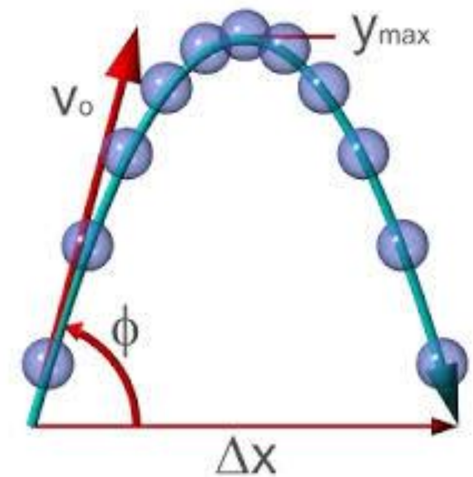
UNIDAD III

Control Cinemático del Robot

1. Tipos de trayectorias
2. Cinemática directa e inversa.
3. Interpolación de trayectorias



Universidad Tecnológica
San Luis Río Colorado

UNIDAD III

Tema No. 1

1. Tipos de trayectorias

Objetivos:

- Describir los tipos y características de las trayectorias punto a punto, trayectorias coordinadas y trayectorias continuas
- Seleccionar el tipo de trayectoria para una tarea específica

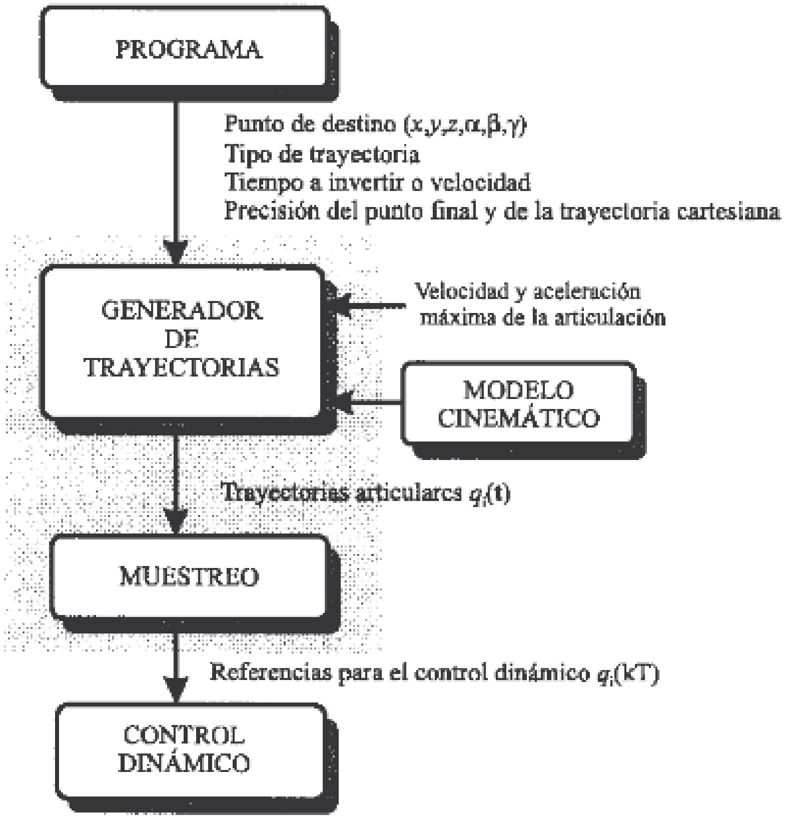
Universidad Tecnológica
San Luis Río Colorado

Introducción

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia. De este modo, la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus variables articuladas.

Por otra parte, la cinemática del robot trata también de encontrar las relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo.

Introducción



Funcionamiento del control cinemático

Trayectorias

El control cinemático en robótica es una herramienta que nos permite establecer cuales son las trayectorias que debe seguir cada articulación del robot a lo largo del tiempo para conseguir los objetivos fijados por el usuario, tales como:

– Punto de destino
– Tipo de trayectoria del extremo
– Tiempo invertido

Para ello es necesario tomar en cuenta las restricciones físicas de los accionamientos y criterios de calidad tales como sensibilidad, precisión, repetitividad, etc.

Trayectorias

Que es una trayectoria?

En cinemática, trayectoria es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento. La trayectoria depende del sistema de referencia en el que se describa el movimiento, es decir el punto de vista del observador.

Tipos de trayectorias

- Trayectorias punto a punto
  - Movimiento eje a eje
  - Movimiento simultáneo de ejes
- Trayectorias coordinadas o isócronas
- Trayectorias continuas

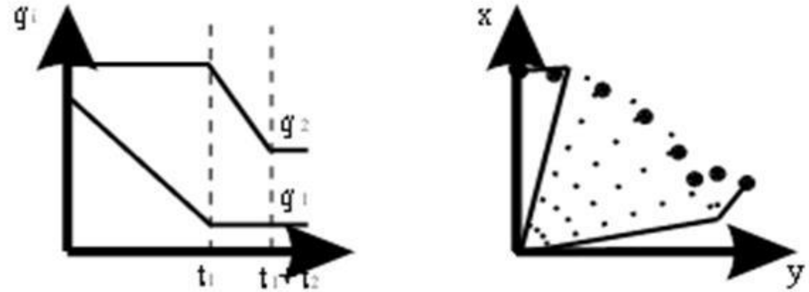
Trayectorias punto a punto

En este tipo de trayectorias cada articulación evoluciona desde la posición inicial a la final sin considerar el estado o evolución de las demás articulaciones.

Tipos:

a) Movimiento eje a eje:

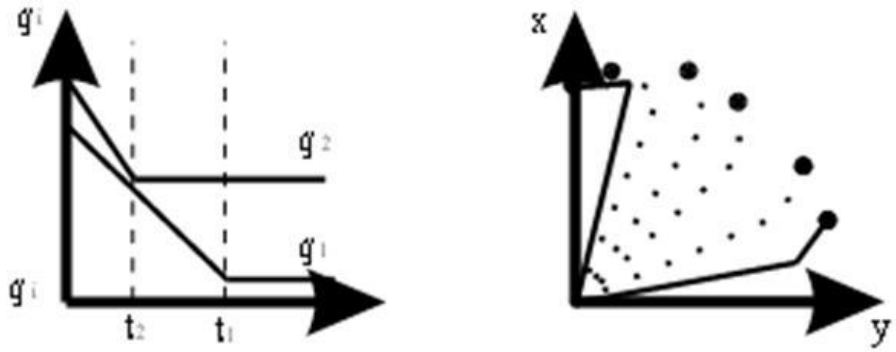
En este caso solamente se mueve un eje cada vez. Esto es, uno de los eslabones ejecuta un movimiento y el segundo eslabón inicia su movimiento hasta que el primero haya terminado. Esto simplifica el control de los movimientos, sin embargo repercute en un aumento en el tiempo de ciclo.



Trayectorias punto a punto

b) Movimiento simultáneo de ejes:

- Los ejes se empiezan a mover al mismo tiempo, de modo que el movimiento cesa cuando acaba el eje mas lento. Esto implica que uno de los ejes puede dejar de moverse antes que el otro.
- Este tipo de trayectorias se utilizan solo en robots muy simples o con unidad de control limitada.

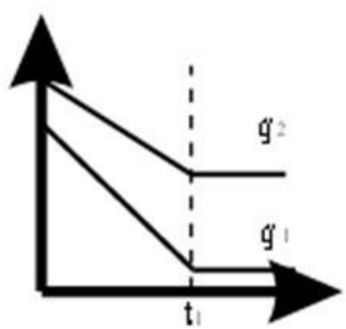


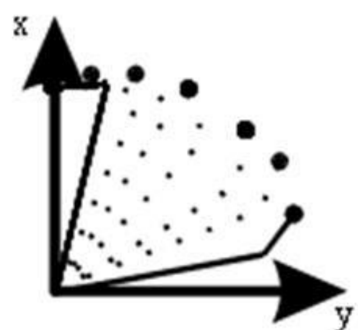
Trayectorias coordinadas o isócronas

En este tipo de trayectorias los ejes se mueven simultáneamente ralentizando las articulaciones más rápidas de forma que todos los ejes acaben al mismo tiempo. De este modo se evita que algunos actuadores trabajen forzando sus velocidades y aceleraciones.

Es común el hacer un cálculo previo averiguando cuál es esta articulación más lenta y que tiempo invertirá o bien aplicando fórmulas matemáticas para hacer coincidir los paros de los actuadores.

- Tiempo total = menor posible
- Se evitan exigencias inútiles de velocidad y aceleración



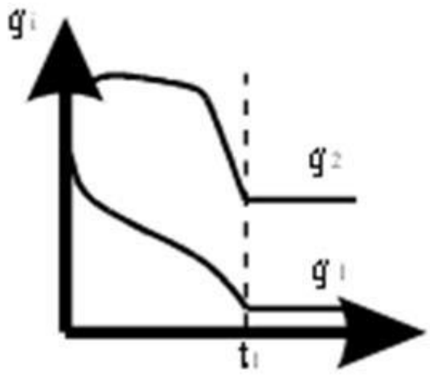


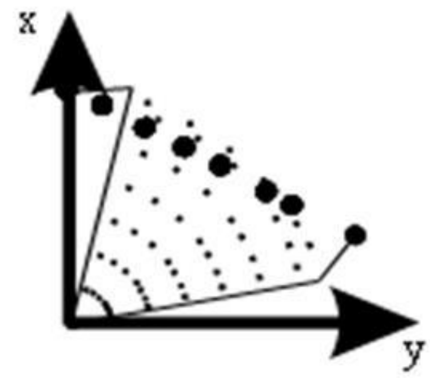
Trayectorias continuas

Cada articulación sigue un movimiento aparentemente caótico con posibles cambios de dirección y velocidad y sin coordinación con el resto de las articulaciones. Sin embargo, el resultado conjunto será que el extremo del robot describirá la trayectoria deseada.

- Trayectorias típicas:

  Línea recta, Arco de círculo, parábola, zig-zag, etc.





UNIDAD III

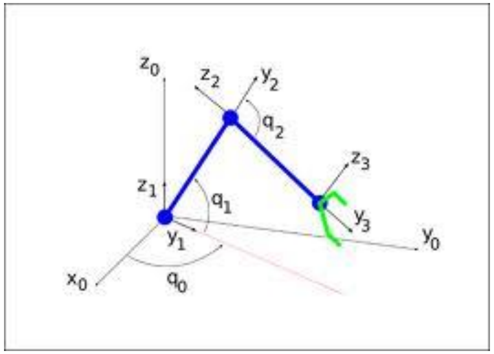
Tema No. 2

Cinemática directa e inversa

Objetivos:

- Definir el problema cinemático directo e inverso.
- Relacionar la posición y orientación espacial del extremo del robot a partir de sus coordenadas articulares.
- Describir el método geométrico para la resolución de la cinemática inversa.

Universidad Tecnológica
San Luis Río Colorado



Introducción

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia. Así, la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman las coordenadas articulares.

Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot, el primero de ellos se conoce como el problema cinemático directo, y el segundo se conoce como problema cinemático inverso.

Problema cinemático directo

Consiste en determinar cual es la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos del robot.

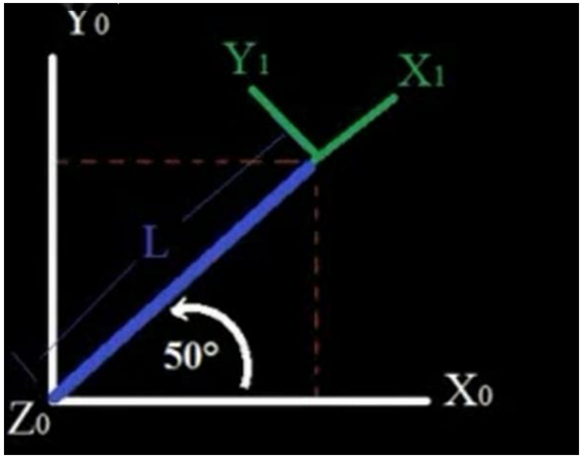
Problema cinemático inverso

Resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas.

Cinemática directa

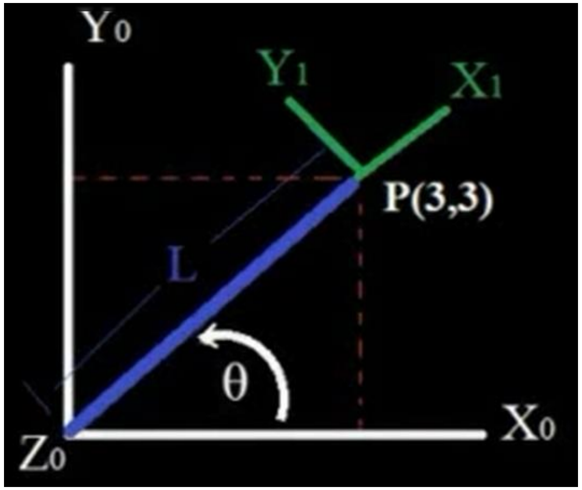
Se denomina **cinemática directa** a una técnica usada en software de gráficos, para calcular la posición de partes de una estructura articulada a partir de sus componentes fijas y las transformaciones inducidas por las articulaciones de la estructura.

Dicho de otra manera, la cinemática directa permite conocer cuál es la posición y orientación que adopta el extremo de un robot cuando cada una de las variables que fijan la posición u orientación de sus articulaciones toma valores determinados.



Cinemática inversa

La cinemática inversa consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.



Universidad Tecnológica San Luis Río Colorado

Resolución del problema cinemático directo

La resolución al problema cinemático directo consiste en encontrar las relaciones que permiten conocer la localización espacial del extremo del robot a partir de sus coordenadas articulares.

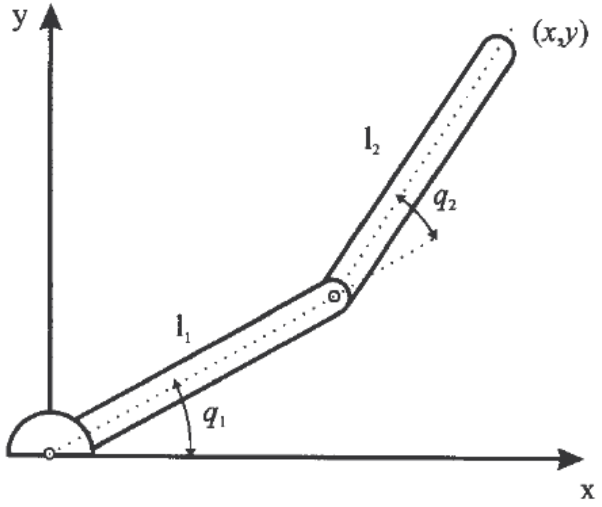
De este modo, existen diferentes alternativas para resolver el problema cinemático directo, siendo las soluciones mas importantes:

1) El método geométrico.
2) El método de transformaciones homogéneas.

Resolución del problema cinemático directo

Método geométrico para el problema cinemático directo.
Se utiliza solamente para sistemas con pocos eslabones (2 0 3 GDLs).

Ejemplo: Cinemática directa de un mecanismo con 2 GDL.



$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2)$$

Para robots con mas GDL se plantea un método sistemático basado en el desarrollo de matrices homogéneas

Resolución del problema cinemático directo

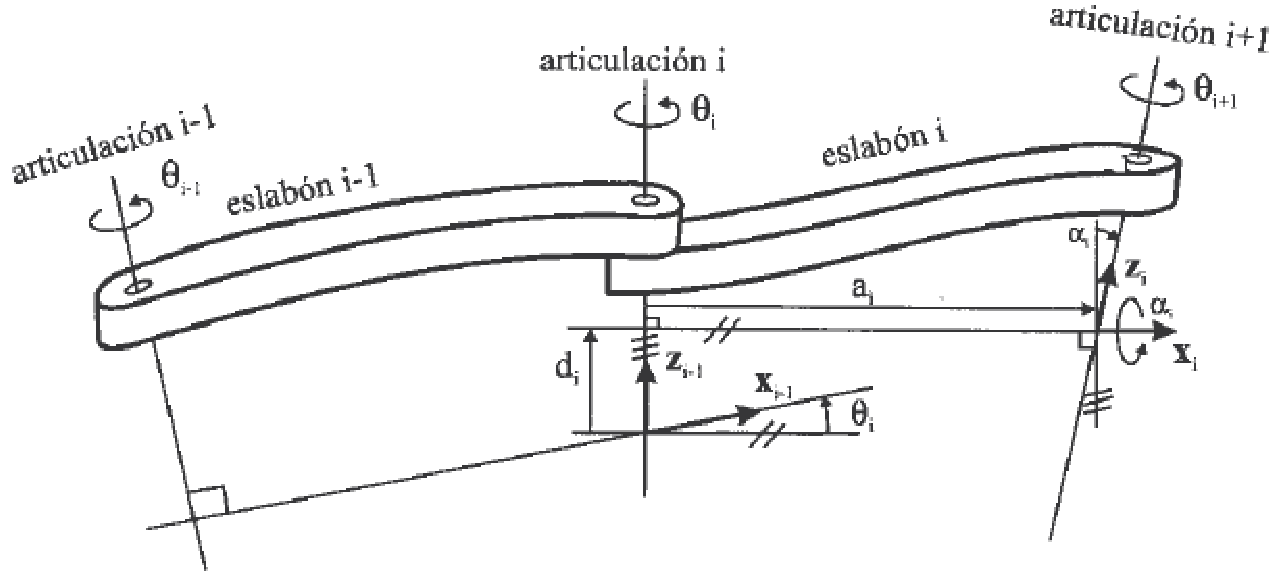
Método de Transformación homogénea

En general los robot de n grados de libertad están constituidos por n eslabones unidos por n articulaciones de modo que por cada relación eslabón-articulación se toma como un grado de libertad, de esta manera a cada eslabón se le puede colocar un sistema coordenado y de esta manera podremos conocer las matrices homogéneas que nos permitirán conocer rotaciones y traslaciones del robot. De este modo el problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz homogénea de transformación T que relacione la posición y la orientación del extremo del robot respecto del sistema de referencia fijo en su base.

$$\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_{6} = {}^{0}\mathbf{A}_{1}\,{}^{1}\mathbf{A}_{2}\,{}^{2}\mathbf{A}_{3}\,{}^{3}\mathbf{A}_{4}\,{}^{4}\mathbf{A}_{5}\,{}^{5}\mathbf{A}_{6}$$

Para obtener la matriz de transformación T es necesario que los sistemas hayan sido definidos a partir de determinadas normas, dentro de las cuales se consideran los parámetros de *Denavit-Hartenberg*, a partir de lo cual se desprende un algoritmo para la obtención de un modelo cinemático directo.

Resolución del problema cinemático directo



Resolución del problema cinemático directo

Algoritmos de *Denavit-Hartenberg* para la obtención del modelo cinemático directo

Este método de utiliza para resolver de forma trivial el problema de la cinemática directa, y como punto inicial para plantear el problema de la cinemática inversa. Se trata de un procedimiento sistemático para describir la estructura cinemática de una cadena articulada constituida por articulaciones con un solo grado de libertad.

En este método a cada articulación se le asigna un Sistema de Referencia Local con origen en un punto Qi y ejes ortonormales { Xi,Yi,Zi } comenzando con un primer Sistema de Referencia fijo e inmóvil dado por los ejes {X0,Y0,Z0 } anclado a un punto fijo Q0 de la Base sobre la que está montada toda la estructura de la cadena.

Resolución del problema cinemático directo

Parámetros de *Denavit-Hartenberg*

Son cuatro parámetros relacionados con un manipulador robótico , los cuales dependen de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y el siguiente.

Θ1 Es el Angulo que forman los ejes Xi-1 y Xi medido en un plano perpendicular al eje zi-1, utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

di Es la distancia a lo largo del eje zi-1 desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-esimo hasta la intersección del eje zi-1 con el eje xi. Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

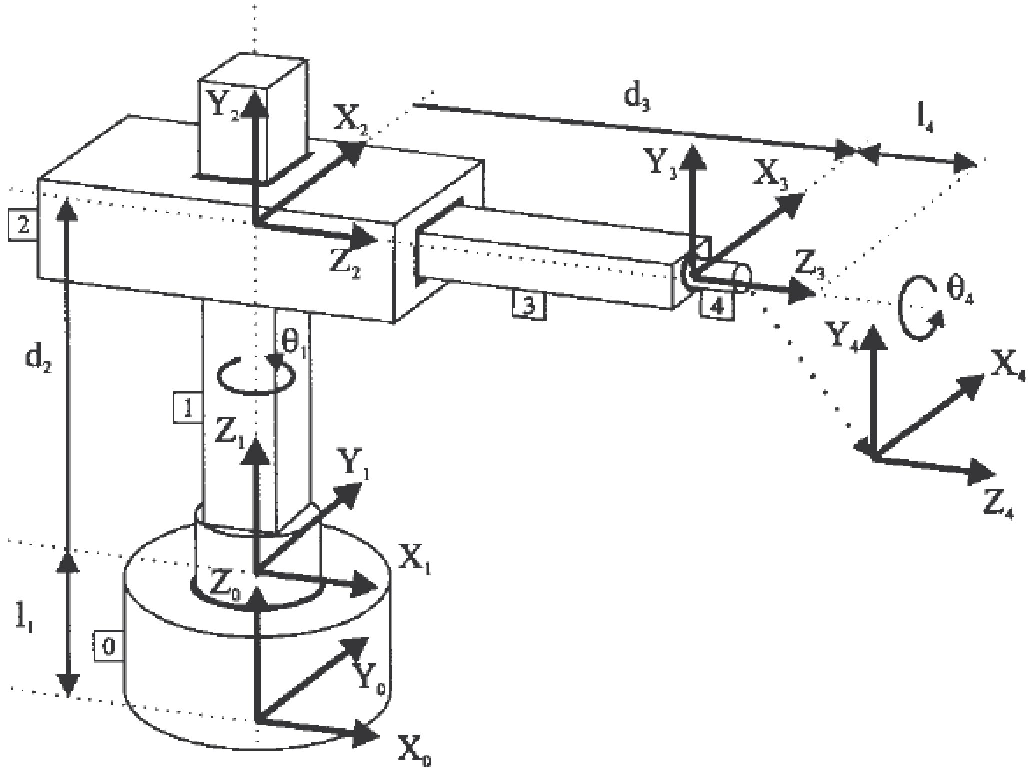
ai Es la distancia a lo largo del eje xi que va de la intersección del eje zi-1 con el eje xi hasta el origen del sistema i-esimo, en el caso de las articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia mas corta entre los ejes zi-1 y zi.

αi Es el ángulo de separación del eje zi-1 y el eje zi, medido en un plano perpendicular al eje xi, utilizando la regla de la mano derecha.

Cinemática de un robot

Ejemplo:

Problema cinemático directo para un robot cilíndrico



Cinemática de un robot

Ejemplo:
Problema cinemático directo para un robot cilíndrico utilizando matrices de rotación y el algoritmo de Denavit-Hartenberg.

1) Se localizan los sistemas de referencia para cada una de las articulaciones del robot

$$
{}^{0}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Cinemática de un robot

Ejemplo:

Problema cinemático directo para un robot cilíndrico

2) Se determinan los parámetros de Denavit-Hartenberg del robot.

Articulación	θ	d	a	α
1	q_1	l_1	0	0
2	90	d_2	0	90
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

Cinemática de un robot

3) Se calcula la matriz de transformación

$$ {}^{0}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ \mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1 \, {}^{1}\mathbf{A}_2 \, {}^{2}\mathbf{A}_3 \, {}^{3}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -S_1C_4 & S_1S_4 & C_1 & C_1(d_3 + l_4) \\ C_1C_4 & -C_1S_4 & S_1 & S_1(d_3 + l_4) \\ S_4 & C_4 & 0 & d_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática de un robot

Ejemplo:

Problema cinemático directo para un robot cilíndrico

4) Se calcula la matriz de transformación

$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1\,{}^1\mathbf{A}_2\,{}^2\mathbf{A}_3\,{}^3\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -S_1C_4 & S_1S_4 & C_1 & C_1(d_3+l_4) \\ C_1C_4 & -C_1S_4 & S_1 & S_1(d_3+l_4) \\ S_4 & C_4 & 0 & d_2+l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

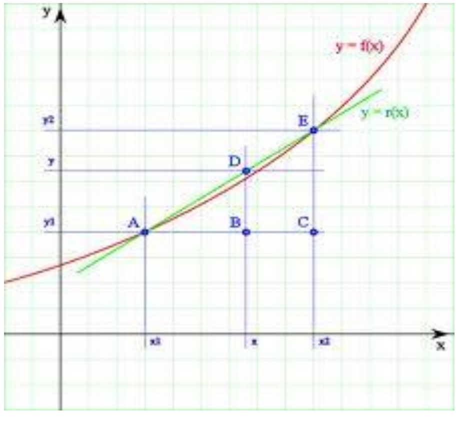
UNIDAD III

Tema No. 2

Interpolación de trayectorias

Objetivos:

- Explicar el proceso de generación de trayectorias cartesianas.
- Describir las Interpolaciones lineales, cúbicas y a tramos.



Introducción

Normalmente el usuario del robot indica el movimiento que éste debe realizar especificando las localizaciones especiales por las que debe pasar el extremo, junto con otros datos, como instantes de paso, velocidades o tipos de trayectorias. Así, por ejemplo, es frecuente especificar que el robot debe ir de un punto inicial hasta otro final, siguiendo en cartesianas una línea recta a velocidad constante.

Puesto que los puntos de origen y de destino pudieran estar excesivamente separados es preciso seleccionar puntos intermedios suficientemente cercanos como para que el control consiga ajustar no sólo el punto final especificado, sino también la trayectoria seguida a la indicada en el programa.

Para evitarlas discontinuidades de velocidad en el caso de paso por varios puntos, pueden utilizarse las técnicas de interpoladores.

Por Que es importante interpolar?

La trayectoria que normalmente especificamos en robótica es la del efector final, referida al sistema de coordenadas de la base.

Además del punto inicial y final, es usual dar algunos puntos intermedios para evitar choques con obstáculos, e incluso el tiempo de paso por cada uno de dichos puntos. Por ello es necesario generar trayectorias que cumplan con las siguientes características:

- Seguir un camino continuo
- Evitar obstáculos
- Suavizar los movimientos, etc.

Es importante hacer la selección de algún tipo de función cuyos coeficientes se ajusten para pasar por los puntos deseados con velocidades y aceleraciones aceptables. Para ello se utiliza la técnica de la interpolación de trayectorias.

Interpolación de trayectorias

Interpolación

La **interpolación** consiste en hallar un dato dentro de un intervalo en el que conocemos los valores en los extremos.

En robótica llamamos interpolación a la unión de una sucesión de puntos en el espacio articular por los que han de pasar las articulaciones del robot en un instante determinado.

Características

- Necesidad de respetar restricciones de los componentes físicos.
- Utilización de funciones polinómicas para su determinación

Tipos de interpoladores utilizados:

1. Interpoladores lineales
2. Interpoladores cúbicos (*splines*)
3. Interpoladores quínticos
4. Interpoladores a tramos

Tipos de Interpolaciones

Interpoladores lineales

La interpolación lineal consiste en mantener constante la velocidad de movimiento cada dos valores sucesivos (qi-1, qi) de la articulación. La evolución temporal del valor articular se describe mediante la siguiente ecuación:

$$q(t) = \frac{(q_i - q_{i-1})}{T} \cdot dt + q_{i-1} = V_q \cdot dt + q_{i-1}$$

Para asegurar una velocidad mas o menos constante se deberá asegurar que los instantes de paso t_i seleccionados por los puntos q_i se haga bajo los siguientes criterios:

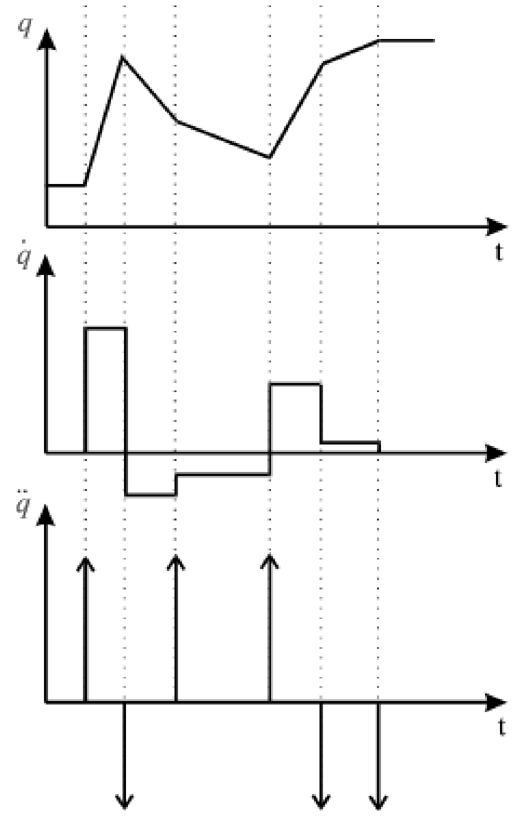
1. Intentando que cada articulación q alcance el punto de destino en el menor tiempo posible sin considerar las demás articulaciones.
2. Ajustando los instantes de paso a los de las articulaciones que tomen mas tiempo para obtener movimientos coordinados.
3. Seleccionando los tiempos a partir de las especificaciones dadas en el espacio de la tarea de modo que el extremos del robot describa una trayectoria predeterminada

Tipos de Interpolaciones

Posición, velocidad y aceleración para un interpolador lineal

$$q(t) = \left(q^{i} - q^{i-1}\right)\frac{t - t^{i-1}}{T} + q^{i-1} \qquad t^{i-1} < t < t^{i}$$

$$T = t^{i} - t^{i-1}$$



Tipos de Interpolaciones

Interpoladores cúbicos

Esta se utiliza cuando se pretende asegurar que la trayectoria que une los puntos por los que tiene que pasar la articulación considerada presente continuidad en velocidad.

- Se utilizan polinomios de grado 3 para unir cada pareja de puntos.

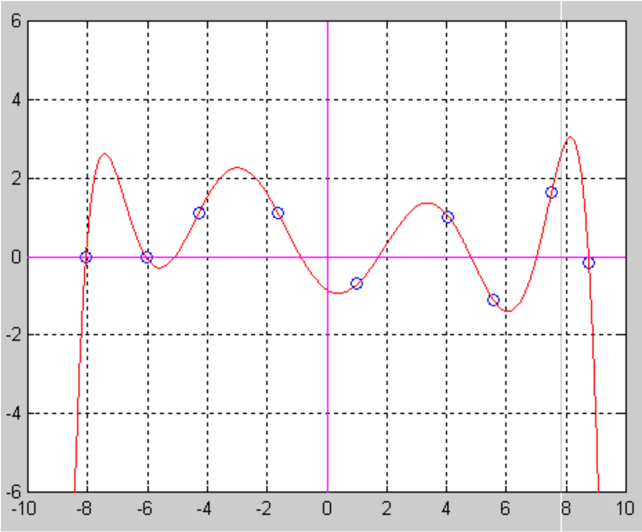
- Existe la posibilidad de imponer 4 condiciones de contorno al usar 4 parámetros (2 de posición y 2 de velocidad)

Tipos de Interpolaciones

Interpoladores cúbicos

- Trayectoria: serie de polinomios cúbicos concatenados escogidos de forma que exista continuidad en posición y velocidad, denominados *splines*.

$$q(t) = a + b\left(t - t^{i-1}\right) + c\left(t - t^{i-1}\right)^2 + d\left(t - t^{i-1}\right)^3 \qquad t^{i-1} < t < t^i$$



Tipos de Interpolaciones

Interpolador quíntico

Al igual que el interpolador cubico, este tipo de interpoladores asegura que la trayectoria que une los puntos por los que tiene que pasar la articulación presente continuidad en velocidad.

Los polinomios interpoladores son de grado cinco. El *splin* quíntico también presenta continuidad en aceleración, resultando una trayectoria suave y realizable en un robot real.

Tipos de Interpolaciones

Interpoladores a tramos.

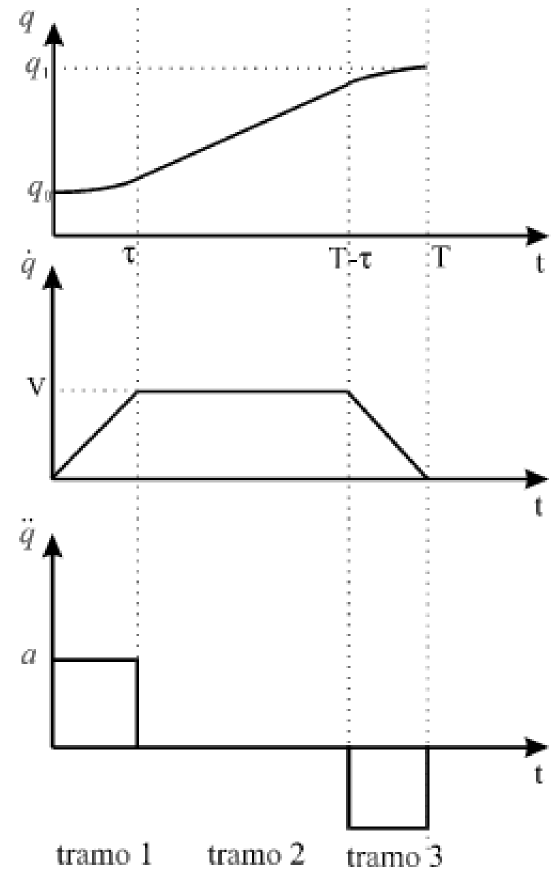
Es una alternativa intermedia entre la interpolación lineal y la cubica, la cual consiste en descomponer una trayectoria en tres tramos consecutivos que une dos puntos qo y q1. En el tramo central se utiliza un interpolador lineal, y por lo tanto la velocidad se mantiene constante, no siendo necesario imprimir aceleración alguna al actuador. Mientras que en los tramos uno y tres se utilizan interpoladores cuadráticos.

$$q(t) = \begin{cases} q^0 + s\dfrac{a}{2}t^2 & t \leq \tau \\ q^0 - s\dfrac{V^2}{2a} + sVt & \tau < t \leq T - \tau \\ q^1 + s\left(-\dfrac{aT^2}{2} + aTt - \dfrac{a}{2}t^2\right) & T - \tau < t < T \end{cases}$$

Tipos de Interpolaciones

Interpoladores a tramos

$$q(t)=\begin{cases} q^0+s\dfrac{a}{2}t^2 & t\le\tau \\ q^0-s\dfrac{V^2}{2a}+sVt & \tau<t\le T-\tau \\ q^1+s\left(-\dfrac{aT^2}{2}+aTt-\dfrac{a}{2}t^2\right) & T-\tau<t<T \end{cases}$$



Tipos de Interpolaciones

Interpoladores a tramos