

Modelado dinámico de robots paralelos considerando sensórica redundante

Asier Zubizarreta, Itziar Cabanes, Eva Portillo, Darío Orive, Marga Marcos
Depto. Ingeniería de Sistemas y Automática Universidad del País Vasco EHU/UPV
asier_zubizarreta@ehu.es

Resumen

El modelado dinámico de robots paralelos es una tarea compleja debido a los múltiples lazos cinemáticos de estas estructuras. Las estrategias propuestas por diversos autores no obtienen, en general, el modelo de forma estructurada y compacta y en ningún caso consideran la posibilidad de introducir datos de sensores redundantes explícitamente en el modelo. En este artículo, basándose en trabajos anteriores que hacen uso de la formulación Lagrangiana, la formulación de Newton-Euler y el Principio de los Trabajos Virtuales, se desarrolla una metodología capaz de obtener el modelo dinámico de robots paralelos de forma compacta y estructurada, pudiendo considerar datos de sensores redundantes explícitamente en el modelo.

Palabras clave: Modelo Dinámico, Robótica Paralela, Formulación Lagrangiana

1 Introducción

En la actualidad, los robots paralelos se han convertido en una alternativa interesante a los tradicionales robots serie. Éste tipo de mecanismos está generalmente compuesto por dos o más cadenas cinemáticas que unen una plataforma móvil donde se coloca el elemento terminal a la base fija. Esta disposición mecánica permite una mayor rigidez estructural, además de la posibilidad de operar a muy altas velocidades con alta precisión. Como contrapartida, la complejidad estructural de los mecanismos deriva en una cinemática y dinámica altamente no lineal y acoplada, un espacio de trabajo reducido, singularidades internas y la aparición de articulaciones no actuadas, entre otros problemas [18].

Con el objetivo de compensar estas desventajas, en las últimos 2 décadas se ha realizado un gran esfuerzo investigador. La mayor parte de los trabajos en este campo se centran en la resolución de la cinemática de estos mecanismos, su análisis de singularidades y su síntesis. Sin embargo, el modelado dinámico, necesario para estrategias de

control basadas en modelo, ha sido objeto de estudio de pocos autores, debido, principalmente, a la complejidad de la formulación. En este artículo, se aborda la problemática relacionada con la obtención del modelo dinámico de estos robots.

En robótica serie, la formulación Lagrangiana y la de Newton-Euler (N-E) [2] han sido extensamente utilizadas para calcular el modelo dinámico, cuya forma se presenta en la ecuación (1).

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (1)$$

Donde $\boldsymbol{\tau}$ representa el vector de las fuerzas/pares de los actuadores, \mathbf{q} presenta el vector de las n coordenadas articulares actuadas, \mathbf{D} es la matriz simétrica, definida positiva de inercia, \mathbf{C} es la matriz de coriolis, donde $(\dot{\mathbf{D}} - 2\mathbf{C})$ es antisimétrica y \mathbf{G} es el vector de gravedad.

Sin embargo, la obtención de un modelo con características similares en robótica paralela no es una tarea fácil, debido a las articulaciones pasivas o no actuadas. La aparición de éstas en la estructura incrementa la complejidad de los problemas cinemático y dinámico. Para evitar estos inconvenientes, algunos autores [17], [16] han propuesto la utilización de sensores en algunas articulaciones pasivas para simplificar el problema cinemático e incrementar el rendimiento del control.

Realizando un análisis de los antecedentes bibliográficos, los autores han propuesto tres métodos principales para la obtención del modelo dinámico: la formulación Lagrangiana, el uso de la leyes de N-E, y el Principio de los Trabajos Virtuales.

1.1 Formulación de Newton-Euler

La formulación de N-E requiere la definición de las ecuaciones de N-E para cada cuerpo que compone el mecanismo. De este modo, todas las fuerzas internas y externas actuando sobre el mecanismo son calculadas, generando un sistema de ecuaciones de gran dimensión. La mayoría de los autores han aplicado directamente este método a plataformas paralelas específicas, especialmente el Hexápodo o la plataforma Gough [6, 7, 21].

Dado que la mayoría de los mecanismos paralelos está compuesto por una plataforma móvil y un grupo de cadenas serie uniendo ésta a la base, una estrategia adoptada por numerosos autores ha sido la de dividir el mecanismo en estos dos subsistemas. De este modo, la mayoría de los métodos calculan el modelo dinámico de cada uno de los subsistemas, considerando las fuerzas de reacción entre ambos, y en un paso posterior, unen ambos utilizando diversas técnicas [5, 12, 13, 14]. Una contribución destacada es [1], donde Angeles propone el uso del Complemento Ortonormal Natural (NOC) para proyectar el tursor cinemático del sistema en el espacio articular actuado.

1.2 Formulación de Lagrange

La formulación Lagrangiana es una aproximación energética que permite, con una correcta elección de las coordenadas generalizadas del sistema, evitar el cálculo de las fuerzas de reacción internas del mecanismo. En robótica paralela, debido a que la relación entre las diversas coordenadas no se puede resolver, en general, de forma analítica, se utiliza la formulación de Lagrange con multiplicadores de Lagrange [15]. Los multiplicadores de Lagrange permiten definir la dinámica del sistema utilizando un conjunto de coordenadas generalizadas redundantes e incluir implícitamente las relaciones entre estas coordenadas. Al igual que en el caso de la aproximación de N-E, algunos autores han considerado la separación del mecanismo en dos subsistemas para simplificar el cálculo del modelo. Éste es el caso de Bhattacharya, *et al.* [3, 4], que calculan dos sistemas de ecuaciones de Lagrange, uno para cada subsistema, y los combinan utilizando la matriz Jacobiana del robot, obteniendo así el modelo completo del robot.

1.3 Principio de los Trabajos Virtuales

Actualmente, una de las aproximaciones más populares para obtener el modelo dinámico de los robots paralelos es el uso del Principio de los Trabajos Virtuales, que, de forma similar a la formulación Lagrangiana, es una aproximación energética. Al igual que en los métodos anteriores, la mayoría de los autores ha aplicado de forma directa el principio para obtener el modelo de robots específicos [23, 24, 25, 26].

Otra corriente no menos importante es aquella que propone la combinación de la utilización de los modelos reducidos y el Principio de los Trabajos Virtuales [11, 10, 8, 9, 20, 19]. Este enfoque considera a los robots paralelos como un conjunto de elementos libres, denominado *sistema libre* y un conjunto de restricciones. Los trabajos en este campo se centran en la obtención de la relación en-

Nakamura&Godoussi	$\tau = W^T \cdot \tau_{red}$
Murray&Lovell	$\tau = G^T \tau_{red}$
Ghorbel, <i>et al</i>	$\tau = \rho(\mathbf{q})^T \cdot \tau_{red}$

Tabla 1: Matrices de transformación para Modelos Reducidos

tre el modelo dinámico del sistema libre o reducido y el sistema sometido a restricciones (el robot paralelo). Los métodos propuestos por Nakamura y Godoussi [20], Murray y Lovell [19] y Ghorbel [9], *et al.* reducen esta relación a una matriz, tal como se puede observar en la tabla 1.

Es posible demostrar que las tres matrices de la tabla 1 son equivalentes y que pueden ser definidas como una única matriz de transformación T cuya traspuesta relaciona el modelo reducido τ_{red} y el real τ , tal y como se puede ver en (2).

$$T = \frac{\partial \mathbf{q}_r}{\partial \mathbf{q}_a} = \begin{bmatrix} I \\ \frac{\partial \mathbf{q}_p}{\partial \mathbf{q}_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -J_{q_p}^{-1} \cdot J_{q_a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_a+n_p \times n_a}$$

$$\begin{aligned} \tau &= T^T \cdot \tau_{red} \\ \dot{\mathbf{q}}_{red} &= T \cdot \dot{\mathbf{q}}_a \end{aligned} \quad (2)$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{q}_a$ es el conjunto de articulaciones activas del mecanismo, de dimensión n_a , \mathbf{q}_p es el conjunto de n_p parámetros pasivos del mecanismo, $\mathbf{q}_{red} = [\mathbf{q}_a \quad \mathbf{q}_p]^T$ define el conjunto de coordenadas asociadas al modelo reducido, $\sigma(\mathbf{q}_{red}) = 0$ representan las ecuaciones de cierre que relacionan las coordenadas articulares activas y los parámetros pasivos y $J_{q_a} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}_a}$ y $J_{q_p} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{q}_p}$ definen las matrices Jacobiana que incluyen implícitamente las restricciones del sistema.

En general, estas aproximaciones descomponen el robot paralelo en un conjunto de robots series, y utilizan la matriz de transformación T para obtener el modelo del robot paralelo a partir de su modelo reducido (modelo del conjunto de cadenas serie).

El uso de modelos reducidos proporciona un método sencillo para el cálculo del modelo dinámico de robots paralelos cuando no existe plataforma móvil. Sin embargo, en el caso general, la plataforma móvil tiene que ser unida a una de las cadenas serie, incrementando la complejidad del problema.

Las tres estrategias analizadas proporcionan una variedad de métodos para abordar el modelado dinámico de robots paralelos. Sin embargo, ninguna considera la posibilidad de incluir explíci-

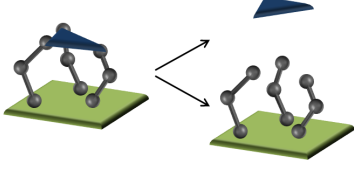


Figura 1: Subsistemas serie y plataforma móvil

tamente datos de sensores colocados en articulaciones pasivas con el objetivo de mejorar los esquemas de control basados en modelo.

La metodología propuesta en este trabajo se basa en tres contribuciones de otros autores:

- La utilización de la matriz de transformación definida en (2) que relaciona el modelo dinámico del robot y su modelo reducido [11, 10, 8, 9, 20, 19].
- Separación del mecanismo en dos subsistemas: plataforma móvil y subsistema serie [13, 14, 1] (Fig. 1).
- Aplicación de la formulación Lagrangiana con multiplicadores de Lagrange a cada subsistema de forma independiente [3, 4]. Esta formulación permite al diseñador elegir las coordenadas que definirán el modelo dinámico, lo que la hace idónea para la inclusión de datos redundantes.

Basándose en estas tres ideas, se propone una metodología para la obtención del modelo dinámico de robots paralelos, donde es posible incluir información de sensorica redundante. El objetivo de este modelo redundante es el de ser implementado en esquemas avanzados de control que permitan mejorar la precisión y el rendimiento del robot.

A continuación se exponen los pasos a seguir para obtener el modelo dinámico de un robot paralelo genérico. Inicialmente, se considerarán ciertos parámetros pasivos sensorizados explícitamente en el modelo, mientras que en un segundo caso, se particulariza para el caso del modelo sólo en función de las coordenadas articulares actuadas.

2 Metodología para la obtención del modelo dinámico considerando sensorica redundante

Supóngase un mecanismo no redundante con $n = n_a$ grados de libertad, cuya plataforma móvil está unida a la base por n cadenas serie.

Sea \mathbf{q}_a el conjunto de *articulaciones activas* del mecanismo, de dimensión $n_a = n$, \mathbf{q}_p el conjunto de n_p articulaciones *pasivas no sensorizadas* y \mathbf{q}_s el conjunto de n_s articulaciones *pasivas sensorizadas*. El conjunto de *coordenadas de control* se definirá tal que $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a \ \mathbf{q}_s]^T$ y el conjunto de $n_r = n_a + n_p + n_s$ *coordenadas generalizadas* como $\mathbf{q}_r = [\mathbf{q} \ \mathbf{q}_p]^T$. Sea \mathbf{x} el vector de coordenadas cartesianas del elemento terminal, de dimensión 6, y \mathbf{x}_I el conjunto de n coordenadas independientes de \mathbf{x} .

A continuación, se describen brevemente los pasos a seguir para la obtención del modelo dinámico:

2.1 Ecuaciones de cierre del mecanismo

Inicialmente hay que definir las ecuaciones de cierre que relacionan las diferentes coordenadas entre si. Estas ecuaciones caracterizan las restricciones del mecanismo y permiten resolver el problema de posición. Existen tres relaciones a obtener:

- La relación entre las coordenadas cartesianas \mathbf{x} y las coordenadas articulares activas independientes \mathbf{q}_a :

$$\phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_a) = 0, i = 1, \dots, n \quad (3)$$

- La relación entre \mathbf{x} y \mathbf{q}_r :

$$\Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{f}_i(\mathbf{q}_r), i = 1, \dots, n \quad (4)$$

- La relación entre las coordenadas articulares activas \mathbf{q}_a y las coordenadas articulares pasivas no sensorizadas \mathbf{q}_p y sensorizadas \mathbf{q}_s : En general, es más fácil obtener estas ecuaciones de cierre en términos de las coordenadas cartesianas y las articulares activas:

$$\begin{aligned} f_s(\mathbf{q}_a, \mathbf{x}, \mathbf{q}_s) &= 0 \\ f_p(\mathbf{q}_a, \mathbf{x}, \mathbf{q}_s) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 Problema de posición

Utilizando las ecuaciones de cierre definidas en (3) y (4) se puede definir el problema de posición directo e inverso. Utilizando (5), las posiciones de los parámetros pasivos pueden ser calculadas.

2.3 Problema de velocidad

El cálculo del problema de velocidad y las Jacobianas que lo caracterizan es un paso muy importante para el cálculo del modelo dinámico. Las ecuaciones de velocidad pueden ser directamente derivadas de las ecuaciones de cierre planteadas en la sección 2.1, lo que es cómodo en robots simples

y planares. Otra alternativa es la de definir directamente las ecuaciones vectoriales de velocidad del mecanismo, que es más adecuado en robots complejos.

De las ecuaciones de velocidad del mecanismo se obtienen las matrices Jacobianas, que incluyen implícitamente las restricciones del mecanismo y serán utilizadas en el modelo dinámico de éste. Por lo tanto, el objetivo de este paso es la obtención de las siguientes matrices :

- Matriz Jacobiana del robot J_R :

Queda definida como,

$$\mathbf{v} = \underbrace{J_R}_{6 \times n}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_a) \cdot \dot{\mathbf{q}}_a \quad (6)$$

Donde $\mathbf{v} = [\dot{\mathbf{p}}_c^T \ \boldsymbol{\omega}^T]^T$ es la velocidad cartesiana del elemento terminal, que consta de una velocidad de traslación lineal $\dot{\mathbf{p}}_c$ y una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Nótese que $\mathbf{v} \neq \dot{\mathbf{x}}$ en el caso general, tal como se detalla en [2].

Esta expresión se puede obtener operando las ecuaciones de velocidad o diferenciando (3) y operando la expresión.

- Matriz Jacobiana de Restricción J_C :

Relaciona la velocidad de las coordenadas cartesianas de la plataforma móvil \mathbf{v} y las velocidades de las coordenadas articulares generalizadas de los subsistemas serie $\dot{\mathbf{q}}_r$:

$$\mathbf{v} = \underbrace{J_C}_{6 \times (n_a + n_s + n_p)}(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) \dot{\mathbf{q}}_r \quad (7)$$

Esta expresión se puede obtener diferenciando (4) de forma similar al proceso de obtención de J_R o operando las ecuaciones vectoriales de velocidad.

- Matriz de transformación T :

Esta matriz relaciona las articulaciones activas $\dot{\mathbf{q}}_a$ y las coordenadas articulares generalizadas del subsistema serie $\dot{\mathbf{q}}_r$:

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \underbrace{J_s}_{n_s \times n_a} & \underbrace{J_p}_{n_p \times n_a} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a = T \dot{\mathbf{q}}_a \quad (8)$$

donde J_s and J_p son las matrices jacobianas que relacionan las coordenadas articulares pasivas no sensorizadas \mathbf{q}_p y sensorizadas \mathbf{q}_s y las activas \mathbf{q}_a . Estas matrices se pueden obtener diferenciando (5) o a partir de las ecuaciones de velocidad vectorial.

- Matriz de transformación T_q

Esta matriz de transformación relaciona las velocidades de las coordenadas de control $\dot{\mathbf{q}}$ y las velocidades de las coordenadas articulares generalizadas del subsistema serie $\dot{\mathbf{q}}_r$. Esta expresión se utilizará para proyectar el modelo dinámico en el espacio de coordenadas de control asociado a $\dot{\mathbf{q}}$.

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \begin{bmatrix} I_{(n_a + n_s) \times (n_a + n_s)} & J_{q_p/q} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = T_q \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (9)$$

Donde $J_{q_p/q} = \frac{\partial \mathbf{q}_p}{\partial \mathbf{q}}$ es la matriz Jacobiana que relaciona las velocidades de las coordenadas de control $\dot{\mathbf{q}}$ y las velocidades de las articulaciones pasivas no sensorizadas $\dot{\mathbf{q}}_p$.

2.4 Problema de aceleración

Las ecuaciones de aceleración se obtienen diferenciando las ecuaciones de velocidad (6), (8) y (9), obteniendo:

$$\mathbf{a} = J_R \cdot \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{J}_R \cdot \dot{\mathbf{q}}_a \quad (10)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \frac{d}{dt}(T \cdot \dot{\mathbf{q}}_a) = T \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{T} \dot{\mathbf{q}}_a \quad (11)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \frac{d}{dt}(T_q \cdot \dot{\mathbf{q}}) = T_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{T}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (12)$$

donde, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ es la aceleración cartesiana del elemento terminal, $\dot{T} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \dot{J}_s & \dot{J}_p \end{bmatrix}$ y

$$\dot{T}_q = \begin{bmatrix} 0_{(n_a + n_s) \times (n_a + n_s)} & \dot{J}_{q_p/q} \end{bmatrix}.$$

2.5 Ecuación Lagrangiana

Una vez que se han obtenido todas las relaciones cinemáticas (secciones 2.1 a 2.4) el modelo dinámico del robot puede ser calculado utilizando la formulación Lagrangiana con multiplicadores. Para ello, el primer paso es considerar el mecanismo como la suma de los dos subsistemas: plataforma móvil y subsistemas serie. De este modo, se calculará la ecuación Lagrangiana de cada subsistema en función de las coordenadas naturales de cada uno. La función Lagrangiana de la plataforma móvil L_p estará definida en función de las coordenadas cartesianas \mathbf{x} , mientras que la función Lagrangiana asociada al subsistema serie L_s estará definido en función de las coordenadas articulares generalizadas \mathbf{q}_r .

$$L = L_s(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) + L_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (13)$$

2.6 Ecuaciones diferenciales de los subsistemas

Una vez definida la ecuación Lagrangiana, se procede a derivar las ecuaciones diferenciales asociadas a cada subsistema. Dado que los dos subsistemas están definidos en diferentes coordenadas se pueden diferenciar dos conjuntos de ecuaciones diferenciales, uno por cada sistema. Adicionalmente, para modelar las restricciones que unen ambos subsistemas, se introducen n multiplicadores de Lagrange:

- Ecuaciones diferenciales asociada con el subsistema serie $j = 1, \dots, n_r$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_{r_j}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial q_{r_j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r)}{\partial q_{r_j}} + \tau_{r_j} \quad (14)$$

donde τ_{r_j} representa la fuerza/par virtual asociado a \mathbf{q}_r .

- Ecuaciones diferenciales asociadas a la plataforma móvil $k = 1, \dots, n$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r)}{\partial x_k} + Q_{x_k} \quad (15)$$

donde Q_{x_k} son las fuerzas/pares externos aplicados en el elemento terminal.

Agrupando los términos de las ecuaciones diferenciales en matrices y considerando que los multiplicadores de Lagrange, en este caso, están relacionados con las fuerzas internas que unen ambos subsistemas, es posible obtener un sistema de ecuaciones tal que [3]:

$$\begin{aligned} D_r(\mathbf{q}_r) \ddot{\mathbf{q}}_r + C_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) \dot{\mathbf{q}}_r + G_r(\mathbf{q}_r) &= J_C^T \cdot \mathbf{f}_c + \boldsymbol{\tau}_r \\ D_x(\mathbf{x}) \mathbf{a} + C(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{v} + G(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}_c + \mathbf{Q}_x \end{aligned} \quad (16)$$

donde D_r , D_x representan las matrices de inercia, C_r los términos de coriolis, G_r , G_x los vectores de gravedad de cada subsistema. $\boldsymbol{\tau}_r$ es el vector de las fuerzas/pares virtuales τ_{r_j} asociados a \mathbf{q}_r . \mathbf{Q}_x es el vector de fuerzas/pares externos aplicados en la plataforma móvil asociados a Q_{x_k} . \mathbf{f}_c modela las fuerzas internas de reacción entre la plataforma y las cadenas serie definidas en el sistema de referencia cartesiano. La matriz J_C proyecta este valor en el espacio asociado a \mathbf{q}_r .

2.7 Obtención del Modelo dinámico

El modelo dinámico puede ser obtenido en términos de \mathbf{q}_r utilizando las relaciones (7) y (10) y eliminando las fuerzas internas de la ecuación:

$$\boldsymbol{\tau}_r = D'(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) \ddot{\mathbf{q}}_r + C'(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}_r) \dot{\mathbf{q}}_r + G'(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) + F_{ext}$$

$$\begin{cases} D'(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) = [D_r - J_C^T D_x A_x] \\ C'(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}_r) = [C_r - J_C^T (D_x B_x + C_x J_C)] \\ G'(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) = [G_r - J_C^T G_x] \\ F_{ext} = J_{P_r}^T \cdot \mathbf{Q}_x \end{cases} \quad (17)$$

donde $D', C' \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ y $\boldsymbol{\tau}_r, G', F_{ext} \in \mathbb{R}^{n_r}$

Para proyectar los pares $\boldsymbol{\tau}_r$ de dimensión n_r asociados a \mathbf{q}_r en el espacio actuado \mathbf{q}_a de dimensión n se requiere el uso de la matriz de transformación T (8). Adicionalmente, utilizando las relaciones cinemáticas (9) y (12) se puede definir el modelo en función de las coordenadas de control \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= D(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{q}}_r) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) + F_e \\ \begin{cases} D(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) &= T^T \cdot D' \cdot T_q \\ C(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) &= T^T \cdot (C' \cdot T_q + D' \cdot \dot{T}_q) \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{q}_r) &= T^T \cdot G' \\ F_e &= T^T \cdot F_{ext} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

La ecuación (18) define el modelo dinámico del robot considerando tanto articulaciones activas como articulaciones pasivas sensorizadas. Es por lo tanto un modelo redundante y las matrices no son cuadradas, de forma que se requieren realizar operaciones adicionales si se desea obtener el problema dinámico directo. Sin embargo, la obtención del modelo dinámico inverso es suficiente para aplicar estrategias de control basadas en modelo.

3 Consideraciones Adicionales

El obtener el modelo dinámico en términos de únicamente las coordenadas articulares activas es un caso particular de la metodología propuesta en la sección 2. En este caso, \mathbf{q}_s es un vector vacío y resulta que $\mathbf{q} = \mathbf{q}_a$, por lo que $T = T_q$.

El modelo tiene la misma forma que el definido en (18), pero debido a que las coordenadas de control no son redundantes, la matriz de inercia es cuadrada e invertible.

Adicionalmente, el método propuesto en las sección 2 es válido para el caso general de robot paralelo donde existe plataforma móvil como elemento terminal. En ciertos casos, esta plataforma no existe. En este caso, la metodología es válida y se considera la plataforma móvil como un punto sin masa ni inercia.

Por otro lado, el método pretende ser genérico y no optimiza el coste computacional, pudiendo requerir un gran número de cálculos matriciales.

Por último, en el caso de manipuladores simples, como el caso de robots planares, no es necesario

utilizar las 6 coordenadas de \mathbf{x} y se pueden eliminar los términos nulos. Adicionalmente, en el caso planar y en robots de movimiento SCARA se cumple que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$, lo que simplifica bastante el problema dinámico.

4 Aplicación al robot planar 3RRR

El 3RRR es un robot planar de 3 gdl compuesto por una plataforma móvil y tres cadenas serie de dos grados de libertad que la unen a la base (Fig. 2).

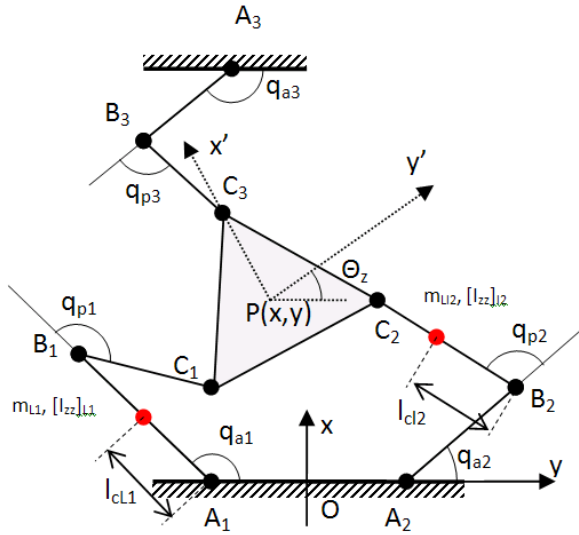


Figura 2: Robot Paralelo 3RRR

Sea $P(x, y)$ la posición del elemento terminal en el plano y θ_z su orientación. Sea O el origen del sistema de referencia fijo y A_i, B_i, C_i , con $i = 1, 2, 3$, las articulaciones de rotación de cada cadena serie que une la plataforma móvil a la base. Los parámetros del mecanismo se definen en la tabla 2.

Sean $\mathbf{q}_a = [q_{a1} \ q_{a2} \ q_{a3}]^T$ el vector de coordenadas articulares activas, $\mathbf{q}_p = [q_{p1} \ q_{p2} \ q_{p3}]^T$ el vector de coordenadas articulares pasivas y $\mathbf{x} = [x \ y \ \theta_z]^T$ el vector de coordenadas cartesianas. Nótese que en este caso, el robot es planar y no es necesario definir un vector de 6 dimensiones. Adicionalmente se cumple $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$.

Para el modelado, se considerarán masas puntuales concentradas en el centro de masas y la fricción será despreciada.

4.1 Modelado dinámico redundante del robot 3RRR

Se consideraran las articulaciones pasivas \mathbf{q}_{pi} , asociadas a los puntos B_i del robot, sensorizadas, tal que $\mathbf{q}_s = [q_{p1} \ q_{p2} \ q_{p3}]^T$ y $\mathbf{q}_r = \mathbf{q}$.

A continuación, se siguen las pautas propuestas en la sección 2 para la obtención del modelo dinámico del robot 3RRR:

4.1.1 Ecuaciones de cierre

Basándose en la Fig. 2, se obtienen dos conjuntos de ecuaciones vectoriales de cierre :

$$\vec{OP} = \vec{OA_i} + A_i\vec{B_i} + B_i\vec{C_i} + C_i\vec{P} \quad (19)$$

$$0 = \vec{OA_i} + A_i\vec{B_i} + B_i\vec{C_i} + C_i\vec{C_{i+1}} - B_{i+1}\vec{C_{i+1}} - A_{i+1}\vec{B_{i+1}} - \vec{OA_{i+1}} \quad (20)$$

donde, $i = 1, 2, 3$ y la condición de contorno $i = 3 \rightarrow i + 1 = 1$.

Operando estas ecuaciones de cierre se puede obtener la ecuación que relaciona \mathbf{q}_a y \mathbf{x} :

$$\phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}_a) = 0 = -l_i^2 + (x - OA_{xi} - L_i \cos(q_{a_i}) - d_i \cos(\theta_z + \phi_i))^2 + (y - OA_{yi} - L_i \sin(q_{a_i}) - d_i \sin(\theta_z + \phi_i))^2 \quad (21)$$

Donde $i = 1, 2, 3$ y ϕ_i es un valor constante que depende de la geometría de la plataforma.

La relación entre $\mathbf{q}_r = \mathbf{q}$ y \mathbf{x} :

$$\Gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0 = -(OA_{xi}^2 + OA_{yi}^2) + (x - L_i \cos(q_{a_i}) - l_i \cos(q_{a_i} + q_{p_i}) - d_i \cos(\theta_z + \phi_i))^2 + (y - L_i \sin(q_{a_i}) - l_i \sin(q_{a_i} + q_{p_i}) - d_i \sin(\theta_z + \phi_i))^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (22)$$

Para obtener la relación entre $\mathbf{q}_s = \mathbf{q}_p$ y \mathbf{q}_a se utiliza la ecuación vectorial (20):

$$f_i(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_s) = 0 = -h_{i(i+1)}^2 + [l_i \cos(q_{a_i} + q_{p_i}) + L_i \cos q_{a_i} + OA_{xi} - OA_{x(i+1)} - L_{i+1} \cos q_{a_{i+1}} - l_{i+1} \cos(q_{a_{i+1}} + q_{p_{i+1}})]^2 + [l_i \sin(q_{a_i} + q_{p_i}) + L_i \sin q_{a_i} + OA_{yi} - OA_{y(i+1)} - L_{i+1} \sin q_{a_{i+1}} - l_{i+1} \sin(q_{a_{i+1}} + q_{p_{i+1}})]^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

Elemento	Longitud	Masa	Inercia	Centro de Masas
$\overline{A_i B_i}$	L_i	m_{L_i}	$[I_{zz}]_{L_i}$	$l_{c_{L_i}}$
$\overline{C_i C_{i+1}}$	l_i	m_{l_i}	$[I_{zz}]_{l_i}$	$l_{c_{l_i}}$
$C_1 C_2 C_3$	$\begin{cases} h_{i(i+1)} = \overline{C_i C_{i+1}} \\ d_i = \overline{C_i P} \end{cases}$	m_p	$[I_{zz}]_p$	$P(x, y)$
Carga	-	m_c	$[I_{zz}]_c$	$P(x, y)$
Sensor	-	m_s	$[I_{zz}]_s$	$B_i(x, y)$

Tabla 2: Parametros del robot paralelo 3RRR

4.1.2 Problema de Posición

El problema de posición directo puede ser calculado analíticamente utilizando (19). El problema de posición inverso se calcula a partir de (21). Los detalles en la resolución de este problema se pueden encontrar en [22].

4.1.3 Problema de Velocidad

Para determinar la ecuación de velocidad y las matrices Jacobianas, se derivarán las ecuaciones de cierre (21), (22) y (23).

De este modo, la matriz Jacobiana del robot que relaciona $\dot{\mathbf{x}}$ y $\dot{\mathbf{q}}_a$:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{q}_a)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{q}_a)}{\partial \mathbf{q}_a} \dot{\mathbf{q}}_a = J_{xa} \dot{\mathbf{x}} + J_{qa} \dot{\mathbf{q}}_a \quad (24)$$

$$J_R = -J_{xa}^{-1} J_{qa}$$

La matriz Jacobiana de restricción se calcula derivando (22):

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = J_x \dot{\mathbf{x}} + J_q \dot{\mathbf{q}} \quad (25)$$

$$J_C = -J_x^{-1} \cdot J_q$$

Para obtener la matriz de transformación T se deriva inicialmente (23):

$$\frac{\partial f(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_s)}{\partial \mathbf{q}_a} \dot{\mathbf{q}}_a + \frac{\partial f(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_s)}{\partial \mathbf{q}_s} \dot{\mathbf{q}}_s = J_{qas} \dot{\mathbf{q}}_a + J_{qs} \dot{\mathbf{q}}_s \quad (26)$$

Utilizando (26) T queda definida como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_a} \dot{\mathbf{q}}_a = \frac{\partial \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix}}{\partial \mathbf{q}_a} \dot{\mathbf{q}}_a = \\ &= \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} - J_{qs}^{-1} J_{qas} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a = T \cdot \dot{\mathbf{q}}_a \end{aligned} \quad (27)$$

4.1.4 Problema de Aceleración

Para obtener las ecuaciones de aceleración, se derivan las ecuaciones de velocidad (25), (24) y (26):

$$J_{xa} \ddot{\mathbf{x}} + J_{qa} \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{J}_{qa} \dot{\mathbf{q}}_a + \dot{J}_{xa} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (28)$$

$$J_x \ddot{\mathbf{x}} + J_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{J}_x \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (29)$$

$$J_{qas} \ddot{\mathbf{q}}_a + J_{qs} \ddot{\mathbf{q}}_s + \dot{J}_{qas} \dot{\mathbf{q}}_a + \dot{J}_{qs} \dot{\mathbf{q}}_s = 0 \quad (30)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = T \ddot{\mathbf{q}}_a + \dot{T} \dot{\mathbf{q}}_a \quad (31)$$

4.1.5 Ecuación Lagrangiana

Se considera la separación del robot en dos subsistemas: plataforma móvil y subsistema serie. La ecuación Lagrangiana de la plataforma L_p se define en función de la energía cinética de la plataforma móvil K_p y su energía potencial U_p :

$$\begin{cases} K_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T D_x \dot{\mathbf{x}} \\ D_x = \begin{bmatrix} m_p + m_c & 0 & 0 \\ 0 & m_p + m_c & 0 \\ 0 & 0 & [I_{zz}]_p^c + [I_{zz}]_c^c \end{bmatrix} \\ U_p = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p \cdot g \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y} = G_x \cdot \mathbf{y} \end{cases} \quad (32)$$

$$L_p = K_p - U_p$$

Para el subsistema serie, el modelo dinámico de cada brazo se corresponde a un robot serie de 2 gdl, cuya ecuación Lagrangiana es:

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[m_{L_i} l_{L_i}^2 + m_{l_i} \left(L_i^2 + l_{c_{l_i}}^2 + 2L_i l_{c_{l_i}} \cos q_{p_i} \right) \right. \\ &+ L_i^2 + m_c L_i^2 + [I_{zz}]_{L_i}^c + [I_{zz}]_{l_i}^c + [I_{zz}]_{s_i}^c \cdot \dot{q}_{a_i}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left[m_{l_i} \left(l_{c_{l_i}}^2 + L_i l_{c_{l_i}} \cos q_{p_i} \right) + [I_{zz}]_{l_i}^c \right] \dot{q}_{a_i} \dot{q}_{p_i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[m_{l_i} l_{c_{l_i}}^2 + [I_{zz}]_{l_i}^c \right] \dot{q}_{p_i}^2 \\ &- \sum_{i=1}^3 \left[(m_{L_i} l_{c_{L_i}} + m_{s_i} L_i + m_{l_i} L_i) g \sin q_{a_i} + \right. \\ &\left. - m_{l_i} l_{c_{l_i}} g \sin (q_{a_i} + q_{p_i}) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Combinando (32) y (33) se obtiene la ecuación Lagrangiana de todo el sistema.

$$L = L_p + L_s \quad (34)$$

4.1.6 Sistemas de ecuaciones diferenciales

Utilizando (34), se aplica la formulación de Lagrange con Multiplicadores, siguiendo el procedimiento descrito en 2.6:

- Ecuaciones diferenciales asociadas a la plataforma móvil $k = 1, \dots, 3$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(x, q)}{\partial x_k} + Q_{xk} \quad (35)$$

Donde $[Q_{xk}] = \mathbf{Q}_x$ son las fuerzas/pares externos aplicados en la plataforma.

Tras calcular las derivadas parciales de (35) e identificando las matrices de inercia D_x y gravedad G_x ¹, se obtiene una expresión:

$$D_x \ddot{\mathbf{x}} + G_x - Q_x = J_x^T \boldsymbol{\lambda} \quad (36)$$

- Ecuaciones diferenciales asociadas al subsistema serie $j = 1, \dots, 6$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_{rj}} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial q_{rj}} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot \frac{\partial \Gamma_i(x, q)}{\partial q_{rj}} + \tau_{rj} \quad (37)$$

De forma similar, tras derivar la ecuación Lagrangiana y agrupar términos, se obtiene:

$$D_q \ddot{\mathbf{q}} + C_q \dot{\mathbf{q}} + G_q = \tau_r + J_q^T \boldsymbol{\lambda} \quad (38)$$

Con lo que queda definido el sistema de ecuaciones diferenciales (36),(38) que modela el comportamiento del sistema.

4.1.7 Obtención del Modelo dinámico

Tal y como se ha descrito en la sección 2, para obtener el modelo dinámico en términos de las coordenadas de control $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a \quad \mathbf{q}_s]^T$, se han de aplicar una serie de transformaciones a las ecuaciones (36) y (38). Primero, utilizando la matriz de restricción del robot (25) se eliminan los multiplicadores de Lagrange. Posteriormente, el modelo es proyectado en el espacio articular actuado utilizando la matriz de transformación T (27) y, por último, el modelo se define en función de las

coordenadas de control utilizando las expresiones (25) y (29):

$$D\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + G - F_{ext} = \boldsymbol{\tau}_{q_a} \quad (39)$$

with $\begin{cases} D = T^T(D_q + J_C^T D_x J_C) \\ C = T^T(C_q + J_C^T D_x \dot{J}_C) \\ G = T^T(G_q + J_C^T G_x) \\ F_{ext} = T^T J_C^T Q_x \end{cases}$

Donde $\boldsymbol{\tau}_{q_a}$ define los pares o fuerzas a aplicar en las articulaciones.

Con esta metodología se obtiene un modelo dinámico redundante, que depende de tanto las articulaciones activas como de aquellas pasivas sensorizadas. Por lo tanto, cuando se emplea dicho modelo inverso en estrategias de control basado en modelo, la información redundante se traduce en una mayor precisión y un control más robusto ante variaciones en los parámetros.

4.2 Modelado dinámico considerando articulaciones activas

El proceso de cálculo del modelo considerando únicamente articulaciones activas es similar al planteado en 4.1. Tras resolver el problema cinemático completo y definir las ecuaciones Lagrangianas y sus derivadas, se obtienen el sistema de ecuaciones formado por (36) y (38). La eliminación de los multiplicadores de Lagrange de dicho sistema se realiza introduciendo la Jacobiana de restricción J_C , para después proyectar el modelo en el espacio articular actuado premultiplicando éste por T^T (27). Posteriormente, se utilizan las expresiones cinemáticas (24), (28),(27) y (31) para definir el modelo en función de las coordenadas articulares actuadas:

$$D\ddot{\mathbf{q}}_a + C\dot{\mathbf{q}}_a + G - F_{ext} = \boldsymbol{\tau}_{q_a} \quad (40)$$

with $\begin{cases} D = T^T(D_q T + J_C^T D_x J_R) \\ C = T^T(C_q T + D_q(\dot{T}) + J_C^T D_x \dot{J}_R) \\ G = T^T(G_q + J_C^T G_x) \\ F_{ext} = T^T J_C^T Q_x \end{cases}$

5 Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una metodología para el cálculo del modelo dinámico de robots paralelos. El método, basado en la formulación de Lagrange, combina las ideas de trabajo previos para crear un método genérico, capaz de definir

¹La matriz de coriolis es nula en el caso planar

un modelo en términos de únicamente las articulaciones activas o en términos de las articulaciones activas y pasivas. La consideración de sensores extra explícitamente en el modelo puede ser utilizada en técnicas de control basada en modelo para obtener un mejor rendimiento de control, una mayor robustez ante imprecisiones del modelo y una mejora del error de posicionamiento y seguimiento de trayectoria. El método propuesto es sistemático, basado en matrices, que puede ser fácilmente aplicado. El método se ilustra con la obtención del modelo dinámico para el robot 3RRR.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco (Beca BF106.2R129) y el Ministerio de Educación y Ciencia, bajo el proyecto DPI 2006-04003.

Referencias

- [1] J. Angeles. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*. Springer, 2007.
- [2] A. Barrientos, L.F. Peñín, C. Balaguer, and R. Aracil. *Fundamentos de Robótica (2ª Edición)*. McGraw Hill, 2007.
- [3] S. Bhattacharya, H. Hatwal, and A. Ghosh. An on-line parameter estimation scheme for generalized stewart platform type parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 32(1):79–89, 1997.
- [4] S. Bhattacharya, N. Nenchev, and M. Uchiyama. A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 33(7):957–964, 1998.
- [5] B. Dasgupta and P. Choudhury. general strategy based on the newton-euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 34:801–824, 1999.
- [6] B. Dasgupta and T.S. Mruthyunjaya. A newton-euler formulation for the inverse dynamics of the stewart platform. *Mechanism and Machine Theory*, 33(8):1135–1152, 1998.
- [7] W. Q. D. Do and D. C. H. Yang. Inverse dynamic analysis and simulation of a platform type of robot. *Journal of Robotic Systems*, 5(3):209–227, 1988.
- [8] F. Ghorbel. Modeling and pd control of closed-chain mechanical systems. *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 549–542, 1995.
- [9] F. Ghorbel, O. Chételet, R. Gunawardana, and R. Longchamp. Modeling and set point control of closed-chain mechanisms: Theory and experiment. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 8(5):801–815, 2000.
- [10] F. Ghorbel, O. Chételet, and R. Longchamp. A reduced model for constrained rigid bodies with application to parallel robots. *Proceedings of the IFAC Symposium on Robot Control*, pages 57–62, 1994.
- [11] R. Gunawardana and F. Ghorbel. Pd control of closed-chain mechanical systems: An experimental study. *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robot Control (SY-ROCO'97)*, pages 79–84, 1997.
- [12] H.B. Guo and H.R. Li. Dynamic analysis and simulation of a six degree of freedom stewart platform manipulator. *Proceedings of IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science*, 220:61–72, 2006.
- [13] W. Khalil and S. Guegan. Inverse and direct dynamic modeling of gough-stewart robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 20(4):754–762, 2004.
- [14] W. Khalil and O. Ibrahim. General solution for the dynamic modeling of parallel robots. *Journal of Intelligent Robot Systems*, pages 19–37, 2007.
- [15] K.-M. Lee and D. K. Shah. Dynamic analysis of a three-degree-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(40):361–367, 1988.
- [16] F. Marquet, O. Company, S. Krut, and F. Pierrot. Enhancing parallel robots accuracy with redundant sensors. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4114–4119, 2002.
- [17] J. P. Merlet. Still a long way to go on the road for parallel mechanisms. *Proceedings of the ASME 2002 DETC Conference.*, 2002.
- [18] J. P. Merlet. *Parallel Robots (Second Edition)*. Kluwer, 2006.
- [19] J. Murray and G. Lovell. Dynamic modeling of closed-chain robotic manipulators and implications for trajectory control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(4):522–528, 1989.

- [20] Y. Nakamura and M. Godoussi. Dynamics computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(3):294–302, 1989.
- [21] S. Riebe and H. Ulbrich. Modelling and on-line computation of the dynamics of a parallel kinematic with six degrees-of-freedom. *Archive of Applied Mechanics*, 72:813–829, 2003.
- [22] Lung-Wen Tsai. *Robot Analysis*. Wiley-Interscience, 1999.
- [23] Lung-Wen Tsai. Solving the inverse dynamics of a stewart-gough manipulator by the principle of virtual work. *ASME Journal of Mechanical Design*, 122:3–9, 2000.
- [24] J. Wang and C. Gosselin. A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulator. *Multibody System Dynamics*, 2:317–334, 1998.
- [25] Y. Zhiyong, W. Jiang, and M. Jiangping. Motor-mechanism dynamic model based neural network optimized ctc control of a high speed parallel manipulator. *Mechatronics*, doi:10.1016/j.mechatronics.2007.04.009, 2007.
- [26] Z. Zhu, J. Li, Z. Gan, and W. Zhang. Kinematic and dynamic modelling for real-time control of tau parallel robot. *Mechanism and Machine Theory*, 40:1051–1067, 2005.