



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO**

Facultad de Ingeniería

Escuela Profesional de Ingeniería Mecatrónica

Proyecto de Investigación Formativa

---

**DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ROBOT PARALELO  
TIPO DELTA**

---

**ROBÓTICA**

**ALUMNOS :**

**GAVIDIA ULLOA, JOSÉ  
HERNÁNDEZ COTRINA, MARIO  
ORTIZ MALCA, SLAYTHER  
RODRIGUEZ SÁNCHEZ, Gerardo  
ROJAS LLARO, NEHEYLER  
TORRES MIRANDA, ANTHONY**

**DOCENTES :**

**ING. ALVA ALCÁNTARA, JOSMELL**

**CICLO :**

**2019 – I**

**Trujillo, Perú**

**Julio, 2019**



## **Resumen**

El presente proyecto aborda las etapas del análisis y del diseño de un mecanismo que permita configurar a un robot paralelo tipo Delta existente para luego implementarlo y hacer las pruebas pertinentes.

Se analizó la cinemática directa y la cinemática inversa, su velocidad en si, además, se analizó la variación de la forma y el volumen del espacio de trabajo resultante de hacer variar cada parámetro del robot por separado. Para ello se generaron algoritmos que permiten visualizar de manera gráfica y cuantificar (en volumen) el espacio de trabajo del robot. El resultado de este análisis permite seleccionar cuál parámetro del robot es el más pertinente para reconfigurar.

El estudio de la variación en la capacidad de carga como consecuencia de la reconfiguración del robot es un complemento del análisis previo. A través de éste se conoce el cambio en magnitud del peso que puede ser manipulado por el robot dentro de su espacio de trabajo para cada configuración.

Dichos estudios conducen a la concepción de un mecanismo que le permite al robot cambiar de configuración con el objetivo de adaptarse de la mejor manera a condiciones de espacio de trabajo y de capacidad de carga variantes en el tiempo.



## **Abstract**

The present project addresses the stages of the analysis and design of a mechanism that allows to reconfigure an existing Delta-type parallel robot and then implement it and perform the relevant tests.

The direct kinematics and inverse kinematics were analyzed, its speed itself, in addition, the variation of the shape and volume of the workspace resulting from varying each parameter of the robot separately was analyzed. For this purpose, algorithms were generated that allow to visualize graphically and quantify (in volume) the working space of the robot. The result of this analysis allows selecting which parameter of the robot is the most relevant to reconfigure.

The study of the variation in the load capacity as a consequence of the reconfiguration of the robot is a complement to the previous analysis. Through this the change in magnitude of the weight that can be manipulated by the robot within its work space for each configuration is known.

These studies lead to the design of a mechanism that allows the robot to change its configuration with the aim of adapting in the best way to varying work space and load capacity conditions over time.

## Contenido

Capítulo 1: Formulación del Problema .....	1
1.1. Realidad problemática .....	1
1.2. Objetivos .....	1
1.3. Antecedentes .....	2
1.4. Justificación.....	3
Capítulo 2: Fundamento Teórico .....	4
2.1. Características de los manipuladores clásicos .....	5
2.2. Robots paralelos .....	5
2.3. Historia de los robots paralelos .....	6
2.4. Robot paralelo tipo delta .....	9
2.5. Cinemática de los robots paralelos.....	10
2.6. Cinemática directa de los robots paralelos.....	10
2.7. Cinemática inversa .....	11
2.8. Espacio de trabajo.....	11
Capítulo 3: Modelamiento Físico Matemático .....	13
3.1. Robot paralelo tipo delta .....	13
3.2. Cinemática inversa .....	14
3.4. Cinemática directa .....	18
3.5. Cinemática de la velocidad .....	23
Capítulo 4: Análisis .....	27
4.1. Espacio de Trabajo .....	27
4.2. Análisis de la variación del espacio de trabajo .....	29
Capítulo 5: Diseño y Simulación.....	30
5.2. Propuestas de diseño.....	30
5.3. Selección de los componentes.....	32
5.4. Diseño final del robot.....	35
Capítulo 6: Conclusiones.....	39
Capítulo 7: Referencias bibliográficas.....	40

## **Capítulo 1: Formulación del Problema**

### **1.1. Realidad problemática**

En nuestra vida cotidiana estamos acostumbrados a utilizar toda clase de Dispositivos Electrónicos que fundamentalmente tienen la complicada misión de solucionarnos o simplificarnos una gran cantidad de dificultades o problemas que tenemos, convirtiéndose entonces en una Herramienta de Trabajo más y en muchas ocasiones hasta nos permite reducir el Tiempo de Trabajo o bien incrementar notoriamente la Productividad y Rendimiento.

Los mercados actuales demandan mayor productividad, más precisión y más seguridad en los procesos de manufactura, por esto la manipulación de objetos requieren de gran precisión y velocidades muy altas de posicionamiento (Gutiérrez, 2015).

Si lo que se busca en el mundo de las industrias es incrementar la productividad y rendimiento, mejorar la precisión y seguridad en los procesos de manufactura.

Esto ha llevado a la creación de maquina novedosas muy precisas, de gran velocidad y completamente autónomas. Una de las alternativas que presentan interés en el desarrollo de manipuladores y máquinas-herramienta es el uso de robots paralelos, debido a las ventajas que este mecanismo presentas ante los robots convencionales:

- Tienen menor espacio de trabajo
- Admiten mayores aceleraciones durante su movimiento, y por ello, mayores velocidades
- También tienen mayor rigidez y precisión ya que soportan la carga por medio de varios brazos en paralelo

A pesar de las ventajas, la utilización de los robots paralelos es mucho menor que la de los robots tipo serie, quizás debido a su más tardío desarrollo.

### **1.2. Objetivos**

#### **1.2.1. Objetivo general**

Diseño, construcción y programación de un robot paralelo para ser utilizado en espacios reducidos y áreas donde se requiera velocidad y precisión a menores costos aplicando las enseñanzas del curso e investigación.

### 1.2.2. Objetivos específicos

- Establecer una metodología para el diseño y construcción de un prototipo de Robot paralelo tipo Delta.
- Hacer un correcto modelamiento físico-matemático.
- Analizar y comprender la cinemática directa e inversa del robot.
- Desarrollar una interfaz gráfica con Matlab y SolidWorks para una comparar los resultados de simulación con las trayectorias que puede describir el robot ya implementado.

### 1.3. Antecedentes

El conocimiento de los robots paralelos se remonta a 1931 con el diseño realizado por James E. Gwinnett, evolucionando en el tiempo: pasando por el robot industrial paralelo construido por Willard Pollard, la plataforma paralela inventada por el Dr. Eric Gough en 1940, el simulador de vuelos de Stewart en 1965, el simulador de movimiento basado en un hexápodo de Cappel en 1967, en 1978 Hunt destacó la importancia de un estudio más detallado de las ventajas en cuando a rigidez y precisión de los robots paralelos, McCallion y Pham en 1979 propusieron usar la plataforma Stewart como un manipulador paralelo debido a que su efector final es mucho menos sensible a errores, y en 1990 cuando Reymond Clavel modifica al manipulador Stewart y surge el manipulador Delta de tres y cuatro grados de libertad (Aracil, 2006).

Un robot Delta es un robot paralelo que consta de una plataforma fija y una plataforma móvil, conectadas por tres cadenas cinemáticas. En la base fija sostiene tres articulaciones mecánicas, los ejes de estas articulaciones forman un triángulo equilátero plano. La plataforma está conectada con cada unidad por dos enlaces formando un paralelogramo. El objetivo de usar los paralelogramos es restringir completamente la orientación de la plataforma móvil, en consecuencia, el efector final sólo tendrá tres movimientos de sólo traslación (Simionescu, 2015).

El espacio de trabajo de un robot Delta es relativamente pequeño y el hecho de tener actuadores en su base permite alcanzar grandes aceleraciones dependiendo de la necesidad siendo el candidato perfecto para operaciones de tomar objetos y colocarlos.

Actualmente, las industrias tienen la necesidad de hacer frentes a las exigencias del mercado, lo que obliga a desarrollar manipuladores flexibles y eficientes en cualquier entorno. Esta situación hace que los robots paralelos por sus ventajas tengan un papel relevante en diferentes tipos de industria (Sánchez, 2015).

#### **1.4. Justificación**

Los robots paralelos tienen numerosas ventajas en comparación de los manipuladores seriales:

- Mayor rigidez
- Mejor precisión
- Mayor velocidad
- Así como una menor masa de eslabones

Este tipo de robot tiene alta aplicación y aceptación en las industrias alimenticias, de electrónica y farmacéuticas.

Que el país genere robots para sus propias aplicaciones trae consigo múltiples ventajas.

- Se evitan los excedentes por envío y aranceles
- Se consigue que el capital privado que se invierte en la adquisición, mantenimiento y soporte técnico de estas máquinas permanezca al estado.

La aplicación de un robot paralelo de bajo costo comparado con las tecnologías que están actualmente en el mercado, de estructura ligera, fácil de controlar y que cuente con un amplio espacio de trabajo sin la necesidad de agregar grados de libertad adicionales.

## Capítulo 2: Fundamento Teórico

Un cuerpo rígido se puede mover de varias maneras en el espacio, a través de movimientos de traslación o de rotación; estos movimientos son conocidos como grados de libertad (GDL o DOF por sus siglas en inglés). Para un cuerpo rígido se dice que los grados de libertad no son más de 6 (los tres movimientos de traslación a lo largo de un sistema de ejes ortogonal y las tres rotaciones alrededor de dichos ejes). La posición y la orientación del cuerpo rígido se pueden describir por coordenadas generalizadas que consisten de las coordenadas que definen su posición y los ángulos que definen su orientación con respecto a un marco de referencia

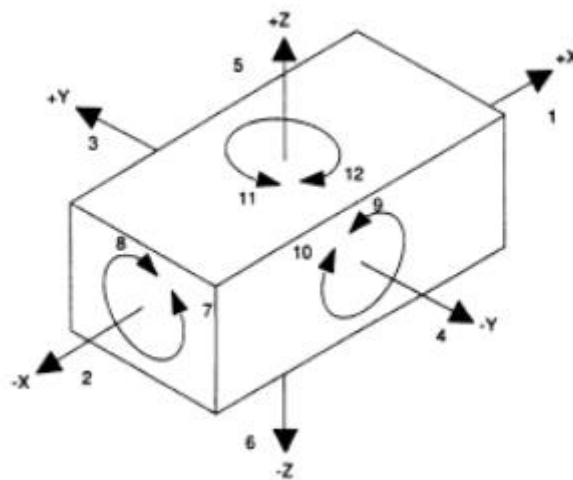


Figura 2.1. Grados de libertad para un cuerpo en el espacio

En la figura 1 se puede observar la representación de un cuerpo rígido en el espacio a través de un prisma rectangular. Este cuerpo está colocado dentro de un marco de referencia cartesiano (X, Y, Z) con origen dentro del cuerpo. Los seis grados de libertad del cuerpo corresponden con los 3 de desplazamiento a lo largo de los ejes (X, Y, Z) más las tres rotaciones alrededor de esos mismos ejes. La figura muestra la ubicación y orientación de los ejes coordenados por medio de los números 1-6, mientras que las rotaciones alrededor de esos mismos ejes corresponden a los números 7-12.

Cuando se puede controlar uno o más de los diferentes grados de libertad de un cuerpo (asimilable a un cuerpo rígido) por medio de un sistema mecánico y este cuerpo es capaz de manipular objetos, se denomina a dicho sistema robot manipulador y al cuerpo “endeffector” o actuador final.



## 2.1. Características de los manipuladores clásicos

Generalmente los manipuladores robóticos presentan características antropomórficas, muy parecidas a un brazo humano. Este tipo de manipuladores están constituidos por una sucesión de cuerpos rígidos (eslabones), cada uno de ellos acoplado a su antecesor y a su sucesor por una junta de uno o más grados de libertad (por ejemplo, permitiendo la rotación del eslabón alrededor de un eje o la traslación del mismo). Esta arquitectura es llamada robot serial (Figura 2).

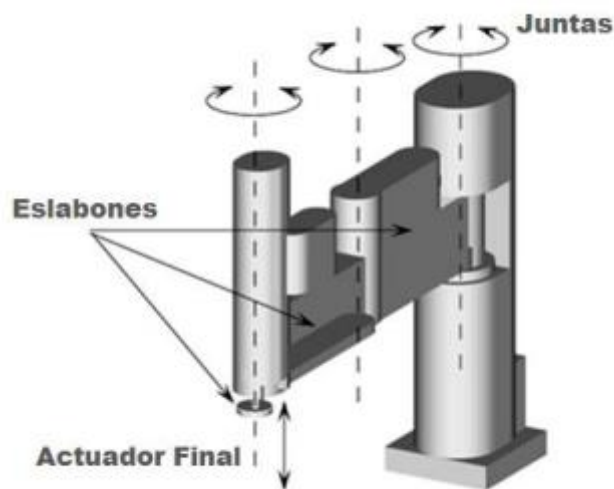


Figura. 2.2. Robot de arquitectura serial Scara de 4 grados de libertad.

Otras características propias de los robots seriales son la baja capacidad de carga manipulable en relación a su masa total y la poca precisión de posicionamiento. Esto se debe en gran medida a que cada eslabón del robot serial debe soportar el peso de sus sucesores además del peso de la carga. Por lo anterior, los eslabones están sujetos a elevadas fuerzas que les provocan deformaciones de flexión. Para mantener esas flexiones dentro de límites aceptables es necesario diseñar eslabones más rígidos y esto generalmente lleva a un aumento en el peso de los mismos. La precisión del posicionamiento depende directamente de la magnitud de dichas deformaciones.

## 2.2. Robots paralelos

A fin de presentar otros tipos de arquitecturas mecánicas para robots, se definirán algunos conceptos que permitan hacer una distinción clara entre los elementos que caracterizan a los robots.

Para cada eslabón de un manipulador, el grado de conexión es el número de cuerpos rígidos unidos a dicho eslabón por medio de una junta. Cadenas cinemáticas simples: se pueden definir como aquellas en las que cada uno de sus eslabones posee un grado de conexión igual o menor a 2.

Los manipuladores seriales se pueden definir como cadenas cinemáticas simples para las cuales todos los grados de conexión para sus miembros son 2, excepto por dos de ellos, la base y el actuador final que en cuyo caso es de 1. Este tipo de cadenas son también llamadas de lazo abierto.

Varios de los problemas presentes en manipuladores seriales pueden resolverse mecánicamente al distribuir la carga usando más de una cadena cinemática que forme un lazo cerrado, el cual soportaría una fracción de la carga total.

De aquí se puede definir un robot paralelo como un robot compuesto por un efector con  $n$  grados de libertad y de una base fija, unidos entre sí por al menos dos cadenas cinemáticas que forman un lazo cerrado (también llamadas piernas), las cuales son actuadas de forma independiente. El movimiento del efector final se lleva a cabo a través de  $n$  actuadores simples.

Los robots paralelos, también conocidos como hexápodos o máquinas cinemáticas paralelas, son mecanismos de lazo cerrado que presentan un muy buen desempeño en términos de precisión, rigidez y habilidad para manipular grandes cargas en relación a su masa total (por ejemplo para los robots de la marca Fanuc, la serie F-200iB que es de arquitectura paralela tiene una relación carga/masa total de 0.52, en comparación con la serie M-410iB de arquitectura serial para la que esta misma relación es de 0.08). Han sido utilizados en un gran número de aplicaciones que van desde astronómicas a simuladores de vuelos, y se han ido incrementando de manera popular en la industria de máquinas herramientas.

### **2.3. Historia de los robots paralelos**

En 1947 Gough, quien trabajaba para la empresa llantera Dunlop Tires, estableció los principios básicos de un mecanismo de estructura cinemática de lazo cerrado, eso le permitió variar el posicionamiento y la orientación de una de las llantas de la compañía con respecto una plataforma móvil (que simulaba el camino), con la finalidad de

evaluar el desgaste presente en la llanta después de un tiempo de trabajo (Gough, 1947).

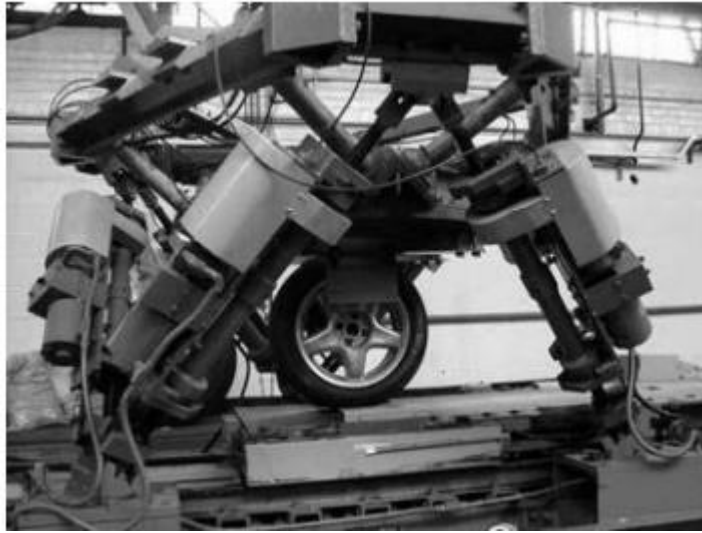


Figura. 2.3. El último prototipo de la plataforma de Gough usado en la compañía Dunlop Tires.

En la figura 3 se muestra la plataforma creada por Gough. Para esta arquitectura, el elemento móvil es una plataforma hexagonal en la que sus vértices están conectados a un eslabón por medio de una junta esférica. Un actuador lineal permite variar la longitud total del eslabón. El mecanismo es una estructura cinemática de lazo cerrado actuada por seis actuadores lineales. Construyó un prototipo de su máquina en 1955 el cual estuvo en servicio hasta el año 2000.

Como se menciona en el documento de I. A. Bonev, aunque la plataforma de Gough fue el primer diseño de un prototipo funcional de robot paralelo, los hexápodos ya eran bien conocidos anteriormente. Sistemas de este tipo son conocidos bajo el nombre de MAST (Multi Axial Simulation Table), con una disposición ortogonal de sus piernas. Son sumamente populares entre la comunidad de vibraciones, debido a que permiten realizar ensayos cíclicos multi-axiales y cuasi-estáticos para partes estructurales a gran escala, como sistemas de columnas, muros y puentes. La Fig. 4 muestra una MAST desarrollada en el departamento de ingeniería civil de la Universidad de Minnesota.

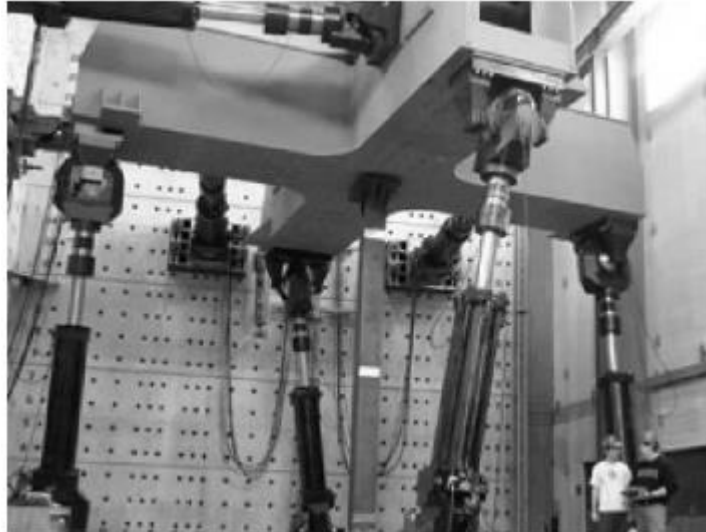


Figura 2.4. MAST desarrollada en la Universidad de Minnesota para simulaciones de terremotos.

Sin embargo, el uso industrial a una mayor escala de este tipo de mecanismos empezó cuando se construyó el primer simulador de vuelos. Durante los años 60's, con el desarrollo de la industria aeronáutica, factores como el incremento en el costo del entrenamiento de los pilotos, aunado a la necesidad de probar nuevos equipos sin la necesidad de estar en el aire, llevaron a los investigadores a buscar mecanismos con varios grados de libertad que pudieran simular plataformas para cargas pesadas con alta dinámica.

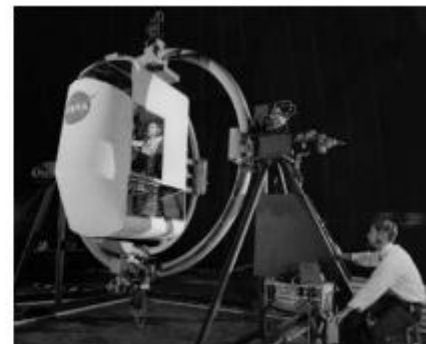


Figura. 2.5. Primeros simuladores de vuelo

En 1965, Stewart sugiere que los simuladores de vuelo deben ser ajustados dentro del mecanismo mostrado en la figura 2.6. Para esta estructura, el elemento en movimiento es una plataforma triangular (usada como cabina) cuyos vértices están cada uno conectados por medio de rótulas a otro mecanismo formado por dos pistones hidráulicos colocados también de forma triangular (Stewart, 1965).

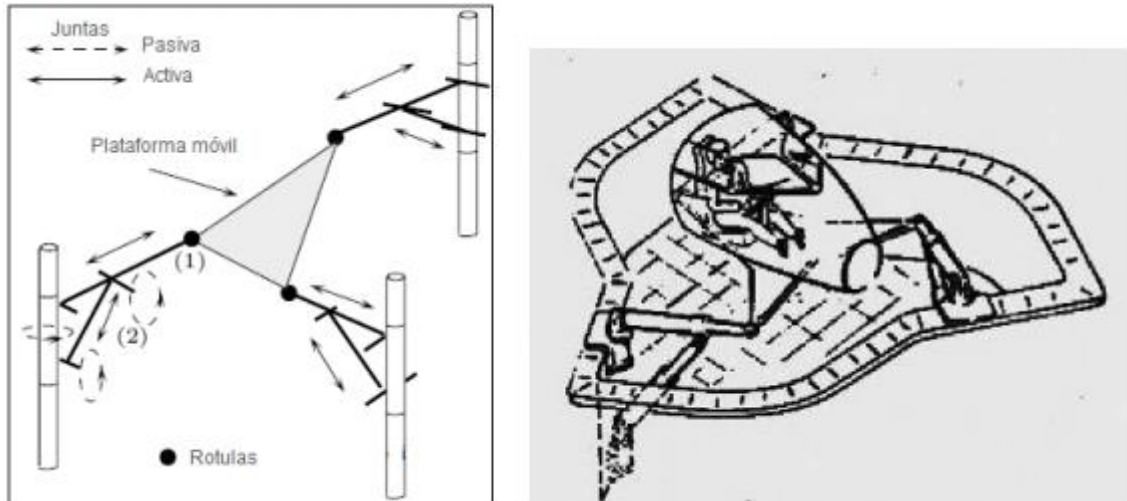


Figura 2.6. Plataforma Stewart. El movimiento de la plataforma móvil se obtiene al modificar la longitud de los 6 pistones hidráulicos.

## 2.4. Robot paralelo tipo delta

A principios de los años ochenta Raymond Clavel (profesor de EPFL, Escuela Politécnica Federal de Lausana Suiza), tuvo la idea de usar paralelogramos para construir un robot paralelo de tres grados de libertad traslacionales y un grado de libertad rotacional. Raymond Clavel llamó a su creación el robot Delta (figura 2.7), sin sospechar que, al curso del siglo, se habría establecido como uno de los más exitosos diseños de robots paralelos.

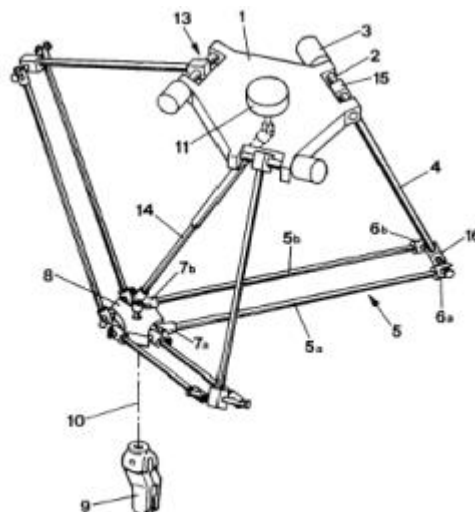


Figura 2.7. Esquema del robot paralelo Delta de Clavel

La idea básica detrás del diseño del robot Delta es el uso de paralelogramos, los cuales permiten que el eslabón de salida (eslabón sucesor al paralelogramo, para este caso, es la plataforma móvil o número 8) conserve una orientación fija con respecto al eslabón de entrada (eslabón anterior al paralelogramo, para este caso, el eslabón actuado o número 4).

En el esquema mostrado en la figura 2.7, se puede visualizar el uso de los tres paralelogramos (número 5) que restringen completamente la orientación de la plataforma móvil o eslabón de salida, la cual permanece con solo tres grados de libertad puramente traslacionales. Los eslabones de entrada (o actuados) de los tres paralelogramos están montados sobre palancas rotatorias por medio de juntas de revoluta. Las juntas de revoluta de las palancas rotatorias pueden ser actuadas de dos formas distintas: por medio de motores rotativos o bien, por medio de actuadores lineales. Las uniones entre los eslabones de entrada y los paralelogramos son mediante juntas esféricas, de igual forma que las uniones entre los paralelogramos y la plataforma móvil. Finalmente, se utiliza un cuarto eslabón para transmitir el movimiento rotacional desde la base hacia el efector final montado en la plataforma móvil.

## **2.5. Cinemática de los robots paralelos**

La cinemática estudia el movimiento de los robots respecto a un sistema de referencia, sin considerar las fuerzas que actúan sobre el sistema, sino únicamente la geometría estructural. La cinemática se divide en dos tipos: cinemática directa y cinemática inversa.

## **2.6. Cinemática directa de los robots paralelos**

Es una función vectorial que relaciona las coordenadas articulares con las coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) del robot, así como la orientación de la herramienta colocada en el extremo final, tomando en cuenta las propiedades geométricas del sistema mecánico del robot. Figura 2.8 Ejemplo de solución para la cinemática Directa.

El propósito fundamental que juega la cinemática directa es computar la posición y orientación del extremo final del robot manipulador como una función de las variables articulares.

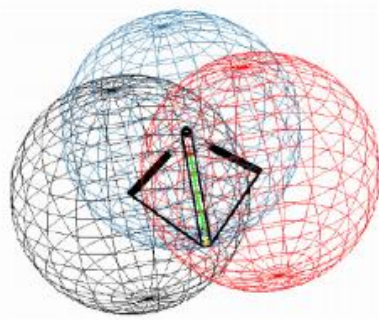


Figura 2.8 Ejemplo de solución para la cinemática Directa (software Matlab)

## 2.7. Cinemática inversa

La cinemática inversa relaciona las coordenadas articulares en función de las coordenadas cartesianas. Es la solución inversa a la cinemática directa mencionada con anterioridad; dada la posición cartesiana y la orientación de la herramienta colocada en el extremo final del robot, obtener los ángulos de las articulaciones. En la Figura 2.9. podemos observar las ocho posibles soluciones del problema cinemático inverso.

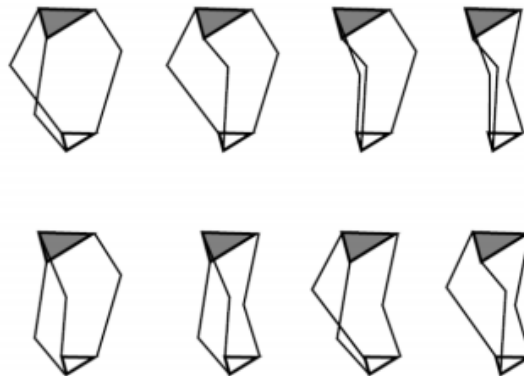


Figura 2.9 Ejemplo, de solución de cinemática inversa.

## 2.8. Espacio de trabajo

El espacio de trabajo es una de las principales características que identifican a un manipulador. Conocer el máximo alcance (en X, Y y Z), es uno de los principales aspectos al momento de seleccionar un manipulador para realizar una tarea. El espacio de trabajo del robot Delta está definido como la región de un espacio cartesiano de tres dimensiones (solamente traslación) que puede ser alcanzada por el órgano terminal del robot (centro de la plataforma móvil). Las únicas restricciones tomadas en cuenta son

las procedentes de las diferentes cadenas cinemáticas dadas por la ecuación (17). Los movimientos de los robots paralelos pueden ser restringidos por diferentes factores: los límites mecánicos de las articulaciones pasivas, la auto-colisión entre los movimientos del robot, las limitaciones debidas a los actuadores y los diferentes tipos de singularidades que pueden dividir el espacio de trabajo en componentes separados. En general, los robots paralelos conducen a ecuaciones complejas, por lo que determinar su espacio de trabajo es una tarea no trivial. Sin embargo, la solución de este problema es de suma importancia dado que de ella dependen el diseño del mismo robot y la planeación de sus trayectorias. Por lo anterior, es de vital importancia desarrollar herramientas eficaces que permitan determinar tanto la forma como el volumen de su espacio de trabajo.



## Capítulo 3: Modelamiento Físico Matemático

### 3.1. Robot paralelo tipo delta

La Figura 3.1 muestra los componentes principales de este robot, que consta de tres cadenas cinemáticas de circuito cerrado. El robot tiene tres grados de libertad.

Los paralelogramos aseguran la orientación constante entre la plataforma fija y la móvil, permitiendo solo los movimientos de traslación de esta última. El efector final del manipulador se encuentra en la plataforma móvil.

El robot paralelo puede mover productos en un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional.

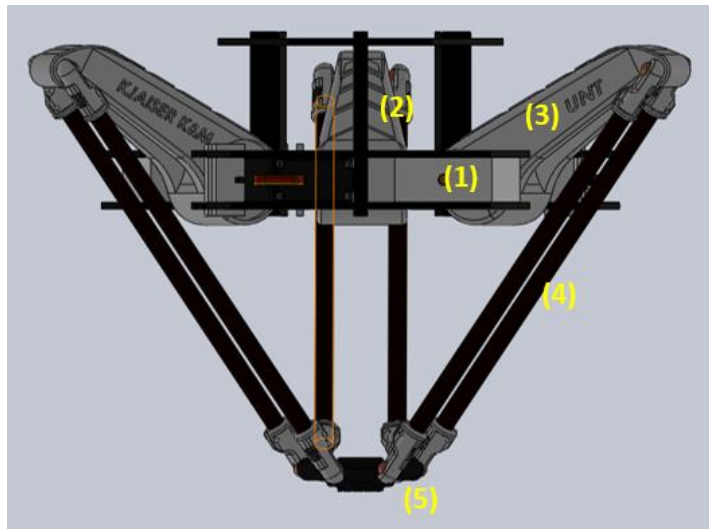


Figura 3.1: Vista lateral de robot paralelo tipo delta en SolidWorks

(Fuente: elaboración propia)

La combinación del movimiento restringido de los tres brazos que conectan la placa móvil a la placa base se produce en los 3 grados de libertad del traductor (GDL) resultantes. Como opción, con un eje giratorio en el punto central de la herramienta (PCH), son posibles cuatro GDL.

El robot consta de, (según la figura 3.1):

- 1) Tres actuadores.
- 2) Placa base.
- 3) Brazo robot superior.
- 4) Brazo del robot inferior (antebrazo).
- 5) Placa de desplazamiento, PCH.

Los brazos de robot superiores están montados directamente en los actuadores para garantizar una alta estabilidad. Y los tres actuadores están montados rígidamente en la placa base con  $120^\circ$  entre ellos. Cada uno de los tres brazos inferiores del robot consta de dos barras paralelas, que conectan el brazo superior con la placa móvil a través de rótulas. Las fuerzas de fricción más bajas resultan de esto. El desgaste se reduce respectivamente como resultado. Para medir cada ángulo del eje del motor se utiliza un codificador óptico de cuadratura. Una cuarta barra, ejes de rotación, está disponible para la mecánica del robot como una opción. El actuador para este eje se monta luego en el lado superior de la placa base del robot. La barra está conectada directamente a la herramienta y garantiza un movimiento de rotación adicional (Olsson, 2009).

Para el análisis de la cinemática, se debe considerar lo siguiente:

Tabla 3.1: Parámetros que se deben de considerar para el modelado del robot.

Nombre	Descripción	Medida (cm)
OA	Distancia del centro de la base fija al eje del actuador	5
La	Longitud del Brazo superior	9
Lb	Longitud del brazo inferior (antebrazo)	14
DC	Distancia del centro de la base móvil al eje de la articulación Lb	2.5

### 3.2. Cinemática inversa

El propósito de determinar la cinemática inversa de este robot paralelo es modelar con precisión el ángulo producido en cada unión en una ubicación específica del efector. Esto es ventajoso por dos razones principales; la primera es que es relativamente simple definir cualquier trayectoria razonable para que el efector final la atraviere y,

en segundo lugar, puede rastrear diferentes trayectorias en una región no singular (Liadis, 2010).

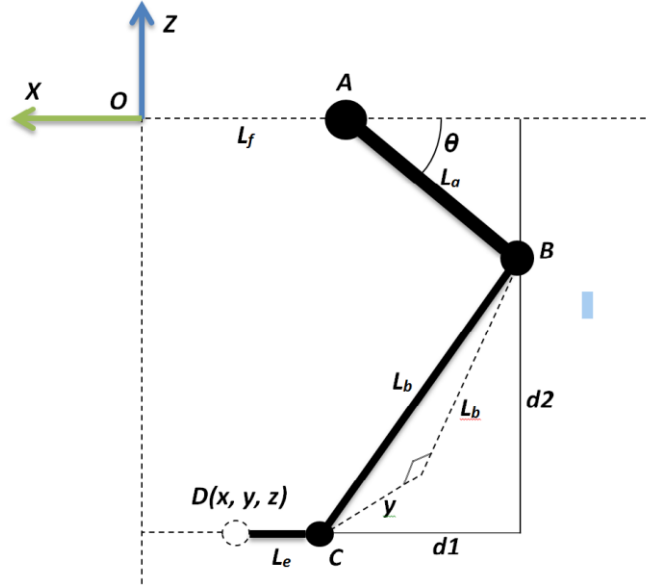


Figura 3.2: Primera cadena cinemática, proyección del plano XZ.

El análisis comienza considerando cada cadena cinemática por separado, para la primera cadena cinemática, hacemos una proyección al plano X-Z, que produce un bucle cerrado del vector como se muestra en la Figura 3.2.

$$d_1^2 + d_2^2 = l_b'^2 \quad (3.1)$$

Donde:

$$l_b'^2 = l_b^2 - y^2 \quad (3.2)$$

Además, tenemos que:

$$OA + l_a \cos(\theta_1) = -x + DC + d_1$$

Resolviendo para d1, se tiene:

$$d_1 = T + l_a \cos(\theta_1) \quad (3.3)$$

Donde:

$$T = OA + x - DC$$

Además, a partir de la geometría de la figura 3.3 tenemos:

$$d_2 = z + l_a \sin(\theta_1) \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.2), (3.3) y (3.4) en (3.1) y simplificando, obtenemos:

$$2T_1 l_a \cos(\theta_1) + 2z l_a \sin(\theta_1) = K \quad (3.5)$$

Con,

$$K = l_a^2 - l_n^2 - x_0^2 - z^2 - T^2$$

Sustituyendo en (3.5) las identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta_1) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(\theta_1) = \frac{2t}{1 + t^2}, \text{ donde, } t = \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$$

Obtenemos:

$$e_1 t^2 + e_2 t + e_3 = 0 \quad (3.6)$$

Donde:

$$e_1 = 2T l_a + K$$

$$e_2 = -4z l_a$$

$$e_3 = -2T l_a + K$$

Resolviendo (3.6) para t ángulos,

$$\theta_1 = 2 \tan \frac{-1 - e_2 \pm \sqrt{e_2^2 - 4e_1 e_3}}{2e_1} \quad (3.7)$$

De las preguntas anteriores, podemos concluir que:

$$\theta_1 = f(x, y, z)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para las otras dos cadenas cinemáticas

Las configuraciones pueden ser resueltas. Podemos aprovechar la simetría de Delta Robot y considerar el hecho de que cada cadena cinemática gire 120 grados entre sí. Podríamos tomar la base de la primera cadena cinemática y multiplicarla por la matriz de rotación (120° para  $\theta_2$  y 240° para  $\theta_3$ ) y luego aplicar el proceso utilizado para resolver la primera cadena de cinemática. Una vez seguido el procedimiento descrito anteriormente, se pueden encontrar los valores de  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . En general, hay un total de ocho posturas posibles de robot correspondientes a una ubicación de efector final dada (Cardona, 2010).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Donde:

$$\begin{aligned}x' &= \cos(a) \cdot x - \sin(a) \cdot y \\x' &= \cos(a) \cdot x + \cos(a) \cdot y \\z' &= z\end{aligned}\tag{3.10}$$

Donde  $a$  es el ángulo de rotación sobre el eje  $z$ , desde la ec. (3.10) se obtiene la función para el ángulo:

$$\theta_{2,3} = f(x', y', z')$$

Por lo tanto, generalmente hay dos soluciones de  $\theta_1$  y, dos configuraciones de la cadena cinemática (Figura 3.3) que corresponden a cada ubicación del efector final. Cuando la ecuación 3.7 produce una raíz doble, los dos enlaces de la cadena cinemática están en una configuración completamente extendida o doblada hacia atrás llamada configuración 14 singular. Cuando la ecuación 3.7 no produce una solución real, la ubicación especificada del efector final no es accesible. A pesar de las dos soluciones posibles, solo se debe tomar la raíz negativa porque la positiva podría causar interferencia entre los elementos del robot como se muestra en la Figura 3.3.

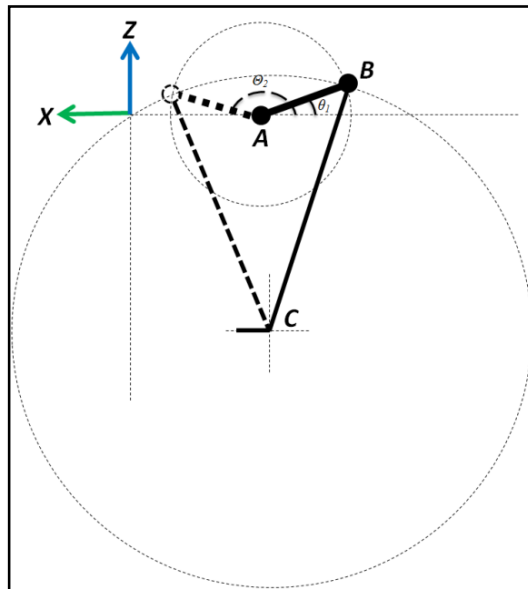


Figura 3.3: Dos posibles configuraciones de la cadena cinemática debidas a  $\theta_1$

La solución de cinemática inversa se prueba para casos especiales mediante el examen de la ecuación 3.7: Si,  $e_2^2 - 4e_1e_3 > 0$ , entonces el círculo barrido por el vector  $AB$  intersecta la esfera barrida por el vector  $BC$  en dos ubicaciones. Si,  $e_2^2 - 4e_1e_3 = 0$ , entonces el círculo y la esfera son tangentes, y el manipulador está en una posición

singular. Si,  $e_2^2 - 4e_1e_3 < 0$ , entonces el círculo y la esfera no se intersecan y no hay soluciones reales. Si  $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ , entonces el círculo se encuentra en la esfera, y hay un número infinito de soluciones.

### 3.4. Cinemática directa

La cinemática hacia adelante también llamada cinemática directa de un manipulador paralelo determina la posición (x, y, z) de la placa de desplazamiento en el bastidor de la base, dada la configuración de cada ángulo  $\theta_i$  de las juntas revolutas accionadas, ver Figura 3.4.

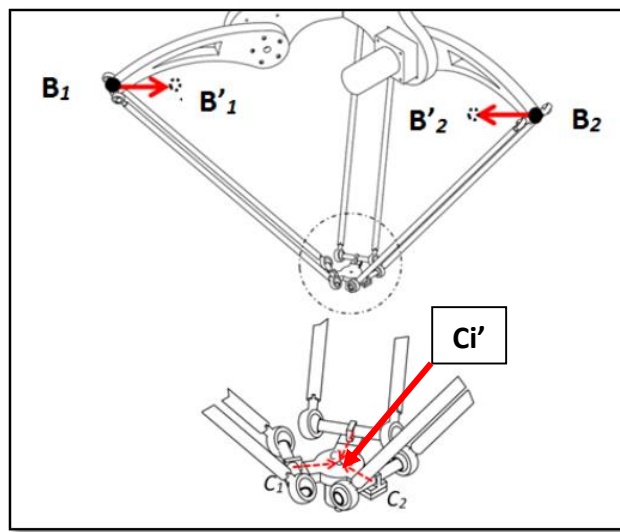


Figura 3.4: Configuración elegida para el análisis cinemático directo.

Considere tres esferas, cada una con el centro en el codo  $B_i$  de cada cadena de brazo de robot, y con las longitudes de los antebrazos como radio. El modelo cinemático directo para un robot Delta paralelo se puede calcular con la ayuda de la intersección entre estas tres esferas. Al visualizar estas tres esferas se intersecarán en dos lugares.

Un punto de intersección donde  $z$  es positivo y un punto de intersección donde la coordenada  $z$  es negativa. Basado en la trama base  $\{R\}$  donde  $z$ -eje es positivo hacia arriba, el punto central de la base móvil TCP será el punto de intersección cuando  $z$  es negativo. La figura 3.5 muestra la intersección entre tres esferas. Cuando dos esferas se intersecan en un círculo y luego la tercera esfera se interseca con este círculo en dos lugares.

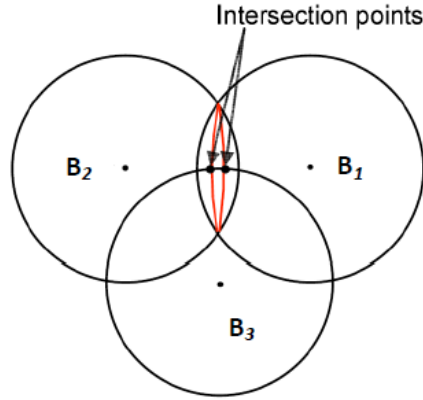


Figura 3.5: Dos esferas se intersectan en un círculo y una tercera esfera se intersecta con el círculo en dos lugares.

Basado en los supuestos del modelo, el vector  $B_i$  que describe las coordenadas del codo para cada uno de los tres brazos como:

$$B_i = [f + l_a \cos(\theta_1) \quad 0 \quad l_a \sin(\theta_1)]^T \quad (3.12)$$

Para calcular la cinemática directa, movemos el centro de las esferas hacia adentro desde los puntos  $B_i$  a los puntos  $B_i'$  para  $i = 1, 2$  y  $3$  respectivamente. Después de esta transición, las tres esferas se intersectarán en el punto central TCP.

$$B_i = [(f - e) + l_a \cos(\theta_1) \quad 0 \quad l_a \sin(\theta_1)]^T \quad (3.12)$$

Donde  $e = B_1 B_1 = B_2 B_2 = B_3 B_3$  es la longitud de la distancia desplazada, que se describe claramente en la Figura 3.4.

Para lograr una matriz que describa los tres puntos en el marco base  $\{O\}$ , uno tiene que multiplicar  $B_i$  con la matriz rotacional  $R_z^0$ :

$$\mathbf{R}_z^0 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

El resultado es la matriz  $B'$ :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{R}_z^0 \mathbf{B}'_i = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [(f-e) + l_a \cos(\theta_i) \quad 0 \quad l_a \sin(\theta_i)]^T$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) B'_{i,x} \\ \sin(\alpha) B'_{i,x} \\ B'_{i,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) [(f-e) + l_a \cos(\theta_i)] \\ \sin(\alpha) [(f-e) + l_a \cos(\theta_i)] \\ l_a \sin(\theta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{i,x} \\ s_{i,y} \\ s_{i,z} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Luego se pueden crear tres esferas con las longitudes de los antebrazos  $l_b$  como radio, y sus centros en  $B_i$  respectivamente. La ecuación general para una esfera es:

$$(x - s_{i,x})^2 + (y - s_{i,y})^2 + (z - s_{i,z})^2 = r^2 \quad (3.16)$$

Esto da las tres ecuaciones para tres enlaces  $i = 1, 2$  y  $3$  respectivamente. Para el enlace (1), el brazo superior es paralelo al eje  $xy$  perpendicular al eje  $y$ , por lo que el ángulo de rotación  $\alpha = 0$ , pero los otros dos enlaces tienen un ángulo de rotación  $\alpha = 120$  para el enlace (2) y  $\alpha = -120$  para enlace (3).

$$\begin{aligned} (x - \cos(\alpha_1) [(f-e) + l_a \cos(\theta_1)])^2 + (y - \sin(\alpha_1) [(f-e) + l_a \cos(\theta_1)])^2 + (z - l_a \sin(\theta_1))^2 &= l_b^2 \\ (x - \cos(\alpha_2) [(f-e) + l_a \cos(\theta_2)])^2 + (y - \sin(\alpha_2) [(f-e) + l_a \cos(\theta_2)])^2 + (z - l_a \sin(\theta_2))^2 &= l_b^2 \\ (x - \cos(\alpha_3) [(f-e) + l_a \cos(\theta_3)])^2 + (y - \sin(\alpha_3) [(f-e) + l_a \cos(\theta_3)])^2 + (z - l_a \sin(\theta_3))^2 &= l_b^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Después de la sustitución, los valores  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 120$  y  $\alpha_3 = -120$  en la ecuación 13, obtenemos las tres ecuaciones de esfera:

$$\begin{aligned} (x + k_{11})^2 + (y + k_{12})^2 + (z + k_{13})^2 &= l_b^2 \\ (x + k_{21})^2 + (y + k_{22})^2 + (z + k_{23})^2 &= l_b^2 \\ (x + k_{31})^2 + (y + k_{32})^2 + (z + k_{33})^2 &= l_b^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Donde:



$$\begin{aligned}
 k_{11} &= (f - e) + l_a \cos(\theta_1) \\
 k_{12} &= 0 \\
 k_{13} &= -l_a \sin(\theta_1) \\
 k_{21} &= \frac{1}{2}[(f - e) + l_a \cos(\theta_2)] \\
 k_{22} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}[(f - e) + l_a \cos(\theta_2)] \\
 k_{23} &= -l_a \sin(\theta_2) \\
 k_{31} &= \frac{1}{2}[(f - e) + l_a \cos(\theta_3)] \\
 k_{32} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}[(f - e) + l_a \cos(\theta_3)] \\
 k_{33} &= -l_a \sin(\theta_3)
 \end{aligned}$$

Al expandir la ecuación 3.19, se obtiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2k_{i1}x + 2k_{i2}y + 2k_{i3}z = l_b^2 - (k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + k_{i3}^2), \quad i=1,2,3 \quad (3.20)$$

Al restar Ec.3.20 con  $i = 2$  de Ec. 3.20 con  $i = 1$ , obtenemos:

$$2(k_{11} - k_{21})x + 2(k_{12} - k_{22})y + 2(k_{13} - k_{23})z = (k_{21}^2 + k_{22}^2 + k_{23}^2) - (k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{13}^2) \quad (3.21)$$

Al restar Ec.3.20 con  $i = 3$  de Ec. 3.20 con  $i = 1$ , obtenemos:

$$2(k_{11} - k_{31})x + 2(k_{12} - k_{32})y + 2(k_{13} - k_{33})z = (k_{31}^2 + k_{32}^2 + k_{33}^2) - (k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{13}^2) \quad (3.22)$$

Simplificando Ec.3.21 y Ec.3.22 obtenemos:

$$\begin{aligned}
 a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
 a_2x + b_2y + c_2z &= d_2
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2(k_{11} - k_{21}) \\
 b_1 &= 2(k_{12} - k_{22}) \\
 c_1 &= 2(k_{13} - k_{23}) \\
 a_2 &= 2(k_{11} - k_{31}) \\
 b_2 &= 2(k_{12} - k_{32}) \\
 c_2 &= 2(k_{13} - k_{33})
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= (k_{21}^2 + k_{22}^2 + k_{23}^2) - (k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{13}^2) \\
 d_2 &= (k_{31}^2 + k_{32}^2 + k_{33}^2) - (k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{13}^2)
 \end{aligned}$$

Obteniendo la ecuación 3.23 en forma de matriz, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - c_1 z \\ d_2 - c_2 z \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Definimos  $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ , asumiendo  $\Delta \neq 0$

$$\begin{aligned} \Delta x &= (d_1 - c_1 z) b_2 - (d_2 - c_2 z) b_1 \\ &= (b_2 d_1 - b_1 d_2) + (b_1 c_2 - b_2 c_1) z \\ \Delta y &= (d_2 - c_2 z) a_1 - (d_1 - c_1 z) a_2 \\ &= (a_1 d_2 - a_2 d_1) + (a_2 c_1 - a_1 c_2) z \\ x &= \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{\Delta} + \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{\Delta} z \\ y &= \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{\Delta} + \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{\Delta} z \end{aligned} \quad (3.25)$$

Considerando:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{\Delta}, \quad f_2 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{\Delta} \\ f_x &= \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{\Delta}, \quad f_y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{\Delta} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} x &= f_1 + f_x z \\ y &= f_2 + f_y z \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sustituyendo Ec. 3.26 en Ec.3.19 para  $i = 3$ ; obtenemos:

$$(1 + f_x^2 + f_y^2) z^2 + 2[f_x f_1 + f_x k_{31}] + [f_y f_2 + f_y k_{32}] + k_{33} z + f_{11}^2 + f_{22}^2 + k_{33}^2 - l_b^2 = 0 \quad (3.27)$$

Asumiendo:

$$\begin{aligned} A &= (1 + f_x^2 + f_y^2) \\ B &= 2[f_x f_1 + f_x k_{31}] + [f_y f_2 + f_y k_{32}] + k_{33} \\ C &= f_{11}^2 + f_{22}^2 + k_{33}^2 - l_b^2 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_{11} &= f_1 + k_{31} \\ f_{22} &= f_2 + k_{32} \end{aligned}$$

La solución de la Ecuación  $AZ^2 + BZ + C = 0$  es conocida como:

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.28)$$

A partir de la Ec.3.28, podemos evaluar la Ec.3.26

Matemáticamente, ni la cinemática directa ni la inversa dan una solución única. La cinemática directa generalmente tiene dos soluciones, porque los ángulos de la articulación pasiva que se forman entre la parte superior del brazo y la parte inferior del brazo no están determinados por ecuaciones cinemáticas. Entonces se debe elegir la solución que se encuentra dentro del área de trabajo de los robots. Con el marco base {O} en este caso, llevará a la solución con una coordenada z negativa.

La solución de salida tiene cuatro casos posibles:

- Solución genérica. Las dos soluciones se realizan en la intersección de un círculo y una esfera.
- Solución singular. Una vez que la esfera es tangente al círculo de intersección de las otras dos esferas, por lo tanto, solo hay una solución posible.
- Solución singular. El centro de cualquiera de las dos esferas coincide, dando como resultado un número infinito de soluciones. Esta es una configuración improbable para la mayoría de las realizaciones prácticas del manipulador, excepto en la situación cuando  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi / 2$ .
- No hay solución. Las tres esferas no se intersecan en un punto común.

### 3.5. Cinemática de la velocidad

El bucle más relevante debe ser recogido para el jacobiano destinado para el análisis.

Sea  $\vec{\theta}$  el vector formado por variables conjuntas actuadas y  $\vec{P}$  es el vector de posición de la plataforma móvil. Entonces:

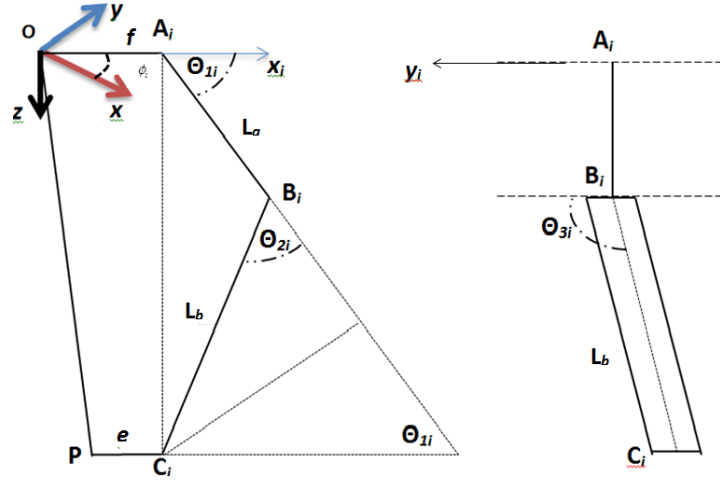


Figura 3.6: (a) Proyección del enlace i en el plano  $x_i z_i$ , (b) final en la vista.

$$\vec{\theta} = \theta_{1i} = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \end{bmatrix}, \vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La matriz jacobiana se derivará al diferenciar la ecuación de cierre de bucle apropiada y reorganizar el resultado en la siguiente forma:

$$\mathbf{J}_{\theta} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_P \begin{bmatrix} \dot{P}_x = v_x \\ \dot{P}_y = v_y \\ \dot{P}_z = v_z \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  son las componentes x, y y z de la velocidad del punto P en la plataforma en movimiento en el cuadro xyz. Para llegar a la forma anterior de la ecuación, observamos el bucle  $OA_iB_iC_iP$ . La ecuación de cierre correspondiente en el cuadro  $x_iy_iz_i$  es:

$$\vec{OP} + \vec{PC_i} = \vec{OA_i} + \vec{A_iB_i} + \vec{B_iC_i} \quad (3.31)$$

En la forma matricial podemos escribirlo como:

$$\begin{bmatrix} P_x \cos \phi_i - P_y \sin \phi_i \\ P_x \sin \phi_i + P_y \cos \phi_i \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + l_a \begin{bmatrix} \cos \theta_{1i} \\ 0 \\ \sin \theta_{1i} \end{bmatrix} + l_b \begin{bmatrix} \sin \theta_{3i} \cos(\theta_{2i} + \theta_{1i}) \\ \sin \theta_{3i} \\ \sin \theta_{3i} \cos(\theta_{2i} + \theta_{1i}) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La diferenciación temporal de esta ecuación conduce a la ecuación jacobiana deseada. La ecuación de cierre de bucle Eq.2.31 puede reescribirse como:

$$(\vec{P} + \vec{e}) = \vec{f} + \vec{a}_i + \vec{b}_i \quad (3.33)$$

Donde  $\vec{a}_i$  y  $\vec{b}_i$  representan los vectores  $\overrightarrow{A_i B_i}$  y  $\overrightarrow{B_i C_i}$  respectivamente.

Diferenciar la ecuación 3.33 con respecto al tiempo y usar el hecho de que  $\vec{f}$  es un vector que caracteriza la plataforma fija, y  $\vec{e}$  es un vector que caracteriza la plataforma en movimiento.

$$\vec{P} = \vec{v} = \vec{a}_i + \vec{b}_i \quad (3.34)$$

Las velocidades lineales en el lado derecho de Ec.3.34 se pueden convertir fácilmente en velocidades angulares usando las identidades bien conocidas.

Así:

$$\vec{v} = \vec{w}_{ai} \times \vec{a}_i + \vec{w}_{bi} \times \vec{b}_i \quad (3.35)$$

$w_{a1}$  y  $w_{b1}$  es la velocidad angular del enlace i. Para eliminar  $w_{b1}$ , es necesario multiplicar por puntos ambos lados de la ec. 3.35 y  $b_i$ . Por lo tanto:

$$b_i \cdot \vec{v} = \vec{w}_{ai} \cdot (\vec{a}_i \times \vec{b}_i) \quad (3.36)$$

Reescribiendo los vectores de Ec.3.36 en el marco de coordenadas  $x_i y_i z_i$  lleva a:

$$a_i = l_a \begin{bmatrix} \cos \theta_{1i} \\ 0 \\ \sin \theta_{1i} \end{bmatrix}, \quad b_i = l_b \begin{bmatrix} \sin \theta_{3i} \cos(\theta_{2i} + \theta_{1i}) \\ \sin \theta_{3i} \\ \sin \theta_{3i} \cos(\theta_{2i} + \theta_{1i}) \end{bmatrix}$$

$$w_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_{1i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_x \cos \phi_i - v_y \sin \phi_i \\ v_x \sin \phi_i + v_y \cos \phi_i \\ v_z \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores de  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $v_i$  y  $v$  en Ec.3.36 lleva a:

$$j_{ix} v_x + j_{iy} v_y + j_{iz} v_z = l_a \sin \theta_{2i} \sin \theta_{3i} \dot{\theta}_{1i} \quad (3.37)$$

Donde:

$$\begin{aligned}j_{ix} &= \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \sin \theta_{3i} \cos \phi_i - \cos \theta_{3i} \sin \phi_i \\j_{iy} &= \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \sin \theta_{3i} \sin \phi_i + \cos \theta_{3i} \cos \phi_i \\j_{iz} &= \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \sin \theta_{3i}\end{aligned}$$

La expansión de la ecuación 3.37 para  $i = 1, 2$  y  $3$  produce tres ecuaciones escalares que se pueden ensamblar en forma de matriz como:

$$\mathbf{j}_x \mathbf{v} = \mathbf{j}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (3.38)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_x &= \begin{bmatrix} j_{1x} & j_{1y} & j_{1z} \\ j_{2x} & j_{2y} & j_{2z} \\ j_{3x} & j_{3y} & j_{3z} \end{bmatrix} \\ \mathbf{j}_q &= l_a \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} \sin \theta_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_{22} \sin \theta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_{23} \sin \theta_{33} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{\theta}_{11} \quad \dot{\theta}_{12} \quad \dot{\theta}_{31}]^T\end{aligned}$$

Después de las manipulaciones algebraicas, es posible escribir:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.39)$$

Donde:

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}_x^{-1} \mathbf{j}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

## Capítulo 4: Análisis

### 4.1. Espacio de Trabajo

El espacio de trabajo es una de las principales características que identifican a un manipulador. Conocer el máximo alcance (en X, Y y Z), es uno de los principales aspectos al momento de seleccionar un manipulador para realizar una tarea.

El espacio de trabajo del robot Delta está definido como la región de un espacio cartesiano de tres dimensiones (solamente traslación) que puede ser alcanzada por el órgano terminal del robot (centro de la plataforma móvil). Las únicas restricciones tomadas en cuenta son las procedentes de las diferentes cadenas cinemáticas dadas por la siguiente ecuación.

$$4Z_{pi}^2 + 4R_1^2 - S_i^2 + Q_i^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{L_1^2}\right) + Q_i \left(\frac{-2R_1S_i}{L_1} - 4R_1\right) \geq 0 \quad \dots(4.1)$$

Los movimientos de los robots paralelos pueden ser restringidos por diferentes factores: los límites mecánicos de las articulaciones pasivas, la auto-colisión entre los movimientos del robot, las limitaciones debidas a los actuadores y los diferentes tipos de singularidades que pueden dividir el espacio de trabajo en componentes separados.

En general, los robots paralelos conducen a ecuaciones complejas, por lo que determinar su espacio de trabajo es una tarea no trivial. Sin embargo, la solución de este problema es de suma importancia dado que de ella dependen el diseño del mismo robot y la planeación de sus trayectorias. Por lo anterior, es de vital importancia desarrollar herramientas eficaces que permitan determinar tanto la forma como el volumen de su espacio de trabajo.

De entre los diferentes métodos para el cálculo del espacio de trabajo, Castillo explica un método que consiste en aplicar el modelo cinemático inverso en el cual, si para un punto en cuestión ( $P = [X_p \ Y_p \ Z_p]$ ) se obtiene una solución real de la cinemática inversa del robot Delta, se acepta a ese punto como parte del espacio de trabajo del manipulador. Este método es llamado espacio de trabajo por barrido de coordenadas.

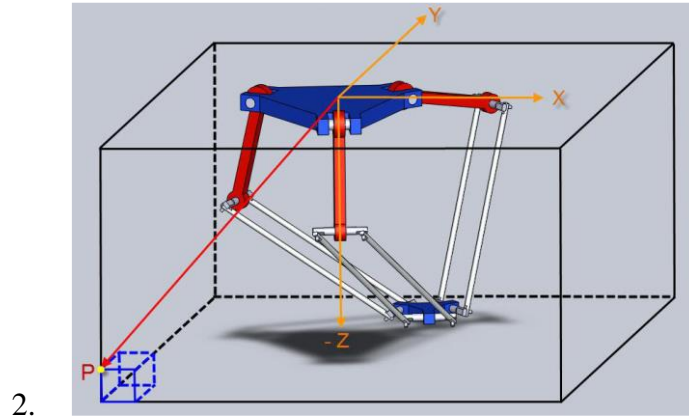


Figura 4.1: Esquema utilizado para el cálculo del espacio de trabajo.

Para determinar el espacio de trabajo por barrido de coordenadas primeramente se define un polígono (prisma rectangular) suficientemente grande para contener el robot Delta y su espacio de trabajo (figura 4.1). En seguida se realiza un barrido de coordenadas ya sea de manera lineal o radial, siendo el barrido lineal el más sencillo. Para empezar el cálculo se deben definir las dimensiones del polígono, esto se hace en base al máximo alcance que puede realizar cada una de las cadenas cinemáticas del robot suponiendo que trabajan de manera independiente. Para el caso de nuestro manipulador, el máximo alcance se da cuando los eslabones L1 y L2 se encuentra alineados, obteniendo como resultado una longitud máxima de 600 mm en cualquier dirección (X, Y o -Z). De tal forma que las dimensiones mínimas del polígono deberán ser de 1200 mm de ancho, 1200 mm de largo y 600 mm de alto.

Dentro de dicho polígono se sitúa al manipulador, haciendo coincidir el sistema de coordenadas del centro de la plataforma fija del manipulador con el centro de una de las caras del prisma rectangular. De esta manera, puede haber un desplazamiento de 600 mm tanto en el sentido negativo como positivo para X y Y. El desplazamiento en el eje Z es de 600 mm, el cual siempre será negativo. De esta manera se puede conocer la ubicación de cada una de las aristas del prisma con respecto al sistema de coordenadas de referencia.

El barrido de coordenadas se realiza al recorrer de manera lineal al prisma. Para ello se divide al prisma inicial en pequeños cubos de dimensiones conocidas (en nuestro estudio se dividió el prisma propuesto en cubos de 1 mm por lado, generando un total de  $8.64 \times 10^8$  cubos). De este modo, también se puede conocer la ubicación de cada arista de estos cubos.



Al recorrer de manera lineal cada una de las aristas de los cubos, se resuelve el modelo cinemático inverso para cada ubicación con respecto al sistema de referencia. Si se obtiene como resultado una solución real (es decir, sin números imaginarios), se acepta ese punto como parte del espacio de trabajo del manipulador. Se puede asignar a cada punto contenido dentro del prisma inicial, un valor de volumen, esto a partir que se conoce cuál es el volumen inicial del prisma y también se conoce el total de puntos que resultaron de la división del prisma en pequeños cubos. El volumen del espacio de trabajo se obtiene al realizar una sumatoria del número de puntos que fueron aceptados como parte del espacio de trabajo.

#### **4.2. Análisis de la variación del espacio de trabajo**

Como se ha comentado anteriormente, la motivación para configurar un manipulador es dotarlo de una mayor flexibilidad para adaptarse a diferentes tareas. Dentro de los impactos principales de la reconfiguración se encuentra la modificación de su espacio de trabajo, es decir, el permitirle alcanzar diferentes conjuntos de puntos del espacio cartesiano. El que un manipulador cuente con una amplia variedad de espacios de trabajo significa que, para una tarea asignada, se puede seleccionar el espacio de trabajo más apropiado, posicionando al manipulador como una herramienta muy versátil. Por tal motivo, un punto básico para el estudio es conocer el cambio, tanto en forma como en volumen del espacio de trabajo del manipulador al ser reconfigurado. La reconfiguración que se está considerando en este trabajo es geométrica, es decir, basada en la variación de alguno de los parámetros del robot (longitud de los eslabones). Por lo anterior, se analizará la variación del espacio de trabajo con respecto a los parámetros del robot.

## Capítulo 5: Diseño y Simulación

### 5.1. Requisitos del diseño

- Se debe de diseñar el robot de tal manera que sea capaz de reconfigurar la longitud de los tres brazos al mismo tiempo.
- La reconfiguración se debe de hacer incluso durante el movimiento con o sin carga.
- El mecanismo debe de ser capaz de cubrir todo el desplazamiento calculado anteriormente.
- Los brazos deben de estar lo suficientemente rígidos para no afectar a la precisión del robot.

### 5.2. Propuestas de diseño

De acuerdo a nuestra problemática se han propuesto dos modelos que cumplen con lo necesario para el proyecto además de la aplicación que se puede dar.

- Primera propuesta, Robot Delta IRB 340 FlexPicker.



Figura 5.1: Robot Delta IRB 340 FlexPicker.

La primera propuesta se escogió debido a una serie de ventajas que nos proporciona este tipo de diseño y se adecua más a nuestra problemática.

Tabla 5.1: Comparación de funcionamiento de un robot Delta IRB.

(Fuente: Elaboración propia).

Ventajas	Desventajas
Los enlaces son accionados directamente. Baja inercia. Ocupa menos espacio. Puede ser instalado sobre pedestales en su zona superior. Mucho más veloz. Mayor facilidad en el mantenimiento.	Pobre trayectoria de precisión. Requiere motores de mayor resolución. Cinemática compleja.

Es por estas ventajas que se escogió este diseño a realizarse la siguiente propuesta también es ideal pero no se ajustaba mucho a nuestras necesidades.

- Segunda propuesta, Prototipo de una impresora 3D implementado mediante un Robot Delta.

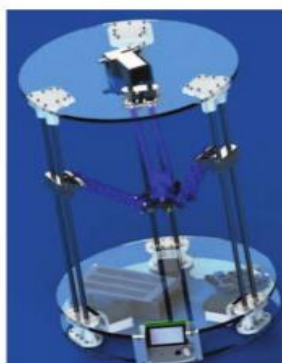


Figura 5.2: Prototipo de una impresora 3D implementado mediante un Robot Delta.

Tabla 5.2: Comparación del prototipo de una impresora 3D.

Ventajas	Desventajas
Buena trayectoria de precisión. Ensamble simple. Movimientos suaves. Mayor volumen de trabajo. Operación en eje Z lim	Alta inercia El sistema de movimiento está compuesto por una gran cantidad de partes. Estructura de gran altura.

itado por la longitud de los actuadores.	Mayor costo.
--	--------------

Ahora debemos escoger la propuesta más adecuada y dar el fundamento del porqué de la selección.

Tabla 5.3: Selección del brazo de control.

(Fuente: María, 2006)

Matriz Selección brazo de Control					
		Propuesta 1		Propuesta 2	
		Sistema con actuadores rotacionales		Sistema con desplazamiento lineal	
Criterio	Peso	Valor	Evaluacion	Valor	Evaluacion
Costo	25%	4	1	2	0.5
Preciso	15%	3	0.45	4	0.6
Robusto	20%	4	0.8	2	0.4
Seguro	10%	3	0.3	4	0.4
Velocidad	15%	4	0.6	3	0.45
Flexibilidad	15%	4	0.6	3	0.45
Total		2.8		2.3	
Seleccionar		Sí		No	

### 5.3. Selección de los componentes

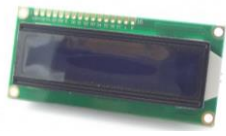





Para la selección de los elementos del mecanismo, se consultaron tanto catálogos comerciales como proveedores locales y cercanos a la región, llegando a considerarte los siguientes componentes para la implementación.

Tabla 5.4: Selección de componentes (materiales usados para la implementación)

(Fuente: Elaboración propia)

MATERIAL	DESCRIPCIÓN	UNIDAD	CANTIDAD

<p>Servo MG946R</p> 	<p>Stall Torque: 10.5Kg/cm (4.8V); 14Kg/cm (6.0V) Velocidad de Funcionamiento: 0.20seg/60° (4.8V sin carga); 0.17seg/60° (6V)</p>	Und.	3
<p>Tubos de aluminio</p> 	<p>Forma: circular Diámetro: 3/8 pulg. Material: aluminio</p>	cm	90
<p>Tubos de aluminio</p> 	<p>Forma: Cuadrada Dimensión: 3/2 pulg. Material: aluminio</p>	cm	440
<p>PLA</p> 	<p>Filamento de PLA Diámetro: 1.75mm Color 1: Blanco Color 2: Negro</p>	kg	0.65
<p>MDF</p> 	<p>MDF estándar Espesor: 3 mm Color Opaco Dimensión: 40cm x 30cm</p>	Und.	2
<p>Tornillos</p> 	<p>Material: acero inoxidable Tipo: autorroscante Tamaño: 1 pulg.</p>	Und.	12
<p>Pernos</p> 	<p>Material: acero inoxidable Tipo: M2 Tamaño: 2 pulg.</p>	Und.	14
<p>Tuercas</p> 	<p>Material: acero inoxidable Tipo: M2 Forma: hexagonal</p>	Und.	14
<p>Arandelas</p> 	<p>Arandela plana Material: acero inoxidable Tipo: M2 Forma: circular</p>	Und.	16
<p>DISP-LCD1602</p>	<p>Display alfanumerico Canal: 16x2</p>	Und.	1

	Voltaje de Operación: 5V Color Led: azul		
Fuente de alimentación 	Modelo PWR-FC-12V-8P5A Corriente de salida máx.: 8.5A Potencia máx.: 100W Dimensiones: 199*98*38mm (L*W*H)	Und.	1
Arduino uno 	Microcontrolador: ATmega328P Chip USB: ATmega16U2 Voltaje de Operación: 5V Voltaje de alimentación: 6-12V	Und.	1
Switch 	Interruptor eléctrico Voltaje: 250 AC max Amara je: 10A max con interna	Und.	1
Cables jumper 	Diferente color Largo: 10 cm Tipo de conexión: M – M	Und.	20
Convertidor Voltaje 	Convertidor Voltaje DC-DC Input: 12 V dc Output: 5 V dc Corriente: 2 A	Und.	1

EQUIPO	UNIDAD	CANTIDAD
Impresora 3d	Und.	1
Taladro	Und.	1
Sierra para metal	Und.	1
computador	Und.	1
Destornillador estrella	Und.	2
Cautín eléctrico	Und.	1
Proto board	Und.	1

Tabla 5.5: Presupuesto para la implantación del proyecto.

(Fuente: Elaboración propia).

RECURSOS	UNIDAD	CANTIDAD	MONTO (S/.)
----------	--------	----------	-------------

Servo MG946R	Und.	3	120.00
Tubo circular	cm	90	6.00
Tubo cuadrado	cm	440	25.00
PLA	kg	0.65	60.00
MDF	Und.	2	30.00
Tornillo	Und.	12	6.00
PERNO	Und.	14	7.00
Tuerca hexagonal	Und.	14	3.50
Arandela plana	Und.	16	3.50
Display LCD	Und.	1	15.00
Fuente de alimentación	Und.	1	50.00
Arduino UNO	Und.	1	45.00
Switch	Und.	1	3.00
Cables jumper	Und.	20	2.00
Convertidor Voltaje DC-DC	Und.	1	25.00
Servicio de impresión 3D	-	-	80.00
Servicio de maquinado	-	-	100
Servicio extra	-	-	50

**MONTO TOTAL: S/. 631.00**

#### **5.4. Diseño final del robot**

Se propone un diseño similar al robot escogido anteriormente, el funcionamiento no varía con la propuesta mencionada anteriormente. El funcionamiento del robot no varía respecto al propuesto, son las medidas y esto ocasionaría una variación entre el rango de ángulos de trabajo.

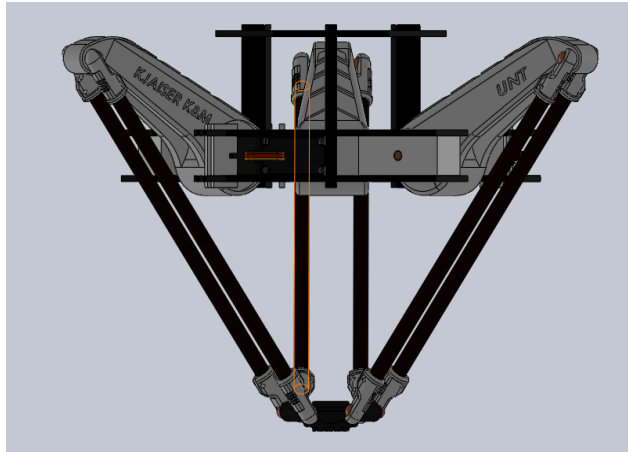


Figura 5.3: Vista frontal del diseño.

(Fuente: Elaboración propia)

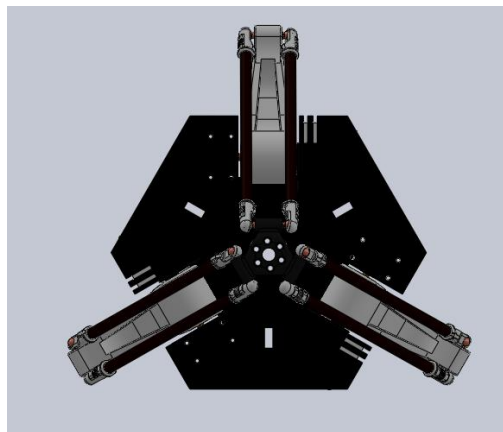


Figura 5.4: Vista superior del diseño.

(Fuente: Elaboración propia)



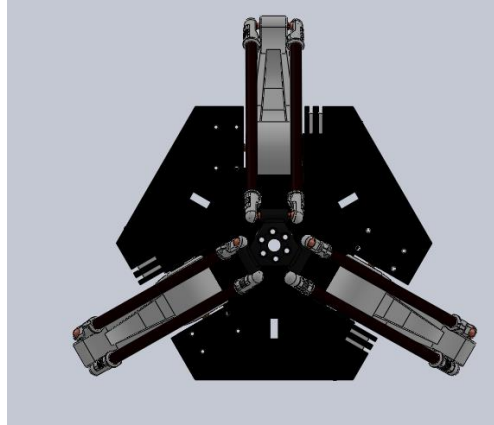


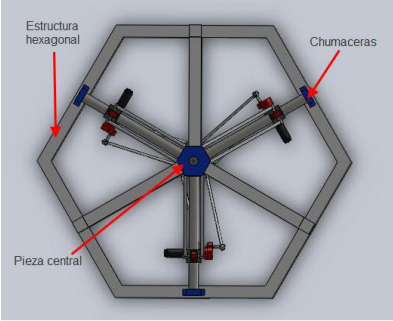

Figura 5.5: Vista inferior del diseño.

(Fuente: Elaboración propia)

Otra parte fundamental del robot es la estructura en la se sostendrá el robot paralelo, como continuación de nuestro hemos tomado una estructura de referencia para adaptarla a nuestro diseño. Se presentan las propuestas:

Tabla 5.6: Comparación de soporte para el robot paralelo.

(Fuente: Elaboración propia)

JAULA HEXAGONAL	JAULA CUADRADA
	
<p>Esta construcción sirve para la darle un movimiento vertical al robot.</p> <p>Su diseño hexagonal no permite la libre manipulación de objetos.</p> <p>Solo se puede usar para determinadas tareas (condiciones iniciales de diseño).</p> <p>Aumento en el costo de la fabricación.</p>	<p>No presenta movimiento vertical ni horizontal.</p> <p>Su diseño permite la libre manipulación de objetos.</p> <p>Se puede en diversas tareas debido a que no es una estructura cerrada.</p> <p>Se puede acoplar a una faja transportadora.</p> <p>Presenta una gran estabilidad debido al material (aluminio).</p>



Como se necesita guías puede presentar una inestabilidad.	El costo de fabricación es menor.
---	-----------------------------------

Al momento de ver estas diferencias, se decidió escoger la jaula cuadrada porque es más adaptativo para distintas aplicaciones y además presenta una gran estabilidad debido a su forma.

## Capítulo 6: Conclusiones

- El diseño obtenido del robot paralelo tipo delta, dispone de flexibilidad y adaptabilidad para realizar diferentes tareas.
- Las ecuaciones de cinética directa e inversa nos es de mucha ayuda para configurar el robot y llegar aun punto o coordenada establecida por el usuario.
- El resultado de la implementación de este tipo de robot es satisfactorio por el bajo costo de implementación y de fácil mantenimiento.
- La interfaz realizada en Matlab y SolidWorks nos facilita para poder ingresar las coordenadas y que el efector final llegue a dicho punto, consiguiendo así su objetivo de una manera mas precisa y eficiente.

## Capítulo 7: Referencias bibliográficas

- Gutiérrez Rodríguez Ana (2015), “Diseño e implementación de un robot paralelo”, Universidad Tecnológica de Puebla, México.
- S. R. S. J. R. O. Aracil R., «Robots paralelos: Máquinas con un pasado para una robótica del futuro,» Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial., vol. 3, nº 1, pp. 16-28, 2006.
- C. L. I. L. Simionescu I., «Static balancing with elastic systems of DELTA parallel robots.,» Mechanism and Machine Theory., vol. 87, pp. 150-162, 2015.
- C. E. G. J. B. A. Sánchez A., «Análisis del desempeño citostático de un robot paralelo tipo Delta reconfigurable.,» Ingeniería, Investigación y Tecnología, vol. 16, nº 2, pp. 213-224, 2015.
- John J. Craig, “Introduction to robotics, Mechanics and Control”, 3ra edición, 2005.
- Clavel, R., Delta, a Fast Robot with Parallel Geometry. XVIII Ponencia Internacional de Robots Industriales, pp. 91-100, abril 1988.
- YangminLi, Qingsong Xu, “Dynamic modeling and robust control of a 3 PRC translational parallel kinematic machine”, Revista de Robótica y Fabricación Integrada por Computadora, Science Direct, 2009.
- André Olsson, Modeling and control of a Delta-3 robot, master thesis, Departamento de Control Automático, Universidad de Lund, 2009.
- Angelo Liadis, control de lógica difusa de un robot paralelo de dos grados de libertad, tesis de maestría, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Lakehead, 2010.
- Manuel Napoleon Cardona Gutiérrez, “Kinematics Analysis of a Delta Parallel Robot”, IEEE, Universidad de Sonsonate, Salvador, 2010.