Control de Robots

- parte I -

Prof. Oscar E. Ramos, Ph.D.

Temas

1. **Conceptos Generales**
2. Control en el Espacio Articular
   - Control PD
   - Control PD + Compensación de gravedad
   - Control por dinámica inversa

Modelo Dinámico en Espacio de Estados

- Dinámica de un Robot:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau}_{tot}$$

Señal de control

- Variables de estados:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

- Ecuaciones en el espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -M^{-1}(\mathbf{x}_1)\left(C(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(\mathbf{x}_1) \end{bmatrix}}_{G(\mathbf{x}_1)}\mathbf{u}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}_1)\mathbf{u}}$$

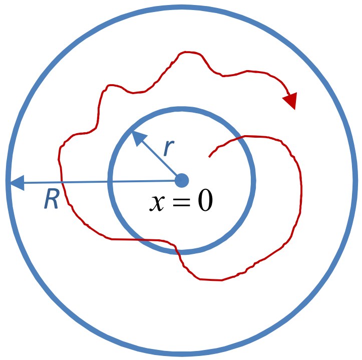
Ecuación en espacio de estados

Sistema afin con respecto al control

Estabilidad de Sistemas Dinámicos

Tipos de Estabilidad (para x=0)

- Estabilidad (en el sentido de Lyapunov)

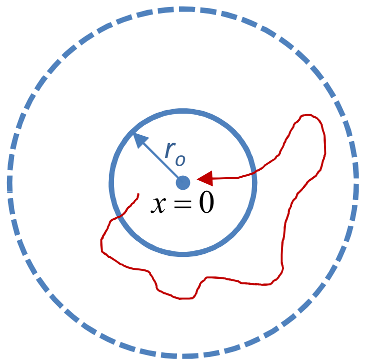


- Idea: el sistema siempre se mantiene en una región R si se comienza cerca del punto de equilibrio x = 0

- Más formalmente:

$$\forall R > 0, \exists r > 0, \| x(0) \| < r \Rightarrow \| x(t) \| < R, \forall t \geq 0$$

- Estabilidad asintótica



- Si se inicia suficientemente cerca del punto de equilibrio, se regresará al punto de equilibrio

- Más formalmente:
  1. Es estable en el sentido de Lyapunov
  2. $\exists r_0 > 0, \| x(0) \| < r_0 \Rightarrow x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

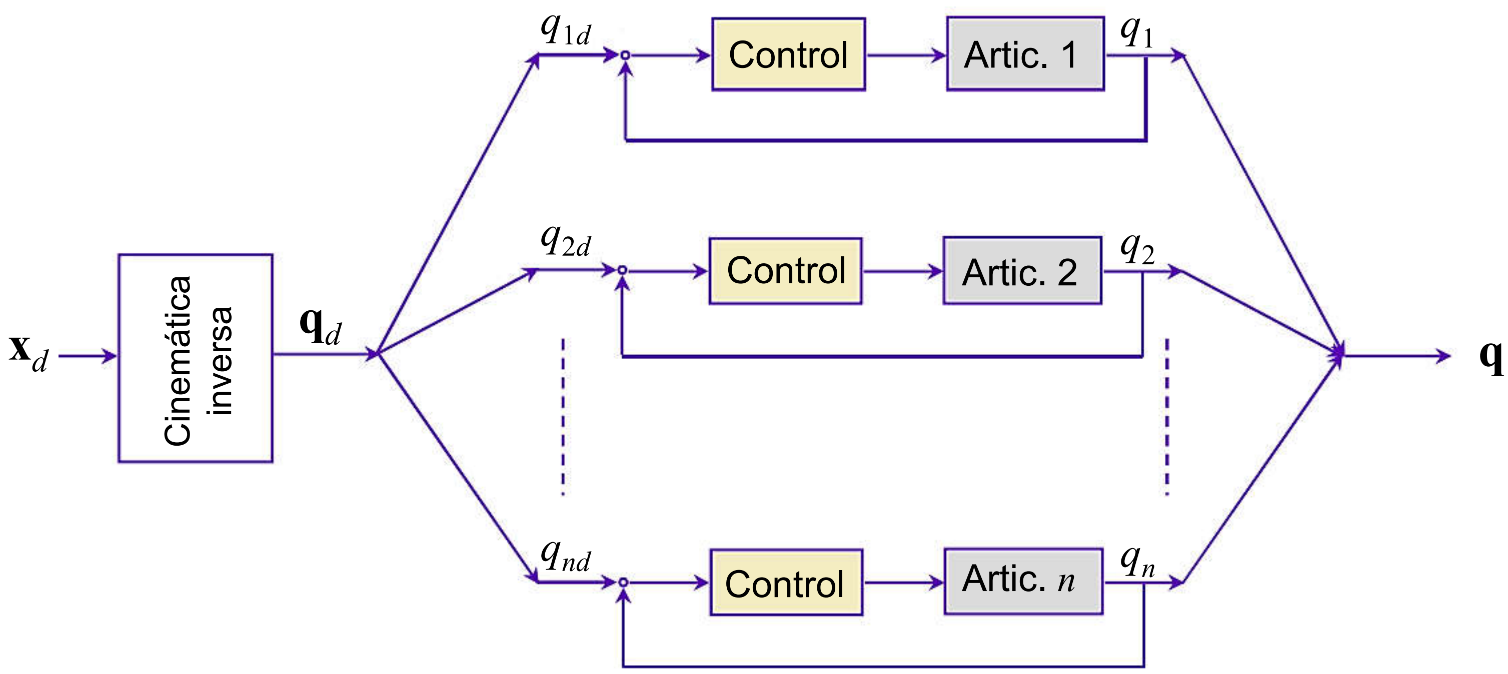
Nota: se considera que x = 0 es un punto de equilibrio

Formas de Control

- Según la variable de control
  - Control de posición
  - Control de velocidad
  - Control de torque
- Según el grado de acoplamiento
  - Control descentralizado (monoarticular)
    - Se trata cada articulación por separado
    - Puede implementar control de posición, velocidad o torque
  - Control centralizado (multiarticular)
    - Considera todo el modelo del robot
    - Implementa típicamente control de torque
- Según el resultado del control
  - Control de movimiento
  - Control de fuerza
  - Control híbrido (movimiento+fuerza)

Formas de Control

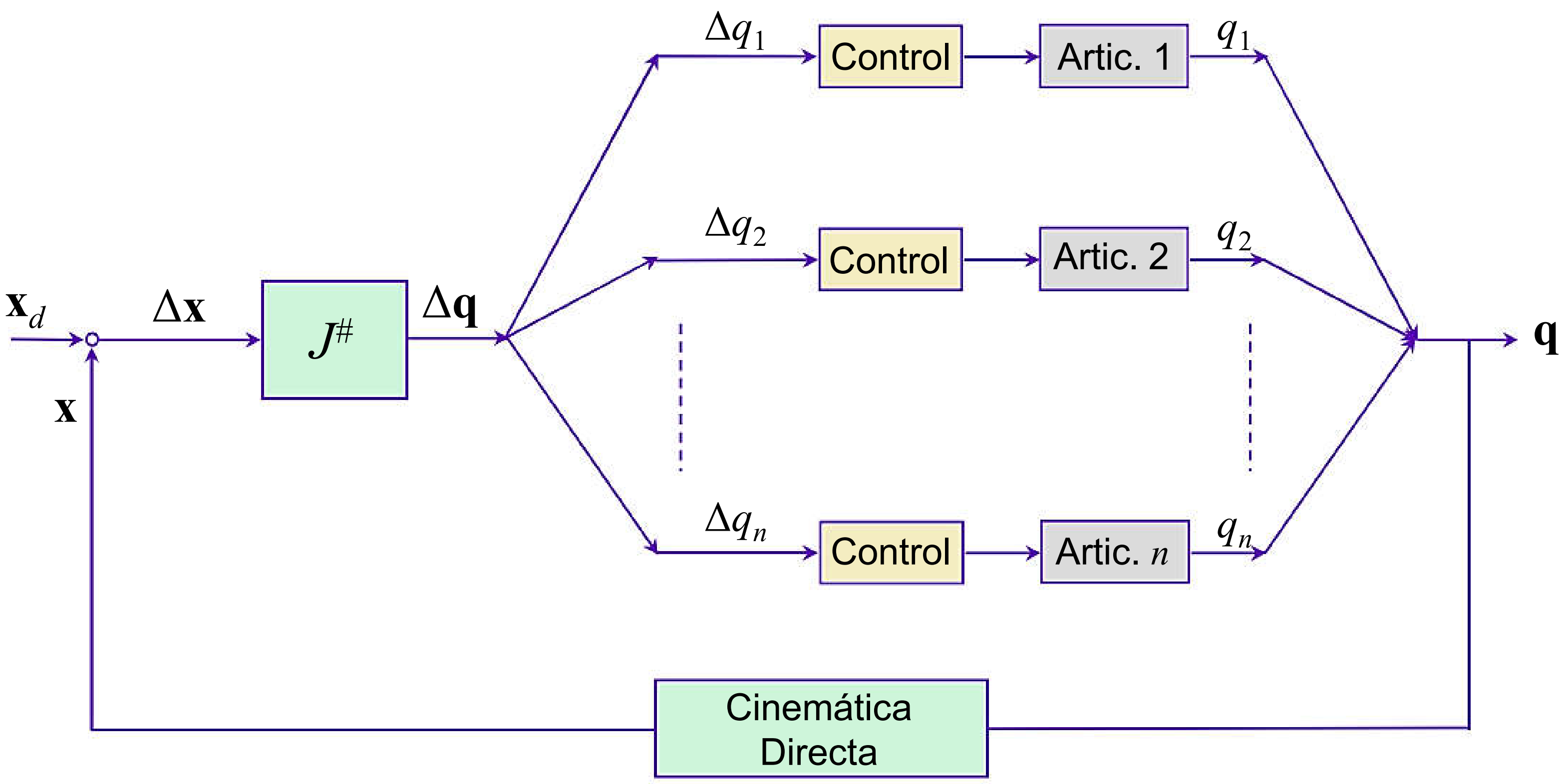
- Control Descentralizado (monoarticular)
  - Considera n sistemas (articulaciones) independientes: control SISO
  - Usa el modelo dinámico de cada articulación (motor+transmisión) por separado



  - Efectos de acoplamiento: considerados como disturbios (ruido).

Formas de Control

- Control Descentralizado (monoarticular)
  - Control cinemático: usando: "*resolved motion rate control*"



  - Existen otras formas de control cinemático
    - Integrando $\dot{\mathbf{q}}$ para obtener $\mathbf{q}$ e ingresarlo como referencia a cada controlador

Formas de Control

- Control Centralizado (multiarticular)
  - Considera todas las articulaciones a la vez (considera los *acoplamientos* entre articulaciones)
  - Utiliza el modelo completo del robot:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

  - Puede especificarse en:

    a) El espacio Articular
      - El lazo de control utiliza las variables articulares
      - Entrada al controlador se basa en $\mathbf{q}$

    b) El espacio Operacional
      - El lazo de control utiliza la variables operacionales (posición, orientación, etc.)
      - Entrada al controlador se basa en $\mathbf{x}$

Temas

1. Conceptos Generales
2. **Control en el Espacio Articular**
   - Control PD
   - Control PD + Compensación de gravedad
   - Control por dinámica inversa

Control en el Espacio Articular

Introducción

- Es una forma de control centralizada (multiarticular)
  - Considera todas las articulaciones simultáneamente

- Según el objetivo de control:
  - Control de *set point* (punto de referencia): $\mathbf{q}_d(t) = \mathbf{q}_d$
  - Control para seguimiento de trayectoria: $\mathbf{q}_d(t)$ variante en el tiempo

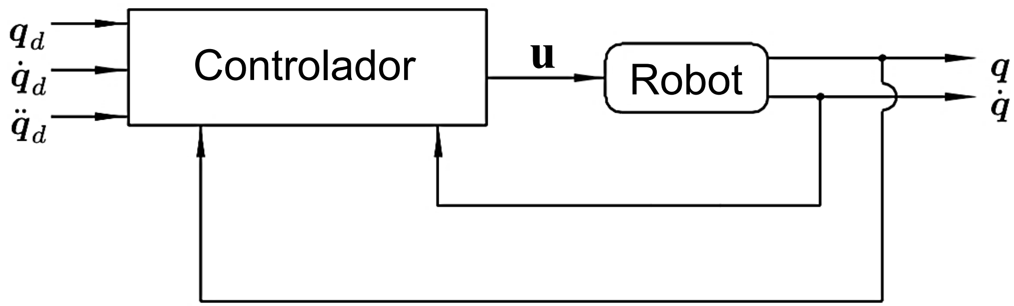
- Métodos usuales:
  - PD (Proporcional Derivativo)
  - PD + Compensación de gravedad
  - Dinámica Inversa (torque calculado)

Control en el Espacio Articular

Control de set-point

- Objetivo:
  - Encontrar torques tales que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d$
- Notación:
  - Errores articulares: $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)$
- Problema de regulación: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$
- Ley de control genérica:

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d, M(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{g}(\mathbf{q}))$$



Control en el Espacio Articular

Control PD

- Modelo dinámico de un robot:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

n grados de libertad

- Variables de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

← error de posiciones articular: $\mathbf{e} = \mathbf{q}_d$ - $\mathbf{q}$

← velocidades articulares

- Objetivo: alcanzar $\mathbf{q}_d$ con $\dot{\mathbf{q}}_d = 0$

- Ley de control (PD):

$$\mathbf{u} = K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}})$$

$$\boxed{\mathbf{u} = K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) - K_d\dot{\mathbf{q}}}$$

$K_p, K_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$

definidas positivas

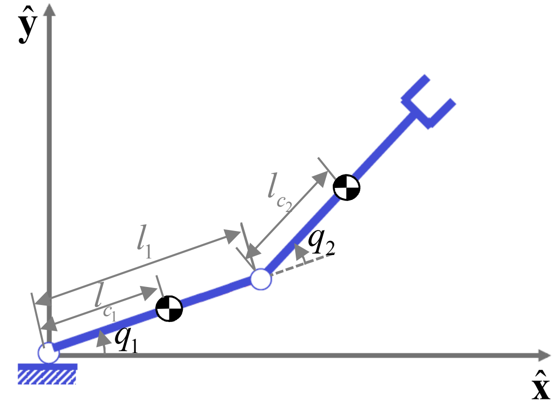
- Nota: K_p, K_d son usualmente matrices diagonales

Control en el Espacio Articular

Control PD

- Ejemplo: robot RR planar (2 gdl)

  - Modelo dinámico: $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$



$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \qquad C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \left(m_1 l_{c_1} + m_2 l_1\right) c_1 + m_2 l_{c_2} c_{12} \\ m_2 l_{c_2} c_{12} \end{bmatrix} g$$

$$m_{11} = m_1 l_{c_1}^2 + m_2\left(l_1^2 + 2 l_1 l_{c_2} c_2 + l_{c_2}^2\right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} \qquad m_{22} = m_2 l_{c_2}^2 + I_{zz_2}$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2\left(l_1 l_{c_2} c_2 + l_{c_2}^2\right) + I_{zz_2} \qquad h = -m_2 l_1 l_{c_2} s_2$$

  - Control PD:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ 0 & k_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1d} - q_1 \\ q_{2d} - q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ 0 & k_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Abrir: `controldin.m`

Control en el Espacio Articular

Control PD

- Ejemplo: robot RR planar (2 gdl)
  - Valor deseado: $\mathbf{q}_d = [0.5,\ 0.5]$
  - Usar control PD con: $k_{p1} = k_{p2}$ y $k_{d1} = k_{d2}$
  - Encontrar valores de ganancia adecuados

  - ¿Hay error en estado estacionario?
  - ¿Cuál es el valor de estado estable?
    - ¿Qué expresión define el valor de convergencia? (*Ayuda*: analizar el modelo en lazo cerrado en espacio de estados)

(Puntos de Equilibrio)

- Punto de equilibrio:
  - Dado un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$
  - Los puntos de equilibrio hacen que: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$

- Para un robot:
  - Modelo dinámico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathrm{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -M^{-1}\left(C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

  - Puntos de equilibrio (forzado) cumplen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathrm{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{cases}$$

  - Todos los puntos de equilibrio tienen velocidad nula
  - En el equilibrio los torques articulares *deben* balancear la gravedad

Control en el Espacio Articular

Control PD

- Ejemplo: robot RR planar (2 gdl)
  - Valor deseado: $\mathbf{q}_d = [0.5,\ 0.5]$
  - Usar control PD con: $k_{p1} = k_{p2}$ y $k_{d1} = k_{d2}$
  - Encontrar valores de ganancia adecuados

  - ¿Hay error en estado estacionario?
  - ¿Cuál es el valor de estado estable?
    - ¿Qué expresión define el valor de convergencia? (*Ayuda*: analizar el modelo en lazo cerrado en espacio de estados)

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_d - K_p^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q})$$

  - Quitarle la gravedad al modelo, ¿cuál es el error en estado estacionario?

- En general, el control PD se puede usar para modelos donde no se considera la gravedad

Control en el Espacio Articular

Control PD + Compensación de Gravedad

- Modelo dinámico de un robot:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

n grados de libertad

  - Variables de estado:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ error de posiciones articular: $\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$

$\leftarrow$ velocidades articulares

- Objetivo: alcanzar $\mathbf{q}_d$ con $\dot{\mathbf{q}}_d = 0$
- Ley de control (PD+gravedad):

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) - K_d\dot{\mathbf{q}}}$$

$K_p, K_d \in \mathbb{R}^{n\times n}$

definidas positivas*

  - Probar con el modelo del robot RR
  - Con esta ley se alcanza estabilidad asintótica para: $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_d$
  - ¿Cómo verificar la estabilidad asintótica?
    - Criterio de Lyapunov

*típicamente diagonales

(Teorema de Lyapunov)

- Estabilidad en el sentido de Lyapunov
  - Sea el sistema $\dot{x} = f(x)$ con $f(0) = 0$
  - El punto x = 0 es estable (en el sentido de Lyapunov) si se puede encontrar una función escalar V tal que:

1. V es suave: V es de clase $\mathcal{C}^1$ (tiene derivada continua)
2. V es definida positiva: $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ y $V(0) = 0$
3. $\dot{V}$ es semidefinida negativa: $\dot{V}(0) \leq 0, \quad \forall x$

- Estabilidad asintótica
  - El punto x = 0 es asintóticamente estable si:

Se cumple (1) y (2)

$\dot{V}$ es definida negativa: $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ y $\dot{V}(0) = 0$

x = 0 es un punto de equilibrio

V: función candidata de Lyapunov

(Teorema de LaSalle)

- ¿Por qué?
  - Brinda una condición para la estabilidad asintótica cuando $\dot{V} \leq 0$ (semidefinida negativa)

- Conjunto invariante S_I:

$$x(0) \in S_I \quad \Rightarrow \quad x(t) \in S_I, \quad \forall t > 0$$

  - Si se empieza en un conjunto invariante, se permanece en el conjunto

- LaSalle:
  - Si existe V tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ a lo largo de las trayectorias de $\dot{x} = f(x)$
  - Entonces las trayectorias del sistema convergen asintóticamente al más grande conjunto invariante

$$S_I \subseteq S = \{\mathrm{x} : \dot{V}(x) = 0\}$$

y $S_I = \{0\}$ es asintóticamente estable

Control en el Espacio Articular

Control PD + Compensación de Gravedad

- Análisis usando Lyapunov
  - Función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{e},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_p \mathbf{e}$$

Depende de $\mathbf{e}$, $\dot{q}$

1. Probar que V es definida positiva:

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} > 0 \quad \text{con} \quad \dot{\mathbf{q}} \neq 0 \qquad (M > 0)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_p \mathbf{e} > 0 \quad \text{con} \quad \dot{\mathbf{e}} \neq 0 \quad \text{solo si} \quad K_p > 0$$

K_p debe ser definida positiva

$V = 0$ solo si $\dot{\mathbf{q}} = 0, \mathbf{e} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} V(\mathbf{e},\dot{\mathbf{q}}) > 0, \quad \forall \mathbf{e} \neq 0, \dot{\mathbf{q}} \neq 0 \\ V(0,0) = 0 \end{array}\right\} \text{V es definida positiva}$$

Control en el Espacio Articular

Control PD + Compensación de Gravedad

- Análisis usando Lyapunov
  - Función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{e},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_p \mathbf{e}$$

Depende de $\mathbf{e}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$

2. Determinar si $\dot{V}$ es semidefinida positiva:

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}^T M\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{e}}^T K_p \mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_p \dot{\mathbf{e}}$$

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T M\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{e}}^T K_p \mathbf{e}$$

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - C\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T K_p \mathbf{e} \longleftarrow \quad M\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} - C\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{M} - 2C)\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{g} - K_p \mathbf{e}) \longleftarrow$$

Propiedad: $\dot{M} - 2C = 0$

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u} - \mathbf{g} - K_p \mathbf{e})$$

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T ((\mathbf{g} + K_p \mathbf{e} - K_d \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g} - K_p \mathbf{e}) = -\dot{\mathbf{q}}^T K_d \dot{\mathbf{q}} \longleftarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} + K_p \mathbf{e} - K_d \dot{\mathbf{q}}$$

Control en el Espacio Articular

Control PD + Compensación de Gravedad

- Análisis usando Lyapunov
  - Función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{e},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^T K_p \mathbf{e}$$

Depende de $\mathbf{e}$, $\dot{q}$

2. Determinar si $\dot{V}$ es semidefinida positiva:

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T K_d \dot{\mathbf{q}}$$

$-\dot{\mathbf{q}}^T K_d \dot{\mathbf{q}} < 0$ con $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ solo si $K_d > 0$ ⇨ K_d debe ser definida positiva

$\dot{V} = 0$ solo si $\dot{\mathbf{q}} = 0$ (para cualquier $\mathbf{e}$)

$\dot{V}(\mathbf{e},\dot{\mathbf{q}}) \leq 0$ ⇨ $\dot{V}$ es semidefinida negativa

Resumen:

- V es definida positiva
- $\dot{V}$ es semidefinida negativa
- El punto $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$, $\dot{\mathbf{q}} = 0$ es estable en el sentido de Lyapunov

¿Es asintóticamente estable?
(¿el error tiende a cero?)

Control en el Espacio Articular

Control PD + Compensación de Gravedad

- Análisis usando el teorema de La Salle
  - Trayectorias del sistema convergen al mayor conjunto invariante de estados S_I donde $\dot{V} = 0$

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T K_d \dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}} = 0$$

  - Condición para $\ddot{\mathbf{q}} = 0$:

$$M\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} = \mathbf{g} + K_p\mathbf{e} - K_d\dot{\mathbf{q}} \xrightarrow{\dot{\mathbf{q}} = 0} M\ddot{\mathbf{q}} = K_p\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{q}} = \underbrace{M^{-1}K_p}\mathbf{e} = 0$$

invertible: la única solución es **e** = 0

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0, \ddot{\mathbf{q}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e} = 0 \quad \longleftarrow$$

Único estado invariante cuando **e** = 0

  - El punto de equilibrio es asintóticamente estable ($\mathbf{e} \to 0$)

- Conclusión:
  - Con control PD+compensación de gravedad el error tiende a cero

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) - K_d\dot{\mathbf{q}}$$

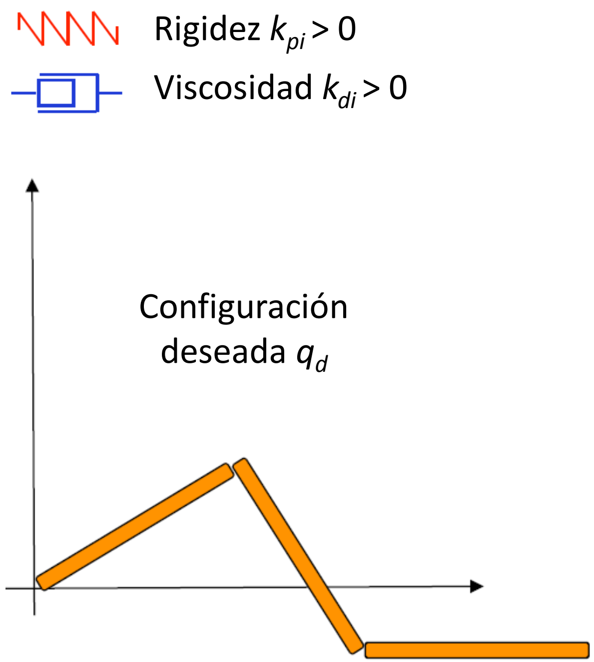
Control en el Espacio Articular

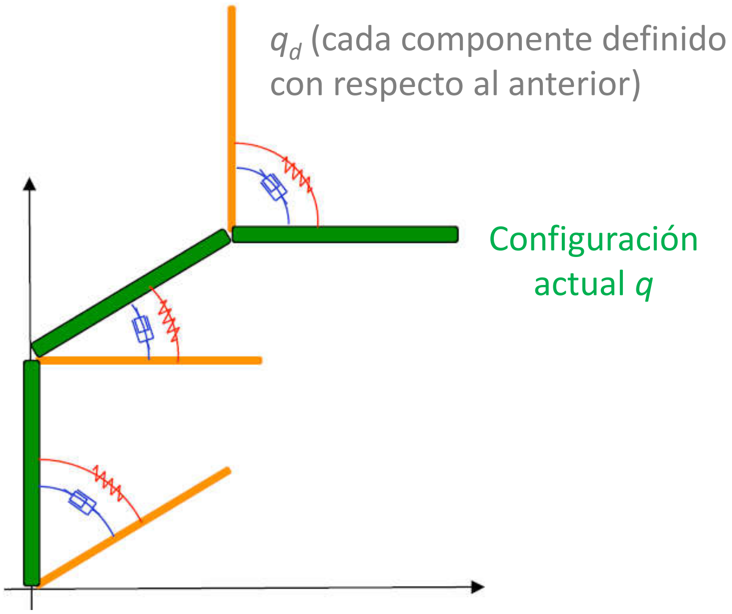
Control PD + Compensación de Gravedad

- Interpretación Mecánica: $\mathbf{u} = \mathbf{g} + K_p \mathbf{e} - K_d \dot{\mathbf{q}}$

  Para matrices diagonales K_p, K_d (con elementos positivos):

  - Los elementos de K_p representan la rigidez de resortes virtuales
  - Los elementos de K_d representan la viscosidad de amortiguadores virtuales





Control en el Espacio Articular

Control por Dinámica Inversa

- Formulación del Problema:

$$\mathbf{u}^* = \arg\min_{\mathbf{u}} \|\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}^*\|^2$$

sujeto a

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

- Solución:

$$\ddot{\mathbf{q}} = M^{-1}(\mathbf{q})\left(\mathbf{u} - C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})\right)$$

$$\mathbf{u}^* = \arg\min_{\mathbf{u}} \| M^{-1}\left(\mathbf{u} - C\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}\right) - \ddot{\mathbf{q}}^* \|^2$$

$$\mathbf{u}^* = \arg\min_{\mathbf{u}} \| M^{-1}\mathbf{u} - M^{-1}\left(C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}\right) - \ddot{\mathbf{q}}^* \|^2$$

$$M^{-1}\mathbf{u} = M^{-1}\left(C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}\right) + \ddot{\mathbf{q}}^*$$

$$\boxed{\mathbf{u}^* = C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} + M\ddot{\mathbf{q}}^*}$$

Ley de control

$\ddot{\mathbf{q}}^*$: referencia

Control en el Espacio Articular

Control por Dinámica Inversa

- Modelo dinámico del Robot:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u}$$

- Control por Dinámica Inversa:
  - Compensa la dinámica del robot → "linealiza" el sistema

$$\mathbf{u} = M(\mathbf{q})\mathbf{y} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \longleftarrow \text{Ley de Control}$$

  - Desacopla los elementos

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} \longleftarrow y_i \text{ solo influye en } q_i$$

  - Calcula la dinámica inversa del robot
  - Problema:
    - Especificar $\mathbf{y}$ para obtener el movimiento deseado
    - Estabilizar la ley de control $\mathbf{y}$

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})\mathbf{y} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \Longrightarrow M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})\mathbf{y}$$

Control en el Espacio Articular

Control por Dinámica Inversa

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

- Alternativa para $\mathbf{y}$:
  - PD + feedforward (a veces llamado "torque calculado")

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q})$$

  - Reemplazando:

$$\ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}} + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) = 0$$

error

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$$

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_d\dot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} = 0$$

Dinámica del error de posición al seguir una trayectoria:
Sistema de segundo orden

$$K_p = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix} \qquad K_d = \begin{bmatrix} 2\omega_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2\omega_n \end{bmatrix}$$

Críticamente amortiguado

ω_i: frecuencia natural (determina velocidad de respuesta)

Control en el Espacio Articular

Control por Dinámica Inversa

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y}$$

- Alternativa para **y**:
  - PID + feedforward

$$\mathbf{y} = \ddot{\mathbf{q}}_d + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) + \mathrm{K}_I \int (\mathbf{q}_d - \mathbf{q})dt$$

  - Más robusto a incertidumbres
  - Más complejo de implementar en tiempo real

- Resumen: leyes de control
  - Linealización + PD + feedforward

$$\boxed{\mathbf{u} = M(\mathbf{q})\left(\ddot{\mathbf{q}}_d + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q})\right) + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})}$$

  - Linealización + PID + feedforward

$$\boxed{\mathbf{u} = M(\mathbf{q})\left(\ddot{\mathbf{q}}_d + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) + \mathrm{K}_I \int (\mathbf{q}_d - \mathbf{q})dt\right) + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})}$$

Control en el Espacio Articular

Otros Métodos de Control

- Control Robusto
  - Cuando el modelo real difiere del teórico
  - Se conoce las máximas variaciones
  - Basado en incertidumbre y diseño usando el “segundo” método de Lyapunov

- Control Adaptativo
  - Adapta la ley de control según la incertidumbre
  - Usa parametrización lineal del robot
  - Control no lineal dinámico

Referencias

- B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, y G. Oriolo. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media, 2010 *(Capítulo 8)*

- M.W. Spong, S. Hutchinson, y M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2006 (*Capítulo 8*)

- de Wit, Carlos Canudas, Bruno Siciliano, and Georges Bastin, eds. *Theory of robot control*. Springer Science & Business Media, 1996 (Capítulo 2)