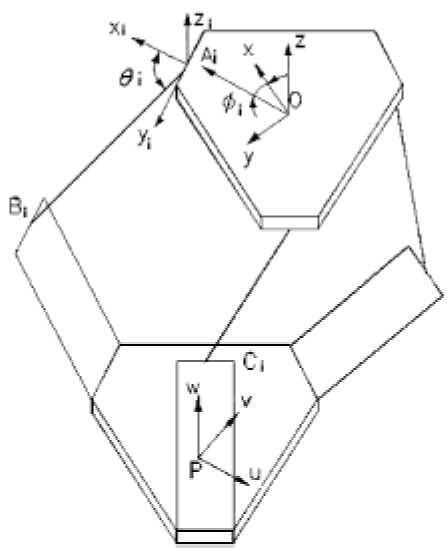
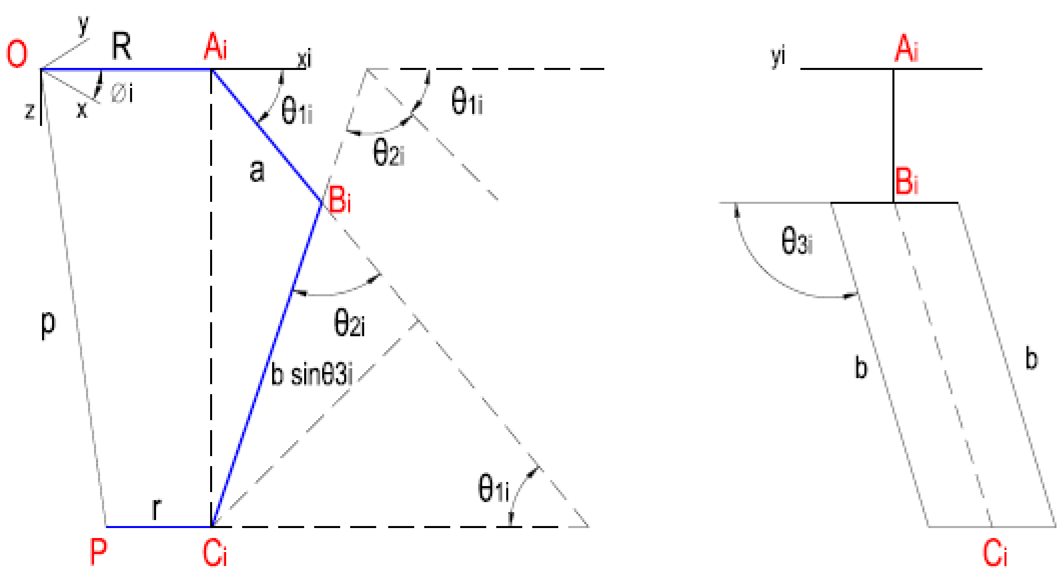
ANÁLISIS DEL JACOBIANO

En general el Jacobiano aplicado a un robot manipulador relaciona las velocidades articulares con las velocidades cartesianas del extremo. Las matrices jacobianas inversa y directa ayudan a identificar singularidades en el sistema.

Para la obtención de las matrices jacobianas se va a partir del siguiente esquema que corresponde a uno de los brazos del robot DELTA.





Cada brazo puede ser representado por el lazo cerrado formado por cada vector que lo conforma:

$$A_iB_i + B_iC_i = OP + PC_i - OA_i \qquad (1)$$

La ecuación anterior puede reescribirse en términos del eje de coordenadas $x_i\, y_i\, z_i.$

$$\begin{bmatrix} a\ \cos\theta_{1i} + bsin\theta_{3i}\cos(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \\ b\cos\theta_{3i} \\ a\ \sin\theta_{1i} + bsin\theta_{3i}\sin(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xi} \\ c_{yi} \\ c_{zi} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Donde

$$\begin{bmatrix} c_{xi} \\ c_{yi} \\ c_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi_i & \sin\Phi_i & 0 \\ -\sin\Phi_i & \cos\Phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R-r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Las coordenadas de la Ec.3 es la posición relativa del punto Ci al sistema de referencia con origen en Ai. Del sistema anterior se puede encontrar los ángulos:

$$\theta_{3i} = cos^{-1}\frac{c_{yi}}{b} \qquad (4)$$

$$\theta_{2i} = cos^{-1}\frac{{c_{xi}}^2 + {c_{yi}}^2 + {c_{zi}}^2 - a^2 - b^2}{2ab\ sin\ \theta_{3i}} \qquad (5)$$

Obtenidos los ángulos secundarios del brazo del robot, se procede a encontrar la matriz jacobiana del mismo. Para ello se parte del vector $\vec{\theta}$, que corresponde al ángulo entregado por cada actuador i=1,2…3; y $\vec{p}$ la posición del centro de la plataforma móvil.

$$\vec{\theta} = \theta_{1i} = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \\ \theta_{13} \end{bmatrix}, \qquad \vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Derivando las expresiones anteriores con respecto al tiempo se obtienen las velocidades angulares de los actuadores y la velocidad lineal de la plataforma móvil.

$$\dot{\theta_{1\imath}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta_{11}} \\ \dot{\theta_{12}} \\ \dot{\theta_{13}} \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{\dot{p}} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Colocando la Ec. 2 y 3 en una sola y ordenándola se tiene.

$$\begin{bmatrix} p_x\cos\Phi_i - p_y\sin\Phi_i \\ p_x\sin\Phi_i + p_y\cos\Phi_i \\ p_z \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} R-r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} \cos\theta_{1i} \\ 0 \\ \sin\theta_{1i} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} sin\theta_{3i}\cos(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \\ \cos\theta_{3i} \\ bsin\theta_{3i}\sin(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

La Ec (1) puede escribirse como:

$$(\vec{p} + \vec{r}) = \vec{R} + \overrightarrow{a_\imath} + \overrightarrow{b_\imath} \qquad (9)$$

Derivando esta expresión se tiene:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} = \dot{\overrightarrow{a_\iota}} + \dot{\overrightarrow{b_\iota}} \qquad (10)$$

Ahora reemplazando la velocidad a su identidad 3básica se tiene:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\omega_{a_\iota}} \times \overrightarrow{a_\iota} + \overrightarrow{\omega_{b_\iota}} \times \overrightarrow{b_\iota} \qquad (10)$$

Multiplicando la expresión anterior por el vector unitario de b_i y simplificando.

$$\widehat{b_\iota}.\vec{v} = \widehat{b_\iota}.\overrightarrow{\omega_{a_\iota}} \times \overrightarrow{a_\iota} \qquad (11)$$

El lado izquierdo de esta expresión puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}\widehat{b_\iota}.\vec{v} = {} & [sin\theta_{3i}\cos(\theta_{1i}+\theta_{2i})][v_x\cos\Phi_i - v_y\sin\Phi_i] + \cos\theta_{3i}[v_y\cos\Phi_i + v_x\sin\Phi_i] \\ & + sin\theta_{3i}\sin(\theta_{1i}+\theta_{2i})\, v_z = J_{ix}v_x + J_{iy}v_y + J_{iz}v_z \qquad (12)\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} J_{ix} &= sin\theta_{3i}\cos(\theta_{1i}+\theta_{2i})\cos\Phi_i + \cos\theta_{3i}\sin\Phi_i \\ J_{iy} &= -sin\theta_{3i}\cos(\theta_{1i}+\theta_{2i})\sin\Phi_i + \cos\theta_{3i}\cos\Phi_i \\ J_{iz} &= sin\theta_{3i}\sin(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \qquad (13)\end{aligned}$$

El lado derecho de la Ec. 11 se puede notar que la velocidad angular de la junta a es solamente tiene componente en el plano x_iz_i.

$$\overrightarrow{\omega_{a_\iota}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Entonces el lado derecho de la Ec 11 quedaría como:

$$\widehat{b_\iota}.\overrightarrow{\omega_{a_\iota}} \times \overrightarrow{a_\iota} = -a\, sin\theta_{2i} sin\theta_{3i}\, \dot{\theta}_{1i} \qquad (15)$$

Las ecuaciones (12) y (15) evaluadas para i=1, 2, 3 llevan a:

$$\begin{aligned} J_{1x}v_x + J_{1y}v_y + J_{1z}v_z &= -a\, sin\theta_{21} sin\theta_{31}\, \dot{\theta}_{11} \\ J_{2x}v_x + J_{2y}v_y + J_{2z}v_z &= -a\, sin\theta_{22} sin\theta_{32}\, \dot{\theta}_{12} \\ J_{3x}v_x + J_{3y}v_y + J_{3z}v_z &= -a\, sin\theta_{23} sin\theta_{33}\, \dot{\theta}_{13} \end{aligned}$$

Lo que realmente implica:

$$J_p\vec{v} = J_\theta\dot{\vec{\theta}} \qquad (16)$$

Donde:

$$J_p = \begin{bmatrix} J_{1x} & J_{1y} & J_{1z} \\ J_{2x} & J_{2y} & J_{2z} \\ J_{3x} & J_{3y} & J_{3z} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Y

$$J_\theta = ax \begin{bmatrix} sin\theta_{21} sin\theta_{31} & 0 & 0 \\ 0 & sin\theta_{22} sin\theta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & sin\theta_{23} sin\theta_{33} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

SINGULARIDADES

Las singularidades del manipulador indican que en ciertos puntos el mismo ha perdido uno o más grados de libertad, para encontrar estos puntos se puede partir del Jacobiano del mismo.

$$J = \ {J_p}^{-1}\ J_\theta \qquad (19)$$

De la ecuación (19) se puede notar que las singularidades ocurren:

1. Cuando el $\det(J_\theta) = 0$. Esto ocurre cuando $\theta_{2i} = 0\ ,\pi$, o $\theta_{3i} = 0\ ,\pi$ para i= 1, 2, 3.
2. Cuando el $\det(J_x) = 0$. Esto ocurre cuando $\theta_{1i} + \theta_{2i} = 0\ ,\pi$, o $\theta_{3i} = 0\ ,\pi$ para i= 1, 2, 3.

En resumen las singularidades del manipulador paralelo ocurren:

1. Cuando los tres brazos del manipulador son paralelos, lo que representa los límites del espacio de trabajo del robot es decir cuando está totalmente contraído o totalmente retraído.
2. Cuando dos pares de brazos son paralelos. La plataforma móvil pierde un grado de libertad.