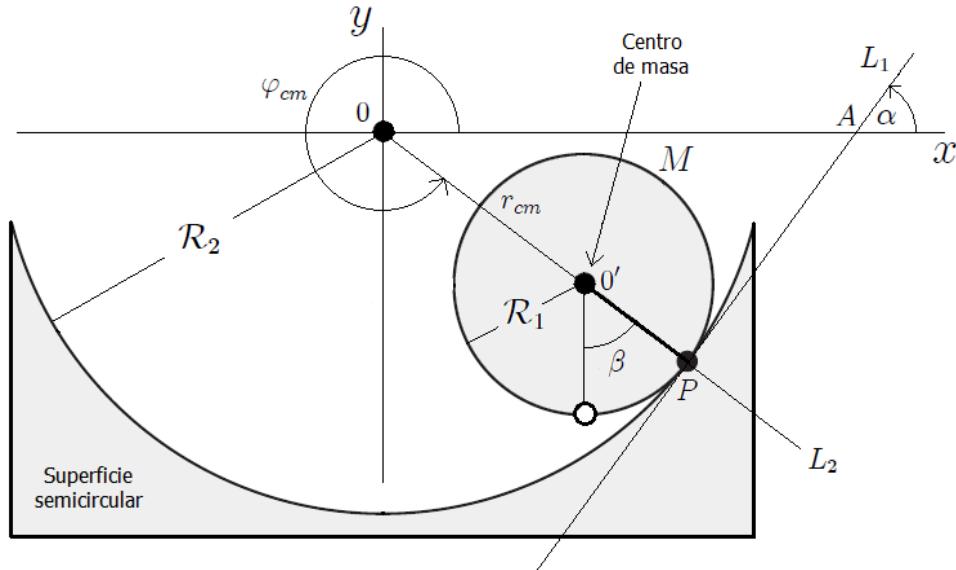


Figura 2.45: En coordenadas Cartesianas, disco sólido homogéneo de masa M , centro $0'$ y radio R_1 que rueda sin resbalar dentro de la superficie semicircular fija y lisa con centro 0 y radio $R_2 > R_1$.

(a) Es fácil determinar que en este sistema existen $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas esclerónomas que vienen dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{cm} = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z_{cm} = 0, \text{ que limita el movimiento} \\ \text{del centro de masa del disco al plano } xy. \\ \alpha = \varphi_{cm} - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f_2^{(h)} = \alpha - \varphi_{cm} + \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_3^{(h)} = \gamma - \frac{\pi}{2} = 0 \\ \text{que en conjunto obligan} \\ \text{a que el plano que contiene al disco esté siempre contenido en el plano } xy. \\ r_{cm} = R_2 - R_1 \Rightarrow f_4^{(h)} = r_{cm} - R_2 + R_1 = 0, \text{ que limita el movimiento del disco a la} \\ \text{superficie semicircular, manteniendo el centro de masa del mismo a una distancia} \\ \text{constante } R_2 - R_1 \text{ de dicha superficie.} \\ (\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) \left(\varphi_{cm} - \frac{3\pi}{2} \right) = \mathcal{R}_1 \beta \Rightarrow f_5^{(h)} = (\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) \left(\varphi_{cm} - \frac{3\pi}{2} \right) - \mathcal{R}_2 \beta = 0, \text{ que introduce} \\ \text{la rotación del disco mediante el ángulo } \beta. \text{ Proviene de la condición de rodadura sin} \\ \text{deslizar.} \end{array} \right. \quad (2.120)$$

por lo que el sistema es holónomo esclerónico. Las ligaduras $f_1^{(h)}$, $f_3^{(h)}$ y la $f_4^{(h)}$ son muy sencillas de determinar. La ligadura $f_2^{(h)}$ se obtiene fácilmente al analizar los ángulos en el triángulo $\Delta A0P$. La ligadura $f_5^{(h)}$ proviene de la condición de rodadura sin deslizar, que como consecuencia hace que la longitud de arco $\tilde{s} = \mathcal{R}_1 \beta$ recorrida por el punto de contacto P sobre el borde del disco sea igual a la longitud de arco

$S = (\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) (\varphi_{cm} - \frac{3\pi}{2})$ recorrida por el centro de masa. Por lo tanto,

$$(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) \left(\varphi_{cm} - \frac{3\pi}{2} \right) = \mathcal{R}_1 \beta$$

O,

$$f_4^{(h)} = (\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1) \left(\varphi_{cm} - \frac{3\pi}{2} \right) - \mathcal{R}_1 \beta = 0 \quad (2.121)$$

(b) Según (2.48) y como existen $K^{(h)} = 5$ ligaduras holónomas entonces el sistema tiene,

$$s = 6 - K^{(h)} = 6 - 5$$

O,

$$\boxed{s = 1} \quad (2.122)$$

grado de libertad configuracional.

EJEMPLO 2.30

Se lanza una partícula de masa m_1 en un campo de potencial mgy con velocidad inicial $\vec{v}_{01} = \vec{v}_0$ y un ángulo de elevación σ_0 . Al mismo tiempo otra partícula de masa m_2 es lanzada de tal manera que su vector velocidad \vec{v}_2 para cualquier tiempo siempre esté dirigido hacia m_1 . Despreciando la resistencia del aire, empleando un sistema de coordenadas Cartesianas cuyo origen coincida con el punto de lanzamiento de m_1 y sabiendo que todo el movimiento ocurre en el plano xy , encuentre: (a) el número de ligaduras presentes en el sistema, mostrando sus ecuaciones y clasificándolas; (b) los grados de libertad s .

SOLUCION: la figura 2.46 muestra el sistema descrito en el enunciado del ejemplo. De esta manera las coordenadas de las partículas son,

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ m_2 \rightarrow (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \quad (2.123)$$

(a) En este sistema existen $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas esclerónomas y $K^{(nh)} = 1$ ligadura no-hoónoma reónoma que vienen dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z_1 = 0, \text{ que limita el movimiento de } m_1 \text{ al plano } xy. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z_2 = 0, \text{ que limita el movimiento de } m_2 \text{ al plano } xy. \\ -\dot{x}_2(y_2 - y_1) + \dot{y}_2(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f_3^{(nh)} = -\dot{x}_2(y_2 - y_1) + \dot{y}_2(x_2 - x_1) = 0, \\ \text{que es consecuencia de que la velocidad de } m_2 \text{ deba estar siempre dirigida hacia } m_1. \end{array} \right. \quad (2.124)$$

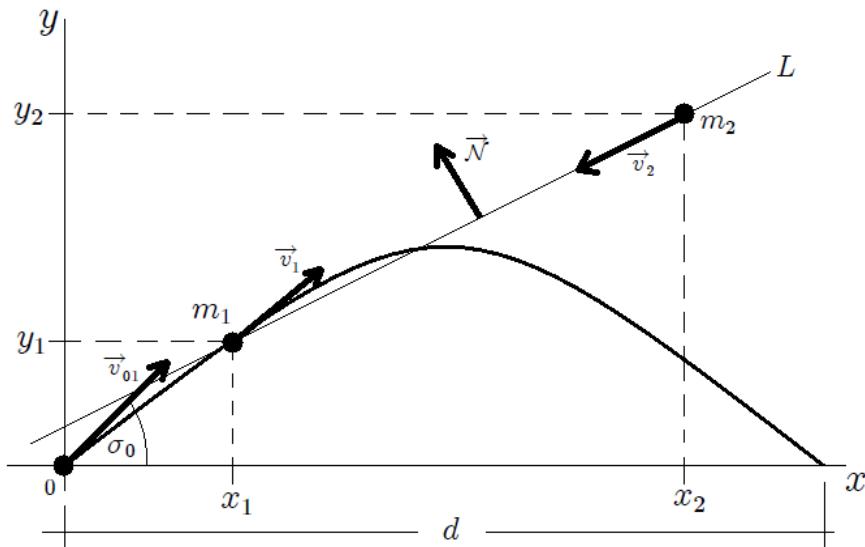


Figura 2.46: En coordenadas Cartesianas, partícula de masa m_1 lanzada en un campo de potencial mgy con velocidad inicial \vec{v}_0 y un ángulo de elevación σ_0 y partícula de masa m_2 es lanzada de tal manera que su vector velocidad \vec{v}_2 para cualquier tiempo siempre esté dirigido hacia m_1 .

Las ligaduras $f_1^{(h)}$ y $f_2^{(h)}$ son holónomas esclerónomas y la ligadura $f_3^{(nh)}$ es no-holónoma, por lo tanto el sistema es no-holónomo.

La determinación de las ligaduras $f_1^{(h)}$ y $f_2^{(h)}$ es obvia. La ligadura $f_3^{(nh)}$ se determina de la siguiente forma: en la figura (2.46) L representa una recta que pasa por m_1 y m_2 , mientras que \vec{N} es un vector perpendicular a la misma. Como \vec{v}_2 tiene que estar dirigida siempre hacia m_1 , por ende tiene que estar contenida en L y ser perpendicular a \vec{N} cumpliéndose que,

$$\vec{v}_2 \bullet \vec{N} = 0 \quad (2.125)$$

y siguiendo un procedimiento análogo al seguido para hallar $f_4^{(nh)}$ en el ejemplo 2.28 se obtiene que,

$$-\dot{x}_2(y_2 - y_1) + \dot{y}_2(x_2 - x_1) = 0$$

O,

$$f_3^{(nh)} = -\dot{x}_2(y_2 - y_1) + \dot{y}_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (2.126)$$

(b) Hay $N = 2$ partículas, por lo tanto a partir de (2.21) el número de grados de libertad s del sistema viene dado por,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 2$$

O,

$$s = 4 \quad (2.127)$$

que es el número de grados de libertad configuracionales. A partir de (2.55) el número de grados de libertad cinemáticos es,

$$s = 3N - K^{(h)} - K^{(nh)} = 3(2) - 2 - 1$$

O,

$$\boxed{s = 3} \quad (2.128)$$

2.7 Problemas

CAPITULO 3

COORDENADAS GENERALIZADAS

Como ya se sabe del capítulo 1, la configuración de un sistema mecánico es la posición de cada una de sus partículas en un instante dado. Por lo tanto, es de gran interés estudiar con suficiente detalle las herramientas a emplear para lograr una buena descripción de dicha configuración. En este capítulo se abordará el importantísimo aspecto relacionado con la ubicación de las partículas o partes que componen un sistema mecánico. Podrían emplearse, para tal fin, los sistemas de coordenadas estándares: el Cartesiano, el cilíndrico y el esférico. Sin embargo, existen un tipo muy particular de coordenadas denominadas *Coordenadas Generalizadas* que pueden facilitar la descripción de los sistemas mecánicos. No existe un método general para encontrar un conjunto de estas coordenadas de manera que sean las más apropiadas para llevar a cabo dicha descripción, es decir, aquellas que la hacen más sencilla y, por ende, haciendo también más sencilla la interpretación física de los fenómenos que ocurren. En realidad es la experiencia, en un porcentaje elevado, aquella que permite lograr lo anterior.

En general, los textos de Mecánica Clásica suelen ser poco generosos a la hora de tratar el tema referente a las coordenadas generalizadas. El presente capítulo constituye un esfuerzo para hacer que el estudiante logre una buena comprensión del significado de las mismas y, por lo tanto, se le haga más sencilla su escogencia a la hora de emprender la descripción de un sistema mecánico dado. Se busca, además, que el estudiante aprenda a escribir las distintas cantidades físicas en función de este conjunto de coordenadas.

Contenido

3.1 Definición de variables dependientes del tiempo en un sistema mecánico y su relación con las coordenadas estándares	125
3.2 Descripción de un sistema mecánico	150
3.3 Coordenadas Generalizadas	153
3.3.1 Definición	153
3.3.2 Ecuaciones de transformación entre las coordenadas estándares y las coordenadas generalizadas	153
3.4 Espacio de Configuración	154
3.5 Algunas magnitudes físicas en coordenadas generalizadas	156
3.5.1 Desplazamiento	156
3.5.2 Velocidad	157
3.5.3 Aceleración	157
3.5.4 Trabajo Mecánico	158
3.5.5 Energía Cinética	159
3.6 Forma general en coordenadas generalizadas de las ligaduras holónomas, no-holónomas y semi-holónomas	162
3.6.1 Ligaduras holónomas en coordenadas generalizadas	162
3.6.2 Ligaduras no-holónomas y semi-holónomas en coordenadas generalizadas	163
3.7 Un método para determinar si una ligadura en forma de diferencial o de velocidad es holónoma o no-holónoma	164
3.8 Ejemplos de determinación de nuevos sistemas de coordenadas empleando nuevas variables dependientes del tiempo	172
3.9 Problemas	192

3.1 Definición de variables dependientes del tiempo en un sistema mecánico y su relación con las coordenadas estándares

Para establecer la relación entre las nuevas variables dependientes del tiempo que sean posibles de definir en un determinado sistema mecánico y las coordenadas estándares utilizadas para determinar su configuración, se analizarán varios ejemplos de sistemas mecánicos sencillos.

Considérese el sistema mecánico mostrado en la figura 3.1a, el cual consiste en dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables) ubicadas utilizando un sistema de coordenadas Cartesianas. Entonces para este sistema se tiene,

# partículas	\longrightarrow	$N = 2$	(3.1)
Posiciones	\longrightarrow	$\begin{cases} m_1 \longrightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ m_2 \longrightarrow (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$	
Ligaduras	\longrightarrow	$\begin{cases} y_1 = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = y_1 = 0. \\ z_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z_1 = 0. \\ x_2 = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = x_2 = 0. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = z_2 = 0. \\ x_1^2 + y_2^2 = \ell^2 \Rightarrow f_5^{(h)} = x_1^2 + y_2^2 - \ell^2 = 0. \end{cases}$	
# ligaduras	\longrightarrow	$K^{(h)} = 5$	
# G.de libertad	\longrightarrow	$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 5 = 1$	

siendo las coordenadas del sistema,

$$\left\{ \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

que no son independientes debido a la presencia de ligaduras. Como el número de grados de libertad es 1 significa que existe sólo una coordenada independiente, es decir, que es posible usar una sola coordenada para describir el sistema. En este caso es posible usar sólo x_1 o sólo y_2 de manera que la posición de ambas partículas puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } x_1 &\rightarrow \begin{cases} m_1 \rightarrow (x_1, 0, 0) \\ m_2 \rightarrow (0, -\sqrt{\ell^2 - x_1^2}, 0) \end{cases} \\ \text{Si se usa } y_2 &\rightarrow \begin{cases} m_1 \rightarrow (\pm\sqrt{\ell^2 - y_2^2}, 0, 0) \\ m_2 \rightarrow (0, y_2, 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde se ha usado $f_5^{(h)}$. Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser x_1 o y_2 .

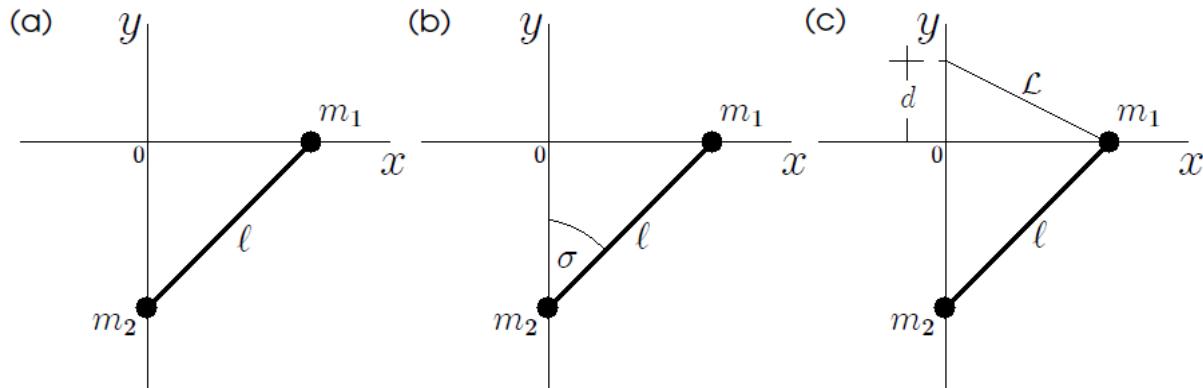


Figura 3.1: Dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables).

Supóngase que se define el ángulo σ ,

$$\sigma \text{ es } \begin{cases} > 0 \text{ si se mide en el cuarto cuadrante.} \\ < 0 \text{ si se mide en el tercer cuadrante.} \end{cases} \quad (3.4)$$

como se muestra en la figura 3.1b. Es fácil notar que si se cambia la posición de m_1 o la posición de m_2 el ángulo σ también cambiará, indicando que es también una variable en función del tiempo y sugiriendo que este cambio está relacionado matemáticamente con el cambio de todas o algunas de las coordenadas mostradas en (3.3). Efectivamente, de la figura 3.1b es fácil deducir que,

$$\begin{cases} x_1 = \ell \operatorname{Sen} \sigma \\ y_2 = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \end{cases} \quad (3.5)$$

donde σ es positivo en el cuarto cuadrante y negativo en el tercero, mostrando la relación existente entre la nueva variable σ y las coordenadas x_1 y y_2 .

Nótese en (3.5) que conocer el valor de σ en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x_1 y y_2 , esto abre la posibilidad de usar σ como una “coordenada”.

Si en (3.1) se elimina la coordenada x_1 sustituyéndola por su correspondiente valor dado en (3.5) resulta,

$$\begin{array}{ll}
 \# \text{ partículas} & \longrightarrow N = 2 \\
 \text{Posiciones} & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 \longrightarrow (\ell \operatorname{Sen} \sigma, y_1, z_1) \\ m_2 \longrightarrow (x_2, y_2, z_2) \\ y_1 = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = y_1 = 0. \\ z_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z_1 = 0. \\ x_2 = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = x_2 = 0. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = z_2 = 0. \\ y_2 = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \Rightarrow f_5^{(h)} = y_2 + \ell \operatorname{Cos} \sigma = 0. \end{array} \right. \\
 \text{Ligaduras} & \longrightarrow \\
 \# \text{ ligaduras} & \longrightarrow K^{(h)} = 5 \\
 \# \text{ G.de libertad} & \longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 5 = 1
 \end{array} \tag{3.6}$$

Aquí el ángulo σ puede ser visto como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana x_1 . La ligadura $f_5^{(h)}$ que originalmente en (3.1) asociaba a las coordenadas x_1 y y_2 , ahora asocia a las coordenadas y_2 y σ . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right\} \tag{3.7}$$

que siguen siendo 6 como originalmente eran al usar sólo coordenadas Cartesianas.

De forma análoga a (3.3), de (3.6) se puede observar que es posible usar sólo σ o sólo y_2 de manera que la posición de ambas partículas puede ser escrita como,

$$\begin{array}{ll}
 \text{Si se usa } \sigma & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 \longrightarrow (\ell \operatorname{Sen} \sigma, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, -\ell \operatorname{Cos} \sigma, 0) \end{array} \right. \\
 \text{Si se usa } y_2 & \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 \longrightarrow (\pm \sqrt{\ell^2 - y_2^2}, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, y_2, 0) \end{array} \right.
 \end{array} \tag{3.8}$$

donde se ha usado $f_5^{(h)}$ de (3.6). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser σ o y_2 .

Por otro lado, si en (3.1) en vez de sustituir el valor de x_1 se sustituye ahora el valor de

y_2 dado en (3.5) resulta,

# partículas	\longrightarrow	$N = 2$	
Posiciones	\longrightarrow	$\begin{cases} m_1 \longrightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ m_2 \longrightarrow (x_2, -\ell \cos \sigma, z_2) \end{cases}$ $y_1 = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = y_1 = 0.$ $z_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z_1 = 0.$ $x_2 = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = x_2 = 0.$ $z_2 = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = z_2 = 0.$ $x_1 = \ell \sin \sigma \Rightarrow f_5^{(h)} = x_1 - \ell \sin \sigma = 0.$	(3.9)
# ligaduras	\longrightarrow	$K^{(h)} = 5$	
# G.de libertad	\longrightarrow	$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 5 = 1$	

Aquí el ángulo σ puede ser visto como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana y_2 . La ligadura $f_5^{(h)}$ que originalmente en (3.1) asociaba a las coordenadas x_1 y y_2 , ahora asocia a las coordenadas x_1 y σ . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & x_2 \\ y_1 & \sigma \\ z_1 & z_2 \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

que siguen siendo 6 como originalmente eran al usar sólo coordenadas Cartesianas. De forma análoga a (3.3), de (3.9) se puede observar que es posible usar sólo σ o sólo x_1 de manera que la posición de ambas partículas puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } \sigma &\longrightarrow \begin{cases} m_1 \longrightarrow (\ell \sin \sigma, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, -\ell \cos \sigma, 0) \end{cases} \\ \text{Si se usa } x_1 &\longrightarrow \begin{cases} m_1 \longrightarrow (x_1, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, -\sqrt{\ell^2 - x_1^2}, 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde se ha usado $f_5^{(h)}$ de (3.9). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser σ o x_1 .

Nótese hasta este momento lo siguiente:

1. De (3.6) y (3.9) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido la nueva variable angular σ .
2. La posibilidad de expresar la posición de las partículas sólo en función de x_1 , sólo de y_2 o sólo σ como se puede ver en (3.8) y (3.11), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema $s = 1$.
3. Que, a diferencia de x_1 y y_2 , la variable σ no se refiere a una de las partículas del sistema sino al sistema como un todo.

Considérese el mismo sistema anterior. Defínase ahora la distancia \mathcal{L} desde un punto que está sobre el eje y a una distancia constante d del centro de coordenadas hasta la partícula m_1 , como se muestra en la figura 3.1c, de manera que,

$$\mathcal{L} \in [d, \ell] \quad (3.12)$$

El cambio de la posición de m_1 y m_2 hace que \mathcal{L} cambie en consecuencia, por lo tanto esta última es una variable en función del tiempo t y debe estar relacionada matemáticamente con el cambio de todas o algunas de las coordenadas mostradas en (3.1). Efectivamente, de la figura 3.1c es fácil deducir que,

$$\begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \\ y_2 = -\sqrt{\ell^2 + d^2 - \mathcal{L}^2} \end{cases} \quad (3.13)$$

que muestra la relación entre la nueva variable \mathcal{L} y las coordenadas x_1 y y_2 .

Nótese en (3.13) que conocer el valor de \mathcal{L} en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x_1 y y_2 , esto abre la posibilidad de usar \mathcal{L} como una “coordenada”.

Procediendo como antes, si en (3.1) se elimina la coordenada x_1 sustituyéndola por

su correspondiente valor dado en (3.13) resulta,

$$\begin{array}{ll}
 \# \text{ partículas} & \longrightarrow N = 2 \\
 \text{Posiciones} & \longrightarrow \begin{cases} m_1 \longrightarrow (\pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2}, y_1, z_1) \\ m_2 \longrightarrow (x_2, y_2, z_2) \\ y_1 = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = y_1 = 0. \\ z_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z_1 = 0. \\ x_2 = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = x_2 = 0. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = z_2 = 0. \\ y_2^2 = \ell^2 + d^2 - \mathcal{L}^2 \Rightarrow f_5^{(h)} = y_2^2 - \ell^2 - d^2 + \mathcal{L}^2 = 0. \end{cases} \\
 \text{Ligaduras} & \longrightarrow \\
 \# \text{ ligaduras} & \longrightarrow K^{(h)} = 5 \\
 \# \text{ G.de libertad} & \longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 5 = 1
 \end{array} \tag{3.14}$$

Aquí la distancia \mathcal{L} puede ser vista como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana x_1 . La ligadura $f_5^{(h)}$ que originalmente en (3.1) asociaba a las coordenadas x_1 y y_2 , ahora asocia a las coordenadas y_2 y \mathcal{L} . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L} & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \right\} \tag{3.15}$$

que son 6 como originalmente eran en (3.1). De forma análoga a (3.3), de (3.14) se puede observar que es posible usar sólo \mathcal{L} o sólo y_2 de manera que la posición de ambas partículas puede ser escrita como,

$$\begin{array}{ll}
 \text{Si se usa } \mathcal{L} & \longrightarrow \begin{cases} m_1 \longrightarrow (\pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2}, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, -\sqrt{\ell^2 + d^2 - \mathcal{L}^2}, 0) \end{cases} \\
 \text{Si se usa } y_2 & \longrightarrow \begin{cases} m_1 \longrightarrow (\pm\sqrt{\ell^2 - y_2^2}, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, y_2, 0) \end{cases}
 \end{array} \tag{3.16}$$

donde se ha usado $f_5^{(h)}$ de (3.14). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser \mathcal{L} o y_2 .

Por otro lado, si en (3.1) en vez de sustituir el valor de x_1 se sustituye ahora el valor de

y_2 dado en (3.13) resulta,

# partículas	\longrightarrow	$N = 2$	(3.17)
Posiciones	\longrightarrow	$\begin{cases} m_1 \longrightarrow (x_1, y_1, z_1) \\ m_2 \longrightarrow (x_2, -\sqrt{\ell^2 + d^2 - \mathcal{L}^2}, z_2) \\ y_1 = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = y_1 = 0. \\ z_1 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z_1 = 0. \\ x_2 = 0 \Rightarrow f_3^{(h)} = x_2 = 0. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_4^{(h)} = z_2 = 0. \\ x_1^2 = \mathcal{L}^2 - d^2 \Rightarrow f_5^{(h)} = x_1^2 - \mathcal{L}^2 + d^2 = 0. \end{cases}$	
Ligaduras	\longrightarrow		
# ligaduras	\longrightarrow	$K^{(h)} = 5$	
# G.de libertad	\longrightarrow	$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 5 = 1$	

Aquí ahora la distancia \mathcal{L} puede ser vista como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana y_2 . La ligadura $f_5^{(h)}$ que originalmente en (3.1) asociaba a las coordenadas x_1 y y_2 , ahora asocia a las coordenadas x_1 y \mathcal{L} . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & x_2 \\ y_1 & \mathcal{L} \\ z_1 & z_2 \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

que siguen siendo 6 como originalmente eran al usar sólo coordenadas Cartesianas. De forma análoga a (3.3), de (3.17) se puede observar que es posible usar sólo \mathcal{L} o sólo x_1 de manera que la posición de ambas partículas puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } \mathcal{L} &\longrightarrow \begin{cases} m_1 \longrightarrow (\pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2}, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, -\sqrt{\ell^2 + d^2 - \mathcal{L}^2}, 0) \end{cases} \\ \text{Si se usa } x_1 &\longrightarrow \begin{cases} m_1 \longrightarrow (x_1, 0, 0) \\ m_2 \longrightarrow (0, -\sqrt{\ell^2 - x_1^2}, 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde se ha usado $f_5^{(h)}$ de (3.17). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser \mathcal{L} o x_1 .

Nótese, como ocurrió antes con σ , lo siguiente:

1. De (3.14) y (3.17) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido la nueva variable \mathcal{L} .
2. La posibilidad de expresar la posición de las partículas sólo en función de x_1 , sólo de y_2 o sólo \mathcal{L} como se puede ver en (3.16) y (3.19), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema $s = 1$.
3. Que, a diferencia de x_1 y y_2 , la variable \mathcal{L} no se refiere a una de las partículas del sistema sino al sistema como un todo.

Considérese ahora un segundo ejemplo, el péndulo simple mostrado en la figura 3.2a de masa pendular m ubicada utilizando un sistema de coordenadas Cartesianas. Entonces

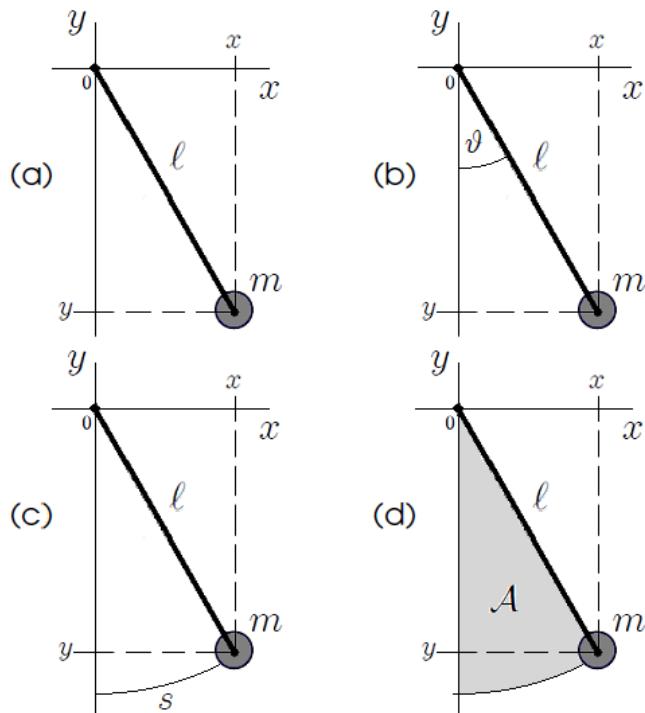


Figura 3.2: Péndulo simple de masa pendular m .

para este sistema se tiene,

# partículas	$\rightarrow N = 1$	
Posiciones	$\rightarrow m \rightarrow (x, y, z)$	
Ligaduras	$\rightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0. \\ x^2 + y^2 = \ell^2 \Rightarrow f_2^{(h)} = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0. \end{cases}$	(3.20)
# ligaduras	$\rightarrow K^{(h)} = 2$	
# G.de libertad	$\rightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1$	

siendo las coordenadas del sistema,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

que no son independientes debido a la presencia de ligaduras. Como el número de grados de libertad es 1 significa que existe sólo una coordenada independiente, es decir, que es posible usar una sola coordenada para describir el sistema. En este caso es posible usar sólo x o sólo y de manera que la posición de la masa pendular m puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } x &\rightarrow m \rightarrow (x, -\sqrt{\ell^2 - x^2}, 0) \\ \text{Si se usa } y &\rightarrow m \rightarrow (\pm\sqrt{\ell^2 - y^2}, y, 0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde se ha usado $f_2^{(h)}$. Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser x o y .

Supóngase ahora que se define el ángulo ϑ como se muestra en la figura 3.2b y cuyos signos vienen dados de la misma manera que en (3.4) para σ . Es fácil darse cuenta que si se cambia la posición de m entonces el ángulo ϑ también cambia, indicando que es una variable igualmente en función del tiempo t y sugiriendo que este cambio está relacionado matemáticamente con el cambio de todas o algunas de las coordenadas mostradas en (3.20). Efectivamente, de la figura 3.2b es fácil deducir que,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \vartheta \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \vartheta \end{cases} \quad (3.23)$$

mostrando la relación existente entre la nueva variable ϑ y las coordenadas x y y . Esta es la descripción que comúnmente se encuentra en los textos para este sistema.

Nótese en (3.23) que conocer el valor de ϑ en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x y y , esto abre la posibilidad de usar ϑ como una “coordenada”.

Procediendo como antes, si en (3.20) se elimina la coordenada x sustituyéndola por su correspondiente valor dado en (3.23) resulta,

$$\begin{array}{ll}
 \# \text{ partículas} & \longrightarrow N = 1 \\
 \text{Posiciones} & \longrightarrow m \longrightarrow (\ell \operatorname{Sen} \vartheta, y, z) \\
 \text{Ligaduras} & \longrightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0. \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \vartheta \Rightarrow f_2^{(h)} = y + \ell \operatorname{Cos} \vartheta = 0. \end{cases} \\
 \# \text{ ligaduras} & \longrightarrow K^{(h)} = 2 \\
 \# \text{ G.de libertad} & \longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1
 \end{array} \tag{3.24}$$

Aquí el ángulo ϑ puede ser visto como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana x . La ligadura $f_2^{(h)}$ que originalmente en (3.20) asociaba a las coordenadas x y y , ahora asocia a las coordenadas y y ϑ . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta \\ y \\ z \end{array} \right\} \tag{3.25}$$

que son 3 como originalmente eran en (3.20). De forma análoga a (3.22), de (3.20) se puede observar que es posible usar sólo ϑ o sólo y de manera que la posición de la masa pendular m puede ser escrita como,

$$\begin{aligned}
 \text{Si se usa } \sigma & \longrightarrow m \longrightarrow (\ell \operatorname{Sen} \vartheta, -\ell \operatorname{Cos} \vartheta, 0) \\
 \text{Si se usa } y & \longrightarrow m \longrightarrow (\pm \sqrt{\ell^2 - y^2}, y, 0)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

donde se ha usado $f_2^{(h)}$ de (3.24). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser ϑ o y .

Por otro lado, si en (3.20) en vez de sustituir el valor de x se sustituye ahora el valor de y dado en (3.23) resulta,

$$\begin{array}{ll}
 \# \text{ partículas} & \longrightarrow N = 1 \\
 \text{Posiciones} & \longrightarrow m \longrightarrow (x, -\ell \operatorname{Cos} \vartheta, z) \\
 \text{Ligaduras} & \longrightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0. \\ x = \ell \operatorname{Sen} \vartheta \Rightarrow f_2^{(h)} = x - \ell \operatorname{Sen} \vartheta = 0. \end{cases} \\
 \# \text{ ligaduras} & \longrightarrow K^{(h)} = 2 \\
 \# \text{ G.de libertad} & \longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1
 \end{array} \tag{3.27}$$

Aquí ahora el ángulo ϑ puede ser visto como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana y . La ligadura $f_2^{(h)}$ que originalmente en (3.20) asociaba a las

coordenadas x y y , ahora asocia a las coordenadas x y ϑ . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ \vartheta \\ z \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

que siguen siendo 3 como originalmente eran al usar sólo coordenadas Cartesianas y son dependientes. De forma análoga a (3.22), de (3.27) se puede observar que es posible usar sólo ϑ o sólo x de manera que la posición de ambas partículas puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } \vartheta &\longrightarrow m \longrightarrow (\ell \operatorname{Sen} \vartheta, -\ell \operatorname{Cos} \vartheta, 0) \\ \text{Si se usa } x &\longrightarrow m \longrightarrow (x, -\sqrt{\ell^2 - x^2}, 0) \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se ha usado $f_2^{(h)}$ de (3.27). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser ϑ o x .

Nótese, como ocurrió antes con σ y \mathcal{L} , lo siguiente:

1. De (3.24) y (3.27) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido la nueva variable ϑ .
2. La posibilidad de expresar la posición de m sólo en función de x , sólo de y o sólo ϑ como se puede ver en (3.26) y (3.29), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema $s = 1$.
3. Que, a diferencia de x y y , la variable ϑ no se refiere a la partícula sino al sistema como un todo.

Considerando el mismo sistema anterior, si S es la longitud de arco $S = \ell\vartheta$ que describe la masa pendular como es mostrado en la figura 3.2(c), entonces es posible definir,

$$S \rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ si se mide en el cuarto cuadrante.} \\ < 0 \text{ si se mide en el tercer cuadrante.} \end{cases} \quad (3.30)$$

en concordancia con los signos de ϑ

como nueva variable. De la figura es fácil encontrar que las relaciones con las coordenadas estándares vienen dadas por,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{s}{\ell} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{s}{\ell} \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

que muestra la relación entre la variable s y las coordenadas x y y .

Nótese en (3.31) que conocer el valor de s en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x y y , esto abre la posibilidad de usar s como una “coordenada”.

Procediendo como antes, si en (3.20) se elimina la coordenada x sustituyéndola por su correspondiente valor dado en (3.31) resulta,

# partículas	\longrightarrow	$N = 1$	(3.32)
Posiciones	\longrightarrow	$m \longrightarrow [\ell \operatorname{Sen} \left(\frac{s}{\ell} \right), y, z]$	
Ligaduras	\longrightarrow	$\begin{cases} z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0. \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{s}{\ell} \right) \Rightarrow f_2^{(h)} = y + \ell \operatorname{Cos} \left(\frac{s}{\ell} \right) = 0. \end{cases}$	
# ligaduras	\longrightarrow	$K^{(h)} = 2$	
# G.de libertad	\longrightarrow	$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1$	

Aquí la longitud de arco s puede ser vista como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana x . La ligadura $f_2^{(h)}$ que originalmente en (3.20) asociaba a las coordenadas x y y , ahora asocia a las coordenadas y y s . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\begin{Bmatrix} s \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

que son 3 como originalmente eran en (3.20) y son dependientes. De forma análoga a (3.22), de (3.32) se puede observar que es posible usar sólo s o sólo y de manera que la posición de ambas partículas puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } s &\longrightarrow m \longrightarrow [\ell \operatorname{Sen} \left(\frac{s}{\ell} \right), -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{s}{\ell} \right), 0] \\ \text{Si se usa } y &\longrightarrow m \longrightarrow (\pm \sqrt{\ell^2 - y^2}, y, 0) \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde se ha usado $f_2^{(h)}$ de (3.32). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser s o y .

Por otro lado, si en (3.20) en vez de sustituir el valor de x se sustituye ahora el valor de y dado en (3.31) resulta,

# partículas	$\longrightarrow N = 1$	(3.35)
Posiciones	$\longrightarrow m \longrightarrow [x, -\ell \cos(\frac{S}{\ell}), z]$	
Ligaduras	$\longrightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0. \\ x = \ell \sin(\frac{S}{\ell}) \Rightarrow f_2^{(h)} = x - \ell \sin(\frac{S}{\ell}) = 0. \end{cases}$	
# ligaduras	$\longrightarrow K^{(h)} = 2$	
# G.de libertad	$\longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1$	

Aquí ahora la longitud de arco S puede ser vista como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana y . La ligadura $f_2^{(h)}$ que originalmente en (3.20) asociaba a las coordenadas x y y , ahora asocia a las coordenadas x y S . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ S \\ z \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

que siguen siendo 3 como originalmente eran al usar sólo coordenadas Cartesianas y son dependientes. De forma análoga a (3.22), de (3.35) se puede observar que es posible usar sólo S o sólo x de manera que la posición de m puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } S &\longrightarrow m \longrightarrow [\ell \sin(\frac{S}{\ell}), -\ell \cos(\frac{S}{\ell}), 0] \\ \text{Si se usa } x &\longrightarrow m \longrightarrow (x, -\sqrt{\ell^2 - x^2}, 0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde se ha usado $f_2^{(h)}$ de (3.35). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser S o x .

Nótese, como ocurrió antes con σ , \mathcal{L} y ϑ , lo siguiente:

1. De (3.32) y (3.35) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido la nueva variable S .
2. La posibilidad de expresar la posición de la masa pendular m sólo en función de x , sólo de y o sólo S como se puede ver en (3.34) y (3.37), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema.
3. Que, a diferencia de x y y , la variable S no se refiere a la partícula sino al sistema como un todo.

Por último, si para el mismo sistema se considera ahora el área \mathcal{A} del sector circular barrido por la cuerda que se muestra en la figura 3.2d*,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\ell^2\sigma \quad (3.38)$$

donde σ corresponde a la amplitud de dicho sector y si, además, se definen sus signos mediante,

$$\mathcal{A} \rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si se mide en el cuarto cuadrante.} \\ < 0 & \text{si se mide en el tercer cuadrante.} \end{cases} \quad (3.39)$$

entonces es fácil darse cuenta, a partir de la mencionada figura, que es posible escribir las coordenadas x y y como,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \end{cases} \quad (3.40)$$

que muestra la relación entre la variable \mathcal{A} y las coordenadas x y y .

Nótese en (3.40) que conocer el valor de \mathcal{A} en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x y y , esto abre la posibilidad de usar \mathcal{A} como una “coordenada”.

Procediendo como antes, si en (3.20) se elimina la coordenada x sustituyéndola por su correspondiente valor dado en (3.40) resulta,

# partículas	$\longrightarrow N = 1$
Posiciones	$\longrightarrow m \longrightarrow [\ell \operatorname{Sen} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right), y, z]$
Ligaduras	$\longrightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0. \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \Rightarrow f_2^{(h)} = y + \ell \operatorname{Cos} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right) = 0. \end{cases}$
# ligaduras	$\longrightarrow K^{(h)} = 2$
# G.de libertad	$\longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1$

Aquí el área \mathcal{A} puede ser vista como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana x . La ligadura $f_2^{(h)}$ que originalmente en (3.20) asociaba a las coordenadas x y y , ahora asocia a las coordenadas y y \mathcal{A} . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{A} \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

*El área \mathcal{A} de un sector circular de radio R y amplitud o ángulo central β (ángulo entre los dos radios que forman el sector) viene dada por $\mathcal{A} = \frac{1}{2}R^2\beta$.

que son 3 como originalmente eran en (3.20) y son dependientes. De forma análoga a (3.22), de (3.41) se puede observar que es posible usar sólo \mathcal{A} o sólo y de manera que la posición de m puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } \mathcal{A} &\longrightarrow m \longrightarrow \left[\ell \operatorname{Sen} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right), -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right), 0 \right] \\ \text{Si se usa } y &\longrightarrow m \longrightarrow \left(\pm \sqrt{\ell^2 - y^2}, y, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde se ha usado $f_2^{(h)}$ de (3.32). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser \mathcal{S} o y .

Por otro lado, si en (3.20) en vez de sustituir el valor de x se sustituye ahora el valor de y dado en (3.40) resulta,

# partículas	$\longrightarrow N = 1$
Posiciones	$\longrightarrow m \longrightarrow [x, -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right), z]$
Ligaduras	$\longrightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z = 0. \\ x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \Rightarrow f_2^{(h)} = x - \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right) = 0. \end{cases}$
# ligaduras	$\longrightarrow K^{(h)} = 2$
# G.de libertad	$\longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1$

Aquí ahora el área \mathcal{A} puede ser vista como una “coordenada” que sustituyó a la coordenada Cartesiana y . La ligadura $f_2^{(h)}$ que originalmente en (3.20) asociaba a las coordenadas x y y , ahora asocia a las coordenadas x y \mathcal{A} . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ \mathcal{A} \\ z \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

que siguen siendo 3 como originalmente eran al usar sólo coordenadas Cartesianas y son dependientes. De forma análoga a (3.22), de (3.44) se puede observar que es posible usar sólo \mathcal{A} o sólo x de manera que la posición de m puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } \mathcal{A} &\longrightarrow m \longrightarrow \left[\ell \operatorname{Sen} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right), -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right), 0 \right] \\ \text{Si se usa } x &\longrightarrow m \longrightarrow \left(x, -\sqrt{\ell^2 - x^2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde se ha usado $f_2^{(h)}$ de (3.44). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene una coordenada independiente que puede ser \mathcal{A} o x .

Nótese, como ocurrió antes con σ , \mathcal{L} , ϑ y \mathcal{S} , lo siguiente:

1. De (3.41) y (3.44) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido la nueva variable \mathcal{A} .
2. La posibilidad de expresar la posición de la masa pendular m sólo en función de x , sólo de y o sólo \mathcal{A} como se puede ver en (3.43) y (3.46), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema.
3. Que, a diferencia de x y y , la variable \mathcal{A} no se refiere a la partícula sino al sistema como un todo.

Hasta ahora sólo se han considerado sistemas de dos dimensiones. Para finalizar la discusión, considérese ahora el sistema mecánico tridimensional mostrado en la figura 3.3a, que consiste en una partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie interna del cono liso $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{Tg}^2 \alpha$, con α un ángulo constante. Entonces para este

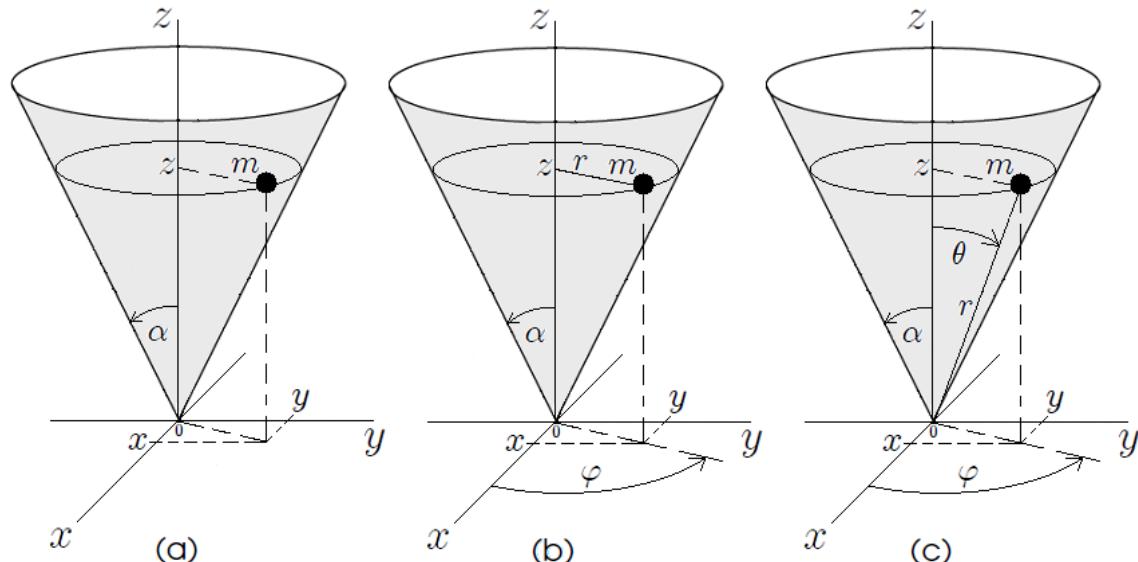


Figura 3.3: Partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie interna del cono liso $\sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{Tg} \alpha$, con α un ángulo constante: (a) partícula posicionada usando coordenadas Cartesianas, (b) usando coordenadas cilíndricas y (c) usando coordenadas esféricas.

sistema se tiene,

# partículas	$\longrightarrow N = 1$	
Posiciones	$\longrightarrow m \longrightarrow (x, y, z)$	
Ligaduras	$\longrightarrow x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{Tg}^2 \alpha \Rightarrow f_1^{(h)} = x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{Tg}^2 \alpha = 0.$	(3.47)
# ligaduras	$\longrightarrow K^{(h)} = 1$	
# G.de libertad	$\longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2$	

siendo las coordenadas del sistema,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

que no son independientes debido a la presencia de ligaduras. Como el número de grados de libertad es 2 significa que existen sólo dos coordenadas independiente, es decir, que es posible usar dos coordenadas para describir el sistema. En este caso es posible usar sólo x y y o x y z o y y z de manera que la posición de m puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \text{Si se usa } x \text{ y } y &\longrightarrow m \longrightarrow \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{Ctg} \alpha \right) \\ \text{Si se usa } x \text{ y } z &\longrightarrow m \longrightarrow \left(x, \sqrt{z^2 \operatorname{Tg}^2 \alpha - x^2}, z \right) \\ \text{Si se usa } y \text{ y } z &\longrightarrow m \longrightarrow \left(\pm \sqrt{z^2 \operatorname{Tg}^2 \alpha - y^2}, y, z \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde se ha usado $f_1^{(h)}$. Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene dos coordenadas independientes que pueden ser x y y o x y z o y y z .

Es posible definir las variables,

$$\begin{cases} r \longrightarrow \text{distancia entre } m \text{ y el origen del sistema de coordenadas Cartesianas, } r \in [0, \infty). \\ \varphi \longrightarrow \text{ángulo entre la proyección de } r \text{ sobre el plano } xy \text{ y el eje } +x, \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (3.50)$$

como se observa en la figura 3.3b, siendo fácil encontrar que la relación entre estas variables y las coordenadas Cartesianas de la posición de m vienen dadas por,

$$\begin{cases} x = r \operatorname{Cos} \varphi \\ y = r \operatorname{Sen} \varphi \end{cases} \quad (3.51)$$

manteniéndose la coordenada z inalterada. Estas no son más que las usuales coordenadas cilíndricas.

Nótese en (3.51) que conocer el valor de r y φ en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x y y , esto abre la posibilidad de usar r y φ como "coordenadas".

Procediendo como antes, si en (3.47) se eliminan la coordenadas x y y sustituyéndolas por sus correspondientes valores dados en (3.51) resulta,

$$\begin{array}{ll}
 \# \text{partículas} & \longrightarrow N = 1 \\
 \text{Posiciones} & \longrightarrow m \longrightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \\
 \text{Ligaduras} & \longrightarrow r = z \operatorname{Tg} \alpha \Rightarrow f_1^{(h)} = r - z \operatorname{Tg} \alpha = 0. \\
 \# \text{ligaduras} & \longrightarrow K^{(h)} = 1 \\
 \# \text{G.de libertad} & \longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2
 \end{array} \tag{3.52}$$

Aquí r y φ pueden ser vistas como "coordenadas" que sustituyeron a las coordenadas Cartesianas x y y . La ligadura $f_1^{(h)}$ que originalmente en (3.47) asociaba a las coordenadas x , y y z ahora asocia a las coordenadas r y z . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{l} r \\ \varphi \\ z \end{array} \right\} \tag{3.53}$$

que son 3 como originalmente eran en (3.47). De forma análoga a (3.49), de (3.52) se puede observar que es posible usar sólo r y φ o φ y z de manera que la posición de m puede ser escrita como,

$$\begin{array}{ll}
 \text{Si se usa } r \text{ y } \varphi & \longrightarrow m \longrightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r \operatorname{Ctg} \alpha) \\
 \text{Si se usa } \varphi \text{ y } z & \longrightarrow m \longrightarrow (z \operatorname{Tg} \alpha \cos \varphi, z \operatorname{Tg} \alpha \sin \varphi, z)
 \end{array} \tag{3.54}$$

donde se ha usado $f_1^{(h)}$ de (3.52). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene dos coordenadas independientes r y φ o φ y z .

Nótese, como ocurrió antes con σ , \mathcal{L} , ϑ , S y A , lo siguiente:

1. De (3.52) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido las nuevas variables r y φ .
2. La posibilidad de expresar la posición de m sólo en función de r y φ o sólo de φ y z como se puede ver en (3.54), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema.
3. En este caso r y φ si se refieren a una partícula al igual que las coordenadas Cartesianas.

Si ahora para el mismo sistema se definen las variables,

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \text{distancia entre } m \text{ y el origen del sistema de coordenadas Cartesianas, } r \in [0, \infty). \\ \varphi \rightarrow \text{ángulo entre la proyección de } r \text{ sobre el plano } xy \text{ y el eje } +x, \varphi \in [0, 2\pi]. \\ \theta \rightarrow \text{ángulo entre el eje } +z \text{ y el vector de posición } \vec{r} \text{ de } m, \theta \in [0, \pi]. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

como se observa en la figura 3.3(c), es fácil encontrar que la relación entre estas variables y las coordenadas Cartesianas de la posición de m vienen dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \varphi \\ y = r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi \\ z = r \operatorname{Cos} \theta \end{array} \right. \quad (3.56)$$

que no son más que las usuales coordenadas esféricas, donde θ es la colatitud o ángulo polar y φ es el azimut o longitud. Hay que hacer constar que los rangos anteriores no son los únicos usados. Algunos autores usan la latitud (de $-\pi/2$ a $\pi/2$ rad, situándose el 0 en el plano xy) en lugar de la colatitud, y el azimut en sentido horario y variando entre $-\pi$ a π rad.

Nótese en (3.56) que conocer el valor de r , φ y θ en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x , y y z , que abre la posibilidad de usar r , φ y θ como "coordenadas".

Procediendo como antes, si en (3.47) se eliminan la coordenadas x y y sustituyén-

dolas por sus correspondientes valores dados en (3.56) resulta,

# partículas	$\rightarrow N = 1$	
Posiciones	$\rightarrow m \rightarrow (r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \varphi, r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi, r \operatorname{Cos} \theta)$	
Ligaduras	$\rightarrow \theta = \alpha \Rightarrow f_1^{(h)} = \theta - \alpha = 0.$	
# ligaduras	$\rightarrow K^{(h)} = 1$	
# G.de libertad	$\rightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2$	(3.57)

Aquí r , φ y θ pueden ser vistas como “coordenadas” que sustituyeron a las coordenadas Cartesianas x , y y z , es decir, las sustituyen en su totalidad. La ligadura $f_1^{(h)}$ que originalmente en (3.47) asociaba a las coordenadas x , y y z , ahora fija a la coordenada θ . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{l} r \\ \varphi \\ \theta \end{array} \right\} \quad (3.58)$$

que son 3 como originalmente eran en (3.47), donde θ tiene un valor fijo. De forma análoga a (3.49), de (3.57) se puede observar que es posible usar sólo r y φ de manera que la posición de m puede ser escrita como,

$$\text{Si se usa } r \text{ y } \varphi \rightarrow m \rightarrow (r \operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Cos} \varphi, r \operatorname{Sen} \alpha \operatorname{Sen} \varphi, r \operatorname{Cos} \alpha) \quad (3.59)$$

donde se ha usado $f_1^{(h)}$ de (3.57). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene dos coordenadas independientes r y φ .

Nótese, como ocurrió con las anteriores variables definidas, lo siguiente:

1. De (3.57) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido las nuevas variables r , φ y θ .
2. La posibilidad de expresar la posición de m sólo en función de r y φ como se puede ver en (3.59), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema.
3. En este caso r , φ y θ si se refieren a una partícula al igual que las coordenadas Cartesianas.

Por último, si para el mismo sistema se definen ahora las variables,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} \rightarrow \text{distancia entre } m \text{ y el punto } P \text{ que se encuentra sobre el eje } +z \text{ a una distancia } h \text{ sobre el origen del sistema de coordenadas Cartesianas, } \mathcal{L} \in [h, \infty]. \\ \sigma \rightarrow \text{ángulo entre } \mathcal{L} \text{ y el eje } +z, \sigma \in [-\pi, \pi]. \\ \varphi \rightarrow \text{ángulo entre la proyección de } \mathcal{L} \text{ sobre el plano } xy \text{ y el eje } +x, \varphi \in [0, 2\pi], \text{ es decir, la misma } \varphi \text{ de las cilíndricas y las esféricas.} \end{array} \right. \quad (3.60)$$

como se muestra en la figura 3.4a, es posible encontrar que la relación entre estas variables y las coordenadas Cartesianas de la posición de m vienen dadas por,

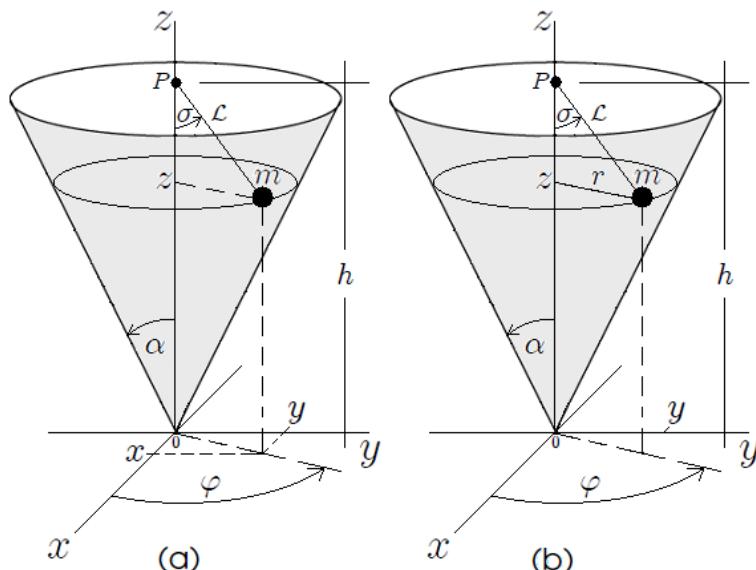


Figura 3.4: Partícula de masa m obligada a moverse sobre la superficie interna del cono liso $\sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{Tg} \alpha$, con α un ángulo constante: (a) relación entre las coordenadas Cartesianas (x, y, z) y las nuevas variables \mathcal{L}, σ y φ , (b) relación entre las coordenadas cilíndricas (r, φ, z) y las nuevas variables \mathcal{L}, σ y φ (aquí la nueva variable φ coincide con la coordenada cilíndrica φ).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \operatorname{Cos} \varphi \\ y = \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \operatorname{Sen} \varphi \\ z = h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma \end{array} \right. \quad (3.61)$$

pudiéndose escribir la posición de la partícula m como,

$$m \rightarrow (x, y, z) = (\mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \operatorname{Cos} \varphi, \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \operatorname{Sen} \varphi, h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \quad (3.62)$$

Nótese en (3.62) que conocer el valor de \mathcal{L}, σ y φ en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas x, y y z , que abre la posibilidad de usar \mathcal{L}, σ y φ como "coordenadas".

Procediendo como antes, si en (3.47) se eliminan la coordenadas x , y y z sustituyéndolas por sus correspondientes valores dados en (3.61) resulta,

$$\begin{aligned}
 \# \text{ partículas} &\longrightarrow N = 1 \\
 \text{Posiciones} &\longrightarrow m \longrightarrow (\mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \operatorname{Cos} \varphi, \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \operatorname{Sen} \varphi, h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \\
 \text{Ligaduras} &\longrightarrow \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma = (h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \operatorname{Tg} \alpha \\
 &\Rightarrow f_1^{(h)} = \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma - (h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \operatorname{Tg} \alpha = 0 \\
 \# \text{ ligaduras} &\longrightarrow K^{(h)} = 1 \\
 \# \text{ G.de libertad} &\longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Aquí \mathcal{L} , σ y φ pueden ser vistas como “coordenadas” que sustituyeron a las coordenadas Cartesianas x , y y z , es decir, las sustituyen en su totalidad. La ligadura $f_1^{(h)}$ que originalmente en (3.47) asociaba a las coordenadas x , y y z , ahora relaciona a las coordenadas \mathcal{L} y σ . En vista de lo anterior, las coordenadas del sistema son ahora,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{L} \\ \sigma \\ \varphi \end{array} \right\} \tag{3.64}$$

que son 3 como originalmente eran en (3.47) donde tiene un valor fijo. De forma análoga a (3.59), de (3.63) se puede observar que es posible usar, por ejemplo, sólo σ y φ de manera que la posición de m puede ser escrita como,

$$\text{Si se usa } \sigma \text{ y } \varphi \longrightarrow m \longrightarrow \left(\frac{h \operatorname{Cos} \varphi}{\operatorname{Ctg} \alpha + \operatorname{Ctg} \sigma}, \frac{h \operatorname{Sen} \varphi}{\operatorname{Ctg} \alpha + \operatorname{Ctg} \sigma}, \frac{h}{1 + \operatorname{Tg} \alpha \operatorname{Ctg} \sigma} \right) \tag{3.65}$$

donde se ha usado $f_1^{(h)}$ de (3.63). Por lo tanto, se puede decir que el sistema tiene dos coordenadas independientes r y φ .

Nótese, como ocurrió con las anteriores variables definidas, lo siguiente:

1. De (3.63) que el número de grados de libertad s del sistema mecánico se mantuvo inalterado a pesar de haber introducido las nuevas variables \mathcal{L} , σ y φ .
2. La posibilidad de expresar la posición de m sólo en función, por ejemplo, de σ y φ como se puede ver en (3.65), lo cual está en concordancia con el número de grados de libertad del sistema $s = 2$.

Como se sabe, no sólo es posible emplear coordenadas Cartesianas para ubicar las partículas que constituyen un sistema mecánico dado sino que también se pueden

emplear para tal fin cualesquiera de las coordenadas estándares conocidas. En la presente sección, hasta aquí, sólo se han empleado coordenadas Cartesianas. Si se utilizan cualesquiera de los restantes sistemas de coordenadas estándares, igualmente las nuevas variables temporales posibles de definir estarán relacionadas matemáticamente con dichas coordenadas. Considérese nuevamente el ejemplo mostrado en la figura 3.3a. En la figura 3.4b se muestra el mismo sistema mecánico en el cual se han empleado coordenadas cilíndricas r , φ y z para ubicar a la partícula de masa m y se han definido las nuevas variables \mathcal{L} , σ , que son las mismas definidas en (3.60). Es fácil encontrar, al analizar la mencionada figura, relaciones matemáticas entre estas variables nuevas y las coordenadas cilíndricas resultando,

$$\begin{cases} r = \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \\ z = h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma \end{cases} \quad (3.66)$$

y la nueva variable φ coincide con la coordenada cilíndrica φ , por lo tanto no sufre cambios. Entonces la posición de la partícula m se puede escribir ahora como,

$$m \longrightarrow (r, \varphi, z) = (\mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma, \varphi, h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \quad (3.67)$$

Nótese en (3.67) que conocer el valor de \mathcal{L} , σ y φ en cualquier instante de tiempo significa conocer indirectamente las coordenadas r , φ y z , que abre la posibilidad de usar \mathcal{L} , σ y φ como "coordenadas".

Para este caso se tiene,

# partículas	$\longrightarrow N = 1$	
Posiciones	$\longrightarrow m \longrightarrow (\mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma, \varphi, h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma)$	
Ligaduras	$\longrightarrow \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma = (h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \operatorname{Tg} \alpha$ $\Rightarrow f_1^{(h)} = \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma - (h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \operatorname{Tg} \alpha = 0$	
# ligaduras	$\longrightarrow K^{(h)} = 1$	
# G.de libertad	$\longrightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2$	

Además de longitudes de arco, ángulos y áreas también es posible usar otras cantidades como coordenadas, incluso, cantidades físicas. Con referencia al ejemplo mostrado en la figura 3.3a, se tiene que la energía potencial U de la partícula viene dada por,

$$U = mgz \quad (3.69)$$

a partir de la cual se tiene que,

$$z = \frac{U}{mg} \quad (3.70)$$

de esta manera la tabla 3.47 puede ser reescrita como,

# partículas	$\rightarrow N = 1$
Posiciones	$\rightarrow m \rightarrow \left(x, y, \frac{U}{mg} \right)$
Ligaduras	$\rightarrow x^2 + y^2 = U^2 \left(\frac{\operatorname{Tg} \alpha}{mg} \right)^2 \Rightarrow f_1^{(h)} = x^2 + y^2 - U^2 \left(\frac{\operatorname{Tg} \alpha}{mg} \right)^2 = 0.$
# ligaduras	$\rightarrow K^{(h)} = 1$
# G.de libertad	$\rightarrow s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2$

siendo las coordenadas ahora,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ U \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

es decir, se puede usar U como coordenada. Podría emplearse también, por ejemplo, la energía cinética T de la partícula. En efecto,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow z = \sqrt{\frac{2T}{m} - x^2 - y^2} \quad (3.73)$$

pudiéndose escribir ahora la ecuación de la ligadura como,

$$x^2 + y^2 = \frac{2T}{m} \operatorname{Cos}^2 \alpha \quad (3.74)$$

No sólo se pueden usar longitudes como coordenadas, también se pueden usar cantidades angulares, áreas, energías, etc. Los sistemas de coordenadas resultantes pueden estar constituidos por cantidades que son todas longitudes, áreas, energías, etc. o una combinación de las mismas.

Se podría continuar definiendo nuevas variables temporales de infinitud de maneras diferentes. Existen muchas posibilidades de elección y por ende, en general, se podrían encontrar relaciones matemáticas entre éstas y las coordenadas estándares utilizadas para ubicar las partículas del sistema, empleando para ello procedimientos análogos a los mostrados en los anteriores ejemplos. Dichas relaciones matemáticas pueden involucrar más de una de estas nuevas variables a la vez, como se evidencia en (3.51) y (3.56), y ser muy simples o muy complicadas, lo cual dependerá de la estructura geométrica del sistema mecánico, del número de variables definidas y de la forma como sean definidas. Esto último dependerá muchísimo de la experiencia que se tenga.

De todos los ejemplos mostrados anteriormente y las correspondientes discusiones, es posible concluir lo siguiente:

1. Dado un sistema mecánico es posible, en general, escribir las coordenadas estándares (todas o algunas de ellas) de las posiciones de sus partículas como función de una o más nuevas variables definidas a conveniencia en el mismo, es decir, es posible parametrizarlas por medio de éstas. Estas relaciones serán más o menos complicadas dependiendo de la forma cómo se defina cada una de las nuevas variables, de la cantidad de ellas y de la geometría del sistema mecánico objeto de estudio.
2. Como consecuencia de lo anterior, la nuevas variables pueden ser usadas como coordenadas y conformar en conjunto, solas o en combinación con algunas coordenadas estándares, nuevos sistemas de coordenadas que permiten la descripción de sistema mecánico dado.
3. Es posible construir infinitos conjuntos de coordenadas que pueden estar formados por:
 - 3.1. Sólo coordenadas estándares.
 - 3.2. Sólo coordenadas nuevas.
 - 3.3. Una mezcla de coordenadas estándares y coordenadas nuevas.
4. Estos sistemas de coordenadas conforman, a diferencia de los estándares, un espacio de $3N$ dimensiones del cual se hablará más adelante en la sección 3.4.
5. Un aspecto importantísimo de hacer notar es que, a diferencia de los sistemas estándares que pueden ser empleados inalterados para la descripción de cualquier sistema mecánico, los nuevos sistemas de coordenadas creados con la participación de las nuevas variables son para un sistema mecánico en particular, debido a la naturaleza de las mismas.
6. Las nuevas variables dependientes del tiempo pueden tener dimensiones de ángulo, longitud, área, energía, etc. En general pueden tener cualquier dimensión, entre las que se pueden incluir además de las anteriores: momento, presión, torque, etc., e incluso ser completamente adimensionales, pudiendo no tener ningún significado físico asociado. Otro aspecto importante de las nuevas coordenadas es que éstas no necesariamente se refieren individualmente a cada una de las partículas que constituyen al sistema mecánico, también pueden referirse al sistema como un todo, tal cual ocurre con \mathcal{A} en (3.40). Esto es ventajoso ya que en muchos sistemas mecánicos no es necesario conocer, en cada instante, las coordenadas de posición (coordenadas estándares) de todas y cada una de las partículas que los constituyen.

7. El número de grados de libertad s para un mismo sistema mecánico permanece inalterado al usar distintos de estos nuevos sistemas de coordenadas al momento de describirlos, es decir, son una propiedad del mismo.
8. El número de ligaduras presentes también permanece inalterado. Si existen ligaduras entre las coordenadas estándares empleadas originalmente para la ubicación de las partículas del sistema mecánico entonces, en general, algunas o todas las ligaduras podrán ser expresadas en función de las nuevas variables. De esta manera se pueden establecer ligaduras entre únicamente la nuevas variables o entre éstas y las coordenadas estándares que se mantuvieron inalteradas.
9. El número de coordenadas de un sistema mecánico permanece inalterado al emplear distintos sistemas de coordenadas para su descripción. Luego de expresada la posición de sus partículas en función de las nuevas Ω_N variables definidas y las Ω_E coordenadas estándares que se mantuvieron inalteradas, su número total vendrá dado por,

$$\Omega_N + \Omega_E = 3N$$

es decir, es igual al número total de coordenadas estándares que fueron utilizadas originalmente antes de la definición de las nuevas variables.

10. En las coordenadas cilíndricas y esféricas, las variables r , φ y θ pueden ser vistas como nuevas variables cuando se ha partido de las coordenadas Cartesianas como sistema estándar.

3.2 Descripción de un sistema mecánico

Supóngase que se tiene un sistema de N partículas sujeto a $K^{(h)}$ ligaduras holónomas y $K^{(nh)}$ ligaduras no-holónomas. Como se vio en el capítulo 2, existirá un conjunto total de $3N$ coordenadas Cartesianas $x_{i,\alpha}$ (dependientes + independientes) que constituyen las coordenadas estándares de posición de las N partículas, las cuales estarán relacionadas directamente mediante las $K^{(h)}$ ligaduras holónomas e indirectamente mediante las $K^{(nh)}$ ligaduras no-holónomas y, en vista de lo estudiado antes, lo mismo ocurre para los nuevos sistemas de coordenadas aquí introducidos.

Para describir un sistema mecánico se requiere que las coordenadas del sistema de coordenadas a utilizar sean independientes. Es posible construir a partir de las $3N$ coordenadas (dependientes + independientes) un conjunto de este tipo. Para lograrlo, las ligaduras pueden ser introducidas a la formulación de dos formas:

1. **En forma implícita:** las ligaduras son utilizadas para eliminar las coordenadas dependientes mediante el despeje de estas últimas a partir de las primeras. Es obvio que esto es sólo posible, en general, para el caso de las ligaduras holónomas y semi-holónomas.
2. **En forma explícita:** las ligaduras son introducidas directamente a la formulación mediante el empleo, **al menos para la forma de las ligaduras a estudiar en el presente texto**, del denominado *Método de los Multiplicadores de Lagrange*, el cual será empleado para tal fin en los capítulos ?? y ??; introduciendo la ventaja adicional de permitir el cálculo de las fuerzas de ligadura que, como se sabe, no son conocidas a priori. Lo anterior no permite eliminar las coordenadas dependientes pero hace que estas últimas puedan ser consideradas ahora como independientes. Esta es la forma utilizada para introducir las ligaduras no-holónomas ya que no es posible usarlas para eliminar coordenadas. También puede ser usada para el caso de ligaduras holónomas y semi-holónomas cuando no se deseé reducir el número de coordenadas.

Específicamente, se puede construir un conjunto de coordenadas independientes:

1. **Si el sistema es holónico:**

- 1.1. Mediante la introducción en forma implícita de las $K^{(h)}$ ligaduras holónomas en las $3N$ coordenadas, obteniéndose así $3N - K^{(h)}$ coordenadas independientes.
- 1.2. Mediante la introducción en forma explícita de las $K^{(h)}$ ligaduras holónomas, pudiéndose considerar las $3N$ coordenadas ahora como independientes.

2. **Si el sistema es no-holónico:**

- 2.1. **El sistema sólo tiene ligaduras no-holónomas:** mediante la introducción de las $K^{(nh)}$ ligaduras no-holónomas en forma explícita, pudiéndose considerar ahora las $3N$ coordenadas como independientes.

2.2. **El sistema tiene ligaduras holónomas y no-holónomas:**

- i. Mediante la introducción en forma implícita de las $K^{(h)}$ ligaduras holónomas y las $K^{(nh)}$ no-holónomas en forma explícita, obteniéndose así $3N - K^{(h)}$ coordenadas independientes.
- ii. Mediante la introducción en forma explícita de tanto las $K^{(h)}$ ligaduras holónomas como las $K^{(nh)}$ no-holónomas, pudiéndose considerar las $3N$ coordenadas ahora como independientes.

De todo lo anterior ahora se puede definir la cantidad η ,

Se definirá η como el número mínimo de coordenadas independientes con las que se puede describir completamente un determinado sistema mecánico y que viene dado por,

$$\eta = 3N - K^{(h)} \begin{cases} \text{independientes} \longrightarrow \text{sistema holónomo} \\ \text{dependientes} \longrightarrow \text{sistema no-holónomo} \end{cases} \quad (3.75)$$

Es fácil llegar a la conclusión de que,

$$\begin{cases} \eta = s \longrightarrow \text{para un sistema holónomo} \\ \eta > s \longrightarrow \text{para un sistema no-holónomo} \end{cases} \quad (3.76)$$

donde s es el número de grados de libertad cinemáticos $s = 3N - K^{(h)} - K^{(nh)}$. Es decir,

$$\eta \geq s$$

De una forma más detallada,

$$\eta = \begin{cases} 3N \rightarrow \begin{cases} \checkmark \text{ Si no existen ligaduras.} \\ \checkmark \text{ Si existen únicamente ligaduras holónomas que son usadas explícitamente.} \\ \checkmark \text{ Si existen únicamente ligaduras no-holónomas.} \\ \checkmark \text{ Si existen ligaduras holónomas y no-holónomas donde las primeras son usadas explícitamente.} \end{cases} \\ 3N - K^{(h)} \rightarrow \begin{cases} \checkmark \text{ Si únicamente existen ligaduras holónomas que son usadas implícitamente.} \\ \checkmark \text{ Si existen ligaduras holónomas y no-holónomas donde las primeras son usadas implícitamente.} \end{cases} \end{cases} \quad (3.77)$$

pudiéndose observar que,

$$\eta \leq 3N$$

3.3 Coordenadas Generalizadas

3.3.1 Definición

A los nuevos sistemas de coordenadas encontrados en la sección anterior se les denomina, en Mecánica Clásica, *Sistemas de Coordenadas Generalizadas*, mientras que a cada una de sus coordenadas se les denominará *Coordinada Generalizada*, esto es debido a la gran diversidad de variables que pueden ser usadas como coordenadas para describir completamente un sistema mecánico. Suelen ser denotadas con la letra q .

Se denominan *Coordenadas Generalizadas* a un conjunto de $\eta \leq 3N$ variables q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, \eta$) con las cuales es posible, para cualquier instante de tiempo t , describir la configuración de un sistema de partículas dado.

Estas coordenadas son llamadas también, en algunos textos, *Coordenadas Lagrangianas* y facilitan el cambio de énfasis a partir del mundo más físico de la Mecánica Vectorial Newtoniana al mundo más matemático de la Mecánica Analítica correspondiente a las Mecánicas de Lagrange y Hamilton, las cuales serán estudiadas a partir del capítulo ??.

3.3.2 Ecuaciones de transformación entre las coordenadas estándares y las coordenadas generalizadas

En general, existirán relaciones entre los N vectores de posición de cada una de las N partículas de un sistema mecánico y $\eta \leq 3N$ coordenadas generalizadas q_i para fijar la configuración del mismo, las cuales están relacionadas mediante,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t), \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N; j = 1, 2, 3, \dots, \eta \quad (3.78)$$

que conforman el sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_\eta, t) \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_\eta, t) \\ \vec{r}_3 = \vec{r}_3(q_1, q_2, q_3, \dots, q_\eta, t) \\ \vdots \\ \vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, q_3, \dots, q_\eta, t) \end{array} \right. \quad (3.79)$$

A los vectores de posición \vec{r}_i de cada partícula serán denominados, por extensión, «Coordenadas Vectoriales». Está claro que éstas son equivalentes a definir las $3N$ coordenadas cartesianas correspondientes. Podrá existir dependencia explícita del tiempo en (3.78) cuando se hayan tomado sistemas de coordenadas móviles, o bien cuando hayan ligaduras reónomas.

Las expresiones (3.78) establecen la relación entre las viejas coordenadas \vec{r}_i y las nuevas η coordenadas generalizadas q_j . Se supone que se puede realizar siempre la transformación en sentido contrario o transformación inversa para así obtener cualquier q_j como una función de las coordenadas vectoriales \vec{r}_i y el tiempo, es decir,

$$q_j = q_j(\vec{r}_i, t), \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N; j = 1, 2, 3, \dots, \eta \quad (3.80)$$

que representan el sistema de ecuaciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) \\ q_2 = q_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) \\ q_3 = q_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) \\ \vdots \\ q_\eta = q_\eta(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) \end{array} \right. \quad (3.81)$$

Se denomina *Sistema Natural* a todo aquél en el que el conjunto de ecuaciones (3.78) y (3.80) no dependen explícitamente del tiempo, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j) \\ q_j = q_j(\vec{r}_i) \end{array} , \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N; j = 1, 2, 3, \dots, \eta \right. \quad (3.82)$$

3.4 Espacio de Configuración

Dado un sistema de N partículas, se puede representar su estado mediante un punto en un espacio denominado *Espacio de Configuración*.

Se da el nombre de *Espacio de Configuración* al espacio abstracto constituido por cualquier conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_i escogidas para describir el sistema.

La dimensión de este espacio es $3N$ y cada dimensión de este espacio corresponde a una de las coordenadas generalizadas q_i . Cada punto en este espacio, denominado *Punto de Configuración*, describe la *Configuración del Sistema* en un instante particular y la historia temporal del mismo vendrá representada mediante una curva. (ver figura 3.5).

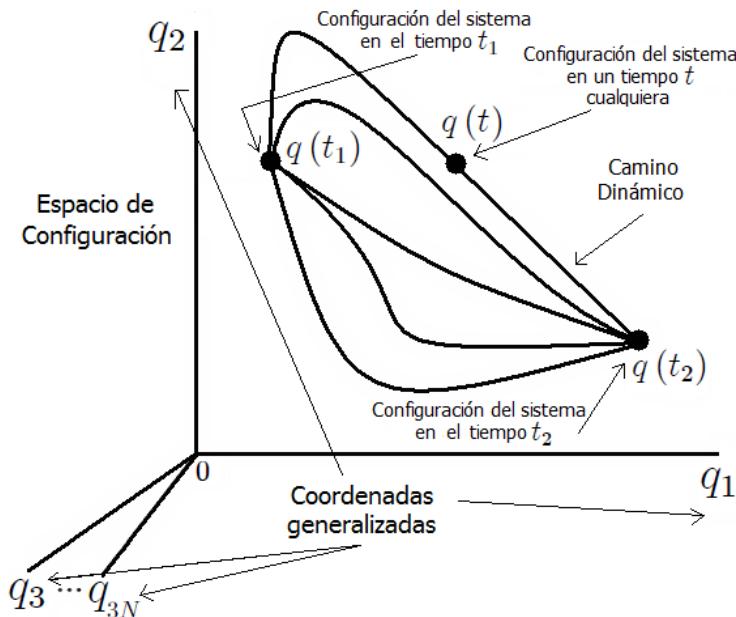


Figura 3.5: El historial temporal de un sistema es representado mediante una curva en el espacio de configuración. Se muestran cuatro posibles.

A través de cada punto pasa un infinito número de curvas que representan “movimientos” posibles del sistema. Cada curva corresponde a un conjunto particular de condiciones iniciales. Por lo tanto, se puede hablar del “camino” de un sistema como si éste se “moviese” a través del espacio de configuración. Sin embargo,

se debe tener cuidado de no confundir esta terminología con aquella aplicada al movimiento de una partícula a lo largo de un camino en el espacio tridimensional ordinario.

En el espacio de configuración, a este camino se le denomina *Camino Dinámico*.

El movimiento de un sistema completo es posible así describirlo mediante una única trayectoria en el espacio de configuración $3N$ -dimensional, en vez de un conjunto de N trayectorias en el espacio de posición 3-dimensional ordinario.

En el caso de existir ligaduras holónomas, el punto de configuración se mueve en un espacio reducido de $3N - K^{(h)} = \eta$ dimensiones debido a que debe permanecer en cada una de las $K^{(h)}$ superficies de ligadura, es decir, en su intersección común. De esta manera, ciertas regiones del espacio de configuración $3N$ -dimensional no son accesibles.

En contraste, en el caso de ligaduras no-holónomas, son los movimientos diferenciales los que están limitados. Puesto que las ecuaciones diferenciales que representan a estas ligaduras no-holónomas no son integrables, no existen superficies de ligadura finitas en el espacio de configuración y no hay reducción de la región accesible. En otras palabras, mediante la elección apropiada del camino dinámico, es posible alcanzar cualquier punto en el espacio de configuración a partir de cualquier otro.

Se puede definir un nuevo espacio que involucre a las coordenadas generalizadas q_i y sus correspondientes velocidades generalizadas \dot{q}_i :

Se da el nombre de *Espacio de Estado* al espacio abstracto $6N$ dimensional constituido por cualquier conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_i y sus correspondientes $3N$ velocidades generalizadas \dot{q}_i .

Aquí, al contrario de lo que ocurre en el espacio de configuración, las ligaduras no-holónomas limitan la región accesible del espacio de estado. Este espacio guarda una relación íntima con el *Espacio de Fase*, a ser estudiado en el capítulo ??.

3.5 Algunas magnitudes físicas en coordenadas generalizadas

Seguidamente serán expresadas, en coordenadas generalizadas, algunas magnitudes físicas de uso frecuente.

3.5.1 Desplazamiento

El desplazamiento $d\vec{r}_i$ puede ser encontrado al hallar el diferencial total de (3.78). En efecto,

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.83)$$

3.5.2 Velocidad

Nuevamente, partiendo de las transformaciones (3.78) pero ahora hallando su derivada total con respecto al tiempo t resulta que,

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.84)$$

Aquí a las cantidades \dot{q}_j se les da el nombre de *Velocidades Generalizadas*.

Para el caso particular de un sistema natural se puede escribir,

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.85)$$

puesto que $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$.

3.5.3 Aceleración

Al derivar con respecto al tiempo (3.85) resulta,

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i &= \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right] + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

pero,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \quad (3.87)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k \quad (3.88)$$

entonces, al sustituir (3.87) y (3.88) en (3.86) resulta,

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k \quad (3.89)$$

y como los índices que suman son mudos en las sumatorias de los últimos dos términos es posible escribir,

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j \right), \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.90)$$

Para el caso particular en el que el sistema considerado sea natural se tiene que,

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j,k=1}^{\eta} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.91)$$

3.5.4 Trabajo Mecánico

El trabajo mecánico total W realizado sobre un sistema de N partículas viene dado por,

$$dW = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i \quad (3.92)$$

y al sustituir $d\vec{r}_i$ a partir de (3.83) resulta,

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \left(\sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\eta} \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \end{aligned}$$

o,

$$dW = \sum_{j=1}^{\eta} Q_j dq_j + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad (3.93)$$

donde,

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots, \eta \quad (3.94)$$

son las llamadas *Fuerzas Generalizadas*. Puesto que las coordenadas generalizadas q_j no necesariamente tienen dimensión de longitud, entonces las Q_j no necesariamente tienen dimensión fuerza:

1. Si q_j es una longitud, entonces Q_j es una fuerza.
2. Si q_j es un ángulo, entonces Q_j es un torque.
3. Si q_j es una superficie, entonces Q_j es una tensión.
4. Si q_j es un volumen, entonces Q_j es una presión.

Sin embargo, el producto $Q_j dq_j$ siempre tiene dimensión de trabajo como lo exige (3.93).

En el caso de un sistema conservativo, las fuerzas \vec{F}_i se derivan de una función de energía potencial $U = U(q_i)$,

$$\vec{F}_i^U = -\vec{\nabla}_i U, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.95)$$

donde el superíndice U indica que las fuerzas son derivables de una función de energía potencial o, equivalentemente, de una función potencial. Ahora, al sustituir (3.95) en (3.94) resulta,

$$Q_j^U = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^U \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i U \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.96)$$

pero,

$$\vec{\nabla}_i U \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^3 \nabla_{i,\alpha} U \frac{\partial x_{i,\alpha}}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{i,\alpha}} \frac{\partial x_{i,\alpha}}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (3.97)$$

donde el índice α indica la coordenada $x_{i,1} = x_i, x_{i,2} = y_i, x_{i,3} = z_i$, entonces,

$$Q_j^U = -\frac{\partial U}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots, \eta \text{ para sistemas conservativos} \quad (3.98)$$

En el caso de una función de energía potencial dependiente de las velocidades y del tiempo $U = U(q_i, \dot{q}_i, t)$ se tiene que,

$$Q_j^U(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (3.99)$$

notándose que cuando $U = U(q_i)$ se reduce a (3.98). Una energía potencial del tipo $U = U(q_i, \dot{q}_i, t)$ se aplica a un tipo muy importante de campo de fuerzas: el de las fuerzas electromagnéticas sobre cargas móviles.

Cuando se está describiendo un sistema natural (3.93) se reduce a,

$$dW = \sum_{j=1}^{\eta} Q_j dq_j \quad (3.100)$$

3.5.5 Energía Cinética

Como ya se sabe, la energía cinética total T de un sistema de N partículas viene dada por,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \bullet \vec{r}_i \quad (3.101)$$

Ahora, al sustituir aquí la expresión (3.84) resulta,

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \bullet \left(\sum_{k=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \bullet \left(\sum_{k=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)}_{= \sum_{j,k=1}^{\eta} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}_{= \sum_{j=1}^{\eta} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_j} \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \bullet \left(\sum_{k=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)}_{= \sum_{k=1}^{\eta} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k} + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}}_{= \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2 + \sum_{j=1}^{\eta} \left[\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\eta} \left[\sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right]
 \end{aligned}$$

O,

$$T = a_o + \sum_{j=1}^{\eta} a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^{\eta} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = T_o + T_1 + T_2 \quad (3.102)$$

donde a_o , a_j y a_{jk} son funciones definidas de las \vec{r}_i y t y, por lo tanto, de las q_i y t dadas por,

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 a_o = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2 \\
 a_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{con } j, k = 1, 2, 3, \dots, \eta \\
 a_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \bullet \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}
 \end{array} \right. \quad (3.103)$$

Si el sistema es natural se anulan los primeros dos términos de (3.102) resultando,

$$T = \sum_{j,k=1}^{\eta} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.104)$$

y, por lo tanto, T será siempre una forma cuadrática homogénea respecto a las velocidades generalizadas[†]. En efecto, si se halla la derivada parcial de (3.104) con respecto a las velocidades generalizadas \dot{q}_r resulta,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} &= \underbrace{\sum_{j,k=1}^{\eta} a_{jk} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} (\dot{q}_j \dot{q}_k)}_{a_{jk} \text{ no depende de las } \dot{q}_r, \text{ ver (3.103)}} = \sum_{j,k=1}^{\eta} \left(a_{jk} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_k + a_{jk} \dot{q}_j \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_r} \right) \\
 &= \sum_{j,k=1}^{\eta} \left(a_{jk} \delta_{jr} \dot{q}_k + a_{jk} \dot{q}_j \delta_{kr} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\eta} a_{rk} \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{\eta} a_{jr} \dot{q}_j, \text{ con } r = 1, 2, 3, \dots, \eta
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

multiplicando ahora por \dot{q}_r y sumando sobre r se obtiene,

$$\sum_{r=1}^{\eta} \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum_{k,r=1}^{\eta} a_{rk} \dot{q}_k \dot{q}_r + \sum_{j,r=1}^{\eta} a_{jr} \dot{q}_j \dot{q}_r \tag{3.106}$$

y como en este caso todos los índices son mudos (ya que todos suman), los dos términos de la derecha son idénticos entonces,

$$\boxed{\sum_{r=1}^{\eta} \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = 2 \sum_{j,r=1}^{\eta} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_r = 2T} \tag{3.107}$$

Este importante resultado es un caso especial del *Teorema de Euler*[‡], el cual establece que,

Si $f(y_i)$ es una *Función Homogénea* de grado p de las y_i , es decir,

$$f(\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n) = \lambda^p f(y_1, y_2, \dots, y_n), \text{ con } \lambda \neq 0, \tag{3.108}$$

entonces,

$$\sum_{j=1}^n \left[y_j \frac{\partial f(y_i)}{\partial y_j} \right] = p f(y_i), \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{3.109}$$

Al comparar (3.109) con (3.107) finalmente se verifica que, para el caso de un sistema natural, T será siempre una forma cuadrática ($p = 2$) homogénea respecto a las velocidades generalizadas.

[†]El subíndice de T en (3.102) indica el grado de homogeneidad de la función en su dependencia con respecto a las velocidades generalizadas.

[‡]Véase el apéndice D) para su demostración.

3.6 Forma general en coordenadas generalizadas de las ligaduras holónomas, no-holónomas y semi-holónomas

En vista de que las ligaduras tienen un rol importantísimo en el estudio de los sistemas mecánicos y de que en los capítulos ?? en adelante, cuando se estudie la Mecánica de Lagrange y la Mecánica de Hamilton, estarán involucradas en las ecuaciones de movimiento escritas en coordenadas generalizadas; se procederá ahora a reescribir en estas coordenadas las formas generales de las ligaduras holónomas, no holónomas y semi-holónomas ya estudiadas en la sección 2.4.

3.6.1 Ligaduras holónomas en coordenadas generalizadas

La forma general de las ligaduras holónomas (2.13) se puede escribir en coordenadas generalizadas como,

$$f_l^{(h)}(q_i, t) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, \eta; l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \quad (3.110)$$

En el particular caso de las ligaduras holónomas en forma diferencial (2.17) y en forma de velocidad (2.18) se tiene que,

$$f_l^{(hd)}(q_i, t) = df_l^{(h)}(q_i, t) = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial f_l^{(h)}(q_i, t)}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_l^{(h)}(q_i, t)}{\partial t} dt = 0, l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \quad (3.111)$$

que representan las restricciones sobre los desplazamientos dq_j y,

$$f_l^{(hD)}(q_i, t) = \frac{d}{dt} f_l^{(h)}(q_i, t) = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial f_l^{(h)}(q_i, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_l^{(h)}(q_i, t)}{\partial t} = 0, l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \quad (3.112)$$

que representan las restricciones sobre las velocidades generalizadas \dot{q}_j .

En el caso de ligaduras holónomas esclerónomas $f_l^{(h)}(q_i) = 0$ se tiene que,

$$\begin{cases} f_l^{(hd)}(q_i) = df_l^{(h)}(q_i) = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial f_l^{(h)}(q_i)}{\partial q_j} dq_j = 0 \\ f_l^{(hD)}(q_i) = \frac{d}{dt} f_l^{(h)}(q_i) = \sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial f_l^{(h)}(q_i)}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0 \end{cases}, l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \quad (3.113)$$

3.6.2 Ligaduras no-holónomas y semi-holónomas en coordenadas generalizadas

Las ligaduras (2.14) y (2.16) se pueden escribir como,

$$f_l \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, \eta; l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \begin{cases} K^{(nh)} & \text{si son no-holónomas} \\ K^{(h)} & \text{si son semi-holónomas} \end{cases} \quad (3.114)$$

sean no-holónomas o semi-holónomas.

Considérese ahora el caso particular de las ligaduras (2.58). Para escribir esta expresión en función de las nuevas coordenadas q_i se sustituye en ellas la expresión (3.83) para los desplazamientos $d\vec{r}_i$ resultando,

$$\begin{aligned} f_l^{(d)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) &= \sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \left(\sum_{i=1}^{\eta} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} dt \right) + B_l (\vec{r}_i, t) dt = 0 \\ &= \sum_{i=1}^{\eta} \left[\sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right] dq_i + \left[\sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} + B_l (\vec{r}_i, t) \right] dt = 0 \\ &= \sum_{i=1}^{\eta} A_{li} (q_i, t) dq_i + B_l (q_i, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

donde,

$$\begin{cases} A_{li} (q_i, t) = \sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \\ B_l (q_i, t) = \sum_{j=1}^N A_{lj} (\vec{r}_i, t) \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} + B_l (\vec{r}_i, t) \end{cases}, i = 1, 2, 3, \dots, N; l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} \quad (3.116)$$

que son las ecuaciones de transformación para los coeficientes A_{lj} y B_l desde las viejas coordenadas \vec{r}_i a las nuevas coordenadas q_i . De forma análoga se procede con las ligaduras en la forma de velocidades (2.59) obteniéndose estas mismas ecuaciones de transformación. Por lo tanto, en general, se puede escribir ahora,

$$\begin{cases} f_l^{(nhd)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \\ f_l^{(shd)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \end{cases} = \sum_{j=1}^{\eta} A_{lj} (q_i, t) dq_j + B_l (q_i, t) dt = 0, l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \begin{cases} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{cases} \quad (3.117)$$

que representan las restricciones lineales sobre los desplazamientos dq_j y,

$$\left\{ \begin{array}{l} f_l^{(nhD)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \\ f_l^{(shD)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \end{array} \right. = \sum_{j=1}^{\eta} A_{lj} (q_i, t) \dot{q}_j + B_l (q_i, t) = 0, l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{l} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{array} \right. \quad (3.118)$$

que representan las restricciones lineales sobre las velocidades generalizadas \dot{q}_j .

En el caso de ligaduras no-holónomas esclerónomas $f_l^{(nh)} (q_i, \dot{q}_i) = 0$ y semi-holónomas esclerónomas $f_l^{(sh)} (q_i, \dot{q}_i) = 0$ se tiene que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f_l^{(nhd)} \left(q_i, \dot{q}_i \right) \\ f_l^{(shd)} \left(q_i, \dot{q}_i \right) \end{array} \right. = \sum_{j=1}^{\eta} A_{lj} (q_i) dq_j = 0, l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{l} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f_l^{(nhD)} \left(q_i, \dot{q}_i \right) \\ f_l^{(shD)} \left(q_i, \dot{q}_i \right) \end{array} \right. = \sum_{j=1}^{\eta} A_{lj} (q_i) \dot{q}_j = 0, l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{l} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.119)$$

3.7 Un método para determinar si una ligadura en forma de diferencial o de velocidad es holónoma o no-holónoma

Para que las ligaduras del tipo (3.117) o (3.118) puedan ser integrables, es decir, para que puedan representar ligaduras semi-holónomas, deben constituir una diferencial exacta o una diferencial inexacta pero que se pueda convertir en exacta mediante el uso de un factor integrante. Supóngase que de todas las $K^{(nh)}$ ligaduras en (3.117), la l -ésima es semi-holónoma. Por lo tanto, al ser integrada debe ser posible encontrar una función f_l del tipo (3.110) cuyo diferencial total viene dado por,

$$df_l^{(h)} = \sum_{i=1}^{\eta} \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial t} dt = 0, \text{ donde } f_l^{(h)} = f_l^{(h)} (q_k, t) \quad (3.120)$$

El caso más general de (3.120) se da cuando es dividida por un factor integrante $I_l (q_k)$, es decir,

$$\frac{df_l^{(h)}}{I_l} = \sum_{i=1}^{\eta} \frac{\frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial q_i}}{I_l} dq_i + \frac{\frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial t}}{I_l} dt = 0 \quad (3.121)$$

entonces, al comparar (3.117) con (3.121) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial q_i}}{I_l} &= A_{li}, \text{ con } A_{li} = A_{li}(q_k, t) \\ \frac{\frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial t}}{I_l} &= B_l, \text{ con } B_l = B_l(q_k, t) \end{aligned}$$

o,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial q_i} = I_l A_{li} \\ \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial t} = I_l B_l \end{array} \right. \quad (3.122)$$

es decir, para que una ligadura dada por (3.117) sea semi-holónoma, debe existir una función $f_l^{(h)}(q_k, t)$ y un factor integrante $I_l(q_k)$ que satisfagan las ecuaciones (3.122) a la vez.

De la integración de las ecuaciones (3.122), encontrado ya el factor integrante $I_l(q_k)$ e identificadas las funciones $A_{li}(q_k, t)$, $B_l(q_k, t)$ a partir de las ligaduras dadas, es posible hallar la función $f_l(q_k, t)$.

Para verificar lo anterior se procede a derivar parcialmente las ecuaciones (3.122) con respecto a las coordenadas generalizadas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f_l^{(h)}}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_j} (I_l A_{li}) \\ \underbrace{\frac{\partial^2 f_l^{(h)}}{\partial q_i \partial q_j}}_{\text{Permutando}} = \frac{\partial}{\partial q_i} (I_l A_{lj}) \quad , \text{ con } i \neq j \end{array} \right. \quad (3.123)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f_l^{(h)}}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} (I_l B_l) \\ \underbrace{\frac{\partial^2 f_l^{(h)}}{\partial t \partial q_j}}_{\text{Permutando}} = \frac{\partial}{\partial t} (I_l A_{lj}) \quad , \text{ con } i \neq j \end{array} \right. \quad (3.124)$$

donde se ha requerido que $i \neq j$ para garantizar que las derivadas sean en pares de coordenadas diferentes. De las anteriores expresiones, al igualar las derivadas parciales cruzadas en cada caso, resultan las siguientes expresiones,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_j} (I_l A_{li}) = \frac{\partial}{\partial q_i} (I_l A_{lj}) \\ \frac{\partial}{\partial q_j} (I_l B_l) = \frac{\partial}{\partial t} (I_l A_{lj}) \quad , \text{ con } i \neq j \end{array} \right. \quad (3.125)$$

concluyéndose de aquí que si existe un factor integrante $I_l(q_k)$ tal que se satisfagan estas relaciones, entonces la l -ésima ligadura es semi-holónoma.

Después de indentificadas las funciones $A_{li}(q_k, t)$ y $B_l(q_k, t)$ a partir de las ligaduras dadas, las ecuaciones (3.125) ayudan a encontrar el factor integrante $I_l(q_k)$. Al identificar este factor, se sustituye en las ecuaciones (3.122) pudiéndose encontrar así las función $f_l^{(h)}(q_k, t)$ mediante su integración.

Este procedimiento puede tornarse difícil para sistemas mecánicos cuyos grados de libertad son superiores a 3 ya que no existen directrices generales para encontrar el factor integrante $I_l(q_k)$. Este factor suele encontrarse por inspección en algunos casos. Si el único factor integrante posible es $I = 0$, entonces la ligadura correspondiente es no-holónoma por no poderse integrar. De existir un factor integrante $I \neq 0$ entonces la ligadura es semi-holónoma y, por lo tanto, es posible integrarla.

En resumen, dada una ligadura del tipo (3.117) o equivalentemente del tipo (3.118) se pueden llevar a cabo los pasos siguientes para determinar si es una ligadura no-holónoma o una semi-holónoma y así integrarla:

1. Se determina el número de coordenadas generalizadas q_i y el número \mathcal{K} de ligaduras presentes del tipo.
2. Con los datos del paso 1 se desarrolla la sumatoria presente en (3.117) o (3.118) según sea el caso y se compara con las ligaduras dadas, obteniéndose así los coeficientes $A_{li}(q_k, t)$ y $B_l(q_k, t)$.
3. Se busca el factor integrante $I_l(q_i)$ de tal manera que se cumplan las condiciones dadas por (3.125),

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_j} (I_l A_{li}) = \frac{\partial}{\partial q_i} (I_l A_{lj}) \\ \frac{\partial}{\partial q_j} (I_l B_l) = \frac{\partial}{\partial t} (I_l A_{lj}) \end{cases}, \text{ con } i \neq j$$

4. Si $I_l(q_i) = 0$, entonces la ligadura correspondiente es no-holónoma por no poderse integrar.
5. Si $I_l(q_i) \neq 0$, entonces la ligadura correspondiente es semi-holónoma por ser integrable y para integrarla se usan las ecuaciones (3.122),

$$\begin{cases} \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial q_i} = I_l A_{li} \\ \frac{\partial f_l^{(h)}}{\partial t} = I_l B_l \end{cases}$$

EJEMPLO 3.1

Supóngase que se tiene un sistema mecánico de coordenadas generalizadas θ y φ en el cual está presente la ligadura diferencial,

$$f(\theta, \varphi) = 5\varphi d\theta + \left(15\theta - \frac{2}{\varphi}\right) d\varphi = 0$$

Determine si es semi-holónoma o no-holónoma. Si es semi-holónoma, intégrala.

SOLUCION: esta es una ligadura del tipo (3.117).

Se determina el número de coordenadas y de ligaduras presentes: en este caso hay $\eta = 2$ coordenadas $(q_1, q_2) = (\theta, \varphi)$ de manera que $i = 1, 2$ y una ligadura $\mathcal{K} = 1$ (no se ha utilizado la etiqueta h o sh porque aún no se sabe si la ligadura es integrable o no), por lo que $l = 1$.

Se encuentran los coeficientes A_{li} y B_l : al desarrollar la sumatoria en (3.117) hasta $i = 2$ con $l = 1$ resulta,

$$\sum_{i=1}^2 A_{1i} dq_i + B_1 dt = 0 \Rightarrow A_{11} dq_1 + A_{12} dq_2 + B_1 dt = 0 \quad (3.126)$$

Ahora, al comparar esta expresión con la ligadura diferencial dada resulta,

$$\begin{cases} A_{11} = 5\varphi \\ A_{12} = 15\theta - \frac{2}{\varphi} \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad (3.127)$$

Se busca el factor integrante $I_l(q_i)$: en el caso de dos variables, de la primera de las condiciones (3.125) se puede escribir que,

$$\frac{\partial}{\partial q_2} (I_1 A_{11}) = \frac{\partial}{\partial q_1} (I_1 A_{12})$$

O,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (I_1 A_{11}) = \frac{\partial}{\partial \theta} (I_1 A_{12}) \quad (3.128)$$

La segunda de las condiciones (3.125) no es considerada ya que no existe parte temporal en la ligadura dada. La condición (3.128) se cumple para un factor integrante,

$$I_1 = \varphi^2 \quad (3.129)$$

En efecto, al sustituir este factor y (3.127) en (3.128) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} [(\varphi^2)(5\varphi)] &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\varphi^2) \left(15\theta - \frac{2}{\varphi} \right) \right] \\ 15\varphi^2 &= 15\varphi^2 \end{aligned}$$

verificándose así la igualdad. Esto garantiza que la ligadura dada es integrable y, por lo tanto, semi-holónoma.

Se integra la ligadura: de (3.122) para $i, j = 1, 2$ se tiene que,

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = I_1 A_{11} = (\varphi^2)(5\varphi) = 5\varphi^3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = I_1 A_{12} = (\varphi^2) \left(15\theta - \frac{2}{\varphi} \right) = 15\theta\varphi^2 - 2\varphi \end{cases} \quad (3.130)$$

que al ser integradas resultan en,

$$\begin{cases} f_1 = 5\varphi^3\theta + C_1(\varphi) + c_1 \\ f_1 = 5\theta\varphi^3 - \varphi^2 + C_2(\theta) + c_2 \end{cases} \quad (3.131)$$

Por último, al comparar las expresiones (3.131) se obtiene,

$$\begin{cases} C_1(\varphi) = -\varphi^2 \\ C_2(\theta) = 0 \\ c_1 = c_2 = c \end{cases} \quad (3.132)$$

resultando finalmente,

$$f_1(\theta, \varphi) = 5\theta\varphi^3 - \varphi^2 + c = 0 \quad (3.133)$$

EJEMPLO 3.2

Supóngase que se tiene un sistema mecánico de coordenadas generalizadas Φ y Ω en el cual está presente la ligadura diferencial,

$$f(\Phi, \Omega) = (1 + \Omega^2 \operatorname{Sen} \Phi) d\Phi - \frac{2\Phi}{\Omega} d\Omega = 0$$

Determine si es semi-holónoma o no-holónoma. Si es semi-holónoma, intégrala.

SOLUCION: esta es una ligadura del tipo (3.117).

Se determina el número de coordenadas y de ligaduras presentes: en este caso hay $\eta = 2$ coordenadas $(q_1, q_2) = (\Phi, \Omega)$ de manera que $i = 1, 2$ y una ligadura $\mathcal{K} = 1$ (no se ha utilizado la etiqueta h o sh porque aún no se sabe si la ligadura es integrable o no), por lo que $l = 1$.

Se encuentran los coeficientes A_{li} y B_l : al desarrollar la sumatoria en (3.117) hasta $i = 2$ con $l = 1$ resulta,

$$\sum_{i=1}^2 A_{1i} dq_i + B_1 dt = 0 \Rightarrow A_{11} dq_1 + A_{12} dq_2 + B_1 dt = 0 \quad (3.134)$$

Ahora, al comparar esta expresión con la ligadura diferencial dada resulta,

$$\begin{cases} A_{11} = 1 + \Omega^2 \operatorname{Sen} \Phi \\ A_{12} = -\frac{2\Phi}{\Omega} \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad (3.135)$$

Se busca el factor integrante $I_l(q_i)$: en el caso de dos variables, de la primera de las condiciones (3.125) se puede escribir que,

$$\frac{\partial}{\partial q_2} (I_1 A_{11}) = \frac{\partial}{\partial q_1} (I_1 A_{12})$$

O,

$$\frac{\partial}{\partial \Omega} (I_1 A_{11}) = \frac{\partial}{\partial \Phi} (I_1 A_{12}) \quad (3.136)$$

La segunda de las condiciones (3.125) no es considerada ya que no existe parte temporal en la ligadura dada. La condición (3.136) se cumple para un factor integrante,

$$I_1 = \frac{1}{\Omega^2} \quad (3.137)$$

En efecto, al sustituir este factor y (3.135) en (3.136) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[\left(\frac{1}{\Omega^2} \right) (1 + \Omega^2 \operatorname{Sen} \Phi) \right] &= \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\left(\frac{1}{\Omega^2} \right) \left(-\frac{2\Phi}{\Omega} \right) \right] \\ -\frac{2}{\Omega^3} &= -\frac{2}{\Omega^3} \end{aligned}$$

verificándose así la igualdad. Esto garantiza que la ligadura dada es integrable y, por lo tanto, semi-holónoma.

Se integra la ligadura: de (3.122) para $i, j = 1, 2$ se tiene que,

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_1}{\partial \Phi} = I_1 A_{11} = \left(\frac{1}{\Omega^2}\right) (1 + \Omega^2 \operatorname{Sen} \Phi) = \frac{1}{\Omega^2} + \operatorname{Sen} \Phi \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = \frac{\partial f_1}{\partial \Omega} = I_1 A_{12} = \left(\frac{1}{\Omega^2}\right) \left(-\frac{2\Phi}{\Omega}\right) = -\frac{2\Phi}{\Omega^3} \end{cases} \quad (3.138)$$

que al ser integradas resultan en,

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\Phi}{\Omega^2} - \operatorname{Cos} \Phi + C_1(\Omega) + c_1 \\ f_1 = \frac{\Phi}{\Omega^2} + C_2(\Phi) + c_2 \end{cases} \quad (3.139)$$

Por último, al comparar las expresiones (3.139) se obtiene,

$$\begin{cases} C_1(\Omega) = 0 \\ C_2(\Phi) = -\operatorname{Cos} \Phi \\ c_1 = c_2 = c \end{cases} \quad (3.140)$$

resultando finalmente,

$$f_1(\Phi, \Omega) = \frac{\Phi}{\Omega^2} - \operatorname{Cos} \Phi + c = 0 \quad (3.141)$$

EJEMPLO 3.3

Muestre que la ligadura,

$$\begin{aligned} f\left(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3\right) &= (\ell^2 + r \operatorname{Cos} q_1) \dot{q}_1 + (\ell^2 + r \operatorname{Cos} q_2) \dot{q}_2 + [a + 2(r^2 + \ell^2) \\ &\quad + 2\ell r (\operatorname{Cos} q_1 + \operatorname{Cos} q_2)] \dot{q}_3 = 0 \end{aligned}$$

presente en un determinado sistema mecánico de coordenadas generalizadas q_1, q_2 y q_3 , es no-holónoma.

SOLUCION: esta es una ligadura del tipo (3.118).

Se determina el número de coordenadas y de ligaduras presentes: en este caso hay $\eta = 3$ coordenadas q_1, q_2, q_3 de manera que $i = 1, 2, 3$ y una ligadura $K^{(nh)} = 1$ no holónoma, por lo que $l = 1$.

Se encuentran los coeficientes A_{li} y B_l : al desarrollar la sumatoria en (3.118) hasta $i = 3$ con $l = 1$ resulta,

$$\sum_{i=1}^3 A_{1i} \dot{q}_i + B_1 = 0 \Rightarrow A_{11} \dot{q}_1 + A_{12} \dot{q}_2 + A_{13} \dot{q}_3 + B_1 dt = 0 \quad (3.142)$$

Ahora, al comparar esta expresión con la ligadura dada resulta,

$$\begin{cases} A_{11} = \ell^2 + r \cos q_1 \\ A_{12} = \ell^2 + r \cos q_2 \\ A_{13} = a + 2(r^2 + \ell^2) + 2\ell r (\cos q_1 + \cos q_2) \\ B_1 = 0 \end{cases} \quad (3.143)$$

Se busca el factor integrante $I_1(q_i)$: en el caso de tres variables, de la primera de las condiciones (3.125) se puede escribir que,

$$\frac{\partial}{\partial q_2} (I_1 A_{11}) = \frac{\partial}{\partial q_1} (I_1 A_{12}) \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3} (I_1 A_{11}) = \frac{\partial}{\partial q_1} (I_1 A_{13}) \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} (I_1 A_{13}) = \frac{\partial}{\partial q_3} (I_1 A_{12}) \quad (3.146)$$

La segunda de las condiciones (3.125) no es considerada ya que no existe parte temporal en la ligadura dada. Si realmente la ligadura dada es no-holónoma, el único factor integrante posible sería $I_1 = 0$. En efecto, de las expresiones (3.144) a (3.146) debido a la dependencia funcional de cada una de las A_{ij} se obtiene,

$$A_{11} \frac{\partial I_1}{\partial q_2} = A_{12} \frac{\partial I_1}{\partial q_1} \quad (3.147)$$

$$A_{11} \frac{\partial I_1}{\partial q_3} = A_{13} \frac{\partial I_1}{\partial q_1} + I_1 \frac{\partial A_{13}}{\partial q_1} \quad (3.148)$$

$$A_{12} \frac{\partial I_1}{\partial q_3} = A_{13} \frac{\partial I_1}{\partial q_2} + I_1 \frac{\partial A_{13}}{\partial q_2} \quad (3.149)$$

entonces al sustituir (3.143) en (3.147) a (3.149) resulta,

$$(\ell^2 + r \cos q_1) \frac{\partial I_1}{\partial q_2} = (\ell^2 + r \cos q_2) \frac{\partial I_1}{\partial q_1} \quad (3.150)$$

$$(\ell^2 + r \cos q_1) \frac{\partial I_1}{\partial q_3} = [a + 2(r^2 + \ell^2) + 2\ell r (\cos q_1 + \cos q_2)] \frac{\partial I_1}{\partial q_1} - 2\ell r \sin q_1 I_1 \quad (3.151)$$

$$(\ell^2 + r \cos q_2) \frac{\partial I_1}{\partial q_3} = [a + 2(r^2 + \ell^2) + 2\ell r (\cos q_1 + \cos q_2)] \frac{\partial I_1}{\partial q_2} - 2\ell r \sin q_2 I_1 \quad (3.152)$$

Finalmente, si se despeja $\frac{\partial I_1}{\partial q_3}$ de (3.152), luego se sustituye en (3.151) y de aquí se despeja $\frac{\partial I_1}{\partial q_2}$ para sustituirla en (3.150) resulta,

$$-2\ell r \sin q_2 (\ell^2 + r \cos q_1) I_1 = -2\ell r \sin q_1 (\ell^2 + r \cos q_2) I_1 \quad (3.153)$$

siendo así,

$$I_1 = 0 \quad (3.154)$$

el único valor posible para el factor integrante, mostrándose que la ligadura dada es no-holónoma.

3.8 Ejemplos de determinación de nuevos sistemas de coordenadas empleando nuevas variables dependientes del tiempo

EJEMPLO 3.4

La figura 3.6 muestra un péndulo simple cuya masa pendular m es ubicada mediante las coordenadas Cartesianas x , y y z . Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema, de tal manera que esté conformado por: (a) las dos nuevas variables σ y \mathcal{S} (introducidas al eliminar dos de las coordenadas estándares) y por las $3N - 2$ restantes coordenadas estándares originales y (b) las tres nuevas variables σ , \mathcal{S} y α (introducidas al eliminar tres de las coordenadas estándares) y por las $3N - 3$ restantes coordenadas estándares originales. La variable $\alpha \in [0, \pi]$ es un ángulo que se mide desde el eje $+z$ hasta donde está ubicada la masa pendular y los signos de σ y \mathcal{S} son,

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si se mide en el cuarto cuadrante.} \\ < 0 & \text{si se mide en el tercer cuadrante.} \end{cases} \\ \mathcal{S} &\rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si se mide en el cuarto cuadrante.} \\ < 0 & \text{si se mide en el tercer cuadrante.} \end{cases}\end{aligned}$$

SOLUCION: en coordenadas Cartesianas se tiene que,

Coordenadas estándares	
$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ $3(1) = 3$ coordenadas	(3.155)
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = z = 0 \\ f_2^{(h)} = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0 \end{cases}$ 2 ligaduras holónomas	$3(1) - 2 = 1$

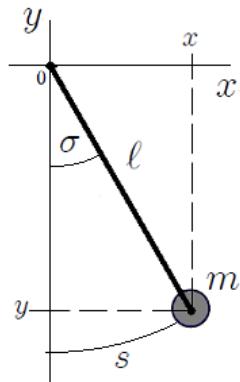


Figura 3.6: Sistema mecánico formado por un péndulo simple de masa pendular m , ubicada mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las nuevas variables σ y S .

Aquí la ligadura $f_1^{(h)}$ obliga a que el movimiento de la masa pendular sea en el plano xy y $f_2^{(h)}$ liga el movimiento de la misma al punto de soporte del péndulo.

(a) Se eliminarán las coordenadas estándares x y y y se mantendrá la coordenada estándar z . De la figura 3.6 se deduce fácilmente que,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{S}{\ell} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \end{cases} \quad (3.156)$$

por lo tanto las relaciones entre las coordenadas estándares y las nuevas variables son,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{S}{\ell} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \\ z = z \end{cases} \quad (3.157)$$

Al sustituir (3.156) en $f_2^{(h)}$ resulta,

$$\begin{aligned} \left[\ell \operatorname{Sen} \left(\frac{S}{\ell} \right) \right]^2 + (-\ell \operatorname{Cos} \sigma)^2 - \ell^2 &= 0 \\ \operatorname{Sen}^2 \left(\frac{S}{\ell} \right) + \operatorname{Cos}^2 \sigma &= 1 \end{aligned}$$

Obsérvese que esta última expresión tiene la forma $\operatorname{Sen}^2 A + \operatorname{Cos}^2 B = 1$, la cual se cumple si $A=B$ reduciéndose a la conocida identidad $\operatorname{Sen}^2 A + \operatorname{Cos}^2 B = 1$. De esta manera,

$$\frac{S}{\ell} = \sigma$$

O,

$$f_2^{(h)} = S - \ell\sigma = 0 \quad (3.158)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} \sigma \\ \mathcal{S} \\ z \end{cases}$ 3(1) = 3 coordenadas	$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{\mathcal{S}}{\ell} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \\ z = z \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = z = 0 \\ f_2^{(h)} = \mathcal{S} - \ell\sigma = 0 \end{cases}$ 2 ligaduras holónomas	$3(1) - 2 = 1$

(b) Se eliminarán las coordenadas estándares x , y y z y no se mantendrán ninguna de las coordenadas estándares. Es fácil encontrar de la figura 3.6 que las relaciones entre las coordenadas estándares y las nuevas variables son,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{\mathcal{S}}{\ell} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \\ z = \ell \operatorname{Cos} \alpha \end{cases} \quad (3.160)$$

y al sustituir (3.160) en $f_1^{(h)}$ y $f_2^{(h)}$ resulta,

$$\begin{cases} f_1^{(h)} = \alpha - \frac{\pi}{2} = 0 \\ f_2^{(h)} = \mathcal{S} - \ell\sigma = 0 \end{cases} \quad (3.161)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} \sigma \\ \mathcal{S} \\ \alpha \end{cases}$ 3(1) = 3 coordenadas	$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{\mathcal{S}}{\ell} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \\ z = \ell \operatorname{Cos} \alpha \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = \alpha - \frac{\pi}{2} = 0 \\ f_2^{(h)} = \mathcal{S} - \ell\sigma = 0 \end{cases}$ 2 ligaduras holónomas	$3(1) - 2 = 1$

Observaciones:

1. El número de grados de libertad del sistema se mantiene igual para los dos nuevos conjuntos de coordenadas encontrados.
2. El número de ligaduras se mantiene igual.
3. Las coordenadas estándares usadas tienen todas unidades de longitud, mientras que en los nuevos conjuntos de coordenadas éstas tienen algunas unidades de longitud y otras unidades angulares.

EJEMPLO 3.5

La figura 3.7 muestra el mismo sistema mecánico del ejemplo 3.4 pero ahora la masa pendular m es ubicada mediante las coordenadas esféricas r, θ y φ . Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema, de tal manera que esté conformado por las dos nuevas variables σ y s (introducidas al eliminar dos de las coordenadas estándares) y por las $3N - 2$ restantes coordenadas estándares originales. Los signos de σ y s son los mismos del ejemplo anterior.

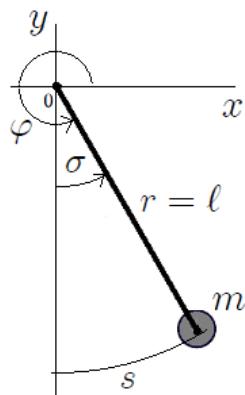


Figura 3.7: Sistema mecánico formado por un péndulo simple de masa pendular m , ubicada mediante coordenadas esféricas y en el cual se definen las nuevas variables σ y s .

SOLUCION: en coordenadas esféricas se tiene que,

Coordenadas estándares	
$\begin{cases} r \\ \theta \\ \varphi \end{cases}$	
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \\ f_2^{(h)} = r - \ell = 0 \end{cases}$ 2 ligaduras holónomas	$3(1) - 2 = 1$

Aquí la ligadura $f_1^{(h)}$ obliga a que el movimiento de la masa pendular sea en el plano xy y $f_2^{(h)}$ liga el movimiento de la misma al punto de soporte del péndulo.

Se eliminarán las coordenadas estándares r y φ y se mantendrá la coordenada estándar θ . De la figura 3.7 se deduce fácilmente que,

$$\begin{cases} r = \frac{s}{\sigma} \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} + \sigma \end{cases} \quad (3.164)$$

por lo tanto las relaciones entre las coordenadas estándares y las nuevas variables son,

$$\begin{cases} r = \frac{s}{\sigma} \\ \theta = \theta \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} + \sigma \end{cases} \quad (3.165)$$

Al sustituir (3.164) en $f_2^{(h)}$ resulta,

$$s = \sigma\ell$$

o,

$$f_2^{(h)} = s - \ell\sigma = 0 \quad (3.166)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} \mathcal{S} \\ \sigma \\ \theta \end{cases}$ $3(1) = 3$ coordenadas	$\begin{cases} r = \frac{\mathcal{S}}{\sigma} \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} + \sigma \\ \theta = \theta \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \\ f_2^{(h)} = \mathcal{S} - \ell\sigma = 0 \end{cases}$ 2 ligaduras holónomas	$3(1) - 2 = 1$

Observaciones:

- El número de grados de libertad del sistema para el nuevo conjunto de coordenadas es igual que para conjunto de coordenadas estándares que se usó originalmente.
- El número de grados de libertad se mantiene igual que al mostrado en el ejemplo 3.4 por ser el mismo sistema.
- El número de ligaduras se mantiene igual.

EJEMPLO 3.6

La figura 3.8 muestra el mismo sistema mecánico de los ejemplos 3.4 y 3.5 con la masa pendular m ubicada mediante las coordenadas Cartesianas x, y y z . Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema, de tal manera que esté conformado por las dos nuevas variables \mathcal{S} y \mathcal{A} (introducidas al eliminar dos de las coordenadas estándares) y por las $3N - 2$ restantes coordenadas estándares originales. El área \mathcal{A} es la misma área definida en uno de los ejemplos de la sección 3.1. Los signos de \mathcal{S} son los mismos del ejemplo anterior y los de \mathcal{A} son los dados por,

$$\mathcal{A} \rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si se mide en el cuarto cuadrante.} \\ < 0 & \text{si se mide en el tercer cuadrante.} \end{cases}$$

SOLUCION: en coordenadas Cartesianas se tiene el mismo cuadro mostrado en el ejemplo 3.4. Se eliminarán las coordenadas estándares x y y y se mantendrá la coordenada estándar z . De la figura 3.8 se deduce fácilmente que,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen} \left(\frac{\mathcal{S}}{\ell} \right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos} \left(\frac{2\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \end{cases} \quad (3.168)$$

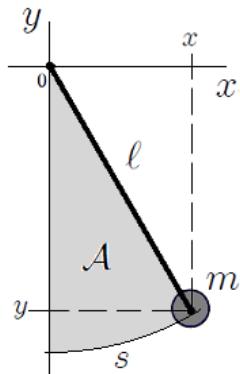


Figura 3.8: Sistema mecánico formado por un péndulo simple de masa pendular m , ubicada mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las nuevas variables s y A .

a que $S = \sigma\ell$, por lo tanto las relaciones entre las coordenadas estándares y las nuevas variables son,

$$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen}\left(\frac{s}{\ell}\right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos}\left(\frac{2A}{\ell^2}\right) \\ z = z \end{cases} \quad (3.169)$$

Al sustituir (3.168) en $f_2^{(h)}$ resulta,

$$\left[\ell \operatorname{Sen}\left(\frac{s}{\ell}\right)\right]^2 + \left[-\ell \operatorname{Cos}\left(\frac{2A}{\ell^2}\right)\right]^2 = \ell^2$$

O,

$$f_2^{(h)} = \ell s - 2A = 0 \quad (3.170)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} s \\ A \\ z \end{cases}$ 3(1) = 3 coordenadas	$\begin{cases} x = \ell \operatorname{Sen}\left(\frac{s}{\ell}\right) \\ y = -\ell \operatorname{Cos}\left(\frac{2A}{\ell^2}\right) \\ z = z \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = z = 0 \\ f_2^{(h)} = \ell s - 2A = 0 \end{cases}$ 2 ligaduras holónomas	$3(1) - 2 = 1$

Observaciones:

1. El número de grados de libertad del sistema se mantiene igual para los dos nuevos conjuntos de coordenadas encontrados.
 2. El número de grados de libertad se mantiene igual que al mostrado en los ejemplos 3.4 y 3.4, por ser el mismo sistema.
 3. El número de ligaduras se mantiene igual.
 4. Las coordenadas estándares usadas tienen todas unidades de longitud, mientras que en el nuevo conjunto dos de las coordenadas tienen unidades de longitud y la restante tiene unidad de área.
 5. En vista de que en los ejemplos 3.4, 3.5 y en el presente el sistema estudiado es el mismo, existen más de un conjunto de coordenadas posibles para la descripción de un mismo sistema mecánico.
-

EJEMPLO 3.7

La figura 3.9 muestra un sistema mecánico compuesto por dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables), al igual que uno de los sistemas estudiados en la sección 3.1, ubicadas mediante las coordenadas Cartesianas x , y y z . Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema, de tal manera que esté conformado por las dos nuevas variables \mathcal{L} y σ (introducidas al eliminar dos de las coordenadas estándares) y por las $3N - 2$ restantes coordenadas estándares originales. El rango de \mathcal{L} es,

$\mathcal{L} \longrightarrow$ distancia entre m y el punto P que se encuentra sobre el eje $+y$ a una distancia d sobre el origen del sistema de coordenadas Cartesianas, $\mathcal{L} \in [d, \infty]$.

los signos de σ son los mismos de los ejemplos anteriores.

SOLUCION: en coordenadas Cartesianas se tiene que,

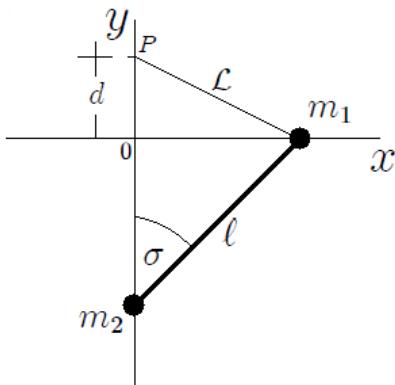


Figura 3.9: Sistema mecánico formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables), ubicadas mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las dos nuevas variables \mathcal{L} y σ .

Coordenadas estándares	
$m_1 \rightarrow \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}$	
$m_2 \rightarrow \begin{cases} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{cases}$	
$3(2) = 6$ coordenadas	
Ligaduras	Grados de libertad
$f_1^{(h)} = y_1 = 0$ $f_2^{(h)} = z_1 = 0$ $f_3^{(h)} = x_2 = 0$ $f_4^{(h)} = z_2 = 0$ $f_5^{(h)} = x_1^2 + y_2^2 - \ell^2 = 0$ 5 ligaduras holónomas	$3(2) - 5 = 1$

Aquí las ligaduras $f_1^{(h)}$ hasta $f_4^{(h)}$, en conjunto, obligan a que la masa m_1 se mueva sólo sobre el eje x y la masa m_2 sólo sobre el eje y . La ligadura $f_5^{(h)}$ vincula el movimiento de m_2 con el movimiento de m_1 .

Se eliminarán las coordenadas estándares x_1 y y_2 y se mantendrán las coordenadas estándares y_1 , z_1 , x_2 y z_2 . De la figura 3.9 se deduce fácilmente que,

$$\begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \\ y_2 = -\ell \cos \sigma \end{cases} \quad (3.173)$$

por lo tanto las relaciones entre las coordenadas estándares y las nuevas variables son,

$$\begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1 \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = -\ell \cos \sigma \\ z_2 = z_2 \end{cases} \quad (3.174)$$

Al sustituir (3.173) en $f_5^{(h)}$ resulta,

$$(\pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2})^2 + (-\ell \cos \sigma)^2 = \ell^2$$

O,

$$f_5^{(h)} = \mathcal{L}^2 - d^2 - \ell^2 \sin^2 \sigma = 0 \quad (3.175)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} \mathcal{L} \\ \sigma \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ z_2 \end{cases}$ $3(2) = 6$ coordenadas	$\begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1 \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = -\ell \cos \sigma \\ z_2 = z_2 \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = y_1 = 0 \\ f_2^{(h)} = z_1 = 0 \\ f_3^{(h)} = x_2 = 0 \\ f_4^{(h)} = z_2 = 0 \\ f_5^{(h)} = \mathcal{L}^2 - d^2 - \ell^2 \sin^2 \sigma = 0 \end{cases}$ 5 ligaduras holónomas	$3(2) - 5 = 1$

Observaciones:

1. El número de grados de libertad del sistema para el nuevo conjunto de coordenadas es igual que para conjunto de coordenadas estándares que se usó originalmente.

2. El número de ligaduras se mantiene igual.
3. Las coordenadas estándares usadas tienen todas unidades de longitud, mientras que en el nuevo conjunto cinco de las coordenadas tienen unidades de longitud y la restante tiene unidad angular.
4. Las coordenadas estándares están referidas a cada una de las partículas del sistema, mientras que en el nuevo conjunto no ocurre lo mismo con \mathcal{L} y \mathcal{A} .

EJEMPLO 3.8

La figura 3.10 muestra el mismo sistema mecánico del ejemplo 3.7 con sus masas ubicadas usando las mismas coordenadas estándares. Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema, de tal manera que esté conformado por las dos nuevas variables \mathcal{L} y \mathcal{A} (introducidas al eliminar dos de las coordenadas estándares) y por las $3N - 2$ restantes coordenadas estándares originales. El rango de \mathcal{L} y los signos de \mathcal{A} son los mismos de los ejemplos anteriores.

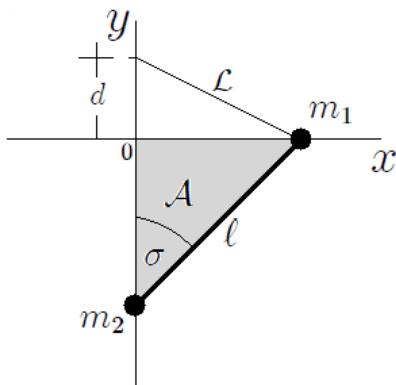


Figura 3.10: Sistema mecánico formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables), ubicadas mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las dos nuevas variables \mathcal{L} y \mathcal{A} .

SOLUCION: en coordenadas Cartesianas se tiene el mismo cuadro del ejemplo 3.7. Se eliminarán las coordenadas estándares x_1 y y_2 y se mantendrán las coordenadas estándares y_1 , z_1 , x_2 y z_2 . De la figura 3.10 se deduce fácilmente que el área \mathcal{A} viene dada por,

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}x_1y_2 \quad (3.177)$$

donde se ha colocado un signo menos para garantizar que los signos de \mathcal{A} sean los dados en el enunciado del ejemplo. Ahora como,

$$\begin{cases} x_1 = \ell \operatorname{Sen} \sigma \\ y_2 = -\ell \operatorname{Cos} \sigma \end{cases} \quad (3.178)$$

entonces al sustituir (3.178) en (3.177) es posible escribir que,

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} (\ell \operatorname{Sen} \sigma) (-\ell \operatorname{Cos} \sigma) = \frac{1}{4} \ell^2 \operatorname{Sen} (2\sigma)$$

O,

$$\sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \quad (3.179)$$

Por lo tanto, al sustituir (3.179) en (3.178) resulta que,

$$\begin{cases} x_1 = \ell \operatorname{Sen} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \right] \\ y_2 = -\ell \operatorname{Cos} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \right] \end{cases} \quad (3.180)$$

Por otro lado, de la figura 3.10 es también fácil encontrar que,

$$d^2 + x_1^2 = \mathcal{L}^2$$

O,

$$x_1 = \pm \sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \quad (3.181)$$

Entonces las relaciones entre las coordenadas estándares y las nuevas variables vienen dadas por,

$$\begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1 \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = -\ell \operatorname{Cos} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \right] \\ z_2 = z_2 \end{cases} \quad (3.182)$$

Al sustituir (3.180) y (3.181) en $f_5^{(h)}$ resulta,

$$\left(\pm \sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \right)^2 + \left\{ -\ell \operatorname{Cos} \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \right] \right\}^2 - \ell^2 = 0$$

O,

$$f_5^{(h)} = \mathcal{L}^2 - d^2 - \ell^2 \operatorname{Sen}^2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \right] = 0 \quad (3.183)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} \mathcal{L} \\ \mathcal{A} \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ z_2 \end{cases}$ 3(2) = 6 coordenadas	$\begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\mathcal{L}^2 - d^2} \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1 \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = -\ell \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \right] \\ z_2 = z_2 \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = y_1 = 0 \\ f_2^{(h)} = z_1 = 0 \\ f_3^{(h)} = x_2 = 0 \\ f_4^{(h)} = z_2 = 0 \\ f_5^{(h)} = \mathcal{L}^2 - d^2 - \ell^2 \operatorname{Sen}^2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{4\mathcal{A}}{\ell^2} \right) \right] = 0 \end{cases}$ 5 ligaduras holónomas	$3(2) - 5 = 1$

Observaciones:

- El número de grados de libertad del sistema para el nuevo conjunto de coordenadas es igual que para conjunto de coordenadas estándares que se usó originalmente.
- El número de grados de libertad se mantiene igual que al mostrado en el ejemplo 3.7 por ser el mismo sistema.
- El número de ligaduras se mantiene igual.
- Las coordenadas estándares usadas tienen todas unidades de longitud, mientras que en el nuevo conjunto cinco de las coordenadas tienen unidades de longitud y la restante tiene unidad angular.
- Las coordenadas estándares están referidas a cada una de las partículas del sistema, mientras que en el nuevo conjunto no ocurre lo mismo con \mathcal{L} y \mathcal{A} .

EJEMPLO 3.9

La figura 3.11 muestra el mismo sistema mecánico del ejemplo 3.7 y 3.8 con sus masas ubicadas usando las mismas coordenadas estándares. Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema, de tal manera que esté

conformado por las dos nuevas variables σ y U (introducidas al eliminar dos de las coordenadas estándares) y por las $3N - 2$ restantes coordenadas estándares originales. Aquí U es la energía potencial total del sistema tomando $y = 0$ como origen de potencial ($U = 0$). Los signos de σ son los mismos de los ejemplos anteriores.

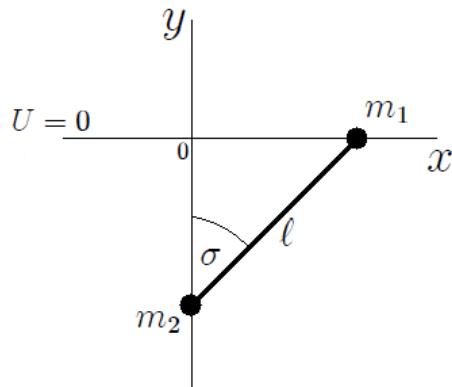


Figura 3.11: Sistema mecánico formado por dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una cuerda (cuya deformación y masa son despreciables), ubicadas mediante coordenadas Cartesianas y en el cual se definen las dos nuevas variables σ y U .

SOLUCION: en coordenadas Cartesianas se tiene la misma tabla del ejemplo 3.7. Se eliminarán las coordenadas estándares x_1 y y_2 , manteniéndose las coordenadas estándares y_1 , z_1 , x_2 y z_2 . De la figura 3.11 se deduce fácilmente la energía potencial total del sistema viene dada por,

$$U = U_1 + U_2 = m_2 g y_2 \quad (3.185)$$

de manera que,

$$y_2 = \frac{U}{m_2 g}, \text{ con } U < 0 \quad (3.186)$$

y además,

$$x_1 = \ell \operatorname{Sen} \sigma \quad (3.187)$$

por lo tanto las relaciones entre las coordenadas estándares y las nuevas variables vienen dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \ell \operatorname{Sen} \sigma \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1 \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = \frac{U}{m_2 g} \\ z_2 = z_2 \end{array} \right. \quad (3.188)$$

Al sustituir (3.186) y (3.187) en $f_5^{(h)}$ resulta,

$$(\ell \operatorname{Sen} \sigma)^2 + \left(\frac{U}{m_2 g} \right)^2 - \ell^2 = 0$$

O,

$$f_5^{(h)} = \frac{U}{m_2 g} - \ell \cos \sigma = 0 \quad (3.189)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} \sigma \\ U \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ z_2 \end{cases}$ $3(2) = 6$ coordenadas	$\begin{cases} x_1 = \ell \sin \sigma \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = z_1 \\ x_2 = x_2 \\ y_2 = \frac{U}{m_2 g} \\ z_2 = z_2 \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$\begin{cases} f_1^{(h)} = y_1 = 0 \\ f_2^{(h)} = z_1 = 0 \\ f_3^{(h)} = x_2 = 0 \\ f_4^{(h)} = z_2 = 0 \\ f_5^{(h)} = \frac{U}{m_2 g} - \ell \cos \sigma = 0 \end{cases}$ 5 ligaduras holónomas	$3(2) - 5 = 1$

Observaciones:

- El número de grados de libertad del sistema para el nuevo conjunto de coordenadas es igual que para conjunto de coordenadas estándares que se usó originalmente.
- El número de grados de libertad se mantiene igual que al mostrado en los ejemplos 3.7 y 3.8 por ser el mismo sistema.
- El número de ligaduras se mantiene igual.
- Las coordenadas estándares usadas tienen todas unidades de longitud, mientras que en el nuevo conjunto cuatro de las coordenadas tienen unidades de longitud, una tiene unidad de longitud y la restante tiene unidad de energía.
- En vista de que en los ejemplos 3.7, 3.8 y en el presente el sistema estudiado es el mismo, existen más de un conjunto de coordenadas posibles para la descripción de un mismo sistema mecánico.

6. Las coordenadas estándares están referidas a cada una de las partículas del sistema, mientras que en el nuevo conjunto no ocurre lo mismo con σ y U .

EJEMPLO 3.10

Considérese el sistema de la sección 3.1 mostrado por la figura 3.4b, en el cual se ubica a la partícula mediante coordenadas cilíndricas. Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema, de tal manera que esté conformado por las dos nuevas variables L y σ (introducidas al eliminar dos de las coordenadas estándares) y por las restantes $3N - 2$ coordenadas estándares originales. Los rangos de L , σ y φ son los mismos dados en los ejemplos anteriores.

SOLUCION: en coordenadas cilíndricas se tiene que,

Coordenadas estándares	
$\left\{ \begin{array}{l} r \\ \varphi \\ z \end{array} \right.$	
$3(1) = 3$ coordenadas	
Ligaduras	Grados de libertad
$f_1^{(h)} = r - z \operatorname{Tg} \alpha = 0$ 1 ligadura holónoma	$3(1) - 1 = 2$

(3.191)

Aquí la ligadura $f_1^{(h)}$ obliga a que el movimiento de la partícula de masa m se realice sobre la superficie del cono $r = z \operatorname{Tg} \alpha$.

Se eliminarán las coordenadas cilíndricas r y z , manteniéndose la coordenada φ . Las relaciones entre las coordenadas cilíndricas y las nuevas variables es dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} r = L \operatorname{Sen} \sigma \\ \varphi = \varphi \\ z = h - L \operatorname{Cos} \sigma \end{array} \right. \quad (3.192)$$

Al sustituir (3.192) en $f_1^{(h)}$ resulta,

$$f_1^{(h)} = L \operatorname{Sen} \sigma - (h - L \operatorname{Cos} \sigma) \operatorname{Tg} \alpha = 0 \quad (3.193)$$

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones	
$\begin{cases} \mathcal{L} \\ \sigma \\ \varphi \end{cases}$ 3(1) = 3 coordenadas	$\begin{cases} r = \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma \\ \varphi = \varphi \\ z = h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma \end{cases}$	(3.194)
Ligaduras	Grados de libertad	
$f_1^{(h)} = \mathcal{L} \operatorname{Sen} \sigma - (h - \mathcal{L} \operatorname{Cos} \sigma) \operatorname{Tg} \alpha = 0$ 1 ligadura holónoma	3(1) - 1 = 2	

Observaciones:

1. El número de grados de libertad del sistema para el nuevo conjunto de coordenadas es igual que para conjunto de coordenadas estándares que se usó originalmente.
 2. El número de ligaduras se mantiene igual.
 3. En el conjunto de coordenadas estándares dos de ellas tienen unidades de longitud y la restante tiene unidad angular. En el nuevo conjunto una de las coordenadas tiene unidad de longitud y las dos restantes tienen unidades angulares.
-

EJEMPLO 3.11

La figura 3.12 se muestra un péndulo simple donde la masa pendular m es ubicada mediante las coordenadas esféricas r , φ y θ . Construir un nuevo conjunto de coordenadas que describa el sistema de tal manera que esté conformado por las dos nuevas variables σ y U (energía potencial), manteniéndose la coordenada estándar θ ($3N - 2 = 3(1) - 2 = 1$ restantes coordenadas estándares originales).

$$\sigma \rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{si se mide en el cuarto cuadrante.} \\ < 0 & \text{si se mide en el tercer cuadrante.} \end{cases}$$

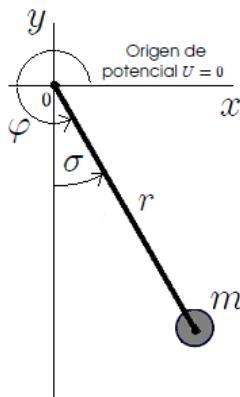


Figura 3.12: Péndulo simple donde la masa pendular m es ubicada mediante las coordenadas esféricas r, φ y θ .

SOLUCION: en coordenadas esféricas se tiene que,

Coordenadas estándares	
$\left\{ \begin{array}{l} r \\ \varphi \\ \theta \end{array} \right.$	
3(1) = 3 coordenadas	
Ligaduras	Grados de libertad
$f_1^{(h)} = \theta - \frac{\pi}{2} = 0$ $f_2^{(h)} = r - \ell = 0$ 2 ligaduras holónomas	$3(1) - 2 = 1$

Aquí la ligadura $f_1^{(h)}$ obliga a que el movimiento de la masa pendular m se realice sobre el plano xy y $f_2^{(h)}$ obliga a que la misma describa un arco de circunferencia como trayectoria.

Se eliminarán las coordenadas esféricas r y φ , manteniéndose la coordenada θ . De la figura (3.12) es fácil observar que,

$$\varphi = \sigma + \frac{3\pi}{2} \quad (3.196)$$

que expresa la coordenada esférica φ en función de la nueva variable σ . Por otro lado, se sabe que la energía potencial U de la masa pendular m viene dada por,

$$U = -mgy \quad (3.197)$$

pero en coordenadas esféricas $y = r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi$ de manera que,

$$U = -mgr \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi \quad (3.198)$$

Ahora, al sustituir (3.196) en (3.198) resulta,

$$U = -mgr \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \left(\sigma + \frac{3\pi}{2} \right)$$

o,

$$r = \frac{U}{mg} \operatorname{Csc} \theta \operatorname{Sec} \sigma \quad (3.199)$$

que representa la coordenada esférica r expresada en función de las nuevas variables U , σ y la coordenada θ que se mantuvo inalterada. Entonces, de (3.196) y (3.199) las relaciones entre las coordenadas esféricas y las nuevas variables es dada por,

$$\begin{cases} r = \frac{U}{mg} \operatorname{Csc} \theta \operatorname{Sec} \sigma \\ \varphi = \sigma + \frac{3\pi}{2} \\ \theta = \theta \end{cases} \quad (3.200)$$

y las ligaduras dadas en la tabla mostrada al principio se convierten en,

$$\begin{cases} f_1^{(h)} = \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \\ f_2^{(h)} = \ell - \frac{U}{mg} \operatorname{Sec} \sigma = 0 \\ 2 \text{ ligaduras holónomas} \end{cases} \quad (3.201)$$

donde $f_2^{(h)}$ se obtuvo al sustituir en (3.199) en la ligadura $f_2^{(h)}$ mostrada en la mencionada tabla.

Finalmente de todo lo anterior se tiene que,

Nuevas coordenadas	Transformaciones
$\begin{cases} U \\ \sigma \\ \theta \end{cases}$ 3(1) = 3 coordenadas	$\begin{cases} r = \frac{U}{mg} \operatorname{Csc} \theta \operatorname{Sec} \sigma \\ \varphi = \sigma + \frac{3\pi}{2} \\ \theta = \theta \end{cases}$
Ligaduras	Grados de libertad
$f_1^{(h)} = \theta - \frac{\pi}{2} = 0$ $f_2^{(h)} = \ell - \frac{U}{mg} \operatorname{Sec} \sigma = 0$ 2 ligaduras holónomas	3(1) - 2 = 1

Observaciones:

1. El número de grados de libertad del sistema para el nuevo conjunto de coordenadas es igual que para conjunto de coordenadas estándares que se usó originalmente.
2. El número de ligaduras se mantiene igual.

3. En el conjunto de coordenadas estándares dos de ellas tienen unidades de longitud y la restante tiene unidad angular. En el nuevo conjunto dos de las coordenadas tienen unidades de ángulo y la restante tiene unidad de energía.
-

3.9 Problemas



CAPITULO 4

PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES Y DE D'ALEMBERT

Contenido

4.1 Desplazamiento real y virtual	194
4.1.1 Desplazamiento real	194
4.1.2 Desplazamiento virtual	194
4.2 Trabajo real y trabajo virtual	208
4.2.1 Trabajo Real	208
4.2.2 Trabajo Virtual	208
4.3 Principio de los Trabajos Virtuales	209
4.4 Principio de D'Alembert	221
4.4.1 Principio de Ostrogradski-Hamilton o de Acción Estacionaria	230
4.5 Problemas	232

4.1 Desplazamiento real y virtual

El objetivo de la presente sección es la de establecer las definiciones de desplazamiento virtual y trabajo virtual de la forma más clara posible. Ambas definiciones constituyen piezas claves para establecer, más adelante, el Principio de los Trabajos Virtuales y el Principio de D'Alembert. El Principio de D'Alembert va a ser el punto de partida para formular la Mecánica de Lagrange a ser estudiada en el capítulo ??.

4.1.1 Desplazamiento real

Se le dará el nombre de *Desplazamiento Real* $d\vec{r}_i$ a todo aquel desplazamiento que puede realizar una partícula o un conjunto de ellas en un sistema de partículas, empleando para ello un determinado tiempo t y, por ende, realizado a una velocidad finita \vec{v}_i .

En coordenadas generalizadas estos desplazamientos son los dq_i y las velocidades son las generalizadas \dot{q}_i . No se está agregando nada nuevo desde el punto de vista físico pues estos desplazamientos son los que comúnmente se encuentran en el estudio del movimiento de las partículas. Sólo se ha agregado el calificativo de “real” para hacer incapié en que son desplazamientos que realmente pueden realizar las partículas, calificativo que será muy útil a la hora de distinguirlos de otro tipo de desplazamientos que serán introducidos más adelante.

Si estos desplazamientos cumplen con las ligaduras presentes en el sistema, entonces se dice que son *Desplazamientos Reales Compatibles con las Ligaduras*. Son de este tipo, los desplazamientos $d\vec{r}_i$ y los dq_i .

4.1.2 Desplazamiento virtual

Se introducirá ahora otro tipo de desplazamiento denominado *Desplazamiento Virtual*.

4.1.2.1 Definición

Se da el nombre de *Desplazamiento Virtual* a un desplazamiento infinitesimal de la posición de una partícula realizado instantáneamente. Es decir, es llevado a cabo con velocidad infinita y, por ende, sin que transcurra ningún tiempo durante su realización. De lo anterior proviene la condición de virtual, ya que no es posible realizarlo efectivamente.

Es un desplazamiento puramente geométrico, ficticio, no dinámico, que es útil como herramienta para resolver problemas mecánicos y se representará por la diferencial de primer orden $\delta \vec{r}$ en vez de $d \vec{r}$ que es el usado para los desplazamientos reales. También puede ser un desplazamiento virtual un desplazamiento angular proveniente de la rotación de un cuerpo, por ejemplo.

La diferencia entre un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$ y un desplazamiento real $d \vec{r}_i$ es posible verla a partir de (3.83). En efecto los desplazamientos reales vienen dados por,

$$d \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.1)$$

donde los dq_j son los desplazamientos reales de las coordenadas generalizadas. Como en la realización de los desplazamientos virtuales no transcurre ningún tiempo $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{0}$, entonces resulta que*,

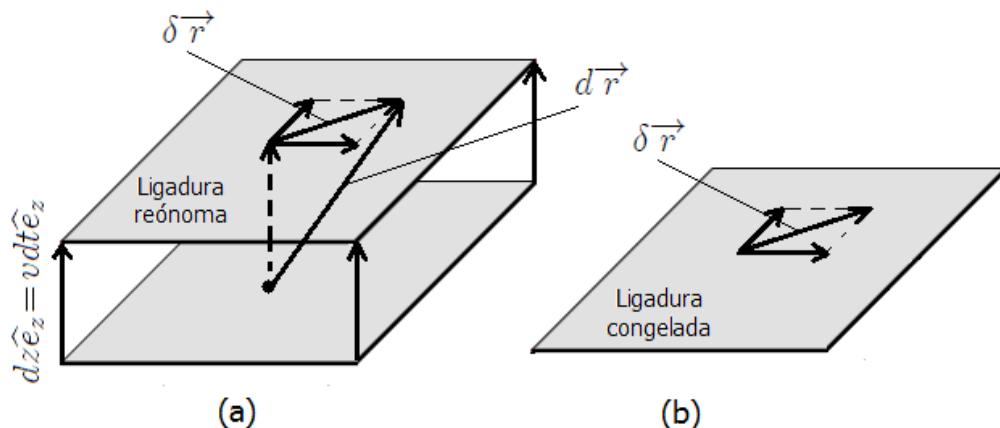


Figura 4.1: (a) Desplazamiento real $d \vec{r}$ en presencia de una ligadura reónoma (b) Desplazamiento virtual $\delta \vec{r}$, la ligadura se ha dejado "congelada" en el tiempo.

*Por ser $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$, aquí las ligaduras pueden considerarse esclerónomas.

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.2)$$

donde los δq_j son los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas y $\delta \vec{r}_i$ representa el desplazamiento virtual de la i -ésima partícula. En el caso de haber ligaduras reónomas o móviles (ver figura 4.1), éstas quedarían “congeladas” ya que el tiempo no transcurre para los desplazamientos virtuales. Por el contrario, en un desplazamiento real $d \vec{r}_i$ transcurriría un tiempo dt en el cual las fuerzas y las ligaduras del sistema podrían variar.

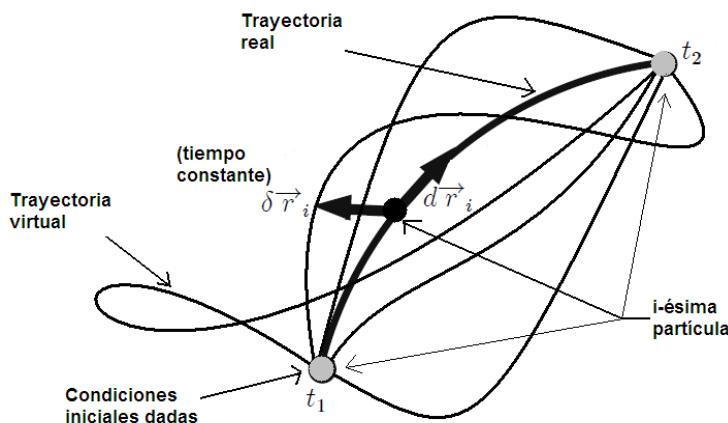


Figura 4.2: Desplazamiento real $d \vec{r}_i$ y desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$.

De esta expresión puede observarse que los desplazamientos virtuales son vectores tangenciales en el espacio de configuración. Los vectores $\delta \vec{r}_i$ apuntan a diferentes trayectorias geométricamente posibles de la i -ésima partícula en un instante de tiempo dado. Por ejemplo ver figura 4.2, una determinada trayectoria de la i -ésima partícula puede llevarse a cabo partiendo de unas condiciones iniciales dadas, pero $\delta \vec{r}_i$ puede también apuntar hacia otras trayectorias imaginarias. En la figura 4.3 puede observarse la trayectoria real $q(t)$ en el espacio de configuración para un determinado sistema unidimensional, en la cual se representa un posible desplazamiento virtual de dicha trayectoria.

Los desplazamientos virtuales, aparte de ser instantáneos, pueden ser arbitrarios y no relacionados con el movimiento real de la partícula en el instante considerado. A estos desplazamientos se les denominan *Desplazamientos Virtuales Arbitrarios*. Existen ciertos tipos de desplazamientos virtuales que son los más útiles y que serán de interés más adelante, estos son los denominados *Desplazamientos Virtuales Compatibles con las Ligaduras*[†], de la misma forma como existen los desplazamientos reales compatibles

[†]D'Alembert fue el primero en proponer la consideración de un desplazamiento de este tipo.

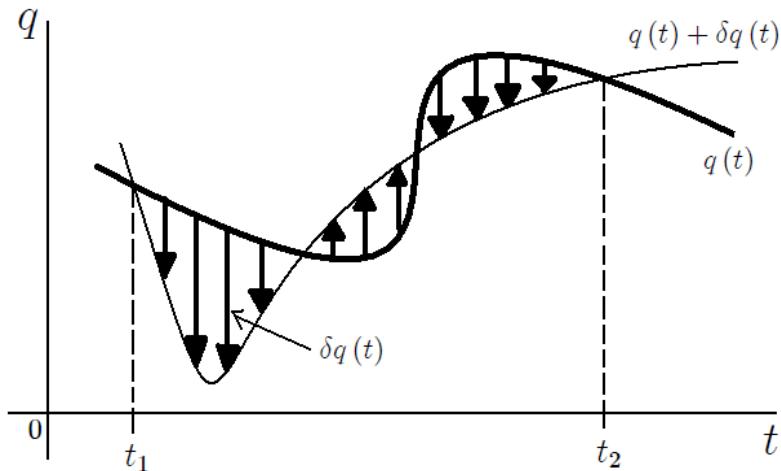


Figura 4.3: Espacio de fase unidimensional. Coordenada real $q(t)$ y la coordenada desplazada virtualmente $q(t) + \delta q(t)$.

con las ligaduras mencionados en la sección 4.1.1.

Los Desplazamientos Virtuales Compatibles con las Ligaduras son aquellos en los que se han incluido las ligaduras, es decir, son aquellos que respetan las ligaduras. Después de realizado un desplazamiento virtual de este tipo, se mantienen las relaciones de ligadura del sistema.

Los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras holónomas se obtienen a partir de (3.111). Efectivamente, si en esta expresión se impone la condición de que el tiempo no transcurre resulta,

$$\sum_{j=1}^{\eta} \frac{\partial f_l^{(h)}(q_i, t)}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)} \quad (4.3)$$

donde aquí los δq_j son los desplazamientos virtuales compatibles buscados. Al hacer lo mismo con las ligaduras no-holónomas o semi-holónomas (3.117) resulta,

$$\sum_{j=1}^{\eta} A_{lj}(q_i, t) \delta q_j = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, \begin{cases} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{cases} \quad (4.4)$$

siendo ahora los δq_j , presentes aquí, desplazamientos virtuales compatibles con estas ligaduras.

¿Cómo encontrar los desplazamientos virtuales?. La respuesta a esta pregunta ya fue dada al pasar de (4.1) a (4.2).

Los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras se obtienen a partir de los desplazamientos reales compatibles con las ligaduras, “congelando” estas últimas en el caso de ser reónomas. Obviamente, también es cierto para las ligaduras esclerónomas, con la diferencia de que estas últimas ya son inmóviles.

En resumen, los requerimientos para un desplazamiento virtual son los siguientes:

1. El tiempo es mantenido fijo (no hay cambio en las derivadas temporales), de allí su calificativo de virtual.
2. Es un desplazamiento puramente geométrico.
3. Son infinitesimales al igual que los desplazamientos reales dq_i .
4. Existen tantos desplazamientos virtuales posibles como variables necesarias para describir el movimiento, al igual que para los desplazamientos reales.
5. Si son compatibles con las ligaduras, las obedecen.

Adicionalmente, desde el punto de vista matemático, el símbolo diferencial δ tiene las mismas propiedades que el símbolo diferencial d de la diferenciación ordinaria. Por ejemplo,

$$\delta(x^2) = \frac{\delta(x^2)}{\delta x} \delta x = 2x\delta x \quad (4.5)$$

$$\delta(\operatorname{Sen} x) = \operatorname{Cos} x \delta x \quad (4.6)$$

$$\delta(\operatorname{Tg} x) = \sec^2 x \delta x \quad (4.7)$$

esto es debido a que provienen de los desplazamientos reales, conservando sus propiedades matemáticas.

Para obtener los desplazamientos virtuales arbitrarios y los compatibles con las ligaduras se procede como sigue:

1. Se encuentran los desplazamientos reales $d\vec{r}_i$, los cuales se obtienen al diferenciar el vector de posición \vec{r}_i (en coordenadas Cartesianas, esféricas, etc.) de cada una de las partículas del sistema sin tomar en cuenta las ligaduras presentes. Los desplazamientos así obtenidos son todos aquellos posibles para las partículas del sistema sin tomar en cuenta las ligaduras presentes, es decir, son los desplazamientos reales arbitrarios.
2. Se identifican las ligaduras presentes, se determina el número de grados de libertad y el número mínimo de coordenadas generalizadas necesarias para describir el sistema.
3. Se encuentran los desplazamientos reales compatibles con las ligaduras, los cuales se obtienen: (a) al introducir las ligaduras encontradas en el paso 2 (de ser holónomas) en los desplazamientos obtenidos en el paso 1, (b) en el caso de que se haga matemáticamente engorrosa dicha sustitución debido a la forma en la que están expresadas las ligaduras (todas o parte de ellas), alternativamente se procede a encontrar un conjunto de coordenadas generalizadas para el sistema dado y se escriben las ecuaciones de transformación correspondientes para luego encontrar los desplazamientos reales a partir de éstas. Esto es equivalente a lo descrito en (a) ya que, como se sabe, las transformaciones contienen las ligaduras holónomas.
4. Por último, los desplazamientos reales $d\vec{r}_i$ se convierten en virtuales $\delta\vec{r}_i$ cuando se impone la condición de que el tiempo no transcurra. De aquí se desprende que si las ligaduras involucradas dependen explícitamente del tiempo t (reónomas) éstas quedarán congeladas o inmóviles, permaneciendo en el estado en que se encontraban en el instante del desplazamiento. Obviamente, si las ligaduras involucradas no dependen explícitamente del tiempo t (esclerónomas) o si no existen ligaduras, entonces los desplazamiento virtuales coinciden completamente con los desplazamientos reales encontrados en el paso 1 (de no existir ligaduras) o en el 3 (de existir ligaduras). Finalizado esto, los desplazamientos virtuales obtenidos son compatibles con las ligaduras.

Los pasos anteriores sólo son una simple guía, no pretenden ser una receta de estricto cumplimiento.

EJEMPLO 4.1

Partícula sobre una esfera lisa. Se tiene el caso de una partícula de masa m que se mueve sobre una esfera, centrada en el origen del referencial, sin fricción (ver figura 4.4) y que no se separa de su superficie. Encuentre: (a) las condiciones

que deben cumplir los desplazamientos reales para ser compatibles con la ligadura, (b) lo mismo para los desplazamientos virtuales, (c) los desplazamientos reales compatibles con la ligadura, (d) los desplazamientos virtuales compatibles con la ligadura y (e) chequear que los desplazamientos reales y los virtuales encontrados antes cumplen con las condiciones encontradas en (a) y (b) respectivamente.

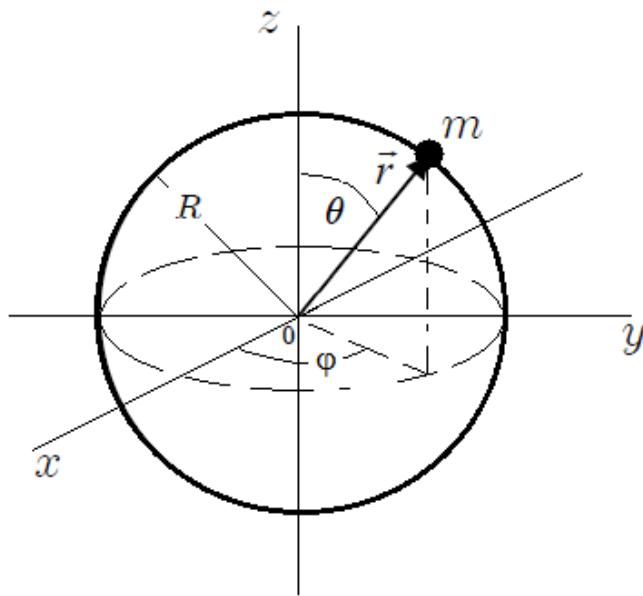


Figura 4.4: Partícula de masa m que se mueve sobre una esfera lisa sin separarse de su superficie.

SOLUCION: antes de responder a las preguntas planteadas en el enunciado del ejemplo, se procederá a encontrar los desplazamientos reales y virtuales siguiendo los pasos antes descritos.

Desplazamientos reales arbitrarios: en coordenadas esféricas el vector de posición de la partícula viene dado por,

$$\vec{r} = (r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \varphi, r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi, r \operatorname{Cos} \theta) \quad (4.8)$$

de manera que,

$$\begin{cases} x = r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \varphi \\ y = r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi \\ z = r \operatorname{Cos} \theta \end{cases} \quad (4.9)$$

Los desplazamientos reales arbitrarios se obtienen diferenciar (4.9). En efecto,

$$\begin{cases} dx = \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \varphi dr + r \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \varphi d\theta - r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi d\varphi \\ dy = \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi dr + r \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sen} \varphi d\theta + r \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \varphi d\varphi \\ dz = \operatorname{Cos} \theta dr - r \operatorname{Sen} \theta d\theta \end{cases} \quad (4.10)$$

Ligaduras, grados de libertad y número mínimo de coordenadas generalizadas: en este caso sólo existe $K^{(h)} = 1$ ligadura holónoma (por lo que el sistema es holónomo) cuya ecuación en coordenadas Cartesianas viene dada por,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow f_1^{(h)} = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (4.11)$$

que es una esfera de radio R centrada en el origen del sistema de referencia. Esta ligadura es holónoma esclerónica y en coordenadas esféricas se escribe como,

$$r = R \Rightarrow f_1^{(h)} = r - R = 0 \quad (4.12)$$

Como existe $K^{(h)} = 1$ ligadura holónoma entonces, a partir de (2.21), el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2 \quad (4.13)$$

y, a partir de (3.75), el número mínimo de coordenadas independientes es,

$$\eta = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 1 = 2 \quad (4.14)$$

siendo $\eta = s$ como era de esperarse para un sistema holónomo.

Desplazamientos reales compatibles con las ligaduras: para hacer que los desplazamientos (4.10) sean compatibles con la ligadura (4.12) simplemente se sustituye en ellos resultando (en este caso es sencillo hacerlo),

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = R \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ dy = R \cos \theta \sin \varphi d\theta + R \sin \theta \cos \varphi d\varphi \\ dz = -R \sin \theta d\theta \end{array} \right. \quad (4.15)$$

que son los desplazamientos reales de la partícula compatibles con la ligadura.

Desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras: los desplazamientos virtuales compatibles con la ligadura son idénticos a los desplazamientos reales compatibles con la ligadura encontrados en (c), ya que la ligadura involucrada es esclerónica. Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x = R \cos \theta \cos \varphi \delta\theta - R \sin \theta \sin \varphi \delta\varphi \\ \delta y = R \cos \theta \sin \varphi \delta\theta + R \sin \theta \cos \varphi \delta\varphi \\ \delta z = -R \sin \theta \delta\theta \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Se procederá ahora a responder las preguntas formuladas en el enunciado del ejemplo:

(a) Al diferenciar (4.11) resulta,

$$df_1^{(h)}(x, y, z) = 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \quad (4.17)$$

que es la condición que deben cumplir los desplazamientos reales dx , dy y dz para ser compatibles con la ligadura (4.11).

(b) Como la ligadura dada es esclerónoma entonces la condición que deben cumplir los desplazamientos virtuales es idéntica a (4.17) cambiando el símbolo diferencial d por δ . En efecto,

$$\delta f_1^{(h)}(x, y, z) = x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0 \quad (4.18)$$

(c) Los desplazamientos reales compatibles con la ligadura son los dados por (4.15).

(d) Los desplazamientos virtuales compatibles con la ligadura son los dados por (4.16).

(e) En el caso de los desplazamientos reales, al sustituir (4.15) en (4.17) resulta,

$$\begin{aligned} 0 &= 2xdx + 2ydy + 2zdz \\ 0 &= 2x(R \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \sin \theta \sin \varphi d\varphi) + 2y(R \cos \theta \sin \varphi d\theta + R \sin \theta \cos \varphi d\varphi) \\ &\quad + 2z(-R \sin \theta d\theta) \end{aligned} \quad (4.19)$$

y al sustituir aquí (4.9) con $r = R$ en el anterior resultado se obtiene,

$$\begin{aligned} 0 &= (R \sin \theta \cos \varphi)(R \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \sin \theta \sin \varphi d\varphi) \\ &\quad + (R \sin \theta \sin \varphi)(R \cos \theta \sin \varphi d\theta + R \sin \theta \cos \varphi d\varphi) \\ &\quad + (R \cos \theta)(-R \sin \theta d\theta) \end{aligned}$$

O,

$$0 = 0$$

satisfaciéndose así la condición (4.17).

Por último, en el caso de los desplazamientos virtuales, al sustituir (4.16) y (4.9) con $r = R$ en (4.18) también resulta,

$$0 = 0$$

satisfaciéndose así la condición (4.18).

EJEMPLO 4.2

Partícula que se mueve sobre una parábola lisa que gira. En la figura 4.5 se muestra un alambre liso y rígido en forma parabólica $z = r^2$ (en coordenadas cilíndricas) que gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular

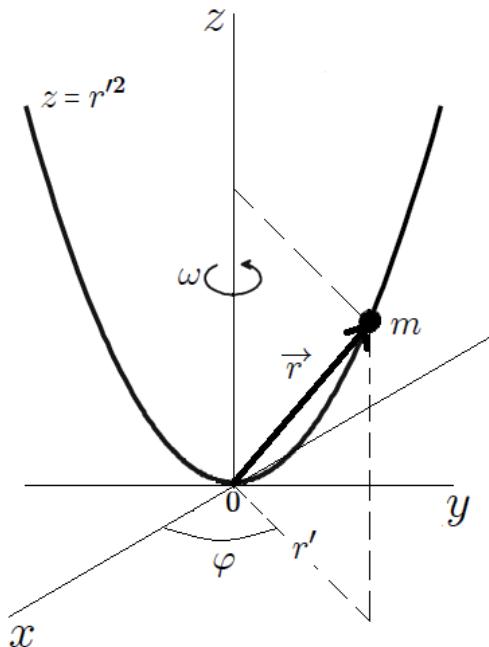


Figura 4.5: Anillo que se desplaza sobre un alambre liso en forma de parábola que rota con ω constante.

constante ω , y un anillo de tamaño despreciable y masa m que se desplaza por él. Determínense los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras presentes.

SOLUCION: se usarán coordenadas cilíndricas.

Desplazamientos reales arbitrarios: en coordenadas cilíndricas el vector de posición de la partícula viene dado por,

$$\vec{r} = (r' \cos \varphi, r' \sin \varphi, z) \quad (4.20)$$

donde se ha usado la prima en la coordenada cilíndrica r' para distinguirla del módulo r del vector de posición \vec{r} del anillo. De esta manera,

$$\begin{cases} x = r' \cos \varphi \\ y = r' \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (4.21)$$

Los desplazamientos reales arbitrarios se obtienen diferenciar (4.21). En efecto,

$$\begin{cases} dx = \cos \varphi dr' - r' \sin \varphi d\varphi \\ dy = \sin \varphi dr' + r' \cos \varphi d\varphi \\ dz = dz \end{cases} \quad (4.22)$$

Ligaduras, grados de libertad y número mínimo de coordenadas generalizadas: en este caso existen $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas,

$$\left\{ \begin{array}{l} z = r'^2 \Rightarrow f_1^{(h)} = z - r'^2 = 0, \text{ que obliga a la partícula a moverse} \\ \text{por el alambre.} \\ \varphi = \omega t \Rightarrow f_2^{(h)} = \varphi - \omega t = 0, \text{ introduce la rotación del alambre.} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

de manera que el sistema es reónomo ($f_2^{(h)}$ depende explícitamente del tiempo t).

Como existen $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas entonces, a partir de (2.21), el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1 \quad (4.24)$$

y, a partir de (3.75), el número mínimo de coordenadas independientes es,

$$\eta = 3N - K^{(h)} = 3(1) - 2 = 1 \quad (4.25)$$

siendo $\eta = s$ como era de esperarse para un sistema holónomo.

Desplazamientos reales compatibles con las ligaduras: para hacer que los desplazamientos (4.22) sean compatibles con las ligaduras (4.23) simplemente se sustituyen en ellos resultando (en este caso es sencillo hacerlo),

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \cos(\omega t) dr' - r' \omega \sin(\omega t) dt \\ dy = \sin(\omega t) dr' + r' \omega \cos(\omega t) dt \\ dz = 2r' dr' \end{array} \right. \quad (4.26)$$

que son los desplazamientos reales de la partícula compatibles con las ligaduras.

Desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras: por último, los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras se obtienen al congelar la ligadura reónoma. Por lo tanto, al hacer $dt = 0$ en (4.26) se obtiene finalmente,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \delta x = \cos(\omega t) \delta r' \\ \delta y = \sin(\omega t) \delta r' \\ \delta z = 2r' \delta r' \end{array} \right.} \quad (4.27)$$

que son los desplazamientos virtuales pedidos.

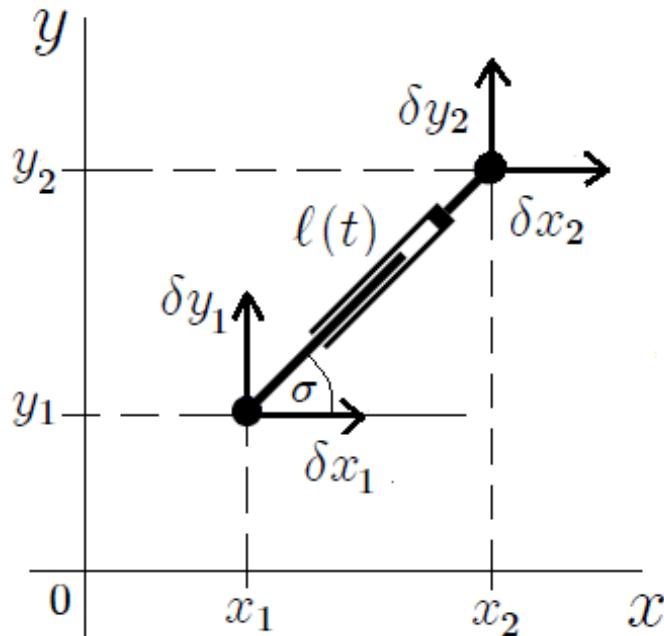


Figura 4.6: Dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por una barra telescopica de longitud $\ell = \ell(t)$.

EJEMPLO 4.3

Se tienen dos partículas de masas m_1 y m_2 que están unidas por una barra telescopica, de longitud $\ell = \ell(t)$, como se muestra en la figura 4.6. Determinar los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras presentes. Aquí σ es un ángulo variable.

SOLUCION: se utilizarán coordenadas Cartesianas.

Desplazamientos reales arbitrarios: las posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 de las partículas vienen dadas en coordenadas Cartesianas por,

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \quad (4.28)$$

de manera que,

$$\begin{cases} d\vec{r}_1 = (dx_1, dy_1, dz_1) \\ d\vec{r}_2 = (dx_2, dy_2, dz_2) \end{cases} \quad (4.29)$$

son los desplazamientos reales arbitrarios de las partículas m_1 y m_2 .

Ligaduras, grados de libertad y número mínimo de coordenadas generalizadas: en el sistema dado están presentes $K^{(h)} = 3$ ligaduras holónomas dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \Rightarrow f_1^{(h)} = z_1 = 0, \text{ que fija a } m_1 \text{ sobre el plano } xy. \\ z_2 = 0 \Rightarrow f_2^{(h)} = z_2 = 0, \text{ que fija a } m_2 \text{ sobre el plano } xy. \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell^2(t) \Rightarrow f_3^{(h)} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell^2(t) = 0, \\ \text{que fija la posición de } m_1 \text{ con respecto a } m_2 \text{ o viceversa.} \end{array} \right. \quad (4.30)$$

La ligaduras $f_1^{(h)}$ y $f_2^{(h)}$ son esclerónomas mientras que $f_3^{(h)}$ es reónoma por ser $\ell = \ell(t)$, de manera que el sistema es reónomo.

Como existen $K^{(h)} = 3$ ligaduras holónomas entonces, a partir de (2.21), el número de grados de libertad es,

$$s = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 3 = 3 \quad (4.31)$$

y, a partir de (3.75), el número mínimo de coordenadas independientes es,

$$\eta = 3N - K^{(h)} = 3(2) - 3 = 3 \quad (4.32)$$

siendo $\eta = s$ como era de esperarse para un sistema holónico.

Desplazamientos reales compatibles con las ligaduras: en este caso no es fácil sustituir la ligadura $f_3^{(h)}$ en (4.29) para hacer que los desplazamientos sean compatibles con las ligaduras. Por esta razón se procede a encontrar un conjunto de coordenadas generalizadas para el sistema dado y se escriben las ecuaciones de transformación correspondientes, para luego encontrar los desplazamientos reales a partir de éstas. Se pueden tomar como coordenadas generalizadas las coordenadas de la posición de m_1 y el ángulo σ (pueden tomarse las de m_2 y σ). Las ecuaciones de transformación se pueden obtener fácilmente a partir de la figura 4.6 resultando,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = 0 \\ x_2 = x_1 + \ell(t) \cos \sigma \\ y_2 = y_1 + \ell(t) \sin \sigma \\ z_2 = 0 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Es fácil verificar que estas transformaciones satisfacen las ligaduras (4.30), lo cual indica que ya estas transformaciones las contienen. También es posible tomar como

coordenadas generalizadas x_1, y_1 y y_2 de manera que,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ y_1 = y_1 \\ z_1 = 0 \\ x_2 = x_1 + \sqrt{\ell^2 - (y_2 - y_1)^2} \\ y_2 = y_2 \\ z_2 = 0 \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Se usarán las transformaciones (4.33). Ahora, al sustituir éstas en (4.29) resulta,

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{r}_1 = (dx_1, dy_1, 0) \\ d\vec{r}_2 = \left(dx_1 - \ell \operatorname{Sen} \sigma dt + \dot{\ell} \operatorname{Cos} \sigma dt, dy_1 + \ell \operatorname{Cos} \sigma dt + \dot{\ell} \operatorname{Sen} \sigma dt, 0 \right) \end{array} \right. \quad (4.35)$$

ya que $d\ell = \dot{\ell} dt$. Estos son los desplazamientos reales compatibles con las ligaduras de las partículas m_1 y m_2 .

Desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras: por último, los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras se obtienen al congelar la ligadura reónoma. Por lo tanto, al hacer $dt = 0$ en (4.35) se obtiene finalmente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\vec{r}_1 = (\delta x_1, \delta y_1, 0) \\ \delta\vec{r}_2 = (\delta x_1 - \ell \operatorname{Sen} \sigma \delta\sigma, \delta y_1 + \ell \operatorname{Cos} \theta \delta\sigma, 0) \end{array} \right. \quad (4.36)$$

que son los desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras pedidos.

4.1.2.2 Clasificación de los desplazamientos virtuales

Los desplazamientos virtuales se pueden clasificar en reversibles e irreversibles.

1. **Reversibles:** son reversibles aquellos desplazamientos virtuales que pueden realizarse en un cierto sentido (δr_i) y en su opuesto ($-\delta r_i$).
2. **Irreversibles:** son irreversibles aquellos desplazamientos virtuales que se pueden realizar en un cierto sentido pero no en su opuesto, por impedirlo las ligaduras.

Las ligaduras bilaterales sólo permiten desplazamientos reversibles, mientras que las ligaduras unilaterales permiten desplazamientos virtuales reversibles e irreversibles.

4.2 Trabajo real y trabajo virtual

4.2.1 Trabajo Real

El *Trabajo Real* se define de la siguiente manera:

Desde los cursos básicos de Física se sabe que el trabajo mecánico dW realizado por una fuerza \vec{F} para desplazar a un cuerpo de masa m una distancia $d\vec{r}$ viene dado por,

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r} = F dr \cos \alpha \quad (4.37)$$

donde F y dr son los módulos de la fuerza \vec{F} y el desplazamiento real $d\vec{r}$ respectivamente, mientras que α es el ángulo entre ambos vectores. Este trabajo dW es el que recibe el nombre de *Trabajo Real*.

Se le da este nombre puesto que el desplazamiento $d\vec{r}$ es un desplazamiento real de la partícula involucrada. Para un sistema de N partículas, como ya fue estudiado en el capítulo 1, el trabajo real viene dado por,

$$\text{Trabajo real} \left\{ \begin{array}{l} dW_i = \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i \text{ para la } i\text{-ésima partícula} \\ dW = \sum_{i=1}^N dW_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet d\vec{r}_i \text{ para el sistema de partículas} \end{array} \right. \quad (4.38)$$

4.2.2 Trabajo Virtual

Ahora bien, el *Trabajo Virtual* se define de la siguiente manera:

El *Trabajo Virtual* δW realizado por una fuerza \vec{F} para desplazar una partícula de masa m un desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$ viene dado por,

$$\delta W = \vec{F} \bullet \delta\vec{r} = F \delta r \cos \alpha \quad (4.39)$$

donde F y δr son los módulos de la fuerza \vec{F} y el desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$ respectivamente, mientras que α es el ángulo entre ambos vectores.

El trabajo virtual que efectúa un par \vec{C} durante un desplazamiento virtual angular $\delta\vec{\gamma}$ del cuerpo viene dado por,

$$\delta W = \vec{C} \bullet \delta\vec{\gamma} = C\delta\gamma \cos\alpha \quad (4.40)$$

donde C y $\delta\gamma$ son los módulos del par \vec{C} y el desplazamiento virtual $\delta\vec{\gamma}$ respectivamente, mientras que α es el ángulo entre ambos vectores.

Es importante hacer notar que, como los desplazamiento virtuales δr y $\delta\gamma$ en las expresiones (4.39) y (4.40) corresponden a movimientos ficticios, dichas expresiones no se podrán integrar.

4.3 Principio de los Trabajos Virtuales

Si un sistema está en equilibrio translacional significa que es nula la resultante de las fuerzas que actúan sobre cada partícula, $\vec{F}_i = \vec{0}$. Es obvio que en tal caso se anulará también el producto escalar $\vec{F}_i \bullet \delta\vec{r}_i$, que es el trabajo virtual de la fuerza \vec{F}_i en el desplazamiento virtual $\delta\vec{r}_i$. La suma de estos productos nulos extendida a todas las partículas será,

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \bullet \delta\vec{r}_i = 0 \quad (4.41)$$

Hasta ahora nada se ha dicho que posea un contenido físico nuevo. Si se escribe \vec{F}_i como la suma de la fuerza aplicada $\vec{F}_i^{(a)}$ y la de ligadura $\vec{F}_i^{(lig)}$,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(lig)} \quad (4.42)$$

entonces la expresión (4.41) adopta la forma,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(lig)} \bullet \delta\vec{r}_i = 0 \quad (4.43)$$

Pueden existir sistemas en los que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura sea nulo. La ligadura del sólido rígido, los contactos sin rozamiento y la rodadura son algunas de las que tienen esta característica.

A la ligadura cuya fuerza de ligadura correspondiente no realiza trabajo en los desplazamientos virtuales, se le denomina *Ligadura Ideal*.

Estas son las ligaduras lisas estudiadas en la sección 2.5.1. De este modo, si una partícula se ve obligada a moverse sobre una superficie, la fuerza de ligadura será perpendicular a la misma, en tanto que el desplazamiento virtual deberá ser tangente y, por lo tanto, el trabajo virtual será nulo. Lo anterior deja de cumplirse si existen fuerzas de rozamiento. Entonces, para sistemas de este tipo, la expresión (4.43) puede escribirse como,

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.44)$$

que suele denominarse *Principio de los Trabajos Virtuales*. De aquí en adelante se utilizarán las siglas PTV cuando se haga referencia a este principio.

El PTV puede enunciarse de la manera siguiente,

Para que un sistema mecánico sometido a ligaduras lisas permanezca en equilibrio debe cumplirse, como condición necesaria y suficiente, que se anule el trabajo del conjunto de fuerzas aplicadas sobre dicho sistema para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras.

Además, se debe tener presente que:

1. Los coeficientes de $\delta \vec{r}_i$ no son ya nulos, es decir, en general $\vec{F}_i^{(a)} \neq \vec{0}$. En esencia, esto se debe a que las $\delta \vec{r}_i$ no son completamente independientes, sino que están relacionadas por las ligaduras. Es decir, para una fuerza total \vec{F}_i sobre un punto dado, se verifica que $\vec{F}_i \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \forall i$ (no sumado); sin embargo, para la fuerza aplicada correspondiente $\vec{F}_i^{(a)}$ en general es,

$$\vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i \neq 0$$

En otras palabras, los términos individuales del trabajo virtual de las fuerzas aplicadas no tienen por qué anularse, aunque la suma sí es siempre nula,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i = 0$$

2. Las fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ deben incluir tanto las externas como las internas que, en un caso general, sí realizan trabajo virtual. Por el contrario, las fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ excluyen a las fuerzas de reacción, que no desarrollan trabajo virtual. Sin embargo, a la hora de realizar los cálculos, las reacciones pueden ser incluidas en $\vec{F}_i^{(a)}$ sin producir alteración alguna ya que su trabajo virtual se anulará.

Por último, conviene notar que la ventaja del PTV es que plantea las condiciones para el equilibrio global del sistema sin emplear las reacciones de las ligaduras lisas, las cuales no hacen falta calcular en ningún momento. También pueden tratarse situaciones con ligaduras no lisas usando (4.43).

Como puede inferirse de todo lo anterior, el PTV es un principio que es muy útil para resolver situaciones donde esté involucrada la Estática.

EJEMPLO 4.4

Encuentre la relación entre las cantidades mostradas en la figura 4.7a para que el péndulo permanezca en equilibrio estático.

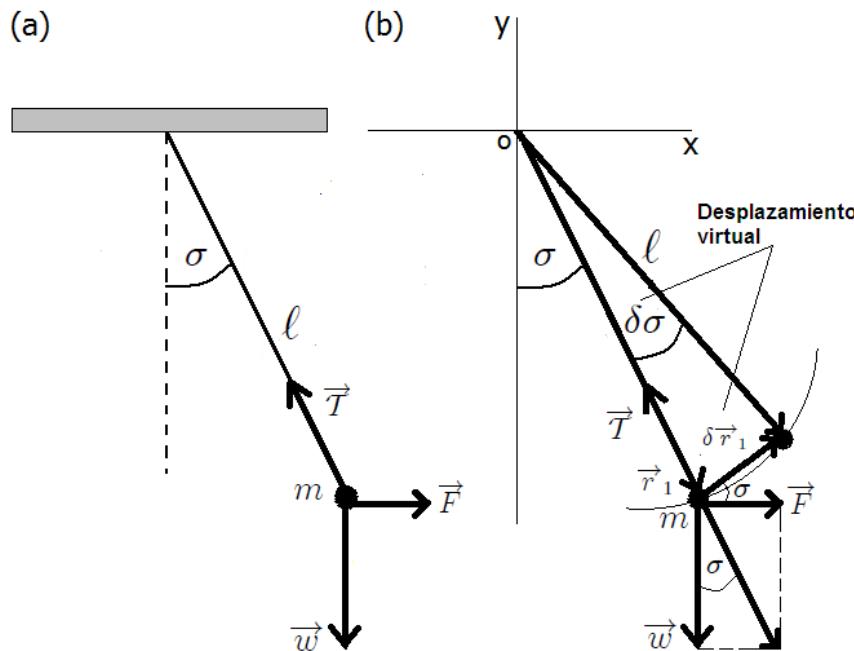


Figura 4.7: Péndulo en equilibrio estático. (a) Diagrama de cuerpo libre. (b) Diagrama con fuerzas y desplazamientos virtuales.

SOLUCION: las reacciones, como la tensión de la cuerda, no realizan trabajo. Sin embargo, en los casos en los cuales no se tenga la seguridad de conocer las fuerzas

que no realizan trabajo, todas estas pueden ser consideradas como aplicadas. En este caso las fuerzas aplicadas son \vec{w} y \vec{F} (no existen fuerzas iniciales) y la tensión \vec{T} es una fuerza de reacción. Se resolverá el presente problema considerando la tensión como fuerza aplicada, aunque es obvio que no realiza trabajo. Supóngase un desplazamiento virtual donde el ángulo σ se incrementa una pequeña cantidad $\delta\sigma$. Por lo tanto, a partir del PTV (4.44) para $N = 1$ (una partícula),

$$\sum_{i=1}^{N=1} \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i = \vec{F}_1^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_1 = 0 \quad (4.45)$$

pero,

$$\vec{F}_1^{(a)} = \vec{F} + \vec{w} + \vec{T} \quad (4.46)$$

entonces al sustituir (4.46) en (4.45) y observando los ángulos formados por los vectores involucrados a partir de la figura 4.7b,

$$\underbrace{\vec{F} \bullet \delta \vec{r}_1}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{F}} + \underbrace{\vec{w} \bullet \delta \vec{r}_1}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{w}} + \underbrace{\vec{T} \bullet \delta \vec{r}_1}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{T}} = 0$$

$$\underbrace{F \delta r_1 \cos \sigma + w \delta r_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right) + T \delta r_1 \cos \frac{\pi}{2}}_{\text{Ver figura 4.7b}} = 0$$

$$F \cos \sigma \delta r_1 - w \sin \theta \delta r_1 = 0$$

$$(F \cos \sigma - w \sin \sigma) \delta r_1 = 0$$

y finalmente,

$$F = w \operatorname{Tg} \sigma \quad (4.47)$$

EJEMPLO 4.5

Una partícula de masa m , que está unida elásticamente al origen 0 mediante la fuerza $\vec{F}_e = -k\vec{r}$ como se muestra en la figura 4.8, se desplaza sobre la pared lisa interna de un cilindro de radio R y altura H (el origen 0 está en el eje del cilindro). La trayectoria descrita por la partícula tiene forma de hélice circular de eje vertical $z = -\frac{H}{2\pi}\varphi$, en coordenadas cilíndricas. Muestre que,

$$\varphi = \frac{2\pi mg}{kH}$$

al alcanzarse el equilibrio, usando el PTV.

SOLUCION: se usarán coordenadas cilíndricas con una prima en la coordenada radial para distinguirla del módulo r del vector de posición. En el sistema están presentes

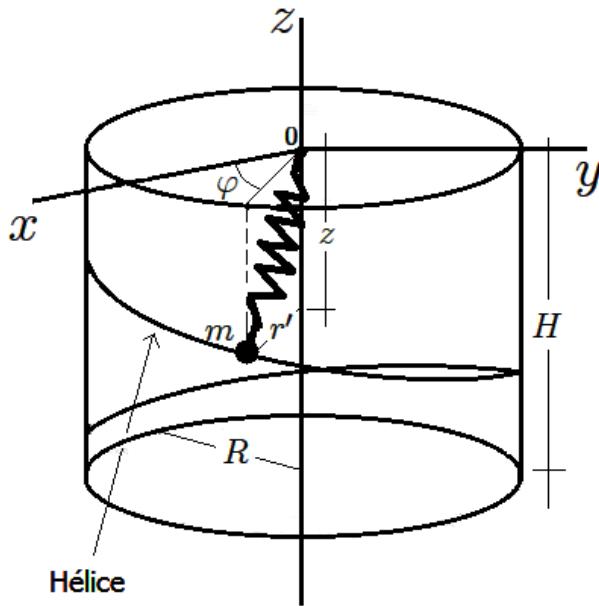


Figura 4.8: Partícula moviéndose dentro de un cilindro con trayectoria helicoidal.

las ligaduras siguientes $K^{(h)} = 2$ ligaduras holónomas esclerónomas,

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = R \Rightarrow f_1^{(h)} = r' - R = 0, \text{ que es la superficie sobre la cual se mueve la partícula (ecuación del cilindro).} \\ z = -\frac{H}{2\pi}\varphi \Rightarrow f_2^{(h)} = z + \frac{H}{2\pi}\varphi = 0, \text{ que fija la trayectoria de la partícula (ecuación de la hélice circular).} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Nótese que φ es una de las coordenadas cilíndricas. En coordenadas cilíndricas la posición de la partícula viene dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r' \cos \varphi \\ y = r' \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right. \quad (4.49)$$

O,

$$\vec{r}_1 = r' \cos \varphi \hat{e}_x + r' \sin \varphi \hat{e}_y + z \hat{e}_z \quad (4.50)$$

donde el subíndice 1 indica que es el vector de posición de la partícula 1 del sistema (la partícula de masa m que es la única existente).

A partir de (4.49) los desplazamientos reales dx , dy y dz de la partícula vienen dados por,

$$d\vec{r}_1 = \underbrace{(\cos \varphi dr' - r' \sin \varphi d\varphi)}_{dx} \hat{e}_x + \underbrace{(\sin \varphi dr' + r' \cos \varphi d\varphi)}_{dy} \hat{e}_y + \underbrace{dz}_{dz} \hat{e}_z \quad (4.51)$$

Los correspondientes desplazamientos reales compatibles con las ligaduras se obtienen al sustituir (4.48) en (4.51). En efecto,

$$\begin{cases} dx = \cos \varphi d(R) - (R) \sin \varphi d\varphi = -R \sin \varphi d\varphi \\ dy = \sin \varphi d(R) + (R) \cos \varphi d\varphi = R \cos \varphi d\varphi \\ dz = d\left(-\frac{H}{2\pi}\varphi\right) = -\frac{H}{2\pi}d\varphi \end{cases}$$

O,

$$d\vec{r} = -R \sin \varphi d\varphi \hat{e}_x + R \cos \varphi d\varphi \hat{e}_y - \frac{H}{2\pi} d\varphi \hat{e}_z \quad (4.52)$$

y como ambas ligaduras presentes son esclerónomas, los desplazamientos virtuales coinciden con los desplazamientos reales,

$$\delta\vec{r}_1 = -R \sin \varphi \delta\varphi \hat{e}_x + R \cos \varphi \delta\varphi \hat{e}_y - \frac{H}{2\pi} \delta\varphi \hat{e}_z \quad (4.53)$$

Por otro lado, la fuerza total aplicada $\vec{F}_1^{(a)}$ sobre la bolita viene dada por,

$$\vec{F}_1^{(a)} = \vec{F}_1^{(int)} + \vec{F}_1^{(ext)} = -k\vec{r}_1 + m\vec{g} \quad (4.54)$$

donde, como ya se sabe del capítulo 1, $\vec{F}_1^{(int)}$ es la resultante de las fuerzas internas sobre la partícula 1 y $\vec{F}_1^{(ext)}$ es la resultante de las fuerzas externas sobre la misma partícula. Ahora, al introducir (4.50) en esta expresión teniendo presentes las ligaduras (4.48) y que $\vec{g} = -g\hat{e}_z$ resulta,

$$\begin{aligned} \vec{F}_1^{(a)} &= -k \left(R \cos \varphi \hat{e}_x + R \sin \varphi \hat{e}_y - \frac{H}{2\pi} \varphi \hat{e}_z \right) + m (-g\hat{e}_z) \\ &= -kR \cos \varphi \hat{e}_x - kR \sin \varphi \hat{e}_y + \left(\frac{kH}{2\pi} \varphi - mg \right) \hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.55)$$

que es la fuerza aplicada sobre la única partícula del sistema.

Finalmente, al sustituir (4.53) y (4.55) en la expresión (4.44) del PTV para $N = 1$ (una partícula) resulta,

$$\sum_{i=1}^{N=1} \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta\vec{r}_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_1^{(a)} \bullet \delta\vec{r}_1 = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-kR \cos \varphi \hat{e}_x - kR \sin \varphi \hat{e}_y + \left(\frac{kH}{2\pi} \varphi - mg \right) \hat{e}_z \right] \bullet \left(-R \sin \varphi \delta\varphi \hat{e}_x + R \cos \varphi \delta\varphi \hat{e}_y - \frac{H}{2\pi} \delta\varphi \hat{e}_z \right) \\ 0 &= \frac{kH}{2\pi} \varphi - mg \end{aligned}$$

O,

$$\varphi = \frac{2\pi mg}{kH} \quad (4.56)$$

como se pedía mostrar.

El PTV, tal cual fue formulado en el presente texto, establece que la sumatoria de los trabajos virtuales realizados por las fuerzas presentes sobre cada una de las **partículas** del sistema es nula. En el caso de un sistema formado por cuerpos rígidos, se procede primero a transformar el sistema dado a uno de partículas mediante el cálculo del centro de masa de cada uno de los cuerpos rígidos presentes, de esta manera las fuerzas estarían ahora aplicadas sobre partículas. Con mucha frecuencia existen fuerzas que no quedan aplicadas sobre los centros de masa y, por consiguiente, no quedan aplicadas sobre partícula alguna. Sin embargo, es posible colocar más masas puntuales sin que la posición del centro de masa del sistema conjunto se altere. La manera de lograr esto es suponer que las masas agregadas son despreciables, siendo tan pequeñas como se quiera. Esto no afecta el cálculo de los trabajos virtuales realizados por las fuerzas presentes ya que en su cálculo no está presente la masa. Estas masas despreciables se colocarán en aquellos puntos donde hayan quedado fuerzas que no estén aplicadas sobre alguna partícula. Después de hecho todo esto, se procede a aplicar el PTV tal cual fue formulado anteriormente.

EJEMPLO 4.6

Una palanca horizontal de masa despreciable está en equilibrio estático bajo la aplicación de las fuerzas verticales \vec{F}_1 a una distancia ℓ_1 del punto de apoyo y \vec{F}_2 a una distancia ℓ_2 del mismo como se muestra en la figura 4.9. Utilizando el PTV, encuentre cuál debe ser la relación entre estas cantidades para que se mantenga el equilibrio.

SOLUCION: este sistema no es de masas puntuales. Para convertirlo en uno de masas puntuales se encuentra la posición del centro de masa de la barra (su masa es despreciable pero no nula). Supóngase que sea homogénea (si no lo es, se comportará así debido a que su masa es despreciable), entonces su centro de masa estará posicionado en su centro geométrico, es decir, en $\frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$.

Aquí las fuerzas aplicadas son el peso $\vec{w} = m\vec{g}$ de la barra (despreciable) que es aplicado en el centro de masa de misma, \vec{F}_1 y \vec{F}_2 . Se tiene, además, la fuerza de

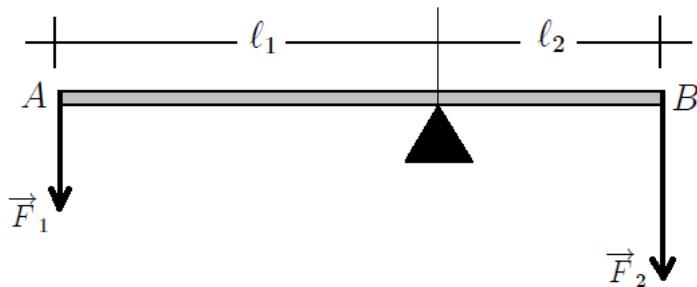


Figura 4.9: Palanca horizontal en equilibrio estático.

reacción \vec{R} en el punto de apoyo de la barra. Estas tres últimas fuerzas no quedan aplicadas sobre una partícula después de haber hallado los centros de masa de cada uno de los cuerpos que componen al sistema (en este caso es sólo uno), entonces en el lugar donde están aplicadas se colocarán masas despreciables adicionales, no alterándose con esto el sistema original. En la figura 4.10a se muestran las masas despreciables agregadas: la masa despreciable m_1 se posicionó en el punto de aplicación de \vec{F}_1 , la m_2 en el punto de aplicación de \vec{F}_2 y m_3 en el punto de aplicación de \vec{R} . La masa M (que también es despreciable debido a la información dada en el enunciado) representa la masa de la barra. El sistema dado se ha convertido ahora en un sistema de 4 partículas de masas m_1 posicionada en \vec{r}_1 , m_2 posicionada en \vec{r}_2 , m_3 posicionada en \vec{r}_3 y $m_4 = M$ posicionada en $\vec{r}_3 = \vec{R}$ (centro de masa). En la figura 4.10b se muestran sus vectores de posición, los desplazamientos virtuales y las fuerzas involucradas.

Las fuerza de reacción \vec{R} no realiza trabajo. Sin embargo, en los casos donde no se esté seguro de cuáles fuerzas no realizan trabajo, las fuerzas de reacción se pueden considerar dentro de las aplicadas. En este caso se tomarán todas las fuerzas existentes como aplicadas.

Cálculo de los desplazamientos virtuales: para encontrar los desplazamientos virtuales primero es necesario encontrar los desplazamientos reales. Supóngase que la palanca realiza un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ (ver figura 4.10b), rotando en el sentido horario con respecto a su punto de apoyo un ángulo infinitesimal $d\sigma$ de manera que,

$$\left\{ \begin{array}{l} dr_1 = \ell_1 d\sigma \\ dr_2 = \ell_2 d\sigma \\ dr_3 = 0 \\ dr_4 = dR = \frac{1}{2} (\ell_1 + \ell_2) d\sigma \end{array} \right. \quad (4.57)$$

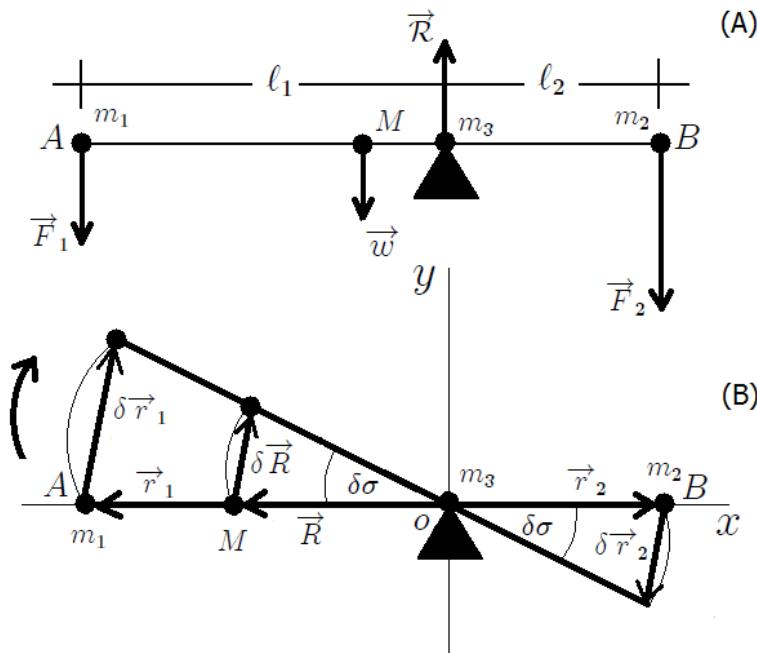


Figura 4.10: (a) Sistema de partículas equivalente al sistema dado. (b) Vectores de posición y desplazamientos virtuales.

donde dR es el módulo del desplazamiento real del vector de posición \vec{R} del centro de masa. Estos son los desplazamientos reales compatibles con la ligadura puesto que la contienen. Como la ligadura presente es esclerónica, los desplazamientos reales coinciden con los virtuales. Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta r_1 = \ell_1 \delta \sigma \\ \delta r_2 = \ell_2 \delta \sigma \\ \delta r_3 = 0 \\ \delta r_4 = \delta R = \frac{1}{2} (\ell_1 + \ell_2) \delta \sigma \end{array} \right. \quad (4.58)$$

que son los desplazamientos virtuales compatibles con la ligadura presente.

Fuerzas involucradas: las fuerzas presentes en el sistema son,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1^{(a)} = \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2^{(a)} = \vec{F}_2 \\ \vec{F}_3^{(a)} = \vec{R} \\ \vec{F}_4^{(a)} = \vec{w} = M \vec{g} \simeq \vec{0} \text{ por ser despreciable} \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Aplicación del PTV: a partir del PTV (4.44) con $N = 4$ (cuatro partículas),

$$\sum_{i=1}^{N=4} \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i = \vec{F}_1^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_2 + \vec{F}_3^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_3 + \vec{F}_4^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_4 = 0 \quad (4.60)$$

Ahora, al sustituir (4.59) en (4.60) resulta,

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\left(\vec{F}_1\right) \bullet \delta \vec{r}_1}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{F}_1} + \underbrace{\left(\vec{F}_2\right) \bullet \delta \vec{r}_2}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{F}_2} + \underbrace{\left(\vec{R}\right) \bullet \delta \vec{r}_3}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{R}} + \underbrace{\left(\vec{0}\right) \bullet \delta \vec{r}_4}_{\text{Trabajo virtual de } \vec{w}} = 0 \\
 & F_1 \delta r_1 \cos \pi + F_2 \delta r_2 \cos 0 + R \delta r_3 \cos (\vec{R}, \vec{r}_3) = 0 \\
 & \quad \text{Ver figuras 4.10a y b para visualizar los ángulos involucrados} \\
 & -F_1 \delta r_1 + F_2 \delta r_2 + R \delta r_3 \cos (\vec{R}, \vec{r}_3) = 0 \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

donde (\vec{R}, \vec{r}_3) representa el ángulo entre los vectores \vec{R} y \vec{r}_3 . Al sustituir aquí los desplazamientos virtuales (4.58) resulta finalmente,

$$\begin{aligned}
 -F_1 (\ell_1 \delta \sigma) + F_2 (\ell_2 \delta \sigma) + R (0) \cos (\vec{R}, \vec{r}_3) &= 0 \\
 (-F_1 \ell_1 + F_2 \ell_2) \delta \sigma &= 0
 \end{aligned}$$

O,

$$F_1 \ell_1 = F_2 \ell_2 \quad (4.62)$$

resultado conocido de los cursos básicos de Física General.

EJEMPLO 4.7

Encuentre el valor del ángulo α para que el sistema mostrado en la figura 4.11 permanezca en equilibrio. Las dos barras mostradas son homogéneas, de masa m y longitud A . La masa y el radio de la rueda son despreciables.

SOLUCION: lo primero que se debe hacer es transformar el sistema dado en un sistema equivalente formado sólo por masas puntuales. Con este fin se encuentran los centros de masa de las barras y de la rueda. Como las barras son homogéneas, sus centros de masa se encuentran en sus respectivos centros geométricos, es decir, a $\frac{1}{2}A$. El centro de masa de la rueda será el punto que la representa. En la figura 4.12 se muestran los centros de masas involucrados y sus vectores de posición respecto al referencial indicado. Se han agregado las masas despreciables m_3 en el soporte fijo y m_4 en el lugar de la rueda. Ahora el sistema dado se ha reemplazado por un sistema de 4 partículas.

Esta vez, en vez de encontrar los ángulos formados entre los desplazamientos virtuales y las fuerzas como en los ejemplos anteriores, todo será desarrollado en forma de componentes.

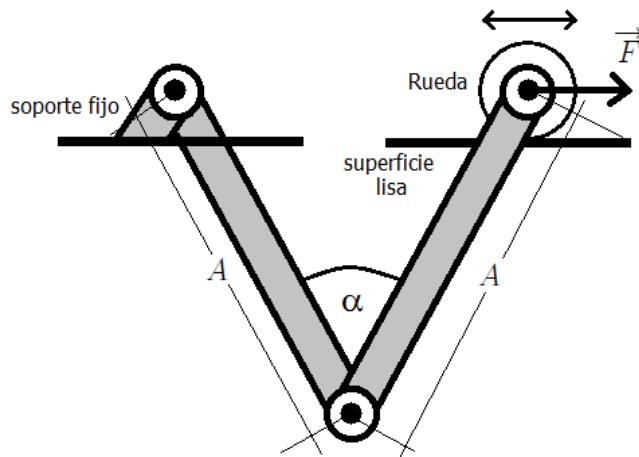


Figura 4.11: Mecanismo de barras homogéneas en equilibrio.

Cálculo de los desplazamientos virtuales: para encontrar los desplazamientos virtuales primero es necesario encontrar los desplazamientos reales. De la figura 4.12 es fácil deducir que,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_{cm_1} = \frac{1}{2}A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ y_1 = y_{cm_1} = -\frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ x_2 = x_{cm_2} = \frac{3}{2}A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ y_2 = y_{cm_2} = -\frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ x_3 = 2A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ y_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ y_4 = 0 \end{array} \right. \quad (4.63)$$

por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R}_1 = x_{cm_1} \hat{e}_x + y_{cm_1} \hat{e}_y = \frac{1}{2}A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_x - \frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_y \\ \vec{r}_2 = \vec{R}_2 = x_{cm_2} \hat{e}_x + y_{cm_2} \hat{e}_y = \frac{3}{2}A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_x - \frac{1}{2}A \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_y \\ \vec{r}_3 = x_3 \hat{e}_x + y_3 \hat{e}_y = 2A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{e}_x \\ \vec{r}_4 = x_4 \hat{e}_x + y_4 \hat{e}_y = \vec{0} \end{array} \right. \quad (4.64)$$

entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{R}_1 = \frac{1}{4}A \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \hat{e}_x + \frac{1}{4}A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \hat{e}_y \\ d\vec{R}_2 = \frac{3}{4}A \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \hat{e}_x + \frac{1}{4}A \operatorname{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \hat{e}_y \\ d\vec{r}_3 = A \operatorname{Cos}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \hat{e}_x \\ d\vec{r}_4 = \vec{0} \end{array} \right. \quad (4.65)$$

Como las ligaduras presentes son esclerónomas entonces los desplazamientos reales

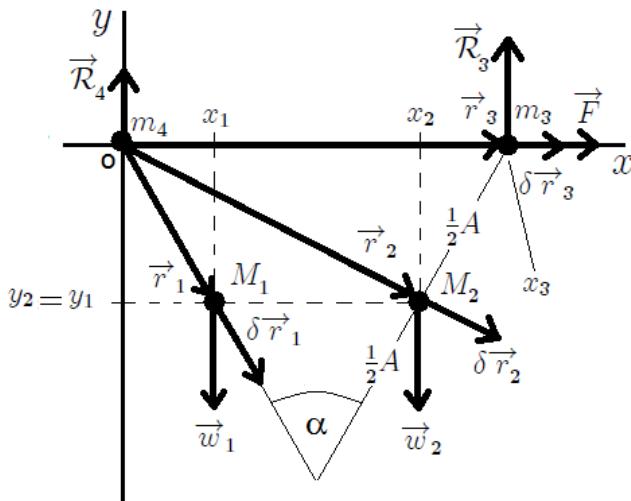


Figura 4.12: Centros de masa de los componentes del sistema, sus vectores de posición, los correspondientes desplazamientos virtuales y las fuerzas involucradas.

coinciden con los virtuales. Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \vec{R}_1 = \frac{1}{4}A \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_x + \frac{1}{4}A \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_y \\ \delta \vec{R}_2 = \frac{3}{4}A \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_x + \frac{1}{4}A \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_y \\ \delta \vec{r}_3 = A \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_x \\ \delta \vec{r}_4 = \vec{0} \end{array} \right. \quad (4.66)$$

Fuerzas involucradas: las fuerzas expresadas en componentes vienen dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_1^{(a)} = \vec{w}_1 = -w_1 \hat{e}_y \\ \vec{F}_2^{(a)} = \vec{w}_2 = -w_2 \hat{e}_y \\ \vec{F}_3^{(a)} = \vec{F} + \vec{R}_3 = F \hat{e}_x + R_3 \hat{e}_y \\ \vec{F}_4^{(a)} = \vec{R}_4 = R_4 \hat{e}_y \end{array} \right. \quad (4.67)$$

donde las reacciones \vec{R}_1 y \vec{R}_2 fueron consideradas dentro de las fuerzas aplicadas a pesar de no serlo, como se ha venido haciendo desde los anteriores ejemplos.

Aplicación del PTV: a partir del PTV (4.44) con $N = 4$ (cuatro partículas),

$$\sum_{i=1}^{N=4} \vec{F}_i^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_i = \vec{F}_1^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_2 + \vec{F}_3^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_3 + \vec{F}_4^{(a)} \bullet \delta \vec{r}_4 = 0 \quad (4.68)$$

Ahora, al sustituir (4.66) y (4.67) en (4.68) resulta,

$$\begin{aligned}
 0 &= (-w_1\hat{e}_y) \bullet \left[\frac{1}{4}A \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_x + \frac{1}{4}A \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_y \right] + (-w_2\hat{e}_y) \bullet \left[\frac{3}{4}A \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_x \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4}A \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_y \right] + (F\hat{e}_x + \mathcal{R}_3\hat{e}_y) \bullet \left[A \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \delta\alpha \hat{e}_x \right] + (\mathcal{R}_4\hat{e}_y) \bullet (\vec{0}) \\
 0 &= \left[-w_1 \frac{1}{4}A \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - w_2 \frac{1}{4}A \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + FA \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \delta\alpha \\
 0 &= -w_1 \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - w_2 \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + F \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

pero $w_1 = M_1g = mg$ y $w_2 = M_2g = mg$ entonces,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}mg \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + F \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 0 \\
 \operatorname{Tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{2F}{mg}
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

O,

$$\alpha = 2 \operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{2F}{mg}\right) \tag{4.71}$$

que es el ángulo pedido. Nótese la independencia del resultado respecto de la longitud de las barras.

4.4 Principio de D'Alembert

Se extenderá el PTV (que se refiere a sistemas estáticos) a sistemas dinámicos. Para realizar esto, se recurrirá a un artificio ideado inicialmente por Bernoulli[†] y perfeccionado después por D'Alembert.

La segunda ley de Newton establece que,

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \tag{4.72}$$

de donde se tiene que,

$$\vec{\phi}_i = \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0} \tag{4.73}$$

Es decir, que si cada partícula i -ésima estuviera sometida a una fuerza neta dada por $\vec{\phi}_i$ el sistema estaría en equilibrio estático instantáneamente (las partículas del sistema estarán en equilibrio bajo los efectos de la fuerza real \vec{F}_i y de otra "fuerza efectiva

[†]Véase apéndice A.10 para una biografía resumida.

invertida" – $\dot{\vec{p}}_i$). Considerada desde este punto de vista, la dinámica se reduce a la estática.

Como la fuerza $\vec{\phi}_i$ debe cumplir con lo establecido en el PTV (4.44) se tiene que,

$$\sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.74)$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.75)$$

pero de (4.42),

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(lig)} \quad (4.76)$$

de esta manera (4.75) se puede escribir ahora como,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(lig)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(lig)} \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.77)$$

finalmente, al considerar sólo sistemas en los que el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo resulta,

$$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0 \quad (4.78)$$

que suele llamarse *Principio de D'Alembert*. Aquí las $\dot{\vec{p}}_i$, como se sabe, son las fuerzas iniciales dadas por,

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (4.79)$$

si las m_i no varían. De aquí en adelante se utilizarán las siglas PD cuando se haga referencia a este principio.

El PD puede enunciarse de la manera siguiente:

En un sistema mecánico sometido a ligaduras lisas, la evolución dinámica del sistema está determinada, como condición necesaria y suficiente, por la anulación en todo instante del trabajo de las fuerzas aplicadas más el trabajo de las fuerzas iniciales para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con las ligaduras.

En el PD las fuerzas iniciales[§] $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \dot{\vec{p}}_i$ aparecen al mismo nivel de la fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$, reduciendo el problema dinámico a un problema estático.

Se debe tener presente, además, que:

- Para una partícula dada (por ejemplo la i -ésima) sería, en general,

$$\left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i \neq 0$$

es decir, que el sumando individual del trabajo virtual no se anula necesariamente, aunque la suma extendida a todo el sistema sí se anula siempre.

- Aplica la misma observación realizada arriba para el principio de los trabajos virtuales sobre la naturaleza de las fuerzas $\vec{F}_i^{(a)}$.

EJEMPLO 4.8

Encuentre, usando el PD, la aceleración de cada masa del sistema de dos masas m_1 y m_2 mostrado en figura 4.13a. Las masas están unidas por una cuerda de longitud ℓ que pasa a través de una polea (de diámetro despreciable). Suponga que la cuerda es indeformable y que no existe fricción alguna.

SOLUCION: en la figura 4.13b se muestran los vectores de posición de cada masa y las fuerzas presentes, mientras que en la figura 4.13c se muestran los vectores de posición y los correspondientes desplazamientos virtuales. Aquí las fuerzas aplicadas son los pesos $\vec{w}_1 = m_1 \vec{g}$, $\vec{w}_2 = m_2 \vec{g}$ de cada masa. La tensión \vec{T} , que es una fuerza de reacción, va a ser considerada dentro de las aplicadas. Las fuerzas iniciales son el producto de cada masa por su correspondiente aceleración. Al aplicar el PD (4.78) para $N = 2$ (dos partículas) resulta,

$$\sum_{i=1}^{N=2} \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\left(\vec{F}_1^{(a)} - \dot{\vec{p}}_1 \right) \bullet \delta \vec{r}_1 + \left(\vec{F}_2^{(a)} - \dot{\vec{p}}_2 \right) \bullet \delta \vec{r}_2 = 0 \quad (4.80)$$

pero,

$$\vec{F}_1^{(a)} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 \quad (4.81)$$

$$\vec{F}_2^{(a)} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 \quad (4.82)$$

[§]Todos los cuerpos tienen una tendencia a permanecer en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme. Se puede pensar en esto como una resistencia inercial al cambio o, en otras palabras, en una *fuerza inercial*. La forma más conocida de la fuerza inercial es la fuerza centrífuga.

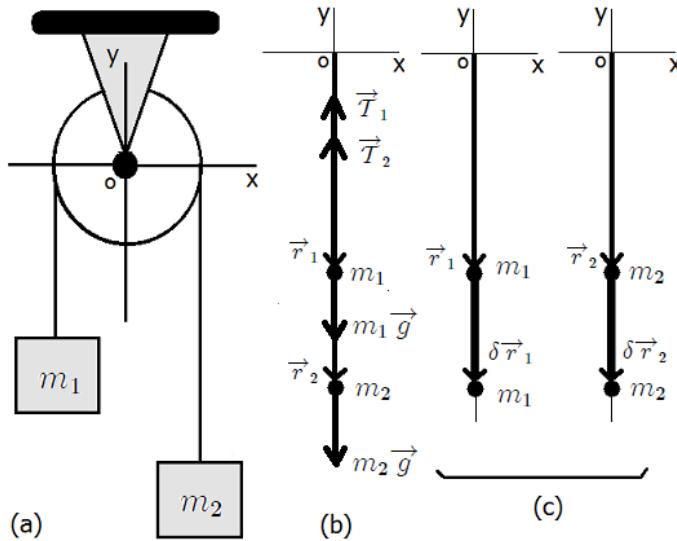


Figura 4.13: Sistema de dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa a través de una polea de diámetro despreciable.

entonces de (4.80) resulta,

$$\left(m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \right) \bullet \delta \vec{r}_1 + \left(m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \right) \bullet \delta \vec{r}_2 = 0 \quad (4.83)$$

y al desarrollar los productos escalares resulta,

$$m_1 \vec{g} \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{T}_1 \bullet \delta \vec{r}_1 - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \bullet \delta \vec{r}_1 + m_2 \vec{g} \bullet \delta \vec{r}_2 + \vec{T}_2 \bullet \delta \vec{r}_2 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \bullet \delta \vec{r}_2 = 0$$

$$\underbrace{m_1 g \delta r_1 \cos 0 + T_1 \delta r_1 \cos \pi - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 \cos 0 + m_2 g \delta r_2 \cos 0 + T_2 \delta r_2 \cos \pi - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 \cos 0}_{\text{Ver figura 4.13c}} = 0$$

$$m_1 g \delta r_1 - T_1 \delta r_1 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 + m_2 g \delta r_2 - T_2 \delta r_2 - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 = 0 \quad (4.84)$$

pero, de la figura 4.13,

$$r_1 + r_2 = \ell \quad (4.85)$$

de manera que,

$$r_1 + r_2 = \ell \Rightarrow \begin{cases} \delta r_1 + \delta r_2 = 0 \Rightarrow \delta r_2 = -\delta r_1 \\ \ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1 \end{cases} \quad (4.86)$$

Entonces, al sustituir (4.86) en (4.84) y teniendo presente que $T_2 = T_1$ (cuerda indeformable) resulta,

$$m_1 g \delta r_1 - T_1 \delta r_1 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 + m_2 g (-\delta r_1) - (T_1) (-\delta r_1) - m_2 \left(-\ddot{r}_1 \right) (-\delta r_1) = 0$$

$$(m_1 g - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g - m_2 \ddot{r}_1) \delta r_1 = 0$$

$$m_1 g - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g - m_2 \ddot{r}_1 = 0$$

O,

$$\ddot{r}_1 = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (4.87)$$

y al usar la segunda de las expresiones (4.86),

$$\ddot{r}_2 = -\frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (4.88)$$

Estos son los resultados conocidos, para este sistema de partículas, del curso de Física elemental.

EJEMPLO 4.9

Encuentre la aceleración del sistema que se muestra en la figura 4.14a, usando el PD. Suponga que no existe fricción y que la cuerda es indeformable, de longitud ℓ .

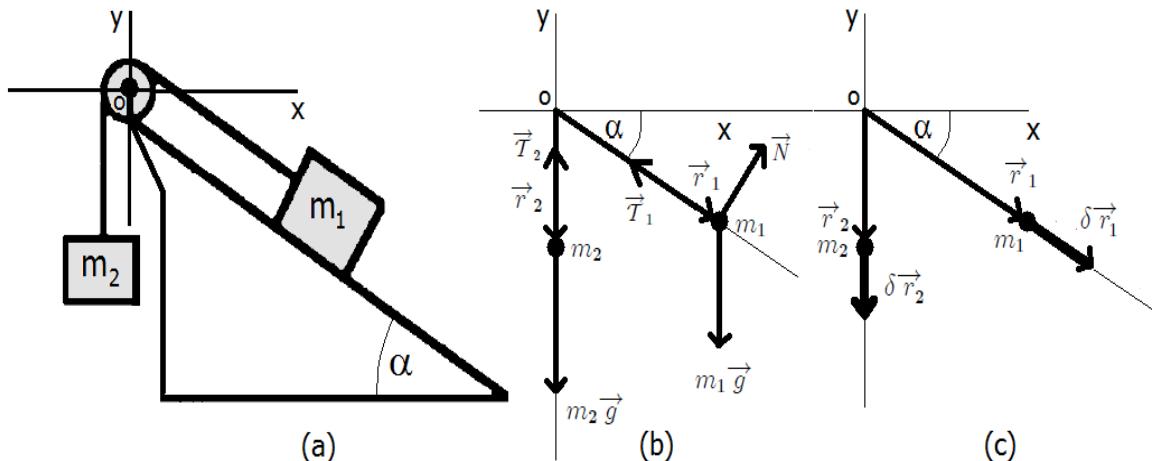


Figura 4.14: Dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda que pasa a través de una polea y donde una de las masas se desliza sobre un plano inclinado.

SOLUCION: en la figura 4.14b se muestran los vectores de posición de cada masa y las fuerzas presentes, mientras que en la figura 4.14c se muestran los vectores de posición y los correspondientes desplazamientos virtuales. Aquí las fuerzas aplicadas son los pesos $\vec{w}_1 = m_1 \vec{g}$, $\vec{w}_2 = m_2 \vec{g}$ de cada masa. La tensión \vec{T} y la normal \vec{N} , que son fuerzas de reacción, van a ser consideradas dentro de las aplicadas. Las fuerzas iniciales son el producto de cada masa por su correspondiente aceleración. Al aplicar el PD (4.78)

para $N = 2$ (dos partículas) resulta,

$$\sum_{i=1}^{N=2} \left(\vec{F}_i^{(a)} - \frac{\bullet}{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\left(\vec{F}_1^{(a)} - \frac{\bullet}{\vec{p}}_1 \right) \bullet \delta \vec{r}_1 + \left(\vec{F}_2^{(a)} - \frac{\bullet}{\vec{p}}_2 \right) \bullet \delta \vec{r}_2 = 0 \quad (4.89)$$

pero,

$$\vec{F}_1^{(a)} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} \quad (4.90)$$

$$\vec{F}_2^{(a)} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 \quad (4.91)$$

de manera que, al sustituir (4.90) y (4.91) en (4.89) resulta,

$$0 = \left(m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \right) \bullet \delta \vec{r}_1 + \left(m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \right) \bullet \delta \vec{r}_2$$

$$0 = m_1 \vec{g} \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{T}_1 \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{N} \bullet \delta \vec{r}_1 - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \bullet \delta \vec{r}_1 + m_2 \vec{g} \bullet \delta \vec{r}_2 + \vec{T}_2 \bullet \delta \vec{r}_2$$

$$-m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \bullet \delta \vec{r}_2$$

$$0 = m_1 g \delta r_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + T_1 \delta r_1 \cos \pi + N \delta r_1 \cos \frac{\pi}{2} - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 \cos 0 + m_2 g \delta r_2 \cos 0$$

$$+ T_2 \delta r_2 \cos \pi - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 \cos 0$$

$$0 = m_1 g \delta r_1 \sin \alpha - T_1 \delta r_1 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 + m_2 g \delta r_2 - T_2 \delta r_2 - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 \quad (4.92)$$

pero de la figura 4.14,

$$r_1 + r_2 = \ell \quad (4.93)$$

de manera que,

$$r_1 + r_2 = \ell \Rightarrow \begin{cases} \delta r_1 + \delta r_2 = 0 \Rightarrow \delta r_2 = -\delta r_1 \\ \ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1 \end{cases} \quad (4.94)$$

entonces, al sustituir (4.93) y (4.94) en (4.92) y teniendo presente que $T_2 = T_1$ (cuerda indeformable) resulta,

$$m_1 g \delta r_1 \sin \alpha - T_1 \delta r_1 - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 + m_2 g (-\delta r_1) - T_1 (-\delta r_1) - m_2 \left(-\ddot{r}_1 \right) (-\delta r_1) = 0$$

$$\left(m_1 g \sin \alpha - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g - m_2 \ddot{r}_1 \right) \delta r_1 = 0$$

$$m_1 g \sin \alpha - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g - m_2 \ddot{r}_1 = 0$$

O,

$$\ddot{r}_1 = \frac{g(m_1 \sin \alpha - m_2)}{m_1 + m_2} \quad (4.95)$$

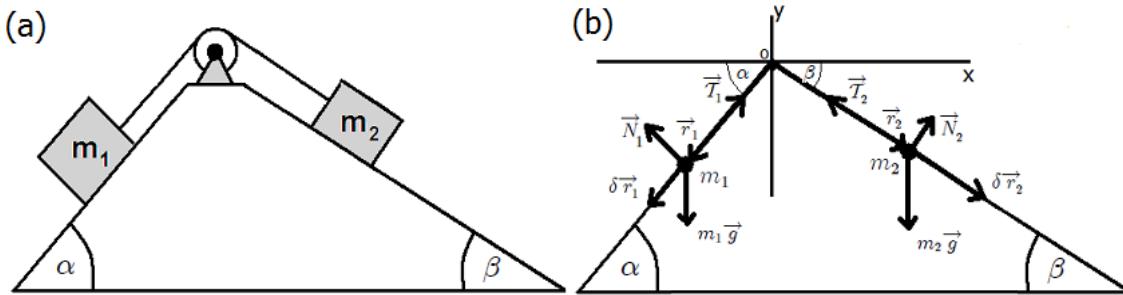
y al usar la segunda de las expresiones (4.94),

$$\ddot{r}_2 = \frac{g(m_2 - m_1 \operatorname{Sen} \alpha)}{m_1 + m_2} \quad (4.96)$$

Estos son los resultados conocidos, para este sistema de partículas, del curso de Física elemental.

EJEMPLO 4.10

Encuentre la aceleración del sistema que se muestra en la figura 4.4a, usando el PD. Suponga que existe fricción y que la cuerda es indeformable, de longitud ℓ .



SOLUCION: en la figura 4.4b se muestran los vectores de posición de cada masa, los desplazamientos virtuales y las fuerzas presentes. Aquí las fuerzas aplicadas son los pesos $\vec{w}_1 = m_1 \vec{g}$, $\vec{w}_2 = m_2 \vec{g}$ de cada masa. La tensión \vec{T} , la normal \vec{N} y la fricción \vec{F}_f , que son fuerzas de reacción, van a ser consideradas dentro de las aplicadas. Las fuerzas iniciales son el producto de cada masa por su correspondiente aceleración. Al aplicar el PD (4.78) para $N = 2$ (dos partículas) resulta,

$$\sum_{i=1}^{N=2} \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \bullet \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\left(\vec{F}_1^{(a)} - \dot{\vec{p}}_1 \right) \bullet \delta \vec{r}_1 + \left(\vec{F}_2^{(a)} - \dot{\vec{p}}_2 \right) \bullet \delta \vec{r}_2 = 0 \quad (4.97)$$

pero,

$$\vec{F}_1^{(a)} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} \quad (4.98)$$

$$\vec{F}_2^{(a)} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} \quad (4.99)$$

de manera que, al sustituir (4.98) y (4.99) en (4.97) resulta,

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{f_1} - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \right) \bullet \delta \vec{r}_1 + \left(m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{f_2} - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \right) \bullet \delta \vec{r}_2 \\
 0 &= m_1 \vec{g} \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{T}_1 \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{N} \bullet \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_{f_1} \bullet \delta \vec{r}_1 - m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \bullet \delta \vec{r}_1 + m_2 \vec{g} \bullet \delta \vec{r}_2 + \vec{T}_2 \bullet \delta \vec{r}_2 \\
 &\quad + \vec{F}_{f_2} \bullet \delta \vec{r}_2 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \bullet \delta \vec{r}_2 \\
 0 &= m_1 g \delta r_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + T_1 \delta r_1 \cos \pi + N \delta r_1 \cos \frac{\pi}{2} + F_{f_1} \delta r_1 \cos \eta_{f_1} - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 \cos 0 \\
 &\quad + m_2 g \delta r_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + T_2 \delta r_2 \cos \pi + F_{f_2} \delta r_2 \cos \eta_{f_2} - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2 \cos 0
 \end{aligned}$$

donde η_{f_1} y η_{f_2} son los ángulos que forman \vec{F}_{f_1} y \vec{F}_{f_2} con $\delta \vec{r}_1$ y $\delta \vec{r}_2$ respectivamente, los cuales tomarán valores de 0 o π dependiendo en qué sentido se mueva el sistema (debe recordarse que la fuerza de fricción siempre es opuesta al sentido del movimiento). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 0 &= m_1 g \delta r_1 \operatorname{Sen} \alpha - T_1 \delta r_1 + F_{f_1} \delta r_1 \cos \eta_{f_1} - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 + m_2 g \delta r_2 \operatorname{Sen} \beta + F_{f_2} \delta r_2 \cos \eta_{f_2} \\
 &\quad - T_2 \delta r_2 - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

pero de la figura 4.4,

$$r_1 + r_2 = \ell \tag{4.101}$$

de manera que,

$$r_1 + r_2 = \ell \Rightarrow \begin{cases} \delta r_1 + \delta r_2 = 0 \Rightarrow \delta r_2 = -\delta r_1 \\ \ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1 \end{cases} \tag{4.102}$$

entonces, al sustituir (4.101) y (4.102) en (4.100) y teniendo presente que $T_1 = T_2$ (cuerda indeformable) resulta,

$$\begin{aligned}
 0 &= m_1 g \delta r_1 \operatorname{Sen} \alpha - T_1 \delta r_1 + F_{f_1} \delta r_1 \cos \eta_{f_1} - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1 + m_2 g (-\delta r_1) \operatorname{Sen} \theta \\
 &\quad + F_{f_2} (-\delta r_1) \cos \eta_{f_2} - (T_1) (-\delta r_1) - m_2 \left(-\ddot{r}_1 \right) (-\delta r_1) \\
 0 &= \left(m_1 g \operatorname{Sen} \alpha + F_{f_1} \cos \eta_{f_1} - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g \operatorname{Sen} \beta - F_{f_2} \cos \eta_{f_2} - m_2 \ddot{r}_1 \right) \delta r_1 \\
 0 &= m_1 g \operatorname{Sen} \alpha + F_{f_1} \cos \eta_{f_1} - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g \operatorname{Sen} \beta - F_{f_2} \cos \eta_{f_2} - m_2 \ddot{r}_1
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

que da la aceleración si el sistema se mueve en la dirección de \vec{r}_1 . En este caso la fuerza de fricción \vec{F}_{f_1} formará un ángulo $\eta_{f_1} = \pi$ con respecto a \vec{r}_1 y la fuerza de fricción \vec{F}_{f_2} formará un ángulo $\eta_{f_2} = 0$ con respecto a \vec{r}_2 . Por esta razón, la expresión (4.103) se puede escribir ahora como,

$$m_1 g \operatorname{Sen} \alpha - F_{f_1} - m_1 \ddot{r}_1 - m_2 g \operatorname{Sen} \beta - F_{f_2} - m_2 \ddot{r}_1 = 0$$

O,

$$\ddot{r}_1 = \frac{g(m_1 \operatorname{Sen} \alpha - m_2 \operatorname{Sen} \beta - F_{f_1} - F_{f_2})}{m_1 + m_2} \quad (4.104)$$

Por otro lado, al sustituir (4.102) en (4.100) de tal manera que sólo aparezca \ddot{r}_2 y teniendo presente que $T_2 = T_1$,

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 g \delta r_1 \operatorname{Sen} \alpha - T_1 \delta r_1 + F_{f_1} \delta r_1 \operatorname{Cos} \eta_{f_1} - m_1 (-\ddot{r}_2) \delta r_1 + m_2 g (-\delta r_1) \operatorname{Sen} \beta \\ &\quad + F_{f_2} (-\delta r_1) \operatorname{Cos} \eta_{f_2} - (T_1) (-\delta r_1) - m_2 \ddot{r}_2 (-\delta r_1) \\ 0 &= (m_1 g \operatorname{Sen} \alpha + F_{f_1} \operatorname{Cos} \eta_{f_1} + m_1 \ddot{r}_2 - m_2 g \operatorname{Sen} \beta - F_{f_2} \operatorname{Cos} \eta_{f_2} + m_2 \ddot{r}_2) \delta r_1 \\ 0 &= m_1 g \operatorname{Sen} \alpha + F_{f_1} \operatorname{Cos} \eta_{f_1} + m_1 \ddot{r}_2 - m_2 g \operatorname{Sen} \beta - F_{f_2} \operatorname{Cos} \eta_{f_2} + m_2 \ddot{r}_2 \end{aligned} \quad (4.105)$$

que da la aceleración si el sistema se mueve en la dirección de \vec{r}_2 . En este caso la fuerza de fricción \vec{F}_{f_1} formará un ángulo $\eta_{f_1} = 0$ con respecto a \vec{r}_1 y la fuerza de fricción \vec{F}_{f_2} formará un ángulo $\eta_{f_2} = \pi$ con respecto a \vec{r}_2 . Por esta razón, la expresión (4.105) se puede escribir ahora como,

$$\ddot{r}_2 = \frac{g(m_2 \operatorname{Sen} \beta - m_1 \operatorname{Sen} \alpha - F_{f_1} - F_{f_2})}{m_1 + m_2} \quad (4.106)$$

Estos dos resultados son los conocidos, para este sistema de partículas, del curso de Física elemental.

El PD (4.78) debe considerarse como un principio básico de la Dinámica, alternativo a las leyes de Newton. Como caso particular, el PD da lugar al PTV estudiado en la sección anterior.

Al igual que el PTV, el PD permite expresar la dinámica global del sistema en forma compacta, eliminando las fuerzas de reacción de las ligaduras lisas.

Cuando lo que se busca es precisamente calcular el valor de alguna reacción, es posible realizarlo mediante trabajos virtuales empleando un artificio. Para ello, se considera esta ligadura “liberada” y la fuerza de reacción como una fuerza aplicada normal, que tendría el efecto precisamente de la ligadura, lo cual permite tomar $\delta \vec{r}_i$ vulnerando la ligadura. De esta manera, la reacción correspondiente sí realiza trabajo virtual y las expresiones (4.44) o (4.78) permiten calcular al final dicha reacción.

La importancia de los métodos basados en los trabajos virtuales radica en que permiten obtener formulaciones prácticas muy generales para la estática o la dinámica

de sistemas con varias partículas (las ecuaciones de Lagrange, por ejemplo, que serán estudiadas en el capítulo ??). Asimismo, son la base de métodos numéricos empleados para la resolución de problemas con numerosos grados de libertad, como es el caso del *Método de los Elementos Finitos*. Estos métodos son de una gran importancia en la Mecánica Computacional y en el cálculo de las estructuras.

4.4.1 Principio de Ostrogradski-Hamilton o de Acción Estacionaria

Antes de establecer el Principio de Ostrogradski-Hamilton es necesario aclarar la definición de Acción,

En la Física, la Acción S es la magnitud que expresa el producto de la energía implicada en un proceso por el tiempo que dura este proceso.

Se puede clasificar según el lapso de tiempo considerado en acción instantánea, acción promedio, etc. La acción es una magnitud física que no es directamente medible, aunque puede ser calculada a partir de cantidades medibles. Entre otras cosas, eso significa que no existe una escala absoluta de la acción, ni puede definirse sin ambigüedad un cero u origen de esta magnitud. La constante de Planck[¶] es el cuanto de acción.

A pesar de lo diferentes que resultan tanto en sus aplicaciones como en algunos de sus principios la mecánica clásica, la mecánica relativista o la mecánica cuántica, todas las ecuaciones de evolución de los sistemas dentro de las mismas parecen derivables del principio de mínima acción aplicado a una acción de la forma adecuada, escogiendo bien el lagrangiano. Eso ha hecho que la acción sea vista como uno de los principios físicos más esenciales y de mayor generalidad conocida.

La primera formulación del Principio de Ostrogradski-Hamilton se debe a Pierre-Louis Moreau de Maupertuis 1744^{||}, que dijo que la “naturaleza es económica en todas sus acciones”**. Entre los que desarrollaron la idea se incluyen Euler y Leibniz^{††}. Anteriormente, Pierre de Fermat^{‡‡} había introducido la idea de que los rayos de la luz, en situaciones ópticas tales como la refracción y la reflexión, seguían un principio del tiempo mínimo.

[¶]Véase apéndice A.11 para una biografía resumida.

^{||}Véanse apéndices A.12 y A.13 para una biografía resumida de Ostrogradski y Maupertuis.

^{**}D'Alembert había formulado un año antes el principio que lleva su nombre generalizando las leyes de Newton.

^{††}Véase apéndice A.14 para una biografía resumida.

^{‡‡}Véase apéndice A.15 para una biografía resumida.

El Principio de Hamilton o de Acción Estacionaria condujo al desarrollo de las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica Clásica. Aunque sean al principio más difíciles de captar, tienen la ventaja que su cosmovisión es más transferible a los marcos de la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica que la de las leyes de Newton.

El *Principio de Ostrogradski-Hamilton* puede enunciarse así:

De todas las trayectorias posibles (compatibles con las ligaduras) que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima la acción dada por la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética T y potencial U .

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \quad (4.107)$$

En el siguiente capítulo se estudiarán las herramientas matemáticas que permiten hallar los valores extremales (máximos y mínimos) de expresiones integrales como la (4.107), llamadas *Funcionales Integrales*.

4.5 Problemas

CAPITULO 5

CALCULO VARIACIONAL CON FRONTERAS FIJAS

El Cálculo Variacional constituye una de las herramientas matemáticas básicas para estudiar la Mecánica de Lagrange y la Mecánica de Hamilton que serán abordadas a partir del capítulo ?? en la parte II del presente texto. Por esta razón su estudio se hace como capítulo aparte a diferencia de no pocos textos de Mecánica Clásica del mismo nivel. El contenido de este capítulo se desarrollará haciendo énfasis en aquellos aspectos de la teoría de variaciones que tienen una aplicación directa en los sistemas clásicos, omitiendo algunas pruebas de existencia.

Contenido

5.1 Funcional	235
5.2 Variación de una función y de una funcional	237
5.2.1 Variación de una función de una variable independiente	237
5.2.2 Variación de una funcional de n variables dependientes y una variable independiente	240
5.3 Planteamiento del problema variacional a estudiar	244
5.4 Cálculo de extremales sin restricciones	250
5.4.1 Para una variable dependiente — Ecuación de Euler	250
5.4.2 Segunda forma y forma integrada de la Ecuación de Euler	257
5.4.3 Para múltiples variables dependientes — Ecuaciones de Euler - Lagrange	264
5.5 Cálculo de extremales con restricciones	271

5.5.1 Restricciones del tipo	$\mathcal{A}_l [y_i (x) ; x] = 0$	273
5.5.2 Restricciones del tipo	$\mathcal{D}_l [y_i (x), y'_i (x) ; x] = 0$	296
5.5.3 Restricciones del tipo	$\widetilde{\mathcal{D}}_l = \sum_{j=1}^n A_{lj} [y_i (x) ; x] y'_j (x) + B_l [y_i (x) ; x] = 0$	299
5.5.4 Restricciones del tipo isoperimétrico	$\int_{x_1}^{x_2} g_l [y_i (x), y'_i (x) ; x] dx = \varrho_l$	313
5.6 Problemas		324

5.1 Funcional

Se denomina *Funcional* a una función J que toma funciones como su argumento, es decir, una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

En el caso de las funciones a cada número le corresponde otro número, mientras que, en el caso de las funcionales a cada función le corresponde un número.

Para los propósitos del presente texto se considerarán sólo funcionales dependientes de varias funciones de una variable ya que serán de importancia para estudios en capítulos posteriores, es decir, las funcionales a considerar tendrán la dependencia general,

$$J = J [y(x)_i, y'(x)_i; x], \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.1)$$

donde,

1. n es el número total de funciones $y(x)_i$ y el número total de sus derivadas $y'(x)_i = \frac{dy_i(x)}{dx}$.
2. $y(x)_i$ son las variables dependientes.
3. x es la variable independiente.
4. El punto y coma separa la *Variable Independiente* de las *Variables Dependientes*.

En el caso de $n = 1$ se tendrá la dependencia,

$$J = J [y(x), y'(x); x]$$

que es el caso dependiente de una función o de una variable dependiente.

De forma análoga, es posible definir también las funcionales dependientes de varias funciones de varias variables independientes.

Un caso especial de funcionales son las denominadas *Funcionales Integrales*,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.2)$$

de una variable independiente, n variables dependientes y donde x_1 y x_2 son cantidades fijas. Estas son las funcionales que van a ser consideradas en el presente capítulo.

EJEMPLO 5.1
Algunos ejemplos de Funcionales.

(a) Sea $\mathcal{N} = C[0, \pi]$ el conjunto de todas las funciones continuas $y(x)$ definidas en el intervalo $[0, \pi]$, y sea,

$$J = \int_0^\pi y(x) dx \quad (5.3)$$

una funcional que a cada función $y(x) \in C[0, \pi]$ le asocia un valor determinado por $J[y(x)]$ entonces:

(a.1) Si $y(x) = x$,

$$J = \int_0^\pi x dx$$

$$J = \frac{1}{2}\pi^2$$

(b.2) Si $y(x) = \cos^2 x$,

$$J = \int_0^\pi \cos^2 x dx$$

$$J = \frac{1}{2}\pi$$

(c.3) Si $y(x) = e^{-x^2} x^3$,

$$J = \int_0^\pi e^{-x^2} x^3 dx$$

$$J = \frac{1}{2} \left[1 - (1 + \pi^2) e^{-\pi^2} \right]$$

(b) El área A de la superficie de revolución generada al hacer girar una línea que une dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en torno a un eje coplanar con los dos puntos (ver figura 5.1), es una funcional que viene dada por,

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.4)$$

donde $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$.

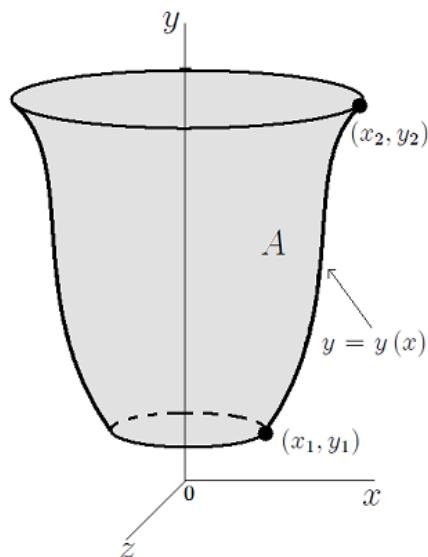


Figura 5.1: Superficie de revolución generada por una curva $y = y(x)$.

5.2 Variación de una función y de una funcional

5.2.1 Variación de una función de una variable independiente

Se denomina *Variación* $\delta y(x)$ de una función $y(x)$, que será denominada *Camino Real*, a la diferencia entre la función $y(x)$ y la función $\tilde{y}(x)$, es decir,

$$\delta y(x) = y(x) - \tilde{y}(x) \quad (5.5)$$

donde $\tilde{y}(x)$ representa un *Camino Variado* a partir del *Camino Real* (ver figura 5.2). Los caminos variados deben cumplir con la condición de que $\delta y(x)$ debe anularse en las fronteras del camino x_1 y en x_2 , como se muestra en la misma figura.

En la figura 5.2 se observa que no existe un δx asociado a un δy , condición que contrasta con el proceso de diferenciación en el cual cualquier dy está asociado a un dx . En vista de la anterior observación se puede decir de δy es, simplemente, la distancia vertical entre dos puntos de diferentes curvas para un determinado valor fijo de x , mientras que dy es la distancia vertical entre dos puntos de la misma curva, separados por una distancia dx . Por lo tanto,

La variación $\delta y(x)$ de la función $y(x)$ se define como un cambio arbitrario infinitesimal en $y(x)$ para un valor fijo de la variable x , es decir, para $\delta x = 0$. El operador δ es denominado *Operador Variacional*.

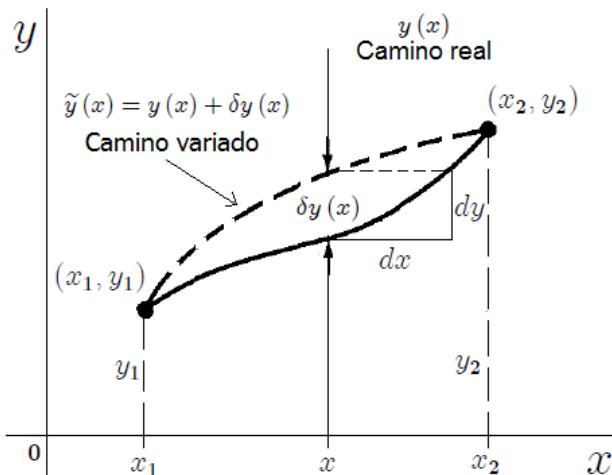


Figura 5.2: Camino real $y(x)$ y camino variado $\tilde{y}(x)$. Diferencia entre δy y dy .

La idea anterior puede ser generalizada diciendo que,

El operador δ representa un pequeño cambio (infinitesimal) de una función donde la variable independiente permanece fija, por lo que es posible obtener la variación de la función $\frac{dy}{dx}$.

Matemáticamente el símbolo variacional δ tiene las mismas propiedades del símbolo diferencial d , al igual que para los desplazamientos virtuales como se había mencionado en el capítulo anterior.

El operador δ tiene las siguientes propiedades:

1. Puesto que $\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$ la variación de $\frac{dy}{dx}$ vendrá dada por,

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d\tilde{y}}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\tilde{y} - y) = \frac{d}{dx} (\delta y)$$

en consecuencia el operador δ es commutativo con el operador diferencial,

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (5.6)$$

2. De forma similar se puede mostrar que el operador δ también es commutativo con el operador integral,

$$\delta \left(\int \mathcal{M} dx \right) = \int (\delta \mathcal{M}) dx \quad (5.7)$$

La variación δy puede ser interpretada físicamente como un desplazamiento virtual (ya estudiados en el capítulo anterior) a partir del camino $y(x)$.

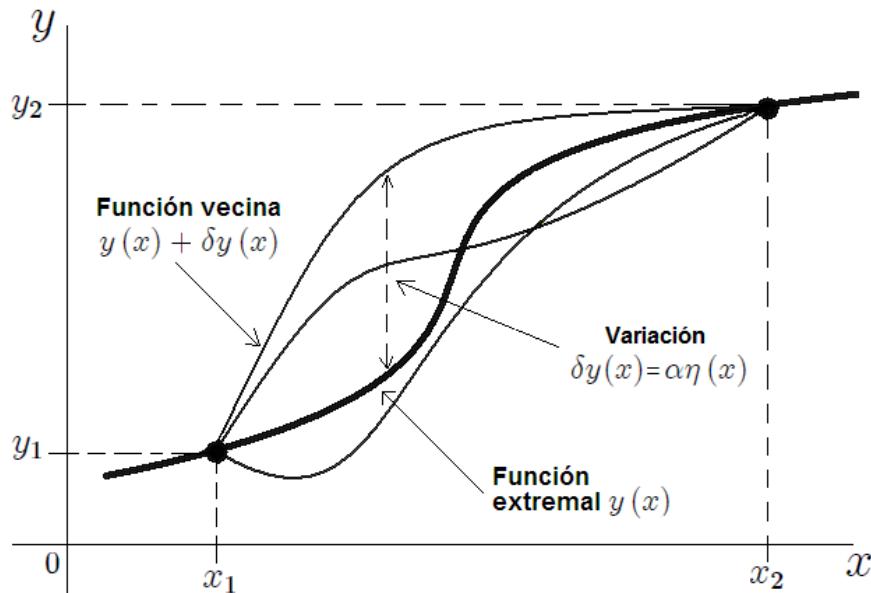


Figura 5.3: La función $y(x)$ es el camino que hace que el funcional J tome un valor extremal. Las funciones $y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x) = y(x) + \delta y(x)$ son las funciones vecinas, donde $\eta(x)$ se anula en las fronteras del intervalo $[x_1, x_2]$.

Los caminos variados \tilde{y} pueden ser, a partir de (5.5), construidos mediante (ver figura 5.3),

$$\underbrace{y(\alpha, x)}_{=\tilde{y}(x)} = \underbrace{y(0, x)}_{=y(x)} + \underbrace{\alpha\eta(x)}_{=\delta y(x)} \quad (5.8)$$

donde $y(\alpha, x) = \tilde{y}$ es el camino variado, $y(0, x) = y$ es el camino real, $\eta(x)$ es una función auxiliar que introduce la variación, α es un parámetro (un escalar) que regula a $\eta(x)$ y $\alpha\eta(x) = \delta y(x)$ es la variación del camino real. La función auxiliar $\eta(x)$ debe anularse en las fronteras del camino $x = x_1$ y $x = x_2$,

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \Rightarrow \delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 \quad (5.9)$$

debido a que el camino variado $y(\alpha, x)$ debe ser idéntico a $y(x)$ en las fronteras del camino. Por simplicidad, se supondrá que $y(x)$ y $\eta(x)$ son continuas y no singulares en el intervalo $[x_1, x_2]$ con primera y segunda derivada continua en el mismo intervalo.

Se denomina *Variación Admisible* de la funcional integral J a cualquier variación que cumpla con la condición (5.9).

5.2.2 Variación de una funcional de n variables dependientes y una variable independiente

La variación δJ de una funcional $J = J[y(x)_i, y'(x)_i; x]$ se define como,

$$\begin{aligned}\delta J &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J[\tilde{y}_i(x), \tilde{y}_i(x)'; x] - J[y_i(x), y_i(x)'; x]}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J\left[\underbrace{y_i(x) + \alpha \eta_i(x)}_{\text{Por (5.8)}}, \underbrace{y'_i(x) + \alpha \eta'_i(x)}_{\text{Por (5.8)}}; x\right] - J[y_i(x), y_i(x)'; x]}{\alpha} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y_i(x) + \alpha \eta_i(x), y'_i(x) + \alpha \eta'_i(x); x] \Big|_{\alpha=0}\end{aligned}$$

es decir,

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y_i(x) + \alpha \eta_i(x), y'_i(x) + \alpha \eta'_i(x); x] \Big|_{\alpha=0} \quad (5.10)$$

A la variación (5.10) se le denomina *Primera Variación* de la funcional J . Es posible calcular una *Segunda Variación* de la funcional J pero no será considerada en el presente capítulo.

Se puede mostrar que:

1. $\delta J = \frac{\partial J}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial J}{\partial y'_i} \delta y'_i$ puesto que $\delta x = 0$.
2. $\delta(aJ_1 + bJ_2) = a\delta J_1 + b\delta J_2$ linealidad.
3. $\delta(J_1 J_2) = \delta J_1 J_2 + J_1 \delta J_2$.

Es posible mostrar otras. En fin, el operador δ tiene propiedades análogas al del operador diferencial d .

EJEMPLO 5.2

Hallar la variación de la funcional,

$$J = \int_a^b (x + y) dx$$

donde a y b son fijos.

SOLUCION: al aplicar la variación a ambos miembros,

$$\delta J = \delta \int_a^b (x + y) dx \quad (5.11)$$

Como a y b son fijos permite introducir el símbolo δ en la integral, por lo que es posible escribir,

$$\delta J = \int_a^b \delta (x + y) dx \quad (5.12)$$

que resulta en,

$$\boxed{\delta J = \int_a^b \delta y dx} \quad (5.13)$$

EJEMPLO 5.3

Hallar la variación de la funcional,

$$J = \int_a^b (y^2 + y'^2) dx$$

donde a y b son fijos.

SOLUCION: al aplicar la variación a ambos miembros,

$$\delta J = \delta \int_a^b (y^2 + y'^2) dx \quad (5.14)$$

Como a y b son fijos permite introducir el símbolo δ en la integral, por lo que es posible escribir,

$$\delta J = \int_a^b \delta (y^2 + y'^2) dx = \int_a^b (2y\delta y + 2y'\delta y') dx \quad (5.15)$$

que resulta en,

$$\boxed{\delta J = 2 \int_a^b (y\delta y + y'\delta y') dx} \quad (5.16)$$

EJEMPLO 5.4

Hallar la variación de la funcional,

$$J = y^2(0) + \int_0^1 (xy - y'^2) dx$$

SOLUCION: al aplicar la variación a ambos miembros,

$$\delta J = \delta \left[y^2(0) + \int_0^1 (xy - y'^2) dx \right] = \delta y^2(0) + \int_0^1 \delta (xy - y'^2) dx \quad (5.17)$$

que resulta en,

$$\boxed{\delta J = 2y(0)\delta y(0) + \int_0^1 (x\delta y - 2y'\delta y') dx} \quad (5.18)$$

EJEMPLO 5.5

Hallar la variación de la funcional,

$$J = \int_0^\pi y' \operatorname{Sen} y dx$$

SOLUCION: al aplicar la variación a ambos miembros,

$$\delta J = \delta \int_0^\pi y' \operatorname{Sen} y dx = \int_0^\pi \delta (y' \operatorname{Sen} y) dx \quad (5.19)$$

que resulta en,

$$\delta J = \int_0^\pi (\operatorname{Sen} y \delta y' + y' \operatorname{Cos} y \delta y) dx \quad (5.20)$$

EJEMPLO 5.6

Hallar la variación de la funcional,

$$J = \int_a^b y^2 dx$$

donde a y b son fijos.

SOLUCION: al aplicar la variación a ambos miembros,

$$\delta J = \delta \int_a^b y^2 dx = \int_a^b \delta y^2 dx = \int_a^b 2y \delta y dx \quad (5.21)$$

que resulta en,

$$\delta J = 2 \int_a^b y \delta y dx \quad (5.22)$$

EJEMPLO 5.7

Hallar la variación de la funcional,

$$J = \int_a^b f [y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

donde f es una función continua de sus argumentos y sus derivadas parciales respecto a todos los argumentos son continuas en un recinto acotado G de variación de los mismos. Los límites de integración a, b son fijos, $y_i(x) = \{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)\}$ y $y'_i(x) = \{y'_1(x), y'_2(x), y'_3(x), \dots, y'_n(x)\} = \frac{dy_i(x)}{dx}$.

SOLUCION: al aplicar la variación a ambos miembros,

$$\begin{aligned}
 \delta J &= \delta \int_a^b f [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \int_a^b \delta f [y_i(x), y'_i(x); x] dx \\
 &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3} \delta y_3, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n} \delta y_n + \frac{\partial f}{\partial y'_1} \delta y'_1 + \frac{\partial f}{\partial y'_2} \delta y'_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial y'_3} \delta y'_3, \dots, \frac{\partial f}{\partial y'_n} \delta y'_n \right) dx \\
 &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

que resulta finalmente en,

$$\boxed{\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx} \tag{5.24}$$

Este es el resultado pedido pero, sin embargo, es posible hacer la integración del segundo término entre paréntesis. En efecto, de (5.24) es posible escribir que,

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i dx + \underbrace{\int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i dx}_I \tag{5.25}$$

Se procederá ahora a integrar I por partes,

$$I = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx \tag{5.26}$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ con } \begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial y'_i} \\ dv = \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx = d(\delta y_i) \Rightarrow v = \delta y_i \end{cases} \tag{5.27}$$

de manera que,

$$I = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \right] \tag{5.28}$$

y si se supone que δy_i es una variación admisible (ver sección 5.2.2), entonces debe anularse en a y b de manera que,

$$\frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_a^b = 0 \tag{5.29}$$

de aquí que (5.28) resulte en,

$$I = \sum_{i=1}^n \left[- \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \right] = - \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \tag{5.30}$$

Finalmente, al sustituir (5.30) en (5.25) resulta,

$$\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i dx - \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx$$

o,

$$\boxed{\delta J = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx} \quad (5.31)$$

5.3 Planteamiento del problema variacional a estudiar

El problema variacional que se abordará en el presente capítulo es el de determinar las funciones $y_i(x) = \{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)\}$ tales que la integral,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } y'_i(x) = \frac{dy_i(x)}{dx}; x_1, x_2 \text{ fijos e } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.32)$$

bajo las condiciones de frontera,

$$\begin{cases} y_i(x_1) = a_i \\ y_i(x_2) = b_i \end{cases}, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n; a_i \text{ y } b_i \text{ constantes}$$

tenga un valor estacionario, es decir, que resulte un valor extremal (un máximo o un mínimo) considerando sólo las limitaciones que imponen las mencionadas condiciones de frontera o cuando, adicionales a ellas, se consideran restricciones que involucran las $y_i(x)$ y sus derivadas $y'_i(x)$.

A las funciones $y_i(x)$ así obtenidas se les dará el nombre de *Funciones Extremales* o *Caminos Extremales* de J .

Existen leyes de la Física que se apoyan en la afirmación de que una determinada funcional alcanza su mínimo o su máximo en una determinada situación. Dichas leyes reciben el nombre de Principios Variacionales de la Física. A dichos principios pertenecen el Principio de la Mínima Acción ya mencionado al final del capítulo anterior, la Ley de Conservación de la Energía, la Ley de Conservación del Impulso, la Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento, el Principio de Fermat en Optica, etc.

El problema variacional que se plantea en este capítulo se diferencia del cálculo de los valores extremales estudiado en los cursos de cálculo diferencial e integral, en el cual se tiene que variar una sola variable o un conjunto de ellas, en que ahora lo que será variado es una función $y(x)$ o un conjunto $y_i(x)$ de ellas. Sin embargo, se puede aplicar el mismo criterio: cuando la integral (5.32) tiene un valor estacionario, debe permanecer sin cambios hasta el primer orden al hacer una pequeña variación en las funciones $y_i(x)$. Este es, justamente, el criterio que será usado más adelante.

Como en el cálculo diferencial, la anulación de la primera derivada es una condición necesaria pero no suficiente para un máximo o un mínimo; así en el cálculo variacional se habla de *Primeras Variaciones* y *Segundas Variaciones* de J , donde las últimas se emplean para discriminar entre máximos, mínimos y puntos de inflexión. Como se dijo antes, en este texto sólo se trabajará con la primera variación y se emplearán razonamientos geométricos o físicos para decidir si se ha encontrado un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

El funcional J depende de la función $y(x)$, y los límites de integración x_1 y x_2 son fijos. Sin embargo, no es necesario que los límites de integración sean considerados fijos de manera que, si se permite que estos límites varíen, el problema se convierte en no sólo determinar $y(x)$ sino también x_1 y x_2 de manera tal que J tome un valor estacionario. La función $y(x)$ tiene entonces que ser variada hasta que se consiga un valor estacionario de J , queriéndose decir con esto que si $y = y(x)$ hace que J tome un valor mínimo entonces cualquier función vecina, no importando lo cerca que esté de $y(x)$, hará que J se incremente.

Para caminos variados $y_i = y_i(\alpha, x)$ la funcional (5.32) se puede escribir como,

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y_i(\alpha, x), y'_i(\alpha, x); x] dx \quad (5.33)$$

convirtiéndose así en un funcional del parámetro α , ya que al efectuar la integración y evaluarla en x_1 y x_2 la dependencia con respecto a x desaparece.

La condición fundamental para que 5.33 tome un valor estacionario es que su primera variación se anule,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow \delta J = 0 \quad (5.34)$$

EJEMPLO 5.8

(a) Dada la función $y(x) = 3x$, construir funciones $y(\alpha, x)$ vecinas a ella mediante (5.8) con $\eta(x) = \operatorname{Sen} x - \operatorname{Cos} x + 1$ y graficarlas para algunos valores de α entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 2\pi$, (b) mostrar que $\eta(x)$ cumple con la condición (5.9), (c) suponiendo que la función $f = f(y, y'; x)$ viene dada por $f = \left[\frac{dy(\alpha, x)}{dx} \right]^2$, encontrar $J(\alpha)$ dada por (5.33) en el intervalo antes considerado y (d) mostrar $J(\alpha)$ cumple la condición (5.34).

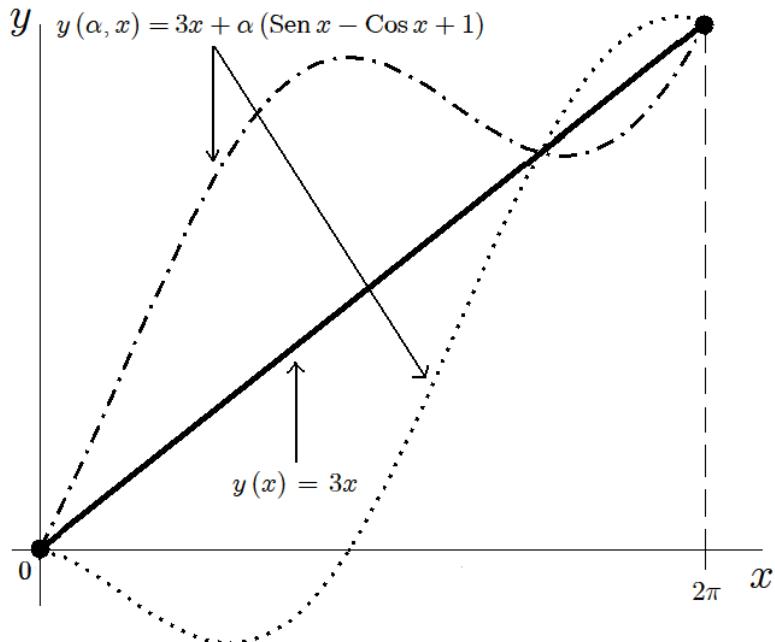


Figura 5.4: Función $y(x) = 3x$ entre los límites de $x = 0$ y $x = 2\pi$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = 3x + \alpha [\operatorname{Sen}(x) - \operatorname{Cos}(x) + 1]$.

SOLUCION:

(a) Los caminos vecinos al camino estacionario vendrán dados por,

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

O,

$$y(\alpha, x) = 3x + \alpha (\operatorname{Sen} x - \operatorname{Cos} x + 1) \quad (5.35)$$

Estos caminos son mostrados en la figura 5.4 para $\alpha = 0$ y otros dos valores de α .

(b) Es claro que la función $\eta(x) = \operatorname{Sen} x - \operatorname{Cos} x + 1$ cumple con que se anule en las fronteras $x_1 = 0$ y $x_2 = 2\pi$,

$$\begin{cases} \eta(x=0) = \operatorname{Sen}(0) - \operatorname{Cos}(0) + 1 \\ \eta(x=2\pi) = \operatorname{Sen}(2\pi) - \operatorname{Cos}(2\pi) + 1 \end{cases}$$

O,

$$\begin{cases} \eta(x=0) = 0 \\ \eta(x=2\pi) = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

cumpliéndose así la condición (5.9).

(c) Para encontrar $f(y, y'; x)$ se determina primero,

$$\frac{dy(\alpha, x)}{dx} = \frac{d}{dx} [3x + \alpha (\operatorname{Sen} x - \operatorname{Cos} x + 1)] = 3 + \alpha (\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sen} x) \quad (5.37)$$

entonces,

$$f = \left[\frac{dy(\alpha, x)}{dx} \right]^2 = 9 + 6\alpha (\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sen} x) + \alpha^2 [\operatorname{Sen}(2x) + 1] \quad (5.38)$$

Ahora, a partir de (5.33) finalmente se obtiene,

$$J(\alpha) = \int_0^{2\pi} \{9 + 6\alpha (\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sen} x) + \alpha^2 [\operatorname{Sen}(2x) + 1]\} dx$$

O,

$$J(\alpha) = 2\pi (9 + \alpha^2) \quad (5.39)$$

pudiéndose notar que $J(\alpha)$ es siempre mayor que $J(0)$, no importando el valor (positivo o negativo) escogido para α .

(d) A partir de (5.39) se tiene que,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial J}{\partial \alpha} [2\pi (9 + \alpha^2)] = 4\pi\alpha \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 4\pi(0)$$

O,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (5.40)$$

cumpliéndose así la condición (5.34).

EJEMPLO 5.9

(a) Dada la parábola $y(x) = x^2$, construir funciones $y(\alpha, x)$ vecinas a ella mediante (5.8) con $\eta(x) = x^3 - x$ y graficarlas para algunos valores de α entre $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, (b) mostrar que $\eta(x)$ cumple con la condición (5.9), (c) suponiendo que la función $f = f(y, y'; x)$ viene dada por $f = \left[\frac{dy(\alpha, x)}{dx} \right]^2 + x$, encontrar $J(\alpha)$ dada por (Equation 5.33) en el intervalo antes considerado y (d) mostrar $J(\alpha)$ cumple la condición (5.34).

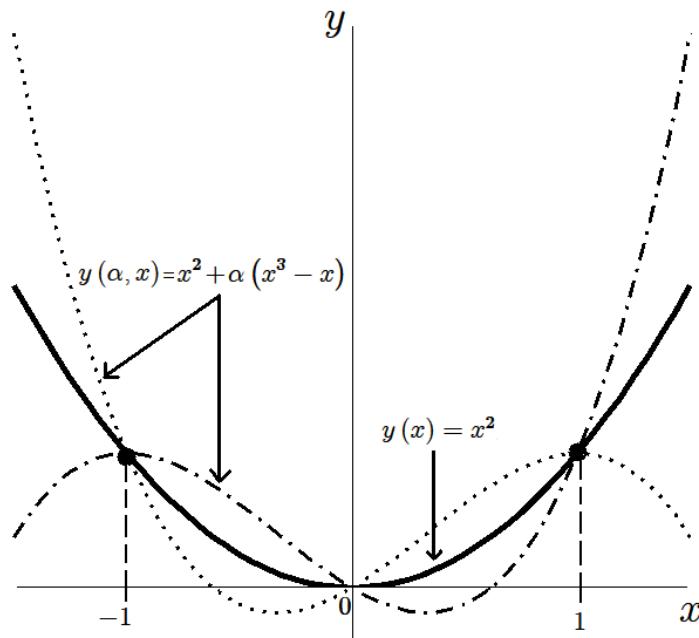


Figura 5.5: Función $y(x) = x^2$ entre los límites de $x = -1$ y $x = 1$ y dos de sus variaciones $y(\alpha, x) = x^2 + \alpha(x^3 - x)$.

SOLUCION:

(a) Los caminos vecinos al camino estacionario vendrán dados por,

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\eta(x)$$

O,

$$y(\alpha, x) = x^2 + \alpha(x^3 - x) \quad (5.41)$$

Estos caminos son mostrados en la figura 5.5 para $\alpha = 0$ y otros dos valores de α .

(b) Es claro que la función $\eta(x) = x^3 - x$ cumple con que se anule en las fronteras $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$,

$$\begin{cases} \eta(x = -1) = (-1)^3 - (-1) \\ \eta(x = 1) = (1)^3 - (1) \end{cases}$$

O,

$$\begin{cases} \eta(x = -1) = 0 \\ \eta(x = 1) = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

cumpliéndose así la condición (5.9).

(c) Para encontrar $f(y, y'; x)$ se determina primero,

$$\frac{dy(\alpha, x)}{dx} = \frac{d}{dx} [x^2 + \alpha(x^3 - x)] = 2x + \alpha(3x^2 - 1) \quad (5.43)$$

entonces,

$$f = \left[\frac{dy(\alpha, x)}{dx} \right]^2 + x = [2x + \alpha(3x^2 - 1)]^2 + x \quad (5.44)$$

Ahora, a partir de (5.33) finalmente se obtiene,

$$J(\alpha) = \int_{-1}^1 \left\{ [2x + \alpha(3x^2 - 1)]^2 + x \right\} dx$$

o,

$$J(\alpha) = 8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\alpha^2 \right) \quad (5.45)$$

pudiéndose notar que $J(\alpha)$ es siempre mayor que $J(0)$, no importando el valor (positivo o negativo) escogido para α .

(d) A partir de (5.45) se tiene que,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial J}{\partial \alpha} \left[8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\alpha^2 \right) \right] = \frac{16}{5}\alpha \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{16}{5}(0)$$

o,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (5.46)$$

cumpliéndose así la condición (5.34).

.....

Por último, es de hacer notar que **si J es independiente del camino, entonces el problema variacional pierde todo sentido**. Se sabe, de los cursos básicos de cálculo diferencial e integral, que la integral (5.33) será independiente del camino escogido si la cantidad fdx es una diferencial exacta.

En el caso de que,

$$fdx = M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (5.47)$$

será exacta si se cumple que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{array} \right. \quad (5.48)$$

5.4 Cálculo de extremales sin restricciones

5.4.1 Para una variable dependiente — Ecuación de Euler

En esta sección se determinará la única función $y(x)$ tal que la integral funcional J (5.32) tome un valor estacionario sin restricciones adicionales a las ya impuestas por las condiciones de frontera $x = x_1$ (fijo) y $x = x_2$ (fijo). Para realizar lo anterior, se debe calcular la variación de (5.32) para luego aplicar la condición (5.34). En efecto,

$$\delta J(\alpha) = \delta \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x] dx \quad (5.49)$$

Puesto que los límites de integración son fijos, el símbolo δ sólo afecta al integrando (es posible introducir δ en la integral) resultando así,

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] dx \\ &= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right]}_{\text{Puesto que } \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx \end{aligned} \quad (5.50)$$

El segundo término de (5.50) puede ser integrado por partes,

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ con } \begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial y'} \Rightarrow du = d \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \\ dv = \frac{d}{dx} (\delta y) dx \Rightarrow v = \delta y \end{cases} \quad (5.51)$$

de manera que,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (5.52)$$

pero,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (5.53)$$

ya que δy debe anularse en x_1 y x_2 por ser una variación admisible. Entonces (5.52) resulta en,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (5.54)$$

así la expresión (5.50) queda finalmente escrita como,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx \quad (5.55)$$

Ahora, al aplicar la condición (5.34) para encontrar así los valores estacionarios de J resulta,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (5.56)$$

que es independiente de α ya que la anterior expresión está evaluada en $\alpha = 0$ en virtud de haber aplicado la condición (5.34). Aquí la variación δy es completamente arbitraria.

Por otro lado, en el cálculo variacional existe el llamado *Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones** que establece lo siguiente:

Si se cumple la expresión,

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \mu(x) = 0 \quad (5.57)$$

para todas las funciones arbitrarias $\mu(x)$ continuas hasta la segunda derivada (al menos), entonces $M(x)$ debe anularse idénticamente en el intervalo (x_1, x_2) .

Ahora bien, al aplicar el anterior lema a la expresión (5.56) resulta,

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)}_{} = 0 \quad (5.58)$$

Ecuación de Euler para funcionales
de una variable dependiente.

Este resultado es conocido como la *Ecuación de Euler*[†], que constituye la condición necesaria para que J tenga un valor estacionario.

EJEMPLO 5.10

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$$

*Proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema. Véase apéndice F para demostración.

[†]Véase apéndice A.8 para una biografía resumida.

y su correspondiente valor extremal.

SOLUCION: aquí,

$$f = y^2 + y'^2 + 2ye^x \quad (5.59)$$

Ahora bien, al sustituir (5.59) en la ecuación de Euler (5.58) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) \right] &= 0 \\ y + e^x - y'' &= 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

La expresión (5.60) es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes, cuya solución es,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x \quad (5.61)$$

Observaciones:

1. Los caminos (5.61) representan una familia de caminos extremales debido a la presencia de las constantes c_1 y c_2 . Para condiciones de frontera dadas podrán determinarse las constantes c_1 y c_2 resultado así un único camino extremal.
2. La expresión (5.61) no es el valor extremal de J , son los caminos extremales que hacen que J tome un valor extremal (un máximo o un mínimo).
3. El valor extremal de J es la cantidad que se obtiene al sustituir (5.61) en la misma y luego evaluar la integral.

Por último, al sustituir (5.61) en J , el valor extremal de esta última vendrá dado por,

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left(c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x \right)^2 + \left[\frac{d}{dx} \left(c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x \right) e^x \right\} dx \end{aligned}$$

O,

$$J = C_1 e^{2x_1} + C_2 e^{2x_2} + c_2^2 (e^{-2x_1} - e^{-2x_2}) + c_2 (x_2 - x_1) \quad (5.62)$$

con,

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{1}{4} x_1^2 - c_1 x_1 - c_1^2 - \frac{1}{2} x_1 - c_1 + \frac{1}{8} \\ C_2 &= \frac{1}{4} x_2^2 + c_1 x_2 + c_1^2 + \frac{1}{2} x_2 + c_1 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

que es el valor extremal (un máximo o un mínimo) de J .

EJEMPLO 5.11

(a) Hallar la extremal de la funcional,

$$J = \int_1^2 \frac{y'^2}{4x} dx$$

que satisfaga las condiciones de frontera $y(1) = 5$ y $y(2) = 11$, (b) la extremal encontrada ¿maximiza o minimiza a J ? y (c) hallar su valor extremal.

SOLUCION:

(a) Aquí,

$$f = \frac{y'^2}{4x} \quad (5.63)$$

Ahora bien, al sustituir (5.63) en la ecuación de Euler (5.58) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y'^2}{4x} \right) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{y'^2}{4x} \right) \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

que al integrarse produce,

$$y' = c_1 x \quad (5.65)$$

y al integrar esta última resulta,

$$y = \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 \quad (5.66)$$

Si ahora se aplican las condiciones de frontera sobre (5.66) entonces,

$$\text{Para } \begin{cases} y(1) = 5: \frac{c_1}{2} + c_2 = 5 \\ y(2) = 11: 2c_1 + c_2 = 11 \end{cases} \quad (5.67)$$

de las cuales se obtiene $c_1 = 4$ y $c_2 = 3$. Por lo tanto, al sustituir estos resultados en (5.66) se obtiene finalmente,

$$y = 2x^2 + 3 \quad (5.68)$$

que es una parábola. Este representa el camino extremal de J , es decir, el camino que hace que J tome un valor extremo (un máximo o un mínimo).

(b) ¿La parábola (5.68) maximiza o minimiza a J ? La extremal hallada puede maximizar, minimizar o no hacer ninguna de las dos cosas. Con la teoría mostrada en este texto no es posible, en general, decidir qué es lo que ocurre. Sin embargo existen unos pocos casos simples (este ejemplo es uno de ellos) donde se puede decidir muy fácilmente.

Si ψ es cualquier variación admisible (ver sección 5.2.1) no necesariamente pequeña, entonces la variación que sobre J hace ψ viene dada por ($y_e = y$ extremal = $2x^2 + 3$),

$$\begin{aligned} J(y_e + \psi) - J(y_e) &= \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (y_e + \psi) \right]^2 dx - \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{x} \left[\frac{d}{dx} (y_e) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{(4x + \psi')^2}{x} dx - 4 \int_1^2 x dx \\ &= 2\psi \Big|_1^2 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{\psi'^2}{x} dx \end{aligned}$$

y como ψ es una variación admisible debe satisfacer $\psi(1) = 0$ y $\psi(2) = 0$, por lo tanto se tiene que,

$$J(y_e + \psi) - J(y_e) = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{\psi'^2}{x} dx \geq 0 \quad (5.69)$$

Entonces, ya que la integral de una función positiva debe ser positiva (x es positiva en el intervalo de integración), (5.68) proporciona realmente un mínimo global de J .

(c) El mínimo global de J viene dado al sustituir (5.68) en J y evaluar la integral resultante. En efecto,

$$J(2x^2 + 3) = \int_1^2 \frac{1}{4x} \left[\frac{d}{dx} (2x^2 + 3) \right]^2 dx$$

O,

$$J = 6 \quad (5.70)$$

Es de hacer notar que, en el caso de que J provenga de una f obtenida del análisis de una situación física en particular, las condiciones físicas del sistema estudiado pueden ayudar a saber si el extremal encontrado para J es un máximo o un mínimo.

EJEMPLO 5.12

(a) ¿En qué curva puede alcanzar su extremo la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$? (b) hallar el correspondiente valor extremal de J .

SOLUCION:

(a) Aquí,

$$f = y'^2 + 12xy \quad (5.71)$$

Ahora bien, al sustituir (5.71) en la ecuación de Euler (5.58) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 + 12xy) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 + 12xy) \right] &= 0 \\ 6x - y'' &= 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

La ecuación diferencial (5.72) tiene como solución,

$$y = x^3 + c_1 x + c_2 \quad (5.73)$$

Para hallar las constantes c_1 y c_2 se aplican sobre (5.73) las condiciones de frontera dadas. En efecto,

$$\text{Para } \begin{cases} y(0) = 0: & c_2 = 0 \\ y(1) = 1: & 1 + c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \quad (5.74)$$

Por último, al sustituir (5.74) en (5.73) resulta,

$$y = x^3 \quad (5.75)$$

(b) El valor extremal de J viene dado al sustituir (5.75) en ella. En efecto,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{d}{dx} (x^3) \right]^2 + 12x (x^3) \right\} dx$$

O,

$$J = \frac{21}{5} \quad (5.76)$$

EJEMPLO 5.13

Superficie mínima de revolución. Considerar la superficie generada al hacer girar una línea que une dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en torno a un eje coplanar con los dos puntos. Determinar la ecuación de la línea que une dichos puntos de manera tal que el área de la superficie generada (el área de la superficie de revolución) sea mínima.

SOLUCIÓN: supóngase que la curva que pasa a través de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es trasladada en torno al eje y , coplanar con los dos puntos. Para calcular el área total de la superficie de revolución, primero se encuentra el área dA de una cinta (ver figura 5.6), de manera que,

$$dA = x ds d\varphi = x (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (5.77)$$

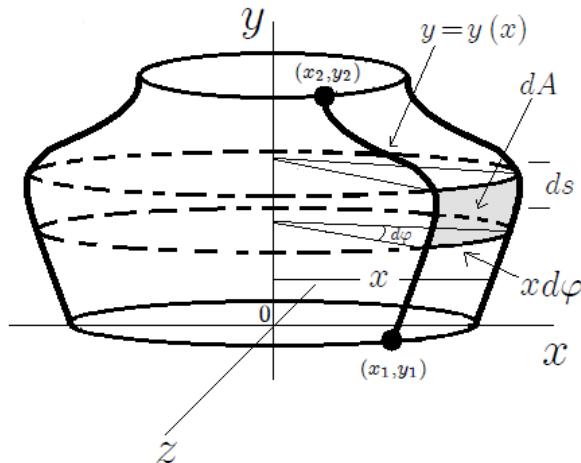


Figura 5.6: Superficie de revolución generada por una curva que une a los puntos (x_1, y_1) . y (x_2, y_2) , haciéndola trasladarse entorno al eje y .

donde se ha supuesto que la curva generatriz está en el plano (x, y) . Pudo haberse partido con la curva generatriz en el plano (y, z) sin problema alguno, siendo para este caso $dA = zd\varphi ds$. Al integrar (5.77),

$$A = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \int_0^{2\pi} x (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.78)$$

donde se ha escogido x como variable independiente. Si se hubiese escogido y como variable independiente se tendría $A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x (x'^2 + 1)^{\frac{1}{2}} dy$ con $x' = \frac{dx}{dy}$.

El área (5.78) es la cantidad que se quiere minimizar, por lo tanto,

$$f = 2\pi x (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.79)$$

y como,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2\pi \frac{xy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.80)$$

entonces, de (5.58) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[2\pi \frac{xy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] &= 0 \\ \frac{xy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} &= c_1, \quad c_1 = \text{constante} \end{aligned} \quad (5.81)$$

de aquí que,

$$y' = \pm \frac{c_1}{(x^2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y = c_1 \int \frac{dx}{(x^2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.82)$$

donde se ha tomado el signo positivo para y en concordancia con el sistema de coordenadas de referencia que se está usando. La solución de (5.82) viene dada por,

$$y = c_1 \ln \left(x + \sqrt{x^2 - c_1^2} \right) + c_2 \quad (5.83)$$

donde c_2 es una segunda constante de integración. Las constantes c_1 y c_2 pueden ser determinadas requiriendo que la curva pase por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , que representan las condiciones de frontera.

La expresión (5.83) puede ser reescrita para así identificar con mayor facilidad la curva que representa. Como,

$$\cosh^{-1} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

entonces (5.83) puede ser escrita también como,

$$x = c_1 \operatorname{Cosh} \left(\frac{y - c_2}{c_1} \right) \quad (5.84)$$

que es la ecuación de la Catenaria.

5.4.2 Segunda forma y forma integrada de la Ecuación de Euler

Es posible reescribir la ecuación de Euler (5.58), obteniéndose así una segunda forma de la misma que es muy conveniente para funcionales f que no dependen explícitamente de la variable independiente x , es decir, donde $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Nótese primero que para cualquier funcional $f(y, y'; x)$ se tiene,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x} \quad (5.85)$$

y que,

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \quad (5.86)$$

ahora, al despejar $y'' \frac{\partial f}{\partial y'}$ de (5.85) y sustituirlo en (5.86) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]}_{=0 \text{ por (5.58)}} \\ \end{aligned} \quad (5.87)$$

donde el último término se anula debido a la ecuación de Euler (5.58). Por lo tanto,

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right)}_{\text{Segunda forma de la Ecuación de Euler para}} = 0 \quad (5.88)$$

funcionales de una variable dependiente.

que a menudo se le llama *Segunda Forma de la Ecuación de Euler*.

Es posible usar (5.88) en casos en los cuales f no depende explícitamente de la variable independiente x , de manera que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Entonces,

$$\underbrace{f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}}_{\text{Forma integrada de la Ecuación de Euler para}} = c, \quad c = \text{constante} \quad (\text{para } \frac{\partial f}{\partial x} = 0) \quad (5.89)$$

funcionales de una variable dependiente

que es la llamada *Forma Integrada de la Ecuación de Euler*.

EJEMPLO 5.14

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} dx$$

SOLUCION: aquí,

$$f = \frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} \quad (5.90)$$

que no depende explícitamente de x , por lo tanto, es posible usar la forma integrada de la ecuación de Euler. En efecto, al sustituir (5.90) en (5.89) resulta,

$$\frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y} \right) = c$$

$$\frac{1}{y \sqrt{y'^2 + 1}} = c$$

o,

$$y' = \pm \frac{1}{cy} \sqrt{1 - c^2 y^2} \quad (5.91)$$

que constituyen un par de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y de variables separables. Al integrar (5.91) resulta,

$$(x - c_1)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} \quad (5.92)$$

donde c_1 es una constante de integración. Por lo tanto, las curvas extremales de la funcional dada son una familia de circunferencias centradas en $(c_1, 0)$ y de radio $\frac{1}{c}$.

EJEMPLO 5.15

El problema de la Braquistócrona[‡]. Supóngase que se tiene una rampa lisa como la mostrada en la figura 5.7 sobre la cual, y desde el punto P_1 , se suelta una partícula de masa m que comienza a moverse bajo la acción de la gravedad. El

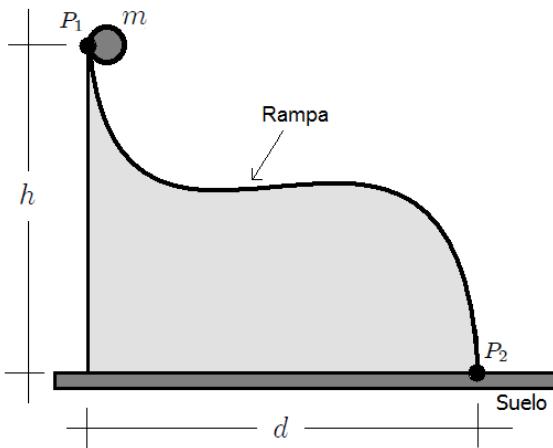


Figura 5.7: Partícula de masa m que se desplaza sobre una rampa lisa desde el punto P_1 hasta el punto P_2 .

punto P_1 se encuentra a una altura h sobre el suelo, mientras que P_2 se encuentra a nivel del mismo a una distancia horizontal d . Encontrar la forma que debe tener el perfil de esta rampa de manera tal que la mencionada partícula emplee el menor tiempo posible en viajar desde P_1 hasta P_2 .

SOLUCION: como se muestra en la figura (5.8), el perfil pedido será la curva $y = y(x)$ que une P_1 con P_2 de manera tal que el tiempo que emplea la partícula en viajar desde P_1 hasta P_2 sea el menor posible. Si se escoge un sistema de coordenadas de referencia cuyo origen coincide con el punto P_1 , entonces $P_1 = (x_1, y_1) = (0, 0)$ y $P_2 = (x_2, y_2) = (d, -h)$.

[‡]Del griego Braquistos = “el más breve” y Cronos= tiempo.

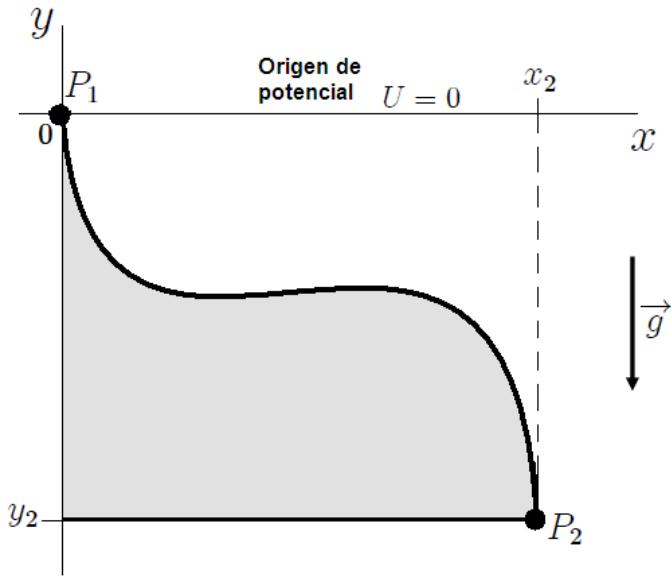


Figura 5.8: Planteamiento gráfico del problema de la Braquistócrona.

Puesto que el campo gravitacional es conservativo, entonces la energía mecánica total E de la partícula se mantiene constante durante todo el recorrido. En el punto P_1 se tiene $E = T + U = 0$ y en cualquier otro punto $P = (x, y)$,

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = 0 \quad (5.93)$$

de la cual resulta,

$$v = (-2gy)^{\frac{1}{2}} \quad (5.94)$$

Por otro lado se sabe que,

$$\begin{cases} v = \frac{ds}{dt} \\ ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5.95)$$

entonces,

$$t = \int_{(x_1, y_1) = (0, 0)}^{(x_2, y_2) = (d, -h)} \frac{ds}{v} = \int_{(0, 0)}^{(d, -h)} \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{(-2gy)^{\frac{1}{2}}} = \int_{x_1=0}^{x_2=d} \left(-\frac{1+y'^2}{2gy} \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.96)$$

El tiempo transcurrido durante todo el movimiento es la cantidad que se quiere minimizar, por lo tanto, de (5.96) la función f puede ser identificada como,

$$f = \left(-\frac{1+y'^2}{2gy} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.97)$$

que no depende explícitamente de la variable independiente x . Entonces, a partir de la forma integrada de la ecuación de Euler (5.89) resulta,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{\frac{1}{2}} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \left[\left(-\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{\frac{1}{2}} \right] &= c \\ (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} &= (-2gy)^{\frac{1}{2}} c \\ \pm \left(-\frac{1}{2gc^2y} - 1\right)^{\frac{1}{2}} &= y' \end{aligned}$$

o,

$$x = \pm \int \left(\frac{y}{-\frac{1}{2gc^2} - y} \right)^{\frac{1}{2}} dy \quad (5.98)$$

Ahora, al hacer el cambio de variable[§],

$$y = -\frac{1}{2gc^2} \operatorname{Sen}^2 \frac{\sigma}{2} \quad (5.99)$$

la expresión (5.98) se puede escribir como,

$$x = \mp \frac{1}{2gc^2} \int \operatorname{Sen}^2 \frac{\sigma}{2} d\sigma = \frac{1}{4gc^2} (\sigma - \operatorname{Sen} \sigma) + C \quad (5.100)$$

donde se ha escogido el signo positivo para x en correspondencia al sistema de coordenadas de referencia usado.

Como al inicio del movimiento $(x, y) = (0, 0)$, entonces de (5.99) se obtiene $\sigma = 0$ y de (5.100) $C = 0$. De esta manera, en conjunto, las expresiones (5.99) y (5.100) pueden escribirse como,

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{4gc^2} (\sigma - \operatorname{Sen} \sigma) \\ y = -\frac{1}{4gc^2} (1 - \operatorname{Cos} \sigma) \end{cases}} \quad (5.101)$$

que representan las ecuaciones paramétricas de una cicloide que pasa por el origen (ver figura 5.9), siendo éste el perfil que debe tener la rampa para que la partícula se mueva de P_1 hasta P_2 en el menor tiempo posible. La constante c debe ser ajustada para permitir que la cicloide pase a través del punto de llegada P_2 . En efecto, al evaluar las expresiones (5.101) en P_2 se obtiene,

$$\text{Para } x = d \Rightarrow \sigma - \operatorname{Sen} \sigma = 4gc^2d \quad (5.102)$$

$$\text{Para } y = -h \Rightarrow \sigma = \operatorname{Cos}^{-1} (1 - 4gc^2h) \quad (5.103)$$

[§]El signo negativo es por el sistema de coordenadas de referencia usado.

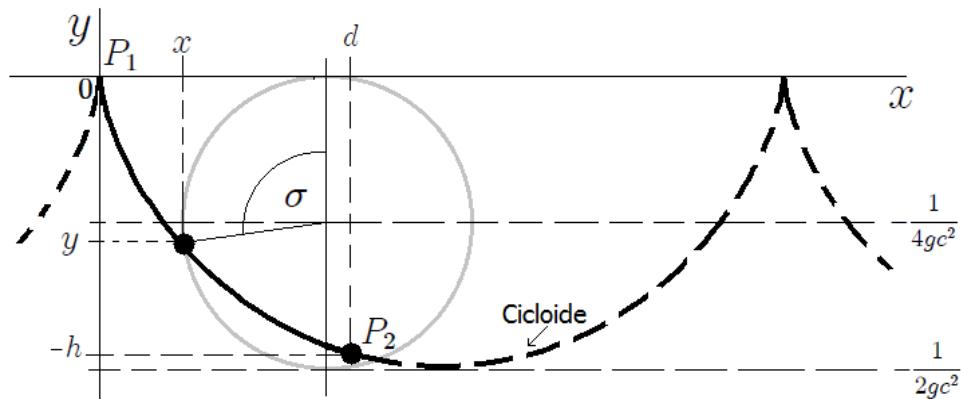


Figura 5.9: Camino resultante para que la partícula se mueva desde $(x_1, y_1) = (0, 0)$ hasta $(x_2, y_2) = (d, -h)$ en el menor tiempo posible.

entonces, en (5.101) al sustituir una expresión en la otra resulta,

$$\cos^{-1}(1 - 4gc^2h) = 2c \left[\sqrt{2gh(1 - 2gc^2h)} + 2gc \right] \quad (5.104)$$

expresión que proporciona el ajuste de la constante c .

La curva obtenida, la Cicloide, recibe el nombre de *Curva Braquistócrona* o curva del descenso más rápido. Esta curva coincide además con una *Curva Tautócrona* o *Curva Isócrona* ya que si se colocan varias partículas sobre ella en distintos puntos de partida y se les suelta al mismo tiempo, llegan a encontrarse al mismo tiempo en un punto posterior, es decir, tardan el mismo tiempo en alcanzar una posición común.

EJEMPLO 5.16

Se tiene una película de jabón entre dos anillos paralelos concéntricos de radio a , separados por una distancia $2d$ (ver figura 5.10). Encuentre la forma adquirida por la película de jabón.

SOLUCION: la forma que adquirirá la película de jabón será aquella que minimice la energía del sistema (todo sistema al tender a la estabilidad, tiende a su estado de mínima energía), por lo tanto este estado debe corresponder a aquél donde la superficie de la película de jabón sea la mínima.

Es fácil ver de la figura 5.10 que las condiciones de frontera vienen dadas por $y(d) = a$ y $y(-d) = a$. El elemento de superficie de la película de jabón vendrá dado por,

$$dS = 2\pi y ds \quad (5.105)$$

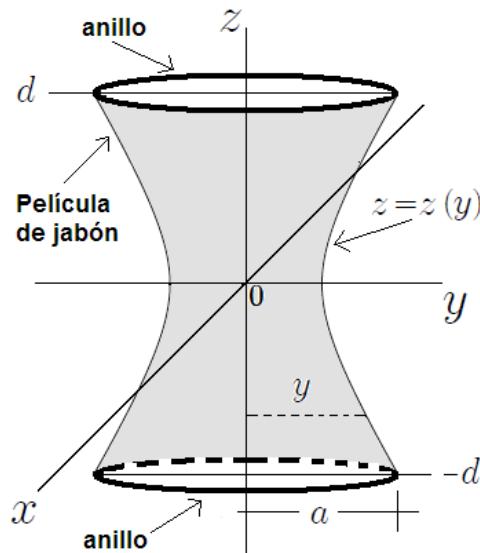


Figura 5.10: Película de jabón entre dos anillos concéntricos de radio a y separados por una distancia $2d$.

y,

$$ds^2 = dy^2 + dz^2 \Rightarrow ds = \sqrt{y'^2 + 1} dz \quad (5.106)$$

con $y' = \frac{dy}{dz}$. Aquí y es la variable dependiente y z la independiente. Por lo tanto,

$$S = 2\pi \int_{-d}^d y \sqrt{y'^2 + 1} dz \quad (5.107)$$

que es la cantidad que se quiere minimizar. En (5.107) es posible identificar,

$$f = 2\pi y \sqrt{y'^2 + 1} \quad (5.108)$$

Ahora bien, como f no depende de la variable independiente z , entonces es posible usar la forma integrada (5.89) de la ecuación de Euler. Entonces,

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c, \text{ con } y' = \frac{dy}{dz}$$

$$2\pi y \sqrt{y'^2 + 1} - 2\pi y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(y \sqrt{y'^2 + 1} \right) = c$$

o,

$$y'^2 = \frac{y^2}{c_1^2} - 1 \quad (5.109)$$

con $c_1 = \frac{c}{2\pi}$. Al introducir el cambio de variable,

$$y = c_1 \operatorname{Cosh} u \quad (5.110)$$

en (5.109) e integrando resulta,

$$y = c_1 \operatorname{Cosh} \left(\frac{z}{c_1} + c_2 \right) \quad (5.111)$$

con c_2 una constante de integración. Esta es la curva que genera la superficie de revolución buscada.

Las constantes c_1 y c_2 se calculan aplicando las condiciones de frontera $y(d) = a$ y $y(-d) = a$ sobre (5.111). En efecto,

$$\text{Para } \begin{cases} y(d) = a: & a = c_1 \operatorname{Cosh} \left(\frac{d}{c_1} + c_2 \right) \\ y(-d) = a: & a = c_1 \operatorname{Cosh} \left(-\frac{d}{c_1} + c_2 \right) \end{cases} \quad (5.112)$$

de las cuales se deduce que $c_2 = 0$ ya que $d \neq 0$. La constante c_1 vendrá dada por,

$$a = c_1 \operatorname{Cosh} \left(\frac{d}{c_1} \right) \quad (5.113)$$

que es una ecuación trascendental para dicha constante.

Por último (5.111) se puede escribir como,

$$y = c_1 \operatorname{Cosh} \left(\frac{z}{c_1} \right) \quad (5.114)$$

con c_1 dada por (5.113). La expresión (5.114) es la ecuación de una catenaria, por lo tanto, en perfil la película de jabón toma esta forma, con una distancia mínima al eje de rotación dada por c_1 (verificarlo).

5.4.3 Para múltiples variables dependientes — Ecuaciones de Euler - Lagrange

En esta sección se determinarán las funciones $y_i(x)$ tales que la integral funcional J (5.32) tome un valor estacionario sin restricciones adicionales a las ya impuestas por las condiciones de frontera $x = x_1(\text{fijo})$ y $x = x_2(\text{fijo})$. Para realizar lo anterior, se debe calcular la variación de (5.32) para luego aplicar la condición (5.34). En efecto,

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y'_i(x); x] dx \quad (5.115)$$

Al igual que en la sección anterior, puesto que los límites de integración son fijos, el símbolo δ sólo afecta al integrando resultando así,

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y'_i \right) dx}_{\text{Ver ejemplo 5.7}} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta \left(\frac{dy_i}{dx} \right) \right] dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) \right] dx = \sum_{i=1}^n \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx \right] \end{aligned}\quad (5.116)$$

El segundo término de (5.116) puede ser integrado por partes,

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ con } \begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial y'_i} \Rightarrow du = d \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) dx \\ dv = \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx \Rightarrow v = \delta y_i \end{cases} \quad (5.117)$$

de manera que,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx = \frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \quad (5.118)$$

pero,

$$\frac{\partial f}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (5.119)$$

ya que δy_i debe anularse en x_1 y x_2 por ser una variación admisible. Entonces (5.118) resulta en,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \quad (5.120)$$

así la expresión (5.116) queda finalmente escrita como,

$$\begin{aligned}\delta J &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx \right\} \end{aligned}\quad (5.121)$$

Ahora, al aplicar la condición (5.34) para encontrar así el valor estacionario de J resulta,

$$\delta J = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx \right\} = 0 \quad (5.122)$$

que es independiente de α ya que la anterior expresión está evaluada en $\alpha = 0$ en virtud de haber aplicado la condición (5.34). Aquí la variación δy_i es completamente

arbitraria, entonces al aplicar el lema fundamental del cálculo de variaciones (5.57) resulta,

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n}_{\begin{array}{c} \text{Ecuaciones de Euler-Lagrange para funcionales} \\ \text{de múltiples variables dependientes.} \end{array}} \quad (5.123)$$

que son las ecuaciones de Euler para un funcional J de múltiples variables dependientes y conforman un conjunto de n ecuaciones diferenciales. Se les conoce también como *Ecuaciones de Euler-Lagrange*.

EJEMPLO 5.17

(a) Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $z(0) = 0$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, y (b) hallar su correspondiente valor extremal.

SOLUCION:

(a) Aquí,

$$f = y'^2 + z'^2 + 2yz \quad (5.124)$$

Ahora bien, f tiene dos variables dependientes y y z , por lo tanto, se debe escribir una ecuación de Euler para cada una de estas variables. Al sustituir (5.124) en las ecuaciones de Euler (5.123) (para $i = 1, 2$ con $y_1 = y$ y $y_2 = z$) resulta,

$$\text{Para } i = 1: \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 + z'^2 + 2yz) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 + z'^2 + 2yz) \right] &= 0 \\ z - y'' &= 0 \end{aligned} \quad (5.125)$$

y,

$$\text{Para } i = 2: \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (y'^2 + z'^2 + 2yz) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} (y'^2 + z'^2 + 2yz) \right] &= 0 \\ y - z'' &= 0 \end{aligned} \quad (5.126)$$

Si entre (5.125) y (5.126) se elimina z resulta,

$$y^{IV} - y = 0 \quad (5.127)$$

que al integrarla produce,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \operatorname{Cos} x + c_4 \operatorname{Sen} x \quad (5.128)$$

Para encontrar z , se sustituye (5.128) en (5.125) resultando,

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \operatorname{Cos} x - c_4 \operatorname{Sen} x \quad (5.129)$$

Por último, al aplicar las condiciones de frontera sobre (5.128) en (5.129) resulta,

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 1 \end{cases} \quad (5.130)$$

por lo tanto, sustituyendo estos resultados en (5.128) y (5.129),

$$\boxed{\begin{cases} y = \operatorname{Sen} x \\ z = -\operatorname{Sen} x \end{cases}} \quad (5.131)$$

(b) El valor extremal de J vendrá dado al sustituir (5.131) en la expresión de la misma. En efecto,

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\frac{d}{dx} (\operatorname{Sen} x) \right]^2 + \left[\frac{d}{dx} (-\operatorname{Sen} x) \right]^2 + 2(\operatorname{Sen} x)(-\operatorname{Sen} x) \right\} dx$$

O,

$$\boxed{J = 0} \quad (5.132)$$

EJEMPLO 5.18

Analizar el extremo de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} [4x + 2y - z + (2x - 2y + z)y' + (-x + y + 2z)z'] dx$$

sabiendo que $y(x_1) = y_o$, $y(x_2) = y_1$ y $z(x_1) = z_o$, $z(x_2) = z_1$.

SOLUCION: la integral no depende del camino de integración ya que $f dx$ es una diferencial exacta, por lo tanto, problema variacional no tiene sentido. En efecto,

$$\begin{aligned} f dx &= [4x + 2y - z + (2x - 2y + z)y' + (-x + y + 2z)z'] dx \\ &= (4x + 2y - z) dx + (2x - 2y + z) dy + (-x + y + 2z) dz \end{aligned} \quad (5.133)$$

siendo,

$$\left\{ \begin{array}{l} M(x, y, z) = 4x + 2y - z \\ N(x, y, z) = 2x - 2y + z \\ R(x, y, z) = -x + y + 2z \end{array} \right. \quad (5.134)$$

por lo tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \\ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 1 \end{array} \right. \quad (5.135)$$

cumpliéndose así las condiciones (5.48) para que $f dx$ sea una diferencial exacta.

EJEMPLO 5.19

(a) Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ y $z(0) = 0$, $z(1) = -2$, (b) su correspondiente valor extremal.

SOLUCION:

(a) aquí,

$$f = y'^2 + z'^2 \quad (5.136)$$

Ahora bien, f tiene dos variables dependientes y y z , por lo tanto, se debe escribir una ecuación de Euler para cada una de estas variables. Al sustituir (5.136) en las ecuaciones de Euler (5.123) (para $i = 1, 2$ con $y_1 = y$ y $y_2 = z$) resulta,

$$\text{Para } i = 1: \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 + z'^2) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 + z'^2) \right] &= 0 \\ y'' &= 0 \end{aligned} \quad (5.137)$$

y,

$$\text{Para } i = 2: \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (y'^2 + z'^2) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} (y'^2 + z'^2) \right] &= 0 \\ z'' &= 0 \end{aligned} \quad (5.138)$$

Las soluciones de (5.137) y (5.138) son respectivamente,

$$y = c_1 x + c_2 \quad (5.139)$$

$$z = c_3 x + c_4 \quad (5.140)$$

Por último, al aplicar las condiciones de frontera sobre (5.139) en (5.140) resulta,

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = -2 \\ c_4 = 0 \end{cases} \quad (5.141)$$

por lo tanto, sustituyendo estos resultados en (5.139) y (5.140) resulta finalmente,

$$\boxed{\begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}} \quad (5.142)$$

(b) El valor extremal de J vendrá dado al sustituir (5.142) en la expresión de la misma. En efecto,

$$J = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{d}{dx} (x) \right]^2 + \left[\frac{d}{dx} (-2x) \right]^2 \right\} dx$$

O,

$$\boxed{J = 5} \quad (5.143)$$

EJEMPLO 5.20

Hallar los extremales de la funcional,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y', z') dx$$

SOLUCION: aquí,

$$f = f(y', z') \quad (5.144)$$

Ahora bien, f tiene dos variables dependientes y y z , por lo tanto, se debe escribir una ecuación de Euler para cada una de estas variables. Al sustituir (5.144) en las ecuaciones de Euler (5.123) (para $i = 1, 2$ con $y_1 = y$ y $y_2 = z$) resulta,

$$\begin{aligned}
 \text{Para } i = 1: & \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(y', z') - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} f(y', z') \right]}_{=0} = 0 \\
 & \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial y'} f(y', z') \right] = 0 \\
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{dz'}{dx}}_{\text{Por regla de la cadena}} = 0 \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial z' \partial y'} z'' = 0 \tag{5.145}
 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
 \text{Para } i = 2: & \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} f(y', z') - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} f(y', z') \right]}_{=0} = 0 \\
 & \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial}{\partial z'} f(y', z') \right] = 0 \\
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{dz'}{dx}}_{\text{Por regla de la cadena}} = 0 \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} z'' = 0 \tag{5.146}
 \end{aligned}$$

Por último, al resolver el sistema formado por (5.145) y (5.146) resulta,

$$\left. \begin{array}{l} y'' = 0 \\ z'' = 0 \end{array} \right\} \text{ si } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \neq 0 \tag{5.147}$$

de las cuales resulta, como se vió en el ejemplo anterior, lo siguiente,

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} y = c_1 x + c_2 \\ z = c_3 x + c_4 \end{array} \right.} \tag{5.148}$$

que es una familia de líneas rectas en el espacio. Como se puede ver, el ejemplo anterior constituye un caso especial del presente.

5.5 Cálculo de extremales con restricciones

Existen aplicaciones en las que es natural considerar ciertas restricciones adicionales, a las ya impuestas por las condiciones de frontera, sobre el conjunto de funciones de las que depende el funcional integral J definido por (5.32). Por ejemplo, supóngase que se quiere buscar el camino más corto entre dos puntos sobre una superficie, entonces existe ahora la restricción de que el camino debe satisfacer la ecuación de dicha superficie.

En una situación dada pueden existir más de una restricción. El número total de restricciones presentes será denotado por K y el subíndice l será utilizado para indicar cada una de las restricciones por separado, es decir, $l = 1, 2, 3, \dots, K$. Debido a su correspondencia con las ligaduras estudiadas en el capítulo 2 y en el capítulo 3 en coordenadas generalizadas (sección 3.6) y a la utilidad que tendrán en capítulos posteriores, en el presente texto serán consideradas restricciones de los siguientes tipos:

1. **Restricciones del tipo** $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$: son igualdades que expresan relaciones algebraicas entre las distintas $y_i(x)$ únicamente, no involucrando sus derivadas. Es decir, ahora no todas las $y_i(x)$ son independientes pues algunas de ellas estarán relacionadas unas a las otras mediante las ecuaciones $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$. Por ser relaciones algebraicas entre las $y_i(x)$, permiten eliminar (en general) todas aquellas $y_i(x)$ que son dependientes. Este tipo de restricciones corresponden con las ligaduras holónomas,

$$f_l^{(h)}(q_i, t) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, \eta; l = 1, 2, 3, \dots, K^{(h)}$$

donde $q_i(t)$ es ahora $y_i(x)$ y t es ahora x .

2. **Restricciones del tipo** $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$: son igualdades que expresan relaciones entre las distintas $y_i(x)$ y sus correspondientes derivadas $y'_i(x)$, es decir, son ecuaciones diferenciales de primer orden en las $y_i(x)$. Estas restricciones, por no ser relaciones algebraicas únicamente entre las $y_i(x)$, no permiten eliminar las $y_i(x)$ dependientes a menos que puedan ser integradas. De ocurrir lo último, entonces será posible eliminar las $y'_i(x)$ resultando restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$. Este tipo de restricciones corresponden con las ligaduras no-holónomas y semi-holónomas,

$$f_l(q_i, \dot{q}_i, t) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, \eta; l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \begin{cases} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{cases}$$

donde $q_i(t)$ es ahora $y_i(x)$, $\dot{q}_i(t)$ es ahora $y'_i(x)$ y t es ahora x .

3. Restricciones del tipo

$$\tilde{\mathcal{D}}_l = \sum_{j=1}^n A_{lj} [y_i(x); x] y'_j(x) + B_l [y_i(x); x] = 0$$

: representan un

caso menos general de las del tipo $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ (la \sim sobre la \mathcal{D} es para indicar que es un subconjunto de estas últimas). Son igualdades que expresan relaciones entre las distintas $y_i(x)$ y sus correspondientes derivadas $y'_i(x)$, es decir, son ecuaciones diferenciales de primer orden en las $y_i(x)$. Pueden ser expresadas también en forma diferencial. Igual que para las anteriores, por no ser relaciones algebraicas únicamente entre las $y_i(x)$, no permiten en principio eliminar las $y_i(x)$ dependientes a menos que puedan ser integradas. De ocurrir lo último, entonces será posible eliminar las $y'_i(x)$ resultando restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$. Este tipo de restricciones corresponden con las ligaduras no-holónomas y semi-holónomas,

$$\begin{cases} f_l^{(nhd)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \\ f_l^{(shd)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \end{cases} = \sum_{j=1}^n A_{lj} (q_i, t) dq_j + B_l (q_i, t) dt = 0, l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \begin{cases} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_l^{(nhD)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \\ f_l^{(shD)} \left(q_i, \dot{q}_i, t \right) \end{cases} = \sum_{j=1}^n A_{lj} (q_i, t) \dot{q}_j + B_l (q_i, t) = 0, l = 1, 2, 3, \dots, \mathcal{K} = \begin{cases} K^{(nh)} \\ K^{(h)} \end{cases}$$

donde $q_i(t)$ es ahora $y_i(x)$, $\dot{q}_i(t)$ es ahora $y'_i(x)$ y t es ahora x .

4. Restricciones del tipo

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{I}_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l$$

: son las denominadas *Restric-*

ciones Isoperimétricas. En estas restricciones las ϱ_l son constantes y, al igual que (2) y (3), tampoco pueden ser usadas para eliminar algunas de las $y_i(x)$. Pueden ser reducidas a restricciones del tipo $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ como se verá más adelante. No corresponden con ninguna de las ligaduras estudiadas pero se incluyen en el presente texto por lo último antes mencionado.

La manera de abordar este tipo de situaciones donde existen restricciones es transformar el problema con restricciones a uno equivalente sin restricciones. Esto se logra:

1. Usando las ecuaciones de las restricciones para despejar de ellas todas las $y_i(x)$ dependientes y sustituirlas en el integrando de J , resultando así una nueva \tilde{J} cuyo integrando \tilde{f} es sólo función de las $y_i(x)$ independientes y sus derivadas. Despues de realizado esto, es posible usar las ecuaciones de Euler (5.58), (5.88) y (5.89) en el caso de una variable $y_i(x)$ o de Euler-Lagrange (5.123) en el caso de varias variables, todas ellas encontradas para una situación sin restricciones. De los tipos de restricciones mencionados antes, esto es posible hacerlo sólo con las $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$ o las $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ en los casos que sean integrables. Cuando se proceda de esta forma se dirá que las restricciones son usadas en **Forma Implícita**.

2. Usando el *Método de los Multiplicadores de Lagrange* λ de forma análoga a como se procede para hallar los valores extremales para las funciones en el curso básico de cálculo de varias variables. Más adelante serán encontradas las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes. Aquí las restricciones, en ningún caso, serán usadas para eliminar las $y_i(x)$ dependientes. Cuando se proceda de esta forma se dirá que las restricciones son usadas en **Forma Explícita**.

Las restricciones del tipo $\mathcal{D}_l[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ (que en general no son integrables) y las del tipo,

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{I}_l[y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l$$

sólo pueden ser empleadas en forma explícita ya que no permiten eliminar las $y_i(x)$ dependientes. Las restricciones del tipo $\mathcal{A}_l[y_i(x); x] = 0$ y las del tipo $\mathcal{D}_l[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ integrables, pueden ser usadas en las dos formas. Para estas dos últimas, la forma explícita proporciona información adicional contenida en los multiplicadores de Lagrange λ que no es posible obtenerla mediante la forma implícita.

5.5.1 Restricciones del tipo

$$\mathcal{A}_l[y_i(x); x] = 0$$

5.5.1.1 Forma implícita

Se emplearán las restricciones $\mathcal{A}_l[y_i(x); x] = 0$ en forma implícita, es decir, serán usadas para eliminar las $y_i(x)$ dependientes.

Pasos a seguir:

1. Se identifican las restricciones existentes.
2. Se indentifica f del integrando de la J dada o construida a partir de la cantidad que se desea extremar.
3. Se usan las restricciones para eliminar las $y_i(x)$ dependientes en la f identificada en el paso anterior, escogiéndose las que se van a dejar como independientes entre sí. Esta nueva f sólo contendrá las $y_i(x)$ independientes.
4. Se encuentran y se resuelven las ecuaciones de Euler (5.58), (5.88) y (5.89) en el caso de una variable $y_i(x)$ o de Euler-Lagrange (5.123) en el caso de varias variables, usando la f hallada en el paso anterior. En el caso que sea necesario, se usan las ecuaciones de las restricciones para encontrar el resto de las $y_i(x)$ que fueron eliminadas en el paso 3.

EJEMPLO 5.21

La geodésica. La geodésica es una línea que representa el camino más corto entre dos puntos cuando el camino está restringido a una superficie en particular. Hallar la longitud de la geodésica, es decir, la distancia más corta entre los puntos $P_1(1, 0, -1)$ y $P_2(0, -1, 1)$ en el plano $x + y + z = 0$.

SOLUCION: se utilizarán coordenadas Cartesianas[¶].

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del plano,

$$\mathcal{A} = x + y + z = 0 \quad (5.149)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l[y_i(x); x] = 0$.

Se indentifica f : el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.150)$$

de aquí que la distancia venga dada por,

$$s = \int_{(0,-1,1)}^{(1,0,-1)} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.151)$$

[¶]Véase el apéndice A.5 para una biografía resumida de Descartes.

donde se ha escogido x como variable independiente. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.152)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1(x) = y$ y $y_2(x) = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x . Las variables y y z no son independientes entre sí debido a la restricción (5.149).

Se usan las restricciones para eliminar las $y_i(x)$ dependientes en la f : al despejar z de la restricción (5.149) resulta,

$$z = -x - y \quad (5.153)$$

de la cual,

$$z' = -1 - y' \quad (5.154)$$

que al ser sustituida en (5.152) se obtiene,

$$f = [1 + y'^2 + (-1 - y')^2]^{\frac{1}{2}}$$

o,

$$f = 2^{\frac{1}{2}} (1 + y' + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.155)$$

convirtiéndose el problema planteado a uno de un sola variable, y .

Se encuentran y se resuelven las ecuaciones de Euler-Lagrange sin restricciones: a partir de (5.58),

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (5.156)$$

donde f es la dada por (5.155) y a partir de la cual,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = 2^{-\frac{1}{2}} \frac{1+2y'}{(1+y'+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (5.157)$$

que al ser sustituidas en (5.156) se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1+2y'}{(1+y'+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

o integrando,

$$\frac{1+2y'}{(1+y'+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = c_1 \quad (5.158)$$

donde c_1 es una constante de integración. Al despejar y' de (5.158) se obtiene,

$$y' = c_2 \quad (5.159)$$

donde c_2 es una constante igual a una expresión algebraica que involucra a c_1 .

Finalmente, si se integra ahora (5.159) resulta,

$$y = c_2 x + c_3 \quad (5.160)$$

donde c_3 es una constante de integración. Esta es una de las extremales.

Falta la variable z que fue eliminada al usar la restricción (5.149) en (5.152). Para hallar z se sustituye (5.160) en (5.153) obteniéndose,

$$z = -x - (c_2 x + c_3)$$

o,

$$z = -(1 + c_2)x - c_3 \quad (5.161)$$

que es la otra extremal.

Para hallar las constantes c_2 y c_3 se aplican, sobre las extremales (5.160) y (5.161), las condiciones de frontera $y(0) = -1$, $y(1) = 0$, $z(0) = 1$ y $z(1) = 1$ resultando,

$$\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases} \quad (5.162)$$

de manera que (5.160) y (5.161) pueden ser escritas ahora como,

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = -2x + 1 \end{cases} \quad (5.163)$$

que son dos rectas y representan los caminos que hacen de (5.151) un extremal. En este caso tiene que representar un mínimo ya que, obviamente, el camino entre los puntos dados puede hacerse tan grande como se deseé.

Por último, para hallar la distancia mínima se sustituye (5.163) en (5.151) y se evalúa la integral resultante. En efecto,

$$s = \int_0^1 [1 + (1)^2 + (-2)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

o,

$$s = \sqrt{6} \quad (5.164)$$

que es la distancia mínima pedida.

Este caso puede ser resuelto, debido a que la f dada por (5.155) no depende explícitamente de la variable independiente x , mediante el uso de la forma integrada de la Ecuación de Euler (5.89) deducida antes.

EJEMPLO 5.22

Encuentre la geodésica sobre una esfera de radio R .

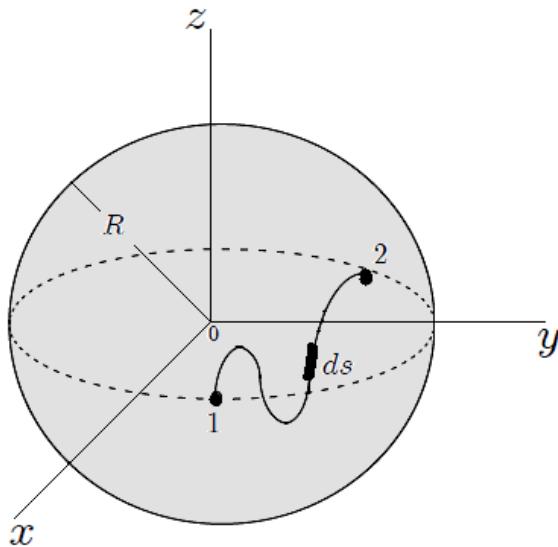


Figura 5.11: Geodésicas sobre una esfera.

SOLUCION: se utilizarán coordenadas esféricas.

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación de la esfera de radio R ,

$$r = R$$

es decir,

$$\mathcal{A} = r - R = 0 \quad (5.165)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

Se identifica f : en la figura 5.11 se muestra la situación planteada en el enunciado. El elemento de longitud viene dado por,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{Sen}^2 \theta d\varphi^2 \quad (5.166)$$

de aquí que la distancia s entre los puntos 1 y 2 venga dada por,

$$s = \int_{\text{Punto 1}}^{\text{Punto 2}} (r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \operatorname{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\varphi \quad (5.167)$$

donde se ha escogido φ como variable independiente y $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, $\theta' = \frac{d\theta}{d\varphi}$. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = (r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \operatorname{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (5.168)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1(x) = r$ y $y_2(x) = \theta$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente φ .

Se usan las restricciones para eliminar las $y_i(x)$ dependientes en la f : en este caso la restricción (5.165) sólo elimina la dependencia de f con respecto a r , haciendo r constante. En efecto, al sustituir $r = R$ a partir de la restricción (5.165) en (5.168) resulta,

$$f = R (\theta'^2 + \operatorname{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (5.169)$$

convirtiéndose el problema planteado a uno de un sola variable, θ .

Se encuentran y se resuelven las ecuaciones de Euler-Lagrange sin restricciones: puesto que $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$ (f no depende explícitamente de la variable independiente φ), se puede usar la forma integrada de la ecuación de Euler (5.89),

$$f - \theta' \frac{\partial f}{\partial \theta'} = c_1 \quad (5.170)$$

donde f es la dada por (5.169) y a partir de la cual,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta'} = \frac{R\theta'}{(\theta'^2 + \operatorname{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.171)$$

que al ser sustituida en (5.170) se obtiene,

$$(\theta'^2 + \operatorname{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} - \frac{\theta'^2}{(\theta'^2 + \operatorname{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = c_2, \text{ con } c_2 = \frac{c_1}{R}$$

O,

$$\operatorname{Sen}^2 \theta = c_2 (\theta'^2 + \operatorname{Sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (5.172)$$

de la cual resulta,

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{c_2 \csc^2 \theta}{(1 - c_2^2 \csc^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.173)$$

y al integrar,

$$\varphi = \operatorname{Sen}^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{c_3} \right) + c_4 \quad (5.174)$$

donde c_4 es la constante de integración y $c_3^2 = \frac{1}{c_2^2} - 1$. El anterior resultado puede ser escrito como,

$$\cot \theta = c_3 \operatorname{Sen}(\varphi - c_4) \quad (5.175)$$

Para interpretar este resultado, se transforma a coordenadas rectangulares. Con este fin, multiplicando (5.175) por $R \operatorname{Sen} \theta$ se obtiene,

$$R \operatorname{Cos} \theta = \underbrace{R \operatorname{Sen} \theta (c_3 \operatorname{Cos} c_4) \operatorname{Sen} \varphi - R \operatorname{Sen} \theta (c_3 \operatorname{Sen} c_4) \operatorname{Cos} \varphi}_{\text{Aplicando la identidad } \operatorname{Sen}(\varphi-\alpha)=\operatorname{Sen} \varphi \operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sen} \alpha} \quad (5.176)$$

y puesto que α y c_3 son constantes, se puede escribir,

$$\begin{cases} c_3 \operatorname{Cos} c_4 = A \\ c_3 \operatorname{Sen} c_4 = B \end{cases} \quad (5.177)$$

de modo que (5.176) queda escrita como,

$$A(R \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Sen} \varphi) - B(R \operatorname{Sen} \theta \operatorname{Cos} \varphi) = (R \operatorname{Cos} \theta) \quad (5.178)$$

Las cantidades en los paréntesis son justo las expresiones para y , x y z respectivamente, en coordenadas esféricas, por lo tanto resulta,

$$Ay - Bx = z \quad (5.179)$$

que es la ecuación de un plano que pasa a través del centro de la esfera. Por lo tanto, la geodésica sobre una esfera es el camino que se origina al intersectar el plano (5.179) con la esfera, es decir, el círculo mayor. Nótese que el círculo mayor es el máximo a la vez que es la mínima distancia en “línea recta” entre dos puntos sobre la superficie de una esfera.

EJEMPLO 5.23

Encuentre la ecuación de la geodésica en el plano xy , es decir, de la línea que proporciona la distancia más corta entre dos puntos en dicho plano (ver figura 5.12).

SOLUCION: se usarán coordenadas Cartesianas.

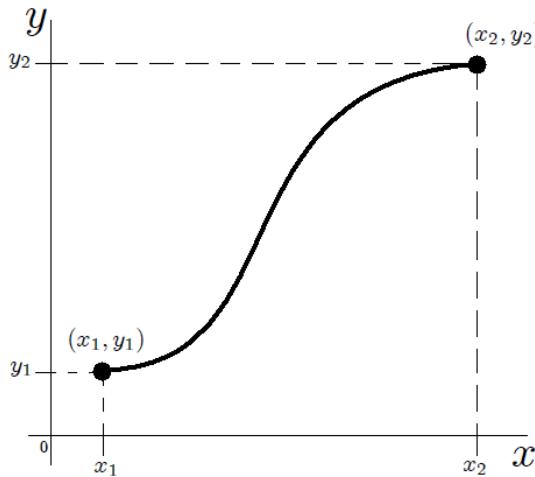


Figura 5.12: Distancia más corta entre dos puntos del plano.

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del plano xy ,

$$\mathcal{A} = z = 0 \quad (5.180)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

Se identifica f : el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.181)$$

de aquí que la distancia venga dada por,

$$s = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.182)$$

donde se ha escogido x como variable independiente. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.183)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1(x) = y$ y $y_2(x) = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x .

Se usan las restricciones para eliminar las $y_i(x)$ dependientes en la f : al sustituir z de la restricción (5.180) en (5.183) resulta,

$$f = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.184)$$

convirtiéndose el problema planteado a uno de un sola variable, y .

Se encuentran y se resuelven las ecuaciones de Euler-Lagrange sin restricciones: a partir de (5.58),

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (5.185)$$

donde f es la dada por (5.184) y a partir de la cual,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (5.186)$$

que al ser sustituidas en (5.185) se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

o integrando,

$$\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = c_1 \quad (5.187)$$

donde c_1 es una constante de integración. Al despejar y' de (5.187) se obtiene,

$$y' = c_2 \quad (5.188)$$

donde c_2 es una constante igual a una expresión algebraica que involucra a c_1 .

Finalmente, al integrar (5.188), resulta,

$$y = c_2 x + c_3 \quad (5.189)$$

donde c_3 es otra constante de integración. En rigor, sólo se ha probado que la recta es una trayectoria que hace que (5.182) dé un valor estacionario, aunque en este problema es obvio que se trata de un mínimo. Las constantes de integración c_2 y c_3 quedan determinadas por la condición de que la curva pase por los dos puntos fronteras (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

Este caso puede ser resuelto, debido a que la f dada por (5.184) no depende explícitamente de la variable independiente x , mediante el uso de la Forma Integrada de la Ecuación de Euler (5.89) deducida antes.

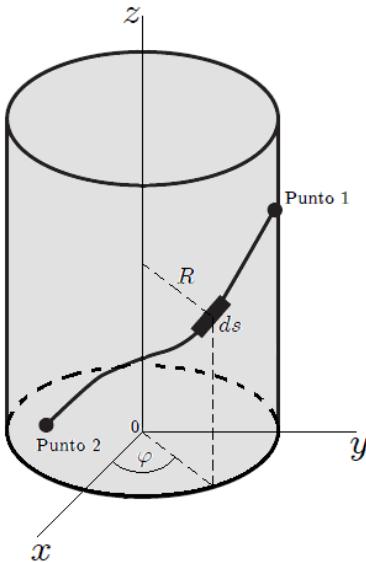


Figura 5.13: Geodésicas en un cilindro circular recto de radio R .

EJEMPLO 5.24

Hallar las geodésicas del cilindro circular $r = R$.

SOLUCION: se usarán coordenadas Cartesianas.

Se identifican las restricciones existentes: en la figura 5.13 se muestra esquemáticamente lo planteado. Existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del cilindro de radio R ,

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (5.190)$$

de aquí que,

$$\mathcal{A} = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (5.191)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

Se identifica f : el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.192)$$

de aquí que la distancia venga dada por,

$$s = \int_{\text{Punto 1}}^{\text{Punto 2}} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.193)$$

donde se ha escogido x como variable independiente. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.194)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1(x) = y$ y $y_2(x) = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x . Las variables y y z no son independientes entre sí debido a la restricción (5.191).

Se usan las restricciones para eliminar las $y_i(x)$ dependientes en la f : al despejar y de la restricción (5.191) resulta,

$$y = \pm (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.195)$$

de la cual,

$$y' = \mp \frac{x}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.196)$$

que al ser sustituida en (5.194) se obtiene,

$$f = \left\{ 1 + \left[\mp \frac{x}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 + z'^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

o,

$$f = \left(\frac{R^2}{R^2 - x^2} + z'^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.197)$$

convirtiéndose el problema planteado a uno de un sola variable, z .

Se encuentran y se resuelven las ecuaciones de Euler-Lagrange sin restricciones: a partir de (5.58),

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = 0 \quad (5.198)$$

donde f es la dada por (5.197) y a partir de la cual,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{\left(\frac{R^2}{R^2 - x^2} + z'^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (5.199)$$

que al ser sustituidas en (5.198) se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{z'}{\left(\frac{R^2}{R^2 - x^2} + z'^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

o integrando,

$$\frac{z'}{\left(\frac{R^2}{R^2 - x^2} + z'^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = c_1 \quad (5.200)$$

donde c_1 es una constante de integración. Al despejar y' de (5.200) se obtiene,

$$z' = \pm \frac{c_2 R}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.201)$$

donde

$$c_2 = \frac{c_1}{(1 - c_1^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.202)$$

Finalmente, al integrar (5.201) se obtiene,

$$z = \pm c_2 R \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) + c_3 \quad (5.203)$$

donde c_3 es otra constante de integración. Esta es la ecuación de la geodésica pedida (en este caso es una familia de geodésicas), que representa una hélice.

5.5.1.2 Forma explícita

Supóngase que se quieren encontrar las funciones $y_i(x)$ que hacen que la integral,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.204)$$

tome un valor estacionario o extremal bajo las restricciones algebraicas impuestas por,

$$\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \text{ y } K < n \quad (5.205)$$

La idea ahora es transformar el problema dado a uno equivalente sin restricciones pero sin usar las restricciones (5.205) para eliminar las $y_i(x)$ dependientes entre sí y dejar sólo las independientes entre sí (forma implícita) como se hizo en la sección anterior. Se hará ahora empleando las rectricciones en forma explícita. Para realizar esto se usará el *Método de los Multiplicadores de Lagrange λ* . El valor estacionario de (5.32) o (5.204) viene dado por,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = 0 \quad (5.206)$$

de la cual se obtiene (ver sección 5.2.2, ejemplo 3.7),

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.207)$$

Aquí, como las funciones y_i están sujetas a las K restricciones independientes (5.205) de manera que K de las δy_i pueden ser designadas como variables dependientes entre sí y expresadas en términos de las otras, las variaciones δy_i no son arbitrarias por lo que aún no es posible aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones.

Las variaciones δy_i deben satisfacer las restricciones impuestas por (5.205). Para encontrar las δy_i que satisfacen estas restricciones se halla la variación de las ecuaciones de restricción (5.205). En efecto,

$$\delta \mathcal{A}_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \delta y_i = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.208)$$

que se mantienen para cualquier valor de x . En consecuencia, sólo $n - K$ variaciones δy_i se pueden considerar arbitrarias, es decir, $\delta y_{K+1}, \delta y_{K+2}, \delta y_{K+3}, \dots, \delta y_n$, y el resto se determinan de (5.208).

De acuerdo al Método de los Multiplicadores de Lagrange, al multiplicar cada una de las ecuaciones (5.208) por un factor indeterminado λ_l resulta,

$$\lambda_l \delta \mathcal{A}_l = \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \delta y_i = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.209)$$

donde la suma es la que es nula, no sus términos individuales en general. Puesto que las restricciones (5.205) están prescritas para cualquier valor de la variable independiente x , los factores λ_l tienen que ser aplicados para cualquier valor de esta variable, haciéndolos dependientes de la misma $\lambda_l = \lambda_l(x)$. Ahora, al ser sumadas miembro a miembro estas K ecuaciones y luego integradas desde x_1 hasta x_2 se obtiene,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{l=1}^K \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \delta y_i dx = 0 \quad (5.210)$$

Si ahora se suman miembro a miembro (5.207) y (5.210) resulta,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i + \sum_{l=1}^K \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \delta y_i \right\} dx = 0$$

o,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.211)$$

Esta movida no es trivial ya que, a pesar de haberse sumado cero, se ha adicionado realmente una suma cuyos términos individuales no son nulos como se dijo antes. Aquí aún no se puede aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones, puesto que las variaciones δy_i no son arbitrarias.

La eliminación de las K variaciones δy_i dependientes entre sí, a diferencia de como se procedió en la forma implícita, puede ser llevada a cabo mediante la elección

apropiada de los K factores $\lambda_l(x)$, de manera que los coeficientes de las δy_i en (5.211) se anulen. Estos $\lambda_l(x)$ se obtienen a partir de las K ecuaciones,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.212)$$

que forman un sistema lineal de ecuaciones con respecto a las $\lambda_l(x)$ cuyo determinante debe ser no singular,

$$\frac{D(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots, \mathcal{A}_K)}{D(y_1, y_2, y_3, \dots, y_K)} = \frac{D(\mathcal{A}_i)}{D(y_i)} \neq 0, \text{ con } i, l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.213)$$

garantizándose así que el sistema de ecuaciones posea solución $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_K$.

Con las λ_l escogidas como antes, la condición para valor estacionario (5.211) queda como,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=K+1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.214)$$

donde todas las δy_i son independientes entre sí. Ahora, es posible aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones (cada uno de sus coeficientes se anulan por separado) resultando,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} = 0, \text{ con } i = K+1, K+2, K+3, \dots, n \quad (5.215)$$

Finalmente, las condiciones sobre los λ_l (5.212) combinadas con las ecuaciones (5.215) conducen a la conclusión de que cada coeficiente de las δy_i en (5.211) se anula justo como si todas las δy_i fuesen independientes de manera que,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

O,

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i}}_{Q_i} = Q_i, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.216)$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para funcionales de múltiples variables dependientes y restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

donde,

$$Q_i = \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \quad (5.217)$$

Las expresiones (5.216) son las *Ecuaciones de Euler - Lagrange* para restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i (x); x] = 0$, cuando son usadas en forma explícita. Estas restricciones entran en forma explícita en los Q_i dados por (5.217). Los Q_i serán asociados, a partir del capítulo 5, con las fuerzas generalizadas de ligadura.

La solución completa al problema depende ahora de la determinación de n funciones y_i y K funciones λ_l . Como hay K ecuaciones de restricción dadas por (5.205) y n ecuaciones dadas por (5.216), entonces existen suficientes ecuaciones ($n + K$ en total) para permitir una solución completa al problema planteado. Aquí las $\lambda_l (x)$ son consideradas indeterminadas y pueden ser obtenidas como parte de la solución satisfaciendo las restricciones (5.205).

El problema anterior puede ser planteado de otra forma. Es posible reobtener las ecuaciones (5.216) planteándose el problema variacional sin restricciones,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'_i} \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.218)$$

donde,

$$\tilde{f} = f + \sum_{l=1}^K \lambda_l (x) \mathcal{A}_l [y_i (x); x] \quad (5.219)$$

Pasos a seguir cuando se usan las restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i (x); x] = 0$ en forma explícita:

1. Se identifican las restricciones existentes.
2. Se identifica f del integrando de la J dada o construida a partir de la cantidad que se desea extremar, con las $y_i (x)$ dependientes e independientes. No deben usarse las restricciones para eliminar las $y_i (x)$ dependientes entre sí en f .
3. Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.216), usando la f hallada en el paso anterior.
4. Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones, que son usadas para completar el sistema. Aquí se obtienen las extremales $y_i (x)$ y los multiplicadores de Lagrange λ_l que permiten encontrar los Q_i dados por (5.217).

EJEMPLO 5.25

Resolver el ejemplo 5.21 usando la restricción presente en forma explícita.

SOLUCION: se usarán coordenadas Cartesianas.

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del plano,

$$\mathcal{A} = x + y + z = 0 \quad (5.220)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

Se identifica f : el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.221)$$

de aquí que la distancia venga dada por,

$$s = \int_{(0,-1,1)}^{(1,0,-1)} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.222)$$

donde se ha escogido x como variable independiente. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.223)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1(x) = y$ y $y_2(x) = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x . Las variables y y z no son independientes entre sí debido a la restricción (5.220).

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.216), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} \quad (5.224)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = Q_z = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} \quad (5.225)$$

pero de (5.220) y (5.223),

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} = 1 & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = 1 \end{cases} \quad (5.226)$$

entonces al sustituir estos resultados en (5.224) y (5.225) se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \left[y' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \lambda \quad (5.227)$$

$$\frac{d}{dx} \left[z' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \lambda \quad (5.228)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: queda ahora resolver el sistema de ecuaciones diferenciales formado por (5.227) y (5.228) junto con la restricción (5.220). Restando miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores resulta,

$$\frac{d}{dx} \left[(y' - z') (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (5.229)$$

que al ser integrada resulta en,

$$(y' - z') (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} = c_1 \quad (5.230)$$

donde c_1 es una constante de integración. Por otro lado, de la restricción (5.220),

$$z = -x - y \Rightarrow z' = -1 - y' \quad (5.231)$$

entonces, al sustituir este resultado en (5.230) se puede escribir,

$$(1 + 2y') (1 + 2y' + 2y'^2)^{-\frac{1}{2}} = c_1 \quad (5.232)$$

de la cual,

$$y' = c_2 \quad (5.233)$$

donde la constante c_2 es una constante que viene dada por una expresión en la que aparece c_1 y que no vale la pena mostrar explícitamente ya que no es útil para ningún cálculo posterior.

Finalmente, al integrar (5.233) se obtiene,

$$y = c_2 x + c_3 \quad (5.234)$$

donde c_3 es una constante de integración. Usando este resultado en la restricción (5.220) resulta,

$$z = -(1 + c_2)x - c_3 \quad (5.235)$$

Las constantes c_2 y c_3 se hayan al utilizar las condiciones de frontera $y(0) = -1$, $y(1) = 0$, $z(0) = 1$ y $z(1) = 1$ en (5.234) y (5.235) resultando,

$$\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{cases} \quad (5.236)$$

de manera que (5.234) y (5.235) pueden ser escritas ahora como,

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = -2x + 1 \end{cases} \quad (5.237)$$

que son los mismos resultados obtenidos en 5.21. Es obvio que la distancia mínima será también la misma, es decir,

$$s = \sqrt{6} \quad (5.238)$$

El multiplicador de Lagrange λ puede ser encontrado sustituyendo (5.237) en (5.227) o (5.228) obteniéndose,

$$\lambda = 0 \quad (5.239)$$

que es una información que no podía ser obtenida al usar la restricción en forma implícita. En este caso particular, no se aporta mayor información.

EJEMPLO 5.26

Resolver el ejemplo 5.23, usando la restricción presente en forma explícita.

SOLUCION: se usarán coordenadas Cartesianas.

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del plano xy ,

$$\mathcal{A} = z = 0 \quad (5.240)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

Se identifica f : el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.241)$$

de aquí que la distancia venga dada por,

$$s = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.242)$$

donde se ha escogido x como variable independiente. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.243)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1(x) = y$ y $y_2(x) = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x .

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.216), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} \quad (5.244)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = Q_z = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} \quad (5.245)$$

pero de (5.240) y (5.243),

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = 1 \end{cases} \quad (5.246)$$

entonces al sustituir estos resultados en (5.244) y (5.245) se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \left[y' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (5.247)$$

$$\frac{d}{dx} \left[z' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \lambda \quad (5.248)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: queda ahora resolver el sistema de ecuaciones diferenciales formado por (5.247) y (5.248) junto con la restricción (5.240).

Sustituyendo la restricción (5.240) en (5.247) y (5.248) resulta,

$$\frac{d}{dx} \left[y' (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (5.249)$$

$$\boxed{\lambda = 0} \quad (5.250)$$

El resultado (5.250) es una información que no podía ser obtenida al usar la restricción en forma implícita. En este caso particular, no se aporta mayor información. La ecuación diferencial (5.249) al ser integrada resulta en,

$$y' (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} = c_1 \quad (5.251)$$

donde c_1 es una constante de integración. Esta ecuación diferencial es idéntica a la (5.187) del ejemplo 5.23, por lo tanto, es obvio que se llegará al mismo resultado (5.189), es decir,

$$\boxed{y = c_2 x + c_3} \quad (5.252)$$

EJEMPLO 5.27

Resolver el ejemplo 5.24, usando la restricción presente en forma explícita.

SOLUCION: se usarán coordenadas Cartesianas.

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del cilindro de radio R ,

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (5.253)$$

de aquí que,

$$\mathcal{A} = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (5.254)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

Se identifica f : el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.255)$$

de aquí que la distancia venga dada por,

$$s = \int_{\text{Punto 1}}^{\text{Punto 2}} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.256)$$

donde se ha escogido x como variable independiente. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.257)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1(x) = y$ y $y_2(x) = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x . Las variables y y z no son independientes entre sí debido a la restricción (5.254).

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.216), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} \quad (5.258)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = Q_z = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} \quad (5.259)$$

pero de (5.254) y (5.257),

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} = 2y & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5.260)$$

entonces al sustituir estos resultados en (5.258) y (5.259) se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \left[y' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 2y\lambda \quad (5.261)$$

$$\frac{d}{dx} \left[z' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad (5.262)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: ahora bien, de (5.262) resulta,

$$(1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} z' = c_1 \quad (5.263)$$

y de la restricción (5.254),

$$y = \pm (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \mp \frac{x}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.264)$$

entonces, al sustituir este resultado en (5.263) se puede escribir,

$$z' = \pm \frac{c_2 R}{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.265)$$

con,

$$c_2 = \left(\frac{c_1^2}{1 - c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.266)$$

La ecuación (5.265) es idéntica a la ecuación diferencial (5.201) del ejemplo 5.24. Por lo tanto, es obvio que al integrarla el resultado será idéntico al (5.203), es decir,

$$z = \pm c_2 R \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) + c_3 \quad (5.267)$$

siendo la ecuación de la geodésica pedida una hélice.

Por último, la ecuación (5.261) permite encontrar λ usando los resultados (5.264) y (5.267) obteniéndose,

$$\lambda = \mp \frac{1}{2R\sqrt{(c_2^2+1)(R^2-x^2)}} \quad (5.268)$$

Este resultado es una información que no podía ser obtenida al usar la restricción en forma implícita.

EJEMPLO 5.28

Geodésicas en general. Sea $\xi(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie S dada y suponiendo que toda curva diferenciable definida sobre S admite una parametrización del tipo,

$$\alpha(t) = (x(t); y(t); z(t)), \quad \alpha : [t_0, t_1] \rightarrow S$$

hallar las geodésicas sobre S .

SOLUCION: se usarán coordenadas Cartesianas.

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación,

$$\xi(x, y, z) = 0 \quad (5.269)$$

de aquí que,

$$\mathcal{A} = \xi(x, y, z) = 0 \quad (5.270)$$

La restricción (5.270) es del tipo $\mathcal{A}_l[y_i(x); x] = 0$, sin embargo sólo es posible tratarla en forma explícita ya que no se posee la expresión de $\xi(x, y, z)$.

Se identifica f : el elemento de longitud (elemento de línea) viene dado por,

$$ds^2 = [dx(t)]^2 + [dy(t)]^2 + [dz(t)]^2 \quad (5.271)$$

de aquí que la longitud de la curva venga dada por,

$$\begin{aligned} s &= \int_{\text{Punto 1}}^{\text{Punto 2}} \left\{ [dx(t)]^2 + [dy(t)]^2 + [dz(t)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{\text{Punto 1}}^{\text{Punto 2}} \left\{ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned} \quad (5.272)$$

donde se ha escogido t como variable independiente y la prima indica derivada total con respecto a dicha variable independiente. Esta es la cantidad que se quiere extremar, pudiéndose identificar f como,

$$f = \left\{ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.273)$$

Aquí se tienen 3 variables $y_1(t) = x$, $y_2(t) = y$ y $y_3(t) = z$ ($i = 1, 2, 3$) dependientes de la variable independiente t . Las variables x , y y z no son independientes entre sí debido a la restricción (5.270).

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.216), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = Q_x = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \quad (5.274)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} \quad (5.275)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = Q_z = \lambda \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} \quad (5.276)$$

pero de (5.270) y (5.273),

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 & \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \end{cases} \quad (5.277)$$

entonces al sustituir estos resultados en (5.274), (5.275) y (5.276) se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (5.278)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (5.279)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (5.280)$$

pero como,

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = s' \frac{d}{ds} \quad (5.281)$$

y de (5.272),

$$\frac{ds}{dt} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.282)$$

entonces (5.278), (5.279) y (5.280) se pueden escribir como,

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d^2 x / ds^2}{\partial \xi / \partial x} = \frac{\lambda}{s'} \\ \frac{d^2 y / ds^2}{\partial \xi / \partial y} = \frac{\lambda}{s'} \\ \frac{d^2 z / ds^2}{\partial \xi / \partial z} = \frac{\lambda}{s'} \end{cases}}$$

O,

$$\boxed{\frac{d^2 x / ds^2}{\partial \xi / \partial x} = \frac{d^2 y / ds^2}{\partial \xi / \partial y} = \frac{d^2 z / ds^2}{\partial \xi / \partial z} = \frac{\lambda}{s'}} \quad (5.283)$$

expresando que la normal a la curva coincide con la normal a la superficie, definición usual de geodésica en geometría diferencial.

En este caso no es posible resolver las ecuaciones diferenciales resultantes con la información suministrada.

5.5.2 Restricciones del tipo

$$\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$$

Supóngase ahora que se quieren encontrar las funciones $y_i(x)$ que hacen que la integral,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.284)$$

tome un valor estacionario bajo las restricciones impuestas por,

$$\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \text{ y } K < n \quad (5.285)$$

Estas restricciones sólo pueden ser usadas en forma explícita ya que no representan una relación algebraica que sólo involucre las $y_i(x)$ a menos que sean integrables, convirtiéndose así en restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$ como las estudiadas en la sección anterior.

Supóngase que se cumple,

$$\frac{D(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_K)}{D(y'_1, y'_2, y'_3, \dots, y'_K)} = \frac{D(\mathcal{D}_i)}{D(y'_i)} \neq 0 \quad (5.286)$$

el cual representa uno de los determinantes funcionales de orden K , garantizándose así la independencia de las K restricciones (5.285). Debido a lo anterior es posible ahora, en virtud de (5.286), resolver las ecuaciones (5.285) con respecto a las y'_i obteniéndose,

$$y'_l = \mathcal{D}_l (y_i, y'_j; x) \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K; i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ y } j = K+1, K+2, K+3, \dots, n \quad (5.287)$$

y si adicionalmente se supone que,

$$y_i, \text{ con } i = K+1, K+2, K+3, \dots, n \quad (5.288)$$

son funciones dadas en forma completamente arbitraria. Entonces, del sistema de ecuaciones (5.287), es posible determinar las funciones,

$$y_i, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.289)$$

Por todo lo anterior, las funciones (5.288) son derivables arbitrarias con valores de frontera fijos y, en consecuencia, sus variaciones son también arbitrarias.

Dado un sistema admisible arbitrario de funciones y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) que satisface el sistema de ecuaciones de restricciones (5.285) se tiene que,

$$\delta \mathcal{D}_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y'_i = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.290)$$

Si ahora se multiplican miembro a miembro todas las K ecuaciones anteriores por un factor $\lambda_l = \lambda_l(x)$ (por ahora indeterminado) se obtiene,

$$\lambda_l \delta \mathcal{D}_l = \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} \delta y_i + \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y'_i = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.291)$$

y al ser sumadas miembro a miembro estas K ecuaciones y luego integradas desde x_1 hasta x_2 se obtiene,

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \sum_{l=1}^K \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} \delta y_i dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_{l=1}^K \lambda_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y'_i dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^K \left[\int_{x_1}^{x_2} \lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} \delta y_i dx + \int_{x_1}^{x_2} \lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.292)$$

El segundo término entre corchetes de (5.292) puede ser integrado por partes,

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ con } \begin{cases} u = \lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \\ dv = \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx = d(\delta y_i) \Rightarrow v = \delta y_i \end{cases} \quad (5.293)$$

de manera que,

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx = \lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \quad (5.294)$$

pero,

$$\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (5.295)$$

ya que δy_i debe anularse en x_1 y x_2 por ser una variación admisible. Entonces (5.294) resulta en,

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \quad (5.296)$$

así la expresión (5.292) queda finalmente escrita como,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^K \left[\int_{x_1}^{x_2} \lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} \delta y_i dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \delta y_i dx \right] = 0$$

O,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^K \left[\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.297)$$

Por otro lado, el valor estacionario de (5.284) viene dado por,

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = 0 \quad (5.298)$$

de la cual se obtiene (ver ejemplo 5.7 sección 5.2.2),

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.299)$$

Si ahora se suman miembro a miembro (5.297) y (5.299) resulta,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^K \left[\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\lambda_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx = 0$$

o,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right\} \right\} \delta y_i dx = 0 \quad (5.300)$$

A este nivel aún no es aplicable el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones ya que las variaciones δy_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) no son arbitrarias. La eliminación de las K variaciones δy_i dependientes entre sí puede ser llevada a cabo mediante la elección apropiada de los K factores λ_l , de manera que los coeficientes de las δy_i en (5.300) se anulen. Estos λ_l se obtienen a partir de las K ecuaciones,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right\} = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.301)$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con respecto a λ_l y $\lambda'_l = \frac{d\lambda_l}{dx}$ que posee, bajo las hipótesis planteadas al comienzo, la solución λ_l ($l = 1, 2, 3, \dots, K$) que depende de K constantes arbitrarias de integración. Con las λ_l escogidas como antes, la condición para valor estacionario (5.300) queda como,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=K+1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right\} \right\} \delta y_i dx = 0 \quad (5.302)$$

donde ahora si son arbitrarias las variaciones δy_i ($i = K+1, K+2, K+3, \dots, n$) pudiéndose aplicar ahora el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones resultando,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right\}, \text{ con } i = K+1, K+2, K+3, \dots, n \quad (5.303)$$

Finalmente, las condiciones sobre los λ_l (5.301) combinadas con las ecuaciones (5.303) conducen a la conclusión de que cada coeficiente de las δy_i en (5.300) se anula justo como si todas las δy_i fuesen independientes de manera que,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right\} = 0 \quad (5.304)$$

O,

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = Q_i, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n}_{(5.305)}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para funcionales de múltiples variables dependientes y restricciones del tipo $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$.

donde,

$$Q_i = \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right\} \quad (5.306)$$

Las expresiones (5.305) son las *Ecuaciones de Euler - Lagrange* para restricciones del tipo $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$. Estas restricciones entran en forma explícita en los Q_i dados por (5.306).

La solución completa al problema depende ahora de la determinación de n funciones y_i y K funciones λ_l . Como hay K ecuaciones de restricción dadas por (5.285) y n ecuaciones dadas por (5.305), entonces existen suficientes ecuaciones ($n + K$ en total) para permitir una solución completa al problema planteado. Aquí las $\lambda_l(x)$ son consideradas indeterminadas y pueden ser obtenidas como parte de la solución satisfaciendo las restricciones (5.285).

Las ecuaciones (5.305) pueden ser obtenidas, al igual que en la sección anterior, planteándose el problema variacional sin restricciones,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y'_i} \right) = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.307)$$

donde,

$$\tilde{f} = f + \sum_{l=1}^K \lambda_l(x) \mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] \quad (5.308)$$

Existen restricciones menos generales a las del tipo $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ cuyas Ecuaciones de Euler-Lagrange no resultan en forma correcta, en general, a partir de (5.305) o (5.307). Estas restricciones serán el objeto de estudio de la siguiente sección.

5.5.3 Restricciones del tipo

$$\tilde{\mathcal{D}}_l = \sum_{j=1}^n A_{lj} [y_i(x); x] y'_j(x) + B_l [y_i(x); x] = 0$$

La derivada total de una restricción del tipo (5.205), es decir $A_l [y_i(x); x] = 0$, con respecto a la variable independiente x y su diferencial total vienen dados respectiva-

mente por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{A}_l[y_i(x);x]}{dx} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_l[y_i(x);x]}{\partial y_j} y'_j(x) + \frac{\partial \mathcal{A}_l[y_i(x);x]}{\partial x} = 0 \\ d\mathcal{A}_l[y_i(x);x] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{A}_l[y_i(x);x]}{\partial y_j} dy_j(x) + \frac{\partial \mathcal{A}_l[y_i(x);x]}{\partial x} dx = 0 \end{array} \right. , \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.309)$$

Respectivamente, las expresiones (5.309) tienen la forma general,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{D}}_l^{(D)}[y_i(x), y'_i(x); x] = \sum_{j=1}^n A_{lj}[y_i(x); x] y'_j(x) + B_l[y_i(x); x] = 0 \\ \tilde{\mathcal{D}}_l^{(d)}[y_i(x), y'_i(x); x] = \sum_{j=1}^n A_{lj}[y_i(x); x] dy_j(x) + B_l[y_i(x); x] dx = 0 \end{array} \right. , \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.310)$$

donde (*D*) significa que aparecen las derivadas totales $y'_j(x)$ de las $y_j(x)$ y (*d*) que aparecen los diferenciales totales $dy_j(x)$ de las $y_j(x)$. Aquí los coeficientes A_{lj} y B_l son funciones dadas que dependen, en general, de las $y_i(x)$ y la variable independiente x como puede verse. Representan un caso menos general de restricciones del tipo $\mathcal{D}_l[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$. En general no son integrables, impidiendo que puedan convertirse en relaciones algebraicas que solamente involucren a las $y_i(x)$. Es obvio que estas restricciones se pueden convertir en restricciones del tipo $\mathcal{A}_l[y_i(x); x] = 0$ (equivalentemente en (5.309)) sólo si son integrables, es decir, cuando se cumple que,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{lj} = \frac{\partial \mathcal{A}_l[y_i(x);x]}{\partial y_j} \\ B_l = \frac{\partial \mathcal{A}_l[y_i(x);x]}{\partial x} \end{array} \right. \quad (5.311)$$

convirtiéndose (5.310) en una diferencial exacta o en una derivada total.

Como se dijo antes, las restricciones (5.310) son las mismas ligaduras no-holónomas y semi-holónomas (3.117) o (3.118) estudiadas en la sección 3.6.2 del capítulo 3, por lo tanto, las condiciones para que (5.310) representen una derivada total o una diferencial exacta son las mismas estudiadas en dicha sección. Igualmente, cuando una restricción está expresada en la forma de la segunda de las expresiones (5.310), se dice que está escrita en *Forma Diferencial* o en *Forma Pfaffiana*^a. Es obvio que ambas expresiones son equivalentes.

^aVéase el apéndice A.9 para una biografía resumida de Pfaff.

En general, como ya se había visto en la sección anterior, las restricciones del tipo $\mathcal{D}_l[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ deben satisfacer las ecuaciones (5.290), es decir,

$$\delta\mathcal{D}_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y'_i = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.312)$$

que son las condiciones que deben cumplir los caminos $y_i(x)$ para ser geométricamente posibles bajo estas restricciones, es decir, aquellos caminos que las obedecen. Para que las restricciones del tipo (5.310) puedan ser tratadas con las Ecuaciones de Lagrange (5.305) o (5.307) deben satisfacer (5.312) lo cual, en efecto, lo hacen pero en forma parcial como será mostrado. Antes de mostrar esto, las ecuaciones (5.312) serán reescritas en una forma más manejable. Teniendo presente que $\delta y'_i = \frac{d}{dx}(\delta y_i)$, al sumar y restar $\sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \delta y_i$ en las ecuaciones (5.312) resulta,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{D}_l &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \delta y_i - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) = 0 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \delta y_i + \frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \frac{d}{dx} (\delta y_i) \right]}_{= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y_i \right)} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y_i \right) + \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_{li} \delta y_i = 0 \end{aligned}$$

O,

$$\delta\mathcal{D}_l = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \delta y_i \right) + \sum_{i=1}^n G_{li} \delta y_i = 0 \quad (5.313)$$

donde,

$$G_{li} = \frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \quad (5.314)$$

Se mostrará ahora si las restricciones del tipo (5.310) cumplen con las condiciones (5.313). Para que esto ocurra debe cumplirse que,

$$\delta\tilde{\mathcal{D}}_l = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\tilde{\mathcal{D}}_l}{\partial y'_i} \delta y_i \right) + \sum_{i=1}^n G_{li} \delta y_i = 0 \quad (5.315)$$

pero, a partir de (5.310) se obtiene,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\tilde{\mathcal{D}}_l}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{lj} y'_j + B_l \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{lj}}{\partial y_i} y'_j + \frac{\partial B_l}{\partial y_i} \\ \frac{\partial\tilde{\mathcal{D}}_l}{\partial y'_i} = \frac{\partial}{\partial y'_i} \left(\sum_{j=1}^n A_{lj} y'_j + B_l \right) = \sum_{j=1}^n A_{lj} \frac{\partial y'_j}{\partial y'_i} = \sum_{j=1}^n A_{lj} \delta_{ji} = A_{li} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{D}}_l}{\partial y'_i} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial A_{li}}{\partial y'_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial y_j} y'_j + \frac{\partial A_{li}}{\partial x} \end{array} \right. \quad (5.316)$$

que al ser sustituidos en (5.315) resulta,

$$\delta\tilde{\mathcal{D}}_l = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n A_{li} \delta y_i \right) + \sum_{i,j=1}^n \left[\left(\frac{\partial A_{lj}}{\partial y_i} y'_j + \frac{\partial B_l}{\partial y_i} - \frac{\partial A_{li}}{\partial y_j} y'_j - \frac{\partial A_{li}}{\partial x} \right) \right] \delta y_i = 0$$

o,

$$\delta\tilde{\mathcal{D}}_l = \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^n A_{li} \delta y_i \right) + \sum_{i,j=1}^n \left[\left(\frac{\partial A_{lj}}{\partial y_i} - \frac{\partial A_{li}}{\partial y_j} \right) y'_j + \left(\frac{\partial B_l}{\partial y_i} - \frac{\partial A_{li}}{\partial x} \right) \right] \delta y_i = 0 \quad (5.317)$$

que son las condiciones que deben cumplir las restricciones del tipo (5.310) para poder ser tratadas con las Ecuaciones de Lagrange (5.305) o (5.307). Se puede verificar fácilmente que (5.317) sólo se cumple cuando los coeficientes A_{li} y B_l sean los dados por (5.311), teniéndose presente que $\sum_{i=1}^n A_{li} \delta y_i = 0$. Es decir:

Las restricciones (5.310) sólo pueden ser tratadas con las Ecuaciones de Lagrange (5.305) o (5.307) cuando sean integrables!, convirtiéndose así esencialmente en restricciones del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$.

Por lo anteriormente mostrado, serán encontradas ahora las Ecuaciones de Euler-Lagrange particulares para las restricciones del tipo (5.310) sean integrables o no. Supóngase que se quieren encontrar las funciones $y_i(x)$ que hacen que la integral,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.318)$$

tome un valor estacionario bajo las restricciones impuestas por (5.310). A partir de estas restricciones,

$$\delta\tilde{\mathcal{D}}_l = \sum_{i=1}^n A_{li} \delta y_i = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.319)$$

que se cumplen para cualquier valor de x . Se usará el Método de los Multiplicadores de Lagrange como se hizo en las secciones anteriores. Al multiplicar cada una de las ecuaciones (5.319) por un factor indeterminado λ_l resulta,

$$\lambda_l \tilde{\mathcal{D}}_l = \lambda_l \sum_{i=1}^n A_{li} \delta y_i = 0, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.320)$$

donde la suma es la que es nula, no sus términos individuales en general. Puesto que las restricciones (5.310) están prescritas para cualquier valor de la variable independiente x , los factores λ_l tienen que ser aplicados para cualquier valor de esta variable.

haciéndolos dependientes de la misma $\lambda_l = \lambda_l(x)$. Ahora, al ser sumadas miembro a miembro estas K ecuaciones y luego integradas desde x_1 hasta x_2 se obtiene,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{l=1}^K \lambda_l \sum_{i=1}^n A_{li} \delta y_i dx = 0 \quad (5.321)$$

Por otro lado, la variación de (5.318) viene dada por (ver sección 5.4.3),

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.322)$$

que se ha igualado a cero para así encontrar el valor estacionario de J . Si ahora se suman miembro a miembro (5.321) y (5.322) resulta,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] \delta y_i + \sum_{l=1}^K \lambda_l \sum_{i=1}^n A_{li} \delta y_i \right\} dx = 0$$

O,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.323)$$

Al igual que en la sección anterior, esta movida no es trivial. A pesar de haberse sumado cero, se ha adicionado realmente una suma cuyos términos individuales no son nulos. Aquí aún no se puede aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones, puesto que las variaciones δy_i no son arbitrarias.

La eliminación de las K variaciones δy_i dependientes entre sí puede ser llevada a cabo mediante la elección apropiada de los K factores λ_l , de manera que los coeficientes de las δy_i en (5.317) se anulen. Estos λ_l se obtienen a partir de las K ecuaciones,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} = 0, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.324)$$

que forman un sistema lineal de ecuaciones con respecto a las λ_l cuyo determinante debe ser no singular,

$$\frac{D(\tilde{\mathcal{D}}_1, \tilde{\mathcal{D}}_2, \tilde{\mathcal{D}}_3, \dots, \tilde{\mathcal{D}}_K)}{D(y_1, y_2, y_3, \dots, y_K)} = \frac{D(\tilde{\mathcal{D}}_l)}{D(y_i)} \neq 0, \text{ con } i, l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.325)$$

garantizándose así que el sistema de ecuaciones posea solución $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_K$.

Con las λ_l escogidas en (5.324), la condición para valor estacionario de J (5.323) queda como,

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=K+1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l (x) A_{li} \right] \delta y_i dx = 0 \quad (5.326)$$

donde todas las δy_i son independientes entre sí. Ahora, es posible aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones (cada uno de los coeficientes de las δy_i se anulan por separado) resultando,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} \text{ con } i = K+1, K+2, K+3, \dots, n \quad (5.327)$$

Finalmente, las condiciones sobre los λ_l (5.324) combinadas con las ecuaciones (5.327) conducen a la conclusión de que cada coeficiente de las δy_i en (5.323) se anula justo como si todas las δy_i fuesen independientes entre sí de manera que,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) + \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} = 0 \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

O,

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i}}_{Q_i} = Q_i, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.328)$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para funcionales de múltiples
 variables dependientes y restricciones del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$.

donde,

$$Q_i = \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} \quad (5.329)$$

Las expresiones (5.328) son las Ecuaciones de Euler - Lagrange buscadas para restricciones del tipo (5.310), sean no-holónomas o semi-holónomas. Estas restricciones entran en forma explícita en los Q_i dados por (5.329) mediante los coeficientes A_{li} . Los Q_i serán asociados, a partir del capítulo ??, con las fuerzas generalizadas de ligadura.

La solución completa al problema depende ahora de la determinación de n funciones y_i y K funciones λ_l . Aquí las λ_l son consideradas indeterminadas y pueden ser obtenidas como parte de la solución.

Las restricciones tipo (5.310) integrables, previa integración, pueden ser tratadas con las Ecuaciones de Euler-Lagrange (5.216) o (5.217). Sin embargo, puede ocurrir que la integración no sea fácil y es en estos casos donde realmente son útiles las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.328) pues únicamente se requiere determinar los coeficientes A_{li} , lo cual es muy trivial. También son útiles estas Ecuaciones de Euler-Lagrange cuando se tienen restricciones del tipo $\mathcal{A}_l[y_i(x);x] = 0$ en las que se hace difícil despejar las variables $y_i(x)$ dependientes en función de las independientes, resolviéndose el problema al hallar la diferencial total de dichas restricciones para expresarlas en la forma diferencial (5.310) y luego aplicar (5.328).

Pasos a seguir cuando se tienen restricciones del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$:

1. Se identifica f del integrando de la J dada o construida a partir de la cantidad que se desea extremar.
2. Se identifican las restricciones existentes. Si se tienen restricciones del tipo $\mathcal{A}_l[y_i(x); x] = 0$ pueden ser tratadas como restricciones del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l[y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ hallando su diferencial total sin realizar simplificaciones (esto haría que la diferencial hallada no fuese exacta aunque siga siendo integrable).
3. Se identifican los coeficientes A_{li} mediante comparación directa de (5.310) con las restricciones dadas.
4. Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.328), usando la f hallada en el paso anterior.
5. Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las ecuaciones de las restricciones, que son usadas para completar el sistema. Aquí se obtienen las extremales $y_i(x)$ y los multiplicadores de Lagrange λ_l que permiten encontrar los Q_i dados por (5.329).

EJEMPLO 5.29

Resolver el ejemplo 5.25 usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.322).

SOLUCION:

Se identifica f : ya en el ejemplo 5.25 fue identificada f resultando,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.330)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1 = y$ y $y_2 = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x .

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del plano,

$$\mathcal{A} = x + y + z = 0 \quad (5.331)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$. Puede ser tratada como una ligadura del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l^{(d)} [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ al hallar su diferencial total. En efecto,

$$\tilde{\mathcal{D}}_1^{(d)} = dx + dy + dz = 0 \quad (5.332)$$

pudiendo ser vista ahora como una restricción del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l^{(d)} [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$.

Se identifican los coeficientes A_{li} : se tienen $n = 2$ variables y_i y una restricción $l = 1$. Entonces a partir de (5.310) para $l = 1$ se tiene que,

$$\sum_{i=1}^2 A_{1i} dy_i + B_1 dx = 0 \Rightarrow A_{11} dy_1 + A_{12} dy_2 + B_1 dx = 0 \quad (5.333)$$

O,

$$A_{1y} dy + A_{1z} dz + B_1 dx = 0 \quad (5.334)$$

Ahora, al comparar (5.332) con (5.334) se deduce que,

$$A_{1y} = 1 \quad A_{1z} = 1 \quad B_1 = 1 \quad (5.335)$$

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.328), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{ly} = \lambda A_{1y} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = Q_z = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lz} = \lambda A_{1z} \end{array} \right. \quad (5.336)$$

ahora, al sustituir (5.330) y (5.335) en estas ecuaciones resulta,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[y' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \lambda \\ \frac{d}{dx} \left[z' (1 + y'^2 + z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \lambda \end{cases} \quad (5.337)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: las ecuaciones (5.337) son idénticas a las ecuaciones (5.227) y (5.228) del ejemplo 5.25. Por lo tanto, los resultados subsiguientes son igualmente idénticos a los obtenidos en dicho ejemplo.

EJEMPLO 5.30

Dada la funcional,

$$J = \int_a^b [\mathcal{S}_1 (\rho'^2 + \psi'^2) + \mathcal{S}_2 \beta'^2 + \mathcal{S}_3 \sigma'^2] dx$$

sujeta a las restricciones,

$$\begin{aligned} \rho' - \mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma \beta' &= 0 \\ \psi' + \mathcal{S}_4 \operatorname{Cos} \sigma \beta' &= 0 \end{aligned}$$

encuéntrense las Q_i . Aquí \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 y \mathcal{S}_4 son constantes positivas no nulas y la prima indica derivada total con respecto a x .

SOLUCION:

Se identifica f : en este caso,

$$f = \mathcal{S}_1 (\rho'^2 + \psi'^2) + \mathcal{S}_2 \beta'^2 + \mathcal{S}_3 \sigma'^2 \quad (5.338)$$

Aquí se tienen $n = 4$ variables $y_1 = \rho$, $y_2 = \psi$, $y_3 = \beta$ y $y_4 = \sigma$ ($i = 1, 2, 3, 4$) dependientes de la variable independiente x .

Se identifican las restricciones existentes: existen 2 restricciones ($K = 2 \Rightarrow l = 1, 2$) que vienen dadas por,

$$\tilde{\mathcal{D}}_1^{(D)} = \rho' - \mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma \beta' = 0 \quad (5.339)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_2^{(D)} = \psi' + \mathcal{S}_4 \operatorname{Cos} \sigma \beta' = 0 \quad (5.340)$$

que no son integrables. Estas restricciones son del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l^{(D)} [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ y se ha designado $l = 1$ a (5.339) y $l = 2$ a (5.340).

Se identifican los coeficientes A_{li} : se tienen $n = 4$ variables y_i y dos restricciones $l = 1, 2$. Entonces a partir de (5.310) se tiene que,

Para $l = 1$:

$$\sum_{i=1}^4 A_{1i}y'_i + B_1 = 0 \Rightarrow A_{11}y'_1 + A_{12}y'_2 + A_{13}y'_3 + A_{14}y'_4 + B_1 = 0$$

O,

$$A_{1\rho}\rho' + A_{1\psi}\psi' + A_{1\beta}\beta' + A_{1\sigma}\sigma' + B_1 = 0 \quad (5.341)$$

Para $l = 2$:

$$\sum_{i=1}^4 A_{2i}y'_i + B_2 = 0 \Rightarrow A_{21}y'_1 + A_{22}y'_2 + A_{23}y'_3 + A_{24}y'_4 + B_2 = 0$$

O,

$$A_{2\rho}\rho' + A_{2\psi}\psi' + A_{2\beta}\beta' + A_{2\sigma}\sigma' + B_2 = 0 \quad (5.342)$$

Ahora, al comparar (5.341) y (5.342) con (5.339) y (5.340) respectivamente se deduce que,

$$\begin{aligned} A_{1\rho} &= 1 & A_{1\psi} &= 0 & A_{1\beta} &= -\mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma & A_{1\sigma} &= 0 & B_1 &= 0 \\ A_{2\rho} &= 0 & A_{2\psi} &= 1 & A_{2\beta} &= \mathcal{S}_4 \operatorname{Cos} \sigma & A_{2\sigma} &= 0 & B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.343)$$

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.328), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho'} \right) - \frac{\partial f}{\partial \rho} = Q_\rho = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\rho} = \lambda_1 A_{1\rho} + \lambda_2 A_{2\rho} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial f}{\partial \psi} = Q_\psi = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\psi} = \lambda_1 A_{1\psi} + \lambda_2 A_{2\psi} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta'} \right) - \frac{\partial f}{\partial \beta} = Q_\beta = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\beta} = \lambda_1 A_{1\beta} + \lambda_2 A_{2\beta} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial f}{\partial \sigma} = Q_\sigma = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\sigma} = \lambda_1 A_{1\sigma} + \lambda_2 A_{2\sigma} \end{array} \right. \quad (5.344)$$

pero a partir de (5.338),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= 0 & \frac{\partial f}{\partial \psi} &= 0 & \frac{\partial f}{\partial \beta} &= 0 & \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \rho'} &= 2\mathcal{S}_1\rho' & \frac{\partial f}{\partial \psi'} &= 2\mathcal{S}_1\psi' & \frac{\partial f}{\partial \beta'} &= 2\mathcal{S}_2\beta' & \frac{\partial f}{\partial \sigma'} &= 2\mathcal{S}_3\sigma' \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho'} \right) &= 2\mathcal{S}_1\rho'' & \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) &= 2\mathcal{S}_1\psi'' & \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta'} \right) &= 2\mathcal{S}_2\beta'' & \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right) &= 2\mathcal{S}_3\sigma'' \end{aligned} \quad (5.345)$$

entonces, al sustituir los resultados (5.343) y (5.348) en las ecuaciones (5.344) resulta,

$$\begin{cases} 2\mathcal{S}_1\rho'' = \lambda_1 \\ 2\mathcal{S}_1\psi'' = \lambda_2 \\ 2\mathcal{S}_2\beta'' = -\lambda_1\mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma + \lambda_2\mathcal{S}_4 \operatorname{Cos} \sigma \\ 2\mathcal{S}_3\sigma'' = 0 \end{cases} \quad (5.346)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: en este caso se deben encontrar los λ ya que son necesarios, debido a (5.329), para encontrar los Q_i pedidos. Al derivar con respecto a x las restricciones (5.338) y (5.339) y despejar ρ'' y ψ'' resulta,

$$\rho'' - \mathcal{S}_4\sigma' \operatorname{Cos} \sigma\beta' - \mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma\beta'' = 0 \Rightarrow \rho'' = \mathcal{S}_4\sigma' \operatorname{Cos} \sigma\beta' + \mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma\beta'' \quad (5.347)$$

$$\psi'' - \mathcal{S}_4\sigma' \operatorname{Sen} \sigma\beta' + \mathcal{S}_4 \operatorname{Cos} \sigma\beta'' = 0 \Rightarrow \psi'' = \mathcal{S}_4\sigma' \operatorname{Sen} \sigma\beta' - \mathcal{S}_4 \operatorname{Cos} \sigma\beta'' \quad (5.348)$$

y al sustituirlos en las primeras dos ecuaciones (5.346) se obtiene,

$$\lambda_1 = 2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_4 (\sigma' \operatorname{Cos} \sigma\beta' + \operatorname{Sen} \sigma\beta'') \quad (5.349)$$

$$\lambda_2 = 2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_4 (\sigma' \operatorname{Sen} \sigma\beta' - \operatorname{Cos} \sigma\beta'') \quad (5.350)$$

Al sustituir estos resultados en la tercera de las ecuaciones (5.346) resulta,

$$\begin{aligned} 2\mathcal{S}_2\beta'' &= -2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_4^2 (\sigma' \operatorname{Cos} \sigma\beta' + \operatorname{Sen} \sigma\beta'') \operatorname{Sen} \sigma + 2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_4^2 (\sigma' \operatorname{Sen} \sigma\beta' - \operatorname{Cos} \sigma\beta'') \operatorname{Cos} \sigma \\ &= -2\mathcal{S}_1\mathcal{S}_4^2 \beta'' \end{aligned}$$

O,

$$2\underbrace{(\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_1\mathcal{S}_4^2)}_{\neq 0} \beta'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta'' = 0 \\ \beta' = c_1 \end{cases} \quad (5.351)$$

además, de la última de las ecuaciones (5.346) se obtiene,

$$\sigma'' = 0 \Rightarrow \sigma' = c_2 \quad (5.352)$$

Si ahora se sustituyen (5.351) y (5.352) en (5.349) y (5.350) resulta,

$$\lambda_1 = 2\mathcal{S}_2\mathcal{S}_4 c_1 c_2 \operatorname{Cos} \sigma \quad (5.353)$$

$$\lambda_2 = 2\mathcal{S}_2\mathcal{S}_4 c_1 c_2 \operatorname{Sen} \sigma \quad (5.354)$$

Finalmente, a partir de (5.329) se tiene que teniendo presente los resultados (5.343),

(5.353) y (5.354),

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_\rho = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\rho} = \lambda_1 A_{1\rho} + \lambda_2 A_{2\rho} = \lambda_1 = 2\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_4 c_1 c_2 \cos \sigma \\ Q_\psi = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\psi} = \lambda_1 A_{1\psi} + \lambda_2 A_{2\psi} = \lambda_2 = 2\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_4 c_1 c_2 \sin \sigma \\ Q_\beta = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\beta} = \lambda_1 A_{1\beta} + \lambda_2 A_{2\beta} = -\lambda_1 \mathcal{S}_4 \sin \sigma + \lambda_2 \mathcal{S}_4 \cos \sigma \\ = -2\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_4^2 c_1 c_2 \cos \sigma \sin \sigma + 2\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_4^2 c_1 c_2 \sin \sigma \cos \sigma = 0 \\ Q_\sigma = \sum_{l=1}^2 \lambda_l A_{l\sigma} = \lambda_1 A_{1\sigma} + \lambda_2 A_{2\sigma} = 0 \end{array} \right. \quad (5.355)$$

EJEMPLO 5.31

Resolver el ejemplo 5.27 usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.322).

SOLUCION:

Se identifica f : ya en el ejemplo 5.27 fue identificada f resultando,

$$f = (1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.356)$$

Aquí se tienen 2 variables $y_1 = y$ y $y_2 = z$ ($i = 1, 2$) dependientes de la variable independiente x .

Se identifican las restricciones existentes: existe sólo una restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por la ecuación del cilindro,

$$\mathcal{A} = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (5.357)$$

siendo una restricción del tipo $\mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0$. Su diferencial total viene dado por,

$$\tilde{\mathcal{D}}_1^{(d)} = 2xdx + 2ydy = 0 \quad (5.358)$$

pudiendo ser vista ahora como una restricción del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l^{(d)} [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$.

Se identifican los coeficientes A_{li} : se tienen $n = 2$ variables y_i y una restricción $l = 1$. Entonces a partir de (5.310) para $l = 1$ se tiene que,

$$\sum_{i=1}^2 A_{1i} dy_i + B_1 dx = 0 \Rightarrow A_{11} dy_1 + A_{12} dy_2 + B_1 dx = 0 \quad (5.359)$$

O,

$$A_{1y} dy + A_{1z} dz + B_1 dx = 0 \quad (5.360)$$

Ahora, al comparar (5.358) con (5.360) se deduce que,

$$A_{1y} = 2y \quad A_{1z} = 0 \quad B_1 = 2x \quad (5.361)$$

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.328), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{ly} = \lambda A_{1y} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = Q_z = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lz} = \lambda A_{1z} \end{cases} \quad (5.362)$$

pero de (5.356),

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (5.363)$$

entonces, al sustituir (5.361) y (5.363) en las ecuaciones (5.362) resulta,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[y' (1+y'^2+z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 2y\lambda \\ \frac{d}{dx} \left[z' (1+y'^2+z'^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0 \end{cases} \quad (5.364)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: las ecuaciones (5.364) son idénticas a las ecuaciones (5.261) y (5.262) del ejemplo 5.27. Por lo tanto, los resultados subsiguientes son igualmente idénticos a los obtenidos en dicho ejemplo.

EJEMPLO 5.32

Dada la funcional,

$$J = \int_a^b [\mathcal{S}_1 (z'^2 + y'^2) + \mathcal{S}_2 \sigma'^2 + \mathcal{S}_3 z + S_4 \cos \sigma] dx$$

sujeta a la restricción,

$$z' \operatorname{Sen} \sigma - y' \operatorname{Cos} \sigma = 0$$

Encuéntrense las ecuaciones de Euler-Lagrange. Aquí \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 y S_4 son constantes positivas no nulas y la prima indica derivada total con respecto a x .

SOLUCION:

Se identifica f : en este caso,

$$f = \mathcal{S}_1 (z'^2 + y'^2) + \mathcal{S}_2 \sigma'^2 + \mathcal{S}_3 z + S_4 \cos \sigma \quad (5.365)$$

Aquí se tienen $n = 3$ variables $y_1 = z$, $y_2 = y$ y $y_3 = \sigma$ ($i = 1, 2, 3$) dependientes de la variable independiente x .

Se identifican las restricciones existentes: existe 1 restricción ($K = 1 \Rightarrow l = 1$) que viene dada por,

$$\tilde{\mathcal{D}}_1^{(D)} = z' \operatorname{Sen} \sigma - y' \operatorname{Cos} \sigma = 0 \quad (5.366)$$

que no es integrable. Esta restricción es del tipo $\tilde{\mathcal{D}}_l^{(D)} [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$.

Se identifican los coeficientes A_{li} : se tienen $n = 3$ variables y_i y una restricción $l = 1$. Entonces a partir de (5.310) se tiene que,

Para $l = 1$:

$$\sum_{i=1}^3 A_{1i} y'_i + B_1 = 0 \Rightarrow A_{11} y'_1 + A_{12} y'_2 + A_{13} y'_3 + B_1 = 0$$

O,

$$A_{1z} z' + A_{1y} y' + A_{1\sigma} \sigma' + B_1 = 0 \quad (5.367)$$

Ahora, al comparar (5.367) con (5.366) se deduce que,

$$\begin{aligned} A_{1z} &= \operatorname{Sen} \sigma & A_{1y} &= \operatorname{Cos} \sigma \\ A_{1\sigma} &= 0 & B_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.368)$$

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: al emplear (5.328), las ecuaciones de Euler vendrán dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) - \frac{\partial f}{\partial z} = Q_z = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{lz} = \lambda_1 A_{1z} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{ly} = \lambda_1 A_{1y} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial f}{\partial \sigma} = Q_\sigma = \sum_{l=1}^1 \lambda_l A_{l\sigma} = \lambda_1 A_{1\sigma} \end{array} \right. \quad (5.369)$$

pero a partir de (5.365),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \mathcal{S}_3 & \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= -\mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma \\ \frac{\partial f}{\partial z'} &= 2\mathcal{S}_1 z' & \frac{\partial f}{\partial y'} &= 2\mathcal{S}_1 y' & \frac{\partial f}{\partial \sigma'} &= 2\mathcal{S}_2 \sigma' \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z'} \right) &= 2\mathcal{S}_1 z'' & \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= 2\mathcal{S}_1 y'' & \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right) &= 2\mathcal{S}_2 \sigma'' \end{aligned} \quad (5.370)$$

entonces, al sustituir los resultados (5.368) y (5.370) en las ecuaciones (5.369) resulta,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{S}_1 z'' - \mathcal{S}_3 = \lambda_1 \operatorname{Sen} \sigma \\ 2\mathcal{S}_1 y'' = -\lambda_1 \operatorname{Cos} \sigma \\ 2\mathcal{S}_2 \sigma'' + \mathcal{S}_4 \operatorname{Sen} \sigma = 0 \end{array} \right.$$

(5.371)

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange pedidas.

5.5.4 Restricciones del tipo isoperimétrico

$$\int_{x_1}^{x_2} g_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l$$

Se llaman problemas isoperimétricos a los problemas sobre la determinación de una figura geométrica de superficie máxima con perímetro dado.

Se les da este nombre a todos los problemas variacionales en los cuales se pide hallar el extremo de la funcional (5.32),

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f [y_i(x), y'_i(x); x] dx, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.372)$$

para que tome un valor estacionario pero bajo las llamadas *Restricciones Isoperimétricas*,

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{I}_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l, \text{ con } l = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.373)$$

donde las ϱ_l son constantes, K puede ser mayor, menor o igual a n , y también problemas análogos para funcionales más complejas.

Los problemas isoperimétricos pueden ser reducidos a problemas con restricciones del tipo $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$ por medio de la introducción de nuevas funciones desconocidas. En efecto, a partir de (5.373) haciendo el límite superior de la integral igual a x ,

$$\int_{x_1}^x \mathcal{I}_l [y_i(\tilde{x}), y'_i(\tilde{x}); \tilde{x}] d\tilde{x} = h_l(x) \quad (5.374)$$

con,

$$\begin{cases} h_l(x_1) = 0 \\ h_l(x_2) = \varrho_l, \text{ por la condición (5.373)} \end{cases} \quad (5.375)$$

donde se ha colocado \sim en la variable de integración para distinguirla del límite superior de la integral. Ahora derivando $h_l(x)$ con respecto a x se obtiene,

$$h'_l(x) = \mathcal{I}_l [y_i(x), y'_i(x); x]$$

o,

$$\mathcal{I}_l [y_i(x), y'_i(x); x] - h'_l(x) = 0 \quad (5.376)$$

de manera que las restricciones isoperimétricas (5.373) se han reemplazado por restricciones del tipo $\mathcal{D}_l [y_i(x), y'_i(x); x] = 0$, reduciéndose así al problema estudiado en la

primera parte de la sección anterior. Por lo tanto, son aplicables las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.305) para las restricciones,

$$D_l [y_i(x), y'_i(x), h'_l(x); x] = \mathcal{I}_l [y_i(x), y'_i(x); x] - h'_l(x) = 0 \quad (5.377)$$

Las variables son, en este caso, las $y_i(x)$ y las $h'_l(x)$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.305) correspondientes a estas dos variables vienen dadas por,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial y'_i} \right\}, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.378)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial h'_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial h_j} = \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial h_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial h'_j} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{D}_l}{\partial h'_j} \right\}, \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots, K \quad (5.379)$$

Entonces, al sustituir (5.377) en (5.378) resulta,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial (\mathcal{I}_l - h'_l)}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial (\mathcal{I}_l - h'_l)}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial (\mathcal{I}_l - h'_l)}{\partial y'_i} \right\}$$

O,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{I}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_l}{\partial y'_i} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial \mathcal{I}_l}{\partial y'_i} \right\} \quad (5.380)$$

y al sustituir (5.377) en (5.379) resulta,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial h'_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial h_j} &= \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \left[\frac{\partial (\mathcal{I}_l - h'_l)}{\partial h_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial (\mathcal{I}_l - h'_l)}{\partial h'_j} \right) \right] - \lambda'_l \frac{\partial (\mathcal{I}_l - h'_l)}{\partial h'_j} \right\} \\ 0 &= \sum_{l=1}^K \left\{ \lambda_l \underbrace{\left[-\frac{d}{dx} (-\delta_{lj}) \right]}_{=0} - \lambda'_l (-\delta_{lj}) \right\} \\ 0 &= \sum_{l=1}^K \lambda'_l \delta_{lj} \end{aligned}$$

O,

$$\lambda'_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = \text{constantes} \quad (5.381)$$

Finalmente, debido al anterior resultado, las ecuaciones (5.380) se reducen a,

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i}}_{Q_i, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n} = Q_i, \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.382)$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para funcionales de múltiples variables dependientes y restricciones del tipo isoperimétrico $\int_{x_1}^{x_2} g_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l$.

donde,

$$Q_i = \sum_{l=1}^K \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{I}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_l}{\partial y'_i} \right) \right] \quad (5.383)$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange para el problema isoperimétrico planteado. Las restricciones del tipo isoperimétrico, como ya se mencionó antes, sólo pueden ser usadas en forma explícita ya que no representan igualdades que únicamente involucren las $y_i(x)$.

Pasos a seguir cuando se tienen restricciones del tipo isoperimétrico:

1. Se identifican las \mathcal{I}_l a partir de los integrandos de las restricciones isoperimétricas dadas o construidas y la f del integrando de la J dada o construida a partir de la cantidad que se desea extremar.
2. Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.382), usando la f y las \mathcal{I}_l halladas en los pasos 1 y 2.
3. Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones, que son usadas para completar el sistema. Aquí se obtienen las extremales $y_i(x)$ y los multiplicadores de Lagrange λ_l que permiten encontrar los Q_i dados por (5.383).

EJEMPLO 5.33

Hallar las extremales de la funcional,

$$J = \int_0^\pi y'^2 dx$$

sabiendo que $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ y sujeta a la restricción isoperimétrica,

$$\int_0^\pi y^2 dx = 1$$

SOLUCION: aquí se tiene $n = 1$ variable $y_1 = y$ ($i = 1$) dependiente de la variable independiente x y existe $K = 1$ restricción ($l = 1$).

Se identifican la f y las \mathcal{I}_l : a partir del integrando de la J se tiene que,

$$f = y'^2 \quad (5.384)$$

y a partir del integrando de la restricción isoperimétrica,

$$\mathcal{I}_1 = y^2 \quad (5.385)$$

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.382) se puede escribir para este caso,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \lambda_1 \left[\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} \right) \right] \quad (5.386)$$

pero de (5.384) y (5.385) se tiene que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' & \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 2y'' & \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} \right) = 0 \end{array} \right\} \quad (5.387)$$

resultados que al ser sustituidos en (5.386) se obtiene,

$$y'' = \lambda_1 y \quad (5.388)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: la ecuación diferencial (5.389) representa un problema de autovalores. Las raíces del polinomio característico son $\pm\sqrt{\lambda}$.

Se tienen dos casos posibles dos:

1. Si $\lambda \geq 0$, la solución general viene dada por,

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (5.389)$$

que no puede satisfacer las condiciones de frontera dadas (verificarlo), no existiendo así solución para $\lambda \geq 0$.

2. Si $\lambda < 0$, la solución general viene dada por,

$$y(x) = c_1 \operatorname{Sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{Cos}(\sqrt{-\lambda}x) \quad (5.390)$$

Esta es la solución útil. De la condición de frontera $y(0) = 0$ resulta,

$$y(0) = c_2 = 0 \quad (5.391)$$

y de $y(\pi) = 0$,

$$\operatorname{Sen}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -1, -4, \dots, -n^2, \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.392)$$

Ahora, al sustituir los resultados (5.391) y (5.392) en la restricción isoperimétrica resulta,

$$\int_0^\pi \left[c_1 \operatorname{Sen}(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \operatorname{Cos}(\sqrt{-\lambda}x) \right]^2 dx = 1 \quad (5.393)$$

de la cual,

$$c_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (5.394)$$

Finalmente, al sustituir los resultados (5.391), (5.392) y (5.394) en (5.390) se obtiene finalmente,

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Sen}(nx), \quad conn = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.395)$$

EJEMPLO 5.34

Determinar la función $y(x)$ de longitud ℓ limitada por el eje x en la parte inferior, que pasa por los puntos $P_1 = (-a, 0)$, $P_2 = (a, 0)$ y que encierra la mayor área.

SOLUCION: la figura 5.14 muestra la situación planteada en el enunciado del ejemplo.

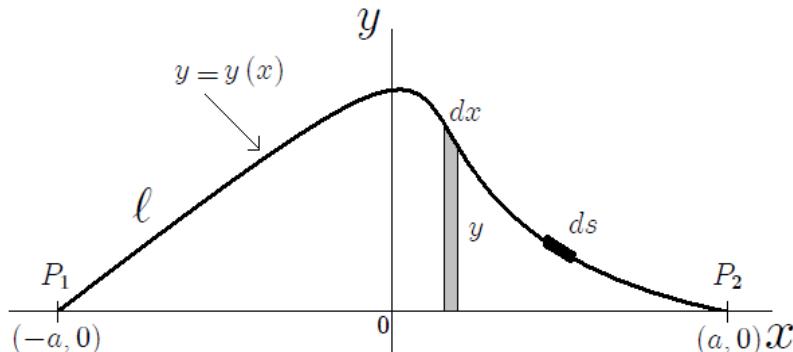


Figura 5.14: Función $y(x)$ cuya área por ella encerrada ha de maximizarse.

Se identifican la f y las I_l : a partir de la figura 5.14 se tiene que,

$$dA = ydx \quad (5.396)$$

de la cual,

$$A = \int_{-a}^a ydx \quad (5.397)$$

que es la cantidad a ser maximizada. De aquí,

$$f = y \quad (5.398)$$

teniéndose presente que $y(x)$ debe cumplir con las condiciones $y(-a) = 0$ y $y(a) = 0$.

Por otro lado, $y(x)$ debe tener longitud constante ℓ entonces,

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow s = \int_{-a}^a (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \ell \quad (5.399)$$

que es una restricción isoperimétrica. De aquí que,

$$\mathcal{I}_1 = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.400)$$

De todo lo anterior se puede observar que existe $n = 1$ variable $y_1 = y$ ($i = 1$) dependiente de la variable independiente x y existe $K = 1$ restricción ($l = 1$).

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.382) se puede escribir para este caso,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \lambda_1 \left[\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} \right) \right] \quad (5.401)$$

pero de (5.398) y (5.400) se tiene que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial y} = 1 & \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 & \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 & \end{array} \right\} \quad (5.402)$$

resultados que al ser sustituidos en (5.401) se obtiene,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{1}{\lambda_1} \quad (5.403)$$

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de Euler-Lagrange más las restricciones: al integrar la ecuación diferencial (5.403) resulta,

$$\frac{\lambda y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = x - c_1 \quad (5.404)$$

donde c_1 es una constante de integración. Esta ecuación puede ser reescrita como,

$$y' = \pm \frac{(x - c_1)}{\left[\lambda^2 - (x - c_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.405)$$

que al ser integranda resulta en,

$$y = \mp [\lambda^2 - (x - c_1)^2]^{\frac{1}{2}} + c_2 \Rightarrow y = [\lambda^2 - (x - c_1)^2]^{\frac{1}{2}} + c_2 \quad (5.406)$$

donde c_2 es otra constante de integración y se ha escogido el signo positivo para y en concordancia con el sistema de coordenadas mostrado en la figura 5.14. Reordenando términos,

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2 \quad (5.407)$$

La expresión (5.407) representa un círculo de radio λ centrado en (c_1, c_2) . El área máxima es un semicírculo limitado por la línea $y = 0$ (eje x). El semicírculo parte del punto $(-a, 0)$ y llega hasta el $(a, 0)$ (o viceversa), lo cual significa que debe estar centrado en el origen $(c_1, c_2) = (0, 0)$ y tiene radio $\lambda = a$. La longitud del semicírculo es $\pi a = \ell$, por lo tanto, $a = \ell/\pi$. De todo lo anterior a partir de (5.406) se deduce que,

$$y = \left[\left(\frac{\ell}{\pi} \right)^2 - x^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.408)$$

es la función buscada.

EJEMPLO 5.35

Para atravesar un río se coloca, desde una orilla a la otra, una cuerda de longitud ℓ de densidad de masa lineal μ . Si la separación entre las orillas es $2a$ ($2a < \ell$), ¿qué forma tomará la cuerda con el fin de minimizar la energía potencial? (ver figura 5.15).

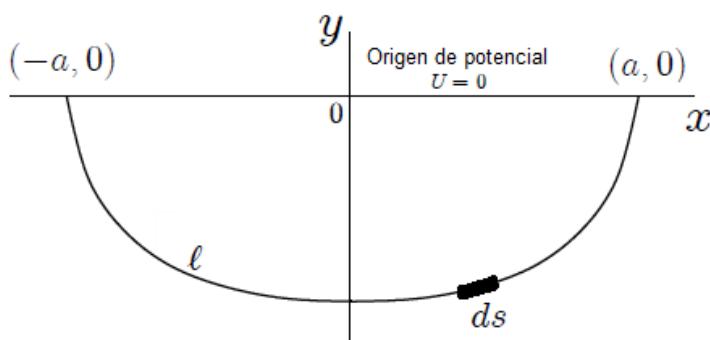


Figura 5.15: Cuerda de longitud ℓ colocada entre las orillas de un río de ancho $2a$.

SOLUCION:

Se identifican la f y las \mathcal{I}_l : si ds es el elemento de longitud de la cuerda, entonces su energía potencial vendrá dada por,

$$dU = -\mu gy ds \quad (5.409)$$

donde $y > 0$ ya que su signo negativo ha sido considerado explícitamente. Como,

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.410)$$

entonces,

$$U = -\mu g \int_{-a}^a y (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (5.411)$$

que es la cantidad que se desea minimizar. La minimización de U está sujeta a la restricción de que la longitud de la cuerda permanezca constante e igual a ℓ , es decir,

$$\int ds = \int_{-a}^a (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \ell \quad (5.412)$$

que es una restricción de tipo isoperimétrica. De (5.411) y (5.412) se puede identificar,

$$f = -\mu gy (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.413)$$

$$\mathcal{D}_1 = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.414)$$

Aquí se tiene $n = 1$ variable $y_1 = y$ ($i = 1$) dependiente de la variable independiente x y existe $K = 1$ restricción ($l = 1$).

Se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange: a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.382) se puede escribir para este caso,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = Q_y = \lambda_1 \left[\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} \right) \right] \quad (5.415)$$

pero de (5.413) y (5.414) se tiene que, $-\mu gy (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = -\mu g (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y'} = -\mu g \frac{yy'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \mu g \left[-\frac{y'^2}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{yy'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{yy''}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \end{array} \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_1}{\partial y'} \right) = -\frac{y'^2 y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right\} \quad (5.416)$$

resultados que al ser sustituidos en (5.415) se obtiene,

$$y'' \left(y - \frac{\lambda}{\mu g} \right) = 1 + y'^2 \quad (5.417)$$

O,

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dx}{y - \frac{\lambda}{\mu g}} \quad (5.418)$$

y puesto que $dx = \frac{dx}{dy} dy = \frac{1}{y'} dy$, entonces resulta que,

$$\frac{y'dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{y - \frac{\lambda}{\mu g}} \quad (5.419)$$

Ahora bien, al integrar (5.419) se obtiene,

$$y'^2 = c_1 \left(y - \frac{\lambda}{\mu g} \right)^2 - 1 \quad (5.420)$$

donde c_1 es una constante de integración. Al hacer ahora la sustitución,

$$y - \frac{\lambda}{\mu g} = \frac{1}{c_1^{1/2}} \operatorname{Cosh} u \quad (5.421)$$

en (5.420) se obtiene,

$$u'^2 = c_1 \quad (5.422)$$

cuya solución es,

$$u = c_1^{1/2}x + c_2, \quad c_2 = \text{constante de integración} \quad (5.423)$$

donde c_2 es otra constante de integración. Entonces, de (5.421) y (5.423) se obtiene,

$$y = \frac{1}{c_1^{1/2}} \operatorname{Cosh} \left(c_1^{1/2}x + c_2 \right) + \frac{\lambda}{\mu g} \quad (5.424)$$

Las condiciones de frontera establecen que $y(\pm a) = 0$. Al aplicarlas sobre (5.424) resulta que,

$$\text{Para } \begin{cases} y(a) = 0: & 0 = \frac{1}{c_1^{1/2}} \operatorname{Cosh} \left(c_1^{1/2}a + c_2 \right) + \frac{\lambda}{\mu g} \\ y(-a) = 0: & 0 = \frac{1}{c_1^{1/2}} \operatorname{Cosh} \left(-c_1^{1/2}a + c_2 \right) + \frac{\lambda}{\mu g} \end{cases} \quad (5.425)$$

de las cuales se puede deducir que $c_2 = 0$ ya que $a \neq 0$ y por lo tanto,

$$\lambda = -\frac{\mu g}{c_1^{1/2}} \operatorname{Cosh} \left(c_1^{1/2}a \right) \quad (5.426)$$

Por otro lado, para hallar c_1 se usa la restricción isoperimétrica (5.412). En efecto, al sustituir (5.424) en dicha restricción resulta,

$$\int_{-a}^a \left[1 + \operatorname{Senh}^2 \left(c_1^{1/2}x \right) \right]^{\frac{1}{2}} dx = \ell \Rightarrow \frac{2}{c_1^{1/2}} \operatorname{Senh} \left(c_1^{1/2}a \right) = \ell \quad (5.427)$$

que es una ecuación trascendental para c_1 .

Finalmente, de (5.424) y (5.426) resulta,

$$y = \frac{1}{c_1^{1/2}} \left[\operatorname{Cosh} \left(c_1^{1/2} x \right) - \operatorname{Cosh} \left(c_1^{1/2} a \right) \right] \quad (5.428)$$

que es una catenaria, con c_1 dada por (5.427).

A manera de resumen, las restricciones a ser consideradas y las ecuaciones de Euler-Lagrange a ser usadas en el presente texto son las siguientes:

FUNCIONALES DE UNA SOLA VARIABLE DEPENDIENTE ECUACION DE EULER

Forma estándar →	$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$
Segunda forma →	$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$
Forma integrada →	$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c, c = \text{constante}$ (para $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$)

RESTRICCIONES

$$\text{Restricciones del tipo} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0 \\ l = 1, 2, 3, \dots, K; i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{Restricciones del tipo} \rightarrow \begin{cases} \widetilde{\mathcal{D}}_l^{(d)} [y_i(x), y'_i(x); x] = \sum_{j=1}^n A_{lj} [y_i(x); x] dy_j(x) + B_l [y_i(x); x] dx = 0 \\ \quad \text{Forma de diferencial} \\ \widetilde{\mathcal{D}}_l^{(D)} [y_i(x), y'_i(x); x] = \sum_{j=1}^n A_{lj} [y_i(x); x] y'_j(x) + B_l [y_i(x); x] = 0 \\ \quad \text{Forma de derivada} \\ l = 1, 2, 3, \dots, K; i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{Restricciones del tipo isoperimétrico} \rightarrow \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{I}_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l \\ l = 1, 2, 3, \dots, K; i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

FUNCIONALES DE MULTIPLES VARIABLES DEPENDIENTES
 ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Q_i = 0 \longrightarrow \begin{cases} \text{Sin restricciones} \\ i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \\
 Q_i = 0 \longrightarrow \begin{cases} \text{Restricciones del tipo } \mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0 \\ \text{en forma implícita} \\ i = 1, 2, 3, \dots, n; l = 1, 2, 3, \dots, K \end{cases} \\
 Q_i = \sum_{l=1}^K \lambda_l \frac{\partial \mathcal{A}_l}{\partial y_i} \longrightarrow \begin{cases} \text{Restricciones del tipo} \\ \mathcal{A}_l [y_i(x); x] = 0 \text{ en forma explícita.} \\ i = 1, 2, 3, \dots, n; l = 1, 2, 3, \dots, K \end{cases} \\
 Q_i = \sum_{l=1}^K \lambda_l A_{li} \longrightarrow \begin{cases} \text{Restricciones del tipo} \\ \begin{cases} \tilde{\mathcal{D}}_l^{(d)} [y_i(x), y'_i(x); x] = 0 \\ \tilde{\mathcal{D}}_l^{(D)} [y_i(x), y'_i(x); x] = 0 \end{cases} \\ i = 1, 2, 3, \dots, n; l = 1, 2, 3, \dots, K \end{cases} \\
 Q_i = \sum_{l=1}^K \lambda_l \left[\frac{\partial \mathcal{I}_l}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_l}{\partial y'_i} \right) \right] \longrightarrow \begin{cases} \text{Restricciones del tipo} \\ \text{isoperimétrico} \\ \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{I}_l [y_i(x), y'_i(x); x] dx = \varrho_l \\ i = 1, 2, 3, \dots, n; l = 1, 2, 3, \dots, K \end{cases}
 \end{array} \right.$$

5.6 Problemas

CAPITULO 6

TRANSFORMACION DE LEGENDRE

6.1 Problemas

PARTE II

MECANICA DE LAGRANGE Y DE HAMILTON

CAPITULO 7

MECANICA LAGRANGIANA

7.1 Problemas

CAPITULO 8

MECANICA HAMILTONIANA

8.1 Problemas

CAPITULO 9

TRANSFORMACIONES CANONICAS

9.1 Problemas

CAPITULO 10

TEORIA DE HAMILTON-JACOBI

10.1 Problemas

PARTE III

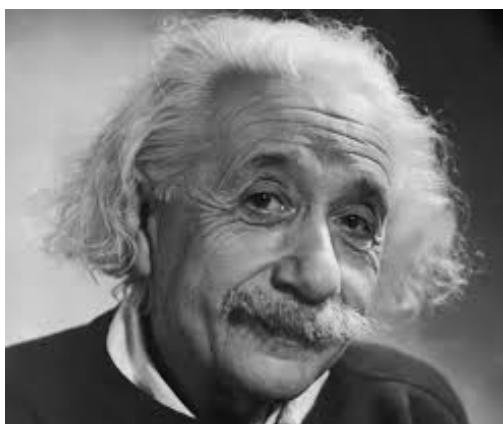
APENDICES Y BIBLIOGRAFIA



APENDICE A

BIOGRAFIAS RESUMIDAS DE CIENTIFICOS DESTACADOS EN EL PRESENTE TEXTO

A.1 ALBERT EINSTEIN 1879 - 1955



Albert Einstein 1879 - 1955

(Ulm, Alemania, 1879 - Princeton, 1955) Científico estadounidense de origen alemán. En 1880 su familia se trasladó a Munich y luego (1894-96) a Milán. Frecuentó un instituto muniqués, prosiguió sus estudios en Italia y finalmente se matriculó en la Escuela Politécnica de Zurich (1896-1901). Obtenida la ciudadanía suiza (1901), encontró un empleo en el Departamento de Patentes; aquel mismo año contrajo matrimonio.

En 1905 publicó en *Annalen der Physik* sus primeros trabajos sobre la teoría de los quanta, la de la relatividad y los movimientos brownianos, y llegó a profesor libre de la

APENDICE A. BIOGRAFIAS RESUMIDAS DE CIENTIFICOS DESTACADOS EN EL PRESENTE TEXTO

Universidad de Berna. En 1909 fue nombrado profesor adjunto de la de Zurich y en 1910 pasó a enseñar Física teórica en la Universidad alemana de Praga. Luego dio clases de esta misma disciplina en la Escuela Politécnica zuriquesa (1912). En 1913, nombrado miembro de la Academia de Prusia, se trasladó a Berlín. En 1916 se casó en segundas nupcias. Publicó entonces *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* e inició una serie de viajes a los Estados Unidos, Inglaterra, Francia, China, Japón, Palestina y España (1919-32).

En 1924 entregó a la imprenta *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* y el año siguiente recibió el premio Nobel por su teoría sobre el efecto fotoeléctrico. En 1933 abandonó la Academia de Prusia y se enfrentó valerosamente a Hitler. Iniciada la persecución nazi contra los judíos, marchó a América y enseñó en el Instituto de Estudios Superiores de Princeton (Nueva Jersey). En 1945 se retiró a la vida privada, a pesar de lo cual prosiguió intensamente su actividad científica.

Einstein es uno de los grandes genios de la humanidad. En el ámbito de las ciencias físicas llevó a cabo una revolución todavía en marcha y cuyos alcances no pueden medirse aún en toda su amplitud. En su primera formulación (teoría de la relatividad restringida) extendió a los fenómenos ópticos y electromagnéticos el principio de relatividad galileo-newtoniano, anteriormente limitado sólo al campo de la Mecánica, y afirmó la validez de las leyes de esta última tanto respecto de un sistema galileano de referencia K, como en relación con otro de referencia K' en movimiento rectilíneo y uniforme respecto de K.

Según las teorías de Einstein, la ley de la propagación de la luz en el vacío debe tener, como cualquier otra general de la naturaleza, la misma expresión ya referida, por ejemplo, a una garita ferroviaria o a un vagón de tren en movimiento rectilíneo y uniforme en relación con ésta; dicho en otros términos, la velocidad de la luz no se ajusta a la de los sistemas de referencia que se mueven en línea recta y de manera uniforme respecto del movimiento de la misma luz. En realidad, el experimento de Michelson-Morley, mil veces repetido y comprobado a partir de 1881, había demostrado la diferencia existente entre la velocidad de la luz y la de la Tierra.

La relatividad restringida ofrece la razón de tal hecho, antes inexplicable. A su vez, la invariabilidad de la velocidad de la luz lleva a la introducción, en Física, de las transformaciones de Lorentz, según las cuales la distancia temporal entre dos acontecimientos y la que separa dos puntos de un cuerpo rígido se hallan en función del movimiento del sistema de referencia, y por ello resultan distintas para K y K'. Ello nos libra, en la formulación de las leyes ópticas y electromagnéticas, de la relación con el hipotético

sistema fijo “absoluto”, rompecabezas metafísico de la Física clásica, puesto que tales leyes, como aparecen formuladas en la relatividad restringida, valen para K e igualmente para K' , lo mismo que las de la Mecánica.

El tránsito de la Física clásica a la relatividad restringida representa no sólo un progreso metodológico. Esta última, en efecto, presenta -como observa Einstein (Sobre la teoría especial y general de la relatividad)- un valor heurístico mucho mayor que el de la Física clásica, por cuanto permite incluir en la teoría, como consecuencia de ella, un notable número de fenómenos, entre los que figuran, por ejemplo, la aparente excepción en la relación de la velocidad de la luz con la de una corriente de agua en el experimento de Fizeau; el aumento de la masa de los electrones al incrementarse las velocidades de éstos, observado en los rayos catódicos y en las emanaciones del radio; la masa de los rayos cósmicos, cuarenta mil veces superior a la de la misma en reposo; el efecto Doppler; el efecto Compton; la existencia del fotón y la magnitud de su impulso, previstas por Einstein y comprobadas luego experimentalmente; la cantidad de energía requerida por las masas de los núcleos para la transmutación de los elementos; la fina estructura de las rayas del espectro, calculada por Sommerfield mediante la Mecánica relativista; la existencia de los electrones positivos, prevista por Dirac como solución a ciertas ecuaciones procedentes de la Mecánica de la relatividad; el magnetismo de los electrones, calculado por Dirac con la transformación de las ecuaciones de Schrödinger en las correspondientes de la Mecánica relativista, etc.

Una de las consecuencias de la relatividad restringida es el descubrimiento de la existencia de una energía E igual a mc^2 en toda masa m . Esta famosa y casi mágica fórmula nos dice que la masa puede transformarse en energía, y viceversa; de ahí el memorable anuncio hecho por Einstein hace cincuenta años sobre la posibilidad de la desintegración de la materia, llevada luego a cabo por Fermi.

Sin embargo, la relatividad restringida no elimina el sistema fijo absoluto del campo de la Física de la gravitación. Tal sistema, en última instancia, nace del hecho por el cual la relatividad restringida admite aún, en la formulación de las leyes de la naturaleza, la necesidad de situarse bajo el ángulo de los sistemas privilegiados K y K' ¿Qué ocurriría de ser formuladas las leyes físicas de tal suerte que valieran también para un sistema K'' en movimiento rectilíneo no uniforme, o bien uniforme pero no según una línea recta? Aquí la distinción entre campo de inercia y de gravitación deja de ser absoluta, puesto que, por ejemplo, respecto de varios individuos situados en un ascensor que caiga de acuerdo con un movimiento uniformemente acelerado, todos los objetos del interior del ascensor se hallan en un campo de inercia (quien dejara suelto entonces un pañuelo vería cómo éste se mantiene inmóvil ante sí), en tanto que para

un observador situado fuera, y en relación con el cual el aparato se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, el ascensor se comporta como un campo de gravedad.

La relatividad general es precisamente la Física que mantiene la validez de las leyes incluso respecto del sistema K'' . El postulado de ésta tiene como consecuencia inmediata la igualdad de la masa inerte y de la ponderal, que la Física clásica había de limitarse a aceptar como hecho inexplicable. Con la relatividad general, la Física alcanza el mayor grado de generalidad y, si cabe, de objetividad. ¿Qué ley natural, en efecto, es válida para sistemas de referencia privilegiados? Ninguna, en realidad. Las leyes naturales deben poder ser aplicables a cualquier sistema de referencia; es ilógico pensar, por ejemplo, que la Física no resulta admisible dentro de un ascensor que caiga con un movimiento uniformemente acelerado o en un tiovivo que gire.

La relatividad general comporta la previsión teórica de numerosos hechos; así, por ejemplo: la desviación de los rayos luminosos que se aproximan a una masa; la traslación de las rayas espectrales; la del movimiento perihélico de Mercurio, etc. La experiencia ha confirmado plenamente estas previsiones teóricas.

Durante los últimos años de su existencia, Einstein fijó los fundamentos de una tercera teoría, la del "campo unitario", que unifica en un solo sistema tanto las ecuaciones del ámbito electromagnético como las del campo de la gravedad. El desarrollo ulterior de esta teoría, dejada por el sabio como herencia, permitirá seguramente la obtención -según observa Infeld, discípulo de Einstein- no sólo de las ecuaciones de ambos campos, sino también de las correspondientes a la teoría de los quanta. Entre sus obras deben destacarse Las bases de la teoría general de la relatividad (1916); Sobre la teoría especial y general de la relatividad (1920); Geometría y experiencia (1921) y El significado de la relatividad (1945).

Tomado de la web: **Biografías y Vidas**
<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/einstein.htm>

A.2 GEORGE FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN 1826 - 1866



George Friedrich Bernhard Riemann 1826 - 1866

Matemático alemán, nacido en Breselenz (Hannover) el 17 de septiembre de 1826 y fallecido en Selesca el 20 de julio de 1866, al que se debe un gran avance en la variable compleja y en la geometría no euclídea. Fue el introductor de las superficies de Riemann y de la integral de Riemann.

Vida

Hijo de un pastor protestante, en 1840 ingresó en la escuela directamente en el tercer curso en Hannover, donde residía con su abuela. A la muerte de ésta en 1842, se trasladó al Johanneum Gymnasium en Lüneburg. Fue en esta época cuando Riemann empezó a mostrar interés por la matemáticas.

En 1846, para seguir los pasos de su padre, Riemann comenzó los estudios de filosofía y teología en la Universidad de Göttingen. Continuó su interés por las matemáticas hasta tal punto que decidió, previo consentimiento paterno, dejar los estudios que estaba realizando y centrarse en esta disciplina. Comenzó a dar clases en Göttingen con Moritz Stern y Gauss.

En la primavera de 1847 se trasladó a la Universidad de Berlín, donde tuvo como profesores a Jacobi, Steiner, Eisenstein y Dirichlet; este último se convertiría en su principal influencia. En la capital alemana abordó el uso de la variable compleja en la teoría de las funciones elípticas y formuló su teoría general de variable compleja (véase Función matemática), que sería la base de algunos de sus más importantes trabajos.

En 1849 volvió a Göttingen y su tesis doctoral, supervisada por Gauss, fue presentada dos años después. En este trabajo, que sorprendió por su originalidad y brillantez,

Riemann estudiaba la teoría de variables complejas -en particular lo que hoy llamamos superficies de Riemann-, las propiedades geométricas de las funciones analíticas, las transformaciones conformes y la conectividad de superficies.

En 1854 ofreció su disertación inaugural Acerca de las hipótesis que subyacen de la Geometría, que se convirtió en un clásico de la geometría. La influencia de esta obra en el desarrollo de las matemáticas y de la física fue enorme; en gran parte, la teoría de la relatividad se sustenta en las investigaciones de Riemann.

Publicó varios artículos, entre ellos Teoría de funciones abelianas (1957), que continuaba el trabajo de su tesis doctoral con el desarrollo de las superficies de Riemann y sus propiedades topológicas. Por fin, el 30 de Julio de 1859 Riemann sucedió a Dirichlet como catedrático de matemáticas en la Universidad de Göttingen y pocos días después fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Berlín. Desde este momento Riemann comenzó a adquirir fama mundial.

En 1862 se casó con Elisa Koch y ese mismo año tuvo que marcharse a Italia debido a una enfermedad pulmonar. Se estableció entonces en Selesca para beneficiarse del clima de la región, pero falleció cuatro años más tarde, sin haber terminado la redacción de sus memorias.

Obra

Aunque sus trabajos -publicados por H. Weber y R. Dedekind- fueron pocos, en conjunto constituyen la génesis de muchas de las ideas matemáticas que perduran hoy en día. Riemann trabajó en casi todos los campos de las matemáticas: fue un verdadero revolucionario de la geometría diferencial y del espacio n-dimensional, sobre todo en el caso particular las tres dimensiones. En una de sus primeras memorias, publicada en el Journal de Crelle en 1855, Riemann expuso sus investigaciones sobre las funciones oblicuas. Riemann sentó las bases para los métodos topológicos y sus ideas sobre la geometría contribuyeron al desarrollo de las geometrías no euclidianas. Además, en sus estudios se encuentran anticipaciones de la teoría de la relatividad. En cuanto a la física matemática, destaca su trabajo acerca de las ondas sonoras en 1860 (véase onda).

La Disertación inaugural de Riemann (1854) constituye un clásico en las matemáticas. En esta obra recuperó la cuestión de las geometrías no euclidianas al demostrar por medios analíticos que el problema de la geometría basada en postulados de Euclides (véase Geometría) estaba vinculado a la curvatura del espacio en el que uno se sitúa. Sobre una esfera, por ejemplo, el camino más corto desde un punto a otro es un arco

de círculo máximo. Por consiguiente, un círculo máximo es el equivalente de una recta para una superficie así, y sabemos que dos círculos máximos cualesquiera tienen siempre dos puntos en común; por tanto, desde un punto tomado fuera de alguno de ellos no se puede trazar un círculo máximo que le sea paralelo, con lo que el postulado del paralelismo no es válido. Esto, sin embargo, no ocurre cuando el espacio no tiene curvatura y hablamos de rectas. Beltrami (1835-1900) establecería una relación entre los trabajos de Riemann, Lobachevski y Bolyai.

En el cálculo integral, se le debe a Riemann el concepto de integral definida a partir de un punto intermedio o integral de Riemann (para más información véase Integral de una función).

En teoría de números estudió los números primos, lo que le llevó a definir la que hoy se denomina “función zeta de Riemann”:

$$f(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \dots, s = u + iv$$

Riemann conjeturó que $f(s) = 0$ si y sólo si $u = \frac{1}{2}$ para $0 < u < 1$. Nadie ha conseguido demostrar esta hipótesis, convertida en uno de los problemas más estudiados en la teoría de números y el análisis.

Tomado de la web: **La Web de las Biografías**

<http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=riemann-georg-friedrich-bernhard>

A.3 JEAN LE ROND D'ALEMBERT 1717 - 1783



Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert 1717 - 1783

Matemático, escritor y filósofo francés nacido en París el 17 de noviembre de 1717 y muerto en la misma ciudad el 29 de octubre de 1783.

Uno de los representantes de la Ilustración francesa del siglo XVIII, filósofo y matemático. Fue colaborador de Diderot y tuvo a su cargo la sección matemática de la Encyclopédie (Enciclopedistas). A él se debe el intento de describir la historia del origen y desarrollo del saber humano, así como el de clasificar las ciencias partiendo en lo fundamental de los principios de Francis Bacon.

En filosofía, D'Alembert era partidario del sensualismo y enemigo de la teoría cartesiana de las ideas innatas. Sin embargo, su sensualismo no era consecuentemente materialista. Según D'Alembert, el pensamiento no es una propiedad de la materia, de ésta no depende la existencia del alma. D'Alembert mantenía, pues, una posición dualista. También negaba la posibilidad de llegar al conocimiento de las cosas. En contraposición a otros enciclopedistas franceses, afirmaba que la moralidad no era condicionada por el medio social. Reconocía a Dios como sustancia formadora. El sensualismo inconsiguiente de D'Alembert fue criticado por Diderot, especialmente en su obra «El sueño de D'Alembert». El trabajo filosófico más importante de D'Alembert es: «Elementos de filosofía» (1759).

Síntesis biográfica

Fue abandonado en una iglesia por sus padres, al nacer (el general Destouches, que colaboró materialmente en su educación con una mensualidad de 1.200 francos, y Claudine Alexandrine de Guérin marquesa de Tencin, que había abandonado la vida monacal, huyendo de la misma hacia París, donde llevó una vida conocida por sus muchos amores) siendo adoptado por un matrimonio de vidrieros de apellido Alembert, que lo bautizaron con el nombre de la capilla en la que lo dejaron sus padres.

Estudió leyes y teología, pero sobre todo fue un destacado matemático, que ingresó a los 24 años en la Academia de Ciencias de Francia, por sus inéditos escritos sobre cálculo integral, siendo invitado por su gran capacidad científica por Federico II de Prusia y Catalina la Grande, aunque nunca asistió.

D'Alembert también estudió hidrodinámica, mecánica de los cuerpos, problemas de Astronomía y circulación atmosférica.

Rechazó un gran número de ofertas en su vida. Rechazó una oferta de Frederick II para ir a Prusia como presidente de la Academia de Berlín. También rechazó una invitación de Catherine II para ir a Rusia como tutor de su hijo.

En 1747 comenzó la publicación de la Enciclopedia, junto con Diderot, escribiendo artículos sobre matemáticas y literatura, además del "Discurso preliminar". También participaron de la enciclopedia filósofos como Voltaire, Montesquieu, Jean-Jacques Rousseau, Adam Smith, entre otros. En 1772 se le nombró secretario perpetuo de la Academia Francesa, escribiendo entonces los Elogios sobre los académicos fallecidos entre 1700 y 1770. Por todo ello d'Alembert representó un nuevo tipo de intelectual capaz de compaginar la pertenencia a la nueva red internacional de instituciones científicas (por otra parte subordinadas financieramente a los Estados-nación) y un ensayismo independiente y políticamente comprometido.

De ideas iluministas, serio, modesto, estudioso, agradable, desconfiado de todos, pero particularmente de nadie, excesivamente independiente, tuvieron influencia en su pensamiento las ideas de Locke, Bacon, Descartes, Newton, y sobre todo de Voltaire, compartiendo con Diderot sus ideas sobre el escepticismo en materia de conocimiento, y combinando las ideas empiristas con las racionalistas, oponiéndose a las ideas innatas de Descartes. En materia religiosa propuso un catecismo laico, orientado hacia lo que reportara utilidad a la sociedad, erradicando ideas metafísicas y trascendentales.

Sus éxitos académicos no tuvieron correlato en su vida amorosa, donde se le conoció un único amor no correspondido por Mlle Lepinasse

En octubre de 1783, falleció en París, siendo Condorcet, el encargado de realizar el discurso de despedida de sus restos.

Contribuciones a la Matemática

Fue uno de los primeros en comprender la importancia de las funciones y en este artículo definió la derivada de una función como el límite de los cuocientes de los incrementos.

D'Alembert fue el que más se acercó a una definición precisa de límite y de derivada. Más en realidad toda duda se desvanecía ante el éxito de sus aplicaciones, de manera que el cálculo infinitesimal, más que una rama de la matemática, se convertía en una especie de doncella de la ciencia natural, en un auxiliar muy valioso, pero auxiliar al fin de las varias ramas de la física.

Su obra maestra fue el tratado de dinámica, donde enunció el teorema que lleva su nombre (Principio de d'Alembert). El Teorema Fundamental del Álgebra recibe en algunos países de Europa el nombre de teorema de d'Alembert - Gauss dado que d'Alembert fue el primero en dar una prueba casi completa sobre dicho teorema.

Contribuciones a la Física

Ayudó a resolver la controversia en física sobre la conservación de la energía cinética mejorando la definición de Newton de la fuerza en su "Tratado de Dinámica" (1742), que articula el principio de mecánica de D'Alembert. En el año 1744 aplicó los resultados obtenidos en el equilibrio y movimientos de fluidos. Fue pionero en el estudio de ecuaciones diferenciales y pionero en el uso de ellas en la física.

Publicaciones

Entre 1743 y 1754 publicó sus obras científicas más importantes. (1743), Tratado de dinámica en el que expuso la mecánica de los cuerpos rígidos basándose en el principio que lleva su nombre y que establece la existencia de equilibrio entre las acciones y las reacciones internas de un sistema rígido. La aplicación de dicho principio a los fluidos dio pie a su Tratado del equilibrio y movimiento de los fluidos (1744), desarrolló aquellos aspectos de la cuestión que hacían referencia al movimiento del aire en la *Théorie générale des vents* (1745); en este último trabajo se enfrentó con la demostración del llamado teorema fundamental del álgebra, para el cual halló una demostración parcial. (1747) aplicó el cálculo diferencial al análisis del problema físico de la cuerda vibrante, lo cual le condujo a la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales para la que encontró una solución. En las Investigaciones sobre la precesión de los equinoccios (1749) estableció las ecuaciones del movimiento de la Tierra en torno a su centro de gravedad y abordó el problema de los tres cuerpos (relaciones entre las fuerzas y los movimientos correspondientes del Sol, la Tierra y la Luna).

Tomado de la web: **EcuRed**

http://www.ecured.cu/Jean_Le_Rond_D'_Alembert

A.4 KARL GUSTAV JACOB JACOBI 1804 - 1851



Karl Gustav Jacob Jacobi 1804 - 1851

Matemático alemán. Se conoce por sus iniciales C.G. para distinguirlo de su hermano, Moritz Hermann Jacobi. Contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. También destacó en su labor pedagógica, por la que se le ha considerado el profesor más estimulante de su tiempo.

Síntesis biográfica

Jacobi nació en Potsdam en 1804 en el seno de una familia judía en Alemania. Su padre era un próspero banquero y su hermano mayor, Moritz Hermann Jacobi, llegaría a ser un físico eminente.

Infancia y educación

Un tío materno se encargó de su educación con éxito, pues en 1817, en cuanto entró en el Gymnasium a la edad de 11 años, le situaron en el último curso. Sin embargo, en la Universidad de Berlín la edad mínima de acceso era de 16 años, por lo que su ingreso tuvo que esperar hasta 1821. Durante los años en los que permaneció en el Gymnasium destacó también en griego, latín e historia. Para cuando finalmente empezó sus estudios universitarios, ya había leído y asimilado los trabajos de eminentes matemáticos como Leonhard Euler y Joseph Louis Lagrange, e incluso había comenzado a investigar una forma de resolver ecuaciones quínticas, por lo que el nivel de las clases le pareció bajo y siguió estudiando por su cuenta fuera de las aulas. En 1824, a pesar de ser judío, se le ofreció una plaza como profesor en una prestigiosa escuela de enseñanza secundaria de Berlín.

Labor como Matemático

Convertido al cristianismo, tuvo oportunidad de acceder a un puesto de profesor en la Universidad de Königsberg. Destacadísimo pedagogo, influyó en numerosas generaciones posteriores de matemáticos alemanes. Sus trabajos más relevantes se produjeron en el campo del álgebra, en el que introdujo y desarrolló el concepto de determinante, aplicándolo así mismo al estudio de las funciones de variables múltiples. Entre 1826 y 1827 estableció, independientemente del noruego Niels Henrik Abel, los principios fundamentales de la teoría de las funciones elípticas. En el ámbito de la teoría de números, demostró el teorema de Bachet sobre el total de las descomposiciones posibles de un entero, y en el de la mecánica física, trató con profundidad y rigor el problema de los tres cuerpos. Su obra más notable es sobre la formación y propiedades de los determinantes (1841).

Muerte

Muere el 18 de febrero de 1851 en Berlín, Alemania.

Tomado de la web: **EcuRed**
http://www.ecured.cu/Carl_Gustav_Jakob_Jacobi

A.5 RENE DESCARTES 1596 - 1650



René Descartes 1596 - 1650

Filósofo y científico francés, considerado “padre de la filosofía moderna”, Descartes (también conocido con el nombre latinizado de Renatus Cartesius) es un pensador que

puso su vida al servicio de una noble causa: la consecución de la verdad. Genial innovador de la filosofía, fue también el primero en aplicar las matemáticas a las ciencias físicas, y el iniciador de la concepción mecanicista de la naturaleza. Su doctrina tuvo tal capacidad para espolear a los espíritus de su época, que, de una u otra forma, las importantes corrientes posteriores han partido de él.

Vida y obra

Perteneciente a una noble familia, nació en La Haye (Turena). A los ocho años entró a la escuela jesuita de La Flèche, una de las más famosas de Europa en aquella época, donde permaneció hasta la edad de 16 años. Luego estudió Derecho en Poitiers hasta el año 1617. Fueron estos años de su juventud una etapa marcada por la disipación y la incertidumbre, sin que nunca llegara a apagarse en él la inquietud por conocer. Con afán de aventura se enroló, primero, en el ejército protestante de Mauricio de Nassau, príncipe de Orange, y luego en el ejército católico del Duque de Baviera. En 1619, estando acampados en Neuburg, en espera de que amainara la tormenta para entrar en combate, y entregado Descartes a sus reflexiones, vivió una noche de entusiasmo, de sueños exaltantes y reveladores, en los cuales tomaron forma las primeras intuiciones de una nueva lógica (el *inventum mirabile*), capaz de fundar una ciencia universal. Agradecido por aquel don, prometió peregrinar a los pies de la Virgen de Loreto, y cumplió su promesa al viajar a Italia tres años después. En 1621 ya había abandonado la vida militar. Vendió sus propiedades, y del dinero que obtuvo vivió toda su vida, sin penurias, pero austera mente. El encuentro con el cardenal Bérulle, en 1627, reforzó su decisión de consagrarse a la investigación filosófica. Buscando la paz y la libertad necesarias que requería su trabajo científico y de reflexión, se trasladó a Holanda. Allí conoció la fama, pero también las dificultades, pues las controversias contra sus teorías le venían tanto de parte de los católicos como de los protestantes. En 1649, aceptando una invitación de la reina Cristina, pasó a vivir a Estocolmo. En la corte sueca prosiguió su intenso trabajo, el cual, unido al riguroso clima de Estocolmo, minó su salud, hasta acarrearle la muerte.

Desde el principio de su filosofar, Descartes abandonó la filosofía de corte escolástico que había aprendido en La Flèche, -la cual, según él, poco tenía de utilidad-, para entregarse a la búsqueda de un saber fundado en el modelo del conocimiento matemático y, cada vez con mayor intensidad, la ambición de efectuar una síntesis que, en cuanto alternativa a la escolástica, constituyese un marco sistemático a la vez comprensivo y definitivo. Hubo dos momentos decisivos en este camino: uno fue el encuentro, en 1618-19, con I. Beeckmann, matemático y físico holandés de formación galileana, a raíz del cual abandonó también su tentación de adentrarse por el camino

del ocultismo de inspiración renacentista, al cual mirará desde ese momento como a otro enemigo que combatir; el segundo fue en los años 1628-29, cuando halló el fundamento metafísico que le permitió la fundamentación de la física en la metafísica a través de la deducción a priori de las leyes fundamentales de la naturaleza a partir de un atributo de Dios, como es la inmutabilidad de la acción divina. A estos años se remonta la genial contribución matemática de Descartes, con la elaboración de la geometría analítica, la cual, al permitir la reducción de los problemas geométricos a ecuaciones algebraicas, implicaba una gran universalización y, en consecuencia, una gran simplificación de los problemas.

Sus obras principales son: *Regulae ad directionem ingenii* (1628), *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637), *Meditationes de prima philosophia* (1641), *Principia philosophiae* (1644), y *Les passions de l'âme* (1649).

Tomado de la web: **La Web de las Biografías**

<http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=descartes-rene>

A.6 SIR ISAAC NEWTON 1642 - 1727



Isaac Newton 1642 - 1727

Matemático y físico británico.

"Lo que sabemos es una gota de agua; lo que ignoramos es el océano" Isaac Newton

Nació el 25 de diciembre de 1642 (según el calendario juliano), 4 de enero 1643 (calendario gregoriano), en Woolsthorpe, una aldea en el condado de Lincolnshire, Inglaterra.

Hijo póstumo; nació prematuramente tres meses después de la muerte de su padre, un próspero granjero analfabeto también llamado Isaac Newton.

Su pequeño tamaño y delicado estado hacen temer sobre su suerte aunque finalmente sobrevive. Su madre Hannah Ayscough, se volvió a casar cuando Newton tenía tres años, yéndose a vivir con su nuevo marido, el reverendo Bernabé Smith, dejando al pequeño Isaac al cuidado de su abuela, Margery Ayscough. Su progenitora tuvo tres hijos en este segundo matrimonio.

Cuando tenía 14 años, su padrastro (al que odiaba) murió y Newton regresó a Woolsthorpe.

Desde joven apareció como "tranquilo, silencioso y reflexivo" aunque lleno de imaginación. Se entretenía construyendo artílugos: un molino de viento, un reloj de agua, un carricoche que andaba mediante una manivela accionada por el propio conductor, etc.

Su madre quería que se convirtiera en agricultor, pero Newton aborrecía la agricultura.

Desde los 12 años hasta que cumplió los 17, cursó estudios en la escuela primaria en Grantham. En 1661, ingresó en el Trinity College de la Universidad de Cambridge, donde estudió matemáticas bajo la dirección del matemático Isaac Barrow.

Recibió su título de bachiller en 1665 y le nombraron becario en Trinity College en 1667 (entre 1665 y 1667 la Universidad de Cambridge se cerró por la peste y Newton regresó a Woolsthorpe). Desde 1668 fue profesor. Newton se dedicó al estudio e investigación de los últimos avances en matemáticas y a la filosofía natural.

Realizó descubrimientos fundamentales que le fueron de gran utilidad en su carrera científica. Consiguió en el campo de la matemáticas sus mayores logros. Generalizó los métodos que se habían utilizado para trazar líneas tangentes a curvas y para calcular el área encerrada bajo una curva, descubriendo que los dos procedimientos eran operaciones inversas. Uniéndolos en lo que llamó el método de las fluxiones, desarrolló en

1666 lo que se conoce hoy como cálculo, un método nuevo y poderoso que situó a las matemáticas modernas por encima del nivel de la geometría griega. En 1675 Leibniz llegó de forma independiente al mismo método, al que llamó cálculo diferencial; su publicación hizo que Leibniz recibiera los elogios por el desarrollo de ese método, hasta 1704, año en que Newton publicó una exposición detallada del método de fluxiones. En 1669 obtuvo la cátedra Lucasiana de matemáticas en la Universidad de Cambridge.

La óptica también fue del interés de Newton. Llegó a la conclusión de que la luz del Sol es una mezcla heterogénea de rayos diferentes -representando cada uno de ellos un color distinto- y que las reflexiones y refracciones hacen que los colores aparezcan al separar la mezcla en sus componentes. Demostró su teoría de los colores haciendo pasar un rayo de luz solar a través de un prisma, el cual dividió el rayo de luz en colores independientes. En el año 1672 envió una breve exposición de su teoría de los colores a la Sociedad Real de Londres.

Tras la muerte de su madre en 1678, Newton entró seis años de reclusión intelectual donde sólo se comunica con las notas breves. En 1704, publicó su obra Óptica, en donde explicaba detalladamente su teoría.

En 1684 recibió la visita de Edmund Halley, un astrónomo y matemático con el que discutió el problema del movimiento orbital. Durante los dos años y medio siguientes, estableció la ciencia moderna de la dinámica formulando las tres leyes del movimiento. Aplicó estas leyes a las leyes de Kepler sobre movimiento orbital y dedujo la ley de la gravitación universal. Publicó su teoría en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural, 1687), que marcó un punto de inflexión en la historia de la ciencia y que se consideró como la obra más influyente en la física. Tardó dos años en escribirlo siendo la culminación de más de veinte años de pensamiento. Newton sentó las bases de nuestra era científica. Sus leyes del movimiento y la teoría de la gravedad sustentan gran parte de la física moderna y la ingeniería.

En 1687 apoyó la resistencia de Cambridge contra los esfuerzos del rey Jacobo II de Inglaterra para convertir la universidad en una institución católica. Tras la Gloriosa Revolución de 1688, la universidad lo eligió como uno de sus representantes en una convocatoria especial del Parlamento británico. Ese mismo año Newton conoce al filósofo John Locke, entre los dos dedican bastantes horas a la discusión de temas teológicos, en especial el de la Trinidad, Newton canaliza sus esfuerzos en los problemas de la cronología Bíblica. En 1693 Newton mostró síntomas de una severa enfermedad emocional. Aunque recuperó la salud, su periodo creativo había llegado a su fin.

Fue nombrado inspector y más tarde director de la Casa de la Moneda en Londres, donde vivió hasta 1696; durante su mandato se cambió la moneda británica del patrón plata, al patrón oro. En ese año participa en un desafío matemático propuesto por Jacob Bernoulli, su contendor era Leibniz el cual no logra superar en prontitud las soluciones presentadas por él. Perteneciente a la joven generación de Fellows de la Royal Society, en 1703 fue elegido su presidente, cargo que ocupó hasta el final de su vida. Además de su interés por la ciencia, también se sintió atraído por el estudio de la alquimia, el misticismo y la teología.

Newton además tuvo fama por su mal carácter y conflictos con otras personas, en particular con Robert Hooke y Gottfried Leibniz.

Sus años de madurez y vejez transcurrieron en su residencia en Cranbury Park, cerca de Winchester, al cuidado de una sobrina, Catherine Barton hija de una hermanastra y casada con John Conduit, que se convertiría en su más ferviente apologista.

Tras un brusco empeoramiento de su afección renal, Newton falleció en Londres mientras dormía, el 20 de marzo 1727 (calendario juliano), 31 de marzo de 1727 (calendario gregoriano), siendo enterrado en la Abadía de Westminster, siendo el primer científico en recibir este honor. Voltaire pudo haber estado presente en su funeral.

Algunos biógrafos corrigen que Isaac Newton murió virgen. Su evidente misoginia, unida a un puritanismo extremo, le impedía acudir a los burdeles. Dejó una cuantiosa colección de manuscritos. Los investigadores descubrieron miles de folios conteniendo estudios de alquimia, comentarios de textos bíblicos, así como cálculos herméticos oscuros e ininteligibles. Su pelo fue examinado en 1979 y se encontró mercurio, probablemente como resultado de sus búsquedas alquímicas. El envenenamiento por mercurio podría explicar la excéntrica conducta de Newton durante la vejez.

Obras

- De analysi per aequationes numero terminorum infinitas (1669)
- Method of Fluxions (1671)
- Of Natures Obvious Laws & Processes in Vegetation (1671–75)
- De motu corporum in gyrum (1684)
- Philosophiae naturalis principia mathematica (1687)
- Opticks (1704)
- Reports as Master of the Mint (1701–25)
- Arithmetica universalis (1707)

Póstumas

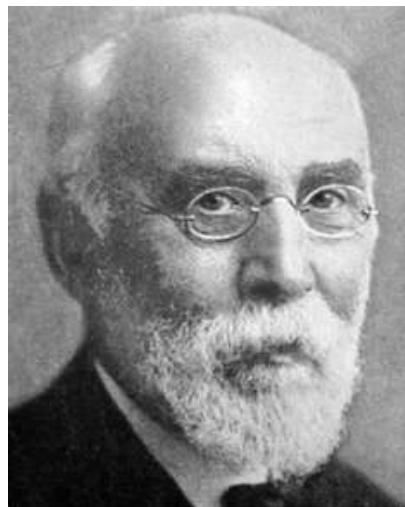
The System of the World, Optical Lectures, The Chronology of Ancient Kingdoms, and De mundi systemate (1728)

Observations on Daniel and The Apocalypse of St. John (1733), An Historical Account of Two Notable Corruptions of Scripture (1754)

Tomado de la web: **Busca Biografías**

<http://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/2182/Isaac%20Newton>

A.7 HENDRIK ANTOON LORENTZ 1853 - 1928



Hendrik Antoon Lorentz 1853 - 1928

(Arnhem, 1853 - Haarlem, 1928) Físico holandés. Estudió en la Universidad de Leyden. En 1875 publicó en holandés un primer trabajo sobre la reflexión y la refracción de la luz en los metales y otras investigaciones suyas de física teórica, aparecidas en Archives Néerlandaises. Tales estudios le valieron en 1878 la cátedra de física matemática de la mencionada universidad.

Tras largos años de experimentos e investigaciones publicó en 1892 la famosa memoria La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. En tal obra, y como complemento a los estudios de Fresnel y Maxwell, afirma que los fenómenos de la electricidad son debidos a movimientos de partículas elementales eléctricas, por él denominadas "electrones", término creado anteriormente por George Johnstone Stoney (1826-1911).

Hendrik Lorentz descubrió que si en lugar de las transformaciones de Galileo se utilizan otras especiales (llamadas luego por Einstein, en su honor, "transformaciones de Lorentz"), las ecuaciones de Maxwell referentes a la propagación de la luz resultan invariables, con lo que no debe acudirse al éter como sistema de referencia. Sin embargo, las transformaciones de Lorentz hacen variables las ecuaciones de la mecánica, lo cual parecía entonces absurdo. Einstein, empero, demostró que tales transformaciones pueden aplicarse también a estas ecuaciones; ello contribuyó a la formulación de la teoría especial de la relatividad. Hasta cierto punto, pues, cabe considerar precursor de ésta a Lorentz.

En su teoría, la materia aparece como un complejo de átomos formados por electrones negativos (poco después, en efecto, se afirmó que el átomo está integrado por electrones de tal signo que recorren órbitas elípticas en torno al núcleo). Con ello Lorentz, invertía la teoría de Thomson: para éste, la electricidad se explica mediante la materia; Lorentz, en cambio, fundamenta en aquélla la explicación de ésta. En 1895 publicó *Ensayo de una teoría sobre los fenómenos eléctricos y ópticos en los cuerpos en movimiento*, texto que señala una etapa importante en las investigaciones del gran científico sobre la electricidad y la óptica. Los resultados de tales estudios le valieron en 1902 el Premio Nobel, que se le concedió al mismo tiempo que a Zeeman, por haber previsto el fenómeno que éste comprobó experimentalmente y que, a causa de ello, fue denominado "efecto Zeeman".

Recibió además otros galardones y honores, y vio instituida para él la Fundación Lorentz, destinada a promover las investigaciones de física teórica. En 1907 publicó en Leipzig diversas memorias reunidas bajo el título *Ensayos de física teórica* (*Abhandlungen über theoretische Physik*). En 1909 apareció su famoso libro *Teoría de los electrones* (*Theory of electrons*).

En 1919 y 1920 Lorentz dio a la luz los cinco volúmenes en los cuales figuran sus lecciones de física teórica de la Universidad de Leyden. Durante el período 1883-1922 publicó, además, un tratado de análisis matemático y *Fundamentos de ciencias naturales*. En 1923 fue nombrado director de las investigaciones del Instituto Teyler, en Haarlem, ciudad en la cual falleció cinco años después. Lorentz era una persona modesta y afable; poseía el don de la claridad, y hablaba corrientemente el inglés, el francés y el alemán.

Tomado de la web: **Biografías y Vidas**
<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/lorentz.htm>

A.8 LEONHARD EULER 1707 - 1783



Leonhard Euler 1707 - 1783

(Basilea, Suiza, 1707 - San Petersburgo, 1783) Matemático suizo. Leonhard Euler fue un matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar.

Euler nació en Basilea en 1707 y estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli, licenciándose a los 16 años. En 1727, por invitación de la emperatriz de Rusia Catalina I, fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Fue nombrado catedrático de física en 1730 y de matemáticas en 1733.

En 1741 fue profesor de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín a petición del rey de Prusia, Federico el Grande. Euler regresó a San Petersburgo en 1766, donde permaneció hasta su muerte.

Aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de cumplir 30 años y por una ceguera casi total al final de su vida, Euler produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas.

En su Introducción al análisis de los infinitos (1748), Euler realizó el primer tratamiento analítico completo del álgebra, la teoría de ecuaciones, la trigonometría y la geometría analítica. En esta obra trató el desarrollo de series de funciones y formuló la regla por la que sólo las series convergentes infinitas pueden ser evaluadas adecuadamente.

También abordó las superficies tridimensionales y demostró que las secciones cónicas se representan mediante la ecuación general de segundo grado en dos dimensiones. Otras obras trataban del cálculo (**incluido el cálculo de variaciones**), la teoría de números, números imaginarios y álgebra determinada e indeterminada.

Euler, aunque principalmente era matemático, realizó también aportaciones a la astronomía, la mecánica, la óptica y la acústica. Entre sus obras se encuentran *Instituciones del cálculo diferencial* (1755), *Instituciones del cálculo integral* (1768-1770) e *Introducción al álgebra* (1770).

Euler tenía una memoria prodigiosa; recordaba las potencias, hasta la sexta, de los 100 primeros números primos, y la Eneida entera. Realizaba cálculos mentalmente que otros matemáticos realizaban con dificultad sobre el papel.

La productividad matemática de Euler fue extraordinaria. Nos encontramos su nombre en todas las ramas de las matemáticas: Hay fórmulas de Euler, polinomios de Euler, constantes de Euler, integrales eulerianas y líneas de Euler. A pesar de todo esto se casó y tuvo trece hijos, estando siempre atento al bienestar de familia; educó a sus hijos y nietos.

Murió el 7 de septiembre de 1783.

Tomado de la web: **AstroMía**
<http://www.astromia.com/biografias/euler.htm>

A.9 JOHANN FRIEDRICH PFAFF 1765 - 1825



Johann Friedrich Pfaff 1765 - 1825

(Stuttgart, Germany, 22 de diciembre de 1765; Halle, Germany, 21 de abril de 1825) Pfaff provenía de una distinguida familia de funcionarios de Wurttemberg. Su padre, Burkhard Pfaff, fue jefe edil financiero y su madre era la única hija de un miembro del consistorio y del erario público; Johann Friedrich fue el segundo de sus siete hijos.

El sexto hijo, Christoph Heinrich (1773-1852), hizo el trabajo de considerable mérito en la química, la medicina y la farmacia. También investigó la "electricidad animal" con Volta, Humboldt, y otros. El hermano menor de Pfaff, Johann Wilhelm Andreas (1774-1835), se distinguió en varias áreas de la ciencia, especialmente en matemáticas, y se convirtió en profesor de matemáticas en las universidades de Würzburg y Erlangen; pero los rápidos cambios en sus intereses científicos le impidieron alcanzar la importancia de Johann Friedrich.

Como hijo de una familia al servicio del gobierno de Württemberg, Pfaff fue a la Hohe Karlsschule en Stuttgart a la edad de nueve años. Esta escuela, en la que fue sujeto a una disciplina militar dura, sirve principalmente para entrenar funcionarios gubernamentales de Württemberg y oficiales superiores. Pfaff completó sus estudios de derecho allí en el otoño de 1785.

Sobre la base de los conocimientos matemáticos que adquirió por él mismo, Pfaff pronto leyó "Euler's Introductio in analysin infinitorum". En el otoño de 1785, a instancias de Karl Eugen (duque de Wurttemberg), comenzó un viaje para aumentar sus conocimientos científicos. Permaneció en la Universidad de Göttingen durante unos dos años, estudiando matemáticas con AG Kaestner y física con GC Lichtenberg. En el verano de 1787 viajó a Berlín, con el fin de mejorar su habilidad en la astronomía práctica con JE Bode. Estando en Berlín, por recomendación de Lichtenberg, Pfaff fue admitido en el círculo de seguidores de la Ilustración en torno Friedrich Nicolai. En la primavera de 1788 viajó a Viena pasando por Halle, Jena, Helmstedt, Gotha, Dresde y Praga.

Por recomendación de Lichtenberg, Pfaff fue nombrado catedrático de matemáticas en la Universidad de Helmstedt como un reemplazo de Klügel, que había sido llamado a Halle. Pfaff asumió el cargo mal pagado, con la aprobación del duque de Württemberg.

Al principio Pfaff dirige toda su atención a la enseñanza, con un éxito evidente: el número de estudiantes de matemáticas creció considerablemente. Gauss, después

de completar sus estudios en Gotinga (1795-1798), asistió a las conferencias de Pfaff y en 1798 vivió en la casa del mismo. Pfaff recomienda la tesis doctoral de Gauss y, cuando era necesario, le ayudó en gran medida. Gauss siempre conservó un recuerdo agradable de Pfaff, tanto como profesor y como hombre.

Mientras estuvo en Helmstedt, Pfaff ayudó a los estudiantes cuyos talentos reconoció. Por ejemplo, él era un partidario de Humboldt tras su visita a Helmstedt y lo recomienda a los profesores en Gotinga. Durante este periodo también formó una amistad duradera con el historiador G. G. Bredow. Sus planes para editar todos los fragmentos de Pappus de Alejandría no progresó más de una edición parcial (Libro 4 de la colección), realizado sólo por Bredow.

En 1803 se casó con Caroline Pfaff Brand, un prima materna. Su primer hijo murió joven; el segundo, Carl, que editó una parte de la correspondencia de su padre, se convirtió en un historiador, pero su carrera fue abreviada por la enfermedad.

Una seria amenaza para la carrera académica de Pfaff surgió al final del siglo XVIII, cuando se discutieron los planes para el cierre de la Universidad de Helmstedt. Esta medida económica se pospuso - en no poca medida como resultado del interesante ensayo de Pfaff "Über die Vorteile, welche eine Universität einem Lande gewahrt" (Habelliins Staatsarchiv (1796), no. 2) - pero en 1810 la universidad fue finalmente cerrada. Los miembros de la facultad fueron trasladados a Göttingen, Halle y Breslau. Pfaff fue a Halle, a petición propia, de nuevo como profesor de matemáticas. Tras la muerte de Klügel en 1812 también se hizo cargo de la dirección del observatorio allí mismo.

Los primeros trabajos de Pfaff fueron fuertemente marcados por la influencia de Euler. En su "Versuch einer neuen Summations-methode" (1788) empleó series divergentes en su tratamiento de las expansiones de Fourier.

Como amigo de K. F. Hindenburg, el líder de la escuela combinatoria alemana, Pfaff preparó una serie de artículos entre 1794 y 1800 para Archiv der reinen und angewandten Mathematik y Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, que fueron editados por Hindenburg. Los artículos reflejan constantemente la forma de pensamiento y expresión de la escuela de Hindenburg, con la única excepción de "wichtigen Análisis einer Aufgabe des Herrn La Grange" (1794), que pretendía liberar a la expansión de Taylor (con el resto en la forma de Lagrange) de la tradición de incluirla en la teoría de combinaciones y en lugar de presentarla como una componente principal de análisis.

En 1797 Pfaff publicó en Helmstedt el primer y único volumen de un tratado introductorio sobre análisis escrito en el espíritu de Euler: "Disquisitiones analytiae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes". En 1810 participó en la solución de un problema con Gauss referente a la elipse de mayor área que puede ser inscrita en un cuadrilátero dado.

Pfaff presentó su más importante logro matemático, la teoría de las formas de Pfaff, en "Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, necnon aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quocunque variables, complete integrandi", que presentó para ser impresa en la Abhandlungen de la Academia de Berlín (1814-1815) recibiendo una opinión muy favorable de Gauss, la obra no llegó a ser ampliamente conocida. Su importancia no fue apreciada hasta 1827, cuando apareció en un artículo de Jacobi, "Über Pfaff's Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integrieren" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 2 347 ff.).

El "Método" de Pfaff constituyó el punto de partida de una teoría básica de la integración de las ecuaciones diferenciales parciales que, a través de la obra de Jacobi, Lie, y otros, se ha convertido en el moderno cálculo de Cartan de las formas diferenciales extremas.

Tomado de la web: [encyclopedia.com](http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903390.html)
<http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830903390.html>

A.10 DANIEL BERNOULLI 1700 - 1782



Daniel Bernoulli 1700 - 1782

Daniel Bernoulli (1700-1782), fue un matemático, estadístico, físico y médico suizo, nacido en Groningen (Países Bajos), el 29 de enero de 1700. Era hijo del matemático Johann Bernoulli.

Daniel pasó los primeros 5 años de su vida en Groninga donde su padre Johann trabajaba como catedrático. Fue cuando la familia regresó a Basilea que empezaron a hacerse notables sus dotes para las Ciencias Matemáticas.

El padre, aunque quería que fuera comerciante, le enseñó a desentrañar los misterios del cálculo y le dio el ejemplo de su labor como profesor de matemática y física experimental que le habían ganado popularidad en toda Europa. El afecto hacia la investigación mecánico-matemática lo desarrolló todavía más con la ayuda del hermano mayor Nicolaus que se había decidido también por las Ciencias Matemáticas.

A los 16 años Daniel era Magíster en Filosofía y dominaba varias lenguas. Llegaba el momento de escoger una de las tres carreras universitarias existentes en la época. Nicolaus había escogido la carrera de Derecho, pero Daniel se sintió más atraído por la de Medicina. Antes de recibir su licencia para ejercer la Medicina en la Universidad de Basilea, se dirigió a la Universidad de Heidelberg, la más antigua de la parte germana, donde profundizó en la teoría; y también a Estrasburgo, donde realizó prácticas. Terminó en 1721 con una tesis sobre la respiración donde asumió el enfoque mecanicista que predominaba en la época y que estaba más cerca de sus inclinaciones intelectuales.

Los dos años siguientes a la terminación de su carrera de Medicina los pasa Daniel en Basilea. Según escribiera más tarde en su Autobiografía, el estudio serio y profundo de las Ciencias Matemáticas lo comenzó en Basilea entre los años 1721 y 1723. Allí se presenta a los concursos de las cátedras de Anatomía y de Lógica. En 1723 gana la competición anual que patrocinaba la Academia de las Ciencias francesa y a su vez Christian Goldbach, matemático prusiano con el que mantenía correspondencia sobre las lecciones aprendidas con su padre, impresionado por el nivel de Bernoulli, decide publicar las cartas escritas por Daniel.

En 1724, las cartas publicadas habían llegado a todo el mundo y Catalina I de Rusia le envió una carta proponiéndole ser profesor en la recién fundada Academia de Ciencias de San Petersburgo, por mediación de su padre, logro que se ampliará la oferta a los dos hermanos: Nicolaus y Daniel.

En la Academia Daniel trabajó en la cátedra de Física. Como anécdota decir que ese tiempo compartió piso con Euler, que había llegado a la Academia recomendado por el propio Daniel y al que ya conocía por ser un aventajado alumno de su padre en la Universidad de Basilea. Daniel I estuvo ocho años en San Petersburgo y su labor fue muy reconocida.

En el año 1732 vuelve a Basilea donde había ganado el puesto de profesor en los departamentos de botánica y anatomía. En 1738 publicó su obra 'Hidrodinámica', en la que expone lo que más tarde sería conocido como el Principio de Bernoulli. Daniel también hizo importantes contribuciones a la teoría de probabilidades.

Es notorio que mantuvo una mala relación con su padre a partir de 1734, año en el que ambos compartieron el premio anual de la Academia de Ciencias de París, Johann lo llegó a expulsar de su casa y también publicó un libro Hidráulica en el que trató de atribuirse los descubrimientos de su hijo en esta materia.

En 1750 la Universidad de Basilea le concedió, sin necesidad de concurso, la cátedra que había ocupado su padre. Publicó 86 trabajos sobre los más variados temas de Matemáticas Mixtas y ganó 10 Premios de la Academia de Ciencias de París sobre temas de importancia estatal, siendo sólo superado por el líder de todos los matemáticos de la época, Leonhard Euler que ganó 13 Premios.

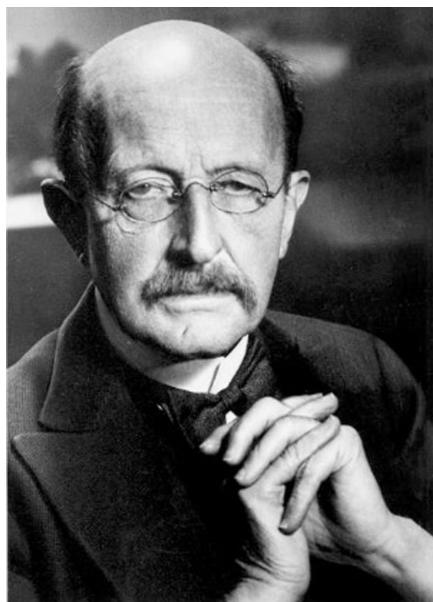
Al final de sus días ordenó construir una pensión para refugio de estudiantes sin recursos.

Cuando en 1782 muere de un paro cardiorrespiratorio, moría uno de los primeros matemáticos aplicados y uno de los últimos verdaderos hombres de ciencia ilustrados.

Tomado de la web:

http://danbernoulli.blogspot.com/2009/06/biografia_6081.html

A.11 MAX KARL ERNST LUDWIG PLANCK 1858 - 1947



Max Karl Ernst Ludwig Planck 1858 - 1947

(Ernst Karl Ludwig Planck; Kiel, actual Alemania, 1858-Gotinga, Alemania, 1947) Físico alemán. Dotado de una extraordinaria capacidad para disciplinas tan dispares como las artes, las ciencias y las letras, se decantó finalmente por las ciencias puras, y siguió estudios de física en las universidades de Munich y Berlín; en ésta tuvo como profesores a Helmholtz y Kirchhoff.

Tras doctorarse por la Universidad de Munich con una tesis acerca del segundo principio de la termodinámica (1879), fue sucesivamente profesor en las universidades de Munich, Kiel (1885) y Berlín (1889), en la última de las cuales sucedió a su antiguo profesor, Kirchhoff. Enunció la ley de Wien (1896) y aplicó el segundo principio de la termodinámica, formulando a su vez la ley de la radiación que lleva su nombre (ley de Planck, 1900).

A lo largo del año 1900 logró deducir dicha ley de los principios fundamentales de la termodinámica, para lo cual partió de dos suposiciones: por un lado, la teoría de L. Boltzmann, según la cual el segundo principio de la termodinámica tiene carácter estadístico, y por otro, que el cuerpo negro absorbe la energía electromagnética en cantidades indivisibles elementales, a las que dio el nombre de quanta (cuantos).

El valor de dichos cuantos debía ser igual a la frecuencia de las ondas multiplicada por una constante universal, la llamada constante de Planck. Este descubrimiento le

permitió, además, deducir los valores de constantes como la de Boltzmann y el número de Avogadro.

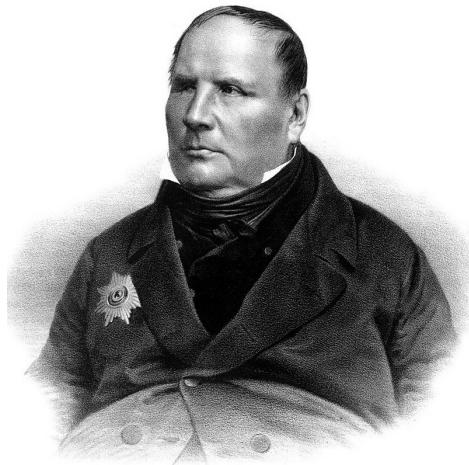
Ocupado en el estudio de la radiación del cuerpo negro, trató de describir todas sus características termodinámicas, e hizo intervenir, además de la energía, la entropía. Conforme a la opinión de L. Boltzmann de que no lograría obtener una solución satisfactoria para el equilibrio entre la materia y la radiación si no suponía una discontinuidad en los procesos de absorción y emisión, logró proponer la «fórmula de Planck», que representa con exactitud la distribución espectral de la energía para la radiación del llamado cuerpo negro. Para llegar a este resultado tuvo que admitir que los electrones no podían describir movimientos arbitrarios, sino tan sólo determinados movimientos privilegiados y, en consecuencia, que sus energías radiantes se emitían y se absorbían en cantidades finitas iguales, es decir, que estaban cuantificadas.

La hipótesis cuántica de Planck supuso una revolución en la física del siglo XX, e influyó tanto en Albert Einstein (efecto fotoeléctrico) como en Niels Bohr (modelo de átomo de Bohr). El primero concluyó, en 1905, que la única explicación válida para el llamado efecto fotoeléctrico consiste en suponer que en una radiación de frecuencia determinada la energía se concentra en corpúsculos (cuantos de luz, conocidos en la actualidad como fotones) cuyo valor es igual al producto de la constante de Planck por dicha frecuencia. A pesar de ello, tanto Planck como el propio Einstein fueron reacios a aceptar la interpretación probabilística de la mecánica cuántica (escuela de Copenhague). Sus trabajos fueron reconocidos en 1918 con la concesión del Premio Nobel de Física por la formulación de la hipótesis de los cuantos y de la ley de la radiación.

Fue secretario de la Academia Prusiana de Ciencias (1912-1938) y presidente de la Kaiser Wilhelm Gesellschaft de Ciencias de Berlín (1930-1937) que, acabada la Segunda Guerra Mundial, adoptó el nombre de Sociedad Max Planck. Su vida privada estuvo presidida por la desgracia: contrajo nupcias en dos ocasiones, sus cuatro hijos murieron en circunstancias trágicas y su casa quedó arrasada en 1944 durante un bombardeo; recogido por las tropas estadounidenses, fue trasladado a Gotinga, donde residió hasta su muerte.

Tomado de la web: **Biografías y Vidas**
<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/planck.htm>

A.12 MIJAIL VASILIEVICH OSTROGRADSKI 1801 - 1861



Mijaíl Vasílievich Ostrogradski 1801 - 1861

Mijaíl Vasílievich Ostrogradski (en ucraniano Михаїл Васильович Остроградський) (Pachenna, Ucrania, 1801 - Poltava, Ucrania, 1861), fue un físico y matemático ucraniano.

Empezó sus estudios de matemáticas en la Universidad de Járkov, y los prosiguió en París en donde mantuvo un estrecho contacto y trabó amistad con los célebres matemáticos franceses Cauchy, Binet, Fourier y Poisson. Al regresar a su país, fue profesor para los cadetes de la Marina, en el Instituto de Ingenieros y en la Escuela de Artillería de San Petersburgo.

Alcanzó la fama especialmente por haber logrado establecer una fórmula conocida también de modo erróneo como la fórmula de Green-Ostrogradski que permite expresar una integral sobre un volumen (o integral triple) utilizando una integral doble extendida a la superficie que la rodea. Desarrolló un método para calcular la integral de una función racional cuando el denominador tiene raíces múltiples. Este método permite separar la parte racional de la integral sin necesidad de descomponer el integrando en fracciones simples.

Fue elegido en la American Academy of Arts and Sciences en 1834, en la Academia de Ciencias de Turín en 1841, y en la Academia de Ciencias de Roma en 1853. Por último fue elegido miembro corresponsal de la Academia de Ciencias de París en 1856. Los trabajos científicos de Ostrogradsky están muy en la línea de los principios imperantes en esa época en la École polytechnique de París en el terreno del análisis y de las matemáticas aplicadas. En Física Matemática, ideó una síntesis grandiosa que

abarcaría la hidromecánica, la teoría de la elasticidad, la teoría del calor, y la teoría de la electricidad en el marco de un único método homogéneo. Llevar a cabo ese programa estaba por encima de las posibilidades de un sólo hombre, y por encima de los recursos existentes en el Siglo XIX y aún hoy no se ha completado.

Tomado de la web: **Wikipedia**
https://es.wikipedia.org/wiki/Mija%C3%AD_Ostrogradski

A.13 PIERRE-LOUIS MOREAU DE MAUPERTUIS 1698-1759



Pierre-Louis Moreau de Maupertuis 1698-1759

Filósofo y científico francés, miembro de la Academia de Ciencias francesa desde 1723, y presidente y reorganizador de la Academia de Ciencias de Berlín, por orden de Federico II desde 1740. Matemático, físico y geómetra, a él se debe la introducción del newtonianismo en Francia.

Maupertuis sostiene que nuestros conocimientos están limitados al mundo tal como se nos aparece, rechaza así los “sistemas” metafísicos. De sus contactos con la cultura alemana conserva elementos leibnizianos, que influyen en su dinámica y en su biología. En dinámica, a Maupertuis se debe el principio de la “mínima acción”, según el cual, en todas las mutaciones que se producen en el universo, se emplea siempre la mínima cantidad de acción necesaria. En biología niega, contra Descartes, que el mecanicismo sea suficiente para explicar el fenómeno de la vida y de la reproducción

de ésta. Como contrapartida propone la hipótesis vitalista, según la cual los elementos originarios de la vida son las moléculas orgánicas, dotadas de un cierto grado de conciencia, aunque oscuro. Son como un instinto activo que impulsa a los elementos a organizarse uniéndose entre sí y formando, según la mayor o menor actividad instintiva, los minerales, las plantas, los animales y los hombres. En el campo de la moral se fundamentará en los conceptos de placer y dolor que, como magnitudes positivas y negativas respectivamente. Así, en ética social propondrá el principio de asegurar "para el mayor número de personas la mayor felicidad posible".

Obras: Comentarios a los principios de Newton (1732), Algebra y Astronomía (1743) y Ensayos.

Tomado de la web: **La Web de las Biografías**

<http://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=maupertuis-pierre-louis-moreau-de>

A.14 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ 1646 - 1716



Gottfried Wilhelm Leibniz 1646 - 1716

(Gottfried Wilhelm von Leibniz; Leipzig, actual Alemania, 1646 - Hannover, id., 1716) Filósofo y matemático alemán. Su padre, profesor de filosofía moral en la Universidad de Leipzig, falleció cuando Leibniz contaba seis años. Capaz de escribir poemas en latín a los ocho años, a los doce empezó a interesarse por la lógica aristotélica a través del estudio de la filosofía escolástica.

En 1661 ingresó en la universidad de su ciudad natal para estudiar leyes, y dos años después se trasladó a la Universidad de Jena, donde estudió matemáticas con E. Weigel. En 1666, la Universidad de Leipzig rechazó, a causa de su juventud, concederle el título de doctor, que Leibniz obtuvo sin embargo en Altdorf; tras rechazar el ofrecimiento que allí se le hizo de una cátedra, en 1667 entró al servicio del arzobispo elector de Maguncia como diplomático, y en los años siguientes desplegó una intensa actividad en los círculos cortesanos y eclesiásticos.

(Gottfried Wilhelm von Leibniz; Leipzig, actual Alemania, 1646 - Hannover, id., 1716) Filósofo y matemático alemán. Su padre, profesor de filosofía moral en la Universidad de Leipzig, falleció cuando Leibniz contaba seis años. Capaz de escribir poemas en latín a los ocho años, a los doce empezó a interesarse por la lógica aristotélica a través del estudio de la filosofía escolástica.

En 1661 ingresó en la universidad de su ciudad natal para estudiar leyes, y dos años después se trasladó a la Universidad de Jena, donde estudió matemáticas con E. Weigel. En 1666, la Universidad de Leipzig rechazó, a causa de su juventud, concederle el título de doctor, que Leibniz obtuvo sin embargo en Altdorf; tras rechazar el ofrecimiento que allí se le hizo de una cátedra, en 1667 entró al servicio del arzobispo elector de Maguncia como diplomático, y en los años siguientes desplegó una intensa actividad en los círculos cortesanos y eclesiásticos.

En 1672 fue enviado a París con la misión de disuadir a Luis XIV de su propósito de invadir Alemania; aunque fracasó en la embajada, Leibniz permaneció cinco años en París, donde desarrolló una fecunda labor intelectual. De esta época datan su invención de una máquina de calcular capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, así como la elaboración de las bases del cálculo infinitesimal.

En 1676 fue nombrado bibliotecario del duque de Hannover, de quien más adelante sería consejero, además de historiador de la casa ducal. A la muerte de Sofía Carlota (1705), la esposa del duque, con quien Leibniz tuvo amistad, su papel como consejero de príncipes empezó a declinar. Dedicó sus últimos años a su tarea de historiador y a la redacción de sus obras filosóficas más importantes, que se publicaron póstumamente.

Representante por excelencia del racionalismo, Leibniz situó el criterio de verdad del conocimiento en su necesidad intrínseca y no en su adecuación con la realidad; el modelo de esa necesidad lo proporcionan las verdades analíticas de las matemáticas. Junto a estas verdades de razón, existen las verdades de hecho, que son contingentes y no manifiestan por sí mismas su verdad.

El problema de encontrar un fundamento racional para estas últimas lo resolvió afirmando que su contingencia era consecuencia del carácter finito de la mente humana, incapaz de analizarlas por entero en las infinitas determinaciones de los conceptos que en ellas intervienen, ya que cualquier cosa concreta, al estar relacionada con todas las demás siquiera por ser diferente de ellas, posee un conjunto de propiedades infinito.

Frente a la física cartesiana de la extensión, Leibniz defendió una física de la energía, ya que ésta es la que hace posible el movimiento. Los elementos últimos que componen la realidad son las mónadas, puntos inextensos de naturaleza espiritual, con capacidad de percepción y actividad, que, aun siendo simples, poseen múltiples atributos; cada una de ellas recibe su principio activo y cognoscitivo de Dios, quien en el acto de la creación estableció una armonía entre todas las mónadas. Esta armonía preestablecida se manifiesta en la relación causal entre fenómenos, así como en la concordancia entre el pensamiento racional y las leyes que rigen la naturaleza.

Las contribuciones de Leibniz en el campo del cálculo infinitesimal, efectuadas con independencia de los trabajos de Newton, así como en el ámbito del análisis combinatorio, fueron de enorme valor. Introdujo la notación actualmente utilizada en el cálculo diferencial e integral. Los trabajos que inició en su juventud, la búsqueda de un lenguaje perfecto que reformara toda la ciencia y permitiese convertir la lógica en un cálculo, acabaron por desempeñar un papel decisivo en la fundación de la moderna lógica simbólica.

Tomado de la web: **Biografías y Vidas**
<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leibniz.htm>

A.15 PIERRE DE FERMAT 1601 - 1665



Pierre de Fermat 1601 - 1665

Pierre de Fermat fue un matemático francés del siglo XVII que hizo importantes contribuciones al desarrollo del cálculo infinitesimal. Hizo camino irrumpir investigación teoría de números y descubrió varios nuevos patrones en números que habían intrigado a los matemáticos durante siglos. Nacido en una familia acomodada de alto rango social, decidió ejercer profesión legal como se esperaba de los hombres jóvenes de su estatura social en esos días a pesar de su profundo amor por las matemáticas. Pero embarcarse en un campo profesional totalmente sin relación con el campo de las matemáticas no guardó al joven se convierta en un matemático aficionado en su propio derecho. Inicialmente escribió sobre sus descubrimientos matemáticos a sus amigos en las letras, a menudo con poca o ninguna de las pruebas. Más adelante como ganó en prominencia, sus hallazgos fueron publicados y circuló ampliamente. Altamente inspirado por los trabajos del matemático helenístico Diofanto, junto con René Descartes, pasó a convertirse en uno de los dos principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Sus obras desempeñó un papel fundamental en el desarrollo del cálculo infinitesimal e hizo notables contribuciones a la geometría analítica, probabilidad y óptica.

Infancia y primeros años de vida

Pierre de Fermat nació en Beaumont-de-Lomagne (actual Tarn-et-Garonne), Francia, en la primera década del siglo XVII. Su año de nacimiento se cree para ser 1601 o 1607.

El provenía de una familia adinerada. Su padre Dominique Fermat era un próspero comerciante que había servido tres mandatos de un año como uno de los cuatro cónsules de Beaumont-de-Lomagne. Su madre se llamaba Françoise Cazeneuve o Claire de Long. Tenía un hermano y dos hermanas.

Aunque varios detalles sobre su vida temprana son confusos, algunas fuentes sugieren que recibió su educación escolar en el colegio de Navarra en Montauban.

El había desarrollado un temprano interés por las matemáticas aunque decidió seguir una carrera como abogado. Así se matriculó en la Universidad de Orléans en 1623 y obtuvo a su licenciatura en derecho civil en 1626.

Carrera

Luego se trasladó a Burdeos y comenzó sus investigaciones matemáticas. Entró en contacto con Jean de Beaugrand, un prominente lineographer y matemático con los que compartió a sus intereses. Fue aquí que le produjeron importantes trabajos en máximos y mínimos.

Compró las oficinas de conseiller y commissaire aux servicios en el Parlamento de Toulouse, uno de los altos tribunales de judicatura en Francia en 1630. Al año siguiente él juró por la Chambre de Grand. Ocupó esta oficina por el resto de su vida.

Fue promovido a la posición de conseiller aux enquêtes en 1638 y dentro de cuatro años, ingresó a los consejos más altos del 'Parlamento' — la Corte Penal y luego la gran sala.

Actuó como vocero principal del parlement en 1648 mientras negociaban con el Canciller de Francia, Pierre Séguier. Sin embargo, ciertas cartas personales de alrededor de este tiempo sugieren que no fue satisfactorio, rendimiento de Fermat en oficina.

A pesar de sus alta-prolíficos puestos de trabajo, se sumergió en la investigación matemática y escribió a menudo sobre sus descubrimientos a sus amigos en las letras. Muchos de sus cartas escritas después de 1636 proporcionan sugerencias con respecto a su investigación matemática y su evolución como matemático.

En su obra, "Methodus ad disquirendam maximam et minimam et en De tangentibus linearum curvarum", él desarrolló el método de "adequality" para la determinación de máximos, mínimos y tangentes a curvas diferentes; Esto era análoga a la del cálculo diferencial, entonces desconocido. Él también desarrolló una nueva técnica para encontrar los centros de gravedad de varios avión y Figuras sólidas.

Estaba en correspondencia con Blaise Pascal en 1654, y los dos hombres ayudaron a sentar las bases de la teoría de la probabilidad. Aunque su correspondencia con Pascal fue breve, fue altamente productivo y condució a la Fundación de la teoría de la probabilidad.

Contribución de Pierre de Fermat a la teoría de los números ha sido tremendo. Su estudio de la ecuación de Pell, números perfectos, números amistosos, enteros positivos y números primos en última instancia condujo al descubrimiento de los números que serían nombrados después de él: números de Fermat.

Fermat fue uno de los principales matemáticos del siglo XVII. El había desarrollado el campo de la geometría analítica casi sin ayuda y han contribuido al desarrollo temprano de cálculo. Él también era conocido por haber trabajado en la refracción de la luz y la óptica.

Una de sus obras más conocidas es el último teorema de Fermat que primero fue descubierto por su hijo en el margen en la copia de su padre de una edición de Diophantus. Fermat afirmó que tenía una prueba pero no pudo probarlo. La primera prueba exitosa fue lanzada siglos más tarde por Andrew Wiles en 1994.

Estaba con fluidez en varios idiomas incluyendo francés, italiano, español, latín y griego, y así también se metió en problemas filológicos y ganó reputación como un erudito clásico.

Principales obras

El jugó un papel importante en el desarrollo del campo del cálculo infinitesimal y se le atribuye haber descubierto un método original de encontrar el mejor y las más pequeñas ordenadas de líneas curvas, que es análoga a la del cálculo diferencial. También inventó un método de factorización que más tarde fue nombrado después de él: método de factorización de Fermat.

Legado y vida personal

Pierre de Fermat se casó con la prima de su madre, Louise de Long, el 01 de junio de 1631. La pareja tuvo cinco hijos: dos hijos y tres hijas. Su hijo mayor, Clément-Samuel, también se convirtió en abogado y heredó su oficina después de su muerte; más adelante también publicó documentos matemáticos de su padre.

Murió el 12 de enero 1665, en Castres, Francia.

APENDICE A. BIOGRAFIAS RESUMIDAS DE CIENTIFICOS DESTACADOS EN EL PRESENTE TEXTO

Tomado de la web: **Edukavital**

<http://edukavital.blogspot.com/2015/05/biografia-de-pierre-de-fermat-su-vida-y.html>

APENDICE B

FORMA PFAFFIANA

APENDICE C

TEOREMA DE STEINER

APENDICE D

TEOREMA DE EULER

Dada una función de n variables $f = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, se dice que es homogénea de grado p si ocurre que,

$$f(\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3, \dots, \lambda y_n) = \lambda^p f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad (\text{D.1})$$

Teorema 9 (Teorema de Euler) Si $f = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ es una función homogénea de grado p , entonces se cumple que,

$$\sum_{j=1}^n \left[y_j \frac{\partial f(y_i)}{\partial y_j} \right] = p f(y_i)$$

Demostración. Si se deriva (D.1) con respecto a λ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\lambda y_i)}{\partial \lambda} &= p \lambda^{p-1} f(y_i) \\ \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial f(\lambda y_i)}{\partial \lambda y_j} \frac{\partial \lambda y_j}{\partial \lambda} \right] &= p \lambda^{p-1} f(y_i) \\ \sum_{j=1}^n \left[y_j \frac{\partial f(\lambda y_i)}{\partial y_j} \right] &= p \lambda^{p-1} f(y_i) \end{aligned}$$

ahora si $\lambda = 1$ entonces,

$$\sum_{j=1}^n \left[y_j \frac{\partial f(y_i)}{\partial y_j} \right] = p f(y_i) \quad (\text{D.2})$$

como se quería demostrar. ■

APENDICE E

FUNCIONES MONOTONAS Y CONTINUIDAD

Definición 1 (Funciones monótonas) Una función $y = f(x)$ para la cual un incremento en el valor de x resulta siempre en un incremento en el valor de y , esto es, para la cual $f(x) < f(x')$ siempre que $x < x'$, se denomina función monótona creciente; si, por otra parte, un incremento en el valor de x implica siempre un decrecimiento en el valor de y , la función se denomina función monótona decreciente. Tales funciones son representadas gráficamente por curvas que siempre ascienden o bien siempre descenden conforme x recorre el intervalo de definición hacia valores crecientes. Una función monótona transforma siempre valores distintos de x en diferentes y ; esto es, la transformación es biunívoca o 1 – 1.

Definición 2 (Definición $\varepsilon - \delta$ de límite de una función) Se dice que el límite de la función f en el punto x_o es ℓ si,

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (\text{E.1})$$

Definición 3 (Definición de continuidad de una función en un punto) Una función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua en el punto $x_o \in \mathbb{R}$ si se verifican las tres condiciones siguientes:

1. f está definida en x_o , es decir, $x_o \in \text{dom } f$.

2. Existe $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x)$. En particular, obsérvese que x_o ha de ser punto de acumulación de $\text{dom } f$.
3. El $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$.

que se puede resumir escribiendo,

$$f \text{ es continua en } x_o \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o) \quad (\text{E.2})$$

Definición 4 (Definición de continuidad en un intervalo abierto) Se dice que una función f es continua en un intervalo abierto si y sólo si es continua en cada número del intervalo abierto.

Definición 5 (Definición de continuidad por la derecha) Se dice que una función f es continua por la derecha en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe;
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Definición 6 (Definición de continuidad por la izquierda) Se dice que una función f es continua por la izquierda en el número a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe;
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Definición 7 (Definición de continuidad en un intervalo cerrado) Se dice que una función f , cuyo dominio contiene al intervalo cerrado $[a, b]$, es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) , así como continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b .

Teorema 10 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces,

1. Existe al menos un punto x_1 del intervalo $[a, b]$ donde f alcanza su valor mínimo, es decir: $f(d) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$.

2. Existe al menos un punto x_2 del intervalo $[a, b]$ donde f alcanza su valor máximo, es decir: $f(c) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$.

En resumen,

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{E.3})$$

APENDICE F

LEMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO DE VARIACIONES

Se enunciará y demostrará el *Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones* (1):

Lema 11 (Lema fundamental del cálculo de variaciones) *Si para cada función continua $\eta(x)$ se tiene,*

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0$$

siendo $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces,

$$f(x) = 0$$

en dicho segmento.

Demostración. La afirmación del lema y su demostración no varían si a la función $\eta(x)$ se le imponen las siguientes limitaciones: $\eta(a) = \eta(b) = 0$; $\eta(x)$ tiene derivadas continuas hasta orden p , $|\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon$ ($s = 0, 1, \dots, q$; $q \leq p$). Ahora bien, suponiendo que en el punto $x = \bar{x}$ contenido en el intervalo $[a, b]$, sea $f(x) \neq 0$, se llega a una contradicción. En efecto, de la continuidad de la función $f(x)$ se deduce que si $f(\bar{x}) \neq 0$, entonces $f(x)$ conserva su signo en cierto entorno $[\bar{a}, \bar{b}]$ del punto \bar{x} . Pero entonces, tomando una función $\eta(x)$ que también conserve su signo en este entorno y sea igual a cero fuera del mismo (ver figura F.1), se obtiene,

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(x) \eta(x) dx \neq 0 \quad (\text{F.1})$$

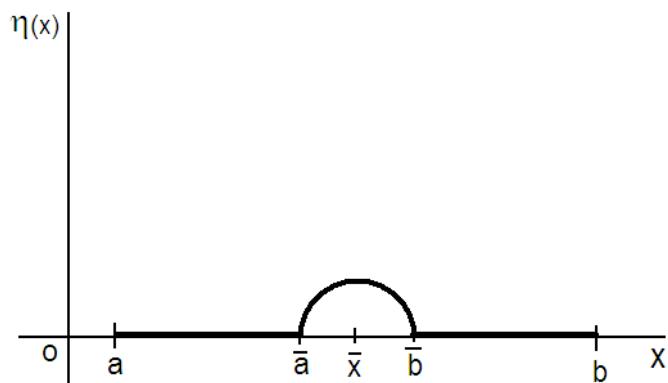


Figura F.1: Función arbitraria $\eta(x)$.

ya que el producto $f(x)\eta(x)$ conserva su signo en el intervalo $[\bar{a}, \bar{b}]$ y se anula fuera del mismo. De este modo, se ha llegado a una contradicción, por lo tanto, $f(x) = 0$, con lo cual queda demostrado el lema. ■

APENDICE G

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

El proceso para calcular un determinante de orden superior a 3 es muy largo y engoroso. En general el determinante de orden "n" sería el resultado de sumar todos los posibles productos de "n" elementos, uno de cada fila y de cada columna, afectado del signo + o – según si el número de inversiones es par o impar. Así pues, para simplificar dicho cálculo se aplican las siguientes propiedades:

1. El determinante de una matriz es igual al determinante de la matriz traspuesta. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{G.1})$$

2. Si los elementos de una fila/columna de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número. Por ejemplo, si se multiplica la segunda fila por k ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{G.2})$$

y si se multiplica la segunda columna por k ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & ka_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & ka_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{G.3})$$

3. Si los elementos de una fila/columna de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas/columnas excepto dicha fila/columna cuyos sumandos pasan, respectivamente, a cada uno de los determinantes. Por ejemplo, si se descomponen los elementos de la segunda columna,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{G.4})$$

y si se descomponen los elementos de la segunda fila,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{G.5})$$

4. El determinante de un producto de dos matrices cuadradas coincide con el pro-

ducto de los determinantes de ambas matrices:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right| \\
 = & \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right| \quad (G.6)
 \end{aligned}$$

5. Si en una matriz cuadrada se permutan dos filas/columnas (consecutivas), su determinante cambia de signo. Por ejemplo, si se intercambian las dos primeras filas,

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cccc} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \quad (G.7)$$

y si se intercambian las dos primeras columnas,

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cccc} a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \quad (G.8)$$

6. Si los elementos de una fila/columna de una matriz cuadrada son combinación lineal de las filas/columnas restantes, es decir son el resultado de sumar los elementos de otras filas/columnas multiplicadas por números reales, su determinante es cero.
7. Si a los elementos de una fila/columna de una matriz cuadrada se le suma una combinación lineal de otras filas/columnas, su determinante no varía.
8. Si una matriz cuadrada tiene dos filas/columnas iguales, entonces su determinante es nulo.
9. Si todos los elementos de una fila/columna de una matriz cuadrada son cero, el determinante de dicha matriz es cero. (ya que en el desarrollo de un determinante, aparece un factor de cada fila y de cada columna, y por tanto, en cada término aparecerá un cero como factor).

10. Todo determinante de una matriz cuadrada se puede convertir en otro del mismo valor que el dado, tal que todos los elementos de una fila/columna, previamente elegida, sean cero excepto uno de ellos.

APENDICE H

IDENTIDAD DE JACOBI

A continuación se presentan dos formas de verificar la identidad de Jacobi.

H.1 Por transformaciones canónicas infinitesimales

En 2000, en su artículo “Short Proof of Jacobi’s Identity for Poisson Brackets”, Nivaldo A. Lemos (2), presentó una prueba de la identidad de Jacobi de una forma realmente sencilla a partir de las transformaciones canónicas infinitesimales, la cual es presentada a continuación:

Si $A(q_i, p_i)$ y $B(q_i, p_i)$ son dos variables dinámicas cualesquiera y además una transformación canónica infinitesimal generada por $C(q_i, p_i)$, entonces a partir de (??) con $u = [A, B]$ se puede escribir,

$$\delta[A, B] = \epsilon [[A, B], C] \quad (\text{H.1})$$

Por otro lado, debido a que el corchete de Poisson $[A, B]$ no depende de las variables canónicas escogidas para su cálculo (como se mostró en la sección ??), su cambio se debe sólo a las variaciones de A y B , por lo tanto al usar la propiedad ??,

$$\delta[A, B] = [\delta A, B] + [A, \delta B] \quad (\text{H.2})$$

Por otro lado, al usar nuevamente (??),

$$\delta[A, B] = \epsilon [[A, C], B] + \epsilon [A, [B, C]] \quad (\text{H.3})$$

Ahora bien, comparando (??) con (??) y haciendo algunos arreglos,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (\text{H.4})$$

H.2 Por cálculo directo

Se quiere mostrar que la expresión,

$$\text{Jacobi} = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] \quad (\text{H.5})$$

es nula, donde $A(q_i, p_i)$, $B(q_i, p_i)$ y $C(q_i, p_i)$ son tres variables dinámicas cualesquiera. En efecto, al desarrollar el último término usando (??),

$$\begin{aligned}
 [C, [A, B]] &= \left[C, \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \right] = \underbrace{\sum_i \left(\left[C, \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right] - \left[C, \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \right)}_{\text{Por la propiedad 4 (linealidad)}} \\
 &= \left(\underbrace{\sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial q_i} \right]}_{\text{Término 1}} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial p_i} \right]}_{\text{Término 2}} \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial p_i} \right]}_{\text{Término 3}} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]}_{\text{Término 4}} \right) \\
 &\quad \text{Por propiedad 3 (regla de Leibniz)} \quad (\text{H.6})
 \end{aligned}$$

pero, por propiedad 5,

$$\begin{aligned}
 \text{Término 1} &= \sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial q_i} \right] = \sum_i \left\{ \frac{\partial B}{\partial p_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} [C, A] - \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] \right) \right\} \\
 &= \sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} [C, A] - \sum_i \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] \\
 \text{Término 2} &= \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial p_i} \right] = \sum_i \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} [C, B] - \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] \right) \right\} \\
 &= \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} [C, B] - \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] \\
 \text{Término 3} &= - \sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[C, \frac{\partial A}{\partial p_i} \right] = - \sum_i \left\{ \frac{\partial B}{\partial q_i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} [C, A] - \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \right) \right\} \\
 &= - \sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} [C, A] + \sum_i \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \\
 \text{Término 4} &= - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[C, \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] = - \sum_i \left\{ \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} [C, B] - \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \right\} \\
 &= - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} [C, B] + \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right]
 \end{aligned}$$

y si se suman,

$$\begin{aligned}
 \text{Término 1} + \text{Término 3} &= \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} [C, A] \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} [C, A] \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)}_{= -[B, [C, A]] \text{ por } (??) \text{ y propiedad } (??)} \\
 &\quad + \sum_i \left(- \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] + \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \right) \\
 &= -[B, [C, A]] + \sum_i \left(- \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] + \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] \right) \quad (\text{H.7})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Término 2} + \text{Término 4} &= \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} [C, B] - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} [C, B] \right)}_{= -[A, [B, C]] \text{ por } (??) \text{ y propiedad } (??)} \\
 &\quad + \sum_i \left(- \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \\
 &= -[A, [B, C]] + \sum_i \left(- \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \quad (\text{H.8})
 \end{aligned}$$

entonces, al sustituir (H.7) y (H.8) en (H.6), y el resultado de esto en (H.5), queda,

$$\text{Jacobi} = \sum_i \left(- \frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] + \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] - \frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] \right) \quad (\text{H.9})$$

pero, por (??),

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, A \right] &= -\frac{\partial B}{\partial p_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_j \left(-\frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, A \right] &= \frac{\partial B}{\partial q_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A}{\partial q_i} \left[\frac{\partial C}{\partial p_i}, B \right] &= -\frac{\partial A}{\partial q_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_j \left(-\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial p_i} \left[\frac{\partial C}{\partial q_i}, B \right] &= \frac{\partial A}{\partial p_i} \sum_j \left(\frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_j \partial q_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

Entonces, por último, al sustituir (H.10) a (H.13) en (H.9), resulta,

$$J = 0$$

demostrándose así la identidad de Jacobi.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Elsgoltz, L. *ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL*. Editorial MIR, Moscú, 1969.
- (2) Lemos, N. SHORT PROOF OF JACOBI'S IDENTITY FOR POISSON BRACKETS. *American Journal of Physics*, 68:88–88, january 2000.

COLECCIÓN SOLDOVIERI DE TEXTOS DE CIENCIA

- Física General - Una introducción a los Fluidos, Vibraciones y Termodinámica.
- Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton.
- Introducción a la Mecánica de Lagrange y Hamilton - Solucionario (En redacción).
- Introducción a la Mecánica Clásica.
- Introducción a la Mecánica Clásica – Solucionario (En redacción).
- El Angulo Sólido y algunas de sus aplicaciones (Coautor).
- La Transformación de Legendre para Estudiantes de Ciencias.
- La Transformación de Legendre para Estudiantes de Ciencias – Solucionario (En redacción).
- Cálculo Variacional con fronteras fijas.
- Cálculo Variacional con fronteras fijas – Solucionario (En redacción).
- Ligaduras en Mecánica Clásica (En Proyecto).
- Coordenadas Generalizadas (En Proyecto).
- Principio de D'Alembert (En Proyecto).

Para descargar preprints de algunos de estos textos visitar:



<http://tsoldovieriwebihostfull.com>