

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES.  
DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA, INGENIERÍA ELECTRÓNICA E INFORMÁTICA INDUSTRIAL



# **CONTRIBUCIÓN AL ANÁLISIS CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE MANIPULADORES PARALELOS**

**Tesis Doctoral**

Autor

**Pedro Fabián Cárdenas Herrera**  
Ingeniero Electrónico

Director

**Roque Saltarén Pazmiño**  
Doctor Ingeniero Industrial

**2016**

# Tribunal

Tribunal nombrado por el Magfico. y Excmo. Sr. Rector de la  
Universidad Politécnica de Madrid, en enero de 2016

Presidente:

---

Secretario:

---

Vocal:

---

Vocal:

---

Suplente:

---

Suplente:

---

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el mes de Febrero de  
2016 en la ETSII

---

---

Vocal

Vocal

Vocal

---

Presidente

## *Declaración del autor*

Me, Pedro Fabián Cárdenas Herrera, declare that this thesis titled, CONTRIBUTION TO KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF PARALLEL MANIPULATORS and the work presented in it are my own.  
I confirm that:

- This work was done wholly or mainly while in candidature for a research degree at this University.
- Where any part of this thesis has previously been submitted for a degree or any other qualification at this University or any other institution, this has been clearly stated.
- Where I have consulted the published work of others, this is always clearly attributed.
- Where I have quoted from the work of others, the source is always given. With the exception of such quotations, this thesis is entirely my own work.
- I have acknowledged all main sources of help.
- Where the thesis is based on work done by myself jointly with others, I have made clear exactly what was done by others and what I have contributed myself.

Firma:

---

Fecha:

---

## DEDICATORIA

Recita siempre el libro de la ley  
y medita en el día y en la noche;  
cumple con cuidado todo lo que en él  
está escrito.  
Así prosperarás y tendrás éxito.  
Josue 1:8

Al Altísimo y todo poderoso,  
a Adriana mi gran amor y compañera,  
a Mis Padres e hijos,  
y a toda mi familia,  
Este esfuerzo es también para ellos.

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi director de tesis y amigo Roque Saltarén  
por su paciencia, comprensión, consejos y la frase,  
que nunca olvidaré: *"El mundo según Pedro"*.

A todos los amigos con los que curse el doctorado,  
en especial a Lisandro y Eugenio por su amistad,  
su ayuda incondicional en esos grandes momentos  
y su paciencia en esas largas charlas sobre Screws.  
A Cesar por todos aquellos momentos que compartimos  
en Madrid.

A Colciencias y la convocatoria Nacional para estudios  
de postgrado en el exterior 2008.

A la Fundación Carolina, al Banco Santander-España,  
y en especial a la Universidad Nacional de Colombia  
por facilitarme una comisión de estudios.

A todos gracias por suplirme de los medios para  
desarrollar mi doctorado.

A Cecilia y Fredy por su ayuda y apoyo incondicional  
para la conclusión de esta tesis.

## *Resumen*

# **CONTRIBUCIÓN AL ANÁLISIS CINEMÁTICO Y DINÁMICO DE MANIPULADORES PARALELOS**

**Pedro Fabián Cárdenas Herrera**

**Palabras clave:** Manipulador paralelo; Movilidad; Modelo geométrico directo; Modelo geométrico inverso; Stewart Gough.

El documento presentado contiene una aproximación a algunos de los diversos problemas actuales existentes en el campo de la robótica paralela. Primeramente se hace una propuesta para el cálculo de los parámetros estructurales de los robots paralelos, mediante el desarrollo de una metodología que combina las herramientas del estudio de mecanismos con el álgebra lineal; en una segunda sección se propone la solución del problema geométrico directo a partir de la definición de ecuaciones de restricción y su respectiva solución usando métodos numéricos, así como la solución para el problema geométrico inverso; en la tercera parte se aborda el problema dinámico tanto directo como inverso y su solución a partir de una metodología basada en el método de Kane o de trabajos virtuales. Para las propuestas metodológicas expuestas se han desarrollado ejemplos de aplicación tanto teóricos como prácticos (simulaciones y pruebas físicas), donde se demuestra su alcance y desempeño, mediante su utilización en múltiples configuraciones para manipuladores paralelos, entre los que se destacan la plataforma Stewart Gough, y el 3-RRR. Todo con el objetivo de extender su aplicación en futuros trabajos de investigación en el área.

## *Abstract*

# **CONTRIBUTION TO KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF PARALLEL MANIPULATORS**

**Pedro Fabián Cárdenas Herrera**

**Keywords:** backward geometry model; forward geometry model; mobility; parallel manipulator; Stewart Gough platform.

The document presented below provides an approach to some of the many current problems existing in the field of parallel robotics. First is made a proposal for calculating the structural parameters of the parallel robots, through developing a methodology that combines tools to study mechanisms with the linear algebra; a second section contains a direct geometrical problem solution from the definition of constraint equations and their respective solution using numerical methods, as well as the solution to the inverse geometric problem; in the third part, both, direct and inverse dynamic problem and its solution based on methodology Kane or the method of virtual work are proposed. For each of the exposed methodological proposals they were developed examples of both theoretical and practical application (simulations and physical tests), where its scope and performance is demonstrated by its use in multiple configurations for parallel manipulators, among which stand out the platform Stewart Gough, and 3-RRR. All with the goal of extending its application in future research in the area.

# ÍNDICE

<b>ÍNDICE</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>xvi</b>
<b>1 MOTIVACIÓN.</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación . . . . .	1
<b>2 REVISIÓN</b>	<b>5</b>
2.1 Par cinemático . . . . .	5
2.2 Cadena Cinemática y Mecanismo . . . . .	6
2.2.1 Eslabones . . . . .	7
2.2.2 Clasificación de las Cadenas cinemáticas . . . . .	7
2.2.3 Manipulador . . . . .	8
2.3 Definición de Robot Paralelo PM . . . . .	9
2.4 Clasificación de los PM de acuerdo al espacio de Movimiento . . . . .	10
2.4.1 Planares . . . . .	10
2.4.2 Esféricos . . . . .	10
2.4.3 Espaciales . . . . .	10
2.5 Clasificación de los PMs de acuerdo a la matriz Jacobiana . . . . .	11
2.6 Clasificación de los PM de acuerdo a las cadenas cinemáticas que lo conforman . . . . .	11
2.6.1 De lazo simple . . . . .	11
2.6.2 Cadenas cinemáticas abiertas simples . . . . .	12
2.6.3 Cadenas cinemáticas complejas . . . . .	12
2.7 Espacio de Trabajo -WS- . . . . .	12
2.8 Singularidades . . . . .	13

2.9	Background Cinemática Geométrica: Problema cinemático directo . . . . .	14
2.10	Background Cinemática Diferencial . . . . .	17
2.11	Background Dinámica de PMs . . . . .	19
<b>3</b>	<b>TEORÍA DE SCREWS</b>	<b>21</b>
3.1	Nociones elementales . . . . .	21
3.2	Definición Screw . . . . .	23
3.3	Coordenadas de un Screw . . . . .	25
3.4	Interpretación física . . . . .	26
3.4.1	Representación de rectas . . . . .	29
3.4.2	Paso del Screw . . . . .	29
3.4.3	Coordenadas generalizadas del Screw . . . . .	30
3.4.4	Coordenadas del Screw de paso infinito . . . . .	31
3.4.5	Coordenadas screw en estática . . . . .	32
3.5	Producto escalar en screws . . . . .	33
3.5.1	Screws Recíprocos . . . . .	35
3.5.2	Sistemas screw Recíprocos . . . . .	36
3.5.3	Relación entre sistemas screw y el twist-wrench . . . . .	37
<b>4</b>	<b>PARÁMETROS ESTRUCTURALES</b>	<b>40</b>
4.1	Definiciones generales . . . . .	40
4.2	Movilidad . . . . .	40
4.2.1	Fórmula de movilidad CGK (Chebychev, Grubler y Kutzbach) . . . . .	42
4.2.2	Análisis de las ecuaciones de restricción . . . . .	44
4.2.3	Formula CGK extendida . . . . .	46
4.2.4	Alcance de la CGK . . . . .	47
4.3	Método de Calculo para la Movilidad general . . . . .	48
4.4	conectividad S . . . . .	51
4.5	Número de sobrerestricciones . . . . .	51
4.6	Redundancia Estructural . . . . .	52
4.7	Movilidad y Conectividad en Robots Paralelos . . . . .	52
4.7.1	Robots Paralelos de Lazos Simples . . . . .	53
4.7.2	Robots Paralelos de Cadenas Simples . . . . .	53
4.7.3	Robots Paralelos de Cadenas Complejas . . . . .	53
4.7.4	Mecanismo serial abierto simple . . . . .	54
4.7.5	Mecanismos de lazo cerrado . . . . .	57

4.8	Metodología para el análisis de parámetros estructurales de cadenas cinemáticas. . . . .	60
4.8.1	Cadenas abiertas simples . . . . .	61
4.8.1.1	Aplicación a una cadena cinemática serial . . . . .	62
4.8.2	Cadenas cerradas cinemáticas de lazo simple. . . . .	66
4.8.2.1	Aplicación a una Cadena cinemática de lazo cerrado. . . . .	67
<b>5</b>	<b>ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE MANIPULADORES PARALELOS</b>	<b>73</b>
5.1	Manipuladores Paralelos PMs . . . . .	73
5.2	Modelo Geométrico de manipuladores paralelos PMs . . . . .	75
5.3	Modelo geométrico inverso (MGI) para PMs . . . . .	77
5.3.1	Modelo diferencial basado en Screws . . . . .	81
5.4	Aplicación del MGI para PMs . . . . .	83
5.4.1	MGI para un PM 3-RRR Planar . . . . .	84
5.4.2	MGI para un mecanismo paralelo cinco barras . . . . .	85
5.4.3	MGI para el PM 2UPS-1RU . . . . .	87
5.4.4	MGI para un PM tipo 3-UPU . . . . .	89
5.4.5	MGI para un PM 3-RRR Esférico . . . . .	90
5.4.6	MGI para el PM tipo Delta . . . . .	93
5.4.7	MGI para un PM tipo 6-UPS . . . . .	96
5.4.8	MGI para un PM 3-PUU-1S . . . . .	98
5.5	Modelo geométrico directo (MGD) para PMs . . . . .	100
5.5.1	Aproximación a la cinemática directa mediante métodos numéricos . . . . .	103
5.5.2	Función de restricción geométrica para el MGD . . . . .	107
5.5.3	Jacobiano del vector de restricciones . . . . .	110
5.6	Aplicación del MGD para varios PMs . . . . .	113
5.6.1	MGD para un PM tipo 3-RRR planar . . . . .	113
5.6.2	MGD para un PM tipo 3-RRR esférico . . . . .	114
5.6.3	MGD para PM Delta . . . . .	115
5.6.4	MGD para un PM tipo 6-UPS . . . . .	115
5.6.5	MGD para un PM tipo 2-UPU-1RU . . . . .	116
5.6.6	MGD para un PM tipo 3-UPU . . . . .	117
5.6.7	MGD para un PM 3-PUU+1S . . . . .	117
5.6.8	Evaluación de desempeño del MGD . . . . .	118

5.6.8.1	Metodología para la evaluación de la solución . . . . .	118
5.6.8.2	Parámetros de evaluación . . . . .	119
5.6.9	Resultados: evaluación del método MGD . . . . .	122
5.7	Espacio de trabajo . . . . .	124
5.7.1	Restricciones de los actuadores y colisiones . . . . .	126
5.7.2	Representación de la orientación . . . . .	127
5.7.3	Representación de la posición . . . . .	130
5.7.4	Método para el generación del espacio de trabajo . . . . .	130
5.7.5	Modelo Geométrico 3-RRR . . . . .	133
5.7.5.1	Modelado pata RRR . . . . .	134
5.7.6	Jacobiano basado en screws para el SPM 3-RRR . . . . .	138
5.7.7	Espacio de trabajo 3-RRR . . . . .	140
<b>6</b>	<b>DINÁMICA DE ROBOTS PARALELOS</b>	<b>146</b>
6.1	Método de Kane para obtener el modelo dinámico de un robot paralelo	146
6.2	Método de Kane: principio de Trabajo Virtual . . . . .	147
6.3	Aproximación al modelo dinámico utilizando el Método trabajo virtual	149
6.4	Ecuaciones dinámicas de la plataforma SG. . . . .	153
6.4.1	Análisis de Posición . . . . .	155
6.4.2	Análisis de Velocidad . . . . .	157
6.4.3	Derivación de los Jacobianos . . . . .	159
6.4.4	Ecuaciones de Dinámica Inversa . . . . .	161
6.4.5	Ecuaciones de Dinámica Directa . . . . .	161
6.4.6	Metodología de Solución . . . . .	162
6.5	Planificadores de Movimiento . . . . .	163
6.5.1	Interpolador sinusoidal . . . . .	163
6.6	Interpolador 321 con trayectoria elíptica . . . . .	169
6.7	Simulaciones . . . . .	176
6.7.1	Modelo Dinámico inverso cerrado . . . . .	176
6.7.2	Modelo de la plataforma Stewart-Gough en un software MBD (Multi Body Dynamic) . . . . .	178
6.7.3	Simulación del Modelo Dinámico Inverso en MATLAB . . . . .	179
6.7.4	Comparación de los resultados de simulación de Dinámica In- versa en MATLAB y en MSC.ADAMS . . . . .	181
6.7.5	Simulación de Dinámica Directa . . . . .	183
6.8	Resultados experimentales . . . . .	186

6.8.1	Arquitectura de Hardware . . . . .	187
6.8.2	Metodología . . . . .	189
6.8.3	Prueba 1: Desplazamiento puro, cambios de orientación individual . . . . .	191
6.8.4	Prueba 2: circulo en el plano XY . . . . .	197
<b>7</b>	<b>PRODUCCIÓN ACADÉMICA</b>	<b>202</b>
7.1	Conclusiones . . . . .	202
7.2	Publicaciones . . . . .	204
7.3	TRABAJOS FUTUROS . . . . .	208
<b>A</b>	<b>Terminología</b>	<b>210</b>
	<b>Referencias</b>	<b>217</b>

# **Lista de Figuras**

3.1	Representación gráfica del teorema de Chasles. . . . .	22
3.2	Representación gráfica del teorema de Poinsot. . . . .	22
3.3	Representación de un screw en un espacio Euclídeo. . . . .	25
3.4	Representación simbólica de diferentes Screws. . . . .	25
3.5	Representación gráfica de un screw por componentes . . . . .	26
3.6	Screw de paso infinito, equivalente a un Twist de paso infinito, que representa una articulación prismática en cinemática . . . . .	32
3.7	Dualidad entre twsist y wrench. El movimiento del cuerpo B está restringido por un twist y un wrench que actua sobre el cuerpo. . . . .	35
3.8	Reciprocidad entre screws. . . . .	36
3.9	Sistemas screw y sus reciprocos . . . . .	38
3.10	Sistema twist y wrench de una cadena cinemática, serial o paralela. .	39
4.1	Cadena cinemática serial abierta simple . . . . .	54
4.2	Cadenas cinemática abierta ejemplo 1. a) Diagrama estructural y b) grafo estructural . . . . .	63
4.3	Cadena cinemática abierta ejemplo 1. Paso del 1 al 6 . . . . .	64
4.4	Cadena cinemática cerrada, mecanismo de 4 barras. . . . .	68
5.1	Representación de un mecanismo paralelo MP. . . . .	74
5.2	Modelo geométrico inverso como ecuación vectorial de lazo . . . . .	80
5.3	Robot paralelo planar de 3 gdl. . . . .	84
5.4	Definicion del Mecanismo paralelo de cinco barras para el MGI . . . . .	86
5.5	Definición del Mecanismo MP 2UPS-1RU para el MGI . . . . .	88
5.6	Definición de Mecanismo MP 3UPU para el MGI . . . . .	90
5.7	Manipulador paralelo esferico 3RRR . . . . .	92
5.8	Ejemplo MGI para MP Delta . . . . .	94
5.9	Definición de Mecanismo 6UPS para MGI. . . . .	97

5.10	Definición de mecanismo MP 3PUU-1S para MGI.	99
5.11	MGD interpretación geométrica de la solución.	102
5.12	Interpretacion gráfica del método numérico para el PGD.	106
5.13	Digrama de flujo del algoritmo propuesto para ls solución numerica del PGD.	108
5.14	Modelo de MP simplificado a una pata para el análisis del MGD.	109
5.15	Ejemplo de patas de MP para las cuales se puede definir una función gométrica de restriccción de distancia.	111
5.16	Procedimiento de Evaluación del método numérico para la solución del problema geométrico directo.	120
5.17	Desempeño de la solución numérica del MGD	124
5.18	Representación paramétrica del cuaternion en $R^3$	129
5.19	Esquema del algoritmo numérico para la generación del espacio de trabajo de un PM.	131
5.20	Detalle de espacio en $R^3$ inicial para generar el WS de un PM.	132
5.21	Representación del WS objetivo considerando una restriccción de los ángulos euler $ roll  < 45$ , $ pitch  < 45$ y $ yaw  < 70$	133
5.22	Esquema de pata RRR	135
5.23	Localización ejes de rotación de las articulación virtuales y vectores $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{w}_i$	136
5.24	Representación del WS objetivo.	141
5.25	Representación del WS del MP 3-RRR.	142
5.26	En rojo se observan algunas regiones singulares.	142
5.27	Gráfica del índice de condición, a diferentes niveles del espacio de trabajo del MP 3-RRR	143
5.28	Indice de condición, en planos(-0,2 0 0,8) del WS del MP 3-RRR	144
5.29	Espacio de trabajo comun entre el $WS_{robot}$ y el $WS_{objetivo}$	144
5.30	El $WS_{robot}$ y el $WS_{objetivo}$ superpuestos.	145
6.1	Definiciones de los vectores usados en el análisis de una pata del robot Stewart Gough.	153
6.2	Diagrama para la obtención de un modelo dinámico de un MP	164
6.3	Interpolador Seno, posición velocidad y aceleración	165
6.4	Interpolación en el $R^3$ , posición.	167
6.5	Resultado de la interpolación en coordenadas x y z , de posición velocidad y aceleración, con respecto al tiempo	168

6.6	Resultados de la interpolacion de cuaternios representado mediante sistemas de coordenadas . . . . .	168
6.7	Cambio de orientación plataforma móvil. . . . .	169
6.8	Movimiento elipsoidal. . . . .	170
6.9	Trayectoria elipsoidal . . . . .	171
6.10	Planificador 321 punto a punto. . . . .	174
6.11	Trayectoria en el espacio operacional ( $x, y, z$ ). . . . .	175
6.12	Esquema de comprobación del MGI . . . . .	177
6.13	Modelo en CAD simulado en MSC.ADAMS . . . . .	178
6.14	Movimiento de los actuadores valores para se utilizados en las simulación. . . . .	180
6.15	Pose inicial y final de la plataforma para la trayectoria de prueba del modelo dinámico. . . . .	181
6.16	Resultado de los modelos cerrado del modelo dinámico inverso. Fuerzas en los actuadores. . . . .	182
6.17	Esquema de la implementación del modelo dinámico directo en simulación. . . . .	184
6.18	Resultados de la simulación dinamica directa . . . . .	186
6.19	Esquema del sistema de control de la plataforma SG. . . . .	187
6.20	Fotografias de componentes mecanicos del manipulador paralelo SG. .	188
6.21	Esquema de la configuración para los ejercicios experimentales . . .	190
6.22	Resultados de la prueba 1: cambio de orientación. . . . .	192
6.23	Evolución en el tiempo de la coordenadas cartesianas de posición de referencia y calculada. . . . .	193
6.24	Evolución en el tiempo de la orientación de la plataforma expresada en ángulos de euler fijos. . . . .	194
6.25	Posicion de los actuadores . . . . .	194
6.26	Velocidad estimada y medida de los actuadores. . . . .	195
6.27	Error de posición de los actuadores, información Galil . . . . .	196
6.28	Gráfico de dispersión del error por actuador. . . . .	196
6.29	Resultados de la prueba 2: trayectoria y plataforma en la posición de home. . . . .	198
6.30	Evolución en el tiempo de las coordenadas cartesianas de posición referencia y calculadas, prueba 2. . . . .	199

6.31 Evolución en el tiempo de la orientación de la plataforma expresada en ángulos de euler fijos, para la prueba 2. . . . .	199
6.32 Posicion de los actuadores . . . . .	200
6.33 Velocidad estimada y medida de los actuadores. . . . .	200
6.34 error de Posición de los actuadores, realimentado de la tarjeta de control. . . . .	201
6.35 Gráfico de dispersión del error por actuador. . . . .	201

# Listas de Tablas

2.1	Pares inferiores, con los grados de libertad y los tipos de superficie . . . . .	6
3.1	Paralelo entre cinemática instantánea y estática ( twists y wrenches) . . . . .	28
3.2	Coordenadas screw-twist . . . . .	31
4.1	Ecuaciones de Movilidad . . . . .	43
4.2	Mecanismos Paradojicos . . . . .	46
4.3	Ejemplo 1. Parámetros de los ejes screw . . . . .	64
4.4	Parámetros de análisis para cadenas A y B, equivalentes de la cadena de lazo cerrado. . . . .	69
5.1	Paramétros evaluados sobre los PMs . . . . .	123
5.2	Resultados del método numérico para solución del MGD para dife- rentes PMs. . . . .	125
5.3	Localización de ejes de rotación para la cadena serial RRR. . . . .	137
5.4	Paramétros para obtener el WS de un 3-RRR . . . . .	140
6.1	Información geométrica y física de la plataforma SG . . . . .	179
6.2	Descripción de las posiciones de inicio y final para el movimiento de la plataforma . . . . .	180
6.3	Parámetros de simulación para el MGD . . . . .	185
6.4	Lista de componentes electromecánicos . . . . .	189

# Capítulo 1

## MOTIVACIÓN.

### 1.1 Motivación

Tanto el estudio como el desarrollo de los manipuladores paralelos (Paralell Manipulators -PMs-) han estado bajo una creciente evolución en los últimos años desde el punto de vista teórico, aunado a esto, los avances tecnológicos recientes en la electrónica, el control y las telecomunicaciones han propiciado varias aplicaciones prácticas para este tipo de robots, permitiendo adelantos significativos en cuanto a configuraciones, velocidades, fuerzas aplicadas y análisis dinámico de los cuerpos rígidos [83].

En general la robótica paralela se encarga de estudiar manipuladores de lazo cerrado en los cuales el efecto final está enlazado a una base por al menos dos cadenas cinemáticas independientes de cualquier tipo, que permiten distribuir la carga, donde cada una de ellas admite por lo menos un actuador simple con su respectivo sensor para la medición de las variables asociadas a la actuación como son el ángulo de rotación o el desplazamiento lineal [134].

Dentro de las ventajas que han hecho los manipuladores paralelos objeto de estudio, esta la excelente relación peso/carga [91], que es útil en mecanismos para celdas de manufactura porque la posición del efecto final de un manipulador paralelo es mucho menos sensible al error en los sensores articulares en comparación con los robots de enlace serial. Además los manipuladores paralelos cuentan con una elevada rigidez que asegura que las deformaciones de los eslabones sean mínimas, contribuyendo en gran medida a la alta precisión de su posicionamiento.

## *Motivación*

Otra característica importante de los manipuladores paralelos es la posibilidad de ser usados como dispositivos fuerza-sensor [90]. De hecho se puede demostrar que la medición de la tensión de tracción-compresión en los enlaces permite calcular las fuerzas y pares de torsión que actúan sobre la plataforma móvil.

Muchos y variados diseños de manipuladores paralelos son posibles y la literatura científica sobre este tema es muy extensa. Todos tienen en común la búsqueda de robots de bajo costo debido a que de los componentes son estándar, aunque el ensamblaje del manipulador tiene que realizarse con cuidado. Por su parte, el diseño es un aspecto importante ya que algunas características pueden ser actualizadas continuamente mediante una elección adecuada.

Como la arquitectura de manipuladores paralelos es muy diferente de la utilizada para manipuladores de enlace serial, la mayoría de los problemas teóricos han sido reconsiderados en diversas tendencias de investigación en cuanto a su diseño mecánico, su cinemática, su dinámica, el control de fuerza y desempeño, las configuraciones singulares, el área de trabajo y su calibración. En efecto, hay una dualidad entre los mecanismos de enlace paralelo y los mecanismos de enlace serial: un problema complejo para un tipo de mecanismo es resuelto fácilmente para el otro tipo de mecanismo. Esta dualidad aún no se ha explicado satisfactoriamente, aunque en la literatura algunos intentos se han realizado [127].

Desde la perspectiva del diseño mecánico, un problema de estudio interesante ha sido encontrar un método para el diseño estructural de un manipulador paralelo teniendo en cuenta su número y tipo de grados de libertad. Un enfoque de este problema sobre la base de la teoría de grupos ha sido presentada por Hervé [53]. El autor ha sido capaz de diseñar un nuevo manipulador paralelo con tres grados de libertad translacional [54]; sin embargo la gran mayoría de trabajos no se han enfocado en el diseño de robots que combinen grados de libertad translacional y rotacional [65], [133], [106].

Dos problemas se pueden distinguir de los aspectos cinemáticos: la cinemática inversa y la cinemática directa. El problema de la cinemática inversa, es decir, la búsqueda de las longitudes de enlace (posición de los actuadores) para una postura

## *Motivación*

dada de la plataforma móvil (problema complejo para los mecanismos de enlace serie) es sencillo para manipuladores paralelos [120]. Por lo tanto su control es generalmente muy simple. Pero, por otro lado el problema de cinemática directa es mucho más sencillo de resolver.

En general, el problema de cinemática directa tiene más de una solución. Por ejemplo, si se considera un manipulador paralelo genérico se podrían tener hasta 16 posturas diferentes del problema para un conjunto dado de longitudes de enlace [114]. Lazard [126] demostró que no tiene más de 40; incluso se han desarrollado algunos algoritmos para resolver casos especiales [122] [86].

A pesar de los múltiples esfuerzos, en la actualidad no se han descubierto soluciones absolutas, salvo en algunos casos muy especiales de manipuladores [104], [45],[86]. En la práctica, los procedimientos numéricos iterativos han sido utilizados sin ningún problema. Otra forma práctica de resolver el problema de la cinemática directa es añadir sensores de orientación en las articulaciones que permitan obtener más información para el cálculo la postura de la plataforma móvil [68].

Como los manipuladores paralelos son rápidos, se hace también necesario diseñar y calcular su modelo dinámico con el fin de alcanzar un control satisfactorio. Un modelo dinámico completo en forma absoluta aún no se ha establecido, pero algunos supuestos pueden tenerse en cuenta para obtener dinámicas simplificadas pero eficientes para definir su comportamiento a simular. Recientemente muchos investigadores se han ocupado de este problema [69] [106].

Al igual que con los mecanismos de enlace seriales, un manipulador paralelo puede estar en una configuración singular, es decir, en una configuración en donde ninguna fuerza articular pueda equilibrar una torsión externa aplicada a la plataforma móvil. Para determinar estas configuraciones es importante establecer que cerca al punto las fuerzas articulares pueden tender a infinito causando un rompimiento del manipulador [94] [136]. Las configuraciones singulares se caracterizan por un determinante de la matriz jacobiana inversa en cero. Aunque se conoce esta matriz, para el cálculo simbólico del determinante, en la mayoría de los casos se obtiene una expresión compleja y la búsqueda de sus raíces se hace difícil. Se han propuesto procedimientos numéricos para su solución, pero un enfoque geométrico permite

## *Motivación*

establecer de manera eficiente las relaciones entre los parámetros de posición que caracterizan a una configuración singular. Uno de los problemas aún abiertos consiste en determinar si existen configuraciones singulares dentro del área de trabajo del manipulador paralelo.

Con este panorama, los esfuerzos por realizar aportes al análisis y diseño de los manipuladores paralelos ampliando las posibilidades de aplicación de los mismos, son indispensables. Este documento presenta la aproximación a varios de los retos en el manejo de manipuladores paralelos que ya se han presentado, como son el cálculo de la movilidad, la solución de los problemas de cinemática e incluso la propuesta de un modelo dinámico, todas con sus correspondientes metodologías, esperando que se convierta en un insumo para la aproximación a la resolución general de los desafíos que desde hace más de tres décadas se presentan en el estudio y diseño de PMs.

---

# **Capítulo 2**

## **REVISIÓN**

A continuación se presentan algunas definiciones básicas tanto de robótica como de teoría de mecanismos que son necesarias para entender el desarrollo de los capítulos posteriores, algunos conceptos sobre robots paralelos y por ultimo una revisión del estado actual de las investigaciones en cinemática diferencial, geométrica y dinámica para manipuladores paralelos.

En el apéndice [A](#) se incluye una tabla tomada de la terminología de la **IFToMM** -International Federation fot the promotion of mechanism and machine science- que contiene los principales términos usados en este documento.

### **2.1 Par cinemático**

Un par cinemático es el modelo mecánico de conexión que consiste en el acoplamiento de dos cuerpos rígidos donde se generan una o varias restricciones de movimiento, y en consecuencia, un movimiento relativo y cierto número de grados de libertad.

Se pueden distinguir dos tipos básicos de pares cinemáticos, de acuerdo al tipo de contacto entre los cuerpos o eslabones, conocidos como superiores e inferiores.

Existe un par cinemático superior entre dos cuerpos rígidos cuando existe un contacto a largo de una línea o en un punto, este tipo de acople se puede observar por ejemplo en los mecanismos tipo seguidores de leva, en los trenes de engranajes, o en los rodamientos de cojinete.

## Revisión

Un par cinemático inferior se genera cuando el contacto se da a lo largo de una superficie común entre los dos cuerpos. Se pueden distinguir seis tipos de articulaciones inferiores (Denavit and Hartenberg 1964, angeles 1982, [4]), que pueden ser representadas con dos tipos básicos, los pares de rotación, denotados por  $\mathbf{R}$ , conocidos comúnmente como articulaciones rotacionales, y los pares de deslizamiento representados por  $\mathbf{P}$ , también conocidos como articulaciones prismáticas.

Se pueden definir los siguientes pares inferiores: par rotacional, par translacional, par helicoide, par cilíndrico, par planar y par esférico. Es común denominar a estos pares cinemáticos inferiores como articulaciones (tabla 2.1).

TABLA 2.1: Pares inferiores, con los grados de libertad y los tipos de superficie

pares inferiores	nombre	Notación	gdl	Superficie invariante
par rotacional	articulación rotacional	$R$	1	superficie de revolución alrededor de un eje
par translacional	articulación prismática	$T$	1	superficie de translación paralela a una dirección
Par Helicoidal	articulación rotacional	$H$	1	Superficie helicoidal alrededor de un eje con paso finito
par cilíndrico	articulación cilíndrica	$C$	2	Superficie cilíndrica alrededor de un eje
par planar	articulación planar	$PL$	3	Un plano
par esférico	articulación esférica	$S$	3	Una esfera

## 2.2 Cadena Cinemática y Mecanismo

Una cadena cinemática es un conjunto de cuerpos rígidos también llamados eslabones, unidos por pares cinemáticos conocidos comúnmente como articulaciones, donde además se define un eslabón como marco de referencia.

## *Revisión*

Para el caso de un mecanismo, este corresponde al conjunto de sistemas mecánicos y la cadena cinemática corresponde a los subsistemas probables de dicho mecanismo. Debe tenerse en cuenta que un ensamblaje de articulaciones y eslabones  $\mathbf{G}$  puede ser considerado como una cadena cinemática cuando es un subsistema en otro ensamblaje, y puede ser considerada mecanismo cuando  $\mathbf{G}$  representa el sistema completo. De esta manera las definiciones para uno y otro pueden ser indistintas.

### **2.2.1 Eslabones**

Sin importar la forma, son considerados eslabones todos los elementos individuales de un mecanismo. Para el estudio cinemático y dinámico son considerados además como cuerpos rígidos, sin entrar en las consideraciones de cargas muy altas o velocidades extremas donde los cuerpos pueden tener comportamiento elástico.

De acuerdo, al numero de elementos conectados, los eslabones pueden clasificarse en:

**Unarios o simples:** Un elemento que se encuentra conectado a otro únicamente mediante una articulación.

**Binarios:** Un elemento se encuentra conectado a una cadena cinemática por dos articulaciones (un eslabón conectado a otros dos eslabones).

**Polinarios o complejo:** Un elemento se encuentra conectado en una cadena cinemática por más de dos articulaciones.

### **2.2.2 Clasificación de las Cadenas cinemáticas**

Las cadenas cinemáticas se pueden clasificar en cuatro tipos principalmente:

**Cadenas cerradas:** Mecanismos donde cada eslabón está conectado al menos con otros dos eslabones.

**Cadenas abiertas:** Poseen al menos un eslabón que lleva únicamente un par cinemático. En una cadena cinemática abierta únicamente eslabones unarios y binarios están conectados.

## *Revisión*

**Cadena Simple:** Todos los eslabones que se encuentran conectados son binarios y tanto el eslabón de referencia como el final pueden ser considerados como unarios.

**Cadena compleja:** Una cadena compleja además de poseer eslabones binarios posee eslabones con mayor número de conexiones en su estructura, por lo que un mismo eslabón puede encontrarse conectado a dos o más eslabones al tiempo.

### **2.2.3 Manipulador**

Un manipulador es un arreglo de pares cinemáticos, donde algunos o todos los pares estan actuados, se ha definido una base y un extremo que hace las veces de eslabón final. Según la estructura topológica los manipuladores pueden ser divididos principalmente en tres grupos, *manipuladores seriales* MS, *manipuladores paralelos* MP y *manipuladores híbridos*, que resulta de la unión de los dos anteriores.

Actualmente, la mayoría de manipuladores son de estructura serial, y entre sus principales ventajas están: gran espacio de trabajo (en inglés *Work Space -WS-*), el fácil análisis de la cinemática y la dinámica con respecto a los PMs; como desventaja está la baja rigidez intrínseca y la baja capacidad de carga, pues el actuador más cercano a la base debe mover la totalidad del manipulador y la carga. Además los errores se amplifican a medida que se ubican eslabones más lejos de la base.

Por otro lado un manipulador paralelo está formado por varios brazos o patas que contribuyen efector final de manera colectiva, el hecho de que existan varias ramas conectando el efector final con la base hace que la rigidez aumente. También es común que los actuadores se ubiquen en la base, lo que aumenta la capacidad de carga; así mismo el error en el posicionamiento del efector final es reducido gracias a la distribución de fuerzas internas. Por lo tanto este tipo de manipulador reúne las ventajas de alta velocidad, elevada precisión, elevada capacidad de carga y elevada rigidez.

Sin embargo los manipuladores paralelos tiene dos deficiencias inherentes a los mecanismos complejos de lazo cerrado: una tiene que ver con el limitado espacio de trabajo y la otra con la existencia de singularidades las cuales no solo están en los límites del espacio de trabajo, como el caso de los seriales, sino que pueden ser re-

## *Revisión*

giones singulares internas. La determinación del espacio de trabajo es complejo pues depende de la intersección de los espacios de trabajo de cada una de las subcadenas, que unen la base con el efecto final, comúnmente el espacio es irregular. Adicional, los manipuladores paralelos presentan tres tipos de singularidades [45] mientras que su contraparte solo presentan un tipo [64]

A pesar de las desventajas de los manipuladores paralelos, la necesidad de tener procesos industriales más rápidos, con aceleraciones elevadas y gran precisión hace de ellos un elemento importante para los investigadores en robótica. La tendencia de utilizar manipuladores paralelos para satisfacer los grandes desafíos de las demandas industriales actuales no se detiene.

La mayoría de arquitecturas de mecanismos paralelos propuestas en la literatura poseen 6 *grados de libertad* (GDL) , a pesar de que en la industria no es común necesitar los seis. Por ejemplo, para un proceso donde se desee orientar una pieza o doblar algún elemento, basta con disponer de un mecanismo de 3 GDL, para operaciones de pick-and-place solo es necesario contar con 4 GDL; en las maquinas de herramientas solo es necesario contar con 5 GDL, por tal razón en esta tesis se enfoca principalmente en el análisis de manipuladores con 3 GDL.

## **2.3 Definición de Robot Paralelo PM**

De acuerdo a Gogu [43], la arquitectura mecánica de un robot paralelo -PM- esta basada en mecanismos de tipo paralelos, en los que un eslabón llamado plataforma móvil esta conectado a un eslabón de referencia (fijo) mediante al menos dos ramas o cadenas que pueden ser simples (serie de eslabones binarios) o compuestas (serie de eslabones incluyendo polinarios). Los actuadores del robot son integrados en las ramas (también conocidas como patas) y conectados al eslabón fijo, conocido comúnmente como plataforma fija o base. La plataforma móvil es la encargada de ubicar el efecto final en el espacio y puede tener entre dos y seis grados de libertad. Usualmente el número de actuadores coincide con los grados de libertad de la plataforma móvil, aunque es superior en el caso de PM con actuación redundante o sobreactuada.

## 2.4 Clasificación de los PM de acuerdo al espacio de Movimiento

Aunque en la mayoría de la literatura asociada a los PMs se presenta esta clasificación, tomando como referencia [122], los robots paralelos pueden ser planares, espaciales o esféricos de acuerdo al espacio de movimiento para el que se diseñan.

### 2.4.1 Planares

Los robots paralelos planares tienen una conectividad de rama igual a 3 para cada eslabón, lo que significa que cada eslabón tiene una movilidad de 3 GDL. Si se usan los pares cinemáticos formados por articulaciones simples, se pueden obtener siete (7) diferentes arreglos de cadenas cinemáticas planares. Específicamente si se construye el robot paralelo con tres (3) ramas idénticas, solamente siete configuraciones de 3 GDL son viables.

### 2.4.2 Esféricos

También poseen un parámetro de movimiento de 3, pero para obtener robots esféricos solo se pueden usar articulaciones de tipo rotacional y todos los ejes deben interceptarse en un punto común, llamado centro esférico, de esta forma solo es posible obtener una configuración 3-RRR de un manipulador paralelo esférico.

Se debe resaltar que una de las juntas esféricas debe ser instalada en el centro del manipulador, además una articulación esférica solo puede ser utilizada como pasiva, ya que si se "actúa" se necesitan 3 ramas adicionales para el movimiento de la plataforma.

### 2.4.3 Espaciales

Para los robots paralelos espaciales el parámetro de movimiento tiene un valor de seis (6), en este caso, los posibles robots se pueden clasificar de acuerdo al numero de gdl y valor de conectividad. El máximo número de eslabones se encuentra cuando todas las articulaciones son de un GDL; en la práctica normalmente se emplean 2 eslabones polinarios que conectan la plataforma a la base mediante tres juntas.

## 2.5 Clasificación de los PMs de acuerdo a la matriz Jacobiana

Los robots paralelos se pueden categorizar de acuerdo a las características de su matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  en cinco tipos:

**Regulares:** Si el determinante de la matriz jacobiana es igual a uno en todo el espacio de trabajo.

**Completamente isotrópicos:** Si la matriz jacobiana es diagonal con idénticos elementos en todo el espacio de trabajo.

**Movimiento desacoplado:** Si la matriz jacobiana es diagonal y en todos los casos, los elementos de la diagonal son diferentes en todo el espacio de trabajo.

**Movimiento desasociado:** Si la matriz jacobiana es una matriz tipo triangular.

**Movimiento acoplado:** Si la matriz jacobiana no es ni triangular ni diagonal.

## 2.6 Clasificación de los PM de acuerdo a las cadenas cinemáticas que lo conforman

Para facilitar el análisis de los parámetros estructurales que se hará en capítulos posteriores, los robots paralelos pueden ser clasificados de acuerdo al tipo de eslabones, tipo y número de cadenas cinemáticas que lo conforman, en 3 subtipos, a continuación se hará una breve descripción desde el punto de vista de la teoría de mecanismos de los mismos y posteriormente se ahondará en su formulación matemática-cinemática:

- Lazo simple
- Cadenas cinemáticas abiertas simples
- Cadenas cinemáticas complejas

### 2.6.1 De lazo simple

Un robot paralelo de lazo simple consiste de un solo lazo cerrado donde todos los eslabones son binarios, incluyendo el eslabón que corresponde a la base o referencia y el que corresponde al eslabón final.

### **2.6.2 Cadenas cinemáticas abiertas simples**

Un robot paralelo de cadenas cinemáticas abiertas simples consiste en dos eslabones polinarios que corresponden a la base y al efecto final, que se interconectan por medio de tres o más lazos de eslabones binarios.

### **2.6.3 Cadenas cinemáticas complejas**

Un robot paralelo de cadenas cinemáticas complejas posee más de dos eslabones polinarios, uno de ellos corresponde a la base fija o referencia, el otro al efecto final y el o los demás se encuentran integrados a las ramas de eslabones binarios que los interconectan creando así una o mas cadenas complejas internas.

## **2.7 Espacio de Trabajo -WS-**

El WS de un manipulador esta definido como el volumen de espacio que el efecto puede alcanzar. En la robótica se suelen utilizar dos definiciones:

- El espacio de trabajo alcanzable, correspondiente al volumen del espacio en el cual cualquier punto puede ser alcanzado por el efecto final sin importar la orientación en que lo logre.
- El espacio de trabajo diestro, que corresponde al volumen de espacio en el que cada punto puede ser alcanzado por el efecto final en todas las posibles orientaciones

En general, el análisis del espacio de trabajo en robots paralelos es realmente complicado debido a la dificultad para acoplar los parámetros de posición y orientación, problema que se ha superado utilizando algunas representaciones parciales:

- Espacio de trabajo de translación con orientación constante de la plataforma móvil.
- Espacio de trabajo de orientación con un punto definido de la plataforma móvil.
- Espacio de trabajo alcanzable con un rango de orientaciones definido.

## *Revisión*

Un análisis completo del espacio de trabajo debe incluir un análisis de las singularidades, la precisión y la rigidez, ya que pueden cambiar con condiciones de dinámica exigentes, e incluso, parámetros como la dimensión, la forma, la tolerancia, las propiedades mecánicas y las soluciones tecnológicas para eslabones y articulaciones, que actualmente se busca integrar al diseño y análisis de los manipuladores paralelos.

## **2.8 Singularidades**

Una singularidad desde el punto de vista matemático es un punto donde el modelo de robot cinemático no está definido o falla respecto al comportamiento esperado, lo que genera un comportamiento impredecible. En una configuración singular, las ecuaciones del modelo correspondientes a la descripción de movimientos, fuerzas, y otros parámetros físicos se hacen indeterminadas.

La identificación de una configuración singular en los robots es de alta importancia, ya que cerca a estos puntos pequeños cambios en las velocidades y fuerzas de entrada pueden producir amplias variaciones en las de salida, haciendo que el mecanismo se haga incontrolable, ya que los comportamientos estáticos y dinámicos cambian dramáticamente y puede ganar o perder grados de libertad; todo esto se traduce en una alta probabilidad de daño del robot y del controlador.

Cuando se identifica una singularidad el *path planning* o planeación de trayectorias debe estar en la capacidad de generar una opción de desplazamiento que la evite, o aun mejor, desde el diseño el PM debe tener como objetivo reducir el numero de singularidades a las que se pueda someter de acuerdo a la actividad que va a desempeñar. Con este objetivo se han desarrollado diversas herramientas como lo son la teoría de screws, la geometría de Grassmann, parametrizaciones de desplazamientos euclídeanos, álgebra de Clifford, los parámetros de Rodrigues, aproximaciones por geometría diferencial, tangente común entre otros.

También se han concentrado esfuerzos en caracterizar la naturaleza de dichas singularidades en robots paralelos, agrupándolos en dos clases. Las estacionarias en las cuales la plataforma móvil puede perder uno o más grados de libertad, y las segundas de incertidumbre donde la plataforma móvil puede someterse a movimientos finitos cuando todas las entradas de movimiento están bloqueadas.

## *Revisión*

Por otro lado [46] [4] utilizan la matriz  $J$  para definir las singularidades. De tipo I cuando  $\mathbf{J}_s$  es singular, tipo II cuando  $\mathbf{J}_p$  es singular y tipo III cuando ambas son singulares. Dicha definición fue ampliada [124] a singularidades inversas, directas y combinadas de acuerdo a la matriz  $\mathbf{J}$ .

## **2.9 Background Cinemática Geométrica: Problema cinemático directo**

Como ya se mencionó, el análisis cinemático de PMs es de vital importancia cuando del diseño y control de mecanismos se trata. Para robots paralelos el análisis de cinemática directa, conocido en inglés por las siglas FDA (Forward Displacement Analysis), es usualmente complejo, especialmente para mecanismos de 6 o más grados de libertad. Muchos artículos científicos han sido publicados proponiendo múltiples soluciones a dicho problema, sobre todo en las últimas dos décadas [45] [75] [81] [94] [88].

Afortunadamente el análisis cinemático de muchos manipuladores paralelos es a menudo similar, en otras palabras, la cinemática directa puede ser encontrada por la extrapolación del análisis realizado a mecanismos existentes con características estructurales similares [78], sin embargo el análisis realizado mediante neta inspección se hace subjetivo y aumenta la posibilidad de errar en su obtención.

En un inicio con el desarrollo de los métodos computacionales el análisis cinemática desde el punto de vista geométrico adquirió un gran nivel de importancia que parte del análisis exclusivamente con desplazamientos [59] [116]. El tiempo no es requerido, pero si tomado en cuenta, a no ser, que se haga uso de la teoría de screws, permitiendo el análisis de cuerpos interconectados por cualquier cantidad de cadenas cinemáticas y en movimiento [11].

Por su parte, las aproximaciones de tipo matemático, geométrico y metodológico se pueden generalizar en varias clases:

- Aproximación por iteración [1] [62].
- Aproximación por eliminación.

## *Revisión*

- Aproximación por continuidad [126].
- Aproximación basada en sensor [76] [102] [103] [63] [121] [3].

Algunos trabajos señalan que el problema de cinemática directo puede ser reducido a la solución de una ecuación de cuarto grado o menor, y que es conveniente usar el método de eliminación para mejorar el desempeño de la solución [73].

Para solucionar el problema de la cinemática directa, también se ha procedido desde la generación de herramientas matemáticas que permitan representaciones espaciales diferentes para nuevas aproximaciones al problema. La clave para formular la solución de la cinemática directa, independientemente de la arquitectura o de la actuación es la caracterización de los desplazamientos de la plataforma [52].

Una de las mayores contribuciones hechas por el estudio de la cinemática desde la geometría, son las coordenadas Soma, que mapean los desplazamientos en el espacio euclíadiano. Una contribución similar fue hecha por Plucker con las coordenadas de línea [108], que transforma líneas en el espacio euclíadiano en elementos geométricos en un espacio de alta dimensión. Como el mapeo consiste en transformaciones lineales, la geometría que ello implica necesita de una compleja visualización de los problemas de cinemática en el análisis y síntesis de mecanismos paralelos. Otro camino para obtener esta transformación son las coordenadas de Klein [71] descritas dentro de la geometría del espacio Soma; también se puede expresar mediante un conjunto de cuatro parámetros cada uno de los cuales puede ser representado en un vector cuatro-dimensional [111] [112], Ravani introdujo la idea de representar los desplazamientos como un punto dual, similar a la representación en términos de cuaternios, todos estos estudios son diferentes representaciones geométricas. Otra forma del espacio euclídeo de tres dimensiones puede ser obtenido usando el principio de transferencia [111], o de forma esférica usando los parámetros de euler-rodrigues, también en un espacio dual.

Debido a la naturaleza del problema de cinemática directa, las soluciones numéricas han recibido la mayor atención por parte de los investigadores [115] [116], ya que aunque facilitan el control, no permiten obtener mucha mas información acerca del robot, como el espacio de solución o los parámetros estructurales; incluso, muchos de estos métodos fallan debido a la importancia de las condiciones iniciales para

## *Revisión*

encontrar una solución cercana a la real [116].

Por otro lado también se han buscado soluciones teóricas, pero la mayoría se concentran en manipuladores específicos. Por mencionar algunos:

El robot paralelo RRR mencionado por Hunt [60], para el que Gosselin y Se frioui también propusieron una solución alternativa [50], Merlet solucionó para el mismo PM el problema para un conjunto de permutaciones. En estos casos se usa trigonometría plana, distintas arquitecturas siempre requieren de un conjunto de ecuaciones diferentes que dependen fuertemente de la geometría de la plataforma.

La plataforma consistente de tres patas RPR, fue estudiada por Rooney y Early [115], sobre todo el espacio de trabajo; síntesis en el caso de Shirkhodaei y Soni [118]; Pierrot con cuaterniones para diseños planares [106], e incluso Husty propuso un método que tiene un alcance limitado [61]. De esta manera la investigación se ha inclinado por métodos donde se desea resolver la cinemática sin importar la arquitectura de las patas ni la forma de actuación.

Seguido a estos resultados, se han propuesto metodologías generales de solución, por parte de investigadores reconocidos en el campo, caso de Hayes, Husty y Zsombor-Murray [137], cuyo resultado también está limitado, en este caso a topologías simétricas, de la que posteriormente Hayes hizo una nueva propuesta excluyendo algunos casos, y finalmente Chen [24] quien hizo aportes para ampliar el alcance de la metodología. Actualmente los investigadores toman este y otros ejemplos como base para proponer nuevos métodos de análisis [52].

La teoría del screws ha sido desde la década de los 80 aplicada al estudio de la cinemática instantánea del efecto final de los PMs. El movimiento instantáneo del efecto final se expresa directamente en términos de los twists de las articulaciones de entrada accionadas, el twist que representa el movimiento instantáneo del efecto final es igual a la suma de sus twist parciales, definidos como los twists que representan el movimiento instantáneo del efecto final, cuando todos menos uno de los actuadores de entrada están bloqueados. Este tipo de análisis constituye una base adecuada para el estudio de configuraciones especiales de los dispositivos de tipo paralelo [98]. En algunos trabajos se analizan manipuladores específicos:

## *Revisión*

El mecanismo 3RRR y algunas de sus configuraciones (3-RPS, 3-RRS, 3-CS, 3-PRS, 3-TPT y 3-PSP ) con la teoría actualmente conocida como de screws recíprocos [2].

Un PM de cuatro grados de libertad, al cual se le ha encontrado el modelo de cinemática directa de forma cerrada, obteniendo expresiones simples que se derivan para la obtención de velocidad y la reducción de los estados de aceleración de la plataforma en el marco de coordenadas fijo del manipulador, tanto en forma de screws, a través de cada miembro, y como vectores de seis dimensiones. La forma de Klein, una forma bilineal simétrica del álgebra de Lie, juega un papel central en dicho trabajo, que incluye una demostración numérica y su validación con software MSD del análisis de la cinemática y la singularidad del manipulador paralelo [38].

Con las propuestas hechas para analizar los PMs como cadenas independientes, desde el 2000 se han hecho nuevos enfoques para el estudio de las variaciones de los movimientos infinitesimales con sistemas de screws, analizando la aceleración efector final de una cadena en serie. Los resultados obtenidos se han aplicado la síntesis de la traducción de los mecanismos accionados en paralelo [37].

## **2.10 Background Cinemática Diferencial**

La cinemática diferencial relaciona las velocidades de los componentes del manipulador. Estas velocidades pueden ser de las articulaciones del manipulador o de uno o más eslabones que componen la cadena, y que normalmente corresponden al efector final. La cinemática diferencial también permite el análisis de singularidad, espacio de trabajo e incluso de dexteridad e índices de desempeño [34] [58] [19].

En la literatura, la cinemática diferencial de robots con cadenas cinemáticas seriiales es descrita usando principalmente dos métodos: El procedimiento basado en los parámetros de DH [104] y el método basado en screws [33].

En ambos métodos la descripción de la cinemática se obtiene generalmente mediante el cálculo del jacobiano; en este último caso, la expresión para el cálculo del jacobiano se ve ampliamente simplificada por la expresión de los screws en el sistema

## *Revisión*

de coordenadas de referencia [123]. La construcción de dicho Jacobiano para manipuladores paralelos resulta compleja debido a la naturaleza de las cadenas cerradas que posee el manipulador [123]

Un procedimiento común es construir el jacobiano a partir de la posición de la cadena [123] [131]. Este procedimiento consiste en 3 pasos:

- Establecer una ecuación vectorial que represente la cadena cerrada de posición del efecto final y de cada pata del manipulador en relación con un sistema de coordenadas fijo a la base.
- Encontrar la posición del efecto relacionada con la base en función de las variables articulares de las patas, tanto actuadas como pasivas.
- Obtener la ecuación de restricción de velocidades de la cadena cerrada a través de derivación en relación con el tiempo de posicionamiento del efecto.

Otro procedimiento particular consiste en establecer directamente las ecuaciones de restricción de velocidades de la cadena del manipulador, en general a partir de la teoría de helicoides, igualando la velocidad del efecto final obtenida individualmente por medio de cada una de las cadenas seriales, [57] [123] [24].

Adicionalmente, los algoritmos para resolver la cinemática diferencial de los manipuladores paralelos pueden ser divididos en dos: los que se basan en la eliminación de las velocidades en las articulaciones pasivas y aquellos basados en el cálculo de las velocidades en las articulaciones pasivas.

Los algoritmos basados en la eliminación suprimen los efectos de todas las articulaciones pasivas. Algunos métodos utilizan helicoides para representar y el principio de reprociidad para representar el movimiento, igualando la suma del trabajo realizado por las articulaciones y por el actuador [16]. Otro método calcula vectores asociados a la estructura del manipulador y elimina las variables que representan velocidades asociadas a las juntas pasivas mediante métodos geométricos [4] [123].

Los algoritmos basados en el cálculo de las velocidades en las articulaciones pasivas se centran en la sustitución de dichas velocidades en la ecuación de restricción para encontrar las velocidades del efecto. Sin embargo, este método no funciona para

todos los manipuladores paralelos, ya que no aplica para los manipuladores con más de 3 patas con articulaciones esféricas, o manipuladores con patas limitadas por 6 articulaciones [131].

## 2.11 Background Dinámica de PMs

El desarrollo del modelo dinámico de un robot paralelo, es de vital importancia para las especificaciones de diseño y el control. Diferentes técnicas para manipuladores han sido planteadas en las últimas décadas [72] [84] [101] [130]. Algunos afirman que el análisis dinámico de PMs inició con el estudio de la plataforma Stewart Gough [69] [36] [55] estudios que se dirigían a disminuir las oscilaciones. Mas tarde, empezaron a aparecer análisis más profundos, usando otros métodos como Lagrange-Euler [9] [10] [77] [82] el principio de trabajo virtual [28] el método de Hamilton [97], y por último y con mayor popularidad entre los investigadores en PMs, el método de Newton-Euler, donde todas las fuerzas de restricción y momentos entre los eslabones son obtenidos, incluso, el cálculo de estas fuerzas y momentos sirve con propósitos de diseño, aunque no sean aconsejables para realizar tareas de control del manipulador, [31] [49] [66] [113].

En algunas soluciones propuestas [44], el modelo dinámico ha sido obtenido abriendo los lazos para formar estructuras de árbol; en otras se han aplicado técnicas clásicas de análisis de robots seriales y mecanismos de lazo cerrado [70], eliminando las articulaciones no pasivas; los últimos aportes proponen métodos basados en la matriz jacobiana y la proyección de las fuerzas en cada articulación [28].

En el caso específico del análisis de PMs de tres grados de libertad, se ha popularizado el uso del método de Lagrange [77], debido a que la complejidad del modelo dinámico de un PM espacial necesita de algunas suposiciones que simplifiquen las expresiones de energía cinética y potencial. Es de mencionar que dicha aproximación no es general ni eficiente para el análisis dinámico de los manipuladores paralelos; por otro lado se han hecho aproximaciones por el método de trabajos virtuales, calculando fuerzas y momentos a partir de las aceleraciones de los cuerpos, considerando el robot en estado de equilibrio para calcular las fuerzas y torques de entrada [128]. Mientras no se necesiten los valores numéricos, esta aproximación permite obtener una rápida solución computacional que facilita las acciones de control [129].

## *Revisión*

En conclusión, un modelo dinámico completo aun no ha sido establecido pero a medida que se han ido haciendo más y más investigaciones, se han hecho adelantos justificados que permiten simplificar el modelo dinámico [120], entre ellos, cabe mencionar la eliminación de la masa de los eslabones, y la linealización de los parámetros [67]; esta última ha permitido identificar muchos de los parámetros de los PMs usando técnicas de mínimos cuadrados [6], y buscar modelos lineales completos [68].

---

# Capítulo 3

## TEORÍA DE SCREWS

### 3.1 Nociones elementales

La teoría de screws, base para la síntesis de tipo de robots, se centra en dos teoremas ampliamente conocidos. Uno de ellos tiene que ver con el desplazamiento del cuerpo rígido (CR), conocido como teorema de Chasles. El otro tiene que ver con las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, conocido como teorema de Poinsot [7].

De forma sencilla el teorema de Chasles infiere, que para dos posiciones dadas de un cuerpo rígido existe un conjunto infinito de movimientos para ir de un lugar a otro. Por consiguiente Chasles introduce la siguiente simplificación: un CR puede ir de una posición a otra a través de un movimiento de rotación alrededor de una linea recta acompañado de un desplazamiento paralelo a dicha linea. Por tanto cualquier desplazamiento realizado por un CR puede ser realizado por una rotación alrededor de una eje  $S$  combinado por una traslación paralela a este eje (figura 3.1).

De acuerdo al teorema de Poinsot, se puede inferir que cualquier sistema de fuerzas y pares que actúan sobre un CR puede ser remplazado por una sola fuerza y un solo par que esté en la misma dirección de la fuerza. Se puede demostrar que las fuerzas y pares actuantes sobre un CR pueden ser desplazadas a un origen arbitrario. En el caso de la fuerza, la magnitud y dirección son invariantes, sin embargo, en el caso del torque, el momento de torsión ni el eje de dirección cambia. Por otro lado, el origen puede ser seleccionado de forma tal que el par pueda ser descompuesto en dos, uno en la dirección de la fuerza y otro en plano perpendicular a la fuerza. La primera componente es adicionada con la fuerza, para transferir la

## Teoría de Screws

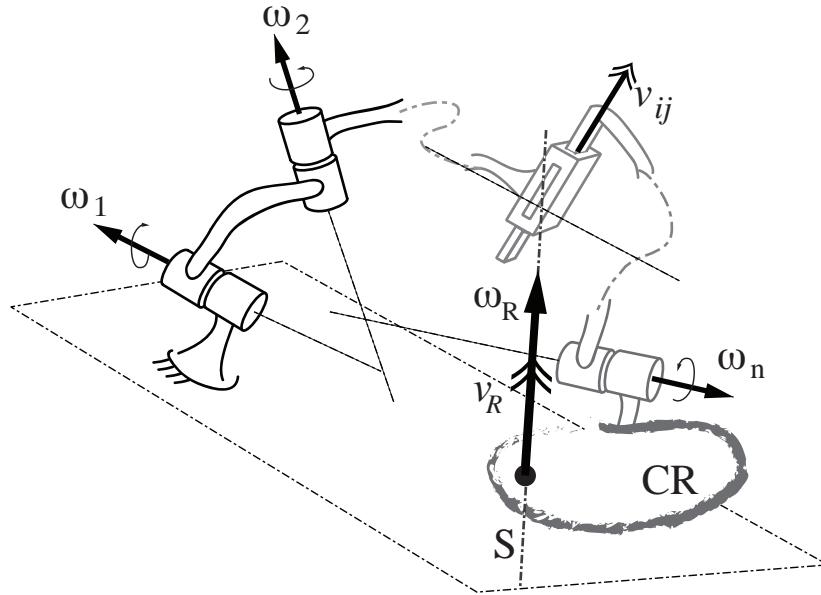


FIGURA 3.1: Representación gráfica del teorema de Chasles.

fuerza a una posición paralela y la segunda no se considera. Por lo tanto todo el sistema de fuerzas es reducido a una fuerza y a un momento en la dirección de la fuerza.

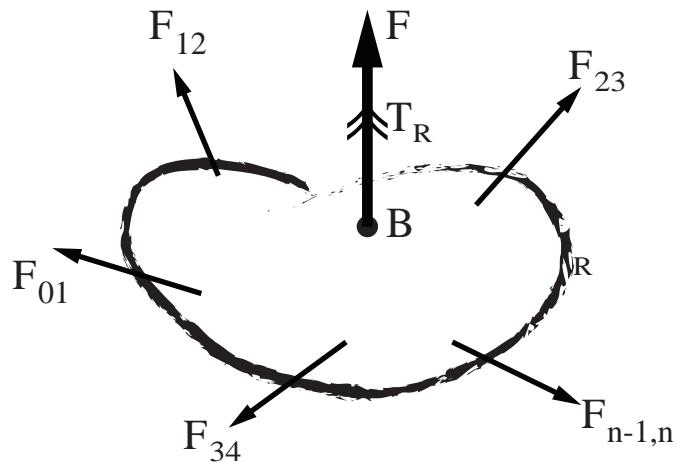


FIGURA 3.2: Representación gráfica del teorema de Poinsot.

Es importante tener en cuenta que sólo hay una línea recta, que posee la propiedad de que una fuerza a lo largo de esta línea y un par en un plano perpendicular a

la línea, sean equivalentes al sistema de fuerzas dado. A partir de estos dos principios se establece la teoría de Screws.

## 3.2 Definición Screw

Los puntos, líneas y planos son elementos geométricos fundamentales en el espacio euclídeo tridimensional. Un Screw o helicoide es un elemento geométrico compuesto por una línea recta dirigida (eje) y un parámetro escalar  $h$  llamado paso. Por tal razón un screw no representa ninguna cantidad física, ni tampoco puede ser considerado como un vector [7].

De acuerdo con la figura 3.3 un screw puede ser representado a través de la siguiente expresión:

$$\$ = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \times \mathbf{r} + h\mathbf{s} \end{bmatrix} & \text{Si } h \text{ es finito,} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} & \text{Si } h \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde  $\mathbf{s}$  es un vector unitario 3D que indica la dirección del eje screw  $\$$ ,  $\mathbf{r}$  es un vector que va desde cualquier punto sobre el eje screw al origen del sistema coordenado de referencia  $O_{xyz}$  y  $h$  representa el paso.

El concepto de screw puede extenderse a la noción de un tornillo mecánico, elemento que avanza una cierta longitud a medida que gira sobre su propio eje, el avance de la rosca es el paso. Así mismo el paso expresa la razón de cambio entre el movimiento de avance lineal del tornillo y la rotación alrededor de su eje  $\lambda$ . Los puntos sobre la rosca del tornillo describen un movimiento helicoidal, es decir en espiral.

Considerando el desplazamiento de la tuerca como finito, se puede decir que esta compuesto por una desplazamiento axial mas un giro, relacionados a través del paso de la rosca, definido así por:

$$h = \frac{\text{Desplazamiento axial de la tuerca}}{\text{Desplazamiento angular (rad) de la tuerca}} \quad (3.2)$$

El desplazamiento finito de la tuerca puede ser descrito en un sistema de coordenadas, localizando el eje y el paso. Siendo el eje una recta dirigida.

Ahora, tomando un desplazamiento infinitesimal (velocidad) de la tuerca se observa, que ésta tendrá una componente axial, y una componente angular, relacionadas a través del paso.

$$h = \frac{\text{Velocidad axial de la tuerca}}{\text{Velocidad angular (rad) de la tuerca}}. \quad (3.3)$$

La velocidad de la tuerca puede ser descrita en un sistema de coordenadas utilizando una línea recta dirigida y un paso.

Haciendo un análisis estático en la tuerca, se observa que está siendo sometida a un esfuerzo de torsión alrededor del eje, que a su vez induce una fuerza paralela al eje. La relación entre la fuerza y el momento de torsión es definida por un paso [18].

$$h = \frac{\text{momento de torsion alrededor del eje}}{\text{fuerza axial}}. \quad (3.4)$$

En el estado estático la fuerza y el momento ejercidos en la tuerca pueden ser descritos por una recta dirigida, definida por el eje del tornillo, y el paso.

Cuando el paso es cero, los hilos de la rosca del tornillo son paralelos, y los puntos sobre éstos describen una trayectoria circular y por tanto el tornillo realiza una rotación pura. Cuando el paso es muy grande los hilos de la rosca llegan a ser paralelos y los puntos sobre dicha rosca se mueven en una trayectoria de línea recta, y es considerada una traslación pura, similar a una articulación prismática o de traslación.

Las tres diferentes condiciones descritas en el párrafo anterior para un screw, son llamadas screw de paso cero, screw de paso finito y screw de paso infinito, representadas como  $\$_0$ ,  $\$_h$  y  $\$_\infty$  respectivamente. Para cada una de estas representaciones se ha utilizado un símbolo diferente tal y como se observa en la figura 3.4.

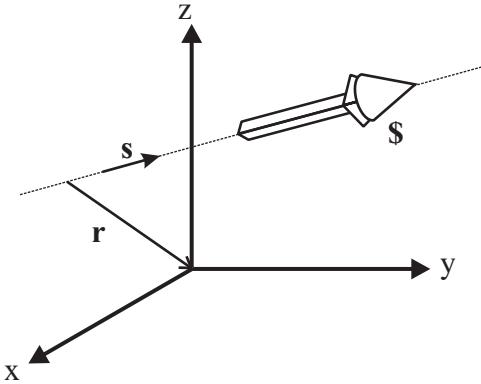


FIGURA 3.3: Representación de un screw en un espacio Euclídeo.

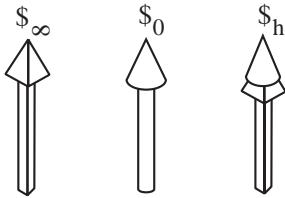


FIGURA 3.4: Representación simbólica de diferentes Screws.

### 3.3 Coordenadas de un Screw

El screw expresado en (3.1) puede ser representado por 6 componentes, como fue definido por Plücker en [108] utilizando las coordenadas de rayo. Observando la figura 3.5 se aprecian los vectores  $s$ ,  $r$  y el escalar  $h$ . El vector  $s$  tiene tres componentes representadas por  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$ , donde  $\|s\| = \mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2$ , y que a su vez son la dirección del eje  $\$$ . En el caso de tener un screw normalizado la notación de las componentes de  $s$  resultan  $N, L, M$  respectivamente. Luego se tiene  $r$  que es cualquier vector que va desde el eje  $\$$  hasta el origen O, sin embargo y sin perder generalidad el vector  $r$  se toma de forma tal que determine un ángulo recto con el eje  $\$$ . Considerando el término  $s \times r + hs$ , éste tiene 3 componentes denotadas por  $P^*, Q^*, R^*$ . Donde  $h$  que es un escalar que representa la magnitud de desplazamiento sobre el vector de dirección del screw  $\$$ . Por último el screw normalizado con todas sus componentes se expresa como  $N, L, M$  y  $P^*, Q^*, R^*$ . Entonces las coordenadas del screw  $\$$  son escritas como:

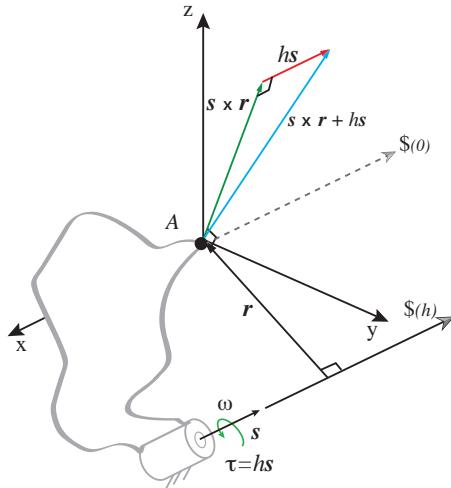


FIGURA 3.5: Representación gráfica de un screw por componentes

$$\$ \equiv (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*) \quad (3.5)$$

En el caso de un screw normalizado se tiene:

$$\$ \equiv (L, M, N, P^*, Q^*, R^*) \quad (3.6)$$

De manera intuitiva se puede asociar el screw o helicoide con un movimiento, como lo plantea el teorema de Chasles, el screw luego de ser "cargado" con el concepto de velocidad instantánea se denominará *twist*. Sin embargo, el screw puede ser asociado a otras cantidades físicas, una de las más relevantes es la fuerza que actúa sobre un cuerpo (teorema de Poinsot), y el elemento geométrico screw "cargado" con el concepto de fuerza se denomina *wrench* [80].

### 3.4 Interpretación física

De las coordenadas dadas en la ecuación (3.5) que corresponden a la figura 3.5 y con base en la analogía entre cinemática instantánea y estática, el desplazamiento infinitesimal puede ser reducido a unas velocidades sobre un screw (figura 3.1), en la estática un sistema de fuerzas y momentos puede ser representado por una fuerzas sobre un screw (ver figura 3.2).

Suponiendo que el vector  $s$  es la velocidad angular con componentes  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  y que se desplaza paralelamente con respecto a él mismo, hasta que el eje pase por el

origen del sistema coordenado. Por consiguiente el giro de un cuerpo alrededor del eje screw  $\$(h)$  puede ser, en un instante, igualmente reproducido por la combinación de dos velocidades relativas: una velocidad angular pura  $\omega$  alrededor del eje screw desplazado a una velocidad  $\mathbf{v}_A$  de un punto A que pertenece al cuerpo, el cual es instantáneamente coincidente con el origen del sistema coordenado.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \times \mathbf{r} + h\mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P} + h\mathcal{L} \\ \mathcal{Q} + h\mathcal{M} \\ \mathcal{R} + h\mathcal{M} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Según la ecuación (3.7) los vectores  $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$  y  $(\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)$  representan  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\mathbf{v}_A$ , respectivamente. Por lo tanto resulta correcto representar la cinemática instantánea de primer orden de un cuerpo rígido como un vector de velocidad  $\boldsymbol{\omega}$  alrededor de  $\$(0)$  junto con una velocidad lineal  $\mathbf{v}_A$  a lo largo de un eje en lugar de un giro con una amplitud  $\omega$  (dado por una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  alrededor de  $\$(h)$ ) y una componente de velocidad lineal  $\tau = h\mathbf{s}$  que es paralela a  $\boldsymbol{\omega}$  [20]. De la figura 3.5 se puede deducir:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} y \mathbf{v}_A = \mathbf{s} \times \mathbf{r} + h\mathbf{s}. \quad (3.8)$$

Como es de esperarse, existe una redundante analogía en la estática (ver tabla 3.1): un wrench sobre  $\$(h)$  de intensidad  $\mathbf{F}$ , representa una fuerza  $\mathbf{F}$  y un torque paralelo  $\mathbf{T} = h\mathbf{F}$  que actúan simultáneamente sobre un mismo cuerpo. Éstos pueden ser reemplazados, el vector de fuerza  $\mathbf{F} \equiv (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$  con la línea de acción  $\$(0)$  que pasa por el origen, y un torque  $\mathbf{T} \equiv (\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)$  que actúan conjuntamente. De acuerdo con la figura 3.5 se tiene que  $\mathbf{T} = \mathbf{s} \times \mathbf{r} + h\mathbf{s}$  y  $\mathbf{F} = \mathbf{s}$  y se escribe como se presenta en (3.9):

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \times \mathbf{r} + h\mathbf{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P} + h\mathcal{L} \\ \mathcal{Q} + h\mathcal{M} \\ \mathcal{R} + h\mathcal{M} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A manera de resumen se puede decir que un twist y un wrench tienen diferentes significados físicos sin embargo tienen la misma representación llamada screw. Entonces un Screw de paso cero (vector línea) representa un twist indicando que el movimiento es una rotación pura, y un wrench representa una fuerza pura [33].

TABLA 3.1: Paralelo entre cinemática instantánea y estática ( twists y wrenches)

Cinemática Instantánea	Estática
Los twists actúan sobre ejes screws, los ejes conectan cuerpos que forman unas cadenas seriales. La amplitud del giro es una velocidad angular, $\omega$	Los wrenches actúan sobre una eje Screw, y son aplicados a un solo cuerpo en paralelo. La intensidad del wrench es la fuerza, $F$
El paso $h$ de un screw $\$$	
$h\omega$ es la componente de velocidad translacional de todos los puntos del cuerpo en la dirección de $\$$ .	$hF$ es la componente de par en la dirección de $\$$
Un screw con paso cero $\$_0$ es un línea dirigida (vector línea)	
Un cuerpo que se mueve con paso cero está sometido a la acción de una velocidad angular pura alrededor de un eje (vector línea).	Un wrench con paso cero es una fuerza pura en una línea de acción (vector libre).
Un screw con paso infinito $\$_\infty$ es un vector libre (un vector director)	
Un cuerpo que se mueve con paso infinito está sometido a la acción de una translación pura, todos los puntos del cuerpo se mueven en la misma dirección y magnitud. Es un vector libre.	Un wrench con paso infinito es una torque puro actuando sobre un cuerpo. Es un vector libre.

### 3.4.1 Representación de rectas

Observando las componentes de  $\mathbf{v}_A = \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^* (\mathbf{s} \times \mathbf{r} + h\mathbf{s})$  en la figura 3.5 se tienen tres casos: cuando el screw tiene paso cero, cuando el screw tiene paso infinito y cuando el screw tiene paso finito. El primero cuando el screw tiene paso cero,  $\tau = 0$  y  $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  se elimina el asterisco de las componentes,  $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*$  y se obtiene un screw líneal o screw de paso cero, que se escribe como:

$$\$_l = \$_0 \equiv (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}) \quad (3.10)$$

La diferencia entre el screw líneal  $\$_0$  y el screw de paso finito  $\$_h$  está en la componente  $\tau$ , considerando solo la componente x, la diferencia es dada por  $\mathcal{L}$  (Tabla 3.2). Lo mismo pasa con las demás coordenadas, y el screw de paso finito se puede escribir como:

$$\$_h \equiv (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; (\mathcal{P} + h\mathcal{L}), (\mathcal{Q} + h\mathcal{M}), (\mathcal{R} + h\mathcal{N})). \quad (3.11)$$

El cual coincide con el expresado en la ecuación (3.5). Si se tiene el screw de paso cero  $\$_0$  y asegurando que el vector  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  esté en dirección perpendicular al eje del screw, entonces  $\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0$  y se obtiene :

$$\mathcal{L}\mathcal{P} + \mathcal{M}\mathcal{Q} + \mathcal{N}\mathcal{R} = 0. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) corresponde a la identidad cuadrática que debe ser cumplida por las coordenadas de todo screw líneal [33].

En el caso de un screw de paso infinito ( $h = \infty$ ), este expresa un significado físico propio, que representa un aspecto particular cuando se expresa a través de las coordenadas del screw.

### 3.4.2 Paso del Screw

El paso de un screw puede ser determinado a partir de la identidad cuadrática (3.12). Un screw de paso cero se puede describir como:

$$\$_0 = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; (\mathcal{P}^* - h\mathcal{L}), ((\mathcal{Q}^* - h\mathcal{M}), ((\mathcal{R}^* - h\mathcal{N}))).$$

Aplicando a la ecuación anterior la identidad cuadrática se tiene:

$$\mathcal{L}(\mathcal{P}^* - h\mathcal{L}) + \mathcal{M}(\mathcal{Q}^* - h\mathcal{M}) + \mathcal{N}(\mathcal{R}^* - h\mathcal{N}) = 0,$$

expandiendo y organizando semejantes:

$$\mathcal{L}\mathcal{P}^* + \mathcal{M}\mathcal{Q}^* + \mathcal{N}\mathcal{R}^* - h(\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2) = 0 \quad (3.13)$$

Para luego despejar  $h$  de la ecuación (3.13) y en el caso de disponer de las seis coordenadas del screw como en la ecuación (3.5), se logra obtener el paso como:

$$h = \frac{\mathcal{L}\mathcal{P}^* + \mathcal{M}\mathcal{Q}^* + \mathcal{N}\mathcal{R}^*}{(\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2)}. \quad (3.14)$$

Cuando el numerador de la ecuación (3.14) es cero para  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  diferentes de cero se tiene que el paso del screw es cero, y la ecuación (3.14) se reduce a la identidad cuadrática.

### 3.4.3 Coordenadas generalizadas del Screw

En ocasiones es necesario representar las coordenadas de un screw de forma normalizada, entonces es necesario preguntarse cuál es número mínimo de parámetros independientes que define un screw.

Inicialmente se utilizan seis coordenadas para definir el screw de paso  $h$  que son  $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)$ . En el caso de un screw de paso cero, las condiciones de ortogonalidad y ortogonalidad de las componentes, establecen que solamente cinco de las seis coordenadas independientes son necesarias para que el screw esté totalmente definido; de éstas, 4 son asociadas al screw líneal, y la quinta es el paso  $h$ . El exceso de coordenadas del screw de paso  $h$  permite relacionar la amplitud de un twist (o intensidad de un wrench) con las mismas seis coordenadas del screw, haciendo  $+(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})^{1/2}$  igual a la amplitud o intensidad del paso. Igualmente el exceso de coordenadas permite normalizar el screw. El screw puede ser representado de varias formas equivalentes, por ejemplo se establece la relación entre el screw y el screw normalizado a través de un escalar positivo  $\rho$  que representa la amplitud o intensidad

bien sea un twist o un wrench respectivamente, como se aprecia a continuación:

$$\$_h = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*) \equiv \rho \$_h \equiv (\rho L, \rho M, \rho N; \rho P^*, \rho Q^*, \rho R^*) \quad (3.15)$$

Los dos términos expresados en la ecuación (3.15) son equivalentes, por tanto el paso y la dirección de la línea definida por cada uno de ellos son iguales. Entonces la entidad  $\$$  con las componentes  $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)$  puede ser interpretada como el producto de un escalar por un screw normalizado.

TABLA 3.2: Coordenadas screw-twist

	Componentes de dirección en coordenadas cartesianas	Componentes del twist	
	$\omega$	$\omega \times \mathbf{r}$	$h\omega$
x		$\mathcal{L}$	$h\mathcal{L}$
y		$\mathcal{M}$	$h\mathcal{M}$
z		$\mathcal{N}$	$h\mathcal{N}$
			$\omega \times \mathbf{r} + h\omega$
			$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} + h\mathcal{L}$
			$\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} + h\mathcal{M}$
			$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} + h\mathcal{N}$

### 3.4.4 Coordenadas del Screw de paso infinito

Un screw de paso infinito ( $h = \infty$ ) posee un significado físico propio, y cuando es definido en coordenadas screw tiene un aspecto particular. En forma general un screw de paso infinito puede contener los siguientes componentes:

$$\$_{\infty} = \begin{bmatrix} i \\ j \ k \\ a + \infty i \\ b + \infty j \\ c + \infty k \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

donde  $i, j, k, a, b, c$  son valores escalares arbitrarios.

Considerando la propiedad de normalización dada por la ecuación (3.15), y uti-

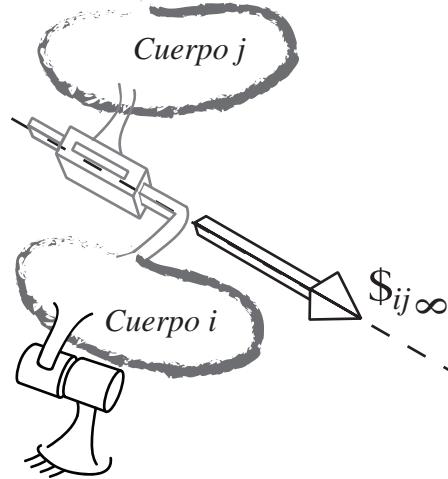


FIGURA 3.6: Screw de paso infinito, equivalente a un Twist de paso infinito, que representa una articulación prismática en cinemática

lizando  $h = \infty$  para homogenizar cada una de las componentes del screw se tiene:

$$\$_{\infty} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P}^* \\ \mathcal{Q}^* \\ \mathcal{R}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\infty} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ a + \infty i \\ b + \infty j \\ c + \infty k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ j \\ k \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Considerando las componentes del screw, el screw de paso infinito se puede representar como:

$$\$_{\infty} \equiv (0, 0, 0; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*). \quad (3.18)$$

En cinemática, el screw de paso cero dado en la ecuación (3.18) indica que la velocidad angular es nula  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , y por consiguiente puede ser interpretada como una articulación prismática, la cual sólo permite el movimiento traslacional entre dos cuerpos  $i$  y  $j$  (figura 3.6). En la dirección del eje del screw de paso infinito. Según la ecuación (3.18) las componentes del vector director de la recta  $x, y, z$  son  $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*$  respectivamente.

### 3.4.5 Coordenadas screw en estática

Retomando la ecuación (3.9) las componentes del wrench son agrupadas en dos conjuntos según el tipo de acción o fenómeno físico asociado. Las componentes  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$

son asociadas a las componentes de fuerza en las direcciones  $x, y$  y  $z$ , respectivamente, y las componentes  $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*$  son las componentes del momento en torno al origen en las mismas direcciones  $x, y$  y  $z$ . Al igual que en la cinemática instantánea las componentes  $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}; \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*, \mathcal{R}^*)$  son llamadas componentes del screw  $\$_h$ , sin embargo como se menciono cuando el screw representa un estado estático se denomina wrench.

En caso de un screw con paso cero ( $h = 0$ ) la representación del estado indica una fuerza pura y se reduce a (3.19).

$$\$_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{Q} \\ \mathcal{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

En el caso de un screw de paso infinito, y haciendo el mismo proceso de normalización usado en el caso cinemático para un wrench de paso infinito, que es de la forma de la ecuación (3.18) indicando que fuerza  $\mathbf{F}$  es nula y por tanto obteniendo un wrench que representa un par puro en la dirección del eje del screw.

En resumen las coordenadas del screw permiten representar totalmente la cinemática instantánea y la estática de un cuerpo rígido análogamente. Adicionalmente el tipo de screw permite determinar el tipo de movimiento o acción que describe o actuá sobre un cuerpo.

### 3.5 Producto escalar en screws

Un movimiento instantáneo puede ser representado por un screw, denominado twist y se denota como  $\mathbf{m}$ . Igualmente las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden ser representadas por un screw, a lo que se llamo wrench, y se denota como  $\mathbf{f}$ . El producto escalar entre dos screws está definido como  $\mathbf{m} \circ \mathbf{f}$ , donde un argumento representa un vector de movimiento y el otro argumento representa un vector de fuerza, y el producto obteniendo como resultado un escalar que representa la energía, potencia o una cantidad similar. Un twist ( $\mathbf{m} \in M^6$ ) representa el movimiento de un CR y un wrench ( $\mathbf{f} \in F^6$ ) representa la fuerzas que actúan sobre el CR, el producto

escalar  $\mathbf{m} \circ \mathbf{f}$  es la rata de potencia entregada por  $\mathbf{f}$  instantáneamente [35] .

El producto escalar crea una conexión entre el espacio de movimiento  $M^6$  y el espacio de las fuerzas  $F^6$ , a esta conexión se le conoce como la propiedad de **dualidad**. Por lo tanto el espacio vectorial de los movimientos tiene su espacio dual correspondiente a las fuerzas, así cada espacio es el dual del otro. Un sistema de coordenadas dual sobre  $M^6$  y  $F^6$  es cualquier sistema de coordenadas formado por dos bases de screws, una que genera a  $M^6$  y la otra a  $F^6$ . En particular estas dos bases pueden ser ortogonales entre si.

En la figura 3.8 se observa que sobre cualquier punto del cuerpo, actúa un wrench  $\mathbf{f}$ , con dos componentes: una fuerza pura  $\mathbf{F}$  aplicada en la línea de acción dada por  $\$_{h_2}^2$  con una intensidad  $F$  y un par puro  $\mathbf{T} = h\mathbf{F}$  alrededor de la misma línea de acción. En la figura 3.7 el movimiento del cuerpo está limitado por una articulación tipo tornillo; al aplicar el wrench en el cuerpo rígido se produce, infinitesimalmente, un screw instantáneo de movimiento  $\mathbf{m}$  (twist) con el eje giro  $\$_{h_2}^1$  y amplitud  $\omega$ , éste a su vez tiene dos componentes de velocidad: una velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  y una velocidad lineal  $\mathbf{v} = h\boldsymbol{\omega}$ . Entre la línea de acción del wrench  $\$_{h_2}^2$  y la línea movimiento del twist  $\$_{h_1}^1$  hay una perpendicular común  $a$ , y el ángulo formado entre ellas es  $\alpha$  como se observa en la figura 3.7.

En esta situación, en la que el wrench esta actuando sobre un cuerpo, la razón del trabajo  $dW/dt$  tiene las siguientes componentes.

- $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{w}$  :  $-F\omega a \sin \alpha$
- $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{v}$  :  $F\omega h_1 \cos \alpha$
- $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{w}$  :  $Fh_2\omega \cos \alpha$
- $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{w}$  : 0

La razón del trabajo total es la suma de todas la componentes:

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= -F\omega a \sin \alpha + F\omega h_1 \cos \alpha + Fh_2\omega \cos \alpha \\ \frac{dW}{dt} &= F\omega[(h_1 + h_2) \cos \alpha - a \sin \alpha]\end{aligned}\tag{3.20}$$

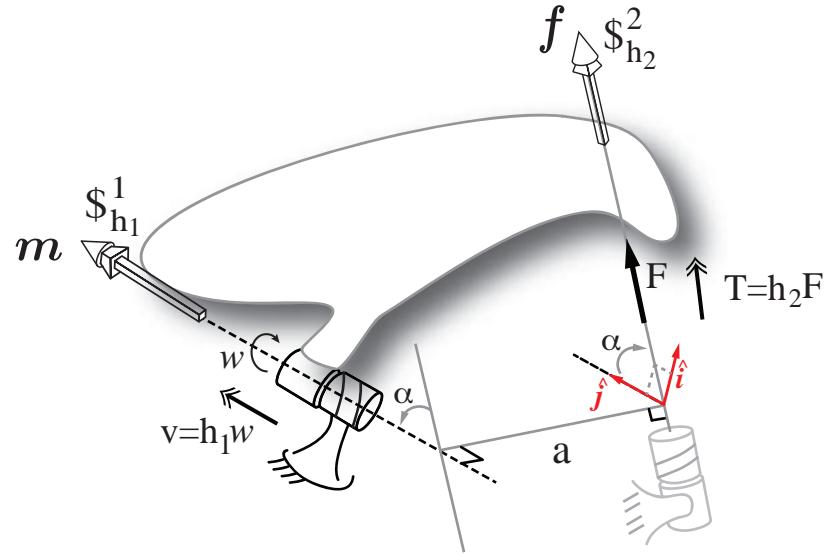


FIGURA 3.7: Dualidad entre twsist y wrench. El movimiento del cuerpo B está restringido por un twist y un wrench que actua sobre el cuerpo.

En el caso particular para el que un wrench no produce ningún trabajo sobre el cuerpo, es decir no se produce un giro, se dice que el wrench  $\mathbf{f}$  es recíproco al twist  $\mathbf{m}$  así la ecuación (3.20) se reduce a:

$$(h_1 + h_2) \cos \alpha - a \sin \alpha = 0. \quad (3.21)$$

Retomando que tanto  $\mathbf{m}$  como  $\mathbf{f}$  son representados por los screw  $\$_{h_1}^1$  y  $\$_{h_2}^2$  respectivamente, se deduce que la relación está dada también entre los elementos geométricos, independiente del significado físico [79].

### 3.5.1 Screws Recíprocos

Dos screws son recíprocos si satisfacen la siguiente condición:

$$\$_1 \circ \$_2 = \left[ \prod \$1 \right]^T \$_2 = 0, \quad (3.22)$$

donde:

$$\prod = \begin{bmatrix} 0 & I_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix},$$

y el símbolo  $\circ$  representa el producto recíproco entre dos screws.

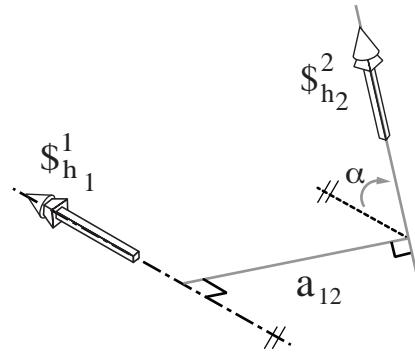


FIGURA 3.8: Reciprocidad entre screws.

De la ecuación (3.21) y considerando los diferentes tipos de screw, es decir de paso cero, paso finito y paso infinito se puede deducir las siguientes condiciones (figura 3.8):

$$\begin{cases} \text{Si } h_1 \text{ y } h_2 \text{ son los dos } \infty. & \text{Siempre son recíprocos} \\ \text{Si } h_1 \text{ o } h_2 \text{ es } \infty. & \cos \alpha = 0. \\ \text{Si } h_1 \text{ y } h_2 \text{ son los dos } 0. & -a_{12} \sin \alpha = 0. \\ \text{Si } h_1 \text{ y } h_2 \text{ son los dos finitos} & (h_1 + h_2) \cos \alpha - a_{12} \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

donde  $a_{12}$  es la longitud medida a lo largo de la perpendicular común desde  $\$_{h_1}^1$  hasta  $\$_{h_2}^2$ , y  $\alpha$  es el angulo entre  $\$_{h_1}^1$  y  $\$_{h_2}^2$  medido desde el uno hasta el dos alrededor de la normal común.

Considerando los diferentes pasos y la condiciones anteriores se puede concluir que:

- @ Dos screws de paso cero son siempre recíprocos si y solo si sus ejes son coplanares, es decir  $\alpha = 0$ .
- @ Un screw de paso infinito es recíproco a un screw de paso cero si y solo si sus ejes son perpendiculares el uno al otro, es decir  $\alpha = \pi/2$ .

### 3.5.2 Sistemas screw Recíprocos

Dado un sistema de  $n$  screws, existe un único sistema screw recíproco de orden  $(6-n)$  formado por todos los screws recíprocos al sistema screw inicial. Si el sistema screw

## *Teoría de Screws*

es denotado por  $\mathcal{S}$  entonces su sistema screw recíproco queda denotado como  $\mathcal{S}^\perp$ .

En la figura 3.9 se ha definido una base ortogonal, formada por 3 vectores unitarios y un origen común, formando un espacio euclídeo, representando así dos tipos de sistemas screw, un sistema screw de paso infinito y otro de paso cero, formado por tres screw linealmente independientes respectivamente como se aprecia en la figura 3.9a y 3.9c.

Un sistema screw su sistema recíproco es un sistema screw similar. Por ejemplo, un Sistema-3-\$<sub>0</sub>, formado por tres screw de paso cero \$<sub>0</sub><sup>1</sup>, \$<sub>0</sub><sup>2</sup>, \$<sub>0</sub><sup>3</sup>, tiene un sistema screw recíproco formado por tres screws de paso cero; donde cada screw es recíproco a los anteriores y definido como \$<sub>r0</sub><sup>1</sup>, \$<sub>r0</sub><sup>2</sup>, \$<sub>r0</sub><sup>3</sup>. Como se aprecia en la figura 3.9b y 3.9d.

De acuerdo a la condicion dada por la ecuacion (3.22), el sistema screw recíproco al Sistema-3-\$<sub>0</sub> es el sistema mostrado en la figura 3.9d y definido como Sistema-3-\$<sub>0</sub>. Cada screw recíproco es representado por una flecha sólida con un elemento adicional colocado en el cuerpo.

En la figura 3.9a se observa un Sistema-3-\$<sub>∞</sub>, formado por tres screw ortogonales entre si, en la figura 3.9b se observa su sistema recíproco, formado por \$<sub>r∞</sub><sup>1</sup>, \$<sub>r∞</sub><sup>2</sup>, \$<sub>r∞</sub><sup>3</sup>. En ocasiones no resulta evidente la forma como se determina el sistema recíproco para un sistema screw, por esta razón varios investigadores han publicado trabajos en este tema, tomando diferentes aproximaciones, algebraica [30], numérica [19] o geométricamente [135].

### **3.5.3 Relación entre sistemas screw y el twist-wrench**

Un screw que representa el movimiento instantáneo de un cuerpo con respecto a una referencia se ha llamado twist. Una articulación rotacional es representada por un twist de paso cero. Ahora bien, si se consideran dos eslabones unidos a través de una cadena cinemática serial -CCS- o cadena cinemática paralela -CCP- como se aprecia en la figura 3.10, sin perder generalidad y asumiendo que la cadena cinemática está formada por articulaciones rotacionales o traslacionales, donde cada articulación tiene un eje de movimiento linealmente independiente de las demás articulaciones, el movimiento instantáneo del eslabón móvil resulta de la combinación lineal de todos los ejes de movimiento. En otras palabras el movimiento instantáneo relativo entre

## Teoría de Screws

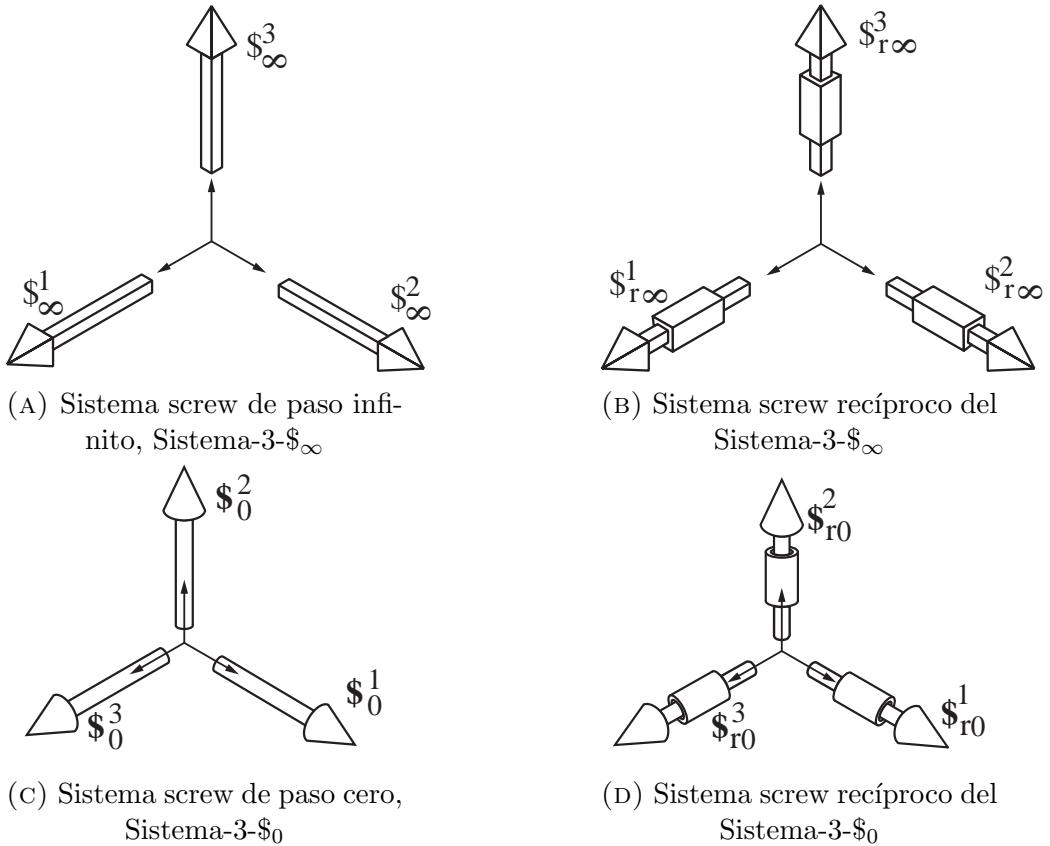


FIGURA 3.9: Sistemas screw y sus reciprocos

dos eslabones es representado por un sistema screw al cual se denomina **sistema twist**.

Por otro lado cada articulación rotacional o translacional tiene un conjunto de restricciones, cinco en particular, que son representadas por un sistema screw recíproco. La intersección de todas las restricciones de cada una de las articulaciones da como resultado el conjunto de restricciones entre el eslabón móvil y el eslabón fijo. Este conjunto de restricciones es establecido por la unión entre los dos cuerpos a través de una cadena cinemática, bien sea serial o paralela, y se le conoce como **sistema wrench** de la cadena cinemática -CC- y corresponde al recíproco del sistema twist de la CC.

Los GDL denotados por  $F$  de una cadena cinemática están directamente ligados con el sistema twist representado como sistema- $\mathcal{M}$  donde  $\mathcal{M} \leq F$ . El sistema wrench de una cadena cinemática es un sistema- $\mathcal{C}$ , donde  $\mathcal{C} = 6 - \mathcal{M}$  es el conjunto de todas las restricciones independientes entre el eslabón de referencia y el eslabón móvil.

## Teoría de Screws

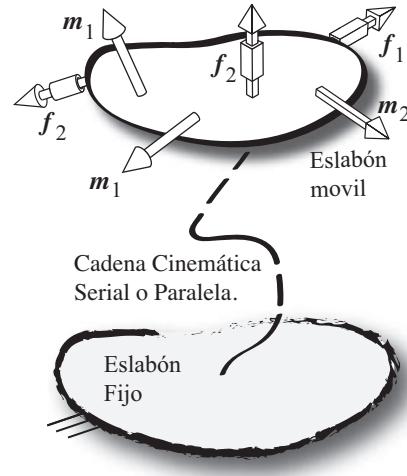


FIGURA 3.10: Sistema twist y wrench de una cadena cinemática, serial o paralela.

El sistema twist descrito por  $\mathcal{T}$  y según la figura 3.10 está formado por los twist  $\{m_1, m_3, m_3\}$ . El sistema wrench  $\mathcal{W}$  está formado por los wrench  $\{f_1, f_2, f_3\}$ .

Considerando la relación de reciprocidad dada en la ecuación (3.22) y aplicándola entre los sistema twist y wrench se logran establecer las siguientes afirmaciones:

- El eje de un twist de paso cero  $m_0$  es coplanar con el eje de cualquier wrench de paso cero  $f_0$ .
- El eje de un twist de paso cero  $m_0$  es perpendicular a la dirección de cualquier wrench de paso infinito  $f_\infty$ .
- La dirección de un twist  $m_\infty$  es perpendicular al eje de cualquier wrench  $f_0$ .

# Capítulo 4

## PARÁMETROS ESTRUCTURALES

### 4.1 Definiciones generales

A partir de la teoría de transformaciones lineales para cadenas cinemáticas, en la que se asume que cualquier cadena cinemática permite relacionar a través de una transformación lineal, el espacio de las velocidades articulares con el espacio de las velocidades operacionales, se han definido los principales parámetros usados en la síntesis de estructural de los PMs: Movilidad, Conectividad, Redundancia y Grado de sobre restricción.

Suele suceder que para el análisis de un PM se parte del cálculo de los parámetros de movilidad y conectividad, y posteriormente se pueden hallar fácilmente los demás parámetros estructurales.

### 4.2 Movilidad

*Es el número de coordenadas independientes necesarias para definir la configuración de una cadena cinemática o mecanismo [43].*

La movilidad se ha convertido en el principal parámetro de descripción estructural de un mecanismo y también en uno de los conceptos fundamentales en el análisis cinemático y dinámico para la modelación y diseño de mecanismos, expresa una relación explícita entre los movimientos y los parámetros estructurales del mecanismo.

## *Parámetros Estructurales*

Existen dos formas de determinar la movilidad de un mecanismo, usualmente es fácil de determinar por simple inspección para mecanismos de baja complejidad; en contraste se debe establecer el conjunto de ecuaciones que permiten calcular la movilidad instantánea de los mecanismos en una posición específica dada.

Desde el punto de vista geométrico la movilidad representa el número de parámetros independientes (de articulaciones) necesarios para definir la configuración del mecanismo. Desde el punto de vista cinemático la movilidad representa el numero de desplazamientos infinitesimales independientes (velocidades articulares) necesarios para definir cualquier desplazamiento infinitesimal (velocidades del espacio operacional). De acuerdo con lo anterior la movilidad puede ser instantánea  ${}^i\mathbf{M}$  o general  $\mathbf{M}$ , la primera está determinada para una posición dada  $i$  del mecanismo, mientras que la movilidad general esta dada por el mínimo valor de todas las movilidades instantáneas (ecuación (4.1)).

$$\mathbf{M} = \min({}^i\mathbf{M}). \quad (4.1)$$

Considerando la movilidad instantánea, un mecanismo puede tener infinito número de posiciones y por tanto un valor de movilidad para cada posición, por lo que resulta imposible determinar un único valor verdadero para esta.

resumiendo:

- La movilidad global considera el mecanismo general, por lo que solo puede tener un valor que caracteriza el mecanismo en todas las configuraciones excepto en las singulares. La fórmula aplicada es sólo una relación explícita entre los parámetros estructurales del mecanismo: el número de eslabones, articulaciones, los parámetros de restricción de movimiento de las articulaciones, entre otro. Actualmente esta fórmula presenta fallas al ser aplicada en mecanismos multilazo.
- La movilidad instantánea caracteriza el mecanismo en una configuración dada, incluyendo las configuraciones singulares. Es necesario resaltar que en una configuración singular el valor de la movilidad instantánea puede ser diferente al valor de la movilidad global. En este caso la información se obtiene de los análisis de posición y velocidad, expresados en ecuaciones cerradas donde es

## *Parámetros Estructurales*

necesario determinar la dependencia y por tanto, las ecuaciones de restricción.

Los métodos propuestos en la literatura para el cálculo de la movilidad se ubican en dos categorías:

1. Aproximación basada en la configuración de las ecuaciones de restricción, para cálculo del rango para una posición dada del mecanismo, es decir, con una ubicación específica de las articulaciones.
2. Aproximación general para un rápido cálculo de la movilidad, sin la necesidad de desarrollar un conjunto de ecuaciones de restricción.

En la aproximación mediante la configuración de las ecuaciones de restricción, usualmente las ecuaciones deben ser analizadas por dependencia, ya que no se puede encontrar información de la movilidad del mecanismo sin el cálculo de la posición y la velocidad, o haciendo un análisis estático mediante herramientas analíticas (screws, álgebra lineal, geometría relacionada, álgebra de Lie, entre otras).

Antes de adentrarse en los métodos y el análisis de Movilidad para robots paralelos se debe proceder con una consideración si no de todos, si de los métodos que han sido más usados o ecuaciones para determinar la movilidad y las fallas que poseen (Tabla 4.1), debido a que se suele considerar que los mecanismos poseen fallas estructurales porque no se ajustan al resultado de muchas, incluso de todas las ecuaciones para determinar la movilidad global y pocos realizan un cálculo completo haciendo uso de las ecuaciones cinemáticas o incluso el jacobiano, que únicamente aplica para una configuración específica.

### **4.2.1 Fórmula de movilidad CGK (Chebychev, Grubler y Kutzbach)**

La fórmula más conocida puede ser agrupada en la CGK y en la extensión de la misma propuesta por Voinea, Atanasi y Manafu. A pesar de su uso, dichas ecuaciones tampoco logran cubrir todos los mecanismos, generando límites y condiciones para su aplicación.

La fórmula original de movilidad  $M$  para un mecanismo con  $q \geq 1$  lazos independiente con el mismo parámetro de movimiento  $b$  para cada lazo es expresada en

TABLA 4.1: Ecuaciones de Movilidad

Nombre	Ecuacion	observaciones
Chebychev	$3n - 2(p_0 + p_n) = 1$ $M = 3n - 2(p_0 + p_n)$	La fórmula esta limitada a mecanismos planares (donde los ejes de las juntas revolutas son paralelas y perpendiculares a el plano que contiene las direcciones de los pares prismáticos).
Grübler	$5h - 6m + 7 = 0$	Incluyó el cálculo de mecanismos espaciales complejos con juntas helicoidales ( $h$ ).
Hochman	$b(m - 1) - C = 1$ $C = \sum_{i=1}^{b-1} iC_i^b$ $f = \sum_{i=1}^{b-1} iF_i^b$ $M = b(p - q) - C$	Propuso la relación $m + q - p = 1$ , y marcó la diferencia entre grado des restricción de una junta en un espacio con dimensión $b$ y el grado de una junta en un espacio con dimensión $b = 6$ .
Kutzbach	$M = (6 - d)(m - 1) - \sum_{i=1}^p (6 - d - f_i)$ $C = \sum_{i=1}^p (6 - d - f_i)$	Para un particular caso de la ecuación de Hochman, considerado en un inicio aplicable a todos los mecanismos con $d$ igual para todos los lazos independientes.
Moroskine	$M = F - r$ $M = \sum_{i=1}^5 iC_i - r$	Las fórmulas son válidas sin excepción, pero estas fórmulas siguen un rápido cálculo de la movilidad únicamente cuando se han desarrollado las ecuaciones cinemáticas y se ha encontrado su rango.
Gronowicz	$M = \sum_{i=1}^q M_i - \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=i+1}^q F_{ij}$	Ecuación que deriva de otras ecuaciones no citadas aquí, como son la de Manafu, Manolescu y Dovrodolsky donde $M_i$ es la movilidad del lazo y $F_{ij}$ es la movilidad del mecanismo que surge de conectar los lazos $i$ y $j$ .
Angeles y Gosselin	$M = \text{nulidad}(J)$ $rango(J) +$ $\text{nulidad}(J) =$ $\dim(\mathbf{V})$ donde: $r = rango(J)$ $N = \dim(\mathbf{V})$	Centrados en el problema de encontrar la movilidad en mecanismos sobrerestringidos y usando el jacobiano, que entrega información sobre la movilidad de una cadena cinemática. También es válido sin excepción pero necesita el desarrollo de las ecuaciones cinemáticas y el cálculo de la nulidad de la matriz jacobiana.
Tsai	$M = b(m - p - l) + \sum_{i=1}^p f_i - f_p$	Propuso substraer el numero de grados de libertad pasivos $f_p$ , pero presenta los errores encontrados par el caso $f_p = 0$ .

## Parámetros Estructurales

la ecuación 4.2, donde el primer término representa el número de parámetros independientes de movimiento de las articulaciones antes de cerrar el lazo, y el segundo termino corresponde al numero de parámetros de las articulaciones que pierden su independencia después de cerrar los  $q$  lazos, lo que proporciona nuevas restricciones.

$$M = \sum_{r=1}^p (f_i - qb) \quad (4.2)$$

Varias expresiones para la fórmula de movilidad CGK han sido reportadas en la literatura, y otras pueden ser obtenidas a partir de la ecuación 4.2 tomando en consideración la fórmula de Euler y valores particulares de  $b$  (3 para mecanismos planares y 6 para mecanismos espaciales), o la relación entre:

- El grado de movilidad  $f$  y el grado de restricciones de  $f$  de una junta.

$$c = 6 - f. \quad (4.3)$$

- El parámetro de movimiento  $b$  y el parámetro de restricciones del mecanismo.

$$d = 6 - b. \quad (4.4)$$

- El numero total de eslabones  $n$  y el número total de eslabones incluyendo la base fija.

$$n = m - 1. \quad (4.5)$$

### 4.2.2 Análisis de las ecuaciones de restricción

Para analizar la movilidad de un mecanismo utilizando la formula de CGK basta con representar el mecanismo con un grafo, caso que no agrupa los mecanismos del tipo multilazo ya que no es posible determinar correctamente el numero de lazos independientes del mecanismo ( $q$ ) y la espacialidad ( $b$ ), debido en parte a que el parámetro  $q$  implica únicamente la independencia estructural en el análisis de grafos, sin embargo, cuando se refiere a mecanismos no solo están presentes las conexiones entre grafos, sino que también existen relaciones geométricas y/o cinemáticas entre las conexiones (articulaciones) y nodos (eslabones), que no son apreciables en dicha representación y por tanto no son consideradas en el análisis.

## *Parámetros Estructurales*

En el caso general para un mecanismo multilazo donde existen  $q$  lazos cerrados estructuralmente independientes no implica que existan lazos cinematicamente independientes.

Partiendo de la fórmula para  $CGK$  (ecuación (4.2)), se asume que todos los lazos de un mecanismo, cuando se cumple  $q \geq 1$ , tienen el mismo parámetro de movimiento, idea no generalizable, ya que el parámetro  $b$ , introducido por Somov en 1887 [105], y que caracteriza el espacio de movimiento puede ser diferente.

Es necesario mencionar el concepto de familia de mecanismos introducido por Drovolsky en 1949 para determinar el parámetro  $b$ , mediante el que pretende agrupar los mecanismos en familias considerando la dimensión del espacio de restricciones (ecuación (4.4))

De esta forma, en la literatura asociada al estudio de los mecanismos existen varias metodologías para determinar el valor instantáneo del parámetro  $b$ , incluso recibe distintos nombres de acuerdo al autor.

En la ecuación (4.4), se parte de la consideración de que un mecanismo libre se mueve en un espacio de 6 dimensiones y por tanto cuando se introducen 6 restricciones se suprime cada uno de los componentes de movimiento del mecanismo en dicho espacio, de esta forma se obtiene el parámetro de restricción  $d$ , o número general de restricciones del mecanismo. Varios autores han propuesto diferentes formas de la misma ecuación partiendo de la formula de Euler, y considerando si los mecanismos espaciales son de tipo planar o esférico, por lo que el valor de las dimensiones del espacio puede cambiar entre 3 o 6 respectivamente, como ya se mencionó, y algunas ya reportadas en las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.3).

- El grado de movilidad y el grado de restricción de  $c$ , de una articulación de acuerdo a la ecuación (4.3).

A partir de dichas suposiciones se han planteado múltiples fórmulas para el cálculo de la movilidad en diversos mecanismos, pero ninguna que logre agrupar el comportamiento de todos los mecanismos encontrados en la literatura, cuando se trata del cálculo rápido de la movilidad global.

## Parámetros Estructurales

Otro problema es que algunos mecanismos cuyo valor de movilidad ha sido encontrado de forma práctica o analítica aún no coinciden con las fórmulas planteadas. Entre estos mecanismos conocidos como paradójicos se encuentran los descritos en la tabla 4.2.

TABLA 4.2: Mecanismos Paradójicos

Nombre	Descripción
Bricard 1927	mecanismos paradójicos
Herve 1978, 1999	cadenas paradójicas
Norton 1999	cadenas paradójicas
Myszka 2001	casos especiales
Mabie and Reinholtz 1987	excepciones
Eckhardt 1998	eslabones con paradoja entre los GDL prácticos y los computados
Phillips 1984, 1990	eslabones sobrerestringidos aun móviles
Kinzel 1999	eslabones con movilidad anómala
Clavel 1988, 1990	Robot delta
Herve y Sparacino 1992	Robot Star
Pierrot 1999	Robot H4
Wenget y Chablat 2000	Robot ortogonal
Kim y Tsai 2002	Robot CPM
Gosselin 2004	Tripteron

### 4.2.3 Fórmula CGK extendida

Claramente, considerar que todos los lazos independientes dentro de un mecanismo tienen el mismo parámetro de movilidad puede conducir a la obtención de resultados erróneos. Bajo este análisis a mediados del siglo XX Voinea y Atanasiva [196] y Manolejiv y Manato en 1963 propusieron incluir parámetros diferentes de movilidad que deben ser sumados para cada lazo cerrado como se expresa en las ecuaciones 4.6 y 4.7.

$$M = \sum_{i=1}^p f_i - \sum_{k=1}^q b_k \quad (4.6)$$

$$M = \sum_{i=1}^q M_i - M_c \quad (4.7)$$

De acuerdo con la ecuación 4.7 es posible obtener diferentes resultados en mecanismos multilazo, dependiendo de los lazos cerrados que se consideren, razón por la que los autores proponen determinar la movilidad del mecanismo.

#### 4.2.4 Alcance de la CGK

De forma intuitiva, al considerar un mecanismo paralelo con  $p$  articulaciones y  $q$  lazos cerrados, donde  $q \geq 1$  y cada articulación  $i$  introduce  $f_i$  parámetros de movimiento independientes, y de acuerdo a la ecuación 4.2, donde el primer término indica que el número mínimo de parámetros o coordenadas independientes necesarios para definir la configuración de un mecanismo con lazos cerrados, esta dado, por el número de parámetros de movimiento de las articulaciones considerando el lazo abierto, y el número  $r$  de parámetros de cada articulación que pierden su independencia luego de cerrar los lazos, la ecuación 4.2 puede ser reescrita como se presenta en la ecuación (4.8), para cumplirse de manera general y sin excepciones.

$$M = \sum_{i=1}^p f_i - r \quad (4.8)$$

Se puede concluir que las fórmulas de CKG para cálculo de la movilidad en mecanismos multilazo ,son aplicables a los mecanismos que tienen el rango  $r$  equivalente a la suma de parámetros de movimiento  $b_i$ , asociados con los  $q$  lazos cerrados independientes cuando otros lazos son cerrados (ecuación (4.9)):

$$r = \sum_{i=1}^q b_i \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) provee un criterio simple sobre el cual decidir la aplicabilidad de la ecuación (4.2).

Una vez obtenida la ecuación (4.8), el problema se redirecciona en encontrar un método general para determinar el parámetro  $r$ .

A mediados del siglo XX, Moroskine (1954) propone un método para determinar el número de parámetros de movimiento que se restringe al cierre de los lazos independientes a través del cálculo del rango del conjunto de ecuaciones de movimiento.

### 4.3 Método de Calculo para la Movilidad general

A continuación se describe un el método propuesto por Gogu en 2008 [41] para determinar la movilidad general. Sin embargo se puede demostrar que en cadenas simples abiertas la movilidad instantánea corresponde a la misma movilidad general y para el caso de cadenas abiertas complejas la movilidad general cumple que  $\mathbf{M} \leq^i \mathbf{M}$ .

De forma intuitiva el análisis de la movilidad de un mecanismo con  $p$  articulaciones y con  $q \geq 1$  lazos cerrados, donde cada lazo es estructuralmente independiente, esta dada por el número total de parámetros de movimiento independientes de las articulaciones, considerando todos los lazos abiertos, menos los  $r$  parámetros de articulación que pierden independencia luego de cerrar todos los lazos. Sin perder generalidad la ecuación (4.10) se obtiene partiendo de la consideración de que la articulación  $i$  tiene  $f_i$  grados de libertad o movimiento relativo permitido por la articulación (conectividad), debidos a  $f_i$  parámetros de movimiento independientes antes de considerar cualquier restricción, y que cuando se cierran los lazos algunos parámetros  $r$  de movimiento de las articulaciones pierden su independencia.

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^p f_i - r \quad (4.10)$$

En el mismo trabajo en el que Moroskine propone la ecuación (4.10), indica que el parámetro  $r$  puede ser determinado al encontrar el rango del conjunto lineal homogéneo de ecuaciones de restricción de un mecanismo.

## Parámetros Estructurales

Una consecuencia directa de la ecuación de movilidad es que el primer término debe ser mayor que el segundo para que sistema articulado sea un mecanismo con movimiento y no una estructura.

Del análisis cinemático de mecanismos con múltiples cuerpos, y sin perder generalidad, se pueden relacionar las velocidades de las articulaciones con las velocidades desarrolladas por el extremo en una cadena cinemática abierta mediante una transformación lineal. De esta forma, el conjunto de velocidades de las articulaciones forman el espacio vectorial de las velocidades articulares denominado, espacio vectorial  $U$ ; así mismo el conjunto de velocidades del extremo de la cadena forma el espacio de las velocidades operacionales o de la tarea, denominado espacio vectorial  $W$ . Estos dos espacios son espacios de dimensión finita. La transformación lineal es descrita por una matriz de transformación, conocida comúnmente como matriz jacobiana. La transformación se expresa como se menciona en la ecuación 4.12:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : & U \rightarrow W \\ \dot{\mathbf{q}} &\mapsto \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

La matriz que expresa la transformación lineal es denotada por  $\mathbf{J}_{6 \times N}$ , donde  $N$  es la suma de todas las conectividades  $f_i$  de todas las  $p$  articulaciones presentes en el mecanismo, ésto es  $N = \sum_{i=1}^P f_i$ . en la ecuación (4.12) La transformación  $\mathbf{F}$  es una multiplicación del vector de velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  (donde  $\dot{\mathbf{q}} \in U$ ) por la matriz jacobiana y da como resultado un único vector  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$  que pertenece al espacio  $W$ .

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{J}_{6 \times N} \dot{\mathbf{q}} \tag{4.12}$$

El vector  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$  en la ecuación (4.12) es la imagen en  $W$  del vector  $\dot{\mathbf{q}}$  definido en  $U$  bajo la transformación  $\mathbf{F}$ . La imagen de  $U$  en  $W$  representa el rango de  $\mathbf{F}$ , denotado por  $R_F$ , que es el mismo espacio operacional.

Como se ha mencionado el operador de la transformación lineal es una matrix,  $\mathbf{J}_{6 \times N}$ , de la cual se pueden analizar varias características de la transformación,

## Parámetros Estructurales

dominio, nulidad, y rango donde se obtiene que:

$$\dim(U) = N = \sum_{i=1}^P f_i \quad (4.13)$$

$$\dim(R_F) = \text{rank}(F) = \text{rank}(\mathbf{J}_{6 \times N}) \quad (4.14)$$

Obviamente en los espacios vectoriales articular y operacional está el vector nulo,  $\mathbf{0}_U$  y  $\mathbf{0}_W$  respectivamente. La imagen inversa de  $\mathbf{0}_W$  en  $U$  es el espacio nulo o núcleo de  $K_F$  de la transformacion  $\mathbf{F}$ .

$$K_F = \{\dot{\mathbf{q}} \in U | \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}_W\} \quad (4.15)$$

por tanto la nulidad de  $\mathbf{F}$  es la dimensión del núcleo de  $\mathbf{F}$ , es decir:

$$\dim(K_F) = \text{nulidad}(\mathbf{F})$$

$$\dim(K_F) = \text{nulidad}(\mathbf{J}_{6 \times N})$$

Como transformación matricial  $\mathbf{F}$ , dada por la matriz  $\mathbf{J}_{6 \times N}$  se afirma que:

$$\dim(R_F) + \dim(K_F) = \dim(U) \quad (4.16)$$

$$\text{rango}(\mathbf{J}_{6 \times N}) + \text{nulidad}(\mathbf{J}_{6 \times N}) = \dim(U) \quad (4.17)$$

Considerando cadena cinemáticas cerradas con  $N$  GDL en cada una de las  $p$  articulaciones, y con  $q$  lazos independientes, un lazo se puede obtener cerrando dos cadenas abiertas, con lo cual se forman  $q$  ecuaciones de lazo cerrado, lo que implica que la transformación de cada una de las cadenas  $\mathbf{F}$  luego de organizarlas se convierten en transformaciones homogéneas  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$ .

Así mismo para mecanismo simples ( $q = 1$ ) o complejos ( $q \geq 1$ ) el número de parámetros de articulación que pierden su independencia luego de cerrar los lazos, es decir luego de establecer la ecuaciones de restricción esta dado por la ecuación 4.18

$$r = \dim R_f = \text{rango}(F) = \text{rango}(\mathbf{J}_{6q \times N}) \quad (4.18)$$

## 4.4 conectividad S

*En un mecanismo la conectividad entre dos eslabones está representada por el número de parámetros independientes finito-infinitesimales permitidos por el mecanismo entre los dos eslabones. [43]*

La conectividad es vista como la relación de movimiento que existe entre dos eslabones de un mecanismo. Se distinguen dos tipos conectividad una general y otra instantánea y al igual que la movilidad es necesario definir su naturaleza; La conectividad instantánea  $\dot{\mathbf{S}}$  indica la conectividad de la cadena cinemática para una posición  $i$  definida; la conectividad general  $\mathbf{S}$  es el máximo valor de la conectividad instantánea. Por otro lado, una cadena cinemática tiene un infinito número de posiciones y por consiguiente un número infinito de conectividades lo que implica que es imposible determinar de forma analítica la conectividad de una cadena, bajo esta condición. Sin embargo a continuación se presenta un método para determinar la conectividad general sin necesidad de calcular la conectividad instantánea.

Considerando un mecanismo general  $\Gamma$  que puede ser simple o complejo, cerrado o abierto; la conectividad  $S_{a/b}^{\Gamma}$  desde el punto de vista geométrico, entre dos eslabones  $a$  y  $b$  que pertenecen al mecanismo  $\Gamma$ , representa el número de desplazamientos finitos independientes entre los dos eslabones permitidos por el mecanismo. Desde el punto de vista cinemático la conectividad  $S_{a/b}^{\Gamma}$  entre dos eslabones esta dada por la dimensión del espacio vectorial  $R_{a/b}^{\Gamma}$  formado por las velocidades relativas entre los dos eslabones del mecanismo  $\Gamma$ , esto es:

$$S_{a/b}^{\Gamma} = \dim R_{a/b}^{\Gamma}. \quad (4.19)$$

## 4.5 Número de sobrerestricciones

El número de sobrerestricciones de un mecanismo esta dado por la diferencia entre el número máximo de parámetros cinemáticos de una articulación que pueden perder su independencia cuando se encuentra en configuracion de lazo cerrado y el número de parámetros cinemáticos que efectivamente pierden su independencia cuando se cierra el lazo.

## 4.6 Redundancia Estructural

La redundancia estructural de una cadena representa la diferencia entre la movilidad de la cadena y la conectividad para los eslabones distales, es decir, entre el eslabón base y el efecto final.

$$T = M - S. \quad (4.20)$$

De la misma manera en la que se definen la movilidad y la conectividad, la redundancia puede ser calculada desde un punto de vista instantáneo o general.

## 4.7 Movilidad y Conectividad en Robots Paralelos

Para un Robot paralelo en general  $\mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  representa el número de ramas o patas totales que posee incluyendo tanto las extremidades simples  $\mathbf{k}_1$  como las extremidades complejas  $\mathbf{k}_2$ ; se define la movilidad como el espacio vectorial operacional del eslabón o efecto final respecto a un eslabón de referencia o eslabón base.

La movilidad de un robot paralelo dado se representa como  $\mathbf{R}_F$  y hace visible la relación de movimientos entre la plataforma móvil del robot que corresponde al último eslabón o efecto final ( $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_{G1}$ ) y la plataforma de referencia ( $\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}_{G1}$ ).

Matemáticamente se puede definir la movilidad de un robot como la intersección de los espacios de movimiento ( $\mathbf{R}_{Gi}$ ) dados por cada uno de las patas o lazos seriales independiente que lo componen, como se especifica en la ecuación 4.21.

$$R_F = (R_{G1} \bigcap R_{G1} \bigcap R_{G1} \bigcap \dots \bigcap R_{Gk}). \quad (4.21)$$

En cuanto a la conectividad del Robot  $\mathbf{S}_F$ , esta define el numero de movimientos independientes entre los eslabones de referencia y el efecto final.

Como se ha definido en capítulos anteriores, los robots paralelos pueden clasificarse de acuerdo al tipo de cadenas cinemáticas que lo conforman y de la misma forma puede trasladarse su análisis al análisis de dicho tipo de cadenas cinemáticas. De esta forma, se procede con la descripción matemática de los tipos de Robots Paralelos y posteriormente con el análisis de movilidad y conectividad de las cadenas cinemáticas asociadas a los mismos, finalizando con la proposición de una metodología y ejemplos de aplicación de la misma.

#### **4.7.1 Robots Paralelos de Lazos Simples**

Un robot serial ( $\mathbf{F} = \mathbf{G}_1$ ) es una cadena cinemática  $\mathbf{G}_i(\mathbf{1}_{G_i} - \dots \mathbf{n}_{G_i})$  donde el eslabón de análisis  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{G_i}$  es conectado mediante una cadena cinemática serial abierta simple al eslabón base que cumple con  $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{G_1} = \mathbf{0}$ , por lo tanto el numero de ramas complejas es nulo  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$  y el numero de ramas simples es uno  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{1}$ .

#### **4.7.2 Robots Paralelos de Cadenas Simples**

Básicamente se puede definir como un mecanismo complejo compuesto por dos eslabones polinarios que corresponden al eslabón base o referencia y al eslabón final o efector, y varios eslabones binarios intermedios que conforman  $k$  cadenas simples abiertas  $\mathbf{A}$ .

Podría decirse, que este tipo de cadenas contienen al menos un eslabón ternario en el cual el eslabón final  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{G_i}$  es conectado al eslabón de referencia por  $k \geq 2$  cadenas. Este mecanismo tiene  $p$  articulaciones y  $k - 1$  lazos estructuralmente independientes concatenados en paralelo.

#### **4.7.3 Robots Paralelos de Cadenas Complejas**

Son mecanismos complejos cerrados integrados por más de dos eslabones polinarios, de los cuales dos corresponden al eslabón base y al eslabón de referencia y el o los demás se encuentran ubicados en una de las cadenas cinemáticas que

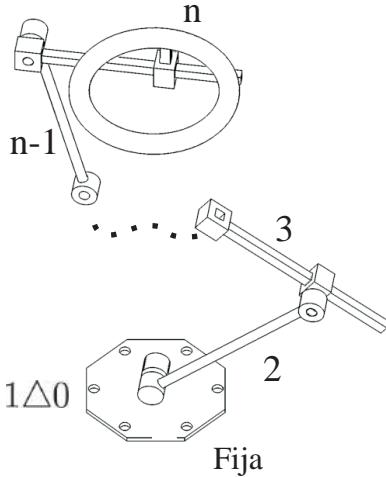


FIGURA 4.1: Cadena cinemática serial abierta simple

unen la base con el efecto final, formando una cadena compleja.

Poseen  $p$  articulaciones y la plataforma móvil se encuentra conectada con la de referencia mínimo por dos ramas de las cuales al menos una de ellas es compleja, es decir, la rama contiene mínimo un lazo cerrado, en esta caso las ramas complejas son superiores a cero  $k_2 \neq 0$ .

#### 4.7.4 Mecanismo serial abierto simple

El primer tipo de mecanismo es el formados por eslabones y articulaciones de un grado de libertad, asumiendo que una articulación superior o con varios grados de libertad puede ser simplificada como un arreglo de articulaciones de un grado de libertad, es la cadena cinemática serial abierta simple denotada por  $A(1 - 2 - \dots - n)$ , que posee  $n$  eslabones y  $p$  articulaciones, y donde el primer elemento es el de referencia que puedes ser fijo o móvil. Los eslabones intermedios de la cadena son todos binarios, y los eslabones extremos son monarios (figura 4.1). Por ser una cadena abierta no existen restricciones que incluyan perdida de independencia de los parámetros de movimiento de las articulaciones.

En el caso de una cadena serial abierta existe la relación dada por la ecuación 4.22 donde  $J$  es el Jacobiano asociado a la cadena y permite transformar las

## Parámetros Estructurales

velocidades lineales  $\mathbf{v}$  del eslabón  $\mathbf{n}$  y las velocidades angulares  $\mathbf{w}$  en velocidades articulares.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.22)$$

Para llevarlo al caso general, es necesario definir el espacio vectorial de las velocidades articulares  $\mathbf{U}_{Gi}$  y el espacio vectorial de las velocidades operacionales de la cadena serial  $\mathbf{R}_{Gi}$ , necesario para determinar las restricciones cuando en robots paralelos no se hace una detención en el análisis de las cadenas seriales sino de cadenas debidas al cierre de lazos. En este caso solo se hace un ejercicio de desconexión de la plataforma móvil.

Del análisis de cadenas seriales abiertas simples, donde hay  $n$  eslabones que son conectados por  $p$  articulaciones, todas ellas de un grado de libertad, la transformación lineal que relaciona las velocidades del espacio articular con las velocidades del espacio operacional  $\mathbf{F}_A$  es dada por la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$  (ecuacion (4.22)), donde  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidad lineal y  $\mathbf{w}$  el vector de velocidad angular del eslabón  $\mathbf{n}$ ; y el vector de velocidades relativas de las articulaciones del mecanismo es dado por  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Considerando las transformaciones lineales y los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , se infiere que éstos forman el espacio vectorial  $\mathbf{R}_{n/1}^A$ , que es el espacio operacional de la cadena abierta simple y:

$$\dim(\mathbf{R}_{n/1}^A) = \dim(\mathbf{R}_A) \quad (4.23)$$

La movilidad de una cadena cinemática serial abierta simple  $A$  con  $p$  articulaciones es dada por la dimensión del espacio articular, que es una consecuencia directa de la aplicación de las ecuaciones (4.10) y (4.14) y por tanto se tiene:

$$M_{CA} = \dim(U_{AC}) = \sum_{i=1}^p f_i. \quad (4.24)$$

La conectividad de una cadena serial abierta simple  $A(1 - 2 \dots - n)$  esta

## Parámetros Estructurales

dada por la dimensión de su espacio operacional, y el rango de la transformación lineal  $\mathbf{F}_A$  considerando la ecuación (4.12), esta dado por la dimensión de la matriz Jacobiana asociada con la cadena  $\mathbf{A}$ :

$$S_A = \dim(R_A) = \text{rango}(\mathbf{J}_A). \quad (4.25)$$

La conectividad indica el número de velocidades independientes del eslabón final con respecto al eslabón de referencia. Claramente  $S_A$  depende de la configuración geométrica de la cadena pues es función de los valores articulares de posición y de los parámetros geométricos de los eslabones, como distancia y ángulo de torsión de los eslabones.

Una cadena serial abierta -CA- puede ser obtenida por la concatenación de dos cadenas seriales,  $A_1(1 - 2 - \dots - i)$  y  $CA_2(i - \dots - n)$  cada una con su propio subespacio de movimiento articular  $U_{A1}$  y  $U_{A2}$  y su propio subespacio operacional  $R_{CA1}$  y  $R_{A2}$ . La cadena serial resultante  $A = A_1 - A_2$ , tiene su propio espacio de velocidades articulares  $U_A$  y su propio espacio operacional  $R_{A \equiv A_1 - A_2}$ .

Así mismo el espacio de las velocidades articulares o espacio articular puede ser visto como un espacio producto, donde cada componente es el espacio de la velocidad de la  $i$ -ésima articulación  $\mathbf{U}_i$ , que une los eslabones  $i - 1$  e  $i$ , para las  $p$  articulaciones. De esta manera se puede deducir que la intersección de los subespacios  $U_{A1}$  y  $U_{A2}$ , es el vector nulo del espacio operacional  $\mathbf{U}_A$ .

A partir del enfoque cinemático la movilidad de una cadena abierta  $A(1 - 2 - \dots - n)$  representa el número de desplazamientos infinitesimales entre el eslabón  $n$  y el eslabón 1 de la cadena. La movilidad de la cadena serial  $\mathbf{A}$  esta dada por la dimensión de su espacio articular (ecuación 4.26):

$$M_A = \dim(U_A) = \sum_{i=1}^p f_i. \quad (4.26)$$

La conectividad que representa el número de parámetros que corresponden a los desplazamientos independientes entre los eslabones  $n$  y  $1$ , esta dada por el rango de la matriz jacobiana de la transformación lineal asociada con la

## Parámetros Estructurales

cadena  $\mathbf{A}$  (4.27) y siempre será menor o igual al valor de Movilidad asociado a la cadena  $S_A \leq M_A$

$$S_A = \text{rank}(J_A). \quad (4.27)$$

Desde el punto de vista geométrico la conectividad  $S$  de una CA formada por  $n$  eslabones, denotada por  $CA(1 - 2 - \dots - n)$  donde el eslabón 1 es el primero y el eslabón  $n$  es el último, es el número de desplazamientos finitos que existen entre el eslabón  $n$  y el eslabón 1.

Para una cadena cinemaática simple la conectividad general es mayor o igual que la conectividad instantanea.

En cuanto a la redundancia estructural en una cadena cinemática abierta, corresponde a la diferencia entre la dimensión del espacio articular y el espacio operacional (ecuación 4.28).

$$T_A = M_A - S_A, \quad (4.28)$$

que también puede ser calculada como la dimensión del espacio nulo de la transformación lineal asociada al robot de la cadena  $\mathbf{A}$  ( $T_A = \dim(\mathbf{K}_{F(A)})$ ) que no es otra cosa que la nulidad de la transformación asociada al robot, es decir, del jacobiano de la cadena  $T_A = \text{nullity}(F_A) = \text{nullity}(J_A)$ .

### 4.7.5 Mecanismos de lazo cerrado

Para obtener una cadena de lazo simple a partir de cadenas seriales se puede proceder de dos formas diferentes:

- Uniendo el eslabón final  $n + 1$ . con el eslabón de referencia en una cadena serial abierta  $\mathbf{A}(1 - 2 - 3..n - (n + 1))$ , donde se obtiene la cadena de la forma  $\mathbf{A}(1 - 2 - 3..n - (n + 1) - 1$ . Por inspección se puede concluir que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

## Parámetros Estructurales

- La segunda forma consiste en la concatenación de dos cadenas abiertas seriadas  $\mathbf{A}_1(1_{A1} - 2_{A1}..n_{A1})$  y  $\mathbf{A}_2(1_{A2} - 2_{A2}..n_{A2})$  de donde se obtiene la cadena  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = (1_{A1} - 2_{A1} - ..n_{A1} \equiv n_{A2} - ,2_{A2} - 2_{A1} - 1_{A1})$ , el punto de conexión se conoce como  $\mathbf{H}$ , y se puede concluir que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_{A1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}_{A2}. \quad (4.30)$$

Recíprocamente, cualquier cadena cinemática de lazo cerrado con  $n$  eslabones puede ser asociada con una cadena abierta mediante el fraccionamiento de uno de los eslabones:

- Con una CA  $\mathbf{A}$  que tiene  $n + 1$  eslabones  $\mathbf{A}(1 - 2..n - (n + 1))$ , donde se considera el fraccionamiento del eslabón de referencia que continua siendo el eslabón  $1$  y además el eslabón  $n + 1$ .
- Con dos cadenas cinemáticas abiertas simples, cada una con  $n + 2$  eslabones, debido a la separación virtual de los eslabones de referencia y el efecto final,  $\mathbf{A}_1(1_{A1} - 2_{A1}..n_{A1})$  y  $\mathbf{A}_2(1_{A2} - 2_{A2}..n_{A2})$ .

Para cada una de estas cadenas se puede realizar un análisis de espacio de movimiento, movilidad y conectividad de acuerdo a las definiciones hechas en la sección previa.

La movilidad de un mecanismo de lazo cerrado con  $p$  articulaciones y un solo lazo cerrado, esta dada por la diferencia entre el número de parámetros independientes de las articulaciones mediante el análisis de la cadena abierta asociada, y el número de parámetros de articulaciones que pierden independencia una vez que la cadena abierta se lleva a una configuración de lazo cerrado (ecuación 4.31):

$$M_B = \sum_{i=1}^p f_i - r_B, \quad (4.31)$$

donde la cadena cerrada  $\mathbf{B}$  corresponde a una de las cadenas abiertas asociadas  $\mathbf{A}(1 - 2..n - (n + 1))$  con espacio vectorial de velocidades  $\mathbf{R}_A$ , uniendo el eslabón final al eslabón de referencia  $\mathbf{B}(1 - 2 - 3..n - (n + 1) \equiv 1)$

## Parámetros Estructurales

Para una cadena cerrada que se obtiene de la concatenación de los eslabones **1** y **n** de una cadena abierta **A** con **n + 1** eslabones, la conectividad vista como el número de parámetros de articulación que pierden independencia en un lazo cerrado  $B(1 - 2 - 3..n - (n + 1) \equiv 1)$  esta dada por la conectividad de la cadena abierta asociada  $A(1 - 2 - 3..n - (n + 1))$ ,  $r_B = S_A$ , que a su vez corresponde a la dimensión del espacio operacional de la cadena abierta derivada  $r_B = \dim(R_A)$ , o lo que es lo mismo al rango de la transformación lineal.

Cuando el lazo cerrado se ha obtenido da partir del cierre de una cadena abierta desde su extremo con el eslabón de referencia, la movilidad esta dada por la diferencia entre la movilidad y la conectividad de la cadena simple abierta derivada del lazo cerrado  $M_B = M_A - S_A$ , que corresponde a la diferencia entre la dimensión del espacio operacional y el espacio articular de la cadena simple  $M_B = \dim(U_A) - \dim(R_A)$ , o lo que es lo mismo, al rango de la matriz jacobiana de la transformación lineal correspondiente.

En este caso la conectividad esta vista como el rango de la matriz jacobiana de la transformación lineal asociada con la cadena simple abierta **A** derivada de abrir el lazo **B**,  $r_B = \text{rank}(J_A)$ .

Para una cadena cerrada de lazo simple que se obtiene de la concatenación de los eslabones extremos de las cadenas abiertas simples **A<sub>1</sub>** y **A<sub>2</sub>**, la conectividad vista como el número de parámetros de articulación que pierden independencia en un lazo cerrado  $B(1 - 2 - 3..n - (n + 1) \equiv 1)$ , esta dada por la CA  $A(1_{A1} - 2_{A1} - 3_{A1}..n_{A1} \equiv n_{A2} - ,2_{A2} - 1_{A2} \equiv 1_{A1})$  y su conectividad asociada con el lazo cerrado **B**.

El cálculo se realiza a partir de la dimensión del espacio operacional que se obtiene de la cadena simple concatenada  $A = A_1 - A_2$  derivada de **B** (ecuación (4.32)).

$$r_B = \dim(R_{A1} + R_{A2}) = \dim(R_{A1}) + \dim(R_{A2} - \dim(R_{A1} \cap R_{A2})), \quad (4.32)$$

donde  $r_B = \text{rank}(J_{A \equiv A_1 - A_2})$ , es vista como el rango de la matriz jacobiana de la transformación lineal  $F(A_1 - A_2)$  asociada con la CA  $A$  derivada del lazo cerrado  $B$ .

## **4.8 Metodología para el análisis de parámetros estructurales de cadenas cinemáticas.**

Luego de realizar las definiciones de los parámetros estructurales de cadenas cinemáticas, abiertas, de lazo cerrado simple, multilazo simple y multilazo compleja, a continuación se presenta una metodología para determinar dichos parámetros, permitiendo mediante un método sistemático llegar a su determinación, sin someterse al juicio del robotista o diseñador. Para tal fin se propone utilizar el análisis cinemático de cadenas basado en coordenadas screw, y en la aproximación infinitesimal de movimiento para un cuerpo rígido.

Los movimientos de un mecanismo desde el punto de vista del espacio operacional están directamente ligados con los ejes de las articulaciones, bien sea rotacionales o prismáticas, y es ahí donde los screws adquieren gran importancia, debido, a su facilidad para describir el movimiento de una articulación. También es un hecho que el movimiento de una articulación no depende de donde se ubique el sistema de referencia, el movimiento sigue siendo el mismo, por tanto el análisis de mecanismos utilizando las coordenadas screw permite ubicar el sistema de coordenadas en el lugar que se desee sin peligro de modificar la naturaleza del movimiento de la articulación.

La otra herramienta que se integra y que se ha venido usando en este capítulo, parte del principio de las cadenas cinemáticas, en el que para cada lazo cerrado existen cadenas cinemáticas abiertas equivalentes asociadas al lazo, que pueden ser cerrada por el extremo, o dos cadenas abiertas que se concatenan por los dos extremos.

Entonces determinar los parámetros estructurales necesita primeramente de la transformación lineal que existe entre el espacio operacional y el espacio

## *Parámetros Estructurales*

articular, dicha transformación no es otra cosa que el jacobiano, por consiguiente el método consiste en encontrar el jacobiano del mecanismo de una manera sistemática para cada una de los diferentes tipos de cadenas; para lo que se utiliza el método basado en screws para obtener el jacobiano, resaltando que cuando un eje screw representa un movimiento a este se le denomina twist. Para el análisis de los mecanismos no es necesario conocer las dimensiones del mecanismo, es suficiente con conocer la estructura del Jacobiano para su análisis; por último se hace uso de la teoría de cadenas cinemáticas para identificar la movilidad general del mecanismo.

A continuación se describen cada uno de los pasos según el tipo de cadena cinemática analizada, de la más simple a la más compleja.

### **4.8.1 Cadenas abiertas simples**

Paso 1 Defina el eslabón de referencia y el eslabón que hace las veces de efector final.

Paso 2 Ubique el sistema de coordenadas del efector final.

Paso 3 Ubique el sistema de referencia en cualquier parte, sin embargo, por facilidad se recomienda definirla de forma tal que inicialmente tenga la misma orientación que el efector final.

Paso 4 Considere la cadena simple en una configuración (pose) que permita un análisis simple (por observación) del mecanismo.

Paso 5 Localizar cada uno de los ejes screw, o twist de las articulaciones, de forma tal, que coincidan con los ejes de las articulaciones rotacionales o con las direcciones de las articulaciones prismáticas. Para las articulaciones rotacionales se necesita un vector de posición  $\mathbf{q}$  de un punto sobre la recta de forma que el vector sea perpendicular al vector de dirección del eje screw  $\mathbf{w}$ . En el caso de una articulación prismática no es necesario definir el vector de posición.

Paso 6 Con la ayuda de matriz exponencial de un screw se llevan todos los twist  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^6$ , de las articulaciones a la base y se concatenan en una única matriz. La Matriz resultante  $\mathbf{J}$  es el Jacobiano del mecanismo expresado

## *Parámetros Estructurales*

do en el eslabón de referencia, que relaciona la espacio de movimiento operacional o del efecto final con el espacio de movimiento articular.

Paso 7 Por observación o con ayuda de un software se determina la base del espacio columna del jacobiano.

Paso 8 Determinar las componentes del espacio de movimiento  $R_f \in \mathbb{R}^6$  del efecto final, a partir de la observación de cada una de las filas de la base del espacio columna del jacobiano, se identifican las que tienen componentes diferentes de uno. En el sentido físico, esto indica que el movimiento del efecto final en dicha dirección es dependiente; sin perder generalidad el efecto final se puede mover en tres direcciones y realizar tres giros,  $R_f = [w_x, w_y, w_z, v_x, v_y, v_z]^T$ , cada componente indica las direcciones y el tipo de movimiento del efecto final.

Paso 9 Determinar el rango de la transformación lineal, es decir determinar el rango de matriz jacobiana, y así determinar la dimensión del espacio operacional.

Comentario. Se recomienda tomar el punto de análisis de movimiento lo más próximo posible al punto considerado como de mayor restricción del eslabón de análisis.

### **4.8.1.1 Aplicación a una cadena cinemática serial**

Se ha utilizado la cadena cinemática serial de la figura 4.2, inicialmente sin la definición del eslabón de referencia y del efecto final. El mecanismo tiene  $p = 6$  articulaciones todas rotacionales, y  $m = 6$  eslabones denotados con un círculo y un número.

Paso 1 En este caso se toma el eslabón 1 como referencia  $1 \equiv 0$  por consiguiente la cadena tiene  $m - 1$  eslabones móviles. El efecto final es el eslabón  $n \equiv 6$ .

Paso 2 Se selecciona un origen y orientación arbitraria del sistema de coordenadas del efecto final.

Paso 3 Se selecciona el origen y la orientación del sistema de referencia, buscando

## Parámetros Estructurales

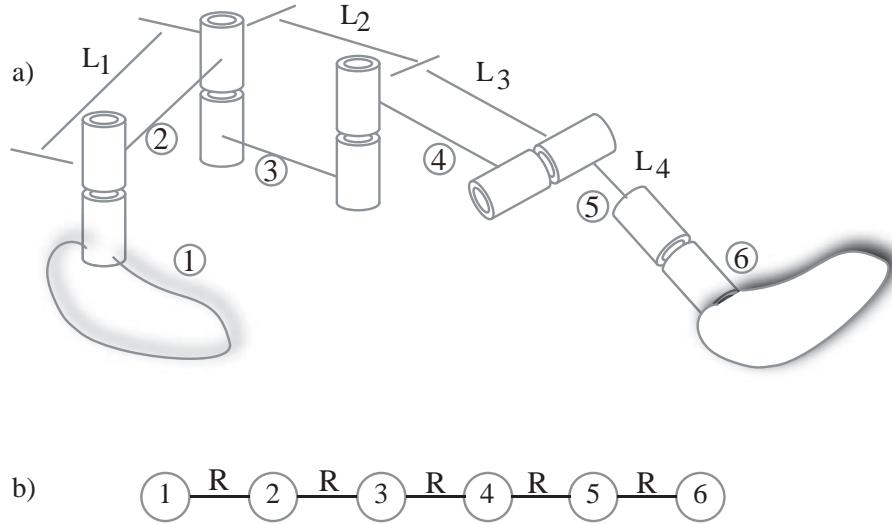


FIGURA 4.2: Cadenas cinemática abierta ejemplo 1. a) Diagrama estructural y  
b) grafo estructural

que sea paralelos con el sistema del efecto final:

$${}^0\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{p} = [0, 0, 0]^T$ .

Paso 4 Se considera el manipulador totalmente extendido con todas las articulaciones en posición inicial o cero.

Paso 5 Se localizan los screw, en cada una de las articulaciones. En el caso de articulaciones rotacionales  $\mathbf{m}_i = [\mathbf{w}, \mathbf{v}]^T$ , donde  $\mathbf{v} = -\mathbf{w}_i \times \mathbf{q}_i$ ; para las prismáticas  $\mathbf{m}_i = [\mathbf{w}, 0]^T$ ; (figura 4.3).

Paso 6 Localización de los twist  $\mathbf{m}_i$  como se indica en la figura 4.3, los vectores obtenidos se listan en la tabla 4.3.

## Parámetros Estructurales

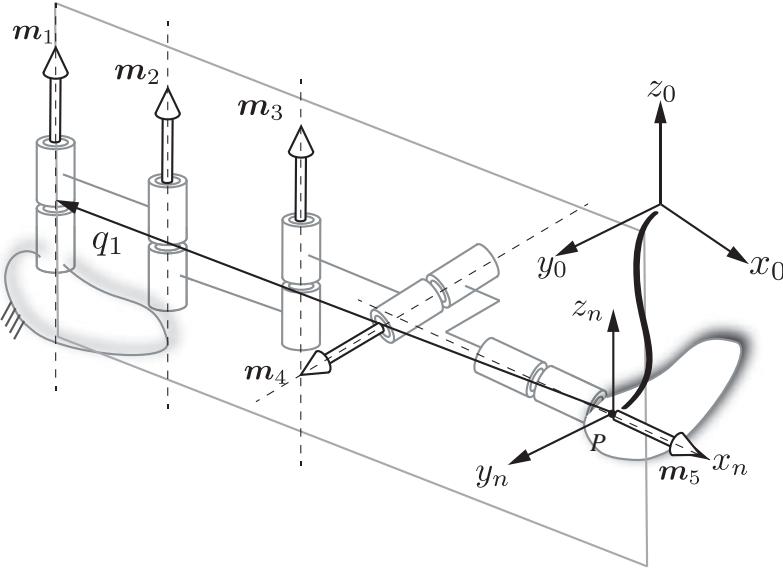


FIGURA 4.3: Cadena cinemática abierta ejemplo 1. Paso del 1 al 6

TABLA 4.3: Ejemplo 1. Parámetros de los ejes screw

Articulación	Variable	$w_i$	$q_i$
1	$\mathbf{m}_1$	$\theta_1$	$[0, 0, 1]^T$
2	$\mathbf{m}_2$	$\theta_2$	$[0, 0, 1]^T$
3	$\mathbf{m}_3$	$\theta_3$	$[0, 0, 1]^T$
4	$\mathbf{m}_4$	$\theta_4$	$[0, -1, 1]^T$
5	$\mathbf{m}_5$	$\theta_5$	$[1, 0, 0]^T$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & s_{123} & c_{123}c_4 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{123} & s_{123}c_4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & s_4 \\ 0 & l_1s_1 & l_2s_12 + l_1s_1 & 0 & s_4(l_2s_{12} + l_1s_1 + l_3s_{123}) \\ a & a - l_1 * c_1 & a - l_2c_{12} - l_1c_1 & 0 & s_4(a - l_2 * c_{12} - l_1c_1 - l_3c_{123}) \\ 0 & 0 & 0 & k & -c_4(c_3k_1 + s_3(l_3 + l_4) + k_2s_3) \end{bmatrix}$$

donde

$$k = l_4 - s_3k_1 + k_1c_3 + (c_3 - 1)(l_3 + l_4)$$

$$k_1 = s_2a_1 + c_2s_1a + s_2(c_1 - 1)a$$

$$k_2 = (c_2 - 1)a_1 - s_1s_2a + c_2(c_1 - 1)a$$

$$a = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

$$a_1 = l_2 + l_3 + l_4$$

$$c_i = \cos(\theta_i), \quad s_i = \sin(\theta_i).$$

## Parámetros Estructurales

Paso 7 . Se obtiene la base del espacio columna del jacobiano. Los coeficientes diferentes de uno y de cero indican que fila del jacobiano es linealmente dependiente. En el caso del robot analizado, se puede concluir de forma inmediata que la velocidad lineal en la componente  $z$  es la única no independiente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_y \\ \mathbf{w}_z \\ \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$a = -l_2 s_{12} - l_1 s_1 - l_3 s_{123}$$

$$b = l_2 c_{12} - a + l_1 c_1 + l_3 c_{123}.$$

Paso 8 Observando la matriz anterior las componentes independientes del espacio de movimiento del efecto final son  $R_f = [w_x, w_y, w_z, v_x, v_y, 0]^T$ , por consiguiente el efecto final no tiene componente de velocidad lineal en la dirección  $z$  independiente.

### Movilidad

La movilidad en una cadena serial simple esta dada por el número de ejes screws que contiene la cadena, es decir, por la suma del número de grados de libertad, o movilidad de cada una de las articulaciones (ecuación 4.10). La cadena de la figura 4.3 posee  $n = 5$  eslabones móviles,  $m = n + 1 = 6$  eslabones incluyendo la base,  $p = 5$  articulaciones rotacionales; ya que la cadena no contiene lazos cerrados  $q = 0$ , y por tanto no presenta parámetros de articulación que pierdan independencia al cerrar lazos, la movilidad del mecanismo esta dada por:

$$M = \sum_1^5 f_i = 5. \quad (4.33)$$

Las articulaciones que conforman el manipulador son de tipo rotacional, cada una con un grado de libertad, considerando que un screw representa un grado de libertad, por consiguiente  $f_i = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ , entonces para definir

## Parámetros Estructurales

la configuración del mecanismo se necesitan 5 velocidades independientes, en concordancia con el resultado obtenido.

### Conecividad

La conectividad vista como las velocidades relativas independientes entre el efecto final y la base, es determinada por  $S = \dim(R_f)$  (ecuación 4.27), y corresponde a la base del espacio operacional,  $R_f = [\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y, \mathbf{w}_z, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, 0]^T$  con cardinalidad 5; por lo tanto la conectividad resulta  $S = \dim(R_f) = 5$ . Lo anterior significa que para controlar las velocidades, en el espacio operacional, se necesita conocer  $M = p = 5$  velocidades independientes.

### Redundancia estructural

La redundancia estructural esta dado por la diferencia entre la dimension del espacio articular o la movilidad, y la del espacio operacional, o la conectividad; de acuerdo a la ecuación (4.20),  $T = 5 - 5 = 0$ .

### Sobrerrestricciones

El número de sobrerrestricciones  $N$ , para este mecanismo que no posee lazos cerrados  $q$ , ni parámetros de articulación que pierden independencia  $r$  al cerrar lazos se calcula como:  $N = 6q - r = 0$ .

### 4.8.2 Cadenas cerradas cinemáticas de lazo simple.

Para el caso de cadenas cinemáticas cerradas de lazo simple hay dos formas generales para el análisis de parámetros estructurales, partiendo del hecho que una cadena cinemática cerrada simple cualquiera puede ser asociada con una o dos cadenas abiertas simples. Primero: una cadena cinemática de lazo cerrado se puede obtener a partir de una cadena serial abierta cuando el extremo o efecto final se conecta rígidamente con la base; segundo: si se consideran dos cadenas abiertas simples cada una con su base y efecto final, razón por la que la cadena cerrada simple se logra conectando rígidamente los dos efectores finales al igual que sus bases.

Para el primer caso se analiza el espacio de movimiento de una única cadena; en el segundo caso se analiza cada una de las cadenas encontrando el espacio de movimiento independiente para luego determinar el espacio de movimiento común, que corresponde al espacio de movimiento de la cadena cerrada. En

## *Parámetros Estructurales*

este ultimo, el espacio común de movimiento se halla mediante la intersección de los screw de movimiento del efecto final de la cadena A y el efecto final de la cadena B.

Puede notarse que en los dos casos para encontrar el espacio de movimiento operacional de la cadena cerrada o del efecto final, se debe analizar el espacio de movimiento de cadenas seriales abiertas simples asociadas, la metodología para dicho análisis corresponde a la presentada en la sección anterior 4.8.1; es necesario entonces hacer unos comentarios adicionales sobre como convertir las cadenas cerradas en lazos abiertos:

Comentario 1. El espacio de movimiento de la cadena cerrada no se ve afectado por el lugar donde se abra la cadena cerrada.

Comentario 2. El resultado tampoco se ve afectado si se analiza un lazo cerrado como una única cadena abierta o tomando dos cadenas abiertas independientes relacionadas por un punto de movimiento, que corresponde al punto donde se realiza la división de la cadena cerrada.

Comentario 3. En caso de encontrar diferentes bases del espacio operacional se deben considerar todas.

### **4.8.2.1 Aplicación a una Cadena cinemática de lazo cerrado.**

Como ejemplo se presenta la cadena cinemática de lazo cerrado que se observa la figura 4.4, conformada por  $m = 4$  cuatro barras todas paralelas al plano de movimiento, tres de ellas móviles. Y por  $p = 4$  articulaciones rotacionales, sus ejes son paralelos y perpendiculares al plano de movimiento.

Para el análisis de parámetros estructurales, se debe asumir, sin perder generalidad un eslabón de referencia, en este caso se ha asumido el eslabón numerado como 4. Subsecuentemente se abre el mecanismo en un sitio indistinto, obteniendo dos resultados:

## Parámetros Estructurales

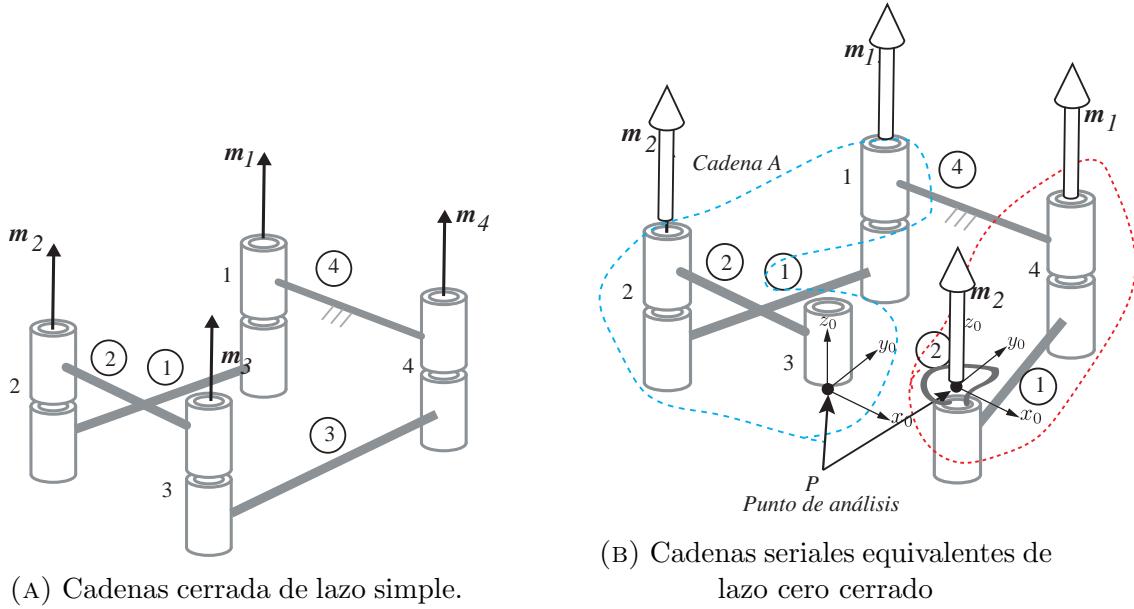


FIGURA 4.4: Cadena cinemática cerrada, mecanismo de 4 barras.

Primero, se abre la cadena separando el eslabón 4 en dos partes, formando una cadena serial con cinco eslabones, identificándose claramente la base y el efecto final, eslabón ( $n + 1$ ). A esta cadena se le aplica el procedimiento visto para determinar los parámetros estructurales de cadenas abiertas.

La segunda posibilidad es abrir el lazo cerrado en cualquiera de los otros eslabones, de donde se obtienen dos cadenas cinemáticas seriales, que al cerrarse forman el mecanismo original, como se observa en la figura 4.4b. Con dos cadenas abiertas diferentes se realiza el análisis independiente de movimiento del punto donde se abrieron las cadenas, usando de nuevo para el análisis la metodología descrita para cadenas cinemáticas abiertas.

Como se observa en la figura 4.4. La cadena **A** está formada por dos articulaciones rotacionales y dos eslabones, el punto de análisis está en el extremo del eslabón 2. La cadena **B** está formada por dos articulaciones y dos eslabones, considerando que el punto de análisis está sobre el eje de giro de la articulación 2.

En la tabla 4.4 se listan los valores de los ejes screw de las dos pata equivalentes

## Parámetros Estructurales

para el mecanismo de lazo cerrado. La componentes  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$ , donde  $i = 1, 2$  y  $j = A, B$  corresponden en el sistema referencia de un punto sobre el eje screw.

TABLA 4.4: Parámetros de análisis para cadenas A y B, equivalentes de la cadena de lazo cerrado.

Cadena	twist	Variable	$w_i$	$q_i$
A	$\mathbf{m}_{1A}$	$\theta_{1A}$	$[0, 0, 1]^T$	$[a_{1A}, b_{1A}, 0]^T$
	$\mathbf{m}_{2A}$	$\theta_{1A}$	$[0, 0, 1]^T$	$[a_{2A}, b_{2A}, 0]^T$
B	$\mathbf{m}_{1B}$	$\theta_{1A}$	$[0, 0, 1]^T$	$[a_{1B}, b_{1B}, 0]^T$
	$\mathbf{m}_{1B}$	$\theta_{1A}$	$[0, 0, 1]^T$	$[0, 0, 0]^T$

La matriz jacobiana para la pata A de acuerdo a los parámetros definidos en la tabla 4.4 se obtiene como se muestra en la ecuación (4.34).

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ b_{1A} & b_{2A}c_{1A} - a_{1A}s_{1A} + a_{2A}s_{1A} - b_{1A}(c_{1A} - 1) \\ -a_{1A} & b_{2A}s_{1A} - b_{1A}s_{1A} - a_{2A}c_{1A} - b_{1A}(c_{1A} - 1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

donde  $c_{1A} = \cos(\theta_1)$  y  $s_{1A} = \sin(\theta_1)$ .

Analizando el jacobiano para la cadena cinemática A, y recordando que se analiza la velocidad del punto  $P$ , este punto solo puede tener componentes en la dirección de  $\mathbf{v}_x$  o  $\mathbf{v}_y$  que corresponden con las filas 3 y 4 del jacobiano asociado, de las que se puede observar su independencia; por consiguiente la base del espacio de movimiento del punto  $P$  para la cadena cinemática A es  $R_{fA} = [0, 0, 0, \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, 0]$  con cardinalidad 2.

La matriz jacobiana para la cadena B según los parámetros de la tabla 4.4, se encuentra representada en la ecuación (4.35)

## Parámetros Estructurales

$$\mathbf{J}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ b_{1B} & -a_{1A}s_{1A} - b_{1A}(c_{1A} - 1) \\ -a_{1B} & a_{1A}(c_{1A} - 1) - b_{1A}s_{1A} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Observando la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_B$ , las filas 3 ,4 y 5 poseen coeficientes; de acuerdo con la figura 4.4b el punto  $P$  está sobre el eje de rotación de la articulación 2, y pertenece al eslabón virtual que se considera al abrir la cadena cerrada al cual esta ligado el punto  $P$ .

Por otro lado, en las filas de la matriz jacobiana de la cadena, la fila 3 es independiente y corresponde a la velocidad angular del efecto final, sin embargo las filas 4 y 5 indican que el efecto final tendría velocidades en la dirección  $x$  y  $y$ , afirmación consecuente con la dependencia observada entre las columnas 4 y 5 del jacobiano, lo que significa que una componente de la base del espacio de velocidades es  $\mathbf{v}_x$  o  $\mathbf{v}_y$ . Por tanto el espacio de movimiento del efecto final de esta cadena puede ser  $R_{fA1} = [0, 0, \mathbf{w}_x, \mathbf{v}_x, 0, 0]$  o  $R_{fA1} = [0, 0, \mathbf{w}_z, 0, \mathbf{v}_y, 0]$ , cada uno con cardinalidad 2.

AL concatenar nuevamente las dos cadenas por el punto  $P$ , el espacio de movimiento resultante  $R_{fC}$  es la intersección de los espacios de movimiento de cada una de las cadenas, en este caso:  $R_{fC} = R_{fA} \cap R_{fB1} = [\mathbf{v}_x]$  o  $R_{fC} = R_{fA} \cap R_{fB2} = [\mathbf{v}_y]$ .

## Movilidad

La Movilidad para la una cadena simple cerrada esta definida como la diferencia entre el número de parámetros independientes de movimiento de las articulaciones, antes de cerrar los lazos, y el número de parámetros que pierden independencia cuando se cierran los lazos, de acuerdo a la ecuación eqn:MovilidadCadenacerrada:

$$M = \sum_{i=1}^p f_i - r_B = 4 - 3 = 1, \quad (4.36)$$

## Parámetros Estructurales

El primero se determina con el número total de twist que pose el mecanismo, es decir sumando los twist de las dos cadenas seriales abiertas asociadas al mecanismo de lazo cerrado; El segundo parámetro  $r_B$  se obtiene analizando los espacios de movimiento del efecto final de las dos cadenas abiertas al unirse; se debe entonces sumar la dimensión del espacio operacional de la cadena A más el espacio operacional de la cadena B menos la dimensión del espacio operacional común que corresponde a la unión de las dos cadenas. Para calcular  $r_B$  se hace través de la siguiente expresión:

$$r_B = \dim(R_{fA}) + \dim(R_{fB}) - \dim(R_{fC}) = 2 + 2 - 1 = 3 \quad (4.37)$$

donde  $R_{fC} = R_{fA} \cap R_{fB1} = [\mathbf{v}_x]$  o  $R_{fC} = R_{fA} \cap R_{fB2} = [\mathbf{v}_y]$ ;  $\dim(R_{fA}) = 2$ ,  $\dim(R_{fB}) = 2$  y  $\dim(R_{fC}) = 1$ , en cualquiera de los dos casos para el espacio de movimiento de la cadena cerrada  $R_C$ . Esto quiere decir que para mover el efecto final, en este caso basta con conocer  $M = p = 1$  velocidades articulares.

### Conectividad

La conectividad se considera como la dimensión del espacio de movimiento de la cadena cerrada, es decir el espacio de movimiento entre el eslabón de análisis y el de referencia cuando se cierra la cadena, en este caso, las dos cadenas abiertas por los extremos; obviamente es dado por la dimensión del espacio de movimiento común de las dos cadenas, y se calcula de acuerdo a la ecuación (4.32). La conectividad entre cualquiera de los elementos para el mecanismo de 4 barras analizado, resulta:

$$S_{n/1} = \dim(R_{fA} \cap R_{fB}) = 1 \quad (4.38)$$

### Redundancia estructural

La redundancia estructural es dado por la diferencia entre la dimensión del espacio articular, la movilidad, y la dimensión del espacio operacional, la conectividad; se expresa como  $T = M - S$ ; respectivamente:  $T = 1 - 1 = 0$ .

### Sobrerestricciones

El numero de sobrerestricciones del mecanismo  $N$ , esta dado por el número lazos cerrados independientes, según la formula de euler para relacionar los grados de libertad ( $m + q - p = 1$ ), y los parámetros de articulación que pierden independencia al cerrar  $q$  lazos, de donde resulta  $N = 6q - r = 6 - 3 = 3$ .

*Parámetros Estructurales*

---

# Capítulo 5

## ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE MANIPULADORES PARALELOS

### 5.1 Manipuladores Paralelos PMs

Un mecanismo paralelo (en inglés *PM-Mechanism Parallel*) es un mecanismo con múltiples grados de libertad (GDL) compuesto por una plataforma móvil y una base fija, que son conectadas a lo menos por dos cadenas cinemáticas seriales en paralelo [95], [96], [107], [74], [17], [56] [41], [42]. Cada una de las cadenas cinemáticas seriales son llamadas patas o brazos, como se observa en la figura 5.1.

Así mismo puede ser definido como una cadena cinemática cerrada, cuyo efecto final es unido a la base por varias cadenas cinemáticas seriales simples o complejas independientes, que transmiten movimiento a través de  $n$  actuadores simples. La definición anterior incluye también mecanismos redundantes, con mas de una actuador por cada grado de libertad del efecto final o manipuladores seriales trabajando cooperativamente, por consiguiente para detallar un poco más el término manipuladores paralelos, que también deben poseer las siguientes características:

- A lo menos dos cadenas seriales deben soportar el efecto final o plata-

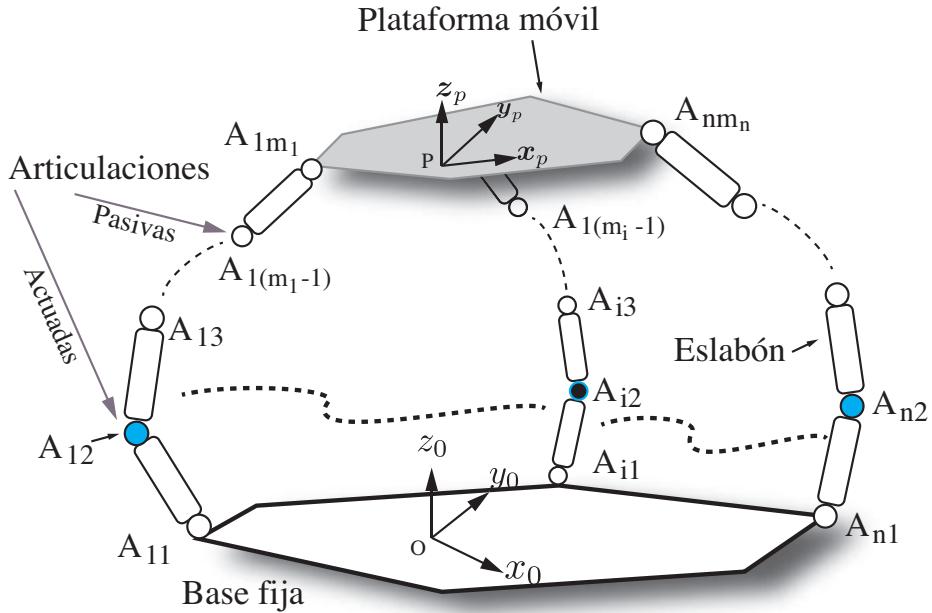


FIGURA 5.1: Representación de un mecanismo paralelo MP.

forma móvil, además, cada cadena debe contener al menos un actuador simple, y un sensor para medir las variables asociadas con la actuación.

- Cada cadena debe poseer el mismo número de grados de libertad del efecto final.
- La movilidad del efecto final debe ser cero cuando todos los actuadores se encuentren bloqueados.

Los mecanismos paralelos tienen las siguientes ventajas.

- Un mínimo de dos cadenas permiten distribuir la carga útil.
- El numero de actuadores es mínimo con relación a la movilidad que ofrece.
- El número de sensores necesario para el control en lazo cerrado del mecanismo es mínimo.
- Cuando los actuadores están bloqueados, el manipulador permanece en su posición, lo que lo hace mecánicamente seguro.

## 5.2 Modelo Geométrico de manipuladores paralelos PMs

Es común confundir el término cinemático con geométrico cuando se habla de modelación de la configuración de un robot, debido principalmente a que en la robótica el término cinemático no se refiere solamente al estudio de las velocidades, incluso, es necesario aclarar que cuando se hace referencia al análisis de posiciones se habla no solo de cinemática sino específicamente de cinemática diferencial. En el caso del modelo geométrico, esta se refiere directamente a la configuración del manipulador.

Antes de iniciar con la elaboración del modelo, y adicional a la definición dada en la sección 5.1, es necesario mencionar que los PM en los cuales en número de grados de libertad es igual número de patas son conocidos como robots paralelo completos [47], y que si además el número y tipo de articulaciones es el mismo para cada pata, y el número y localización de los actuadores es igual, el manipulador es identificado como simétrico.

Para considerar el modelo cinemático general para un robot o manipulador paralelo, se define que esta compuesto por una base rígida denotada como  $\beta_0$  a la que se encuentra unido un marco de referencia global  $F_0(0, x_0, y_0, z_0)$ , una plataforma móvil rígida  $\beta_P$ , y  $n$  patas conectadas por  $m_i$  articulaciones localizadas en los puntos  $A_{ij}$  (figura 5.1), donde el j-ésimo eslabón de la pata  $i$  puede ser denotado como  $\beta_{ij}$ , y la articulación localizada en el punto  $A_{ij}$  esta parametrizada por la variable  $q_{ij}$ .

En el mismo contexto, las coordenadas generalizadas de la plataforma denotadas como  $\mathbf{X}_p$  representan el conjunto de parámetros necesarios para definir la ubicación del marco de referencia  $F_p(P, x_p, y_p, z_p)$ ; aunque en el caso cuando se considera que la plataforma esta conectada a una base por  $m$  patas, únicamente  $n_{gdl}$  coordenadas de  $\mathbf{X}_p$  son independientes, estas se han denotado como  $\mathbf{X}$ , y se relacionan con la plataforma móvil por medio de ecuaciones de restricción vectorial.

$$\mathbf{c}_{movil}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_p) = 0 \quad (5.1)$$

Por su parte, las variables correspondientes a los actuadores se encuentran organizadas en el vector  $\mathbf{q}_a$  y las variables pasivas de las patas en el vector  $\mathbf{q}_d$ ; todas las variables correspondientes a las articulaciones tanto activas como pasivas son agrupadas en el vector  $\mathbf{q}_t$  de tamaño  $n_t = \sum_{i=1}^n m_i$ . La longitud  $n_a$  del vector  $\mathbf{q}_a$  debe ser igual o superior al numero  $n_{gdl}$  de la plataforma.

Por último las patas que pueden contener  $m$  articulaciones rotacionales o prismáticas, y que a su vez imponen al manipulador paralelo restricciones en el movimiento de la plataforma móvil, pueden estar definidas por el siguiente conjunto de relaciones:

$$h(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = 0, \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{q}_a$ , representa el vector de articulaciones rotacionales o traslacionales actuadas con  $m$  patas, y  $n_a$  es tamaño del vector  $\mathbf{q}_a$ , que debe ser mayor o igual a los grados de libertad la plataforma móvil;  $\mathbf{X}_p = [x_1, x_2 \dots, x_6]$  contiene los parámetros utilizados para representar la posición y orientación de la plataforma móvil, dicho conjunto de coordenadas es conocido comúnmente como coordenadas generalizadas del robot; también existe la opción de organizar las coordenadas en dos componentes generales para definir posición  $\mathbf{x}_p$  y orientación  $\mathbf{x}_o$ . La posición en el espacio euclíadiano puede ser representada por coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas; por su parte la orientación puede ser definida en términos de cosenos directores, ángulos de euler o parámetros de euler [4].

De acuerdo a la ecuación (5.2) para establecer el análisis geométrico de un manipulador paralelo es necesario encontrar los valores de todas sus variables por lo que es necesario hacer previamente algunas definiciones:

**Definición 5.2.1. Problema geométrico.** Consiste en el establecimiento de una relación implícita entre los movimientos finitos de las articulaciones y los movimientos finitos del efecto final para un robot dado.

Considerando el caso general de un robot manipulador paralelo, como el que

se observa en la figura 5.1, el problema geométrico puede ser abordado de dos maneras: una mediante problema geométrico inverso y la otra resolviendo el problema geométrico directo. A continuación para dar claridad se hacen las definiciones de los problemas mencionados, tanto directo como inverso.

**Definición 5.2.2. Problema Geométrico Inverso (PGI).** Involucra el cálculo de los parámetros de las articulaciones  $q_{nm}$  cuando las coordenadas generalizadas  $\mathbf{X}$  de la plataforma móvil son conocidas.

**Definición 5.2.3. Problema Geométrico Directo (PGD).** Involucra el cálculo de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{X}$  cuando los valores de las articulaciones actuadas  $q_{nm}$  son conocidos.

### 5.3 Modelo geométrico inverso (MGI) para PMs

El modelo geométrico inverso consiste entonces, desde el punto de vista matemático, en la obtención del valor del vector de articulaciones actuadas  $\mathbf{q}_a$  como una función de las coordenadas de la plataforma  $\mathbf{X}$ . Para un modelo general el problema es relativamente sencillo de resolver mediante la búsqueda de una solución cerrada. Un problema adicional que debe ser resuelto cuando se desea calcular el modelo dinámico del manipulador, consiste en encontrar todas las variables articulares  $\mathbf{q}_t$  tanto pasivas como activas, en función de las coordenadas de la plataforma, en caso de querer calcular el modelo dinámico directo.

Una de las aproximaciones mas usadas para resolver éstos dos problemas consiste en considerar las ecuaciones de lazo cerrado del manipulador a través de la cadena serial  $i$  que va desde el punto 0 al punto  $P$  como se aprecia en la figura 5.2.

El sistema de coordenadas del efecto final  $F_p$  puede ser obtenido en función del sistema de coordenadas global considerando todos los desplazamientos de la cadena, de forma similar a un robot de cadena abierta; es decir, que la transformación para la posición y orientación del sistema de coordenadas  $F_p$  con respecto a  $F_0$ , se logra, como el producto de matrices de transformación

homogénea de cada una de las articulaciones [64]. El cálculo de la relación entre la base y el efecto está dado por la ecuación 5.3:

$${}^0\mathbf{T}_p(\mathbf{x}) = {}^0\mathbf{T}_1(q_1) \prod_{j=2}^{m_i} ({}^{j-1}\mathbf{T}_j(q_j)) ; {}^{m_i}\mathbf{T}_p, \quad \text{para una pata,} \quad (5.3)$$

donde:

- ${}^0\mathbf{T}_p(\mathbf{x})$  es la matriz homogénea que define la descripción del sistema de coordenadas del efecto final respecto al sistema de coordenadas de la base.
- ${}^0\mathbf{T}_1(q_1)$  es la matriz homogénea que define la transformación entre el sistema de coordenadas de la base y el sistema de coordenadas de la primera articulación. Esto se repite para las  $n$  patas.
- $({}^{j-1}\mathbf{T}_j(q_j))$  es la matriz homogénea que define la posición entre el sistema de coordenadas  $F_{(j-1)}$  asociado al eslabón  $\beta_{(j-1)}$  y el sistema de coordenadas  $F_j$ , esto se repite para las  $i$  patas.
- ${}^{m_i}\mathbf{T}_p$  es la matriz homogénea que define la transformación constante entre el sistema de coordenadas  $F_{im_i}$  asociado al eslabón  $B_{im_i}$  y el de la plataforma móvil. Este puede ser determinado mediante el método de Denavit y Hartenberg -MDH- con tan solo cuatro parámetros , sobre todo si  $x_{im_i}$  esta definido ortogonal a  $z_p$  y  $z_{im_i}$ .

La ecuación (5.3) se soluciona para cada una de las patas manteniendo la pose del efecto final, obteniendo una relación explícita entre las coordenadas articulares y operacionales de la plataforma del robot,  $\mathbf{q}_t$  y  $\mathbf{X}$ , que puede ser escrita en forma matricial. Haciendo que cada fila corresponda a una de las patas del robot:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}(\mathbf{X}) - \mathbf{h}_{21}(\mathbf{q}_t) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{1n}(\mathbf{X}) - \mathbf{h}_{2n}(\mathbf{q}_t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.4)$$

donde cada fila de la ecuación (5.4) puede ser vista como la ecuación del modelo geométrico directo para una subcadena serial  $i$ , a partir de la que se puede solucionar el problema geométrico inverso para la cadena serial simple asociada. Existen muchos métodos para la solución de dicha expresión, entre estos,

los propuestos por [66],[100], no obstante en manipuladores parelelos es común utilizar las cadenas seriales simples como patas, y cada una de las filas de la ecuación (5.4) puede ser solucionada de forma independiente.

Así mismo, cuando no es necesario determinar la velocidades de todas las articulaciones y con el objetivo de reducir la complejidad de resolución de la ecuación (5.4), es posible eliminar las articulaciones pasivas, es decir  $\mathbf{q}_d$ , lo que resulta en una expresión que solamente depende de las coordenadas de las articulaciones actuadas y de las coordenadas de la plataforma como inicialmente se propone en la ecuación 5.2.

Considerando que el manipulador paralelo no es redundante, entonces la ecuación (5.5) puede establecerse independientemente para cada pata, y por tanto las coordenadas actuadas de la pata  $i$  se pueden agrupar en el vector nombrado como  $\mathbf{q}_{ai}$  cuya función de restricción específica  $\mathbf{h}_{pi}$  esta dada por:

$$\mathbf{h}_{pi}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_{ai}) = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

Sin embargo este procedimiento puede ser en ocasiones innecesario y depende de hacer un análisis de la cadenas seriales utilizando el MDH [8]. Por otra parte, la ecuación de lazo también puede ser obtenida de forma vectorial de manera directa, como se describe a continuación:

En la figura 5.2, sin perder generalidad, se aprecia un robot paralelo con dos cuerpos principales, uno corresponde a la base y el otro a la plataforma móvil. Estos dos cuerpos son asociados por medio de  $n$  patas. Asumiendo solo la pata  $i$ , conectada a la base por el punto  $A_i$  y por un punto  $C_i$  a la plataforma móvil, donde se inserta el extremo libre de la pata  $i$ . Cabe mencionar que la pata posee articulaciones tanto activas como pasivas.

Para describir la pose de la plataforma móvil con respecto a la base, se disponen de los sistemas de coordenadas  $F_0$  y  $F_p$ . La orientación de la plataforma móvil con respecto a la base fija se expresa a través una matriz de rotación  ${}^0\mathbf{R}_p$  y un vector de posición  $\mathbf{p}$  que va del origen del marco  $F_0$  al origen del marco  $F_p$ ;

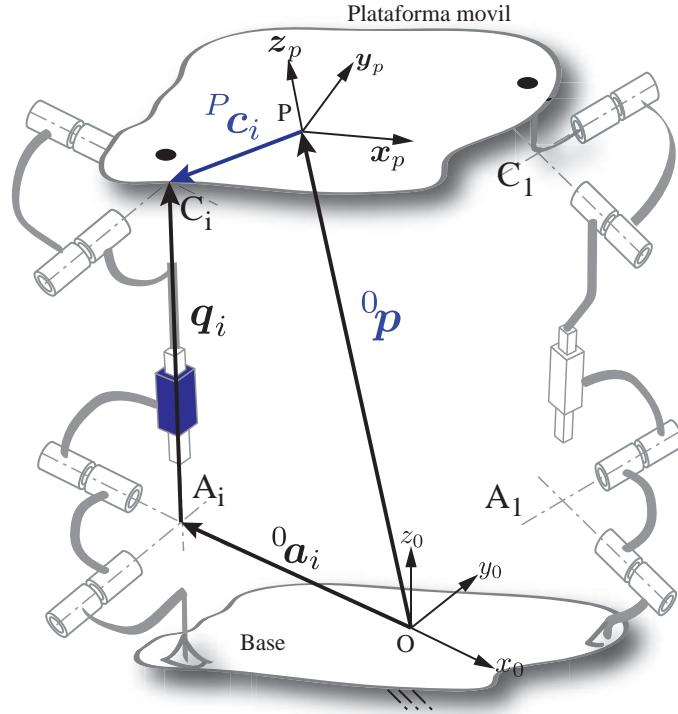


FIGURA 5.2: Modelo geométrico inverso como ecuación vectorial de lazo

dicha distribución se representa en una matriz homogénea como:

$${}^0\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_p & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

La ecuación de lazo, considerando que todas las patas pasan por los orígenes de los marcos  $F_0$  y  $F_p$ , y por los puntos  $A_i$  y  $C_i$ , resultando en la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iC_i} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

donde  $\overrightarrow{OA_i}$  y  $\overrightarrow{PC_i}$  son los puntos de inserción de las patas y pueden ser fácilmente obtenidos de la geometría de la base y el efecto final, respectivamente. A partir de  ${}^0\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$  en el marco fijo,  ${}^B\mathbf{c}_i = \overrightarrow{PC_i}$  en el marco móvil y adicionalmente  $\mathbf{q}_i = \overrightarrow{A_iC_i}$  que en este caso es definida como la articulación actuada. La posición del origen del sistema coordenado está dada por  ${}^0\mathbf{P} = \overrightarrow{OP}$  y la orientación por  ${}^0\mathbf{R}_P$ . Reemplazando en la ecuación de lazo (5.7), se llega a:

$${}^0\mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i = {}^0\mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^B\mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.8)$$

Reorganizando la ecuación anterior

$$\mathbf{q}_i = {}^0\mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^B\mathbf{c}_i - {}^0\mathbf{a}_i. \quad (5.9)$$

Operando mediante el producto punto a ambos lados por sus correspondientes vectores se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i &= {}^0\mathbf{p}^T {}^0\mathbf{p} + ({}^0\mathbf{R}_P {}^B\mathbf{c}_i)^T ({}^0\mathbf{R}_P {}^B\mathbf{c}_i) + {}^0\mathbf{a}_i^T {}^0\mathbf{a}_i \\ &\quad - 2({}^0\mathbf{R}_P {}^B\mathbf{c}_i)^T {}^0\mathbf{p} - 2({}^0\mathbf{R}_P {}^B\mathbf{c}_i)^T {}^0\mathbf{a}_i - 2{}^0\mathbf{p}^T {}^0\mathbf{a}_i. \end{aligned}$$

Considerando que todos los vectores son expresados en la base y para simplificar notación la ecuación de restricción, se puede reescribir como:

$$d_i = \mathbf{p}^2 + \mathbf{c}_i^2 + \mathbf{a}_i^2 - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{p} - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{a}_i - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_i, \quad (5.10)$$

donde  $\mathbf{c}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^B\mathbf{c}_i$  y  $d_i = \mathbf{q}_i^2$ .

Llevando la ecuación (5.10) a la forma dada en la ecuación (5.5) se obtiene:

$$\mathbf{h}_{pi}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_{ai}) = \underbrace{\mathbf{p}^2 + \mathbf{c}_i^2 + \mathbf{a}_i^2 - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{p} - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{a}_i - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_i}_{\mathbf{X}} - \underbrace{\mathbf{q}_i^2}_{\mathbf{q}_{ia}} = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

La ecuación (5.11) puede ser resuelta algebraica o geométricamente para obtener el valor de los actuadores, y encontrar finalmente la solución del problema geométrico inverso.

### 5.3.1 Modelo diferencial basado en Screws

Considerando la relación de entrada-salida de una cadena  $i$  que expresa el twist de una plataforma (denotado como  ${}^0t_p$  donde el superscript 0 denota que el vector está dado en términos del marco de referencia  $F_0$ ), como función de todas las velocidades de las articulaciones  $\dot{\mathbf{q}}_i$  para la cadena considerada, entonces se obtiene:

$$^d\mathbf{t}_p = {}^0\mathbf{J}_{Pi} \dot{\mathbf{q}}_i = [{}^0\mathbf{m}_{i1}, \dots {}^0\mathbf{m}_{im_i}] , \quad (5.12)$$

donde  ${}^0\mathbf{m}_{ik}$  es un twist unitario que representa el desplazamiento del efecto final cuando la articulación  $ik$  se está moviendo y  $m_i$  es el número de articulaciones de la cadena considerada. Reescribiendo la ecuación 5.12 y reorganizando la matriz  ${}^0\mathbf{J}_{pi}$  se pueden realizar las siguientes agrupaciones:

- Una submatriz  ${}^0\mathbf{m}_{ia}$  con los twists unitarios que corresponden a las articulaciones activas de las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}_{ai}$  y
- Una submatriz  ${}^0\mathbf{m}_{id}$  con los twists unitarios que corresponden a las articulaciones pasivas de las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$

Eliminando las velocidades de las articulaciones pasivas  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$  de la ecuación 5.12,  ${}^0\mathbf{t}_p$  puede ser multiplicado por el wrench  $f_i$  el cual es reciproco a todos los twists de las articulaciones pasivas  ${}^0\mathbf{m}_{id}$  pero no a los twists de las articulaciones activas  ${}^0\mathbf{m}_{ia}$ . En otras palabras esto significa que:

$$\mathbf{f}_i^T {}^0\mathbf{m}_{id} = \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{f}_i^T {}^0\mathbf{m}_{ia} \neq \mathbf{0} \quad (5.13)$$

$\mathbf{f}_i$  es un wrench de actuación que se encuentra aplicado a la plataforma y que únicamente puede ser igualado usando los actuadores de la cadena  $i$ . Como resultado la siguiente función escalar puede ser obtenida:

$$\mathbf{f}_i^T {}^0\mathbf{t}_p = (\mathbf{f}_i^T {}^0\mathbf{m}_{ia}) \dot{\mathbf{q}}_{ai} \quad (5.14)$$

Si la cadena  $i$  tiene  $n_{ai}$  articulaciones activas y  $n_{ai}$  vectores independientes, entonces  $\mathbf{f}_i$  pueden ser encontrados. Finalmente considerando todas las patas, la ecuación 5.14 puede ser reescrita en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{t}\mathbf{f}_i^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T {}^0\mathbf{m}_{1a} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_1^T {}^0\mathbf{m}_{2a} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{f}_1^T {}^0\mathbf{m}_{na} \end{bmatrix} , \quad (5.15)$$

donde  $\mathbf{f}_i$  es una matriz  $6 \times c_k$ , donde todos los  $c_k$  son wrenches unitarios independientes debidos a los  $n_{ak}$  actuadores de la k-ésima pata. Como resultado

## Cinemática de PMs

el sistema de la ecuación 5.15 es un sistema de  $n_w = \sum_k c_k$  ecuaciones. A partir de la ecuación 5.15 se hacen las siguientes definiciones:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n^T \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \mathbf{m}_{1a} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_1^T \mathbf{m}_{2a} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{f}_1^T \mathbf{m}_{na} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  es de dimensión de  $n_k \times 6$  y la matriz  $\mathbf{B}$  es de dimensión  $n_w \times n_a$ , reescribiendo se obtiene:

$$\mathbf{A}^0 \mathbf{t}_p + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0}. \quad (5.18)$$

De la ecuación (5.18) es necesario aclarar que la fila  $i$  de  $\mathbf{A}$  es un wrench unitario que se encuentra ubicado a lo largo de la dirección del wrench aplicado por el actuador  $i$  en la plataforma a través de la pata, cuando esta desarrollando un esfuerzo de entrada en modo estático, en modo de operación y/o en ausencia de algún otro efecto externo.

Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son cuadradas para un modelo de cinemática directa sin redundancia, donde  $\mathbf{J} = -\mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}$  corresponde al jacobiano cinemático del modelo cinemático.

## 5.4 Aplicación del MGI para PMs

A continuación se palica la metodología presentada en la sección anterior para el análisis del modelo geométrico inverso de algunos PMs.

### 5.4.1 MGI para un PM 3-RRR Planar

El PM 3-RRR está compuesto por tres cadenas seriales idénticas, cada una con dos eslabones y tres articulaciones rotacionales con todos sus ejes paralelos [123]; posee tres grados de libertad uno rotacional y dos translacionales; los actuadores se ubican en las articulaciones que unen la pata con el robot en el punto  $A_i$ ; entre la articulación actuada y la siguiente está el eslabón conocido como proximal, el siguiente eslabón, conocido como distal, posee una tercera articulación que conecta la plataforma móvil con la pata.

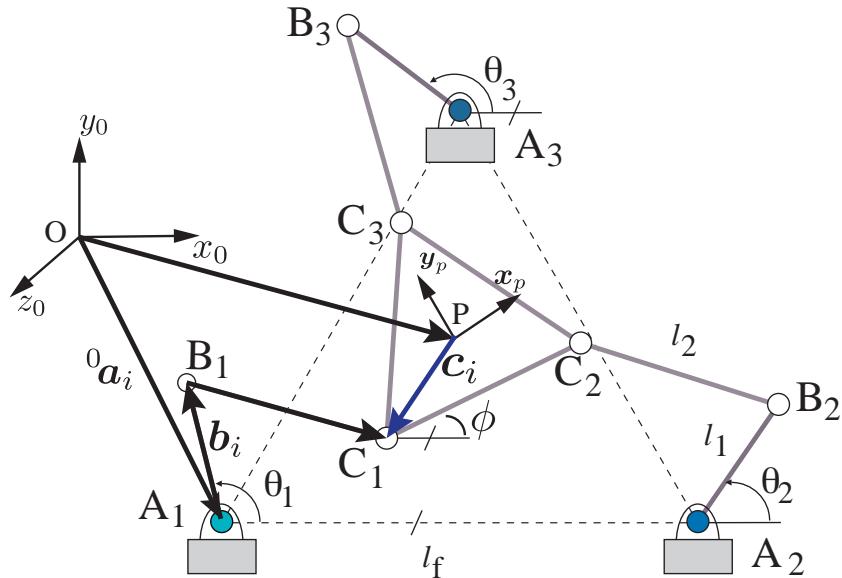


FIGURA 5.3: Robot paralelo planar de 3 gdl.

El 3-RRR es del tipo simétrico, donde las piernas acopladas a la plataforma móvil y a la fija describen un triángulo equilátero (figura 5.3). De esta forma el PM puede ser descrito completamente con 4 parámetros: Los radios de los círculos circunscritos en el triángulo equilátero de la plataforma fija y de la plataforma móvil ( $R_b$  y  $R_m$ ) y la longitud de los dos eslabones distal y proximal que componen cada cadena cinemática serial ( $l_1$  y  $l_2$ ).

El problema geométrico inverso para determinar los valores de las articulaciones actuadas se plantea por medio de la ecuación de lazo de acuerdo con la figura 5.3, de donde se obtiene la ecuación 5.19:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i + \mathbf{k}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P \mathbf{c}_i, \quad (5.19)$$

en la que  $\mathbf{b}_i = {}^0\mathbf{R}_{(z_0, q_i)} {}^1\mathbf{b}_i$ , y  ${}^1\mathbf{b}_i = [b_x, b_y, b_z]^T$ , resultando en la ecuación (5.20):

$$\mathbf{k}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i \quad (5.20)$$

Haciendo el producto punto a los dos lados de la ecuación (5.20) se logra una expresión de distancia:

$$\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = d_i - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{c}_i + 2(\mathbf{a}_i^T - \mathbf{c}_i^T) \mathbf{b}_i, \quad (5.21)$$

donde en el término  $d_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i$ , todos los valores son conocidos, el último término es la longitud de eslabón proximal y  $\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = l_2^2$  que también es conocida,  $\mathbf{c}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i$  es información previa, al igual que  ${}^0\mathbf{a}_i$ , y por tanto la única variable desconocida es  $\mathbf{b}_i = {}^0\mathbf{R}_{(u_i, q_i)} {}^1\mathbf{b}_i$  ya que  $q_i$  es el valor del actuador a determinar.

Llevando la ecuación (5.21) a la forma de presentada en la ecuación (5.5) como función de las coordenadas generalizadas del robot y considerando todas la patas se obtiene (5.22):

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} d_1 - 2\mathbf{a}_1^T \mathbf{c}_1 + 2(\mathbf{a}_1^T + \mathbf{c}_1^T) \mathbf{b}_1 - l_2^2 \\ d_2 - 2\mathbf{a}_2^T \mathbf{c}_2 + 2(\mathbf{a}_2^T + \mathbf{c}_2^T) \mathbf{b}_2 - l_2^2 \\ d_3 - 2\mathbf{a}_3^T \mathbf{c}_3 + 2(\mathbf{a}_3^T + \mathbf{c}_3^T) \mathbf{b}_3 - l_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

Con la expresión dada en la ecuación (5.22) y luego algunas de manipulaciones y sustituciones algebraicas se encuentra una solución al problema geométrico inverso.

#### 5.4.2 MGI para un mecanismo paralelo cinco barras

. Un manipulador paralelo planar, es una cadena cinemática cerrada de lazo simple, para este caso, se forma por cinco barras y cinco articulaciones rotacionales todas paralelas; el efecto final tiene 2 grados de libertad y dos articulaciones actuadas (figura 5.4).

## Cinemática de PMs

Para el análisis del manipulador se puede partir de su formación a partir de la concatenación de dos patas simples. La pata uno contiene dos articulaciones rotacionales, con todos sus ejes paralelos en la dirección de  $z_0$ , ubicadas en los puntos  $A_1, B_1$ , y la articulación actuada en el punto  $A_1$ ; la pata dos está formada por tres articulaciones rotacionales ubicadas en los puntos  $A_2, B_2$  y  $B_2$ , y la articulación actuada está en el punto  $A_2$  (figura 5.4).

La ecuación de lazo para el manipulador paralelo de cinco barras de la figura

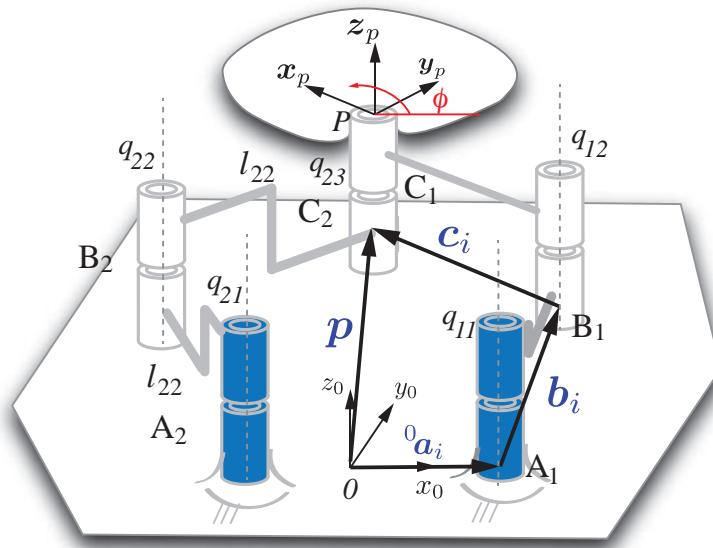


FIGURA 5.4: Definicion del Mecanismo paralelo de cinco barras para el MGI

5.4 esta dada por:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i + \mathbf{c}_i = \mathbf{p}, \quad (5.23)$$

donde  $\mathbf{q}_i = {}^0\mathbf{R}_{1i}(z_0, \theta_{1i}) {}^1\mathbf{b}_i$ , y  ${}^1\mathbf{b}_i = [l_{2i}, 0]^T$ . Reorganizando la ecuación (5.23), y haciendo el producto punto a ambos lados se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i &= (\mathbf{p} - \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_i)^T (\mathbf{p} - \mathbf{a}_i - \mathbf{q}_i) \\ \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i &= \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i + 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{q}_i - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_i - 2\mathbf{p}^T \mathbf{q}_i \\ 0 &= d_{1i} - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_i + (2\mathbf{a}_i^T - 2\mathbf{p}^T) \mathbf{q}_i, \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde  $d_i = \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i - \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i$ , y  $\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i = l_2^2$ , que corresponde a las magnitudes al cuadrado de cada eslabón y son conocidas. El vector asociado

con la articulación actuada  $\mathbf{q}_i$  es:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} l_{2i} \cos(\theta_{1i}) \\ l_{2i} \sin(\theta_{1i}) \end{bmatrix}.$$

Llevando la ecuación (5.24) a la forma de (5.5) se obtiene la ecuación de lazo cerrado, como función de las coordenadas generalizadas del robot y de los valores articulares:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} d_1 - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_1 + (2\mathbf{a}_1^T - 2\mathbf{p}^T) \mathbf{q}_1 \\ d_1 - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_2 + (2\mathbf{a}_2^T - 2\mathbf{p}^T) \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.25)$$

La ecuación (5.25) es la ecuación de restricción geométrica del manipulador paralelo de cinco barras, con esta ecuación luego de manipulaciones y sustituciones algebraicas es posible determinar los valores angulares de los actuadores  $\mathbf{q}_i$ . Se debe mencionar que cada fila de la ecuación (5.25) puede ser resuelta de forma independiente.

#### 5.4.3 MGI para el PM 2UPS-1RU

El PM 2UPS-1RU Es un manipulador paralelo de orientación con 3 grados de libertad, el centro de rotación del mecanismo esta en  $C_1$  (figura 5.5). El mecanismo tiene tres patas: dos iguales compuestas por una articulación universal, que se inserta en la base en el punto  $A_i$ , una articulación esférica, que se inserta en la plataforma móvil en el punto  $C_i$ , entre los puntos  $A_i$  y  $C_i$  para  $i = 1, 2$  se ubica una articulación actuada de tipo prismática  $\mathbf{q}_i$ ; la tercera pata está formada por una articulación universal que se conecta a la plataforma móvil y por una articulación rotacional, actuada, que se conecta directamente a la base.

El PGI para determinar los valores de las articulaciones actuadas se plantea a través de la ecuación de lazo de acuerdo con los sistemas de coordenadas y vectores definidos en la figura 5.5 de donde se obtiene la ecuación 5.26:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P \mathbf{c}_i. \quad (5.26)$$

## Cinemática de PMs

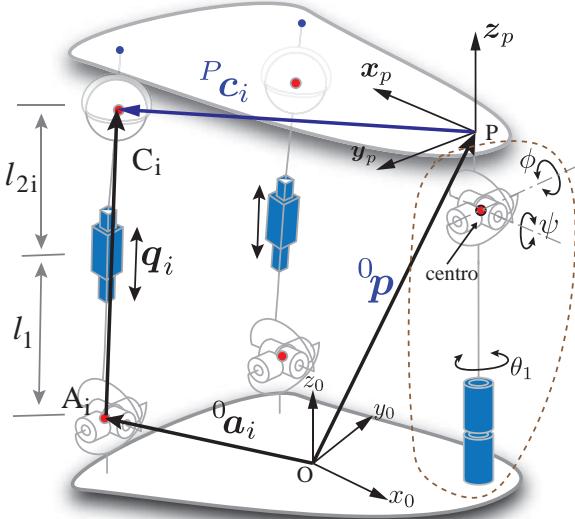


FIGURA 5.5: Definición del Mecanismo MP 2UPS-1RU para el MGI

Reorganizando la ecuación (5.26) y haciendo el producto punto se obtiene:

$$q_i^2 = \mathbf{p}^2 + \mathbf{c}_i^2 + \mathbf{a}_i^2 - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{p} - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{a}_i - 2\mathbf{p}^T \mathbf{a}_i, \quad (5.27)$$

donde  $\mathbf{c}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^p\mathbf{c}_i$ .

Llevando la ecuación (5.27) a la forma estándar dada por (5.5) se obtiene una expresión para determinar la longitud de los actuadores, como función de las coordenadas generalizadas del robot:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} d_i - 2\mathbf{c}_1^T (\mathbf{a}_1 + \mathbf{p}) - 2\mathbf{a}_1^T \mathbf{p} - q_1^2 \\ d_i - 2\mathbf{c}_2^T (\mathbf{a}_2 + \mathbf{p}) - 2\mathbf{a}_2^T \mathbf{p} - q_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

donde  $d_i = \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i$ , son longitudes conocidas, por lo que en la ecuación (5.28) quedan planteados algunos términos del modelo geométrico inverso.

Una restricción adicional debe ser introducida para garantizar que la plataforma no tenga desplazamiento, por lo que  $\mathbf{p}^T \mathbf{p} = l$ .

Para determinar el valor del actuador rotacional, se considera que en la pata tipo *RU* los ejes de las tres articulaciones rotacionales se interceptan, en el centro de giro de la plataforma *c*, la posición de la plataforma es constante,

y por último, que la orientación esta dada por el producto de tres rotaciones sucesivas en cada eje  $\theta_1, \psi, \phi$ :

$${}^0\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_{(z_0, \theta_1)} \mathbf{R}_{(y, \psi)} \mathbf{R}_{(z, \phi)}. \quad (5.29)$$

Como la orientación de la plataforma es conocida  ${}^0\mathbf{R}_P$ , las dos matrices pueden ser igualadas, definiendo una tercera ecuación de restricción para determinar el angulo  $\theta_i$ , y resolviendo posteriormente el problema geométrico inverso mediante algunos calculos y sustituciones.

#### 5.4.4 MGÍ para un PM tipo 3-UPU

Un PM 3-UPU es un manipulador paralelo de orientación con 3 GDL; el centro de rotación del mecanismo está en  $C$  (figura 5.6); cuenta con tres patas con igual disposición de eslabones y articulaciones; cada pata tiene tres articulaciones, dos universales y una prismática, la primera de las articulaciones universales se inserta en la base en el punto  $A_i$ , manteniendo la restriccción geométrica que consiste en que uno de los ejes de la articulación universal debe apuntar al centro del robot, La segunda articulación universal se fija a la plataforma móvil en el punto  $C_i$ , y debe mantener la restriccción geométrica de que uno de los ejes pase por el centro del robot, por su parte la articulación actuada  $\mathbf{q}_i$  es tipo prismática y se conecta mediante eslabones rígidos a las dos universales.

Para determinar los valores de las articulaciones actuadas, se plantea la ecuación de lazo de acuerdo con los sistemas de coordenadas y vectores definidos en la figura 5.6, de donde se obtiene la ecuación 5.30:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P \mathbf{c}_i, \quad (5.30)$$

Reorganizando la ecuación (5.30) y operando mediante el producto punto se obtiene:

$$q_i^2 = d_i - 2 \mathbf{c}_i^T \mathbf{p} - 2 \mathbf{c}_i^T \mathbf{a}_i - 2 \mathbf{p}^T \mathbf{a}_i, \quad (5.31)$$

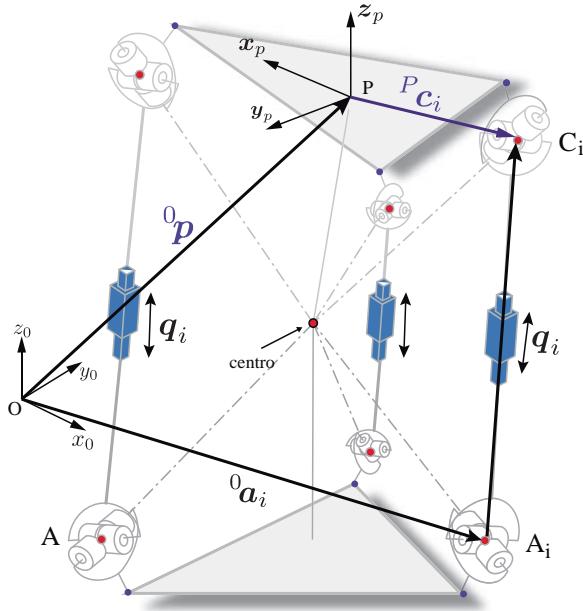


FIGURA 5.6: Definición de Mecanismo MP 3UPU para el MGÍ

donde  $\mathbf{c}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^p\mathbf{c}_i$ , en la que  $d_i = \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i$ , son longitudes conocidas.

Llevando la ecuación (5.31) a la forma propuesta en la ecuación (5.5) se obtiene una expresión para determinar la longitud de los actuadores, como función de las coordenadas generalizadas del robot. Considerando todas la patas se llega a la ecuación (5.32):

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} d_1 - 2\mathbf{c}_1^T(\mathbf{a}_1 + \mathbf{p}) - 2\mathbf{a}_1^T \mathbf{p} - q_1^2 \\ d_2 - 2\mathbf{c}_2^T(\mathbf{a}_2 + \mathbf{p}) - 2\mathbf{a}_2^T \mathbf{p} - q_2^2 \\ d_3 - 2\mathbf{c}_3^T(\mathbf{a}_3 + \mathbf{p}) - 2\mathbf{a}_3^T \mathbf{p} - q_3^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

Con la expresión dada en la ecuación (5.32) y realizando algunos cálculos y sustituciones algebraicas se encuentra una solución al problema geométrico inverso.

#### 5.4.5 MGÍ para un PM 3-RRR Esférico

Este PM se encuentra usualmente en la literatura como el nombre de *oj o ágil* [48]. Es un manipulador paralelo de orientación con 3 grados de libertad, el

## Cinemática de PMs

centro de rotación del mecanismo está ubicado en  $C$  (figura 5.7).

Cuenta con tres patas todas iguales, cada una de ellas formada por tres articulaciones rotacionales cuyos ejes de rotación pasan por  $C$  (figura 5.7a); la primera de las articulaciones rotacionales se inserta en el punto  $A_i$  de la base, manteniendo la restricción geométrica que consiste en que su eje pase por el centro del robot, además es la articulación actuada  $\mathbf{q}_i$  para cada una de las piernas; en la plataforma móvil, en el punto  $C_i$ , se fija la tercera articulación que debe mantener la misma restricción geométrica; La segunda articulación se conecta mediante eslabones rígidos a la primera y tercera articulación, manteniendo también la restricción geométrica ya mencionada.

La relación geométrica entre el eje de la primera y segunda articulación según la figura 5.7b esta dada por el ángulo  $\alpha_1$  y definido por el primer eslabón distal con una distancia  $l_1$ ; en correspondencia, la relación entre el eje de la tercera y segunda articulación esta dado por el ángulo  $\alpha_2$ , definido como eslabón distal con una distancia  $l_2$ .

El PM considerado en este análisis es una versión particular donde los ejes de la articulaciones son todos ortogonales entre si (figura 5.7a) [12].

El MGI para determinar los valores de las articulaciones actuadas, se plantea mediante la definición de la ecuación de lazo usando los sistemas de coordenadas y vectores definidos en la figura 5.7b, de donde se obtiene la ecuación 5.33:

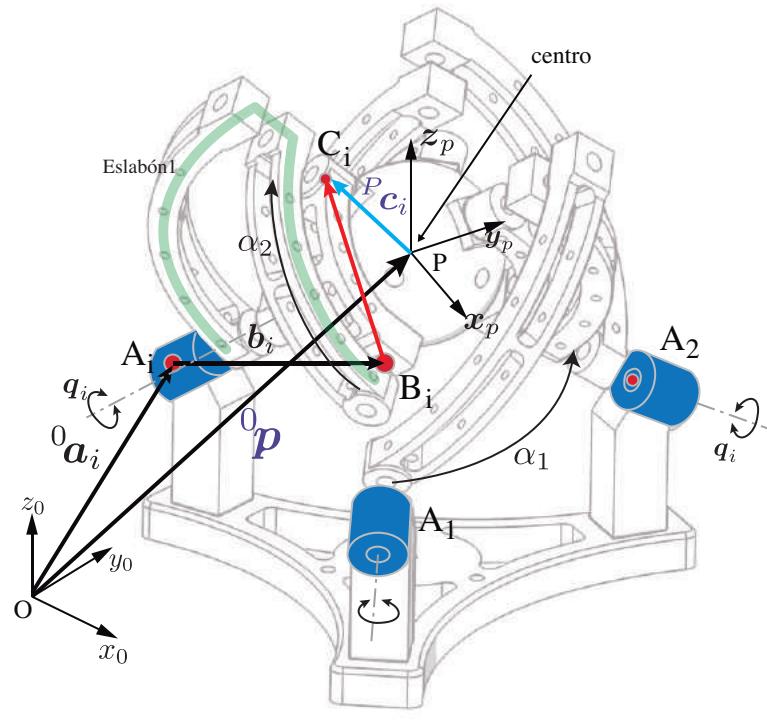
$$\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i + \mathbf{k}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P \mathbf{c}_i, \quad (5.33)$$

donde  $\mathbf{b}_i = {}^0\mathbf{R}_{(\mathbf{u}_0, q_i)} {}^1\mathbf{b}_i$ , y  ${}^1\mathbf{b}_i = [b_x, b_y, b_z]^T$ ; dado que el sistema de coordenadas de referencia se ubica en el centro del robot  $\mathbf{p} = [0, 0, 0]^T$ , entonces la ecuación (5.33) resulta en:

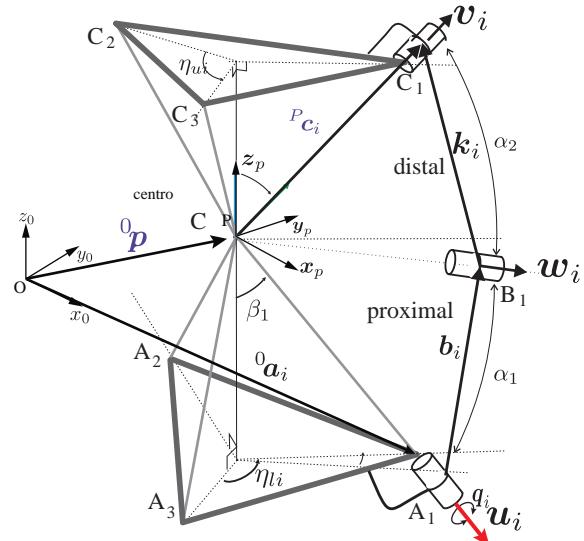
$$\mathbf{k}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i. \quad (5.34)$$

Haciendo el producto punto en ambos lados de la ecuación (5.34) se logra una

Cinemática de PMs



(A) CAD 3RRR Esférico



(B) Esquemático 3-RRR Esférico

FIGURA 5.7: Manipulador paralelo esférico 3RRR

expresión en términos de la distancia:

$$\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = d_i - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{c}_i + 2(\mathbf{a}_i^T - \mathbf{c}_i^T)\mathbf{b}_i. \quad (5.35)$$

donde  $d_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_i + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i$ , son todos valores conocidos; el último término es la longitud de eslabón proximal y  $\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = l_2^2$  que también es conocida;  $\mathbf{c}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i$  es información conocida, al igual que  ${}^0\mathbf{a}_i$  por tanto la variable que se debe resolver esta dada por  $\mathbf{b}_i = \mathbf{R}_{(\mathbf{u}_i, q_i)}^{-1} \mathbf{b}_i$  debido a  $q_i$  es el valor a determinar del actuador.

Llevando la ecuación (5.35) a la forma de (5.5), como función de las coordenadas generalizadas del robot, considerando todas las patas se llega (5.36):

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} d_1 - 2\mathbf{a}_1^T \mathbf{c}_1 + 2(\mathbf{a}_1^T + \mathbf{c}_1^T)\mathbf{b}_1 - l_2^2 \\ d_2 - 2\mathbf{a}_2^T \mathbf{c}_2 + 2(\mathbf{a}_2^T + \mathbf{c}_2^T)\mathbf{b}_2 - l_2^2 \\ d_3 - 2\mathbf{a}_3^T \mathbf{c}_3 + 2(\mathbf{a}_3^T + \mathbf{c}_3^T)\mathbf{b}_3 - l_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.36)$$

Con la expresión dada en (5.36) y luego de manipulaciones y sustituciones se encuentra una solución al PGI. Al igual que para el robot 3-RRR cada fila en la ecuación 5.36 puede ser resuelta independientemente.

#### 5.4.6 MGI para el PM tipo Delta

El manipulador delta es ampliamente conocido en el ámbito de los robots paralelos. Fue desarrollado por Clavel a principios de la década de los noventa [27], existe incluso una variante desarrollada por la Universidad de Maryland [125]. El robot delta es un PM del tipo traslacional con 3 grados de libertad, lo que significa que el robot mantiene la misma orientación mientras se mueve en el espacio de trabajo, y los movimientos son realizados en las direcciones  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ .

Como se observa en la figura 5.8 el robot Delta tiene tres patas iguales, cada pata está formada por una articulación rotacional y cuatro articulaciones esféricas; la articulación actuada corresponde a la más próxima a la base.

La pata está conformada por dos eslabones, uno proximal cercano a la base y

## Cinemática de PMs

otro distal cercano a la plataforma móvil. El eslabón proximal es unido a la base a través de una articulación rotacional en el punto  $A_i$ ; el eslabón distal consiste en un lazo cerrado formado por cuatro eslabones y cuatro articulaciones esféricas que forman un paralelogramo; los lados largos del paralelogramo son iguales y representan la longitud del eslabón distal  $l_1$ ; de la parte central de uno de los lados corto es conectada la plataforma móvil en el punto  $C_i$ , al igual que el otro extremo corto del paralelogramo se une rígidamente al eslabón proximal en el punto  $B_i$ . La distancia entre el eje de la articulación rotacional y el punto  $B_i$  es la longitud del eslabón proximal  $l_2$ .

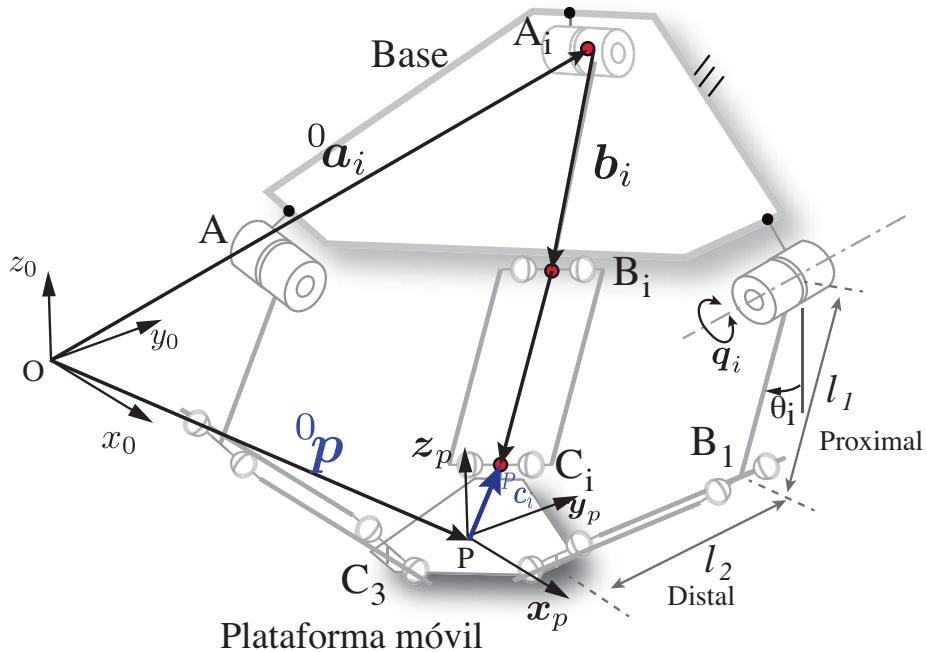


FIGURA 5.8: Ejemplo MGI para MP Delta

La entrada de movimiento, es decir, las articulaciones actuadas para el manipulador Delta corresponden a las insertadas en la base, y estan denotadas por  $q_i$ .

El problema geométrico inverso, para determinar los valores de las articulaciones actuadas, esta definido por la ecuación de lazo dada por los sistemas de coordenadas y vectores definidos en la figura 5.8, de la que se obtiene la

expresión 5.37:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i + \mathbf{k}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i, \quad (5.37)$$

donde  $\mathbf{b}_i = {}^0\mathbf{R}_{(\mathbf{u}_i, q_i)} {}^1\mathbf{b}_i$ , y  ${}^1\mathbf{b}_i = [b_x, b_y, b_z]^T$ . Dado que el sistema de coordenadas de la plataforma móvil no cambia de orientación con el movimiento del manipulador, este es seleccionado de forma tal que es paralelo al sistema de coordenadas de la base  ${}^0\mathbf{R}_P = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ ; organizando los términos de la ecuación (5.37) se puede obtener:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{p} + \mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i, \quad (5.38)$$

Operando mediante producto punto a los dos lados de la ecuación (5.38) se obtiene una expresión de distancia, en función de la posición del eslabón distal que depende de  $q_i$ :

$$\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = d_i - 2\mathbf{p}^T (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i) - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{a}_i + 2(\mathbf{a}_i^T - \mathbf{p}^T - \mathbf{c}_i^T) \mathbf{b}_i, \quad (5.39)$$

donde  $d_i = \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i$ , son todas distancias conocidas, y  $\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = l_2^2$ ;  $\mathbf{c}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i$  al igual que  ${}^0\mathbf{a}_i$  es información obtenida previamente, por tanto la única variable desconocida corresponde a  $\mathbf{b}_i = {}^0\mathbf{R}_{(\mathbf{u}_i, q_i)} {}^1\mathbf{b}_i$  debido a que  $q_i$  corresponde al valor del actuador a determinar.

Llevando la ecuación (5.39) a la forma de la ecuación (5.5), como función de las coordenadas generalizadas del robot, y posteriormente considerando todas la patas se obtiene la ecuación (5.40):

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} d_1 - 2\mathbf{p}^T (\mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1) - 2\mathbf{c}_1^T \mathbf{a}_1 + 2(\mathbf{a}_1^T - \mathbf{p}^T - \mathbf{c}_1^T) \mathbf{b}_1 - l_2^2 \\ d_2 - 2\mathbf{p}^T (\mathbf{c}_2 - \mathbf{a}_2) - 2\mathbf{c}_2^T \mathbf{a}_2 + 2(\mathbf{a}_2^T - \mathbf{p}^T - \mathbf{c}_2^T) \mathbf{b}_2 - l_2^2 \\ d_3 - 2\mathbf{p}^T (\mathbf{c}_3 - \mathbf{a}_3) - 2\mathbf{c}_3^T \mathbf{a}_3 + 2(\mathbf{a}_3^T - \mathbf{p}^T - \mathbf{c}_3^T) \mathbf{b}_3 - l_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.40)$$

Con la expresión dada en la ecuación (5.40) y luego de las correspondientes sustituciones y cálculos, se obtiene una solución al PGI.

### 5.4.7 MGI para un PM tipo 6-UPS

El manipulador paralelo 6-UPS es ampliamente conocido en el ámbito de los robots paralelos espaciales, es conocido como plataforma Steward-Gough o simplemente SG [51][119][32]. El espacio operacional del robot esta compuesto por tres desplazamientos y tres rotaciones independientes, por tanto es un robot con 6 grados de libertad.

Como se observa en la figura 5.9 la plataforma SG está compuesta por seis patas iguales. Cada pata esta compuesta por una articulación universal, una prismática que corresponde a la entrada de movimiento y una articulación esférica; en total la pata tiene seis grados de libertad y se fija a la base a través de la articulación universal, con centro en el punto  $A_i$ , en el cual también se fija uno de los extremos del actuador prismático. La conexión entre la plataforma móvil y el actuador prismático se hace a través de la articulación esférica, justamente en el centro de la articulación esférica correspondiente punto  $C_i$ .

En el caso específico de la plataforma SG todas las patas son equidistantes. La distancia entre el punto  $C_i$  y  $A_i$  es la longitud del actuador  $q_i$ , compuesta de una distancia fija y una variable, la distancia fija es  $l_1$  y la variable corresponde a  $l_2*$ .

El problema geométrico inverso para determinar los valores de las articulaciones actuadas, se plantea por medio de la ecuación de lazo de acuerdo con los vectores y sistemas de coordenadas definidos en la figura 5.9, de donde se obtiene la ecuación 5.41:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i. \quad (5.41)$$

Organizando los términos de (5.37) se obtiene la ecuación (5.42):

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i, \quad (5.42)$$

luego, haciendo el producto punto a los dos lados de la ecuación (5.42) se

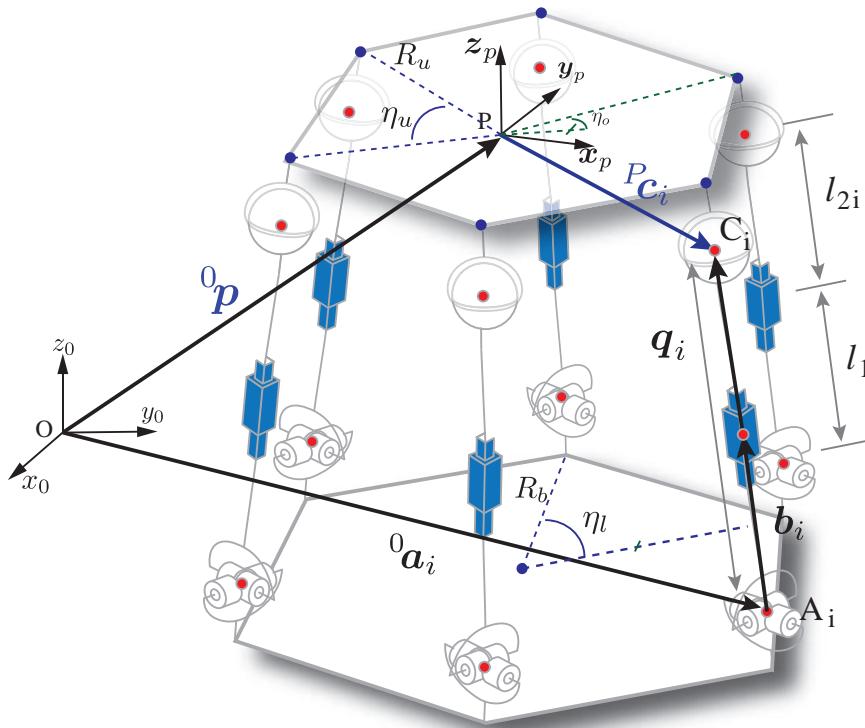


FIGURA 5.9: Definición de Mecanismo 6UPS para MGI.

obtiene una expresión para la distancia  $q_i$  llegando a la ecuación (5.43):

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i = d_i + 2\mathbf{c}_i^T(\mathbf{p} - \mathbf{a}_i) - 2\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}, \quad (5.43)$$

donde  $d_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i + \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i$ ; la longitud del actuador esta dada por  $q_i^2 = \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{c}_i = {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i$ ; el vector  $\mathbf{c}_i$  y  $\mathbf{a}_i$  dependen, de la geometría de la plataforma móvil y la base respectivamente.

Llevando la ecuación (5.43) a la forma dada en la ecuación (5.5), como función de las coordenadas generalizadas del robot, considerando todas la patas se encuentra:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} d_1 + 2\mathbf{c}_1^T(\mathbf{p} - \mathbf{a}_1) - 2\mathbf{a}_1^T \mathbf{p} - q_1^2 \\ d_2 + 2\mathbf{c}_2^T(\mathbf{p} - \mathbf{a}_2) - 2\mathbf{a}_2^T \mathbf{p} - q_2^2 \\ d_3 + 2\mathbf{c}_3^T(\mathbf{p} - \mathbf{a}_3) - 2\mathbf{a}_3^T \mathbf{p} - q_3^2 \\ d_4 + 2\mathbf{c}_4^T(\mathbf{p} - \mathbf{a}_4) - 2\mathbf{a}_4^T \mathbf{p} - q_4^2 \\ d_5 + 2\mathbf{c}_5^T(\mathbf{p} - \mathbf{a}_5) - 2\mathbf{a}_5^T \mathbf{p} - q_5^2 \\ d_6 + 2\mathbf{c}_6^T(\mathbf{p} - \mathbf{a}_6) - 2\mathbf{a}_6^T \mathbf{p} - q_6^2 \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

En la expresión dada en (5.44) se tienen seis ecuaciones de restricción de distancia, las cuales pueden ser resueltas independientemente, basta con determinar el valor de  $l_2$ , solucionando de forma directa el problema geométrico inverso propuesto.

#### 5.4.8 MGI para un PM 3-PUU-1S

El manipulador paralelo 3PUU-1S posee un espacio operacional conformado por tres rotaciones independientes, lo que lo dota de tres grados de libertad pero sin posibilidad de traslación alguna; las rotaciones que efectúa solamente se dan alrededor del centro de la plataforma que coincide con el centro de la única articulación esférica que posee.

Como se observa en la figura 5.10 el manipulador está compuesto por cuatro patas; tres de las patas son iguales y se encuentran ubicadas simétricamente respecto al centro de la plataforma, la última pata se ubica en el centro de la plataforma. Las patas exteriores están formadas por tres articulaciones, dos universales y una prismática y por dos eslabones proximal y distal; la articulación prismática es actuada y permite la unión a la base en el punto  $A_i$ ; la unión de la pata a la plataforma móvil se hace por medio de la articulación universal en el punto  $C_i$ ; la unión entre el eslabón proximal y distal se da por medio de otra articulación universal en el punto  $B_i$ ; la pata interior consiste de un eslabón y una articulación esférica que unen los centros de la plataforma móvil y de la base.

La distancia entre el punto  $B_i$  y  $A_i$  corresponde a la longitud del actuador  $q_i$ , y la distancia entre el punto  $C_i$  y  $B_i$  es una constante denotada por  $l_2$ .

El MGI, que permite determinar los valores de las articulaciones actuadas, se plantea mediante la ecuación de lazo tomando los vectores y sistemas de coordenadas definidos en la figura 5.10, obteniendo la expresión 5.45:

$$\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i + \mathbf{k}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i, \quad (5.45)$$

donde  $\mathbf{b}_i = [0, 0, q_i]^T$ . Organizando términos de la ecuación (5.45) resulta

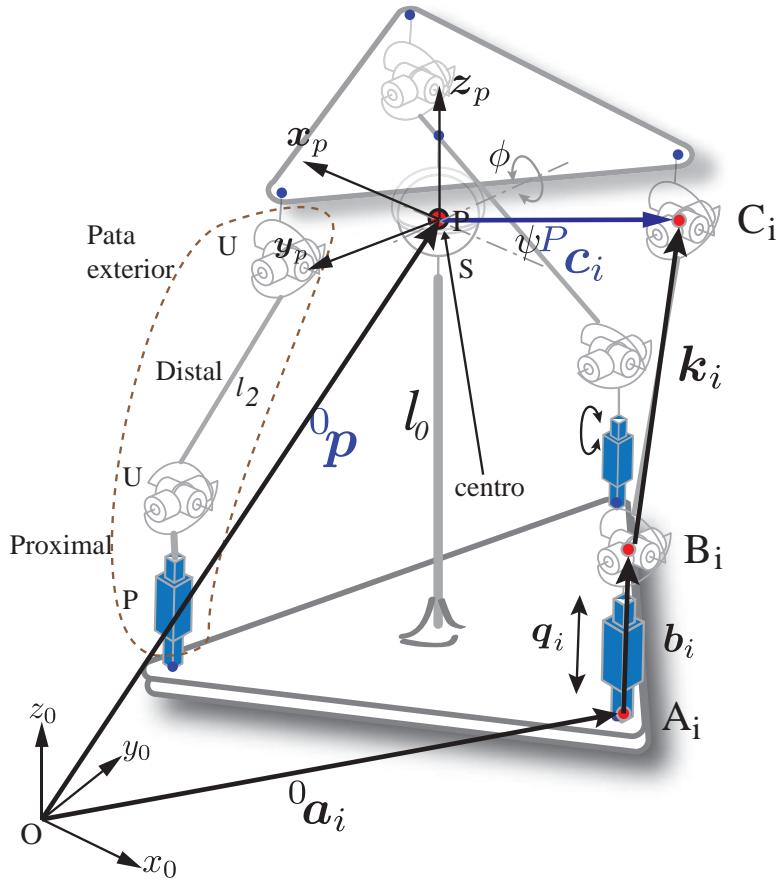


FIGURA 5.10: Definición de mecanismo MP 3PUU-1S para MGI.

(5.46):

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{p} + \mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i \quad (5.46)$$

Una restricción adicional dado que la plataforma esta inhabilitada para realizar desplazamientos, esta dada por:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = l_0.$$

Haciendo el producto punto a los dos lados de la ecuación (5.46) se obtiene una expresión para la distancia en función de la posición del eslabón distal que depende directamente de  $q_i$ :

$$\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = \mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + 2(\mathbf{a}_i^T - \mathbf{p}^T - \mathbf{c}_i^T) \mathbf{b}_i - 2\mathbf{p}^T (\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i) - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{a}_i + d_i, \quad (5.47)$$

## Cinemática de PMs

donde  $d_i = \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_i + \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i$ , son distancias conocidas, al igual que  $\mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i = l_2^2$ ;  $\mathbf{c}_i = {}^0 \mathbf{R}_P {}^P \mathbf{c}_i$  es información obtenida previamente, al igual que  $\mathbf{a}_i$ ; la única variable no encontrada es  $\mathbf{b}_i$  ya que depende de la longitud del actuador a determinar, lo que se convierte en una ecuación de segundo orden. Organizando la ecuación (5.47) se obtiene:

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i + f_i \mathbf{b}_i + g_i = 0, \quad (5.48)$$

donde  $f_i = 2(\mathbf{a}_i^T - \mathbf{p}^T - \mathbf{c}_i^T)$  y  $g_i = -2\mathbf{p}^T(\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i) - 2\mathbf{c}_i^T \mathbf{a}_i - \mathbf{k}_i^T \mathbf{k}_i + d_i$ .

Llevando la ecuación (5.48) a la forma de la ecuación (5.5), como función de las coordenadas generalizadas del robot y considerando todas las patas se llega a:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1 + f_1 \mathbf{b}_1 + g_1 \\ \mathbf{b}_2^T \mathbf{b}_2 + f_2 \mathbf{b}_2 + g_2 \\ \mathbf{b}_3^T \mathbf{b}_3 + f_3 \mathbf{b}_3 + g_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.49)$$

Mediante el cálculo de la expresión dada en (5.49) se obtiene una solución al PGI propuesto.

## 5.5 Modelo geométrico directo (MGD) para PMs

El modelo geométrico directo (MGD) de manipuladores paralelos, tal como se definió antes, consiste en obtener el vector de coordenadas operacionales  $\mathbf{X}$  como una función de las coordenadas articulares actuadas  $\mathbf{q}_a$ , a partir de la expresión general dada en la ecuación (5.5), un problema adicional es obtener los valores de las articulaciones pasivas  $\mathbf{q}_d$  con una función de las articulaciones actuadas, esta información es necesaria cuando también se desea obtener el modelo dinámico del MP.

Para encontrar la solución del MGD, normalmente primero se reorganiza adecuadamente la ecuación (5.5) con el fin de suprimir los parámetros de traslación del vector  $\mathbf{x}$  de manera que se obtenga un polinomio en función de la tangente,

## Cinemática de PMs

sinusoidal y/o coseno de los parámetros de rotación del vector  $\mathbf{X}$  en común, de esta manera y para simplificar los cálculos, el análisis de modelo directo se fija entre los puntos  $A_i$  y  $C_i$

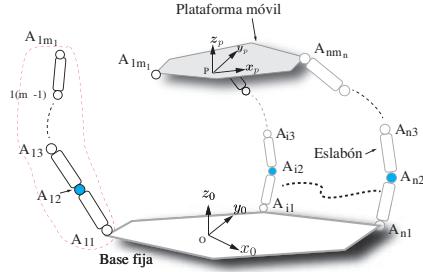
Sin perder generalidad, y para plantear de forma sencilla el MGD, se puede partir de una aproximación que consiste en hacer una desconexión virtual de la pata que se encuentra la articulación que une la pata con la plataforma móvil, en el punto denotado como  $A_{1n}$  (figura 5.11a). Cuando se desconecta una pata, y manteniendo constantes los valores de los actuadores de las demás patas, la plataforma gana uno o más grados de libertad, y el punto  $A_{1n}$  se mueve libremente definiendo una curva, que es denotada como  $\mathcal{P}$  (figura 5.11b). Así mismo el extremo de la pata desconectada, con valor constante en el actuador de la pata, describe una curva denotada por  $\mathcal{P}$  (figura 5.11c).

La solución del modelo geométrico directo resulta de la intersección de dos trayectorias  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{S}$  que corresponde a la trayectoria dada por el movimiento de toda la plataforma con la pata desconectada con todos los demás actuadores constantes. Cuando existen diferentes puntos de intersección significa que el manipulador tiene diferentes configuraciones que corresponden a la solución, es decir diferentes conjuntos de valores de actuadores. En los robots paralelos a los conjuntos de soluciones diferentes se les conoce como *modos de ensamblado* del robot [12]; de la misma manera sus posibles soluciones a partir del MGI se les conoce como *modos de trabajo*.

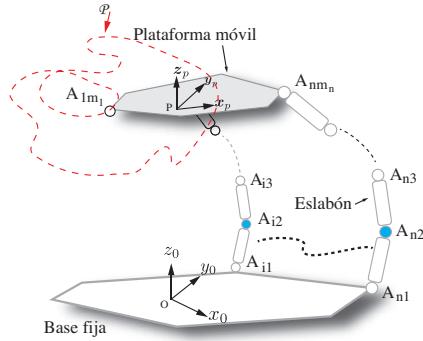
Al considerar las trayectorias  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{P}$  para diferentes manipuladores, las soluciones pueden ser establecidas por ecuaciones algebraicas, lo que implica la dificultad de su solución y análisis, sin embargo se puede encontrar un número máximo de intersecciones de las trayectorias, un método comúnmente usado para analizar las ecuaciones algebraicas es el método de Bézout citeTsai2009.

Dada la dificultad del planteamiento del PGI, aún hoy no existe una solución general para el mismo. En la literatura los métodos numéricos para la solución del problema geométrico directo son un camino viable, como el método de análisis de intervalos propuesto por Merlet [89], o las metodologías basadas en

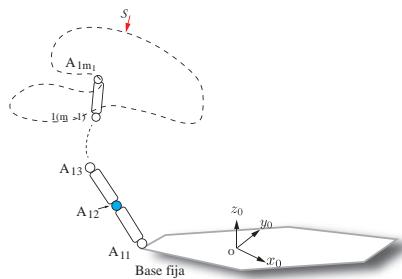
## Cinemática de PMs



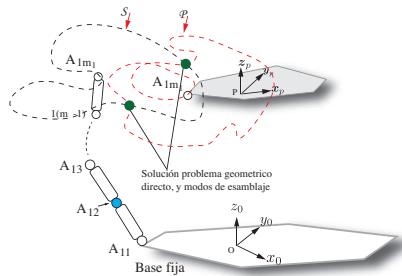
(A) MGD, desconexión virtual de la pata y la plataforma



(B) Trayectoria  $\mathcal{P}$  descrita por la plataforma móvil, manteniendo constantes los actuadores restantes.



(C) Trayectoria  $\mathcal{S}$  descrita por la cadena serial considerando que el actuador es constante.



(D) Intersección de la trayectorias de movimiento de la pata y la plataforma

FIGURA 5.11: MGD interpretación geométrica de la solución.

la Descomposición geométrica cilíndrica propuesta por Chablat en [22].

En el presente trabajo se describe un método iterativo para la solución del MGD, consistente en conocer para un tiempo dado  $t$  una pose exacta de la plataforma, y a partir de esta referencia, determinar en un tiempo  $t + \delta t$  la pose del robot partiendo de su proximidad a la pose ya conocida en el tiempo  $t$ . La solución a dicha proposición se encuentra usando el método de Newton-Rapshon debido a su amplio uso en la convergencia numérica de sistemas de ecuaciones no-lineales.

Con tal objetivo se debe plantear un vector restricción de distancia ( $\phi(q) = 0$ ) del mecanismo usando una aproximación mediante la formulación multicuerpo para luego realizar una aproximación sucesiva por el método de Newton Raphson.

### 5.5.1 Aproximación a la cinemática directa mediante métodos numéricos

El análisis numérico mediante el método de Newton-Raphson (N-R) permite encontrar la solución de ecuaciones algebraicas no lineales de la forma:

$$f(x) = 0 \quad (5.50)$$

El algoritmo busca encontrar un cero de la función mediante aproximaciones sucesivas, partiendo de un punto cercano conocido; el criterio de aproximación es definido por la tangente de la función en dicho punto; cada vez que se itera, nuevo punto es estimado y se verifica mediante un criterio de convergencia y error permitido, si cumple entonces el punto es tomado como solución; de esta forma, la solución encontrada no es exacta, sino que estará acotada por un error finito previamente definido, y la convergencia del método está limitada a la existencia de la derivada de la función en el punto de análisis.

Tomando la función y considerando que  $x = x^*$  es solución de la ecuación (5.50),  $x_n$  una aproximación de  $x^*$ , la expansión en series de Taylor de (5.50) evaluada en  $x = x_n$  esta dada por:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \dots . \quad (5.51)$$

Si se considera una estimación  $x_{n+1}$ , de manera tal que  $|x_{n+1} - x_n|$  sea lo suficientemente pequeña, es posible despreciar los términos de orden superior de la ecuación (5.51), y aproximarse de acuerdo a:

$$f(x_{n+1}) \approx f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (5.52)$$

$f'(x_n) \neq 0$ , se puede escribir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5.53)$$

Acotando el error, a un valor finito  $\epsilon$ , que representa la precisión deseada de la solución, resulta que  $x_{n+1}$  es una solución aproximada de la ecuación (5.50) si  $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ , en caso contrario, se realiza una nueva iteración evaluando la ecuación (5.53), hasta hallar a un valor que satisfaga las condiciones de solución.

Para evitar sucesiones divergentes, se puede emplear criterios de convergencia y determinar si para dicha estimación la solución converge, en caso contrario se debe usar una condición inicial diferente (semilla).

Claramente el método de N-R, tiene problemas con los mínimos, máximos o puntos de inflexión, pues son lugares donde la tangente de la función no brinda información que permita encontrar una solución; por otro lado si la función tiene múltiples soluciones, los resultados obtenidos pueden no ser los esperados, y entonces la solución encontrada está directamente ligada con valor inicial seleccionado.

Para aplicar el método de N-R para la solución del problema geométrico directo es necesario establecer cierta información a partir del el análisis geométrico de manipuladores paralelos:

**Coordenadas del espacio operacional:** o coordenadas de la plataforma móvil  $\mathbf{X}$ . Las componentes correspondientes a la posición  $\mathbf{x}_p$  son expresadas en coordenadas rectangulares, mientras que las componentes que representan la orientación  $\mathbf{x}_o$  están expresadas por parámetros de euler o cuaternios.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ e_0 \\ e_1 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (5.54)$$

**Coordenadas del espacio articular:** Vector formado por las variables que representan todos los actuadores de las  $n$  patas que conforman el manipulador denotado por  $\mathbf{q}_a$ .

**Función de restricción:** Como ya se ha venido expresando, la ecuación de restricción geométrica  $h(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a)$  relaciona las coordenadas articulares actuadas con las operacionales independientes, de acuerdo a la ecuación (5.2) para todas la patas. Donde cada fila es obtenida de la ecuación de lazo cerrado de una pata del manipulador paralelo (figura 5.2) y definida de acuerdo a la ecuación (5.9).

**Derivada en el tiempo de la función de restricción:** Matriz que resulta de la derivada en el tiempo de la función de restricción y esta denotada por  $\mathbf{J}_x$ .

**Error de convergencia:** Corresponde al error máximo  $\epsilon$  admisible que puede existir en el espacio articular para que una solución sea considerada como válida.

**Valor inicial:** Corresponde a una pose conocida a partir de la que se inician las iteraciones con algoritmo de N-R, el valor inicial de la pose se denota como  $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{X}$  y puede ser asignado de forma arbitraria. Aunque estos valores pueden ser aleatorios o provenir de una configuración anterior, es recomendada

## Cinemática de PMs

ble su selección lógica, y que previamente, mediante la solución al problema geométrico inverso se determinen los valores correspondientes de  $\mathbf{q}_{a0} \in \mathbf{q}_a$ .

Siendo así, se parte de una pose conocida de la plataforma móvil y de los valores correspondientes de los actuadores, con esta información se determina el vector de restricciones geométricas obtenido de la ecuación de lazo, y a continuación se evalúa la magnitud del vector de restricciones y se le aplica el criterio de convergencia, si es cumplido entonces equivale a la pose buscada, en caso contrario, se determina un nuevo valor de pose y se repite el procedimiento. En la figura 5.12 se puede observar de forma gráfica la forma de convergencia del método propuesto reduciendo  $\mathbf{h}_{pi}$ .

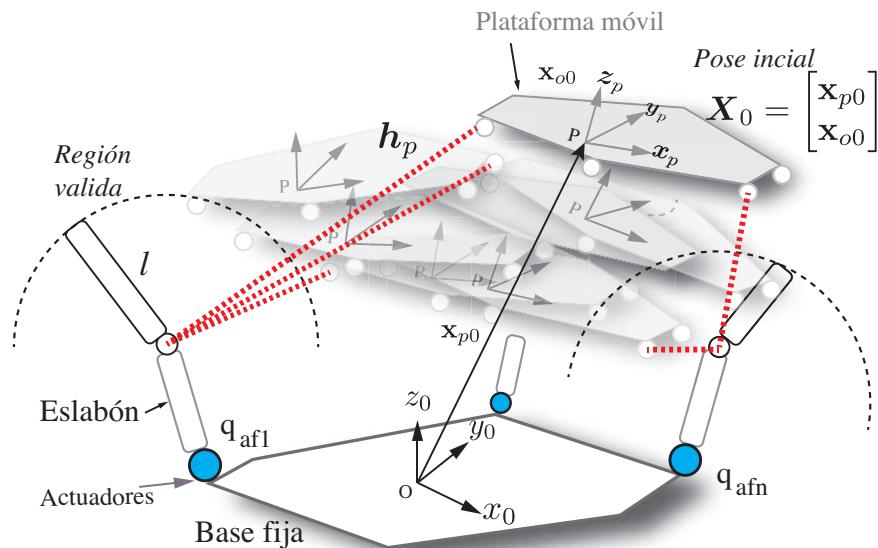


FIGURA 5.12: Interpretación gráfica del método numérico para el PGD.

En la figura 5.13 se presenta el diagrama de flujo que corresponde a la descripción que se ha hecho del método propuesto, que algorítmicamente puede presentarse como:

1. Definir el vector de ecuaciones geométricas de restricción del PM.
2. Inicializar el algoritmo con los valores  $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{X}$  y  $\mathbf{q}_{af} \in \mathbf{q}_a$ .
3. Evaluar la función de restricción geométrica inicial  $\mathbf{h}(\mathbf{X}_0, \mathbf{q}_{af})$

4. Verificar que el valor máximo de la función de restricción sea menor al valor de convergencia  $\epsilon$ ,  $\|\mathbf{h}(\mathbf{X}_0, \mathbf{q}_{af})\| < \epsilon$
5. Calcular el Jacobiano  $\mathbf{J}_x$  como la derivada del vector de restricción.
6. Determinar la siguiente pose  $\mathbf{X}(k + 1)$  de la plataforma en la iteración  $k..$

$$\mathbf{X}(k + 1) = \mathbf{X}(k) + \mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{X}_0, \mathbf{q}_{af})) \quad (5.55)$$

7. Normalizar los parámetros asociados con la pose, que forman el el vector  $\mathbf{X}(k)$  y se actualiza en nuevo valor de  $\mathbf{X}(k)$ .
8. Nuevamente se calcula la función de restricción para los nuevos valores y se aplica el criterio de convergencia.
9. En caso de no cumplir, iterar de nuevo desde el item 4.
10. Finaliza

Cuando se hace uso de métodos numéricos de solución es común que no converjan, por esta razón es aconsejable tener un criterio de parada, que consiste en un número máximo de iteraciones permitidas  $k_{max}$ , en caso de sobrepasar el valor dado, existen dos posibilidades; una es generar nuevamente un valor semilla o pose inicial aleatoria; la otra es indicar que no se ha encontrado convergencia del algoritmo, conclusión acertada cuando por ejemplo el robot está en una configuración singular.

También cabe aclarar, que en el paso 7, se indica que se debe normalizar la pose, esto se deba a que la orientación tiene diferentes representaciones y ellas deben cumplir por si mismas restricciones propias de su representación, en este caso, se utiliza un cuaterniono el cual debe ser unitario y por tanto

$$\mathbf{x}_o(k + 1) = \frac{\mathbf{x}_o(k + 1)}{\|\mathbf{x}_o(k + 1)\|}.$$

### 5.5.2 Función de restricción geométrica para el MGD

Considerando un MP genérico con  $n$  patas que conectan una plataforma móvil con una base fija, se definen los sistemas de coordenadas para la plataforma fija y la base respectivamente,  $F_0(0, x_0, y_0, z_0)$  y  $F(p, x_p, y_p, z_p)$  (figura 5.14).

## Cinemática de PMs

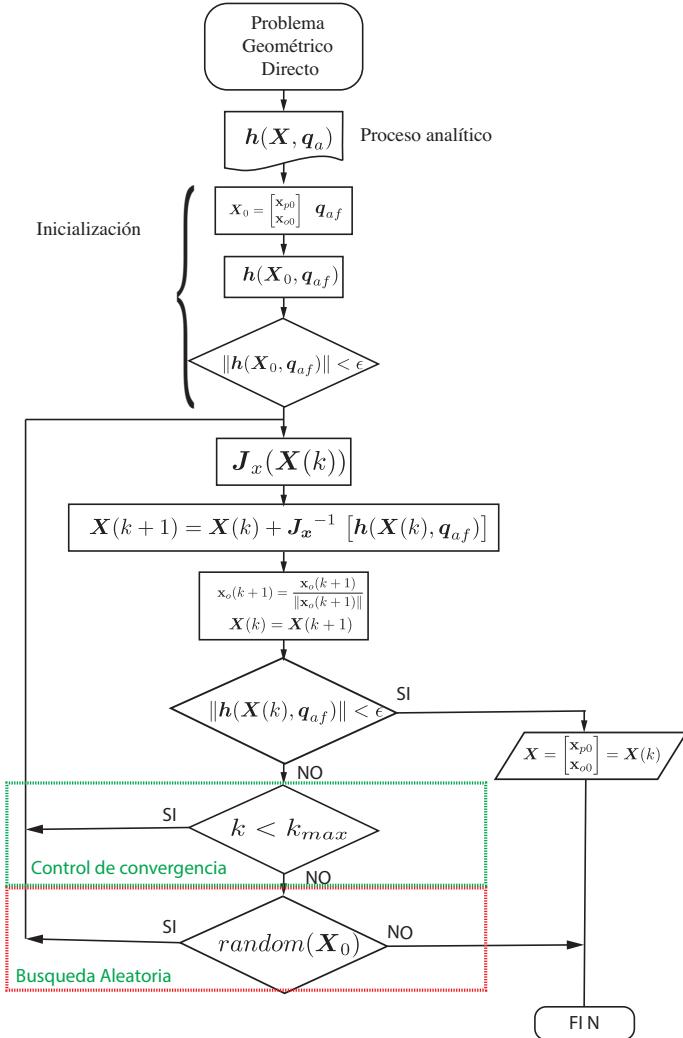


FIGURA 5.13: Digrama de flujo del algoritmo propuesto para la solución numérica del PGD.

La posición y la orientación de la plataforma móvil está dada por el vector de coordenadas generalizadas:  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_P]^T$ , donde  $\mathbf{x}_p = \mathbf{p} = [x, y, z]^T$  define la posición y  $\mathbf{x}_O = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T$  define la orientación en términos de los parámetros de Euler (representación en cuaternios).

En esta metodología son usados los parámetros de Euler no solamente por ser una representación compacta y no singular para la orientación, sino también debido a sus propiedades e identidades útiles que facilitan la representación y manipulación de rotaciones.

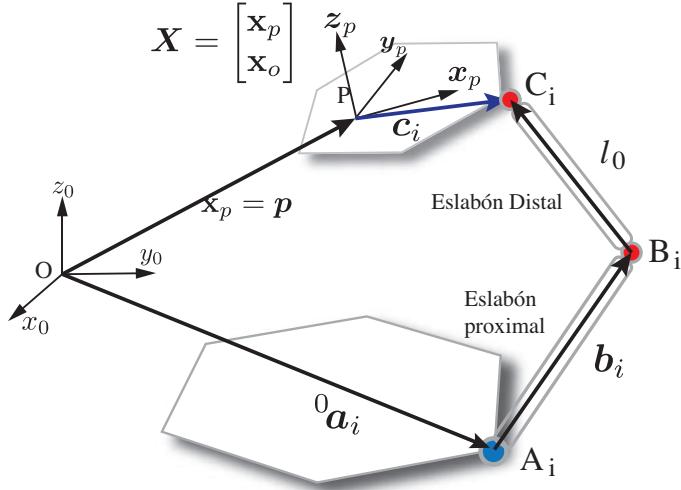


FIGURA 5.14: Modelo de MP simplificado a una pata para el análisis del MGD.

Independientemente de la topología del PM, la ecuación de lazo (5.56) debe cumplirse para las  $n$  patas:

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} = \overrightarrow{O_iP_i} + \overrightarrow{P_iC_i}. \quad (5.56)$$

Sin perder generalidad, se asume que la longitud de  $\overrightarrow{B_iC_i}$  permanece invariante para todas las configuraciones del PM  $\|\overrightarrow{B_iC_i}\| = l_{0i}$ , debido a que corresponde a una distancia dada por la longitud física del manipulador.

Es necesario definir una función de restricción geométrica de distancia para la pata  $i$ , que dependa de la pose del efecto final ( $\mathbf{X}$ ) y de los valores de los actuadores  $q_{ai}$ , es decir, una función que indique la distancia entre los puntos  $B_i$  y  $C_i$  para cualquier pose y valores de los actuadores, y que pueda ser comparada con la longitud real de eslabón distal de cada pata (figura 5.12). La función de restricción geométrica de distancia propuesta esta expresada como:

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{l}_i(\mathbf{X}, q_{ai})\| - l_{0i} = 0, \quad (5.57)$$

en la que  $\mathbf{l}_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \overrightarrow{O_iP_i} + \overrightarrow{P_iC_i} - \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{A_iB_i}$ , para simplificar la notación, puede ser expresada de acuerdo a la ecuación (5.58):

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_p) + \mathbf{R}_p(\mathbf{x}_O)^P \mathbf{c}_i - [\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i], \quad (5.58)$$

donde  ${}^0\mathbf{R}_p(\mathbf{x}_O)$  es la orientación del efecto final expresado como una matriz de rotación (en adelante  ${}^0\mathbf{R}_p$  por simplificación) y  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_p) = \mathbf{p}$ , reescribiendo la ecuación (5.58) se tiene:

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \mathbf{p} + {}^P\mathbf{R}_p \mathbf{c}_i - [\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i] \quad (5.59)$$

Considerando la función de restricción geométrica de distancia dada por la ecuación (5.57) para las  $n$  patas y organizando en un solo vector, se obtiene el vector de restricciones geométricas del manipulador que se encuentra expresoado en la ecuación (5.60), y se utiliza para resolver el problema geométrico directo de un manipulador.

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, \mathbf{q}_a) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{l}_1(\mathbf{X}, q_{a1})\| - l_{01} \\ \vdots \\ \|\mathbf{l}_n(\mathbf{X}, q_{an})\| - l_{0n} \end{bmatrix} = 0. \quad (5.60)$$

El vector de restricción puede ser determinado para diferentes tipos de PMs, sin embargo, las configuración de las patas deben permitir establecer una ecuación de restricción geométrica de distancia. En la figura 5.15 se presentan ocho tipo de patas diferentes, entre muchas posibles, en color azul se indica el actuador y en todas ellas existe una distancia fija indicada como  $h$ , que es dada por la posición del actuador bien sea rotacional o prismático y la plataforma móvil. En PMs donde no se logra establecer la ecuación de restricción de distancia, debido a la redundancia de la pata o la complejidad de la misma no es posible establecer una restricción geométrica de distancia y por lo tanto este algoritmo NO puede ser implementado.

### 5.5.3 Jacobiano del vector de restricciones

El vector de coordenadas generalizadas del efecto final esta definido en términos de coordenadas cartesianas y parámetros de euler, por lo que se tiene que  $\mathbf{X} = [\mathbf{p}, \mathbf{x}_O]^T$ . Considerando que se desea buscar una solución al problema geométrico directo a partir de pequeños incrementos desde una pose con valores conocidos de los actuadores, entonces es necesario definir una relación lineal entre los incrementos de la función de restricción y los incrementos de las coordenadas generalizadas de la plataforma. La relación lineal esta dada

## Cinemática de PMs

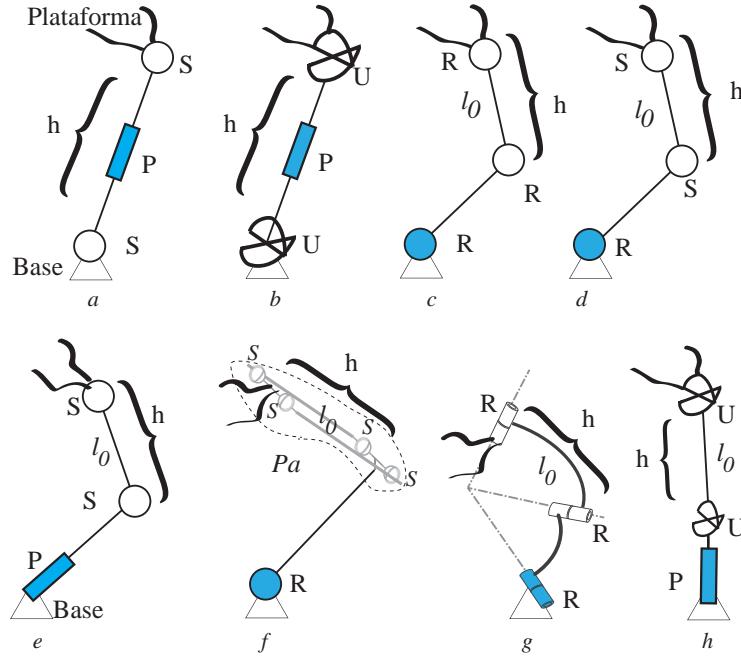


FIGURA 5.15: Ejemplo de patas de MP para las cuales se puede definir una función gométrica de restricción de distancia.

por el Jacobiano  $\mathbf{J}_x$ , por otro lado el actuador permanece constante durante la búsqueda de la solución sin ninguna variación y por tanto este término es cero. La relación resulta en:

$$\delta \mathbf{h} = \mathbf{J}_x([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O]) \delta \mathbf{X} \quad (5.61)$$

Sin embargo el método de N-R parte de encontrar el incremento en la pose a partir del error de la función de restricción, despejando se tiene que :

$$\delta \mathbf{X} = \mathbf{J}_x^{-1}([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O]) \delta \mathbf{h} \quad (5.62)$$

A continuación se presenta la forma de calcular el jacobiano  $\mathbf{J}_x$  del vector de restricciones:

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [h_1([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{a1})] & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_O} [h_1([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{a1})] & \frac{\partial}{\partial q_{a1}} [h_1([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{a1})] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [h_n([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{an})] & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_O} [h_n([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{an})] & \frac{\partial}{\partial q_{an}} [h_n([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{an})]. \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Como se ha indicado el valor del actuador  $q_{ai}$  permanece constante durante la

búsqueda, donde  $\frac{\partial}{\partial q_a} [h_i(\mathbf{p}, q_{a1})] = 0$ .

Para simplificar la notación de la ecuación (5.58) y hacer el cálculo del Jacobiano se ha definido el vector  $\mathbf{u}_i$ :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - [\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i] \quad (5.64)$$

Posteriormente se realizan por separado cada una de las derivadas parciales del jacobiano, iniciando con la derivada de la función de restricción con respecto a la posición del efecto final, que puede ser encontrada de acuerdo a la ecuación (5.65):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [h_i([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{a1})] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [\|\mathbf{l}_i([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{a1})\| - l_{01}] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [\sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} - l_{0i}] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i}} 2\mathbf{u}_i}_{\hat{\mathbf{u}}_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} [\mathbf{u}_i]}_{\mathbf{I}_{3 \times 3}} \\ &= \hat{\mathbf{u}}_i. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Ahora, se determina la derivada de la función de restricción con respecto a la orientación del efecto final, esta es obtenida de acuerdo a las operaciones que se detallan en la ecuación (5.66):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_O} [h_i([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{a1})] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_O} [\|\mathbf{l}_i([\mathbf{p}, \mathbf{x}_O], q_{a1})\| - l_{01}] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_O} [\sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} - l_{0i}] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i}} 2\mathbf{u}_i}_{\hat{\mathbf{u}}_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_O} [\mathbf{u}_i]}_{\mathbf{I}_{3 \times 3}}, \\ &= \hat{\mathbf{u}}_i \left( -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_O} [{}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i] \right) \\ &= \hat{\mathbf{u}}_i (-2 {}^0\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_i \mathbf{G}) \end{aligned} \quad (5.66)$$

donde  ${}^P\tilde{\mathbf{c}}_i$  es la matriz anti-simétrica de  ${}^P\mathbf{c}_i = [c_{ix}, c_{iy}, c_{iz}]^T$ , que está dada por la ecuación (5.67) y  $\mathbf{G} = [-\mathbf{e}\tilde{\mathbf{e}} + e_0\mathbf{I}]$  corresponde a una matriz identidad.

$${}^P\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} 0 & -c_{ix} & c_{iy} \\ c_{ix} & 0 & -c_{ix} \\ -c_{iy} & c_{ix} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

También, la matriz Jacobiana de los vectores de restricciones para un PM genérico, en el que la pose ha sido definida como  $\mathbf{X} = [\mathbf{p}, \mathbf{x}_O]$ , es una matriz de  $n \times 7$ , como se observa en la ecuación (5.68):

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & -2 {}^0\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_1 \mathbf{G} \\ \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_n & -2 {}^0\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_n \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Como ya se ha mencionado, el elemento central del método es la matriz jacobiana inversa ( $\mathbf{J}_x^{-1}$ ), que en el caso de una matriz cuadrada y en consecuencia la inversa no puede ser directamente calculada, se debe implementar la pseudo-inversa de acuerdo a lo expuesto por Moore-Penrose.

## 5.6 Aplicación del MGD para varios PMs

En las siguientes páginas se presenta a manera de ejemplo como obtener el modelo geométrico directo para varios manipuladores paralelos, considerando 3 tipos de mecanismo: orientación, traslación y mecanismos de orientación y traslación simultánea. Cada uno de ellos con diferentes tipos de topologías para la distribución de las patas.

### 5.6.1 MGD para un PM tipo 3-RRR planar

Manipulador ya descrito en la sección 5.4.1. Por observación de la figura 5.3, la función de restricción geométrica de distancia está definida por la ecuación (5.69):

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - (\mathbf{a}_i + \mathbf{R}_{q_{ai}} \mathbf{b}_i)\| - l_2, \quad (5.69)$$

donde  $\mathbf{R}_{q_{ai}} \mathbf{b}_i$  define la posición del eslabón  $l_{1i}$  es decir del punto ( $B_i$ ) referenciando a  $A_i$  de acuerdo al estado de la  $i$ -ésima articulación ( $q_{ai} = \theta_i$ ) del PM.

Tomando la derivada de la ecuación (5.69) con respecto a  $\mathbf{X}$ , la matriz Jacobiana para el vector de restricciones del manipulador 3-RRR planar está dada por:

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T & -2\hat{\mathbf{u}}_1 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_1 \mathbf{G} \\ \hat{\mathbf{u}}_2^T & -2\hat{\mathbf{u}}_2 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_2 \mathbf{G} \\ \hat{\mathbf{u}}_3^T & -2\hat{\mathbf{u}}_3 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_3 \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

donde  $\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - (\mathbf{a}_i + \mathbf{R}_{q_{ai}} \mathbf{b}_i)$ .

### 5.6.2 MGD para un PM tipo 3-RRR esférico

Robot manipulador ya descrito en la sección 5.4.5. La geometría del PM considerada para la aplicación de MGD es una versión particular donde todos los ejes de las juntas son ortogonales [12] y están interceptados en un punto común e invariante  $\mathbf{C}$  (figura 5.7). Este punto corresponde con el centro de rotación del movimiento esférico. La geometría del MP puede ser descrita por los siguientes parámetros: La distancia  $R = \|\overline{A_i C_i}\|$ ; el ángulo  $\beta$  de elevación de los ejes de las primeras juntas y los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  definidos por la elevación relativa del segundo y tercer eje de las juntas rotacionales.

Considerando la figura 5.7 y usando la ecuación (5.57) para este PM, la función de restricciones de distancia esta dada por la ecuación (5.71) y su matriz Jacobiana esta dada por la ecuación 5.72.

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - (\mathbf{a}_i + \mathbf{R}_{q_{ai}} \mathbf{b}_i)\| - l_2. \quad (5.71)$$

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_1 {}^O\mathbf{R}_p {}^P\tilde{\mathbf{c}}_1 \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_2 {}^O\mathbf{R}_p {}^P\tilde{\mathbf{c}}_2 \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_3 {}^O\mathbf{R}_p {}^P\tilde{\mathbf{c}}_3 \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

donde  $\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - (\mathbf{a}_i + \mathbf{R}_{q_{ai}} \mathbf{b}_i)$ . Es importante resaltar que las primeras tres columnas de la ecuación 5.72 son nulas mientras que el PM tenga un patrón de movimiento esférico.

### 5.6.3 MGD para PM Delta

Manipulador paralelo que presentan un patrón de movimiento translacional puro (la orientación relativa entre las plataformas es invariante). Cada pierna está compuesta por un eslabón distal que consiste en un paralelogramo de cuatro barras, en serie con un segundo eslabón proximal (figura 5.8).

Considerando un PM simétrico, la geometría de un robot Delta puede ser descrita por:  $R_b$ ,  $R_m$ ,  $l_1$  y  $l_2$ , y la función de restricción de distancia está dada por la ecuación (5.73):

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - (\mathbf{a}_i + \mathbf{R}_{qai}\mathbf{b}_i)\| - l_2, \quad (5.73)$$

la matriz  $\mathbf{R}_{qai}$  tiene coeficientes que dependen de los actuadores y la matriz Jacobiana está dada por la ecuación (5.74):

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{u}}_2^T & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{u}}_3^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.74)$$

donde  $\mathbf{u}_i^T = \mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - (\mathbf{a}_i + \mathbf{R}_{qai}\mathbf{b}_i)$ , al igual que con la posición en la matriz Jacobiana para el PM 3-RRR esférico y como se observa en (5.73) todos los términos relacionados con la orientación del mecanismo son nulos. Esta suposición conduce a que el PM Delta se convierta en un PM de traslación pura.

### 5.6.4 MGD para un PM tipo 6-UPS

Considerando un PM simétrico, la geometría puede ser descrita con los parámetros:  $R_b$ ,  $R_m$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\eta_{li}$ ,  $\eta_u$  y  $\eta_O$  (figura 5.9). De acuerdo a la figura 5.9 y la ecuación 5.57 la función de restricción de distancia está dada por la ecuación (5.75):

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i\| - (l_{2i} + l_1). \quad (5.75)$$

Como puede observarse en la ecuación (5.75),  $l_{2i}$  corresponde al estado del

## Cinemática de PMs

$i$ -ésimo actuador prismático y  $\|\mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i) - \mathbf{a}_i\| - l_1$  es la formulación que corresponde a la solución de la cinemática inversa de la plataforma SG. Es común en todos los manipuladores cuyas ramas se encuentran compuestas por dos eslabones que además se encuentran conectados entre ellos por un par prismático actuado, (UPU, RPR, etc), la función de restricción de distancia corresponde con la cinemática inversa del PM.

La matriz Jacobiana para un PM 6-UPS esta dada por la ecuación (5.76):

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & -2\hat{\mathbf{u}}_1 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_1 \mathbf{G} \\ \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_6 & -2\hat{\mathbf{u}}_6 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_6 \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad (5.76)$$

Donde  $\hat{\mathbf{u}}_i$  es el vector unitario de  $\mathbf{u}_i = \mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i$  y  $l_{2i} = q_{ai}$ , es la entrada de movimiento del actuador.

Como puede observarse en la ecuación (5.75),  $l_{2i}$  corresponde al estado del  $i$ -ésimo actuador prismático y  $\|\mathbf{r} + {}^O\mathbf{R}_p {}^P\mathbf{c}_i) - \mathbf{a}_i\| - l_1$  es la formulación que corresponde a la solución de la cinemática directa de la plataforma SG. Es común en todos los manipuladores cuyas ramas se encuentran compuestas por dos eslabones que además se encuentran conectados entre ellos por un par prismático actuado. (UPU, RPR, etc). Para este caso en particular donde la función de restricción de distancia corresponde con la cinemática directa del PM.

### 5.6.5 MGD para un PM tipo 2-UPU-1RU

Considerando un PM no simétrico como se aprecia en la figura 5.5. Por observación se puede establecer la ecuación de lazo. Llevando a la forma de la ecuación (5.57) la función de restricción de distancia está dada por:

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i\| - (l_{2i} + l_1), \quad (5.77)$$

donde  $l_{2i} = q_{ai}$ , corresponde a la entrada de movimiento del actuador.

La matriz Jacobiana para un MP 2-UPU-1RU está dada por la ecuación (5.78):

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_1 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_1 \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_2 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_2 \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (5.78)$$

Como se mencionó en el análisis del modelo geométrico inverso, la relación entre el ángulo de giro de la plataforma y el ángulo de la articulación rotacional es directo, por consiguiente esta condición está incluida en la solución del algoritmo, a pesar de tener únicamente dos ecuaciones de restricción.

### 5.6.6 MGD para un PM tipo 3-UPU

Considerando un PM simétrico como el apreciado en la figura 5.6. Por observación de la misma se establece la ecuación de lazo, que llevada a la forma de la ecuación (5.57) permite obtener la función de restricción de distancia dada por la ecuación (5.79):

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i\| - (l_{2i} + l_1), \quad (5.79)$$

donde  $l_{2i} = q_{ai}$ , corresponde a la entrada de movimiento del actuador.

La matriz Jacobiana para un PM 3-UPU está dada por la ecuación (5.80):

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_1 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_1 \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_3 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_3 \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_3 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_3 \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

### 5.6.7 MGD para un PM 3-PUU+1S

Este PM es considerado no simétrico, pues a pesar de tener tres patas iguales distribuidas alrededor de una pata interior que restringe el movimiento del PM, la pata interior no es igual a las demás, como se aprecia en la figura 5.6, por observación de la misma se establece la ecuación de lazo. Obviamente la pata interior establece una restricción geométrica de distancia, sobre el vector de desplazamiento  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ .

Con la ecuación de lazo obtenida definida y considerando la ecuación (5.57) la función de restricción de distancia esta dada por la ecuación (5.81):

$$h_i(\mathbf{X}, q_{ai}) = \|\mathbf{p} + {}^O\mathbf{R}_P {}^P\mathbf{c}_i - (\mathbf{a}_i + \mathbf{T}_{q_{ai}} \mathbf{b}_i)\| - (l_{2i} + l_1), \quad (5.81)$$

donde  $\mathbf{T}_{q_{ai}} = [\mathbf{I}_{3 \times 3}, \mathbf{p}_i]$  es una matriz homogénea y se define  $\mathbf{p} = [a_{xi}, a_{yi}, q_{ai}]^T$  como la entrada de movimiento del actuador, y  $a_x, a_y$  corresponden a los componentes del punto  $A_i$ .

La matriz Jacobiana para un MP 3-UPU está dada por la ecuación (5.82):

$$\mathbf{J}_x(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_1 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_1 \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_3 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_3 \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -2\hat{\mathbf{u}}_3 {}^O\mathbf{R}_P {}^P\tilde{\mathbf{c}}_3 \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

La primera columna del jacobiano no presenta componentes que indiquen la existencia de componentes asociadas con la translación, obviamente este es un PM de orientación, situación garantizada por la restricción física y geométrica introducido por la pata tipo S.

## 5.6.8 Evaluación de desempeño del MGD

El método propuesto en este trabajo para la solución del problema geométrico directo es un método numérico y en esta sección se propone una metodología para determinar la utilidad del método. En esencia para probar la convergencia del método de solución del problema directo se tiene que verificar en el espacio operacional, implicando que la pose calculada se compare con la pose dada.

### 5.6.8.1 Metodología para la evaluación de la solución

Se parte de un espacio de trabajo conocido, tanto de orientación como de posición, y en cada uno de ellos se evalúa el modelo geométrico directo. Para evitar singularidades propias de la representación como es el caso de ángulos de euler. Para representar la orientación se propone utilizar cuaternios. Los pasos necesarios para hacer la evaluación del método son:

1. Generar un espacio de trabajo acorde con las dimensiones del robot, dando la posición en coordenadas cartesianas y la orientación en cuaternios.
2. Para una configuración del espacio de trabajo dada  $\mathbf{X} = [\mathbf{p}, \mathbf{x}_o]$ , se determina los valores de los actuadores del PM, se agrupan en un vector  $\mathbf{q}$ , haciendo uso del MGI.
3. A partir de la pose definida del espacio de trabajo y para garantizar que el método funciona se hace la obtención de una pose inicial  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X} + err$ , donde el error es calculado aleatoriamente.
4. Se hace la evaluación del método numérico para solución del PGD propuesto.
5. Se evalúa la convergencia, es decir, si existe un  $\mathbf{X}_D$  se determina el error con respecto a la pose dada, el error se calcula con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{Error posición } & \| \mathbf{p} - \mathbf{p}_D \| < \delta_P \\ \text{Error orientación } & \| [\phi, \theta, \psi] - [\phi_D, \theta_D, \psi_D] \| < \delta_O, \end{aligned} \quad (5.83)$$

donde el vector  $[\phi, \theta, \psi]$  es la orientación expresada en ángulos de euler fijos *Roll-Pitch-yaw*.

6. Se determinan los parámetros de evaluación.

#### 5.6.8.2 Parámetros de evaluación

Para determinar el desempeño de la solución al PGD numérico propuesto se definen los siguientes parámetros:

- **Convergencia:** Con este parámetro se busca determinar una relación entre las poses del espacio de trabajo de entrada y las poses que convergen en el espacio de trabajo calculado. En los casos donde el método converge, independientemente del resultado, la tasa de convergencia está dada por la ecuación (5.84):

$$C \% = \frac{\sum_{j=1}^{WS} \eta_C}{\eta_{WS}} * 100, \quad (5.84)$$

## Cinemática de PMs

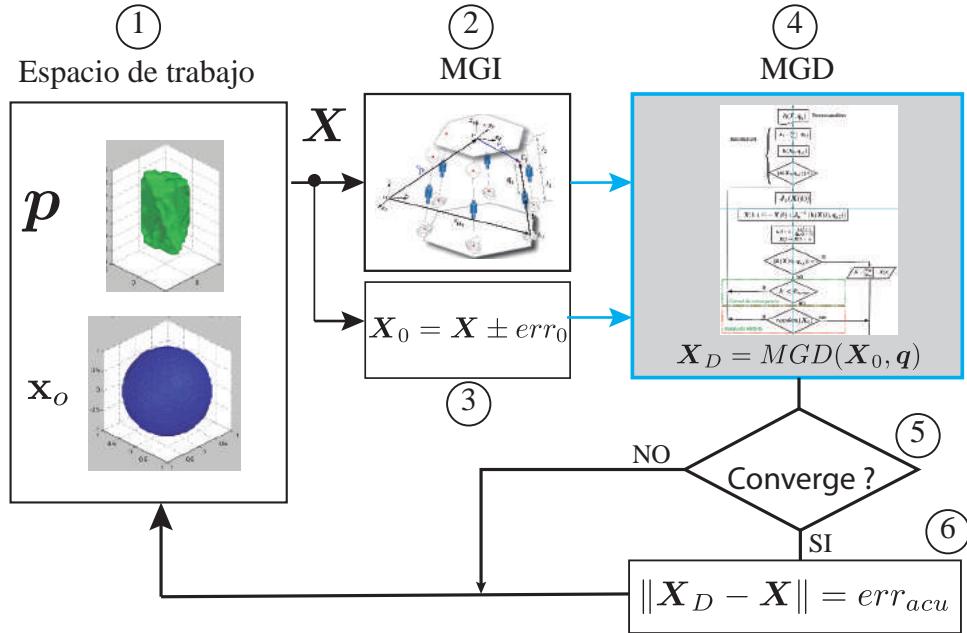


FIGURA 5.16: Procedimiento de Evaluación del método numérico para la solución del problema geométrico directo.

Donde  $\eta_{WS}$  corresponde a todos los nodos del espacio de trabajo evaluados y  $\eta_C$  son los nodos donde el método encuentra una solución en menos de 100 iteraciones.

- **Precisión:** Evalúa el error de la solución encontrada por el método en términos de la tasa de soluciones que satisfacen las tolerancias de error dadas en (5.85):

$$\begin{aligned} \delta_1 : \quad & \delta_p < 1 \times 10^{-6} \text{mm} \\ & \delta_O < 0,01^\circ, \\ \delta_2 : \quad & \delta_p < 1 \times 10^{-3} \text{mm}, \\ & \delta_O < 0,1^\circ, \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde  $\delta_p$  y  $\delta_O$  son los errores de posición y orientación respectivamente.

Durante el proceso de evaluación también es posible obtener los máximos ( $\delta_{OM}$  y  $\delta_{PM}$ ), los promedios ( $\bar{\delta}_O$  y  $\bar{\delta}_P$ ) y las desviaciones estándar ( $\sigma_{b_O}$  y  $\sigma_{b_P}$ ) del error en la posición y orientación respectivamente.

- **Velocidad:** Corresponde al número de iteraciones necesarias para que el

método encuentre una solución. Esta forma de medir elimina la dependencia del hardware donde se ejecuta la simulación. La máxima ( $i_M$ ), la promedio ( $\bar{i}$ ) y la desviación estándar ( $\sigma_i$ ) del número de iteraciones son tomados como índices de desempeño.

Un punto clave de los algoritmos numéricos es la semilla o punto inicial de búsqueda en el espacio de soluciones. Para el algoritmo de solución del problema geométrico directo se propone definir la estimación inicial considerando errores en magnitud, a continuación se describe:

- La estimación inicial para la pose  $\mathbf{X}_0 = [\mathbf{p}_0, \mathbf{x}_{o0}]$ , es el valor buscado mas un error; el error contiene cuatro posibles valores  $err = \{1, 10, 25, 50\}$  que corresponden con unidades de valor real, para la generación aleatoria se supone que el signo del error lleva la carga aleatoria.
- Para la estimación inicial de la posición  $\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]$  se define de acuerdo a (5.86)

$$\mathbf{r}_0 = [r_x \pm err_0, r_y \pm err_0, r_z \pm err_0] \quad (5.86)$$

- La generación de la estimación inicial de la orientación es algo más compleja. La orientación real de  $\mathbf{x}_o$  es expresada por la representación ángulo-eje equivalente  $(\theta, \mathbf{v})$  donde  $\mathbf{v}$  es el vector unitario, que puede ser asociado con el eje de rotación en los parámetros de Euler y  $\theta$  es la magnitud de dicha rotación. Estos elementos son modificados con una distancia  $err_0$  de acuerdo con las ecuaciones (5.87) y (5.88):

$$\theta_0 = \theta \pm err_0, \quad (5.87)$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{R}_{err_{0x}} \mathbf{R}_{err_{0y}} \mathbf{v}, \quad (5.88)$$

donde  $\mathbf{R}_{err_{0x}}$  y  $\mathbf{R}_{err_{0y}}$  son rotaciones puras de  $\pm err_0^\circ$  a lo largo de los ejes  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  respectivamente. El signo  $\pm$  es seleccionado aleatoriamente, además, la nueva orientación  $(\theta, \mathbf{v})$  es expresada igualmente como un cuaternio  $((\theta, \mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{x}_{o0})$ , unitario.

Mientras que la posición de Home ( $\mathbf{q}_H$ ) corresponde siempre a la configuración de referencia para cualquier manipulador, también es cierto, que puede

ser considerada como una estimación (Tabla 5.1).

Las dimensiones de los PM analizadas y la exploración de su espacio de trabajo se encuentran resumidas en la Tabla 5.1. La exploración está definida por intervalos discretizados, para cada intervalo que describen el estado del efecto final ( $X, Y, Z, \psi, e_i$ ), y sus correspondientes incrementos ( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \psi, \Delta e_i$ ).

Con el fin de distinguir si una configuración dada de  $\mathbf{q}$  pertenece o no al espacio de trabajo del PM, se verificar que el valor de los actuadores ( $\rho_i$ ) obtenido por el MGI esté dentro del rango de movimiento.

En esta caso y para reducir la complejidad del análisis de los datos, la colisión entre los elementos del PM, eslabones, y restricciones debido a articulaciones pasivas no son consideradas.

### 5.6.9 Resultados: evaluación del método MGD

Los resultados obtenidos durante las simulaciones realizadas se encuentran resumidas en la Tabla 5.2. En la primera columna se indica el nombre del PM evaluado, y debajo esta el tamaño del espacio de trabajo dado en voxels.

También, como se puede observar en la misma Tabla, la peor tasa de convergencia ( $C\%$ ) encontrada es de 84.45, que corresponde a una estimación inicial considerablemente pobre ( $\mathbf{q}_{50}$  para el PM 6UPM); por el contrario, las mejores estimaciones obtenidas con el método alcanzan una tasa de convergencia cercana al 98 % para la mayoría de los PMs evaluados ( $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_{10}, \mathbf{1}_{25}$ ).

Se puede observar a partir de los errores máximos encontrados ( $\delta_{OM}$  y  $\delta_{PM}$ ) que el método en algunos casos puede proveer soluciones erróneas; aunque al observar la media y la desviación estándar de dichos valores de error se puede concluir que las soluciones erróneas no ocurren continuamente y dependen directamente de la estimación inicial (como es común con los métodos numéricos). Esta afirmación se puede ejemplificar claramente en los resultados

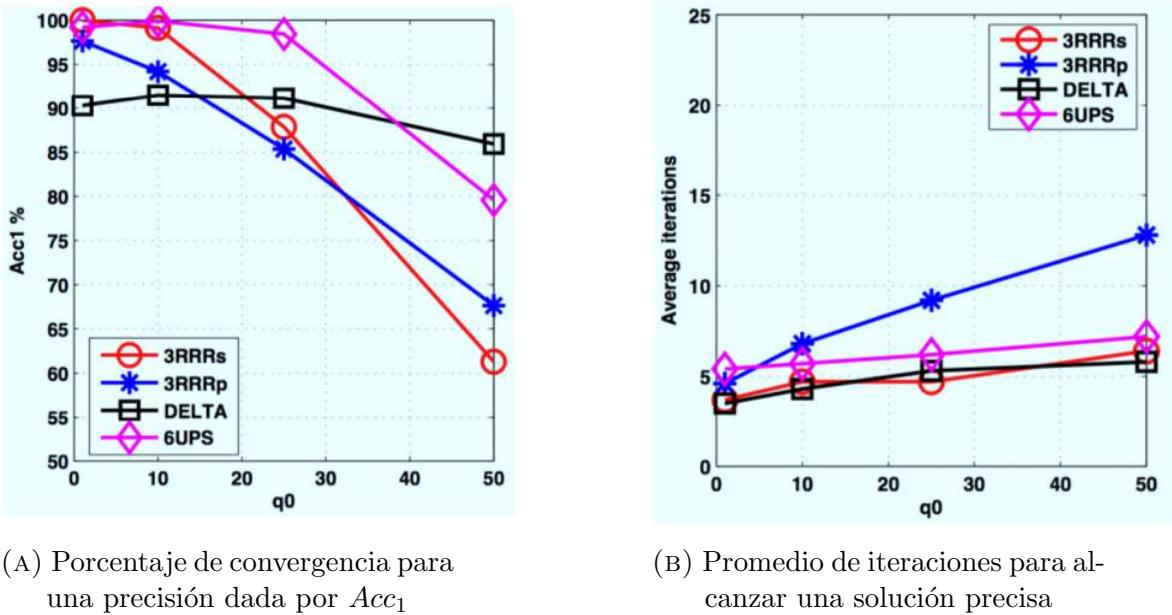
TABLA 5.1: Paraméetros evaluados sobre los PMs

MP	Parametros	Consideraciones
(3RRR)p	$R_m = 100$ $R_b = 400$ $l_1 = 250$ $l_2 = 250$ $\mathbf{q}_H$	$X\epsilon[-300, 300], \Delta X = 5$ $Y\epsilon[-300, 300], \Delta Y = 5$ $\phi\epsilon[-180, 180], \Delta\phi = 1^\circ$ $-\phi \leq \rho_i \leq \phi, i = 1, 2, 3$ $[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$
(3RRR)s	$R = 100$ $\eta_{ui} = \eta_{li} = 120$ $\beta_1 = \beta_2 = 54,73$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 90$ $\mathbf{q}_H$	$e_i\epsilon[-1, 1]$ $\Delta e_i = 0,01$ $i = 1, 2, 3$ $-\phi/2 \leq \rho_i \leq \phi/2$ $[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$
Delta	$l_1 = 250$ $l_2 = 250$ $R_m = 150$ $R_b = 300$ $\mathbf{q}_H$	$X\epsilon[-300, 300], \Delta X = 2$ $Y\epsilon[-300, 300], \Delta Y = 2$ $Z\epsilon[-500, 0], \Delta Z = 2$ $-\phi \leq \rho_i \leq \phi, i = 1, 2, 3$ $[0, 0, -490, 1, 0, 0, 0]$
6UPS	$R_m = 100$ $R_b = 100$ $l_1 = 600$ $l_2 = 250$ $\mathbf{q}_H$	$X\epsilon[-200, 200], \Delta X = 5$ $Y\epsilon[-200, 200], \Delta Y = 5$ $Z\epsilon[-600, 800], \Delta Z = 2$ $e_i\epsilon[-0,3, 0,3], \Delta e_i = 0,1, i = 1, 2, 3$ $0,3l_0 \leq \rho_i \leq 1,3l_0, i = 1, 2..., 6$ $[0, 0, 600, 1, 0, 0, 0]$

<sup>1</sup>longitudes dadas en mm y ángulos en grados

obtenidos para la estimación inicial de  $\mathbf{1}_1$  y  $\mathbf{1}_{10}$  donde el indice  $Acc_1$  (corresponde con el criterio  $\delta_1$ ) muestra que el método alcanza una precisión de  $1 \times 10^{-6}mm$  y  $1^\circ \times 10^{-2}$ , caso que se presenta en alrededor del 90 % de las simulaciones realizadas (ver figura 5.17a). Incluso, si el índice de desempeño  $Acc_2$  es considerado, se ha garantizado una precisión cercana a  $1 \times 10^{-3}mm$  y  $0,1^\circ$ .

De la tabla 5.2 en el peor escenario el método provee una solución en 100 iteraciones ( $i_M = 100$ ); debe resaltarse, que el promedio de las iteraciones y las desviaciones estándar correspondientes demuestran que es un caso improbable. De hecho, el método por lo general entrega un resultado en menos de 10 iteraciones (fig 5.17b).



(A) Porcentaje de convergencia para una precisión dada por  $Acc_1$

(B) Promedio de iteraciones para alcanzar una solución precisa

FIGURA 5.17: Desempeño de la solución numérica del MGD

## 5.7 Espacio de trabajo

El espacio de trabajo (en inglés workspace -WS-), en general está definido como el volumen de espacio que puede ser alcanzado por el efecto final del manipulador. En la literatura se encuentran algunas definiciones más específicas, entre las que está el *espacio de trabajo diestro* que comprende el volumen del espacio que puede alcanzar el efecto final en todas las orientaciones, es decir, todos los puntos del espacio en los que el efecto puede orientarse arbitrariamente; por otro lado, se define el *espacio de trabajo alcanzable* contenido en el espacio de trabajo diestro y comprende el volumen del espacio que alcanza el efecto en al menos una orientación.

Para manipuladores paralelos comparados con su contraparte los manipuladores seriales es bien conocido que el espacio de trabajo es muy restringido, por lo tanto, el análisis de espacio de trabajo de los manipuladores paralelos es primordial para el diseño de los mismos. Comúnmente los diseñadores de PMs se interesan por el posible conjunto de variables de salida, llamado espacio de *trabajo completo* [11]. Cuando se habla de manipuladores paralelos de 6 GDL el espacio de trabajo es una entidad altamente acoplada, prácticamente imposible de visualizar o de evaluar geométricamente. Para poder analizar el

## Cinemática de PMs

TABLA 5.2: Resultados del método numérico para solución del MGD para diferentes PMs.

MP	Indice	$q_H$	$q_1$	$q_{10}$	$q_{25}$	$q_{50}$
3RRR(p) (819569*)	$C\%$	86.74	99.99	99.78	98.59	91.72
	$i_M$	100	93	100	100	100
	$\bar{i} \pm \sigma_i$	$11.5 \pm 6.8$	$4.6 \pm 0.8$	$0.8 \pm 2.6$	$\pm 9.2 \pm 5.0$	$12.8 \pm 7.7$
	$\delta_{OM}$	180	4.5	57.9	142.8	179.8
	$\delta_{OM}^- \pm \sigma_{\delta_0}$	$16.7 \pm 35$	$(1 \pm 15)10^{-2}$	$0.5 \pm 2.4$	$2.9 \pm 9$	$10.6 \pm 22$
	$\delta_{PM}$	341.6	7.3	79.8	330.8	329.7
	$\bar{\delta}_P \pm \sigma_{\delta_P}$	$14.2 \pm 38$	$(1.1 \pm 18)10^{-2}$	$0.5 \pm 3$	$3.2 \pm 11$	$11.2 \pm 27$
	$A_{cc1}\%$	61.18	97.64	94.18	85.36	67.63
	$A_{cc2}\%$	61.18	99.40	94.22	85.36	67.63
3RRR(s) (1351169*)	$C\%$	100	100	100	100	100
	$i_M$	21	5	17	17	32
	$\bar{i} \pm \sigma_i$	$0.2 \pm 1.2$	$3.7 \pm 0.4$	$4.7 \pm 0.6$	$4.7 \pm 0.6$	$6.4 \pm 1.4$
	$\delta_{OM}$	313.6	$9.2 \times 10^{-6}$	293.28	324.5	332.5
	$\delta_{OM}^- \pm \sigma_{\delta_0}$	$15.5 \pm 53$	$(1 \pm 2.8)10^{-7}$	$1.5 \pm 18$	$20.4 \pm 60$	$67.2 \pm 89$
	$\bar{\delta}_0 \pm \sigma_{\delta_0}$	$15.5 \pm 53$	$(1 \pm 2.8)10^{-7}$	$1.5 \pm 18$	$20.4 \pm 60$	$67.2 \pm 89$
	$A_{cc1}\%$	90.85	100	99.13	87.86	61.29
	$A_{cc2}\%$	90.85	100	99.13	87.86	61.29
	$C\%$	100	100	100	100	100
Delta (9696131*)	$i_M$	13	16	17	17	17
	$\bar{i} \pm \sigma_i$	$2.0 \pm 1.2$	$3.5 \pm 0.6$	$4.3 \pm 0.9$	$5.3 \pm 1$	$5.8 \pm 1.2$
	$\delta_{PM}$	3.98	6.61	36.96	88.2	17
	$\bar{\delta}_P \pm \sigma_{\delta_P}$	$0.01 \pm 0.1$	$(0.03 \pm 0.3)$	$0.35 \pm 2.4$	$1.6 \pm 8.1$	$1.2 \pm 5.8$
	$A_{cc1}\%$	89.52	90.29	91.48	91.14	85.94
	$A_{cc2}\%$	98.74	98.70	97.41	94.83	90.14
	$C\%$	100	99.98	99.93	98.89	84.45
	$i_M$	8	32	40	100	100
	$\bar{i} \pm \sigma_i$	$6.2 \pm 0.4$	$5.4 \pm 0.7$	$5.7 \pm 0.7$	$6.2 \pm 0.8$	$7.2 \pm 2.7$
6UPS (819569*)	$\delta_{OM}$	$1.1 \times 10^{-6}$	130.7	137.7	276.5	283.4
	$\delta_{OM}^- \pm \sigma_{\delta_0}$	$(2.0 \pm 5) \times 10^{-8}$	$0.006 \pm 0.8$	$0.01 \pm 1.2$	$0.23 \pm 5$	$6.6 \pm 29$
	$\delta_{PM}$	$6.55 \times 10^{-6}$	125	1390	1444	1520
	$\bar{\delta}_P \pm \sigma_{\delta_P}$	$(6.2 \pm 15) \times 10^{-7}$	$0.006 \pm 1.2$	$0.01 \pm 3.1$	$0.8 \pm 28$	$15.8 \pm 116$
	$A_{cc1}\%$	99.62	99.20	99.92	98.44	79.58
	$A_{cc2}\%$	100	99.97	99.67	98.06	79.76

<sup>1</sup>\* Volumen del WS en voxels.

espacio de trabajo de manipuladores paralelos se realiza un análisis mediante subconjuntos, por ejemplo, restringiendo la orientación, o restringiendo la traslación.

El espacio de trabajo completo puede dividirse en subconjuntos del tipo: *espacio de trabajo de orientación constante*, consistente en el conjunto de posiciones admisibles por el centro de la plataforma móvil mientras el manipulador mantiene una orientación fija; en contraste, se define el subespacio de tra-

## *Cinemática de PMs*

jo, denominado *espacio de trabajo de orientación* formado por el conjunto de orientaciones posibles de la plataforma móvil manteniendo fija la posición del centro de la plataforma.

Existen principalmente dos aproximaciones para determinar el espacio de trabajo completo una numérica y otra geométrica. Esta ultima es conocida como aproximación geométrica constructiva, en la que se analiza el WS de orientación constante, basada en la identificación de curvas, superficies y volúmenes obtenidos de la relación de articulaciones y eslabones desde la base a la plataforma móvil sucesivamente, y la formulación de conexiones matemáticas, por ejemplo, la intersección de volúmenes con superficies, a través de ecuaciones de restricción. [136] [13] [14] [15] [61] [5].

Sin embargo, en este tipo de aproximaciones la complejidad del estudio del espacio de trabajo es un proceso complicado, e implica, un conocimiento avanzado de geometría y álgebra que hace difícil su aplicación. En muchos de los casos se recurre a software para la solución de sistemas algebraicos o software CAD. En ambos, el enfoque consiste en la intersección de los movimientos generados por cada una de las patas o por las expresiones de restricción cinemática.

Otra forma de aproximación consiste en la iteración mediante el uso de métodos numéricos que se centran en hacer una aproximación discretizada del espacio de trabajo [25][26][83][87][85].

En el presente trabajo se describe una metodología para generar el espacio de trabajo de varios manipuladores paralelos.

### **5.7.1 Restricciones de los actuadores y colisiones**

Un elemento de interés en el análisis del espacio de trabajo de un PM y que tiene implicaciones directas en su realización física es incluir las restricciones de movimiento de los actuadores y las articulaciones pasivas así como las posibles colisiones entre eslabones y de una misma pata, entre patas y entre eslabones próximos a la plataforma móvil y ella misma.

**Restricción de desplazamiento de actuadores prismáticos.** En el caso que el PM tenga actuadores prismáticos se define una restricción de distancia mínima y máxima  $d_{min} < d_i < d_{max}$ .

**Restricción de Articulaciones universales y esféricas.** Es un movimiento relativo que no debe exceder la región definida por un cono circular. El eje del cono es normal a la articulación y la apertura del mismo es dada por el valor  $\delta_{max}$  y el ápice en el centro de la articulación.

**Restricción de articulaciones rotacionales.** Este definido entre un máximo y un mínimo  $\theta_{min} < \theta_i < \theta_{max}$ , que corresponde con un valor de giro.

**Colisiones entre eslabones.** Sin perder generalidad y se consideran los eslabones como cuerpos cilíndricos; para determinar la colisión se determina la distancia entre dos cilindros, dada como la mínima distancia a lo largo de la perpendicular común [92].

### 5.7.2 Representación de la orientación

En la literatura existen varias formas de representar la orientación de un cuerpo en el espacio con respecto a un sistema de coordenadas fijo, por ejemplo ángulos de euler, matriz de cosenos directores, cuaternios, entre otras. Sin embargo los cuaternios son una forma elegante y de facilidad para representar la orientación, y aunque presenta problemas de dualidad en la representación no tiene problemas de indeterminación como si la pueden tener los ángulos de euler. La dualidad está dada debido a que el giro resultante a lo largo de un vector unitario es el mismo que el giro negativo, es decir, con el vector en la dirección contraria. Obviando este hecho, el cuaternionio es la representación utilizada en el presente trabajo para determinar el espacio de trabajo de orientación de PMs.

Otra forma para representar el WS de orientación en el espacio Euclideo  $R^3$  es utilizar una esfera de radio  $\pi$  [132], sin embargo este tipo de representación no

## Cinemática de PMs

considera las limitaciones físicas de las articulaciones de un mecanismo resultando en un WS teórico que no puede ser implementado en mecanismos reales adicional a que su interpretación en  $R^3$  no es directa.

Se propone utilizar la representación de la orientación utilizando cuaternios, que según Hamilton se definen de acuerdo a la ecuación (5.89):

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \mathbf{u}\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

Dentro de las propiedades de los cuaternios, es necesario mencionar el cuaternion unitario como  $\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 = \|\mathbf{x}_0\| = 1$ . Considerando el teorema de Euler, el vector  $\mathbf{u}$ , que es unitario representa el eje de rotación y  $\theta$  es el ángulo de rotación alrededor de dicho eje.

Asumiendo que  $\mathbf{u}$  es un vector que representa la orientación, con el que es posible expresar todas las posibles orientaciones en el espacio, hasta formar una esfera de radio en  $R^3$ . Sin embargo al hacer una rotación alrededor del eje  $u$  con un ángulo  $\theta$  se obtiene el mismo resultado que al hacer una rotación alrededor del eje  $-u$  un ángulo  $-\theta$ , como se puede ver en la figura 5.18. Para determinar todas las orientaciones basta con tomar uno de los dos hemisferios, sin perder generalidad, en este caso se toma el hemisferio superior.

Considerando solo el hemisferio superior y analizando específicamente cuando el cuaternion vale 0, el primer término del cuaternion  $e_0 = \cos(\theta/2) > 0$  para valores de  $\pi \leq \theta \leq \pi$ , mientras que el término  $\sin(\theta/2)$  en el mismo intervalo tiene valores positivos o negativos, que dependen del ángulo. Retomando, si se considera la proyección de todos los posibles cuaternios sobre  $R^3$ , el término  $\mathbf{u}\sin(\theta/2)$  corresponde exactamente con el hemisferio superior de una esfera; dado que las componentes del vector son  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$  y la restricción  $\|\mathbf{u}\| = 1$ , obviamente  $u_z \geq 0$ . En últimas, analizando el intervalo de rotación  $0 < \theta \leq \pi$ , todo los puntos de producto  $\mathbf{u}\sin(\theta/2)$  están contenidos en el hemisferio superior en  $R^3$ .

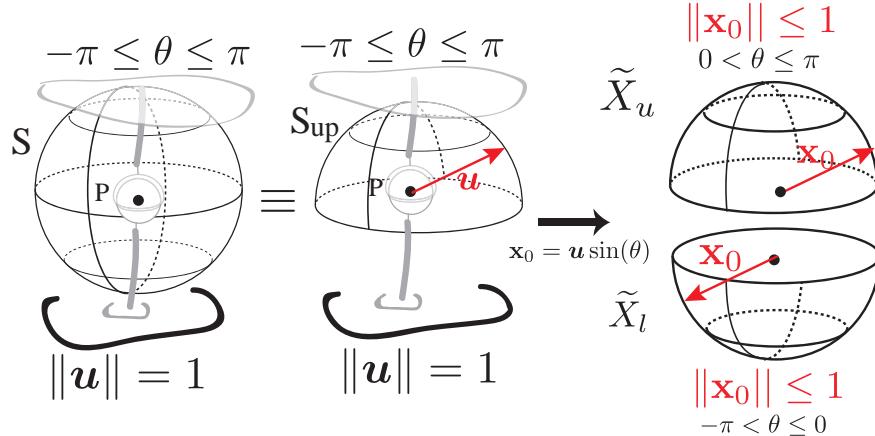


FIGURA 5.18: Representación paramétrica del cuaternion en  $R^3$ .

Observando la semiesfera inferior  $\tilde{X}$  (figura 5.18), necesariamente la componente z de  $\mathbf{u}$  es negativa, y por tanto  $\sin(\theta/2) \leq 0$  y el ángulo son acotados por el intervalo  $\pi < \theta \leq 0$ . De forma análoga el hemisferio superior, implica que el ángulo sea acotado por el intervalo  $0 \leq \theta < \pi$ . En conclusión cualquier punto dentro de la semiesfera superior  $\tilde{X}$  representa la rotación  $\theta = 2 \sin^{-1}(\|\mathbf{x}_o\|)$  alrededor de  $\mathbf{x}_o$ ; cualquier punto de la esfera inferior representa una rotación en  $\theta = -2 \sin^{-1}(\|\mathbf{x}_o\|)$  alrededor del eje  $-\mathbf{x}_o$ .

En resumen la representación paramétrica que describe la orientación de un cuerpo a partir de las coordenadas cartesianas esta dada por:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \mathbf{u} \sin(\theta/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

donde  $\mathbf{x} = [xyz]$  un vector del espacio cartesiano.

Una de las ventajas de utilizar este tipo de representación para la rotación es que el espacio de orientación es un objeto sólido, en donde los valores límites enmarcan el rango de rotación que se puede efectuar, y todos los valores intermedios son alcanzables.

### 5.7.3 Representación de la posición

Para representar el espacio de trabajo de posición en  $R^3$ , se ubica el efecto final del robot en una región donde los actuadores tengan un desplazamiento correspondiente a la mitad de su rango de movimiento, se genera una grilla en tres dimensiones de modo que el centro del volumen este alineado con el centro de la plataforma móvil del robot, en la que cada punto de la grilla corresponde con un punto de evaluación dentro del espacio de trabajo del robot.

### 5.7.4 Método para el generación del espacio de trabajo

A continuación se describe el algoritmo propuesto para evaluar el WS de un manipulador paralelo utilizando una aproximación mediante cálculos numéricos. Un diagrama general del algoritmo se puede observar en la figura 5.19.

Primero, es necesario definir si se va a evaluar el espacio de trabajo de orientación o de orientación constante. Para evaluar el espacio de trabajo de orientación constante es necesario conocer las dimensiones del manipulador, límites máximos, mínimos y posición de Home, y a partir de ellos se genera una grilla de puntos en  $R^3$  uniformes, como se aprecia en la figura 5.20a, en la que se han definido un total de 9261 voxels o puntos de evaluación.

Cuando se desea analizar el WS correspondiente solo a la orientación, también se parte del espacio  $R^3$ , sin embargo, de acuerdo con la parametrización del cuaternionio, el espacio de análisis es un esfera como la que se observa en la figura 5.20b, en este caso la esfera está formada por 4169 voxels o punto de evaluación.

Luego con la ayuda del modelo geométrico inverso se determinan los valores de los actuadores, los valores de desplazamiento de las articulaciones pasivas, posibles colisiones entre eslabones, el Jacobiano geométrico comúnmente basado en Screws, su determinante, y por último el condicionamiento de la matriz jacobiana o número de condición, para cada punto del espacio.

## Cinemática de PMs

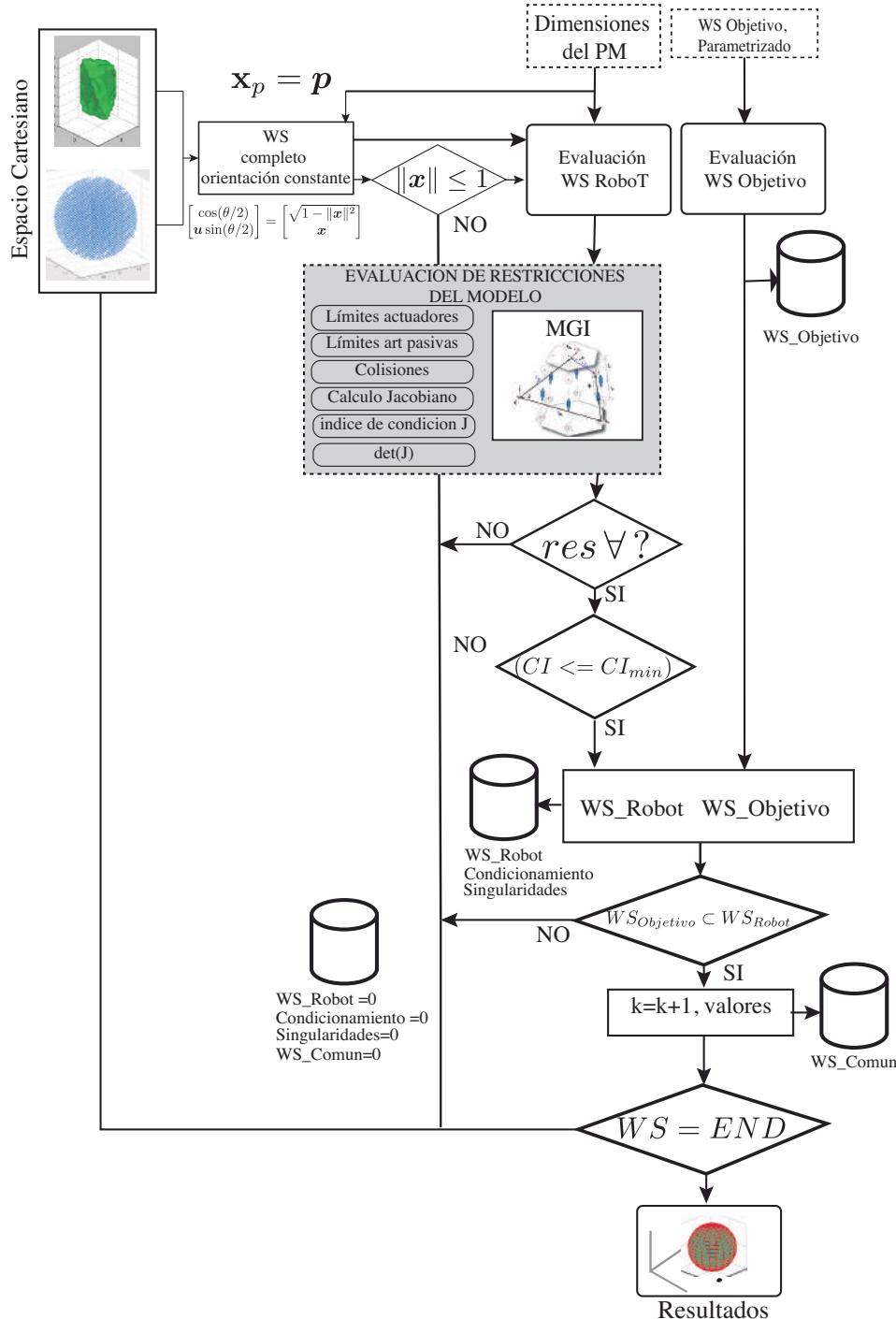


FIGURA 5.19: Esquema del algoritmo numérico para la generación del espacio de trabajo de un PM.

Respecto al número de condición se utiliza el índice de condición, que es el inverso del número de condición. Adicional en el caso de colisiones, máximos

## Cinemática de PMs

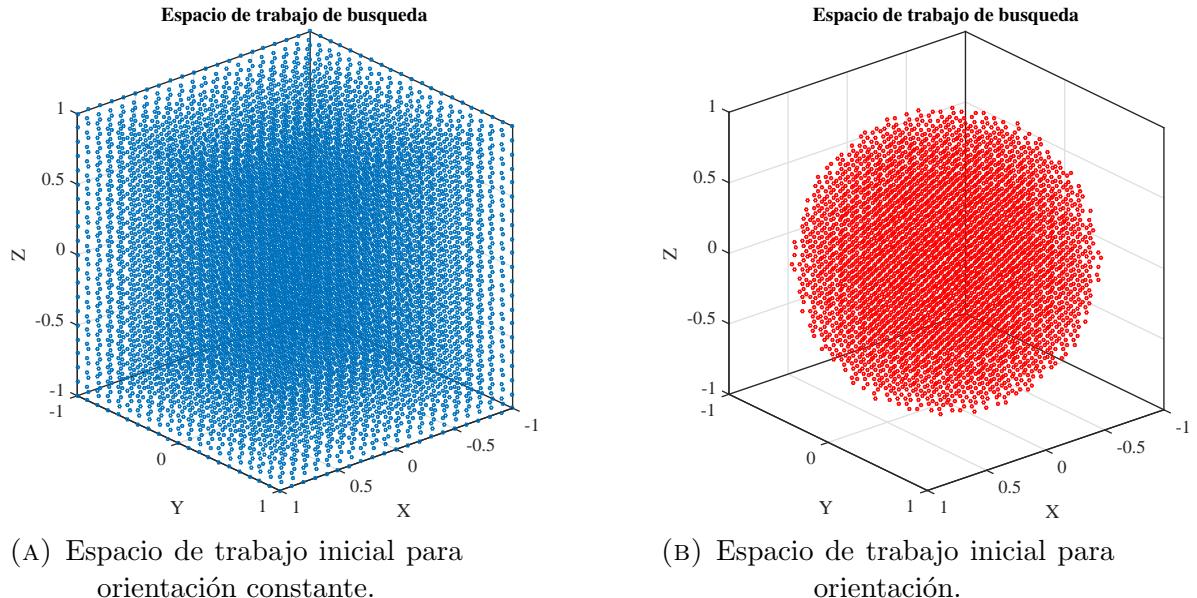


FIGURA 5.20: Detalle de espacio en  $R^3$  inicial para generar el WS de un PM.

y mínimos rangos de movimiento es necesario que todos ellos se cumplan para la configuración analizada. Una vez se han clasificado como validos los anteriores parámetros se procede a realizar una comparación con un número del número de condición mínimo previamente definido. los voxels evaluados y que cumplan con todas la restricciones son considerados un voxel del WS del robot.

Es común en el diseño de manipuladores paralelos que como requerimiento de evaluación se defina un espacio de trabajo objetivo, normalmente parametrizado en ángulos de euler (roll pitch y yaw). En la figura 5.21 se puede observa el resultado de limitar la orientación a los ángulos de euler definido por  $|roll| < 45$ ,  $|pitch| < 45$  y  $|yaw| < 70$ . Cada voxel que cumpla la restriccion dada por los ángulos, es considerando un voxel que pertenece al espacio de trabajo objetivo. Es común definir la restricciones en ángulos de euler, ya que para el análisis resultan ser mas intuitivos que la restricciones dada en términos de cuaternios.

Cada punto del WS del robot es comparado con cada punto del WS objetivo, lo que claramente permite valorar si el robot logra alcanzar el espacio de orientación deseado. A partir del resultado de esta comparación se forma un nuevo espacio denominado espacio de trabajo común.

**Representación del WS Objetivo, limitado roll<45 pitch<60 yaw<70**

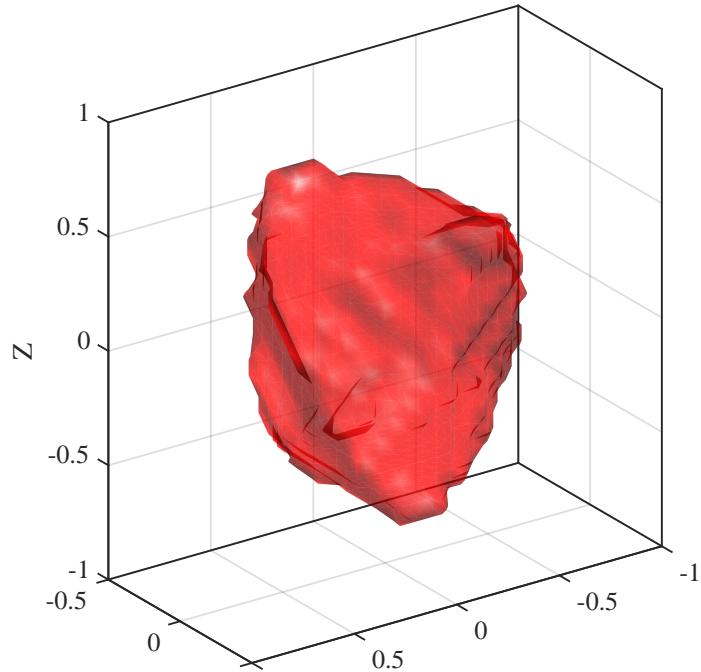


FIGURA 5.21: Representación del WS objetivo considerando una restricción de los ángulos euler  $|roll| < 45$ ,  $|pitch| < 45$  y  $|yaw| < 70$

Este proceso se repite para todos los voxels definidos inicialmente, y como resultado se obtienen gráficas del WS y regiones de singularidad. El índice de condición indica la destreza local del manipulador, y para evaluar la destreza sobre el espacio de trabajo dado se define el índice de destreza global, CGI (Condition Global Index) [93].

### 5.7.5 Modelo Geométrico 3-RRR

A manera de ejemplo y para ilustrar la metodología antes descrita para el cálculo del WS, en esta sección se describe el espacio de trabajo del manipulador paralelo 3-RRR, mecanismo de orientación espacial de 3 GDL, (figura 5.7). En la tabla 5.4 se encuentran los parámetros geométricos que describen el manipulador de acuerdo con la figura 5.7b.

Para dar flexibilidad a la forma como se define el manipulador y que se man-

## Cinemática de PMs

tengan las restricciones geométricas de las direcciones de las articulaciones, el modelo se ha parametrizado de la siguiente manera:

Un robot 3-RRR, también llamado SPM como el ya descrito en la sección 5.4.5, cuyos vectores unitarios que describen la dirección de los ejes son denotados por  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{w}_i$  y  $\mathbf{v}_i$ , donde el eslabón que se conecta a la base es denominado eslabón proximal, se asume igual para las tres patas, y es definido por el ángulo  $\alpha_1$  y el radio  $r$  de la esfera tangente al punto de inserción de la primera articulación rotacional, (figura 5.7a). El segundo eslabón denominado eslabón proximal, igual para todas las patas, está unido a la plataforma móvil, y es definido por el ángulo  $\alpha_2$  y el radio  $r$  (ver figura 5.7b).

### 5.7.5.1 Modelado pata RRR

Para definir la geometría de la pata RRR, es decir, hacer la localización de los vectores  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{w}_i$  y  $\mathbf{v}_i$  se realiza el análisis geométrico directo considerando solamente una de las patas del 3-RRR y a partir de esta se realizan las modificaciones del caso para la obtención de las otras. Sin perder generalidad se asume una cadena cinemática abierta.

Se establece el sistema de coordenadas de referencia  $(x_0, y_0, z_0)$ , cuyo origen se ubica en el centro de rotación C, de forma tal que el vector  $u_1$  este sobre el plano  $xz$ , el eje  $z$  debe pasar por C y ser normal al plano de la base.

Para describir la geometría de la pierna se crean articulaciones virtuales que permitan conocer la localización de los vectores unitarios  $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{w}_i$ . En la figura 5.22 las articulación son denotadas por los símbolos  $\{\}$ . Las articulación 1, 2, y 4 son virtuales, mientras que la articulación 3 es real y corresponde con la primera articulación del SPM, que es actuada. Los ejes de rotación de todas las articulaciones deben pasar por C, y están denotados por  $\mathbf{s}_i$  (figura 5.23). Con las dos primeras articulaciones virtuales se define el tetraedro, la tercera corresponde a la articulación actuada del 3-RRR, y la cuarta articulación también es virtual con el radio  $r$  que caracteriza el eslabón proximal.

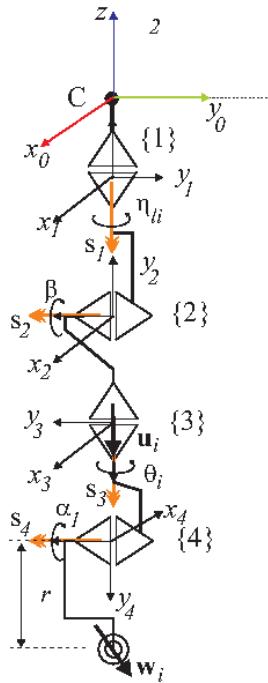


FIGURA 5.22: Esquema de pata RRR

La articulación virtual 1 representa la rotación alrededor de  $\mathbf{s}_1$ , y el parámetro asociado es  $\eta_{li}$ , con un valor inicial  $\eta_{lo}$ . La articulación virtual 2 representa la rotación alrededor de un eje arbitrario perpendicular al eje  $z$ . en la figura 5.23 corresponde con  $\mathbf{s}_2$ , la variable asociada a esta articulación es  $\beta_l$ . La articulación 3 corresponde con una articulación real del SPM, la rotación se realiza alrededor de  $\mathbf{s}_3$  y la variable en este caso es una variable articular denotada por  $\theta_i$ . La articulación virtual 4 representa el ángulo de apertura del eslabón proximal, este ángulo es medido alrededor del eje de rotación  $\mathbf{s}_4$ .

Considerando la pata como cadena serial, formada por articulaciones reales y virtuales, es posible a través de la cinemática directa determinar la localización de cada uno de los ejes las mismas, es decir, la geometría de la plataforma base y del eslabón proximal estarían en función del MGD de la pata, y puede ser representada de acuerdo a la ecuación (5.91), de forma paramétrica:

$$PlataformaBase = f(r, \eta_{lo}, \beta_l, \theta, \alpha) \quad (5.91)$$

donde  $\theta$  es la variable articular.

Para el análisis cinemático directo se hace uso del método de los Screws suces-

## Cinemática de PMs

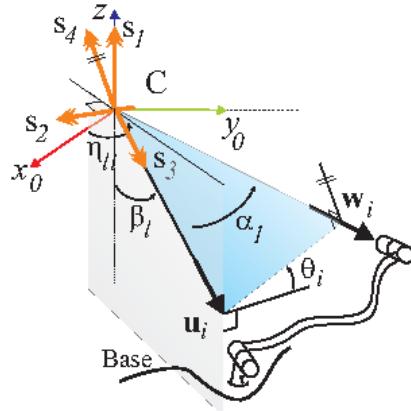


FIGURA 5.23: Localización ejes de rotación de las articulación virtuales y vectores  $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{w}_i$

sivos [123], que requiere de la siguiente información:

- Posición inicial. Escogida arbitrariamente y dada en términos de la localización del extremo final (figura 5.22), en la que además se debe definir la dirección del eje  $\mathbf{s}$  y el vector de posición de un punto del eje al origen que debe ser perpendicular al vector de dirección  $\mathbf{s}_0$ .

$$\mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_o & \mathbf{j}_o & \mathbf{k}_o & \mathbf{f}_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la tabla 5.3 se observan los vectores de dirección y localización para cada una de las articulaciones.

- Localización deseada. Es la localización objetivo que tendría el extremo del manipulador luego de realizar un desplazamiento finito, dada por la matriz de orientación homogénea.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ecuación de cinemática directa. El desplazamiento del extremo desde una posición de referencia a una posición final se establece como la resultante de  $n$  desplazamientos, rotando alrededor del  $n$ -ésimo eje articular seguido por la rotación alrededor de eje  $n - 1$ , del que resulta:

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_n, \quad (5.92)$$

## Cinemática de PMs

TABLA 5.3: Localización de ejes de rotación para la cadena serial RRR.

Screw $\$_{ij}$	Pata $i$	Art $j$	Vector Dirección $\mathbf{s}_{ij}$	Vector Localización $s_{oij}$
	1	1	$[1, 0, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$
	1	2	$[0, -1, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$
$\$_{1j}$	1	3	$[0, 0, 1]^T$	$[0, 0, 0]^T$
	1	4	$[0, -1, 0]^T$	$[0, 0, 0]^T$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de transformación homogénea obtenida a través de la formula vectorial de Rodrigues, para rotación alrededor de un eje arbitrario [123].

La cinemática directa del cualquier punto que pertenece al extremo de la cadena está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}_h f_o \quad (5.93)$$

Para obtener el vector unitario  $\mathbf{u}_i$ , correspondiente al eje de la primera articulación para cada una de las patas, se realiza la cinemática directa considerando las dos primeras articulaciones, con lo que se obtiene:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{k}_o, \quad (5.94)$$

Donde  $\mathbf{j}_o = [0, -1, 0]^T$ , y la matriz  $\mathbf{A}_1$  depende de  $\eta_{li}$ . Para una base regular  $\eta_{lo} = 2(i-1)/3$ , la matriz  $\mathbf{A}_1$  depende de  $\beta_1$ , que permite formal el tetraedro. Para determinar la dirección del vector unitario  $\mathbf{w}_i$ , que corresponde con la dirección del eje de la segunda articulación, se resuelve la cinemática directa considerando todas las articulaciones de la cadena serial, de donde resulta:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{j}_o, \quad (5.95)$$

donde  $\mathbf{j}_o = [0, 1, 0]^T$ , la matriz  $\mathbf{A}_3$  depende de  $\theta_i$ , que una variable articular del SPM, y la matriz  $\mathbf{A}_4$  depende de  $\alpha_1$ , permitiendo dimensionar el eslabón proximal, y la dirección del vector  $\mathbf{w}_i$  depende directamente de los parámetros anteriores.

Finalmente se determina el vector de dirección  $\mathbf{v}_{io}$ . Considerando que la orientación de la plataforma es conocida, y está representada por  $\mathbf{Q}$  resulta que:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{Q}\mathbf{v}_{oi}, \quad (5.96)$$

donde  $\mathbf{v}_{oi}$  es la dirección inicial del vector  $\mathbf{v}_i$ .

De acuerdo con la figura 5.7b la plataforma móvil del SPM es simétrica y paralela a la plataforma base, con lo cual  $\mathbf{v}_{oi}$  puede ser determinado como:

$$\mathbf{v}_{oi} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{j}_o \quad (5.97)$$

Considerando  $\mathbf{j}_o = [0, 1, 0]^T$  y  $\beta_2 = (\pi - \beta_1)$ . Para la posición inicial se puede introducir un desfase entre la plataforma fija y la móvil cambiando  $\eta_{ui} = \eta_{li} + \eta_{lo}$  que resulta en una rotación alrededor de eje  $z$ .

### 5.7.6 Jacobiano basado en screws para el SPM 3-RRR

Recordando que el jacobiano establece la relación entre las velocidades de las coordenadas articulares y las velocidades de variación de la posición y orientación del extremo del robot, n el caso de un SPM la matriz jacobiana se obtiene utilizando la formulación de screws recíprocos [123], donde  $\mathbf{q}$  denota las variables actuadas y  $\mathbf{x}$  denota la localización de la plataforma móvil. La localización de la plataforma se compone de la posición y la orientación, en el caso de un SPM y de acuerdo con la figura 5.7a el vector de posición de la plataforma es cero y la orientación es representada a través de cuaternios.

Conforme a la figura 5.7a, se obtienen los screw unitarios, expresados en el sistema  $F_0 = \{0, x_0, y_0, z_0\}$  localizado en C.

$$\hat{\$}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\$}_{i,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\$}_{i,3} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.98)$$

Para cada una de las patas  $i = 1, 2, 3$ .

A través de los screws unitarios se obtiene el screw resultante de la plataforma como una combinación lineal de los mismos y la intensidad de velocidades angulares de cada una de las articulaciones  $\omega_{j,i}$ :

$$\$_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \omega_{i,1} \hat{\$}_{i,1} + \omega_{i,2} \hat{\$}_{i,2} + \omega_{i,3} \hat{\$}_{i,3}. \quad (5.99)$$

Considerando que las articulaciones rotacionales actuadas son las más próximas a la base, es necesario obtener un Screw recíproco a las dos articulaciones rotacionales adicionales de cada pata, usando los screws  $\hat{\$}_{2,i}$  y  $\hat{\$}_{3,i}$  respectivamente, y partiendo de que el screw de una articulación rotacional tiene asociado un sistema-5 de screws recíprocos, entre los cuales están todos los screws de paso-0 coplanares al eje de rotación de la articulación. Se considera el screw recíproco a las dos articulaciones rotaciones como aquel que tiene su ejes sobre el vector resultante del producto cruz de los vectores ubicados en las direcciones de las articulaciones:

$$\hat{\$}_{r,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.100)$$

Realizando el producto entre los Screws y  $\$_n \circ \hat{\$}_{r,i}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \$_n \circ \hat{\$}_{r,i} &= [\Pi \$_n]^T * \hat{\$}_{r,i} \\ &= \omega_{i,1} \$_{i,1} \circ \hat{\$}_{r,i} + \omega_{i,2} \$_{i,2} \circ \hat{\$}_{r,i} + \omega_{i,3} \$_{i,3} \circ \hat{\$}_{r,i}, \\ &= \omega_{i,1} (\mathbf{u}_i^T (\mathbf{w}_{i,j} \times \mathbf{v}_{i,j})) \end{aligned} \quad (5.101)$$

donde  $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ . Realizando el cálculo para las demás patas de acuerdo a la ecuación (5.101) y organizando se obtiene la siguiente expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1)^T \\ (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2)^T \\ (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3)^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_n = diag[\mathbf{u}_i^T (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i)] \begin{bmatrix} \omega_{1,1} \\ \omega_{2,1} \\ \omega_{3,1} \end{bmatrix}. \quad (5.102)$$

Relacionando tanto al lado derecho como el izquierdo de (5.101) y comparando con (5.102) se tiene que:

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1)^T \\ (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2)^T \\ (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3)^T \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2^T (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2) & \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_3^T (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3) \end{bmatrix}.$$

### 5.7.7 Espacio de trabajo 3-RRR

Una vez definido el modelo geométrico y cinemático del robot se tiene la suficiente información para establecer vía métodos numéricos su espacio de trabajo.

TABLA 5.4: Parametros para obtener el WS de un 3-RRR

MP	Parámetros	Espacio de búsqueda
(3-RRR)	$r = 1$ $\eta_{ui} = \eta_{li} = 120$ $\beta_{1i} = \beta_{2i} = 54,73$ $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = 45$ $ \theta_{ia} = actuadores  \leq 65^\circ$ $ \theta_{ip}  \leq 35^\circ$	$\mathbf{x}[-1, 1], \mathbf{y}[-1, 1], \mathbf{z}[-1, 1]$ $\Delta_{iXYZ} = 0,0392, i=x, y, z.$ $voxels_{XYZ} = 132651$ $voxels_{WS} = 65267.$
Espacio objetivo	$roll = 30^\circ, pitch = 30^\circ, CI \leq 0$ $yaw = 60^\circ$	

<sup>1</sup>XYZ representada en coordenadas cartesianas.

Con los valores definidos en la tabla 5.4 se procede a realizar las simulaciones. Se parte de un espacio parametrizado con forma de esfera como ya se ha explicado, y con un numero total de voxels equivalente a 65267 puntos de muestreo.

En la figura 5.24 se observa el espacio de trabajo objetivo ( $WS_{Objetivo}$ ), para su obtención se ha restringido a través de los ángulos de euler, lo que básicamente consiste en llevar a la representación de la orientación en cuaternios los ángulos fijos, y evaluar si los ángulos calculados se encuentran dentro de los límites establecidos.

Espacio de trabajo objetivo  $\text{roll} < 60$   $\text{pitch} < 60$   $\text{yaw} < 120$

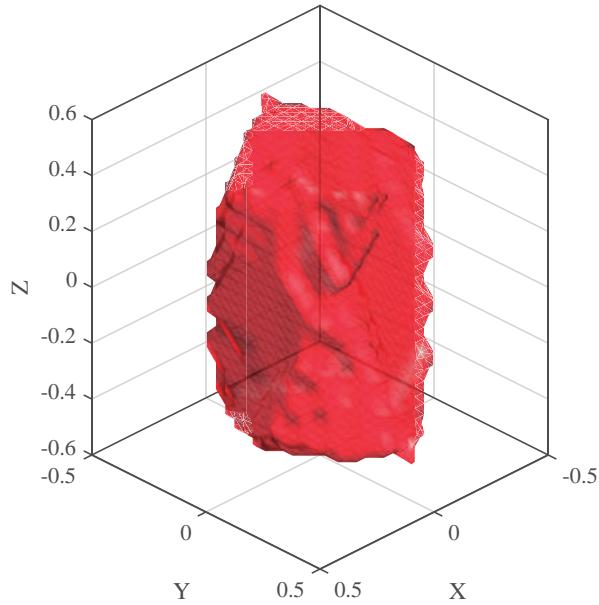


FIGURA 5.24: Representación del WS objetivo.

En la figura 5.25 se observa el espacio de trabajo del robot ( $WS_{Robot}$ ) que cumple con las restricciones geométricas definidas, con un total de 27306 voxels. Se puede observar que posee una forma no simétrica lo que implica que la plataforma no tenga una distribución uniforme entre los ejes de rotación y sus magnitudes. Al interior del espacio de trabajo del robot se observan pequeños regiones mas oscuras, dichas regiones deben ser analizadas a través de planos de corte, como se presenta más adelante (figura 5.28), donde se indica el nivel de destreza del robot. También se observan regiones aisladas, a la cuales el robot en ninguna combinación posible de movimientos de sus actuadores puede llegar.

En la figura 5.26 se observan las singularidades del manipulador, regiones que han sido encontradas mediante la resolución del espacio de análisis, sin embargo, hay que considerar el que  $WS_{robot}$  ha sido fuertemente restringido por los límites de las articulaciones actuadas y pasivas, y por las colisiones entre eslabones, obteniendo un espacio de trabajo en su mayoría libre de singularidades. También es preciso mencionar que existe una fuerte dependencia de las singularidades con respecto a los límites de movimiento de la articulaciones.

## Cinemática de PMs

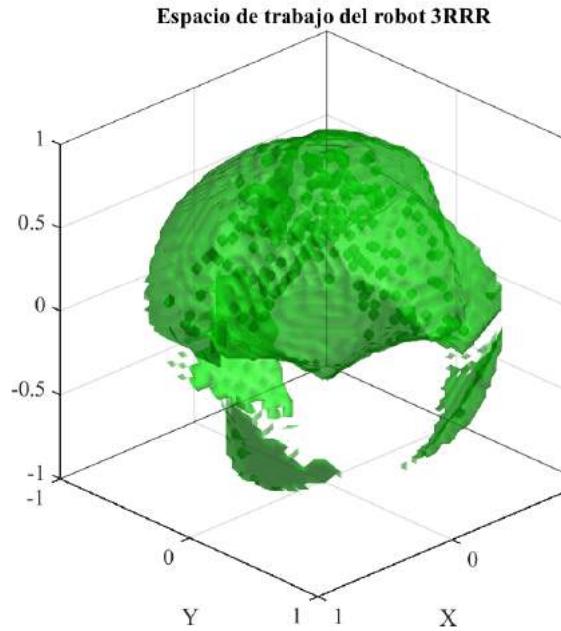


FIGURA 5.25: Representación del WS del MP 3-RRR.

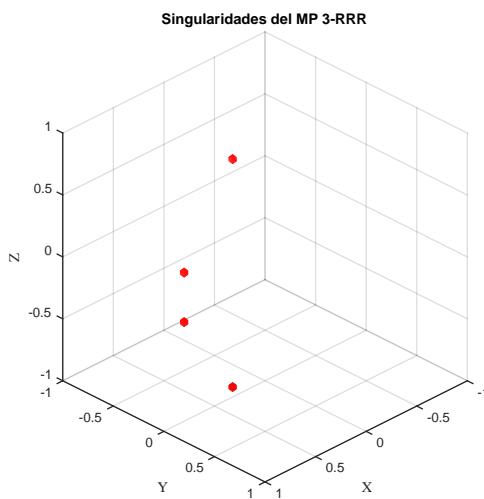


FIGURA 5.26: En rojo se observan algunas regiones singulares.

En la figura 5.27 se observan cortes del espacio de trabajo y en colores se expresan diferentes indices de condición, en la medida que las curvas se hacen más oscuras el robot presenta una menor destreza. En la figura 5.27 se observan puntos aislados muy claros indicando una mayor destreza del robot, en

## Cinemática de PMs

contraste, existen regiones aisladas oscuras que indican una baja destreza, y la perdida de condicionamiento de la matriz jacobiana, por tanto, son regiones dentro del WS que deben ser evitadas.

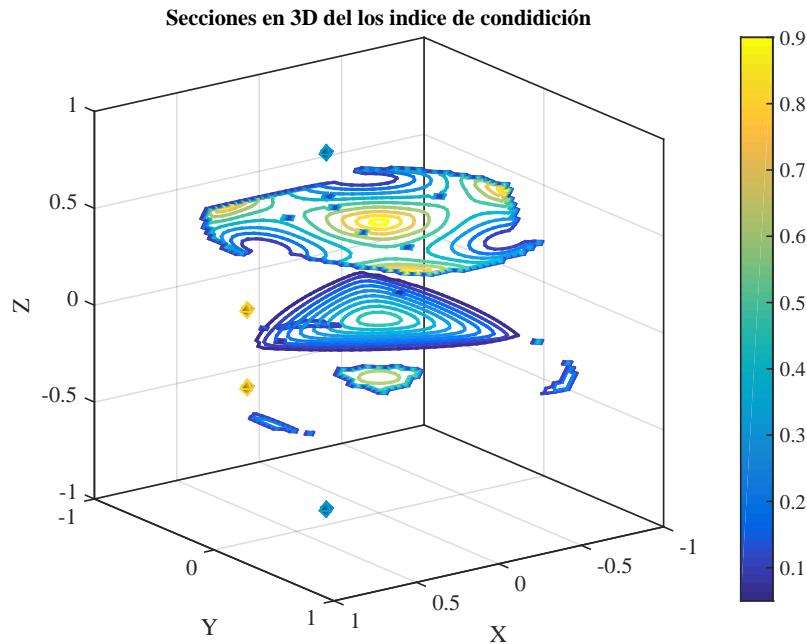


FIGURA 5.27: Gráfica del índice de condición, a diferentes niveles del espacio de trabajo del MP 3-RRR

En la figura 5.28 se observan en planos aislados diferentes regiones acotadas por los indices de condición. Hacia la región central la destreza el robot aumenta. Sin embargo la mayor destreza lograda con las dimensiones definidas es de 0,6, que se contrasta con un  $GCI = 0,3124$

En la figura 5.29 se observa el espacio de trabajo común formado conformado por 6178 voxels. Esta resulta de la intersección los espacios de trabajo  $WS_{robot}$  y el  $WS_{objetivo}$  con un volúmen de 6178 voxels.

Finalmente en la figura 5.30 se observa el espacio objetivo superpuesto con el espacio del robot. El total del espacio objetivo no está contenido dentro del espacio de robot, y desde una perspectiva de diseño debe realizarse un análisis sobre el cumplimiento de los objetivos de diseño por parte del robot.

## Cinemática de PMs

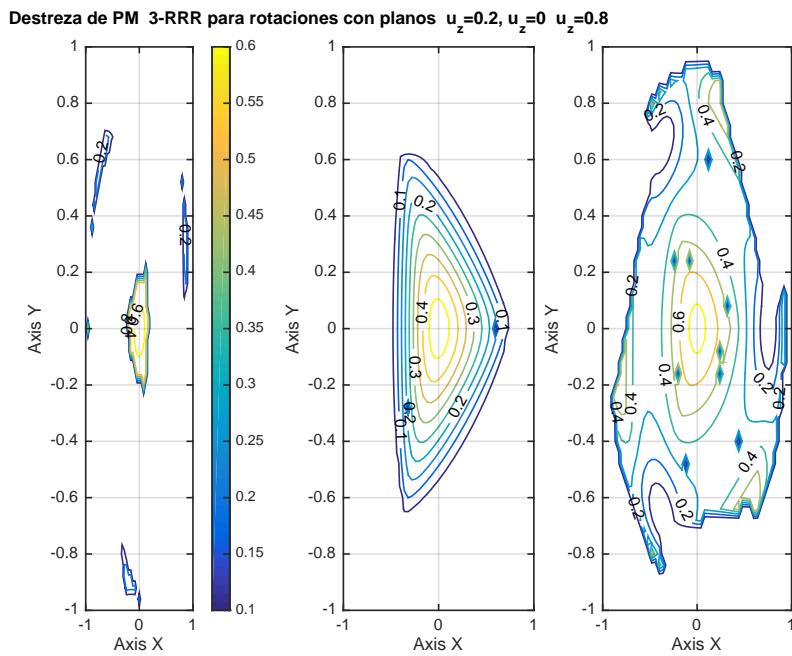


FIGURA 5.28: Indice de condición, en planos(-0,2 0 0,8) del WS del MP 3-RRR

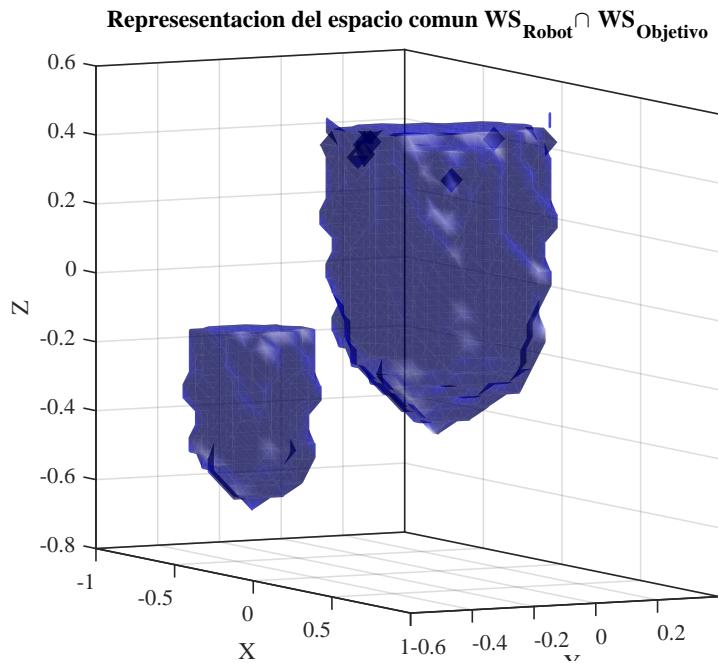


FIGURA 5.29: Espacio de trabajo comun entre el  $WS_{robot}$  y el  $WS_{objetivo}$

*Cinemática de PMs*

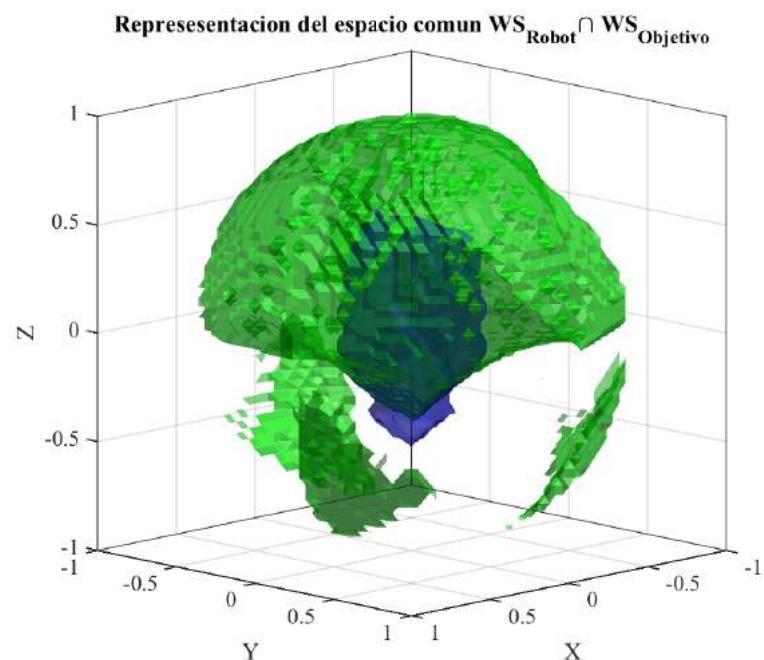


FIGURA 5.30: El  $WS_{robot}$  y el  $WS_{objetivo}$  superpuestos.

# **Capítulo 6**

## **DINÁMICA DE ROBOTS PARALELOS**

### **6.1 Método de Kane para obtener el modelo dinámico de un robot paralelo**

El método de Kane es una herramienta popular para la obtención de las ecuaciones dinámicas para sistemas multicuerpo. El cual comprensible y eficiente, además de permitir su resolución mediante el uso de métodos numéricos clásicos.

El método de Kane ofrece la combinación entre las ventajas del método Newton-Euler y el método de ecuaciones de Lagrange, evitando sus desventajas:

- Ventajas del método de Newton-Euler: Comprensible, entrega una solución para todas las fuerzas y variables cinemáticas.
- Desventajas del método de Newton-Euler: Ineficiente cuando se desea resolver unas pocas variables del sistema, debido a que requiere definir el balance de fuerzas y momentos de todos los cuerpos en el sistema, teniendo en cuenta todas las interacciones y restricciones. Por el contrario el método de Kane evita éste problema haciendo uso fuerzas generalizadas.
- Ventajas ecuaciones de Lagrange: Ignoran todas las interacciones y fuerzas restrictivas del sistema que no hacen trabajo.

- Desventajas ecuaciones de Lagrange: Necesidad de diferenciar todas las funciones de energía cinética y potencial del sistema, lo cual resulta ineficiente en sistemas multicuerpo lo suficientemente grandes. Este problema no se presenta en el método de Kane, ya que no se hace uso de funciones de energía. La diferenciación requerida para calcular velocidades y aceleraciones puede ser obtenida a través de algoritmos basados en productos vectoriales.

## 6.2 Método de Kane: principio de Trabajo Virtual

A continuación se hace una breve introducción a la dinámica de cuerpo rígido, en la que se considera un sistema multicuerpo, en forma de cadena abierta con  $N$  cuerpos rígidos interconectados, cada uno de ellos sometido a la acción de fuerzas externas y de restricción. Las fuerzas externas pueden ser transformadas en fuerzas y momentos equivalentes ( $\vec{F}_k$  y  $\vec{M}_k$ ), los cuales pasan por el centro de masa ( $\vec{G}_k$ ) del cuerpo  $k$  ( $k=1,2,3\dots N$ ). De forma similar, las fuerzas de restricción pueden ser descritas como  $\vec{F}_k^c$  y  $\vec{M}_k^c$ . Usando el principio de d'Alembert para el equilibrio de fuerzas que actúan sobre un cuerpo  $k$ , se logran obtener la siguiente ecuación:

$$\vec{F}_k + \vec{F}_k^c + \vec{F}_k^* = 0, \quad (6.1)$$

donde  $\vec{F}_k^* = -m_k a_k$  es la fuerza inercial del cuerpo  $k$ .

El concepto de trabajo virtual puede ser descrito como se observa en la ecuación (6.2), partiendo de un sistema con  $N$  partículas, cada una de ellas moviéndose con 3 grados de libertad, en consecuencia, el sistema total dispone de  $3N$  grados de libertad. Para describir la configuración de sistema se necesitan  $q_i$   $i = 1, 2, \dots, 3N$  coordenadas generalizadas, considerando además que existen  $F_1, F_2, \dots, F_{3N}$  fuerzas que actúan sobre las partículas en cada una de las coordenadas generalizadas se puede definir el trabajo virtual como:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i, \quad (6.2)$$

## Dinámica de PMs

donde  $\vec{F}_i$  es la fuerza resultante actuando en la  $i$ -esima partícula;  $r_i$  es el vector de posición en el marco inercial de referencia;  $\delta r_i$  es el desplazamiento virtual, tomando en cuenta la consideración de que ocurre sin variación en el tiempo.

Aplicando el concepto de trabajo virtual al sistema multicuerpo y considerando únicamente las fuerzas que generan trabajo en el sistema se obtiene:

$$\delta W = (\vec{F}_k + \vec{F}_k^c + \vec{F}_k^*) \cdot \delta r_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6.3)$$

Donde claramente las restricciones no producen trabajo y por tanto son cero  $\vec{F}_k^c \cdot \delta r_k = 0$ , lo que reduce la ecuación de trabajo virtual a:

$$\delta W = (\vec{F}_k + \vec{F}_k^*) \cdot \delta r_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6.4)$$

La ecuación anterior es expresada en términos del cambio del desplazamiento virtual, sin embargo generalizando se obtiene:

$$\delta W = (\vec{F}_k + \vec{F}_k^*) \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_r} \delta q_r = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 3N), \quad (6.5)$$

La posición de cada una de las partículas es función de la configuración del sistema y cambia con el tiempo por tanto  $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_r, t)$ ; derivando la posición en el tiempo, y aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\dot{\vec{r}}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}, \quad (6.6)$$

tomando la derivada parcial de  $\dot{\vec{r}}_k$  con respecto a  $\dot{q}_r$  se llega a:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_r}, \quad (6.7)$$

que equivale a:

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_r}. \quad (6.8)$$

Dado que el desplazamiento virtual  $\delta q_r$  se refiere a cualquier dirección (arbitrario) y en cualquier caso no viola las restricciones, la ecuación 6.5 se expresa

como:

$$f_r + f_r^* = 0 \quad (6.9)$$

donde  $f_r$  y  $f_r^*$  son la fuerza generalizada y la fuerza de inercia respectivamente; utilizando (6.8), se definen las fuerzas como :

$$f_r = \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_r} \quad (6.10)$$

$$f_r^* = \vec{F}_k^* \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_r}. \quad (6.11)$$

De forma similar se puede demostrar, haciendo uso del concepto de trabajo virtual, que los momentos que actúan sobre un cuerpo pueden ser expresados como:

$$M_r + M_r^* = 0, \quad (6.12)$$

donde  $M_r$  y  $M_r^*$  son el momento activo generalizado y la inercia rotacional generalizada respectivamente, definidas como:

$$M_r = \vec{T}_k \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_r}, \quad (6.13)$$

y

$$M_r^* = -(\vec{\alpha}_k \cdot \vec{I} + \vec{\omega}_k \times \vec{I} \cdot \vec{\omega}_k) \frac{\partial \vec{\omega}_k}{\partial \dot{q}_r}. \quad (6.14)$$

Considerando el principio de superposición, las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo se pueden combinar linealmente para obtener ecuaciones de Kane:

$$F_r + F_r^* = 0 \quad (6.15)$$

Donde la fuerza total generalizada y la fuerza total de inercia son equivalentes a:

$$F_r = f_r + M_r \quad \text{y} \quad F_r^* = f_r^* + M_r^*. \quad (6.16)$$

### 6.3 Aproximación al modelo dinámico utilizando el Método trabajo virtual

La ecuación del trabajo virtual (6.5), aplicada a una plataforma Stewart-Gough descrita en la sección 6.8.1 del presente capítulo, equivale a:

$$\delta\mathbf{q}^T \boldsymbol{\tau} + \delta\mathbf{x}_p^T \hat{\mathbf{F}}_p + \sum_i \delta\mathbf{x}_i^T \hat{\mathbf{F}}_i = \mathbf{0}, \quad (6.17)$$

donde  $\delta\mathbf{q} = [\delta q_1 \dots \delta q_n]^T$  son los desplazamientos virtuales de la juntas actuadas;  $\boldsymbol{\tau} = [\delta\tau_1 \dots \delta\tau_n]^T$  son las pares o fuerzas de actuacion sobre las juntas actuadas;  $\delta\mathbf{x}_p = [\delta\mathbf{r}_p \dots \delta\boldsymbol{\pi}_p]^T$  es el desplazamiento virtual del efecto final;  $\delta\mathbf{x}_i = [\delta\mathbf{r}_i \dots \delta\boldsymbol{\pi}_i]^T$  es el desplazamiento virtual del centro de gravedad de los cuerpos individuales que conforman cada una de las patas; y por ultimo  $\hat{\mathbf{F}}_p$  y  $\hat{\mathbf{F}}_i$  son las fuerzas iniciales correspondientes al centro de gravedad del efecto final y a los eslabones de las patas, respectivamente, las cuales están definidos por la relación:

$$\hat{\mathbf{F}}_k = \begin{bmatrix} f_{ext} + m_k \mathbf{g} - m_k \dot{\mathbf{v}}_k \\ n_{ext} - I_k \dot{\boldsymbol{\omega}}_k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k I_k \boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Es posible relacionar el desplazamiento virtual del efecto final,  $\delta\mathbf{x}_p$ , con el cambio en la juntas actuadas,  $\delta\mathbf{q}$  a través del jacobiano inverso del robot,  $\mathbf{J}_p$ :

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{J}_p \delta\mathbf{x}_p. \quad (6.19)$$

De la misma manera se puede relacionar el desplazamiento virtual de cada eslabón,  $\delta\mathbf{x}_i$ , con el del efecto final  $\delta\mathbf{x}_p$  usando las matrices jacobianas correspondientes a dichos eslabones mediante el jacobiano  $\mathbf{J}_i$ :

$$\delta\mathbf{x}_i = \mathbf{J}_i \delta\mathbf{x}_p \quad (6.20)$$

Reemplazando las ecuaciones (6.19) y (6.20) en la ecuación (6.17), se obtiene la expresión para las fuerzas y/o pares en las articulaciones activas:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_p^T \left( \mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\tau} + \hat{\mathbf{F}}_p + \sum_i \mathbf{J}_i^T \hat{\mathbf{F}}_i \right) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} &= -\mathbf{J}_p^{-T} \left( \hat{\mathbf{F}}_p + \sum_i \mathbf{J}_i^T \hat{\mathbf{F}}_i \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

La ecuación (6.21) es equivalente a la que a sido propuesta por Tsai para solucionar la dinámica inversa del robot Stewart-Gough [124], sin embargo

## Dinámica de PMs

este enfoque presenta varios inconvenientes: el primero, que necesita que se realice la cinemática inversa con los valores de aceleración para poder evaluar los vectores  $\hat{\mathbf{F}}$ ; segundo, que no establece los valores de las matrices de masa y coriolis de forma que puedan emplearse tanto para las simulaciones de la dinámica directa del robot como para la implementación de diversos tipos de control para el efecto final.

Si se desea obtener una ecuación dinámica con estructura sencilla similar a la encontradas en los robots seriales, se debe empezar por replantear los términos de la ecuación (6.18) en matrices y vectores, con lo cual se obtiene:

$$\hat{\mathbf{F}}_k = \boldsymbol{\tau}_{ext,k} - \mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{x}}_k - \mathbf{C}_k \dot{\mathbf{x}}_k - \mathbf{g}_k, \quad (6.22)$$

donde se han introducido las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{\tau}_{ext,k} = \begin{bmatrix} f_{ext,k}^T & n_{ext,k}^T \end{bmatrix}^T \quad (6.23)$$

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} m_k \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\omega}_k \mathbf{I}_k \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{g}_k = \begin{bmatrix} -m_k \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_k \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_k \\ \boldsymbol{\omega}_k \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Reemplazando (6.22) en (6.17), con la salvedad de que se tienen en cuenta únicamente las fuerzas y pares externos en el efecto final,  $\boldsymbol{\tau}_{ext,p}$ , se obtiene:

$$\mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{ext,p} = \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_p \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{g}_p + \sum_i \mathbf{J}_i^T (\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{g}_i) \quad (6.29)$$

Si adicionalmente se hace uso de las relaciones de velocidades y aceleraciones

## Dinámica de PMs

de cada eslabón con el efecto final:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{J}_i \dot{\mathbf{x}}_p \quad (6.30)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{J}_i \ddot{\mathbf{x}}_p + \dot{\mathbf{J}}_i \dot{\mathbf{x}}_p \quad (6.31)$$

A partir de la ecuación (6.29) se puede obtener el modelo del robot paralelo en el espacio de la tarea:

$$\mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{ext,p} = \mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_t \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{g}_t \quad (6.32)$$

donde,  $\mathbf{M}_t$  es la matriz de masa total del robot,  $\mathbf{C}_t$  es la matriz total de coriolis y  $\mathbf{g}$  es el vector de efectos generados por la acción de la gravedad, matemáticamente definidos por:

$$\mathbf{M}_t = (\mathbf{M}_p + \sum_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{J}_i) \quad (6.33)$$

$$\mathbf{C}_t = (\mathbf{C}_p + \sum_i (\mathbf{J}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{J}}_i)) \quad (6.34)$$

$$\mathbf{g}_t = (\mathbf{g}_p + \sum_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{g}_i) \quad (6.35)$$

En la ecuación (6.32) la matriz de masas  $\mathbf{M}_t$  depende únicamente de la posición actual del efecto final; la matriz de coriolis  $\mathbf{C}_t$  depende además de las velocidades del efecto final, requeridas para el cálculo de los términos  $\mathbf{C}_i$  y  $\dot{\mathbf{J}}_i$ .

Realizar el cálculo de cada uno de los términos expresados en la ecuación (6.32) permite obtener algunas ventajas: primero, se obtiene un modelo dinámico en el espacio de la tarea muy similar al encontrado en los robots seriales, permitiendo aplicar la amplia gama de técnicas de control para robots seriales a robots paralelos; segundo, se pueden realizar los análisis dinámicos directos e inversos del robot usando la misma ecuación de tipo numérico y, por último, no es necesario realizar un análisis inverso de aceleración para el estudio dinámico del robot.

Ampliando la definición dada en la ecuación 6.32, se puede obtener una ex-

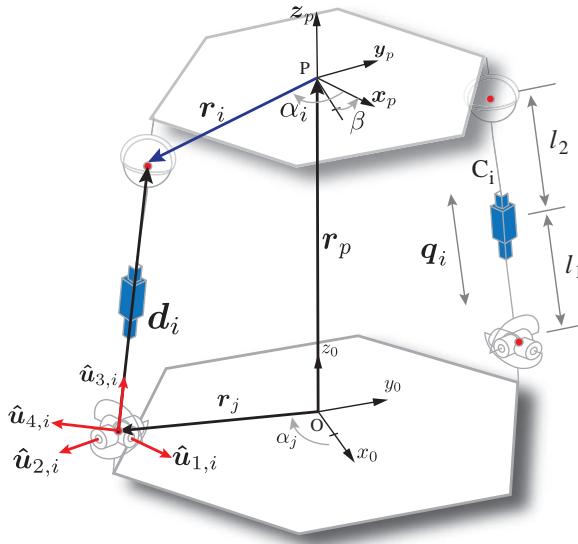


FIGURA 6.1: Definiciones de los vectores usados en el análisis de una pata del robot Stewart Gough.

presión en términos de las articulaciones actuadas,  $\theta_i$ :

$$\boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\theta \boldsymbol{\tau}_{ext,p} = \mathbf{M}_\theta \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g}_\theta$$

Sin embargo, desde el punto de vista de control existen dos inconvenientes: El primero es que sigue siendo necesario realizar el cálculo de la cinemática directa para obtener la posición del efecto final, debido a que los jacobianos  $\mathbf{J}_p$  y  $\mathbf{J}_i$  suelen expresarse en función de vectores unitarios presentes en cada pata; el segundo es que para efectos de control del movimiento del robot, es preferible calcular los errores de posicionamiento y velocidad en función del efecto final que en función de las variables articulares.

## 6.4 Ecuaciones dinámicas de la plataforma SG.

La figura 6.1 ilustra las definiciones de vectores usados en el análisis del robot Stewart-Gough. En esta figura la posición del sistema ubicado en la plataforma móvil respecto al sistema ubicado en la base se encuentra representado por un vector  $\mathbf{r}_p$ , adicionalmente se utiliza un cuaternio,  $\mathbf{p} = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T$ , que permite expresar la orientación relativa del anillo superior respecto al inferior. En consecuencia, la matriz de rotación del anillo superior puede evaluarse con

la expresión:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p & \mathbf{v}_p & \mathbf{w}_p \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} &= 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1 e_2 - e_0 e_3 & e_1 e_3 + e_0 e_2 \\ e_1 e_2 + e_0 e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2 e_3 - e_0 e_1 \\ e_1 e_3 - e_0 e_2 & e_2 e_3 + e_0 e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.36)\end{aligned}$$

Los vectores de posición, velocidad y aceleración del robot están dados por:

$$\mathbf{q}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_p^T & \mathbf{p}^T \end{bmatrix}^T \quad (6.37)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_p^T & \boldsymbol{\omega}_p^T \end{bmatrix}^T \quad (6.38)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_p^T & \dot{\boldsymbol{\omega}}_p^T \end{bmatrix}^T \quad (6.39)$$

donde  $\dot{\mathbf{r}}_p$  y  $\boldsymbol{\omega}_p$  son la velocidad lineal y angular del efecto final, y  $\ddot{\mathbf{r}}_p$  y  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_p$  son la aceleración lineal y angular también del efecto final.

Adicionalmente, para los análisis cinemáticos de posición y velocidad, se emplean los vectores  $\mathbf{d}_i$ , que se encuentran ubicados a lo largo de la pata  $i$ -ésima y van desde la junta universal inferior hasta la junta esférica en la plataforma móvil (figura 6.1);  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{r}_j$ , que describen la posición de las junta universal y esférica respecto al sistema de coordenadas de cada plataforma, teniendo en cuenta la rotación dada por los ángulos  $\boldsymbol{\alpha}_i$  y  $\boldsymbol{\alpha}_j$  respecto al eje  $\mathbf{W}$  del respectivo sistema de coordenadas.

Por último, se usa un sistema de referencia ubicado en cada pata que permite describir la rotación de los dos cuerpos presentes en la misma. En este sistema, el eje  $\mathbf{W}_i$  esta alineado con el vector  $\mathbf{d}_i$ , el eje  $\mathbf{U}_i$  con el segundo eje de rotación de la junta universal,  $\mathbf{u}_{2,i}$ , y el eje  $\mathbf{V}_i$  forma un sistema de coordenadas cartesianas diestro.

Para efectos de obtener un algoritmo detallado que describa paso a paso la forma de calcular la dinámica del robot Stewart-Gough, se hace necesario rescribir las ecuaciones (6.33), (6.34) y (6.35) de forma que incluya el hecho

## Dinámica de PMs

de que cada pata posee dos cuerpos:

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_p + \sum_{i=1}^6 \mathbf{M}_i \quad (6.40)$$

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j=1}^2 \mathbf{J}_{j,i}^T \mathbf{M}_{j,i} \mathbf{J}_{j,i} \quad (6.41)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_p + \sum_{i=1}^6 \mathbf{C}_i \quad (6.42)$$

$$\mathbf{C}_i = \sum_{j=1}^2 (\mathbf{J}_{j,i}^T \mathbf{C}_{j,i} \mathbf{J}_{j,i} + \mathbf{J}_{j,i}^T \mathbf{M}_{j,i} \dot{\mathbf{J}}_{j,i}) \quad (6.43)$$

$$\mathbf{g}_t = m_p \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{g}_i \quad (6.44)$$

$$\mathbf{g}_i = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^2 m_{j,i} \mathbf{J}_{j,i}^T \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Los valores tanto de los jacobianos de los eslabones,  $\mathbf{J}_{j,i}$ , como de sus derivadas,  $\dot{\mathbf{J}}_{j,i}$ , se obtienen detalladamente en las siguientes secciones, simultáneamente el análisis de posición, velocidad y sugiriendo una solución para la dinámica directa e inversa del manipulador paralelo.

### 6.4.1 Análisis de Posición

El objetivo del análisis de posición es conocer los valores de cada vector involucrado en el análisis dinámico, entre otros, los vectores de ubicación de las articulaciones tanto en la plataforma superior como en la inferior (base),  $\mathbf{r}_i$   $\mathbf{r}_j$ , la matriz de rotación correspondiente a los cuerpos que componen cada pata,  $\mathbf{R}_i$ , y las posiciones de los centros de gravedad de cada cuerpo,  $\mathbf{c}_{j,i}$ ,  $j = \{1, 2\}$ .

En el caso del vector de posición de la articulación superior,  $\mathbf{r}_i$ , su valor está determinado por:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}\mathbf{r}_i^i \quad (6.46)$$

$$\mathbf{r}_i^i = \frac{\phi_i}{2} \mathbf{rot}_z(\boldsymbol{\alpha}_i), \quad (6.47)$$

Vector a partir del que es posible obtener el valor de  $\mathbf{d}_i$ :

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{r} + \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (6.48)$$

$$\mathbf{r}_j = \frac{\phi_j}{2} \mathbf{rot}_z(\boldsymbol{\alpha}_j), \quad (6.49)$$

donde  $\phi_i$  y  $\phi_j$  son los diámetros de las plataformas superior e inferior, respectivamente.

Para el cálculo de la matriz de rotación de los cuerpos presentes en la pata  $i$ -ésima, es necesario evaluar primero los tres vectores unitarios que la conforman,  $\mathbf{u}_{4,i}$ ,  $\mathbf{u}_{2,i}$  y  $\mathbf{u}_{3,i}$ . El cálculo de  $\mathbf{u}_{3,i}$  es relativamente simple por cuanto es colineal con  $\mathbf{d}_i$ :

$$\mathbf{u}_{3,i} = \frac{\mathbf{d}_i}{\|\mathbf{d}_i\|_2}. \quad (6.50)$$

Para el cálculo de  $\mathbf{u}_{2,i}$  se hace uso del primer vector de rotación de la articulación universal,  $\mathbf{u}_{1,i}$ , ya que es constante por estar ubicado en la base:

$$\mathbf{u}_{2,i} = \frac{\mathbf{u}_{3,i} \times \mathbf{u}_{1,i}}{\|\mathbf{u}_{3,i} \times \mathbf{u}_{1,i}\|_2}. \quad (6.51)$$

El vector unitario  $\mathbf{u}_{4,i}$  se calcula tomando en cuenta la disposición en el sistema coordenado dextrogiro:

$$\mathbf{u}_{4,i} = \frac{\mathbf{u}_{2,i} \times \mathbf{u}_{3,i}}{\|\mathbf{u}_{2,i} \times \mathbf{u}_{3,i}\|_2} \quad (6.52)$$

Con las definiciones de los vectores unitarios la matriz de rotación queda definida por:

$$\mathbf{R}_i = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{u}_{4,i} & \mathbf{u}_{2,i} & \mathbf{u}_{3,i} \end{array} \right] \quad (6.53)$$

Por último, es necesario evaluar la posición de los centros de gravedad de cada cuerpo presente en la pata  $i$ -ésima, donde se concentra el peso debido a la

acción de la fuerza de gravedad:

$$\mathbf{c}_{1,i} = c_{1,i}^* \mathbf{u}_{3,i} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{c}_{2,i} = \mathbf{d}_i - c_{2,i}^* \mathbf{u}_{3,i}, \quad (6.55)$$

donde  $c_{1,i}^*$  y  $c_{2,i}^*$  son constantes relacionadas con la mitad de la longitud de cada eslabón.

### 6.4.2 Análisis de Velocidad

El análisis de velocidad permite calcular las velocidades de los centros de gravedad de los dos cuerpos que hacen parte de cada pata, las mismas que se utilizan para evaluar la contribución de las fuerzas de coriolis de cada cuerpo en el efecto final. Adicionalmente, la relación de velocidades permite determinar las expresiones de las matrices jacobianas del robot y también de los eslabones,  $\mathbf{J}_p$  y  $\mathbf{J}_{j,i}$ , respectivamente, que sirven para determinar la contribución de la masa e inercia de cada cuerpo en la matriz de masa generalizada del efecto final, (ecuación (6.33)).

La primera velocidad que se propone calcular es la velocidad de la articulación activa,  $\dot{\theta}_{3,i}$ , para tal fin se expresa la velocidad lineal del punto  $B_i$  en función de las velocidades del efecto final,  $\mathbf{v}_p$  y  $\boldsymbol{\omega}_p$ :

$$\mathbf{v}_{B_i} = \mathbf{v}_p - \tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{v}_p + \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (6.56)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = -\tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}_p, \quad (6.57)$$

Y en función de las velocidades de las articulaciones de la pata:

$$\mathbf{v}_{B_i} = -\tilde{\mathbf{d}}_i (\dot{\theta}_{1,i} \mathbf{u}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i} \mathbf{u}_{2,i}) + \dot{\theta}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i}. \quad (6.58)$$

Si se igualan las expresiones (6.56) y (6.58) y el resultado se multiplica por

## Dinámica de PMs

$\mathbf{u}_{3,i}^T$  se obtiene la velocidad buscada:

$$\dot{\theta}_{3,i} = \mathbf{u}_{3,i}^T \mathbf{v}_{B_i} = \mathbf{J}_{p,i} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix}, \quad (6.59)$$

$$\mathbf{J}_{p,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{3,i}^T & -\mathbf{u}_{3,i}^T \tilde{\mathbf{r}}_i \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

Donde adicionalmente se evalúa la contribución de la pata  $i$ -esima al jacobiano total del robot,  $\mathbf{J}_{p,i}$ .

Por otro lado, la velocidad angular de la primera articulación rotacional de cada pata,  $\dot{\theta}_{1,i}$ , se obtiene al multiplicar la expresión de la ecuación (6.58) por el vector  $\mathbf{u}_{2,i}^T$ , que es perpendicular a  $\mathbf{u}_{i,3}$ :

$$\mathbf{u}_{2,i}^T \mathbf{v}_{B_i} = -\dot{\theta}_{1,i} \mathbf{u}_{2,i}^T \tilde{\mathbf{d}}_i \mathbf{u}_{1,i},$$

$$\dot{\theta}_{1,i} = \frac{1}{f_i} \mathbf{u}_{2,i}^T \mathbf{v}_{B_i}, \quad (6.61)$$

$$f_i = \mathbf{u}_{1,i}^T \tilde{\mathbf{d}}_i \mathbf{u}_{2,i}. \quad (6.62)$$

En el caso de la velocidad  $\dot{\theta}_{2,i}$ , su valor se obtiene luego de multiplicar (6.58) por  $\mathbf{u}_{1,i}^T$  y adicionar el resultado de la ecuación (6.59):

$$\mathbf{u}_{1,i}^T \mathbf{v}_{B_i} = -\dot{\theta}_{2,i} \mathbf{u}_{1,i}^T \tilde{\mathbf{d}}_i \mathbf{u}_{2,i} + \mathbf{u}_{1,i}^T \mathbf{u}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i}^T \mathbf{v}_{B_i},$$

$$\dot{\theta}_{2,i} = \frac{1}{f_i} \mathbf{u}_{1,i}^T (\mathbf{u}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i}^T - \mathbf{I}) \mathbf{v}_{B_i}. \quad (6.63)$$

Una vez se han definido los valores de las velocidades angulares de la articulación universal y la velocidad de la articulación prismática, se puede calcular la velocidad lineal y angular de los dos cuerpos de la pata; para el caso de la velocidad lineal:

$$\mathbf{v}_{1,i} = -\dot{\theta}_{1,i} \tilde{\mathbf{c}}_{1,i} \mathbf{u}_{1,i} - \dot{\theta}_{2,i} \tilde{\mathbf{c}}_{1,i} \mathbf{u}_{2,i}, \quad (6.64)$$

$$\mathbf{v}_{1,i} = -\frac{1}{f_i} \tilde{\mathbf{c}}_{1,i} (\mathbf{u}_{1,i} \mathbf{u}_{2,i}^T - \mathbf{u}_{2,i} \mathbf{u}_{1,i}^T + \mathbf{u}_{2,i} \mathbf{u}_{1,i}^T \mathbf{u}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i}^T) \mathbf{v}_{B_i}. \quad (6.65)$$

## Dinámica de PMs

En cuanto a la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega}_{1,i} = \dot{\theta}_{1,i}\mathbf{u}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i}\mathbf{u}_{2,i} \quad (6.66)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{1,i} = \frac{1}{f_i}(\mathbf{u}_{1,i}\mathbf{u}_{2,i}^T - \mathbf{u}_{2,i}\mathbf{u}_{1,i}^T + \mathbf{u}_{2,i}\mathbf{u}_{1,i}^T\mathbf{u}_{3,i}\mathbf{u}_{3,i}^T)\mathbf{v}_{B_i} \quad (6.67)$$

Agrupando las expresiones (6.64) y (6.66) en una sola ecuación, se obtiene el jacobiano para el primer cuerpo de la pata:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_{1,i} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{1,i} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix}, \quad (6.68)$$

$$\mathbf{J}_{1,i} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{c}}_{1,i}\mathbf{K}_{1,i} & \tilde{\mathbf{c}}_{1,i}\mathbf{K}_{1,i}\tilde{\mathbf{r}}_i \\ \mathbf{K}_{1,i} & -\mathbf{K}_{1,i}\tilde{\mathbf{r}}_i \end{bmatrix}, \quad (6.69)$$

$$\mathbf{K}_{1,i} = \frac{1}{f_i}(\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_i^T + \mathbf{H}_i), \quad (6.70)$$

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{u}_{1,i}\mathbf{u}_{2,i}^T, \quad (6.71)$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{u}_{2,i}\mathbf{u}_{1,i}^T\mathbf{u}_{3,i}\mathbf{u}_{3,i}^T. \quad (6.72)$$

En el caso del segundo eslabón de la misma pata, las velocidades angulares y lineales son:

$$\mathbf{v}_{2,i} = -\dot{\theta}_{1,i}\tilde{\mathbf{c}}_{2,i}\mathbf{u}_{1,i} - \dot{\theta}_{2,i}\tilde{\mathbf{c}}_{2,i}\mathbf{u}_{2,i} + \dot{\theta}_{3,i}\mathbf{u}_{3,i} \quad (6.73)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2,i} = \dot{\theta}_{1,i}\mathbf{u}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i}\mathbf{u}_{2,i} \quad (6.74)$$

por otro lado, la expresión del jacobiano para todo el eslabón esta dada por:

$$\mathbf{J}_{2,i} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{2,i} & \mathbf{K}_{2,i}\tilde{\mathbf{r}}_i \\ \mathbf{K}_{1,i} & -\mathbf{K}_{1,i}\tilde{\mathbf{r}}_i \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

$$\mathbf{K}_{2,i} = \tilde{\mathbf{c}}_{2,i}\mathbf{K}_{1,i} - \mathbf{u}_{3,i}\mathbf{u}_{3,i}^T \quad (6.76)$$

### 6.4.3 Derivación de los Jacobianos

El cálculo de las derivadas de los jacobianos de los eslabones,  $\mathbf{J}_{j,i}$ , es requisito para poder evaluar las contribuciones de cada cuerpo en la matriz de coriolis total (6.34). Para su obtención primeramente se calcula la derivada de algunos de los vectores obtenidos en el análisis de posición:  $\mathbf{u}_{1,i}$ ,  $\mathbf{u}_{2,i}$ ,  $\mathbf{u}_{3,i}$ ,  $\mathbf{c}_{1,i}$ ,  $\mathbf{c}_{2,i}$ ,  $\mathbf{r}_i$

y  $\mathbf{d}_i$ .

$$\dot{\mathbf{u}}_{1,i} = \mathbf{0} \quad (6.77)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{2,i} = \dot{\theta}_{1,i} \tilde{\mathbf{u}}_{i,1} \mathbf{u}_{2,i} \quad (6.78)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{3,i} = \dot{\theta}_{1,i} \tilde{\mathbf{u}}_{i,1} \mathbf{u}_{3,i} + \dot{\theta}_{2,i} \tilde{\mathbf{u}}_{2,1} \mathbf{u}_{3,i} \quad (6.79)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_i = \dot{\theta}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i} + d_i \dot{\mathbf{u}}_{3,i} \quad (6.80)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{1,i} = c_{1,i}^* \dot{\mathbf{u}}_{3,i} \quad (6.81)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_{2,i} = \dot{\mathbf{d}}_i - c_{2,i}^* \dot{\mathbf{u}}_{3,i} \quad (6.82)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p \mathbf{r}_i \quad (6.83)$$

Al derivar las matrices definidas en el cálculo de la matriz  $\mathbf{K}_{1,i}$ , se obtiene:

$$\dot{f}_i = \mathbf{u}_{1,i}^T \tilde{\mathbf{d}}_i \dot{\mathbf{u}}_{2,i} - \mathbf{u}_{1,i}^T \tilde{\mathbf{u}}_{2,i} \dot{\mathbf{d}}_i \quad (6.84)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{1,i} \mathbf{u}_{2,i}^T + \mathbf{u}_{1,i} \dot{\mathbf{u}}_{2,i}^T \quad (6.85)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{2,i} \mathbf{u}_{1,i}^T \mathbf{u}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i}^T + \mathbf{u}_{2,i} \mathbf{u}_{1,i}^T \dot{\mathbf{u}}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i}^T + \mathbf{u}_{2,i} \mathbf{u}_{1,i}^T \mathbf{u}_{3,i} \dot{\mathbf{u}}_{3,i}^T \quad (6.86)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_{1,i} = \frac{1}{f_i} (\dot{\mathbf{G}}_i - \dot{\mathbf{G}}_i^T + \dot{\mathbf{H}}_i) - \frac{\dot{f}_i}{f_i^2} (\mathbf{G}_i - \mathbf{G}_i^T + \mathbf{H}_i) \quad (6.87)$$

Entonces, la derivada del primer jacobiano corresponde a:

$$\dot{\mathbf{J}}_{1,i} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{c}}_{1,i} \mathbf{K}_{1,i} - \tilde{\mathbf{c}}_{1,i} \dot{\mathbf{K}}_{1,i} & \tilde{\mathbf{c}}_{1,i} \mathbf{K}_{1,i} \tilde{\mathbf{r}}_i + \tilde{\mathbf{c}}_{1,i} \dot{\mathbf{K}}_{1,i} \tilde{\mathbf{r}}_i + \tilde{\mathbf{c}}_{1,i} \mathbf{K}_{1,i} \tilde{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\mathbf{K}}_{1,i} & -\dot{\mathbf{K}}_{1,i} \tilde{\mathbf{r}}_i - \mathbf{K}_{1,i} \tilde{\mathbf{r}}_i \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

Para obtener la derivada del segundo jacobiano, es necesario calcular primero la derivada del término:  $\mathbf{K}_{2,i}$ :

$$\dot{\mathbf{K}}_{2,i} = \tilde{\mathbf{c}}_{2,i} \mathbf{K}_{1,i} + \mathbf{c}_{2,i} \dot{\mathbf{K}}_{1,i} - \dot{\mathbf{u}}_{3,i} \mathbf{u}_{3,i}^T - \mathbf{u}_{3,i} \dot{\mathbf{u}}_{3,i}^T \quad (6.89)$$

Y posteriormente obtener el valor del jacobiano:

$$\dot{\mathbf{J}}_{2,i} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{K}}_{2,i} & \dot{\mathbf{K}}_{2,i} \tilde{\mathbf{r}}_i + \mathbf{K}_{2,i} \tilde{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\mathbf{K}}_{1,i} & -\dot{\mathbf{K}}_{1,i} \tilde{\mathbf{r}}_i - \mathbf{K}_{1,i} \tilde{\mathbf{r}}_i \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

#### 6.4.4 Ecuaciones de Dinámica Inversa

El modelo dinámico inverso se obtiene despejando el vector de fuerzas de actuación,  $\boldsymbol{\tau}_{act}$ , de la ecuación (6.32):

$$\boldsymbol{\tau}_{act} = \mathbf{J}_p(\mathbf{x}_p)^{-T} (\mathbf{M}_t(\mathbf{x}_p) \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_t(\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p) \dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{g}_t(\mathbf{x}_p) - \boldsymbol{\tau}_{ext,p}) . \quad (6.91)$$

De donde es posible calcular las fuerzas de actuación necesarias para mover el efecto final desde una posición inicial,  $\mathbf{x}_p$ , con la velocidad y aceleración deseadas,  $\dot{\mathbf{x}}_p$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}_p$ , compensando además las fuerzas externas aplicadas al anillo superior  $\boldsymbol{\tau}_{ext,p}$ , a una posición deseada.

#### 6.4.5 Ecuaciones de Dinámica Directa

El modelo dinámico directo propuesto esta expresado como una ecuación diferencial de primer orden,  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ , para efectos del uso posterior de un integrador numérico cuando se desee calcular trayectorias con la aplicación fuerzas variables en los actuadores.

Debido a que la velocidad angular es un pseudo-vector, se hace uso de los cuaternios,  $\mathbf{p} = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T$ , para expresar la orientación del efecto final, en este caso, el vector que se calcula contiene la información de posición y orientación de la plataforma móvil o anillo superior:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_p \\ \mathbf{q}_p \end{bmatrix} . \quad (6.92)$$

Al derivar  $\mathbf{y}$  se obtiene la expresión para  $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_t^{-1} (\boldsymbol{\tau}_{ext,p} + \mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\tau}_{act} - \mathbf{C}_t \dot{\mathbf{x}}_p - \mathbf{g}_t) \\ \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}}_p \end{bmatrix} . \quad (6.93)$$

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{p})^T \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

En la que se usa la relación  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{p})^T \boldsymbol{\omega}_p$ , de donde:

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix}. \quad (6.95)$$

Sintetizando, con las ecuaciones (6.93), (6.94) y (6.95) es posible obtener por medio de integración numérica la trayectoria seguida por el efecto final del robot Stewart-Gough, resaltando que se debe partir de una posición y velocidad inicial,  $\mathbf{y}_0$ , y además se debe tener la información de las variaciones en el tiempo de las fuerzas y pares externos aplicados en el efecto final y las fuerzas ejercidas por los actuadores,  $\boldsymbol{\tau}_{ext,p}$  y  $\boldsymbol{\tau}_{act}$ .

#### 6.4.6 Metodología de Solución

Para realizar posteriores simulaciones que permitan la validación tanto de la dinámica directa como inversa se ha propuesto el siguiente algoritmo para el cálculo de las matrices necesarias para la solución:

1. Inicializar las matrices  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$ ,  $\mathbf{J}_p$  y el vector  $\mathbf{g}_t$  con el primer término de las ecuaciones (6.40), (6.42) y (6.44).
2. Repetir desde el punto 3 hasta 13 para cada una de las seis patas del robot Stewart-Gough,  $i = \{1 \dots 6\}$ .
3. Realizar el análisis de posición calculando los vectores  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{d}_i$ ,  $\mathbf{u}_{3,i}$ ,  $\mathbf{u}_{2,i}$ ,  $\mathbf{u}_{1,i}$ ,  $\mathbf{c}_{1,i}$  y  $\mathbf{c}_{2,i}$  de acuerdo a las ecuaciones (6.46), (6.48), (6.50), (6.51), (6.52), (6.54) y (6.55), respectivamente.
4. Calcular la matriz de orientación del primer y segundo eslabón de la pata  $i$ -esima,  $\mathbf{R}_i$ , de acuerdo a la ecuación (6.53).
5. Realizar el análisis de velocidad evaluando los términos  $\dot{\mathbf{r}}_i$ ,  $\mathbf{v}_{B_i}$ ,  $f_i$ ,  $\dot{\theta}_{1,i}$ ,  $\dot{\theta}_{2,i}$ ,  $\dot{\theta}_{3,i}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{1,i}$  y  $\boldsymbol{\omega}_{2,i}$  haciendo uso de las expresiones (6.57), (6.56), (6.62), (6.61), (6.63), (6.59), (6.66) y (6.74).
6. Evaluar el jacobiano del primer eslabón de la pata  $i$ -esima,  $\mathbf{J}_{1,i}$ , de acuerdo a las ecuaciones (6.69), (6.70), (6.71) y (6.72).
7. Evaluar el jacobiano del segundo eslabón de la pata  $i$ -esima,  $\mathbf{J}_{2,i}$ , utilizando las expresiones, (6.75) y (6.76).

8. Evaluar la fila  $i$ -esima del jacobiano del robot,  $\mathbf{J}_p$ , a partir de la ecuación (6.60).
9. Redefinir los valores la matriz de masa,  $\mathbf{M}_t$ , debido a la contribución de las matrices  $\mathbf{M}_{j,i}$  tal como se expresa en (6.41).
10. Redefinir los valores de la matriz de coriolis,  $\mathbf{C}_t$ , calculando para ello la contribución debido a  $\mathbf{C}_{j,i}$ , tal como se expresa en (6.43).
11. Redefinir los valores del vector  $\mathbf{g}_t$  de acuerdo con la contribución de los dos cuerpos de la pata  $i$ -esima, tal como se especifica en la ecuación (6.45).
12. Calcular las derivadas de los jacobianos de los eslabones,  $\dot{\mathbf{J}}_{1,i}$  y  $\dot{\mathbf{J}}_{2,i}$ , de acuerdo con las ecuaciones obtenidas en la sección 6.4.3.
13. Redefinir los valores de la matriz de coriolis,  $\mathbf{C}_t$ , debido a la matriz de masas,  $\mathbf{M}_{j,i}$ , calculando el termino respectivo en la ecuacion (6.42).
14. Regresar al punto 3 para realizar el mismo procedimiento
15. Se obtienen así los valores finales de  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$ ,  $\mathbf{J}_p$  y  $\mathbf{g}_t$ .

Este algoritmo se ha programado en un script de MATLAB en el que se calculan las valores de las matrices  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$ ,  $\mathbf{J}_p$  y el vector  $\mathbf{g}_t$  a partir de los valores de entrada de posición y velocidad del efecto final,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{v}_p$  y  $\boldsymbol{\omega}_p$ .

Con estas matrices identificadas, paralelamente se realizan tanto las planeaciones de trayectoria como las soluciones de los modelos dinámicos en scripts independientes. Se puede observar algoritmamente el cálculo de los elementos que componen el análisis dinámico en el diagrama de la figura 6.7.

## 6.5 Planificadores de Movimiento

Para realizar las pruebas de los modelos dinámicos es necesario generar perfiles de movimiento. Para tal fin se han elaborado planificadores de movimiento, que permiten que se haga un movimiento “suave” a través de toda la trayectoría.

### 6.5.1 Interpolador sinusoidal

Los planificadores mas usados utilizan funciones trapezoidales para generar la curva de velocidad, pero no garantizan que exista continuidad en la curva de

## Dinámica de PMs

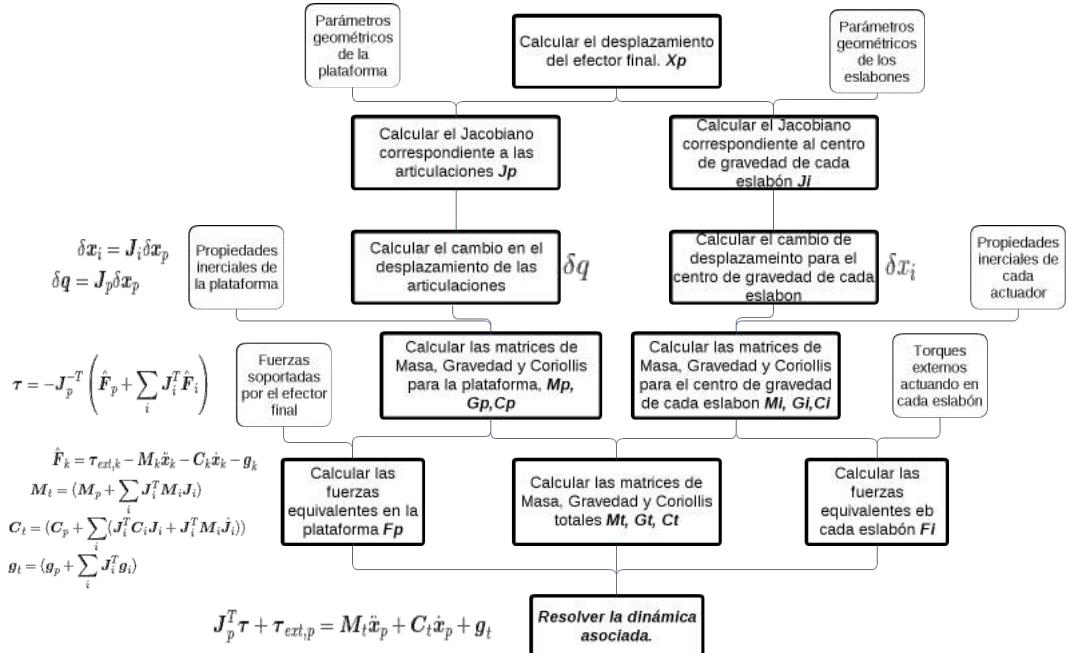


FIGURA 6.2: Diagrama para la obtención de un modelo dinámico de un MP

aceleración. Se propone entonces, un planificador con tres secciones (aceleración, velocidad constante, desaceleración), pero en lugar de utilizar rampas en el perfil de posición durante el tiempo de aceleración se utiliza una función tipo sinusoidal.

Debido a que se busca hacer la interpolación en el espacio operacional del robot, es necesario que tanto la “curva” de posición como la de orientación sean suaves, se propone utilizar una variable generalizada escalar, sin sentido físico, que permita realizar la interpolación ( $x$ ), sin embargo es necesario aclarar, que esta variable contempla el paso de una pose (posición orientación) a otra.

El planificador determina los valores de velocidad y aceleración de la variable escalar,  $x$ , para valores definidos de desplazamiento  $\Delta x$ , velocidad máxima deseada  $\dot{x}_{max}$ , y tiempo deseado de aceleración  $t_{accel}$ . La planificación se divide en tres etapas, una primera de aceleración hasta la alcanzar la velocidad máxima, otra conocida como de velocidad crucero en la que se mantiene la velocidad constante, y una última de desaceleración. En la figura 6.3 se observa la gráfica de cada etapa y su correspondencia en las funciones de posición y aceleración.

## Dinámica de PMs

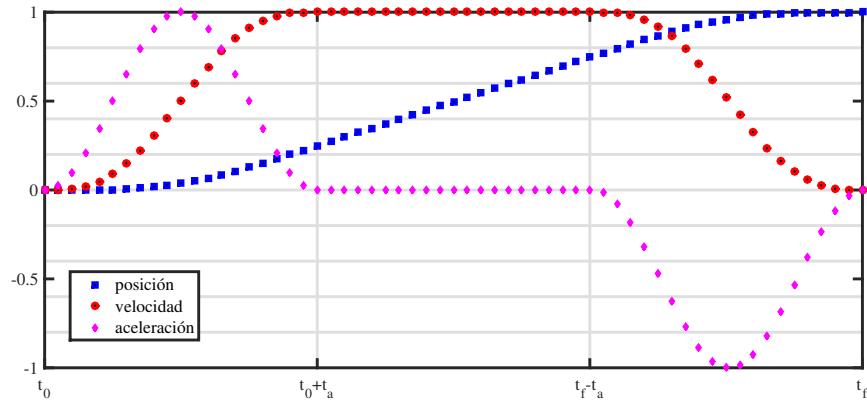


FIGURA 6.3: Interpolador Seno, posición velocidad y aceleración

Durante el tramo de movimiento con aceleración las funciones utilizadas son:

$$\begin{aligned}
 t_0 &\leq t \leq t_0 + t_{acel} \\
 \theta_1 &= \frac{t - t_0}{t_{acel}} \\
 x &= \dot{x}_{max} t_{acel} \left( \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{1}{4\pi^2} (\cos(2\pi\theta_1) - 1) \right) \\
 \dot{x} &= \dot{x}_{max} \left( \theta_1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\theta_1) \right) \\
 \ddot{x} &= (\dot{x}_{max}/t_{acel})(1 - \cos(2\pi\theta_1)).
 \end{aligned}$$

En la etapa de velocidad constante:

$$\begin{aligned}
 t_{final} &= t_{acel} + \Delta x / \dot{x}_{max} \\
 t_{acel} &\leq t \leq t_{final} - t_{acel} \\
 \theta_2 &= t - t_0 - t_{acel} \\
 x &= x_{max} \frac{t_{acel}}{2} + x_{max} \theta_2 \\
 \dot{x} &= \dot{x}_{max} \\
 \ddot{x} &= 0.
 \end{aligned}$$

## Dinámica de PMs

Por último, en el intervalo de desaceleración las ecuaciones corresponden a:

$$\begin{aligned}
 t_{final} - t_{acel} &\leq t \leq t_{final} \\
 \theta_3 &= \frac{t - t_{final} + t_{acel}}{t_{acel}} \\
 x &= \Delta x - \dot{x}_{max} \frac{t_{acel}}{2} \\
 \dot{x} &= \Delta x + \dot{x}_{max} t_{acel} \left( \theta_3 - \frac{\theta_3^2}{2} + \frac{1}{4\pi^2} (1 - \cos(2\pi\theta_3)) \right) \\
 \ddot{x} &= \dot{x}_{max} \left( 1 - \theta_3 + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\theta_3) \right) \\
 \ddot{x} &= \frac{\dot{x}_{max}}{t_{acel}} (\cos(2\pi\theta_3) - 1).
 \end{aligned}$$

En el caso del traslación, el planificador permite calcular la posición  $\mathbf{r}$ , velocidad lineal  $\mathbf{v}$ , y aceleración  $\mathbf{a}$ , del efecto final a partir de la posición inicial  $\mathbf{r}_0$  y final  $\mathbf{r}_f$ ; para ello se toma como variable escalar  $x$ , la distancia recorrida por el efecto final, donde el parámetro de entrada es el máximo desplazamiento deseado,  $\Delta x = \|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0\|$ . Las ecuaciones de movimiento quedan expresadas como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0\|} \\
 \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + x\mathbf{u} \\
 \mathbf{v} &= \dot{x}\mathbf{u} \\
 \mathbf{a} &= \ddot{x}\mathbf{u}
 \end{aligned}$$

En la figura 6.4 se observa la trayectoria en linea recta en el espacio operacional que realiza la plataforma para ir de una posición inicial  $\mathbf{r}_i = [0, 0, 500]$  a una final  $\mathbf{r}_f = [300, 500, 600]$  manteniendo la orientación constante. Los parámetros de entrada al interpolador son  $t_0 = 0\text{ s}$ ,  $t_{acel} = 0,5\text{ s}$  y  $v_{max} = 100\text{ mm/s}$ .

Los resultados de la interpolación en las componentes  $[x, y, z]$ , del movimiento y sus derivadas se aprecian en la figura 6.5, en la que claramente se observa la continuidad en la trayectoria y los empalmes suaves en cada uno de los intervalos.

En cuanto a las rotaciones, el planificador permite evaluar el cuaternion resultante  $\mathbf{p}$ , la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$ , y la aceleración angular  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  del efecto final, a

## Dinámica de PMs

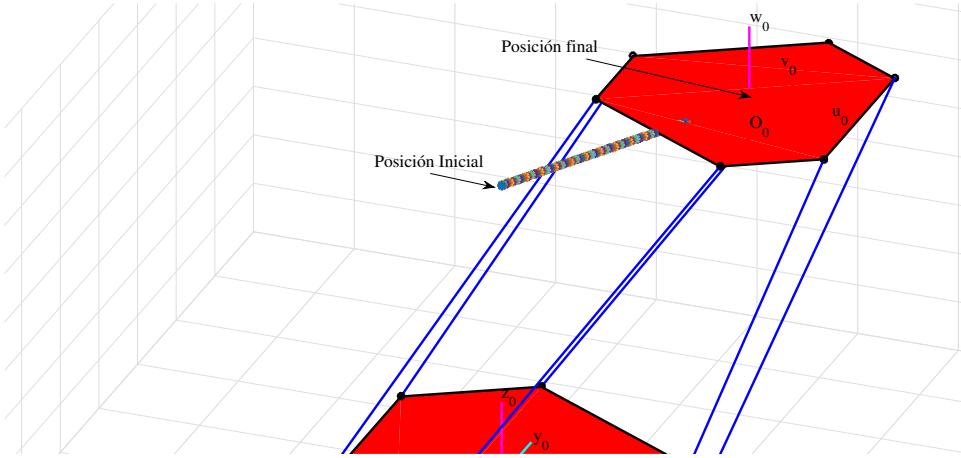


FIGURA 6.4: Interpolación en el  $R^3$ , posición.

partir de un valor inicial  $\mathbf{p}_0$ , y final  $\mathbf{p}_f$ , de orientación, teniendo como parámetros de entrada la rotación a realizar  $\Delta x = \beta/2$ , alrededor de un eje  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_d &= \mathbf{p}_0^{-1} * \mathbf{p}_f = \left[ \begin{array}{cc} \cos(\Delta x) & \sin(\Delta x)\mathbf{u}^T \end{array} \right]^T \\ \mathbf{p}_t &= \left[ \begin{array}{cc} \cos(x) & \sin(x)\mathbf{u}^T \end{array} \right]^T \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0 * \mathbf{p}_t \\ \boldsymbol{\omega} &= 2\dot{x}\mathbf{u} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} &= 2\ddot{x}\mathbf{u}.\end{aligned}$$

donde  $*$  y  $\{\}^{-1}$  son las operaciones de multiplicación y conjugación de cuaterniones, respectivamente.

En la figura 6.6 se pueden observar un ejemplo definiendo el cuaternionio inicial y el final. El cuaternionio inicial  $\mathbf{p}_i = [1, 0, 0, 0]$ , representado por el sistema de coordenadas  $F_i = [x_i, y_i, z_i]$ , y el cuaternionio final  $\mathbf{p}_f = [0,8924, 0,3696, 0,0990, 0,2391]$ , representado por el sistema de coordenadas  $F_f = [x_f, y_f, z_f]$ .

En la figura 6.7 se puede observar la posición inicial y final adoptada por la plataforma, luego de realizar una interpolación de la orientación. La plataforma parte de la posición de Home con una orientación definida  $\mathbf{R} = I$ , representada por el sistema de coordenadas azul, y la orientación final dada por el sistema de coordenadas rojo, que se observan en la figura 6.6a .

## Dinámica de PMs

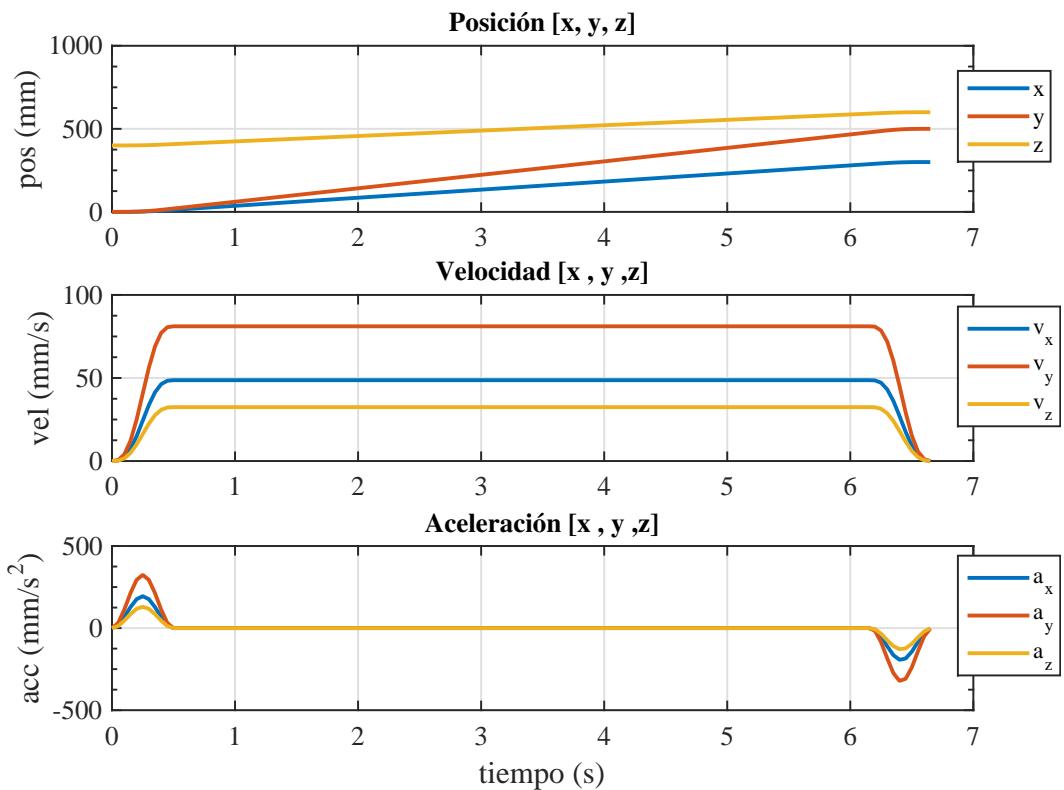


FIGURA 6.5: Resultado de la interpolación en coordenadas x y z , de posición velocidad y aceleración, con respecto al tiempo

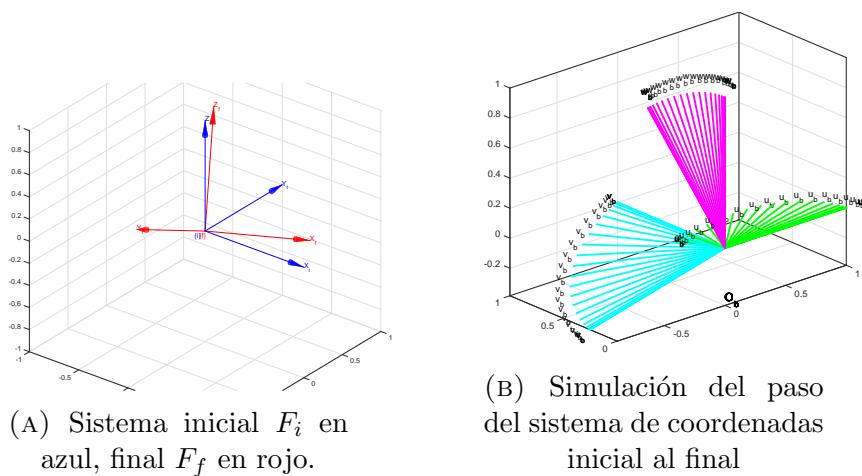


FIGURA 6.6: Resultados de la interpolacion de cuaternios representado mediante sistemas de coordenadas

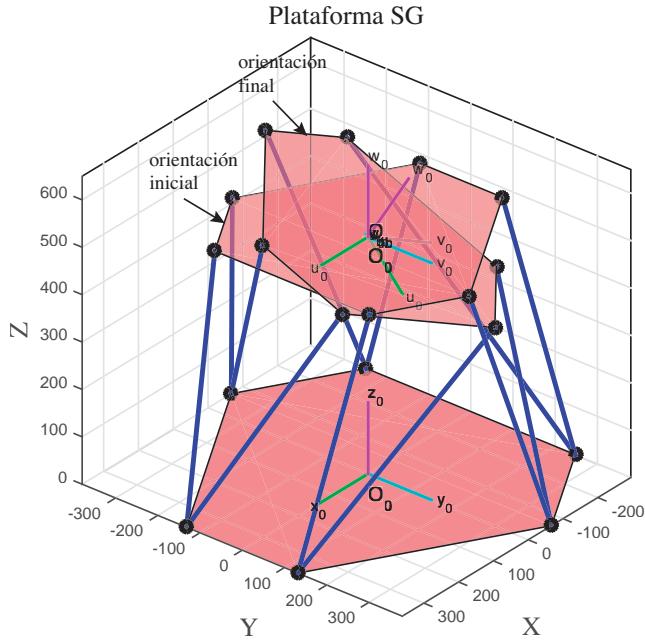


FIGURA 6.7: Cambio de orientación plataforma móvil.

## 6.6 Interpolador 321 con trayectoria elíptica

Recordando que es necesario que el movimiento se realice de forma suave y continua, para lo que la función dependiente del tiempo al menos sea continua en su segunda derivada; pero tomando en cuenta que no solamente se debe considerar el paso de un punto a otro, sino en el seguimiento a trayectorias curvas definidas por un path de puntos, es necesario pensar en un método de interpolación que permita asegurar el movimiento suave a través de dicha línea de puntos, sin crear efectos de parada-arranque cada vez que el efecto final alcance un punto del path y antes de llegar al final. De tal forma se ha definido un interpolador 321 que se ha testeado con una trayectoria elíptica.

En la figura 6.8 se observa la trayectoria con forma de elipse. La representación paramétrica de la elipse en cualquier posición inicial  $(x_1, y_1)$  está dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos(\theta) \\ y_1 &= b \sin(\theta) \end{aligned} \tag{6.96}$$

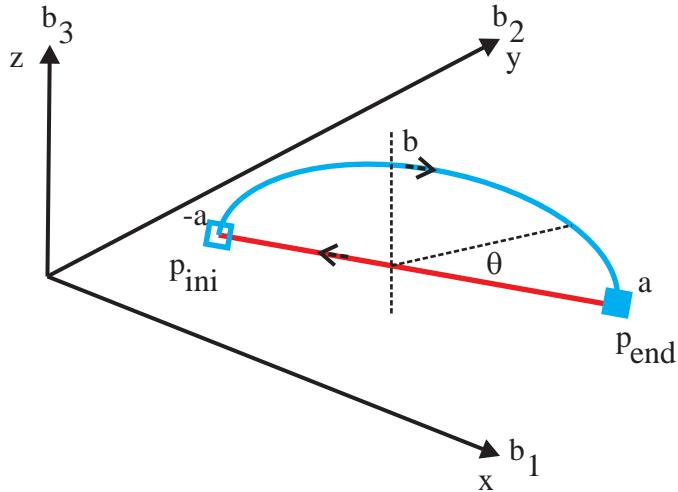


FIGURA 6.8: Movimiento elipsoidal.

Derivando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\theta} &= -a \sin(\theta) \\ \frac{dy_1}{d\theta} &= b \cos(\theta)\end{aligned}\quad (6.97)$$

Un pequeño incremento de la elipse  $ds$ , se determina utilizando la siguiente expresión:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}, \quad (6.98)$$

de donde resultando que  $\Delta\theta$  :

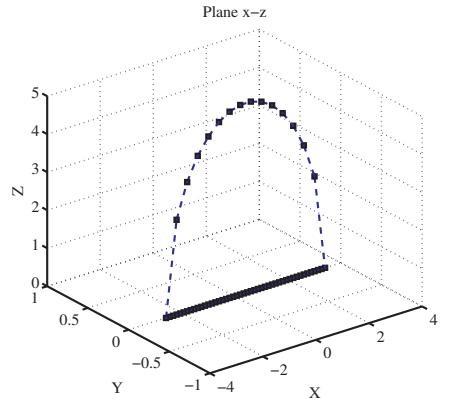
$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}}. \quad (6.99)$$

La posición es función de:

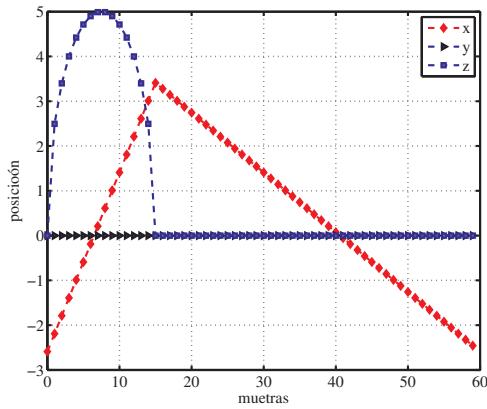
$$\begin{aligned}x_2 &= a \cos(\theta + \Delta\theta) \\ z_2 &= b \cos(\theta + \Delta\theta)\end{aligned}. \quad (6.100)$$

Para que la trayectoria sea cerrada se ha incluido una linea recta, que une el punto de partida  $p_{ini}$  y el punto final ( $p_{end}$ ). Para la simulación de la trayectoria se ha seleccionado un número muestras  $T$ , con una elipse de  $\frac{T}{4}$  de muestras, y con una linea recta de  $\frac{3T}{4}$  muestras. La trayectoria deseada en el espacio

## Dinámica de PMs



(A) Trayectoria elíptica y linea recta.



(B) Componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de las trayectoria.

FIGURA 6.9: Trayectoria elipsoidal

operacional de la pata se observa en la figura 6.9a. En la figura 6.9b se observan los valores de las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la trayectoria como función de las muestras.

Como se ha visto, los interpoladores usualmente se utilizan para garantizar la suavidad de un movimiento entre dos puntos (interpoladores punto a punto), manteniendo las restricciones de posición inicial y final  $p_i$  y  $p_f$ , velocidad inicial y final  $y_i$  y  $y_f$ , aceleración inicial y final  $a_i$  y  $a_f$ . Los interpoladores son funciones que se desarrollan en el tiempo, en este caso se utiliza una variable de tiempo normalizada, que va entre cero y uno.

Para garantizar que la trayectoria que une los puntos por los cuales tiene que pasar la articulación presente continuidad en velocidad se puede utilizar un

## Dinámica de PMs

polinomio de tercer orden (grado 3), para cada pareja de puntos adyacentes, de este modo cada intervalo al tener cuatro parámetros disponibles se podrá establecer cuatro condiciones de contorno o frontera, dos de posición y dos de velocidad. Por consiguiente la velocidades de los extremos del intervalo deben ser conocidas con anterioridad.

El polinomio interpolador de tercer orden (**conocido como Planificador 321**) para describir la trayectoria entre dos puntos y satisfacer la restricciones de frontera esta dado por:

$$p(t) = a_3(t - t_i)^3 + a_2(t - t_i)^2 + a_1(t - t_i) + a_0, \quad t_i \leq t \leq t_f \quad (6.101)$$

Las restricciones de frontera del planificador 321, posición inicial y final  $p_i$  y  $p_f$ , velocidad inicial y final  $v_i$  y  $v_f$ , se organizan en un vector de restricción:

$$Y_\delta = \begin{bmatrix} p_i \\ v_i \\ p_f \\ v_f \end{bmatrix}. \quad (6.102)$$

Las derivadas del polinomio de posición, velocidad, aceleración y jerk resultan:

$$v(t) = 3a_3(t - t_i)^2 + 2a_2(t - t_i) + a_1, \quad (6.103)$$

$$a(t) = 6a_3(t - t_i) + 2a_2, \quad (6.104)$$

$$j(t) = 6a_3. \quad (6.105)$$

Considerando que las trayectorias tiene un tiempo inicial  $t_i$  y un tiempo final  $t_f$ , y que las restricciones de frontera se cumplen en estos tiempos.

Organizando los polinomios de posición y velocidad evaluados en las fronteras obtenidos en la ecuación 6.103 en forma vectorial matricial resulta:

$$Y_\delta = MX_\delta \quad (6.106)$$

## Dinámica de PMs

donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (t_f - t_i)^3 & (t_f - t_i)^3 & (t_f - t_i)^3 \\ 0 & 1 & 2(t_f - t_i) & 3(t_f - t_i)^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X_\delta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

La expresión 6.106 es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. La solución de este sistema de ecuaciones da como resultado los coeficientes del polinomio que cumple las condiciones de frontera, por consiguiente los coeficientes resultantes son:

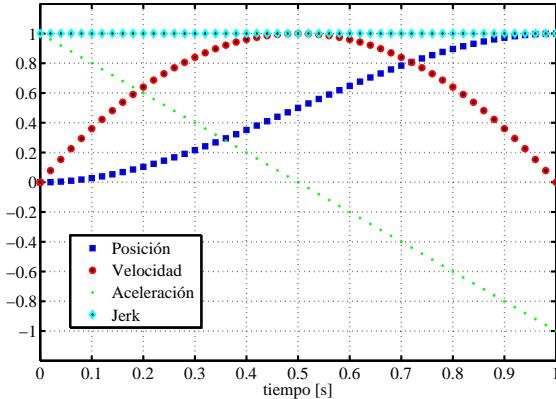
$$\begin{aligned} a_0 &= p_i \\ a_1 &= v_i \\ a_2 &= \frac{3(p_i - p_f) - (2v_i + v_f)T}{T^3} \\ a_3 &= -\frac{-2(p_i - p_f) + (v_i + v_f)(T)}{T^3} \end{aligned} \tag{6.107}$$

En la figura 6.10 se muestra la trayectoria entre dos puntos con velocidad inicial y final. En la figura 6.10a se observa el resultado del planificador (posición, velocidad, aceleración y jerk) con condiciones de frontera de velocidad inicial y final cero. Por ultimo, en la figura 6.10b se observa los resultados del planificador (posición, velocidad, aceleración y jerk) con condiciones de frontera de velocidad inicial y final diferentes de cero.

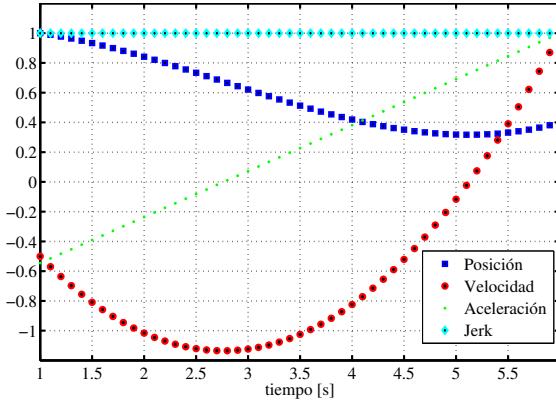
Utilizar el planificador 321 para calcular un trayectoria con continuidad en velocidad para una secuencia de  $n$  puntos requiere de una subdivisión de todo el movimiento en  $n - 1$  segmentos. Cada uno de estos segmentos conecta los puntos  $q_k$  y  $q_{k+1}$  en el tiempo  $t_k$  y  $t_{k+1}$  y tienen velocidad  $v_k$  y  $v_{k+1}$  respectivamente. De esta manera la posición inicial del tramo  $k + 1$  es la posición final del tramo  $k$  y de igual forma para la velocidad y así sucesivamente.

Cuando se utiliza un polinomio de tercer orden para planificar trayectorias multipuntos donde se desea lograr cambios suaves, es importante que la componente de velocidad final en cada tramo sea debidamente estimada, en el caso de que la velocidad final del segmento sea perfectamente estimada la curva no

## Dinámica de PMs



(A) Planificador 321, con condiciones de frontera de velocidad cero.



(B) Planificador 321, con condiciones de frontera de velocidad distintas de cero.

FIGURA 6.10: Planificador 321 punto a punto.

tendrá cambios bruscos de sentido y las oscilaciones son suaves. Normalmente estas velocidades para los puntos intermedios  $q_1, \dots, q_{n-1}$  no son conocidas. En este caso es necesario utilizar una regla heurística para determinar dichas velocidades, como se expresa a continuación:

$$v_i = \text{conocida}$$

$$v_k = \begin{cases} 0 & \text{sing}(d_k) \neq \text{sing}(d_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(d_k + d_{k+1}) & \text{sing}(d_k) = \text{sing}(d_{k+1}) \end{cases} \quad (6.108)$$

$$v_f = \text{conocida}$$

donde  $d_k = (q_k - q_{k-1})/(t_k - t_{k-1})$  es la pendiente del segmento de linea entre los instantes  $t_{k-1}$  y  $t_k$ .

## Dinámica de PMs

Posteriormente se utiliza el planificador 321 para los puntos que conforman la trayectoria planeada en el espacio articular, para obtener una función suave dependiente del tiempo la cual se utilice para el control de los actuadores. La nueva curva tendrá una cantidad de puntos que resulta de la multiplicación del número de muestras del planificador  $n$ , y el número de puntos del path original (un ciclo, que corresponde a la curva elipsoidal mas la recta de retorno a posición inicial)  $N$ . El tiempo está en función del valor del tiempo de muestreo  $Tm$ , de la trayectoria interpolada. El tiempo total del ciclo resulta  $T = n*, N * Tm$ , equivalente al tiempo planificado. El tiempo de muestreo se selecciona de acuerdo con la frecuencia de actualización del sistema de control cinematográfico.

Si se analizan los resultados en las curvas de una de las articulaciones, la curva de posición es continua; la curva de velocidad tiene pendientes muy pronunciadas que podrían conllevar a discontinuidades en velocidad en los actuadores; y la aceleración presenta discontinuidades, por el uso de un polinomio de orden tres con el que no es posible establecer condiciones de continuidad en las fronteras.

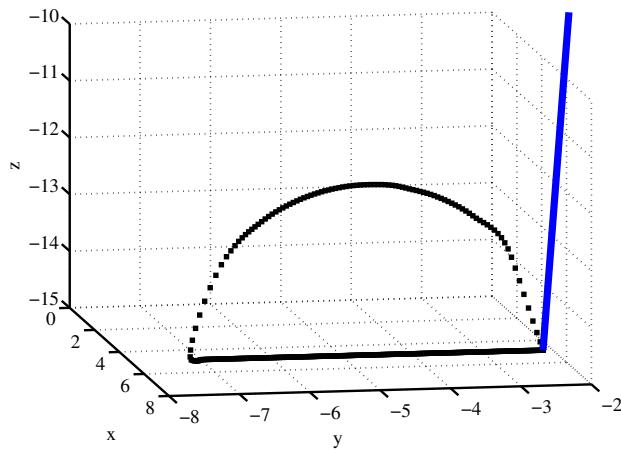


FIGURA 6.11: Trayectoria en el espacio operacional ( $x, y, z$ ).

La trayectoria es realizada para un solo ciclo, pero gracias al interpolador y a la forma como fue concebido es posible hacer que ésta se repita  $m$  veces.

## *Dinámica de PMs*

A través de la cinemática directa y con la trayectoria en el espacio articular es posible determinar el movimiento que describe el efecto. Como se aprecia en la figura 6.11 los trayectoria que describe reduce la probabilidad de discontinuidades, garantiza la suavidad del movimiento del efecto final y por consiguiente de los actuadores.

## 6.7 Simulaciones

A partir de los modelos y planificadores propuestos se realizaron simulaciones correspondientes a la dinámica de la plataforma Stewart-Gough en MATLAB y se han comparado con un modelo de la misma plataforma elaborado en MSC.ADAMS, para de esta forma obtener resultados que permitan validar el enfoque propuesto.

### 6.7.1 Modelo Dinámico inverso cerrado

El modelo inverso es ampliamente utilizado para el diseño de robots, especialmente para seleccionar los actuadores, ya que permite obtener curvas de par o fuerza de las cuales es posible extraer características como el torque RMS (raíz media cuadrática), máximo y promedio entre otras necesarias [23] [40]. Desde el punto de vista de control es utilizado para calcular los esfuerzos de los actuadores, que son necesarios para lograr el movimiento deseado, también es muy utilizado para la identificación de parámetros dinámicos de modelos de manipuladores que se utilizan en control y simulación.

En la figura 6.12 se observa el esquema utilizado para desarrollar la verificación de los MGI. Previo se ha hecho un análisis del robot, determinación de parámetros físicos y de las condiciones de simulación, a su vez y como se ha descrito en las secciones anteriores se ha obtenido el modelo dinámico inverso cerrado que se ha implementado en MATLAB.

En primer lugar se ha implementado la planificación de trayectorias en el espacio operacional que con la ayuda del modelo geométrico inverso, permite

## Dinámica de PMs

determinar los valores para los actuadores de la plataforma SG, información insumo tanto para el modelo en MATLAB como para la simulación en MSC.ADAMS. En MATLAB se implementan las ecuaciones de la dinámica inversa y se realiza la simulación obteniendo las fuerzas en los seis actuadores. En cuanto a MSC.ADAMS es necesario importar los datos de los puntos de la trayectoria, y crear un perfil suave de estos puntos para la simulación interna, dentro de los disponibles se seleccionó un interpolador cubico, los datos obtenidos de la simulación fueron nuevamente llevados a MATLAB, para ser graficados y comparados.

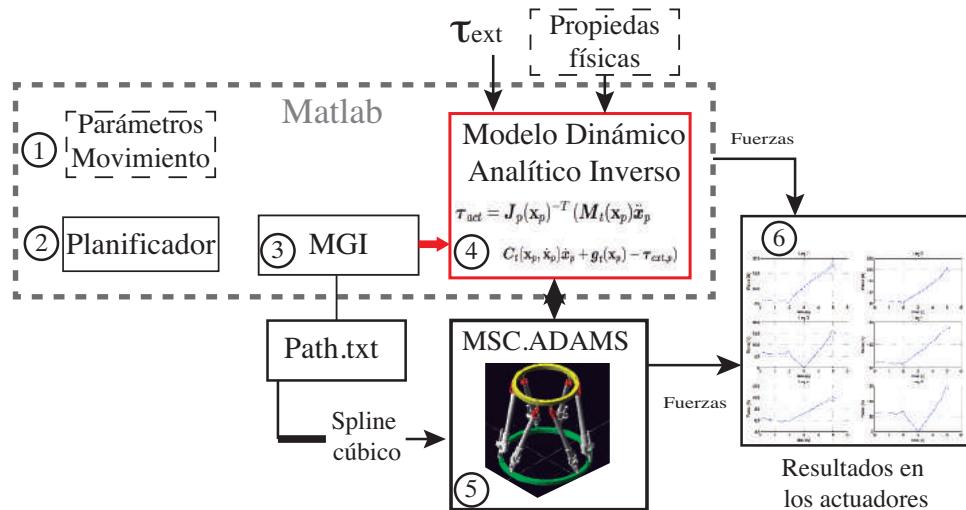


FIGURA 6.12: Esquema de comprobación del MGAI

La comparación de los valores de las fuerzas de actuación requeridas para realizar el movimiento deseado se presenta la figura 6.16, en donde las líneas punteadas representan los valores obtenidos en MSC.ADAMS, mientras que las líneas continuas son los valores calculados en MATLAB. Se puede apreciar que al final del movimiento existe una leve discrepancia en algunos de los actuadores, la razón de ello, es que MSC.ADAMS une los puntos de las trayectorias con una curva de tercer orden, en donde los coeficientes obtenidos se utilizan para calcular la velocidad y aceleración de los actuadores. Esta aproximación produce leves discrepancias en la aceleración del efecto final, y por ende en las fuerzas calculadas.

### 6.7.2 Modelo de la plataforma Stewart-Gough en un software MBD (Multi Body Dynamic)

MSC.ADAMS es un software ampliamente utilizado en el diseño, medición y estimación dinámica, permitiendo ciclos de desarrollo de producto cortos, reducción de costos y calidad de diseño.

El principal objetivo al hacer la simulación de la plataforma SG en el software MSC.ADAMS es disponer de un modelo computacional de la dinámica del manipulador paralelo, que permita analizar algunos parámetros del robot, y realizar una comparación con el modelo analítico desarrollado en el presente trabajo. Por otro lado, es común que los modelos dinámicos se desarrolle de acuerdo con su fin último, para simulación de la dinámica computacional o con el fin de obtener un modelo para su uso en el diseño del sistema de control. En el presente trabajo el enfoque es el último.

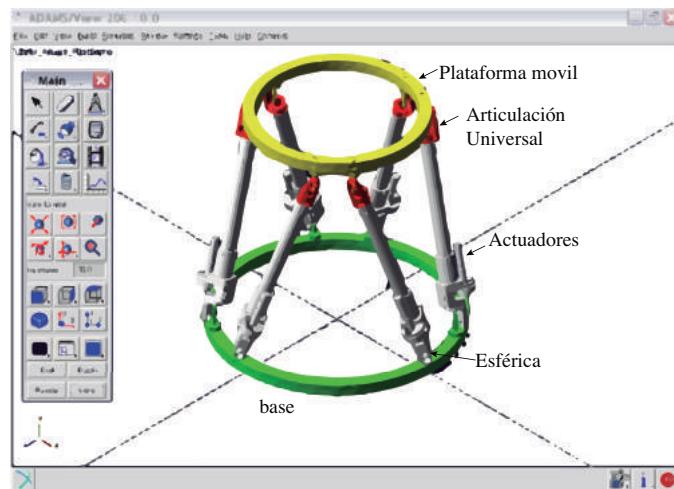


FIGURA 6.13: Modelo en CAD simulado en MSC.ADAMS

La figura 6.13 ilustra el modelo del robot Stewart-Gough desarrollado en el software para análisis dinámico multicuerpo MSC.ADAMS para realizar las simulaciones numéricas. Los datos cinemáticos y dinámicos obtenidos se encuentran resumidos en la tabla 6.1. Se puede apreciar que los valores correspondientes a la masa e inercia de los cuerpos poseen un alto número de cifras decimales debido a que MSC.ADAMS los calcula a partir de la geometría de

los cuerpos y la densidad del material seleccionado.

TABLA 6.1: Información geométrica y física de la plataforma SG

Representación	Valor	Unidad
$\phi_j$	640	mm
$\phi_i$	340	mm
$\alpha_j$	[106, 194, 226, 314, 346, 434]	-
$\alpha_i$	[130, 9250, 169, 0750, 250, 9250, 289, 0750, 370, 9250, 409, 0750]	-
$c_{1,i}^*$	64,45	mm
$c_{2,i}^*$	54,364	mm
$m_p$	37,62	Kg
$\mathbf{I}_p^p$	diag([1,1307308182e6, 1,1307308182e6, 2,2272425412e6])	Kgmm <sup>2</sup>
$m_{1,i}$	0,5820790553	Kg
$\mathbf{I}_{1,i}^{1,i}$	diag([8768,5230508738, 8768,5230508738, 113,737673762])	Kgmm <sup>2</sup>
$m_{2,i}$	1,1384831321	Kg
$\mathbf{I}_{2,i}^{2,i}$	diag([2,0502252534e4, 2,0502252534e4, 56,9241566042])	Kgmm <sup>2</sup>

### 6.7.3 Simulación del Modelo Dinámico Inverso en MATLAB

Para la simulación de la dinámica se ha planeado un movimiento complejo que incluye rotación en diferentes ejes al igual que traslación en diferentes direcciones. El primero de ellos consiste en una traslación pura en dirección vertical, a lo largo del eje  $Z$ , con un desplazamiento de 170 mm, acompañado de un giro alrededor del eje  $Y$  de 30°, seguido de un segundo segmento de movimiento de rotación al alrededor de eje  $X$  un valor de 30° acompañado de un desplazamiento a lo largo del eje  $Z$  de 30 mm. En la tabla 6.2 se incluyen los detalles de los puntos utilizados como inicio y final de cada movimiento del efecto final. Entre los dos segmentos de movimiento se ha utilizado un velocidad de paso cero, es decir la velocidad al final de cada segmento de la trayectoria es cero.

Los perfiles de posición en el espacio articular para cada una de las patas se observan en la figura 6.14, estos perfiles fueron obtenido a través del modelo geométrico inverso de la plataforma SG. Como se podría suponer, al igual

## Dinámica de PMs

TABLA 6.2: Descripción de las posiciones de inicio y final para el movimiento de la plataforma

<i>Primer Movimiento</i>			
Punto Inicial $\mathbf{r}_p = [0, 580, 0]^T$	$\mathbf{R} = \mathbf{I}$	Punto final $\mathbf{r}_p = [0, 750, 0]^T$	$\mathbf{R} = \text{Rot}_y(30)$
<i>Segundo Movimiento</i>			
Punto Inicial $\mathbf{r}_p = [0, 750, 0]^T$	$\mathbf{R} = \text{Rot}_y(30)$	Punto final $\mathbf{r}_p = [0, 780, 300]^T$	$\mathbf{R} = \text{Rot}_x(40)$

que en el espacio operacional son suaves y no presentan discontinuidades; sin embargo cerca de los 2 segundos se presenta un régión con pendiente cero, que corresponde con el inicio del segundo segmento de trayectoria.

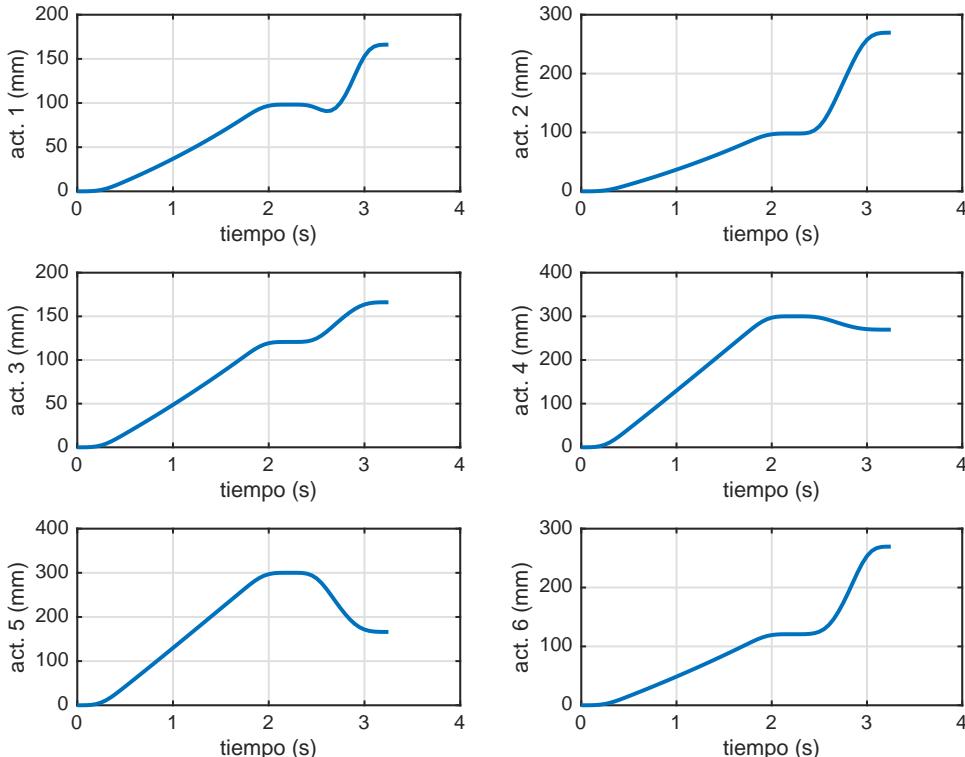


FIGURA 6.14: Movimiento de los actuadores valores para se utilizaron en las simulación.

Para mayor claridad, y para representar los movimientos obtenidos a partir planificador, que son realizados por la plataforma en el espacio operacional, en la figura 6.15 se observan la pose inicial y final.

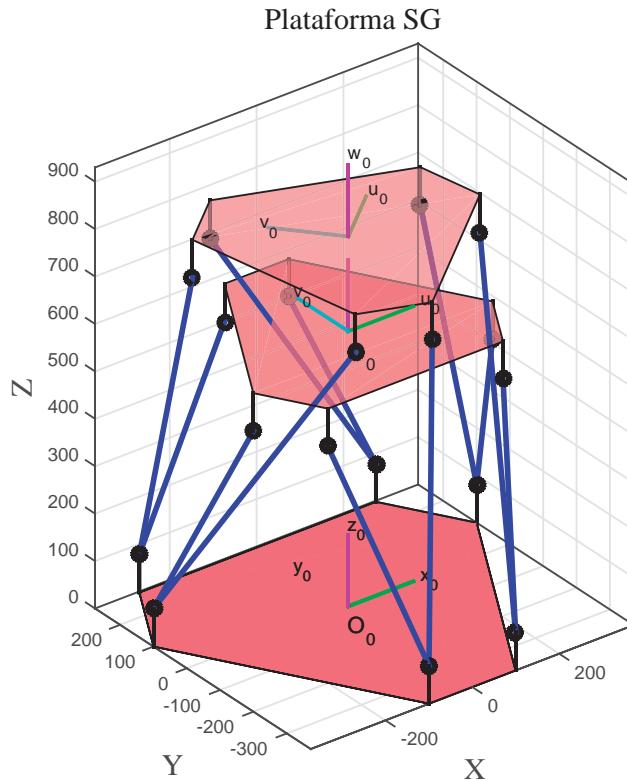


FIGURA 6.15: Pose inicial y final de la plataforma para la trayectoria de prueba del modelo dinámico.

#### 6.7.4 Comparación de los resultados de simulación de Dinámica Inversa en MATLAB y en MSC.ADAMS

Para lograr la comparación de los modelos dinámicos, es necesario determinar el grado de aproximación del modelo inverso desarrollado. Utilizando MSC.ADAMS se ha procedido con el montaje de la simulación, incluyendo cada uno de los componentes de la plataforma. Algunas de las propiedades físicas de los componentes fueron ajustadas con los valores medidos de forma experimental en sus contra partes reales, por ejemplo la masa de motor o el peso añadido de los tornillos de ensamble.

Para calcular la trayectoria se hace uso de la modelo geométrico inverso que mediante las coordenadas generalizadas del efecto  $\mathbf{x}$  permite calcular los des-

## Dinámica de PMs

plazamientos individuales de los actuadores.

En MATLAB se implementaron las trayectorias para movimiento y se exportaron en un script en texto plano con siete columnas, la primera columna corresponde al tiempo de simulación, las columnas restantes a los valores de desplazamiento de los actuadores. Una vez en MSC.ADAMS se importa el archivo de texto, indicando la variable independiente; la interpolación del path de puntos recibidos se realiza mediante splines cúbico, este proceso lo hace el software internamente.

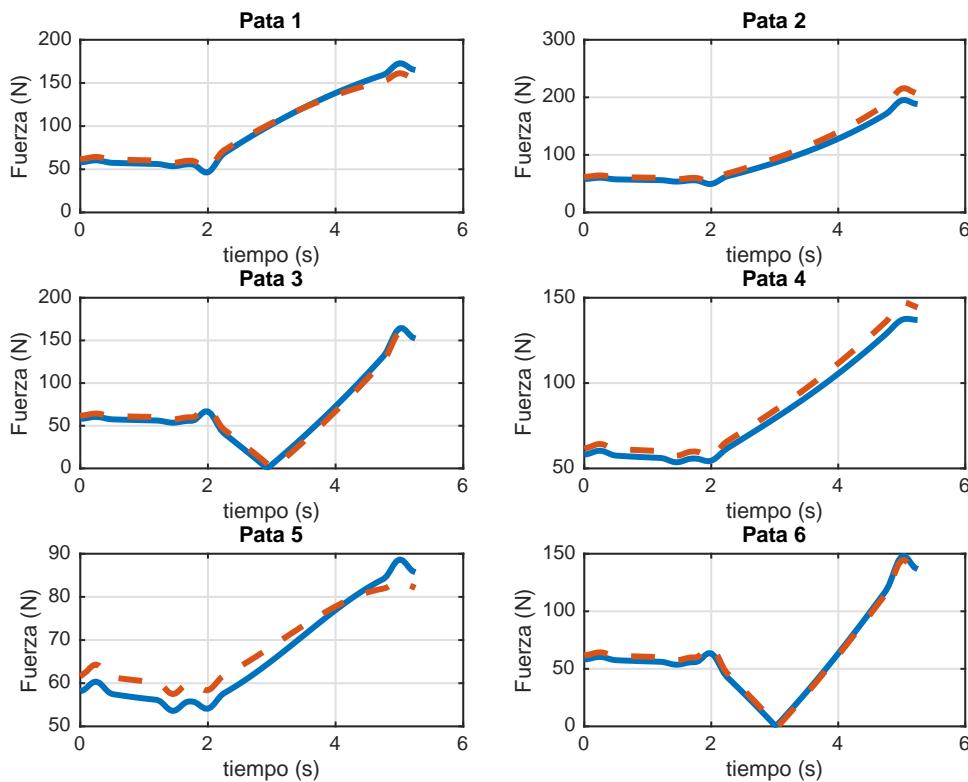


FIGURA 6.16: Resultado de los modelos cerrado del modelo dinámico inverso.  
Fuerzas en los actuadores.

La comparación de los valores de las fuerzas de actuación requeridas para realizar el movimiento deseado se ilustra en la figura 6.16, las líneas punteadas representan los valores obtenidos en MSC.ADAMS, mientras que las líneas continuas son los valores calculados por el método implementado en MATLAB. Se puede apreciar que al final del movimiento existe una leve discrepancia en algunos de los actuadores, la razón de ello es que MSC.ADAMS une los puntos

de las trayectorias con una curva de tercer orden, cuyos coeficientes se utilizan para calcular la velocidad y aceleración de los actuadores. Esta aproximación produce leves disparidades en la aceleración del efecto final, y por ende en las fuerzas calculadas.

### 6.7.5 Simulación de Dinámica Directa

Con el modelo dinámico directo se desea determinar el movimiento de la plataforma, a partir de la fuerza de entrada de los actuadores, considerando la naturaleza no lineal del modelo, que consta de cargas iniciales, fuerzas de acople entre articulaciones y efectos de las cargas de gravedad, considerando la dificultad de que los pares/fuerzas dinámicos dependen de los parámetros físicos del manipulador, de la configuración de las articulaciones, de la velocidad, de las aceleraciones y de la carga que soporta el robot obtener una implementación mediante simulación resulta entonces una tarea compleja.

En la figura 6.17 se observa el esquema del modelo implementado en MATLAB. Se plantea realizar un desplazamiento a lo largo del eje  $z$  de 620 mm desde una pose inicial dada por  $\mathbf{q}_0$  hasta una final  $\mathbf{q}_d$  (Tabla 6.3), con un paso de integración de  $t_m = 0,15\text{ s}$ . El tiempo total destinado a la ejecución del desplazamiento es de  $t_f = 4$ . Se ha utilizado el solver estándar de MATLAB (*ode45*).

Como entrada al modelo dinámico directo se ha definido seis fuerzas iguales en los actuadores lineales, las cuales dependen únicamente de la posición, velocidad del efecto final y una fuerza inicial. Se ha propuesto desarrollar un modelo biscoelástico como fuerza de entrada de acuerdo a la ecuación (6.109).

$$f = f_0 + k_p(\mathbf{r}_{z,d} - \mathbf{r}_z) - k_d \mathbf{v}_z, \quad (6.109)$$

en la que  $f_0$  es la fuerza inicial de los actuadores,  $k_p$  es una constante proporcional,  $\mathbf{r}_{z,d}$  es la posición final deseada del efecto final en la dirección del desplazamiento,  $\mathbf{r}_z$  es la posición actual del efecto final,  $k_d$  es una constante derivativa y  $\mathbf{v}_z$  es la velocidad actual a lo largo del eje  $z$ . se puede interpretar la fuerza  $f$  como la proporcionada por un sistema masa resorte-amortiguador,

## Dinámica de PMs

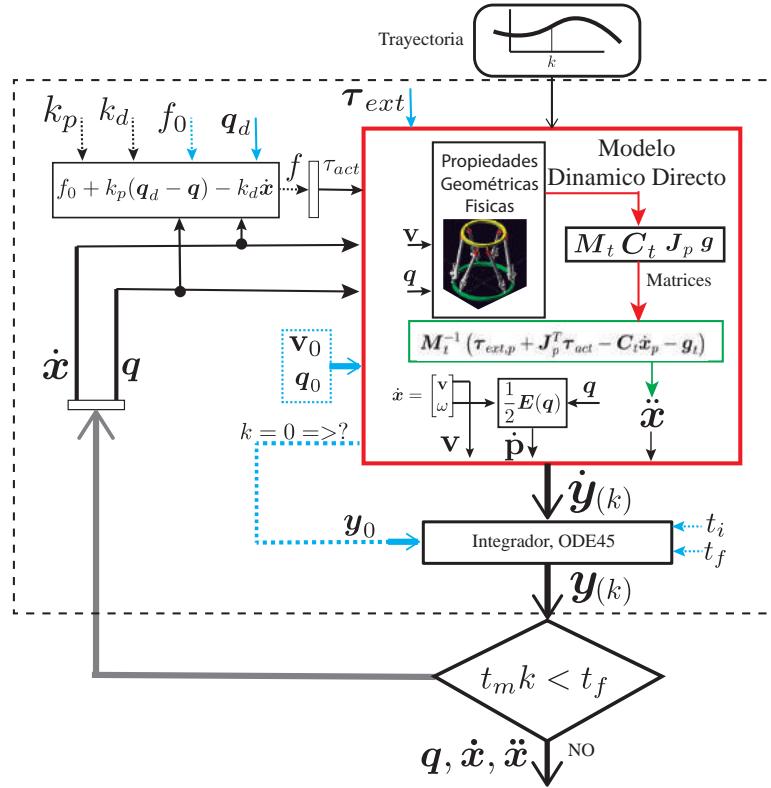


FIGURA 6.17: Esquema de la implementación del modelo dinámico directo en simulación.

donde la posición final atrae la plataforma con una fuerza proporcional al error de posición, por otro lado el sistema se desacelera debido a la acción de la velocidad actual de la plataforma, y donde la constante  $f_0$  es la fuerza inicial que compensa el peso de la plataforma superior; dicho valor ha sido obtenido a partir de la dinámica inversa en el caso específico de la posición de Home.

El modelo de fuerza de entrada al robot establecido en la ecuación (6.109) es una función escalar, y para ser aplicado a todos los actuadores ha sido necesario elaborar un arreglo definido por la ecuación (6.110), que permite aplicar la misma fuerza a todos los actuadores de la plataforma SG.

$$\boldsymbol{\tau}_{act} = f[1, 1, 1, 1, 1, 1]^T. \quad (6.110)$$

Dado que modelo dinámico directo depende de la posición y la velocidad de la plataforma es necesario inicializar el cálculo a partir de la definición una velocidad inicial, en este caso cero, que considera que la plataforma no tiene

## Dinámica de PMs

fuerza externa (únicamente actúan las fuerzas iniciales). Con esta información se determina el modelo dinámico dado en la ecuación (6.93) a partir de las matrices del modelo. Una vez se ha logrado determinar la ecuaciones de estado, se procede a la integración considerando un valor de tiempo inicial y un valor de intervalo del desplazamiento, obteniendo los siguientes valores de posición y velocidad de la plataforma.

Para las siguientes iteraciones los valores del tiempo de integración y el vector de estado son actualizados, para proceder con la ejecución del algoritmo ya descrito hasta obtener los valores deseados.

Una vez elaborados los scripts para el modelo dinámico directo, se han definido los valores de la simulación , en la figura 6.18 se pueden observar los resultados obtenidos para los valores definidos en la tabla 6.3.

TABLA 6.3: Parámetros de simulación para el MGD

Parámetros de la simulación dinámica directa
$\mathbf{q}_0 = [0, 0, 580, 1, 0, 0, 0]^T \text{ mm}$
$\dot{\mathbf{x}}_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \text{ mm/s}$
$\mathbf{q}_d = [0, 0, 1200, 1, 0, 0, 0]^T \text{ mm}$
$t_f = 6 \text{ s} \text{ y } t_m = 0,15 \text{ s}$
Integrador ODE45, con paso fijo
$f_0 = 62,3 \text{ N}$
$k_p = 1,1 \text{ N/mm}$
$k_d = 0,4 \text{ Ns/mm}$
$\tau_0 = [[0, 0, 0, 0, 0, 0]]^T$

En la primera gráfica de la figura 6.18 se puede observar que la respuesta en posición de la plataforma es similar a una de primer orden, debido principalmente al modelo de fuerza de entrada. Respecto a la curva de posición también es necesario mencionar que luego del transitorio, el valor final alcanzado por el robot es de  $1210 \text{ mm}$ , la razón por la cual difiere de los  $1200 \text{ mm}$  de la posición final es debido a que la ecuación de fuerza carece de un compensador de gravedad que tenga en cuenta el cambio que ocurre en el jacobiano del robot

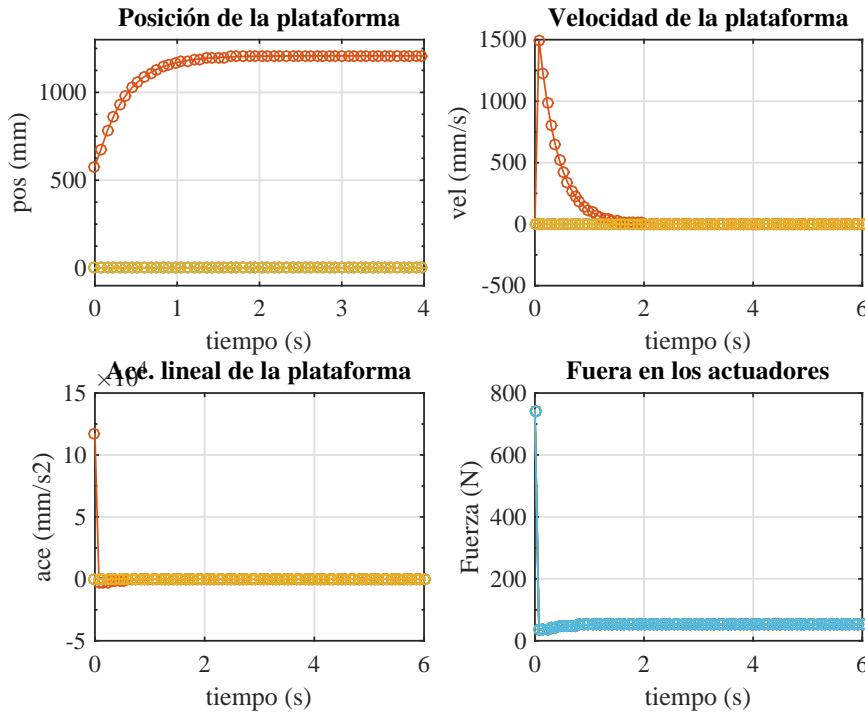


FIGURA 6.18: Resultados de la simulación dinamica directa

debido a la variación de la altura del efecto final.

En el caso de la fuerza en los actuadores, se observa un valor inicial muy alto respecto al comportamiento en el resto del movimiento, lo que corresponde a un valor de error muy alto entre la posición inicial y la deseada.

La curva de velocidad se aproxima a cero a medida que la plataforma se acerca a la posición deseada, pero se debe considerar que la velocidad decrece rápidamente hasta hacerse cero.

## 6.8 Resultados experimentales

Luego de la obtención del modelo dinámico teórico y de su respectiva simulación, se describe a continuación la arquitectura de hardware para la plataforma Stewart Gough con la que se han realizado algunas pruebas, las pruebas de movimiento realizadas y los resultados obtenidos.

## Dinámica de PMs

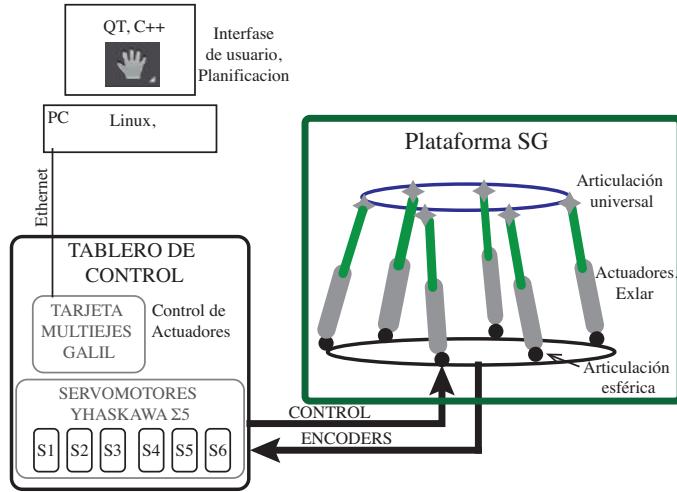


FIGURA 6.19: Esquema del sistema de control de la plataforma SG.

### 6.8.1 Arquitectura de Hardware

El sistema robótico no sólo consiste en la estructura mecánica sino también de los elementos de actuación y control de movimiento. En la figura 6.19 se aprecia un diagrama esquemático del sistema robótico desarrollado. Todas las patas del robot paralelo son iguales. En la parte inferior de la pata se ubica una articulación de tipo esférico de la marca *Hephaist Seiko*, que a su vez se une con la base del manipulador (figura 6.20a).

En la parte superior de la pata se ubica una articulación universal (ver figura 6.20b) que simultáneamente se conecta con la plataforma móvil. En la mitad de la pata como entrada de movimiento se inserta un actuador lineal, consistente de un tornillo de rodillos planetarios de la marca *Exlar* con un desplazamiento efectivo de 500 mm (figura 6.20c) y un motor AC síncrono de la marca *Yaskawa*.

Para el control de los motores se utiliza un servoamplificador *sigma5* de la marca *Yaskawa*; la sincronización y el cierre de los lazos de control se realiza mediante un tarjeta para control multiejes (siete ejes en total) *Galil*; la comunicación entre la interfaz de usuario y la tarjeta de control de movimiento multi-ejes se realiza mediante protocolo ethernet.

En la tabla 6.4 se resumen los elementos utilizados en el sistema.

*Dinámica de PMs*



(A) Articulación esférica



(B) Articulación universal



(C) Articulación prismática con ac-  
tuador



(D) Plataforma Stewart Gough

FIGURA 6.20: Fotografías de componentes mecanicos del manipulador paralelo SG.

TABLA 6.4: Lista de componentes electromecanicos

Componente	Referencia	Fabricante
Servomotor	SGMJ-08A3A61	Yaskawa
hline Amplificador	SGDV-5R5A01A	Yaskawa
Actuador lineal Exlar de rodillos planetarios	KM60-500-05-NM-ISC-YS3-L2	Exlar
Control de movimiento 6 ejes	DMC-4183-BOX8-ABCD(HSRC)-EFGH(HSRC)	Galil

### 6.8.2 Metodología

La metodología para realizar las pruebas se detallla en la figura 6.21; primero se inicia con la definición de una curva en el espacio operacional de la plataforma, que para este caso, puede ser linea recta o arco sobre un plano, una vez obtenida, se procede a la interpolacion en la que se generan los perfiles de movimientos para el robot; posteriormente mediante el uso del modelo geométrico inverso (MGI) se determinan los desplazamientos de los actuadores. Antes de enviar los valores a los actuadores se realiza la respectiva escalizacion al sistema de referencia y se comunica a la tarjeta de control. Todas estas operaciones son realizadas fuera de linea.

La comunicación con la tarjeta de control se hacer mediante el protocolo es-tandar TCP/IP. El sistema envía a la tarjeta de control un buffer inicial de quinientas posiciones que solicita nuevos datos cada vez que el buffer de co-municación este próximo a estar vacio.

El algoritmo de control es del tipo lazo cerrado, mediante el uso de la ya men-cionada tarjeta multiejes Galil, tarjeta que permite el movimiento sincronizado de varios ejes. En cuanto a tiempos se refiere, el tiempo de muestreo de la tar-jeta Galil es de  $1\text{ ms}$ , y el tiempo utilizado para la interpolación es del doble

## Dinámica de PMs

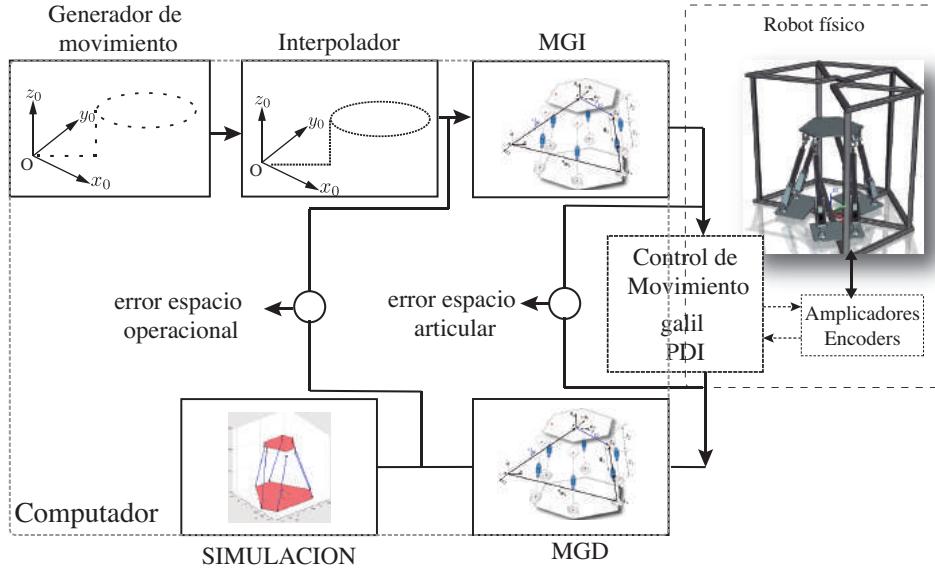


FIGURA 6.21: Esquema de la configuración para los ejercicios experimentales

del tiempo de muestreo, es decir, para hacer una trayectoria de 1 s es posible la comunicación de un total de 500 sets o conjuntos de valores provenientes del interpolador.

Internamente la tarjeta de control tiene un PID en serie con un filtro pasa bajo y un filtro Nocht [29]. Para las pruebas realizadas los valores que se han obtenido mediante previa sintonización para el PID son:

$$KP = 6 \quad (6.111)$$

$$KD = 60 \quad (6.112)$$

$$KI = 0 \quad (6.113)$$

A continuación se describen algunas de las pruebas realizadas:

Prueba 1 . Desplazamiento en el eje Z; posteriormente, en una posición fija, cambios de orientación en cada uno de los ejes considerando la orientación en ángulos fijos.

Prueba 2 Circunferencia de 50 mm de radio en el plano xy; Se mantiene la orientación constante.

### 6.8.3 Prueba 1: Desplazamiento puro, cambios de orientación individual

Aunque el objetivo inicial consiste en hacer cambios de orientación manteniendo constante la posición del efecto final correspondiente al centro de la plataforma superior, mecánicamente en la posición de Home, los actuadores están totalmente contraídos, restringiendo el cambio de orientación, por lo tanto la plataforma debe ser llevada a un punto inicial alejado de la posición de Home, para que en ese punto, manteniendo la posición, se hagan los cambios de orientación respectivos. En la figura 6.22 se observa la simulación de la plataforma, la trayectoria de referencia y la calculada (las longitudes de los ejes de la gráfica aparecen en mm). Una vez que la plataforma ha realizado el movimiento de orientación alrededor de cada uno de los tres ejes, la plataforma se desplaza nuevamente a su posición de Home.

En la figura 6.22b se observa en detalle la trayectoria de posición, en rojo la de referencia y en azul la calculada.

Para determinar la pose de la plataforma se parte de la medición de los encoders de los servomotores, como se puede observar en la figura 6.21, posteriormente se hace una operación de escalado y se determina la longitud efectiva de cada uno de los actuadores; con esta información y mediante la aplicación de modelo geométrico directo se calcula la pose de la plataforma, que entregan los *valores calculados*; una vez obtenida la pose y los valores de los actuadores se realiza la simulación de la plataforma (figura 6.22a).

Respecto al error, espacialmente en la figura 6.22b se detalla tanto la linea de referencia que corresponde a la posición deseada como la calculada con los valores retornados por los encoders. En un primer acercamiento el error parece bastante alto, sin embargo, al analizar la resolución de los ejes de la gráfica se observa que el orden de magnitud en el caso del eje Z difiere en miles de décimas de milímetros de los ejes X y Y, como se observa en el detalle, donde el error de la posición en promedio es menor a 0,5 mm.

## Dinámica de PMs

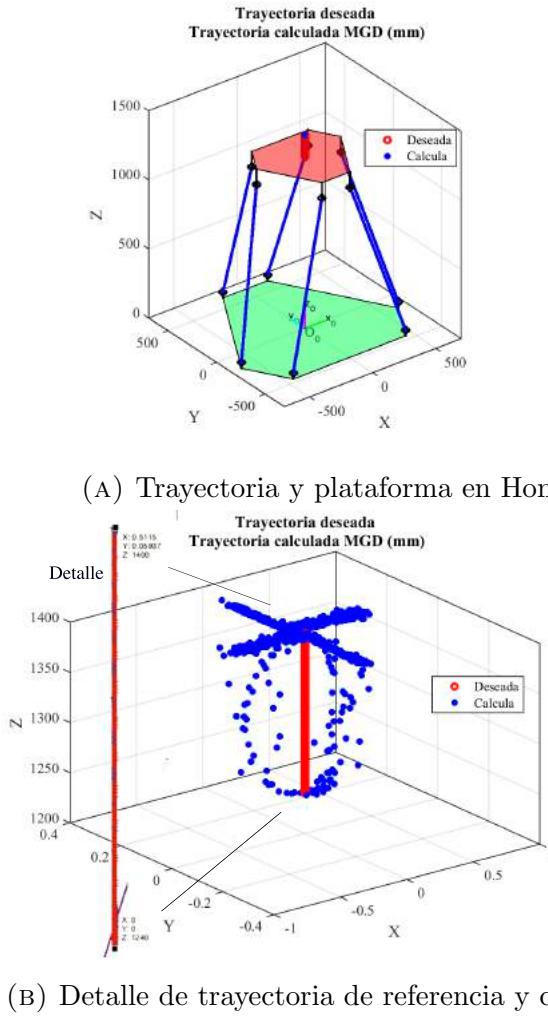


FIGURA 6.22: Resultados de la prueba 1: cambio de orientación.

Una vez se ha alcanzado la posición donde se desea que la plataforma realice los cambios de orientación, se aprecia una desviación en el plano  $XY$ , pero nuevamente es debido a los ordenes de magnitud, ya que las desviaciones son inferiores a  $0,5\text{ mm}$  en los ejes  $X$  y  $Y$ .

En la figura 6.23 se observa la evolución en el tiempo en coordenadas cartesianas, es decir, en el espacio operacional del robot, tanto de referencia como calculado. En las componentes  $X$  y  $Y$  claramente se observa en azul que los valores máximos no superan los  $0,5\text{ mm}$ ; en el caso de la componente  $Z$  se observa que la posición de la plataforma sigue el perfil de movimiento.

## Dinámica de PMs

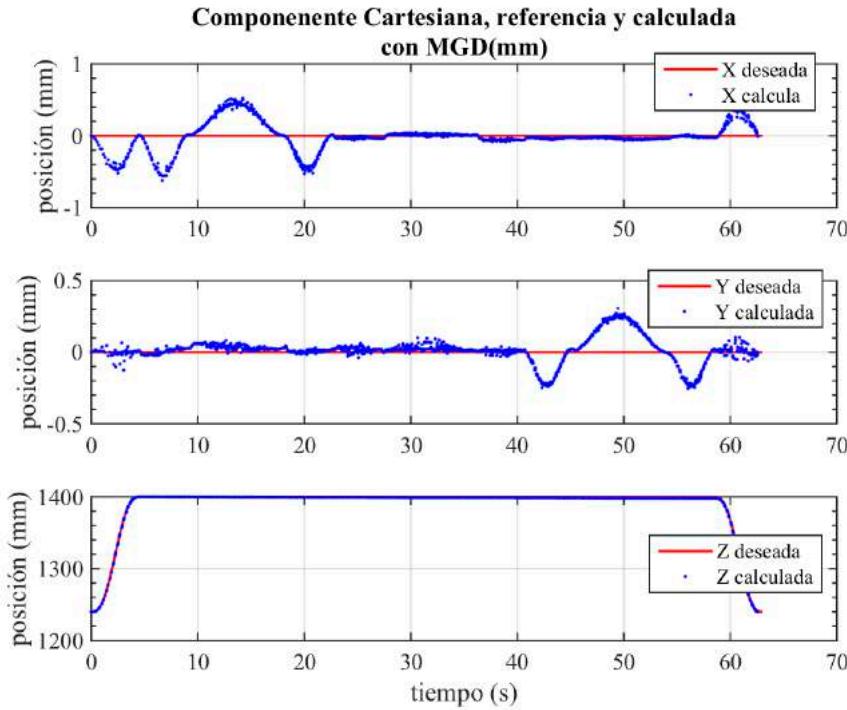


FIGURA 6.23: Evolución en el tiempo de la coordenadas cartesianas de posición de referencia y calculada.

Para la segunda parte de la trayectoria, los movimientos de orientación consisten en un cambio de  $\pm 15^\circ$  alrededor de cada uno de los ejes. En la figura 6.24 se observa el cambio de orientación de la plataforma en el tiempo, para mayor claridad los resultados son graficados en ángulos de euler fijos, roll pitch y yaw. Igualmente, la orientación se calcula usando el MGD, y los valores obtenidos de los encoders de los actuadores.

En la figura 6.25 se observan los resultados de posicionamiento de los actuadores. Estos valores son obtenidos directamente de la tarjeta de control, para garantizar la ejecución, y comparar con los datos recibidos y ejecutados en el controlador (tanto los valores de referencia como los de medición están dados en mm).

En cuanto al comportamiento en velocidad de los actuadores, en la figura 6.26 se presentan la respuestas de velocidad para cada uno. Estas son comparadas con la velocidad de referencia que llega al controlador, es decir, con la que se desea ejecutar los movimientos del robot. Para la obtención de los valores

## Dinámica de PMs

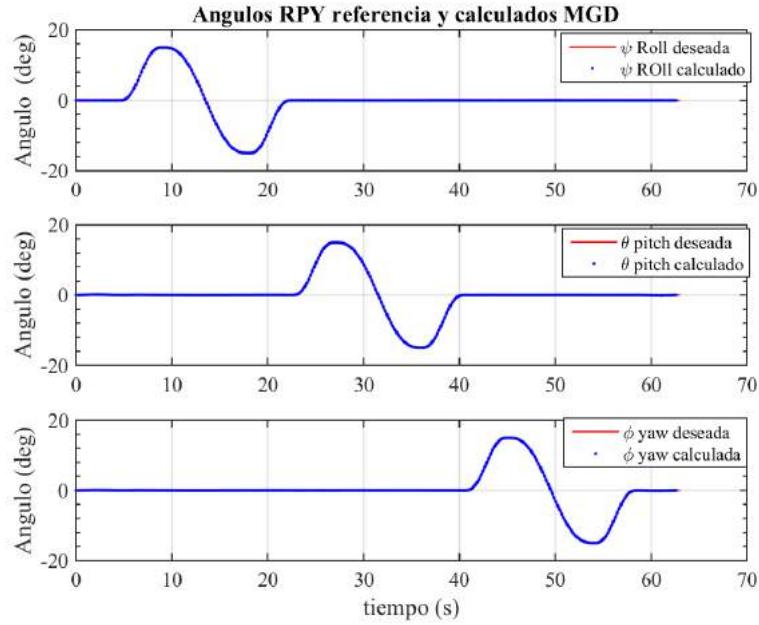


FIGURA 6.24: Evolución en el tiempo de la orientación de la plataforma expresada en ángulos de euler fijos.

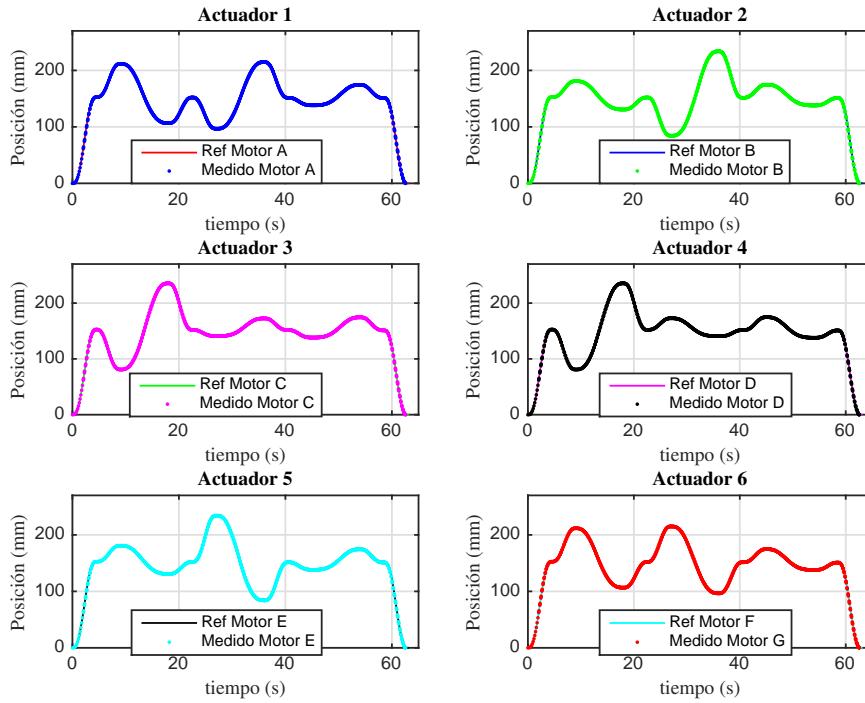


FIGURA 6.25: Posicion de los actuadores

de velocidad de los actuadores se han tomado los valores de posición que retorna la tarjeta de control, se han derivado para obtener una estimación de

## Dinámica de PMs

la velocidad, y compararla con la velocidad que el sistema está realimentando.

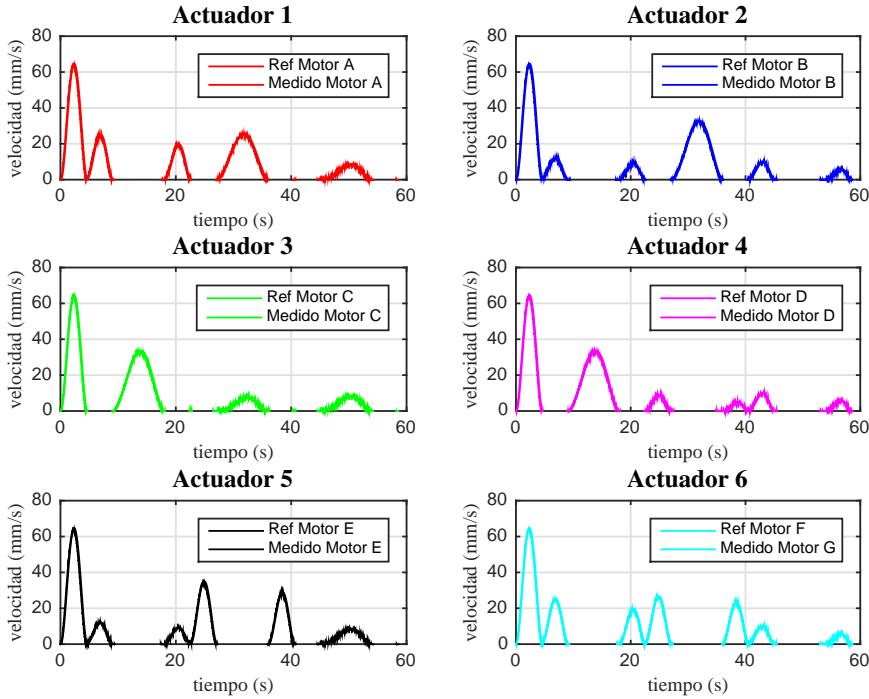


FIGURA 6.26: Velocidad estimada y medida de los actuadores.

Otra información que resulta interesante para el análisis del robot, y que permite analizar directamente el movimiento es el error medido en el seguimientos de una trayectoria de los actuadores, con respecto a la referencia. Para tal fin la tarjeta de control permite leer directamente el error interno desde el sistema de control. En la figura 6.27 se observa el comportamiento del error en el tiempo para cada uno de los actuadores, en los que el error de seguimiento es inferior a  $\pm 0,06$ .

Analizando estadísticamente el comportamiento del error para cada uno de los actuadores, como se observa en la figura 6.28, el máximo valor de error es presentado por el actuador 1, con un pico máximo de  $0,06\text{ mm}$ , el error mínimo  $0,02\text{ mm}$  es presentado por el actuador 3; cabe anotar que la tendencia de la media del error en todos los actuadores es próxima a cero. Como se observa la distribución de los errores por actuador no es simétrica, pero la distribución del segundo y tercer cuartil para todos los actuadores es acotada aproximadamente por  $0,05\text{ mm}$ .

## Dinámica de PMs

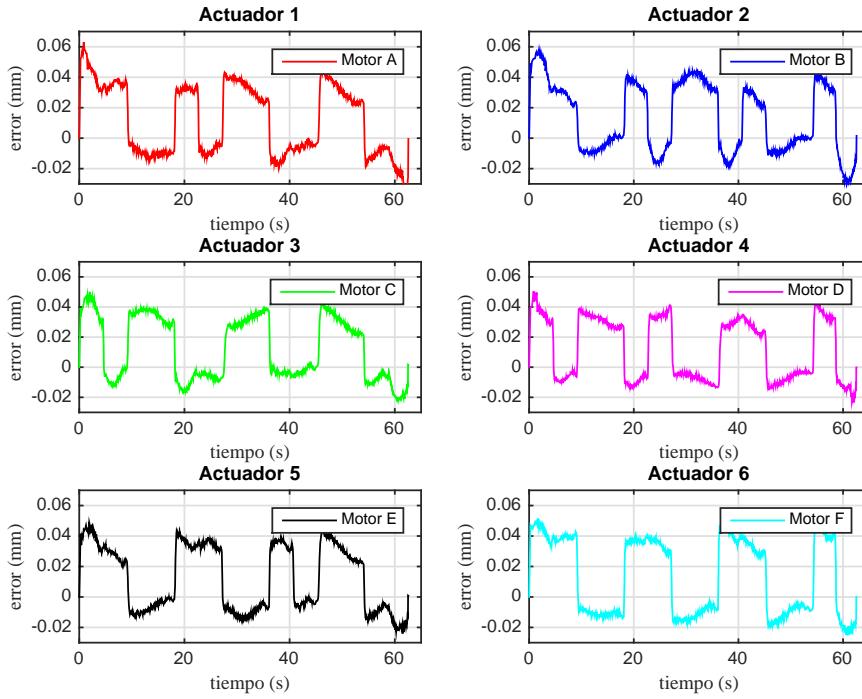


FIGURA 6.27: Error de posición de los actuadores, información Galil

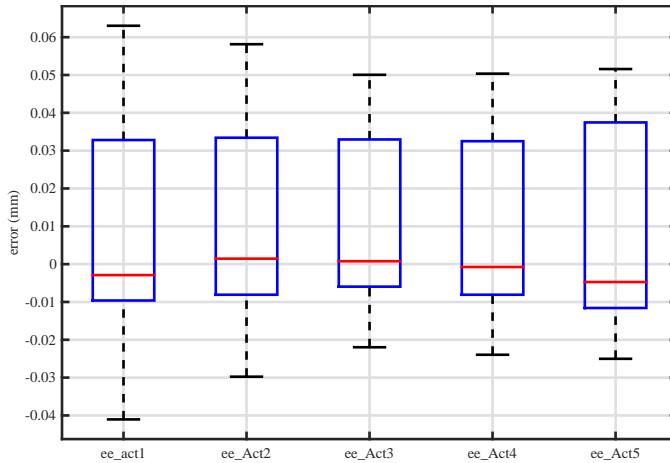


FIGURA 6.28: Gráfico de dispersión del error por actuador.

A partir de los anteriores resultados, se ha considerado que la ejecución de la trayectoria por parte de la plataforma, para un controlador sencillo, resulta tener un desempeño mas que aceptable, con potencial para la ejecución de un sinnúmero de tareas.

#### 6.8.4 Prueba 2: círculo en el plano XY

Básicamente esta prueba consiste en la descripción de una circunferencia sobre el plano  $XY$  por parte del efecto final, de nuevo a cierta distancia de la posición de Home; la trayectoria definida se puede observar en la figura 6.29a.

La trayectoria deseada, en contraste con la calculada a partir de los datos de realimentación de los encoders, se puede observar en 6.29b. El círculo tiene centro en  $p = [0, 0, 1400]$ , lo que implica un movimiento inicial en el eje  $Z$  a partir de la posición de Home ( $p_i = [0, 0, 580]$ ), el radio es de 5 mm. El tiempo de ejecución de la trayectoria corresponde a 25 s, recordando que el tiempo de muestreo del controlador es de 1 s.

En la figura 6.30 se observa el cambio en el tiempo de las coordenadas cartesianas de posición, posteriormente, en la figura 6.31 se observa el comportamiento de la orientación, en ambos caso los valores son cercanos a cero; en el movimiento de traslación se observa un movimiento muy próximo al deseado dado que la orientación de referencia no cambia; empero en la descripción de la circunferencia se observan pequeñas desviaciones, que son debidas principalmente a los errores de fabricación y ensamblaje de la plataforma.

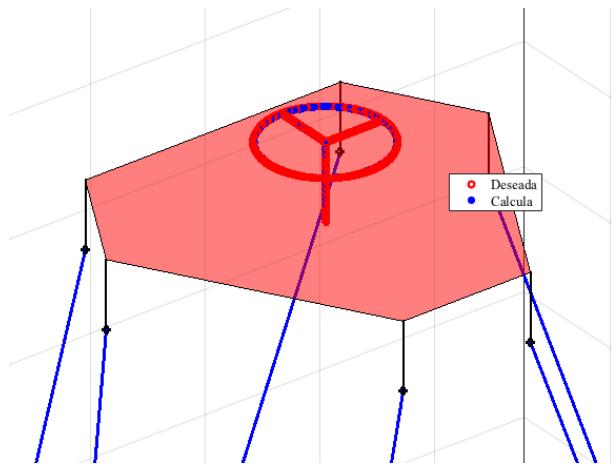
En cuanto al seguimiento, en la figura 6.32 se observa el comportamiento de cada uno de los actuadores para alcanzar la posición de referencia.

En el caso del comportamiento en velocidad, en la figura 6.33 se presentan las velocidades de los actuadores durante la realización del movimiento, tanto calculadas como deseadas.

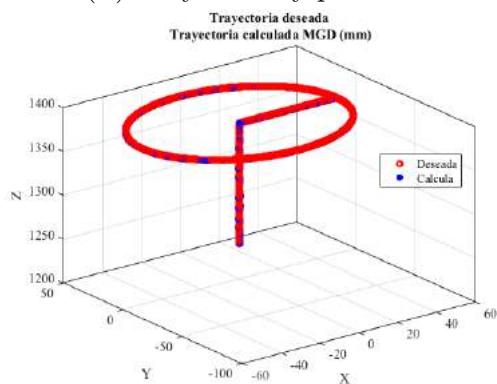
El error máximo en posición que se observa en la ejecución del movimiento corresponde a aproximadamente 0,06 mm al inicio de la ejecución de la trayectoria, posteriormente ninguno de los actuadores supera este valor. En la figura 6.34 se observa el error medido en la ejecución de la trayectoria.

Por último, en la figura 6.35 se presentan los resultados en un gráfico box-plot

## Dinámica de PMs



(A) Trayectoria y plataforma en Home.



(B) Detalle de trayectoria de referencia y calculada

FIGURA 6.29: Resultados de la prueba 2: trayectoria y plataforma en la posición de home.

para el análisis estadístico del error. El error correspondiente a la mediana de las mediciones tiende a cero y nuevamente la tendencia de la dispersión tiende a ser positivamente asimétrica, aunque la mayor dispersión se encuentra en el actuador 1, el primer y tercer cuartil no se separan por más de 0,05 mm.

## Dinámica de PMs

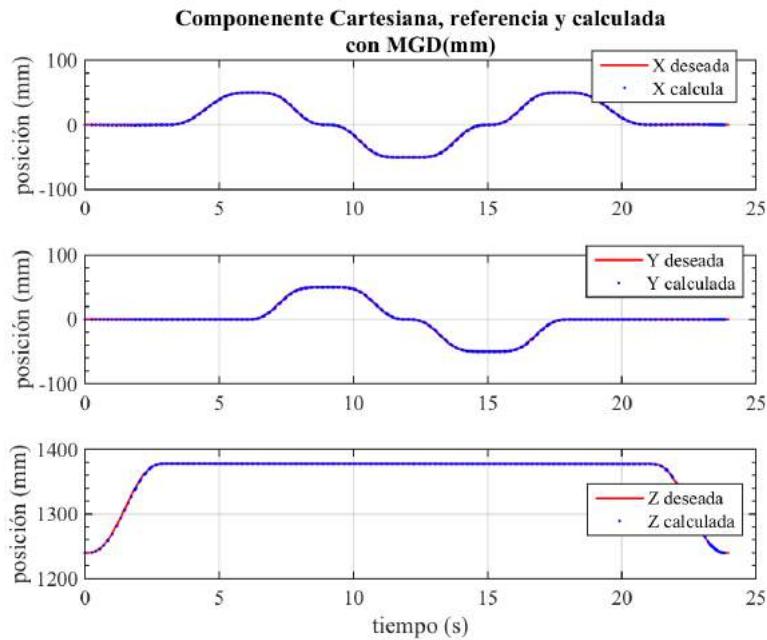


FIGURA 6.30: Evolución en el tiempo de las coordenadas cartesianas de posición referencia y calculadas, prueba 2.

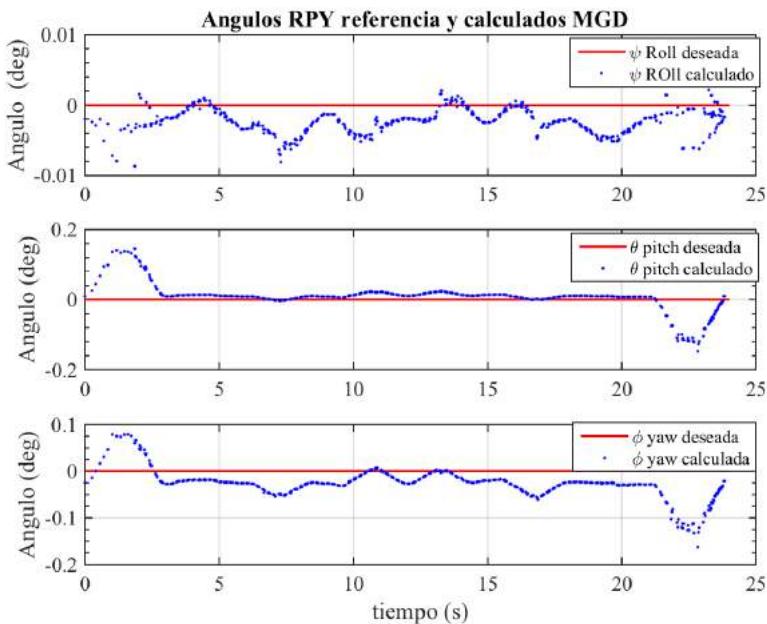


FIGURA 6.31: Evolución en el tiempo de la orientación de la plataforma expresada en ángulos de euler fijos, para la prueba 2.

## Dinámica de PMs

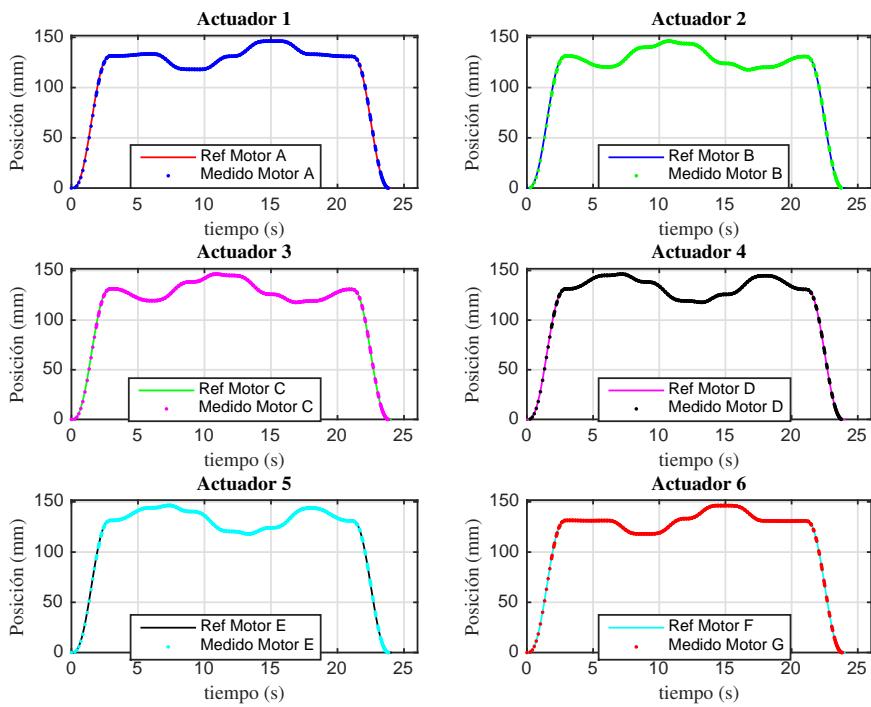


FIGURA 6.32: Posicion de los actuadores

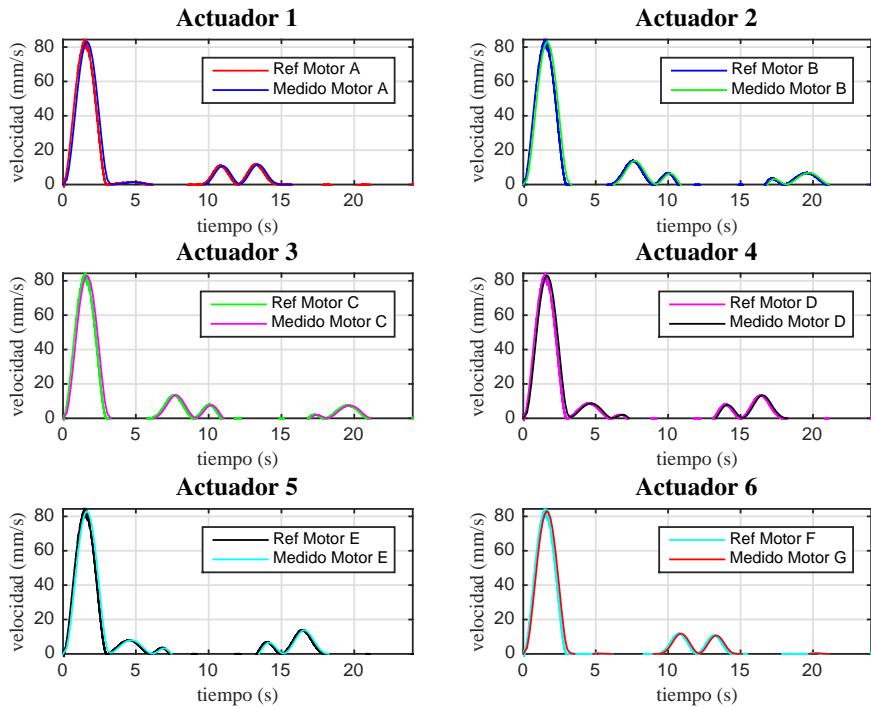


FIGURA 6.33: Velocidad estimada y medida de los actuadores.

## Dinámica de PMs

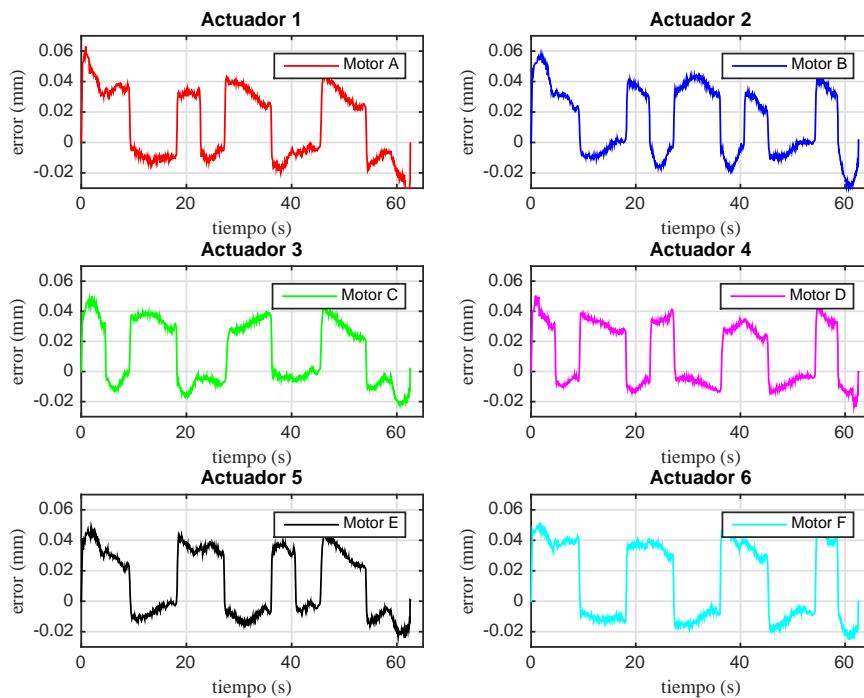


FIGURA 6.34: error de Posición de los actuadores, realimentado de la tarjeta de control.

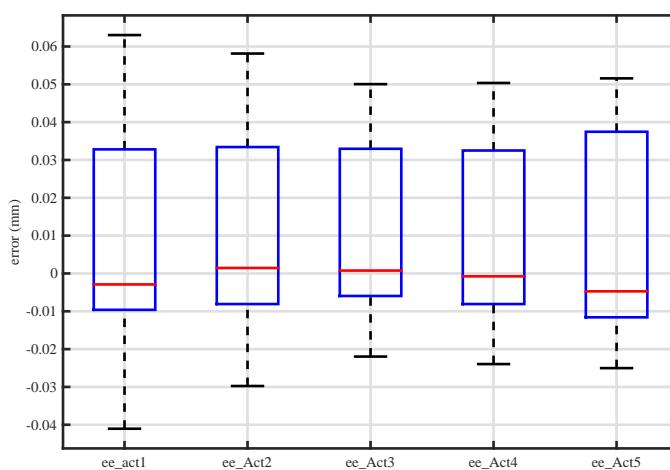


FIGURA 6.35: Gráfico de dispersión del error por actuador.

# **Capítulo 7**

## **CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS**

### **7.1 Conclusiones**

Los parámetros estructurales son un elemento de gran importancia para el análisis, síntesis y diseño de manipuladores paralelos. A partir de lo propuesto en este documento, a través de un análisis matemático de las propiedades del jacobiano de cada una de las patas, es posible determinar los principales parámetros estructurales (movilidad y conectividad) y posteriormente calcular los demás (sobrerrestricciones, redundancia), teniendo en cuenta que la formulación del jacobiano es netamente basada en screws.

El método aquí planteado para encontrar el MGI para un manipulador paralelo, específicamente con patas compuestas por dos eslabones o patas cuya variable articular este en términos de la distancia, y en el cual no se realiza una intersección de formas geométricas, sino que de manera directa mediante una ecuación de lazo en términos de la variable articular se obtiene el valor deseado, es mucho más simple en cuanto al nivel de análisis y cálculos matemáticos necesarios, pero conduce a resultados equiparables a los del método tradicional.

Aunque el método de Newton-Raphson es útil para la resolución del PGD, es necesario evaluar el desempeño que tienen otros métodos bajo las mismas

## *Dinámica de PMs*

condiciones para encontrar las mejores opciones de aplicación a la resolución del PGD.

Existe una rápida convergencia del método N-R para obtención de la respuesta al PGI, sin embargo hay una alta influencia de las condiciones iniciales o semilla para iniciar la iteración, por lo que la utilización de valores aleatorios indica una alta probabilidad de fallo en la convergencia mientras que para efectos prácticos, el uso de una condición inicial (normalmente la posición de Home) cuya cinemática es conocida conduce a los resultados deseados.

Al igual que con el método propuesto para la solución del PGI, el método iterativo para solución del PGD solo puede ser aplicado a manipuladores paralelos con patas compuestas por dos eslabones o patas cuya variable articular este en términos de la distancia.

El método desarrollado para la solución del PGI es de uso factible en la definición de los diversos espacios de trabajo, singularidades y planificación de movimientos, algunos de los cuales fueron exemplificados en este documento con diversos manipuladores paralelos.

La metodología propuesta para encontrar los modelos dinámicos utilizando el principio de trabajo virtual mediante las ecuaciones de Kane, es útil para la obtención de un modelo para control en el espacio operacional y conduce a resultados comparables con los que se pueden obtener usando paquetes de software comercial para análisis dinámica multicuerpo.

Específicamente el ejemplo realizado con una plataforma Stewart Gough permite comparar los resultados del software de dinámica multicuerpo y del método propuesto implementado en Matlab, observando ciertas disparidades causadas por parámetros internos de simulación.

Se obtuvo una parametrización de las dimensiones de un robot paralelo, utilizando articulaciones virtuales y el análisis con screws, alternativa que permite localizar los ejes correspondientes a cada una de las articulaciones que posee

un robot paralelo, tanto activas como pasivas.

Dado que actualmente se producen continuos resultados de investigación en los problema asociados a la resolución de la cinemática y dinámica de manipuladores paralelos, esta tesis pretende aprovechar muchas de las técnicas que se han propuesto separadamente, para obtener métodos simplificados, sin dar ca-vidad a disminución en la congruencia de los resultados con el comportamiento físico de los manipuladores.

## 7.2 Publicaciones

Los métodos propuestos y las pruebas realizadas que se encuentran en el transcurso de este documento han permitido participar en diversos eventos de divulgación académica mediante publicaciones, ponencias y conferencias, a continuación se listan las más sobresalientes:

- **Garcia Cena Cecilia, Cardenas Pedro F., Pazmino Roque Saltaren, Puglisi Lisandro, Aracil Santonja Rafael.** *A cooperative multi-agent robotics system: Design and modelling, Expert Systems with Applications*, Volumen 40, Issue 12, 15 September 2013, Pages 4737-4748, [21]:

This paper presents the development of the robotic multi-agent system SMART. In this system, the agent concept is applied to both hardware and software entities. Hardware agents are robots, with three and four legs, and an IP-camera that takes images of the scene where the cooperative task is carried out. Hardware agents strongly cooperate with software agents. These latter agents can be classified into image processing, communications, task management and decision making, planning and trajectory generation agents. To model, control and evaluate the performance of cooperative tasks among agents, a kind of Petri Net, called Work-Flow Petri Net, is used. Experimental results shows the good performance of the system. Keywords: Robotic agent; Mechatronics; Mobile robot kinematics; Mobile robot motion-planning; Cooperative systems

- **Moreno Hector A., Saltaren Roque, Puglisi Lisandro, Carrera Isela, Cardenas Pedro, Alvarez Cesar.** *Robotica Submarina: Con-*

## *Dinámica de PMs*

*ceptos, Elementos, Modelado y Control, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI, Volume 11, Issue 1, January-March 2014, Pages 3-19 ISSN 1697-7912, [99]:*

**Abstract:** Los robots submarinos han revolucionado la exploración del fondo marino. Por otro lado, estos robots han permitido realizar operaciones en aguas profundas sin la necesidad de enviar un vehículo tripulado por humanos. El futuro de esta tecnología es prometedor. El propósito de este documento es servir de primer contacto con este tema y va dirigido a estudiantes de postgrado, ingenieros e investigadores con interés en la robótica submarina. Además, se reporta el estado actual de los diferentes aspectos que giran alrededor de esta área de la robótica. Palabras clave: Robots Submarinos; Introducción; Componentes; Modelado; Control; Estado del Arte.

- **Puglisi Lisandro J., Saltaren Roque J., Portolés Germán Rey, Moreno Hector, Cárdenas Pedro F., García Cecilia.** *Design and kinematic analysis of 3PSS-1S wrist for needle insertion guidance, Robotics and Autonomous Systems*, Volume 61, Issue 5, May 2013, Pages 417-427, ISSN 0921-8890 [110]:

**Abstract:** In this work it is presented a complete kinematic analysis of the 3PSS-1S parallel mechanism for its implementation as a spherical wrist for a needle insertion guidance robot. The spherical 3PSS-1S mechanism is a low weight and reduced dimension parallel mechanism that allows spherical movements providing the requirements needed for the serial parallel robotic arm for needle insertion guidance. The solution of its direct kinematic is computed with a numerical method based on the Newton-Raphson formulation and a constraint function of the mechanism. The input-output velocity equation is obtained with the use of screw theory. Three types of singular postures are identified during simulations and verified in the real prototype. The 3PSS-1S can perform pure rotations of  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 40^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$  along the x, y, z axes respectively. Keywords: Spherical wrist; Parallel manipulator; Needle insertion

- **García Cecilia, Cárdenas Pedro F., Puglisi Lisandro J., Saltaren Roque.** *Design and modeling of the multi-agent robotic system: SMART,*

## *Dinámica de PMs*

*Robotics and Autonomous Systems*, Volume 60, Issue 2, February 2012,  
Pages 143-153, ISSN 0921-8890, [39] :

Abstract: This article presents the design, kinematic model and communication architecture for the multi-agent robotic system called SMART. The philosophy behind this kind of system requires the communication architecture to contemplate the concurrence of the whole system. The proposed architecture combines different communication technologies (TCP/IP and Bluetooth) under one protocol designed for the cooperation among agents and other elements of the system such as IP-Cameras, image processing library, path planner, user Interface, control block and data block. The high level control is modeled by Work-Flow Petri nets and implemented in C++ and C. Experimental results show the performance of the designed architecture. Keywords: Communication architecture; Multi-agent robotic systems; Cooperative robots; Concurrent system.

- **Puglisi Lisandro J., Saltaren Roque J., Moreno Hector A., Cárdenas Pedro F., Garcia Cecilia, Aracil Rafael.** *Dimensional synthesis of a spherical parallel manipulator based on the evaluation of global performance indexes*, Robotics and Autonomous Systems, Volume 60, Issue 8, August 2012, Pages 1037-1045, ISSN 0921-8890, [109]:

Abstract: In this work, the dimensional synthesis of a spherical Parallel Manipulator (PM) with a 3 P-SU-1S kinematic chain is presented. The goal of the synthesis is to find a set of parameters that defines the PM with the best performance in terms of workspace capabilities, dexterity and isotropy. The PM is parametrized in terms of a reference element, and a non-directed search of these parameters is carried out. First, the inverse kinematics and instantaneous kinematics of the mechanism are presented. The latter is found using the screw theory formulation. An algorithm that explores a bounded set of parameters and determines the corresponding value of global indexes is presented. The concepts of a novel global performance index and a compound index are introduced. Simulation results are shown and discussed. The best PMs found in terms of each performance index evaluated are locally analyzed in terms of its workspace and local dexterity. The relationship between the performance of the PM and

## *Dinámica de PMs*

its parameters is discussed, and a prototype with the best performance in terms of the compound index is presented and analyzed. Keywords: Dimensional synthesis; Parallel manipulator; Performance indexes.

- **Peña Cortés César Augusto, Martínez Oviedo Edison, Cárdenas Herrera Pedro Fabián.** *Optimización dimensional de un robot paralelo tipo Delta basado en el menor consumo de energía*, Revista Ciencia e Ingeniería Neogranadina, Volume 21, Issue 1, Junio 2011, Pages 73-88, ISSN 0124-8170:

Abstract: Este artículo presenta el cálculo óptimo de las dimensiones de un robot paralelo tipo delta basado en el menor consumo de energía. También incluye la descripción de la plataforma experimental, y un análisis cinemático y dinámico. El algoritmo de optimización (algoritmos genéticos), tiene en cuenta restricciones tales como: cubrimiento de un espacio de trabajo semiesférico de un radio específico y el análisis de interferencias.

- Cárdenas Pedro, Peña Cortez César Augusto, Yime Rodríguez Eugenio. CONTROL DE SISTEMAS DE TELEOPERACIÓN CON RETARDO EN EL CANAL DE COMUNICACIONES, Revista Colombiana de Tecnologías Avanzada, Volumen 2, Issue 16, Junio 2010, Pages 78-85, ISSN 1692-7257:

Abstract: Este articulo presenta un estudio sobre un sistema de tele operación con retardos en el canal de comunicaciones, utilizando diversas técnicas de control con fin corroborar la de mejor desempeño. Se explican las principales ventajas y desventajas de las técnicas aplicadas. Se ilustran y analizan los resultados de diversas simulaciones variando los parámetros de control e introduciendo retardo en el canal de comunicación.

- **Saltaren, R.; Aracil, R.; Cardenas, P.; Pena, C.; Yime, E.; Alvarez, C.**, *Underwater Parallel Robot for oceanic measuring and observations- REMO I: development and navigation control advances in OCEANS 2009 - EUROPE* , vol., no., pp.1-9, 11-14 May 2009, [117] :

Abstract: The REMO I is a remotely teleoperated underwater vehicle developed for measuring and observing maritime environments as its

mandatory task. This robot has been built based on a parallel structure (Stewart-Gough platform), with the capability of changing its geometry in order to facilitate the navigation within complex maneuvers. In addition, both orientation and propulsion systems can change in order to provide even more underwater dexterity. A thruster located in the back of its structure, which drives the vehicle forward, composes the main propulsion system of the robot. This extended abstract briefly introduces some fundamental issues related to the mechanical design, instrumentation and the control capabilities of this system. keywords: manipulators; position control; remotely operated vehicles; telerobotics; underwater vehicles; REMO I; Stewart-Gough platform; navigation control; oceanic measurement; remotely teleoperated underwater vehicle; underwater parallel robot; Navigation; Parallel robots; Sea measurements.

### **7.3 TRABAJOS FUTUROS**

A partir de las propuestas y resultados expuestos en este documento, existen múltiples líneas de trabajo en las que se puede continuar tanto la investigación como la aplicación de las metodologías aquí propuestas:

- Conociendo la complejidad del modelo dinámico tanto inverso como directo, a partir de la propuesta realizada en este documento es factible la elaboración de una nueva metodología que permita obtener un modelo dinámico reducido, en el cual la solución esté expresada únicamente en términos de las articulaciones activas del manipulador paralelo; dicho modelo es plausible a través de la representación de las articulaciones en sistemas screw.
- Aunque se ha comprobado la aplicabilidad de la metodología propuesta para hallar los parámetros estructurales, principalmente la movilidad, mediante el análisis a partir de cadenas cinemáticas, es indispensable plantear la teoría matemática que lo soporte y encontrar los límites de su alcance, permitiendo a futuro su optimización.

## *Dinámica de PMs*

- La búsqueda de métodos para la solución del problema geométrico directo a través del análisis geométrico-algebraico, es imperativa para encontrar aproximaciones desde otra perspectiva, en las que tanto el análisis de la disposición geométrica del manipulador como la generación de las ecuaciones de restricción permitan obtener modelos con un mayor grado de información y en teoría con un mayor acceso a la solución.
- Así como es importante trabajar en las formas de análisis para el problema geométrico directo, otro punto desde donde se pueden buscar nuevas aproximaciones a la solución, consiste en la búsqueda de métodos que permitan resolver el tipo de ecuaciones en las que queda planteado el problema actualmente.

# Apéndice A

## Terminología

Término	Definición
Cadena cinemática	Ensamblaje de eslabones y juntas.
Entrada de actuación (Eslabón)	Eslabón por donde el movimiento y fuerza son impartidos al mecanismo.
Base	Cuerpo o eslabón de un robot que lleva la primera junta de la CC de un manipulador.
Eslabón	Elemento de un mecanismo que contiene elementos de enlace cinemático.
Elementos de enlace cí- nemático (par de contacto)	Superficies, líneas o puntos de un cuerpo rígido a través del cual el cuerpo se puede unir a otro cuerpo rígido.
Eslabón de salida	Eslabón para el cual las fuerzas y movimientos son obtenidos.
Par cinemático	Modelo mecánico de una conexión para dos elementos de enlace cinemático que tienen movimiento relativo de cierto tipo y con un cierto número de gdl.

Continua en la página siguiente

**Tabla A.1 – continua de la página anterior**

Término	Definición
Junta	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Par cinemático</li> <li>- Realización física de un par cinemático</li> </ul>
Grados de Libertad de un par cinemático	Es el número de parámetros independientes necesarios para describir las posiciones relativas de una pareja de elementos cinemáticos. Conocida también como conectividad.
Junta Rotacional	Conjunto que permite únicamente un movimiento de rotación entre dos eslabones.
Junta Prismática	Conjunto que permite únicamente una traslación en línea recta entre dos eslabones.
Junta Helicoidal	Conjunto que permite únicamente un movimiento tornillo ( <i>screw</i> ) entre dos eslabones.
Junta cilíndrica	Conjunto con dos grados de libertad, que describe un movimiento de rotación alrededor de un eje particular y un movimiento de traslación independiente en la misma dirección del eje.
Junta Esférica	Conjunto con tres grados de libertad que permite rotaciones relativas independientes alrededor de tres ejes mutuamente ortogonales.
Junta Planar	Conjunto con tres grados de libertad y que permite el movimiento relativo en planos paralelos.
Junta universal	Conjunto cinemático con uno dos ejes que se interceptan.

Continua en la página siguiente

**Tabla A.1 – continua de la página anterior**

Término	Definición
Junta Pasiva o no activa	Es una junta que pertenece a una cadena cinemática, que no puede ser movida (cambiar su variable articular) a causa de las restricciones producidas por otras juntas en la cadena. Es decir no dispone de la habilidad para transmitir fuerza o par ni tampoco movimiento a los demás miembros de la cadena cinemática. El movimiento relativo dentro del mecanismo no es afectado si se elimina o bloquea la junta, pero las fuerza y pares dentro del mecanismo resultan afectados.
Variable articular	Cantidad que describe el movimiento relativo entre dos eslabones consecutivos de un manipulador.
Espacio articular	Espacio definido por un vector cuyas componentes son las variables articulares.
Cadena cinemática	Ensamblaje de juntas y eslabones.
Cadena cinemática cerrada	Cadena cinemática en la cual cada eslabón se conecta mínimo con otros dos eslabones.
Lazo	Subconjunto de eslabones que forman una circuito cerrado.
Mecanismo	Cadena cinemática considerando uno de sus eslabones como base.
Mecanismo esférico	Mecanismo en el cual todos los puntos de sus eslabones describen trayectorias sobre esferas concéntricas.
Mecanismo espacial	Mecanismo en el cual algunos de sus eslabones describen trayectorias no planares o éstas no se localizan en planos paralelos.
Continua en la página siguiente	

**Tabla A.1 – continua de la página anterior**

Término	Definición
Estructura (de un mecanismo)	Número y clase de elementos (eslabones y juntas) en un mecanismo y la secuencia de contacto entre ellos.
Isomorfismo	Estructuras equivalentes con respecto al número de elementos en un mecanismo (eslabones y juntas) y la secuencia de sus conexiones.
Grados de libertad de una cadena cinemática	Número independiente de parámetros necesarios para definir la configuración de la cadena o mecanismo.
Restricción	Cualquier condición que reduce los grados de libertad de un sistema.
Eje screw	Es un elemento geométrico. Línea recta en un cuerpo rígido cuyos puntos se desplazan relativos a un marco de referencia. El desplazamiento puede ser finito o infinitesimal y siempre coaxial al eje.
Eje screw instantáneo	Lugar de los puntos de un cuerpo rígido en un movimiento espacial general, cuya velocidad lineal es paralela al vector de velocidad angular de un cuerpo en un instante dado.

Continua en la página siguiente

**Tabla A.1 – continua de la página anterior**

Término	Definición
Twist o vector espacial de movimiento	La pareja de vectores de velocidad angular y velocidad lineal que representa el movimiento general de un cuerpo, donde la velocidad lineal es a lo largo del eje y la velocidad angular es alrededor del mismo es un twist. Es representado por un screw unitario y una magnitud escalar que indica la amplitud del movimiento, que es la razón entre la velocidad angular y la velocidad lineal que se denominada paso.
Wrench o vector espacial de fuerza	En general la pareja de vectores de fuerza y torque, de fuerza actuando a lo largo de un linea y un vector torque actuando al rededor del mismo eje, es un wrench. Es representado por un screw unitario y una magnitud escalar que indica la intensidad de la acción aplicada sobre el cuerpo denominada paso.
Unidad de Composición (UC)	Cadena cinemática serial con características cinemáticas especiales. El sistema wrench de cada una de las UC incluye un número de wrenches independientes. Y se utilizan para la construcción de cadena cinemáticas de lazo simple.
Actuador	Dispositivo que realiza una acción física directa sobre el proceso.
Manipulador	Dispositivo para el agarre y el control de movimiento de objetos.
Manipulador Paralelo	Manipulador que controla el movimiento de su efecto final por medio de mínimo dos cadenas cinemáticas que unen el efecto final y la base fija.

Continua en la página siguiente

**Tabla A.1 – continua de la página anterior**

Término	Definición
Movimiento	Cambio de posición de un cuerpo relativa a un marco de referencia.
Movimiento absoluto	Movimiento con respecto a un marco de referencia fijo.
Movimiento relativo	Movimiento con respecto a un marco móvil de referencia.
Desplazamiento	Cambio de posición de un cuerpo con respecto a un marco referencia fijo
Pose	combinación de la posición y la actitud.
Punto de referencia	Punto seleccionado para definir la posición de referencia en una pose dada.
Movimiento planar	Movimiento de un cuerpo rígido en el cual sus puntos describen curvas localizadas en planos paralelos.
Movimiento screw	Movimiento de un cuerpo, donde mínimo un punto describe una curva espacial.
Movimiento esférico	Movimiento espacial de un cuerpo en el cual todos los puntos del cuerpo se mueven en esferas concéntricas.
Espacio de trabajo	La totalidad de puntos que pueden ser alcanzados por un punto de referencia que pertenece al robot. Da como resultado un volumen
Configuración singular	Posición especial de los eslabones de un robot, la cual implica la reducción de la movilidad del efecto final.

Continua en la página siguiente

**Tabla A.1 – continua de la página anterior**

Término	Definición
Movilidad redundante	El numero de grados de libertad del robot en que excede al número de variables independientes que son necesarias para determinar la tarea que va a ser ejecutada.
Redundancia	Existe más de un medio para llevar a cabo una función.
Maniobrabilidad	Habilidad de un robot con movilidad redundante para solucionar una tarea utilizando varias combinaciones de movimientos de sus eslabones.

# Referencias

- [1] Direct position analysis of the stewart platform mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, **25**[6]:611 – 621, 1990. [14](#)
- [2] Kinematic characteristics analysis of 3 {DOF} in-parallel actuated pyramid mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, **31**[8]:1009 – 1018, 1996. [17](#)
- [3] A new method for solving the direct kinematics of general 6-6 stewart platforms using three linear extra sensors. *Mechanism and Machine Theory*, **35**[3]:423 – 436, 2000. [15](#)
- [4] JORGE ANGELES. Singularity analysis of three-legged parallel robots based on passive-joint velocities. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **17**[4]:413–422, 2001. [6, 14, 18, 76](#)
- [5] K A ARROUK, B C BOUZGAROU, AND GRIGORE GOGU. CAD based techniques for workspace analysis and representation of the 3CRS parallel manipulator. *Science*, pages 155–160, 2010. [126](#)
- [6] CHRISTOPHER G ATKESON, CHAE H AN, AND JOHN M HOLLERBACH. Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links. *The International Journal of Robotics Research*, **5**[3]:101–119, 1986. [20](#)
- [7] SIR ROBERT S. BALL. A treatise of the Theory of Screws. *Cambridge University Press*,, 1900. [21, 23](#)
- [8] A BARRIENTOS AND C BALAGUER. *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill Interamericana de España S.L., 2007. [79](#)
- [9] SOUMYA BHATTACHARYA, H. HATWAL, AND A. GHOSH. An on-line parameters estimation for generalized stewart platform type parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, **32**[1]:79–89, 1997. [19](#)

- [10] SOUMYA BHATTACHARYA, DRAGOMIR N NENCHEV, AND MASARU UCHIYAMA. A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, **33**[7]:957–964, 1998. [19](#)
- [11] I.A. BONEV. *Geometric analysis of parallel mechanisms*. PhD thesis, Laval University, 2002. [14](#), [124](#)
- [12] I.A. BONEV, DAMIEN CHABLAT, AND P. WENGER. Working and assembly modes of the agile eye. *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006.*, [May]:2317–2322, 2006. [91](#), [101](#), [114](#)
- [13] I.A. BONEV AND CLÉMENT GOSSELIN. Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute actuators. *Robotics and autonomous systems*, **21**[4]:377–398, October 1997. [126](#)
- [14] I.A. BONEV AND CLÉMENT GOSSELIN. Singularity Loci of Spherical Parallel Mechanisms. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, number April, pages 2957–2962. IEEE, 2005. [126](#)
- [15] I.A. BONEV AND CLÉMENT GOSSELIN. Analytical determination of the workspace of symmetrical spherical parallel mechanisms. *Robotics, IEEE Transactions on*, **22**[5]:1011–1017, 2006. [126](#)
- [16] ANÁBAL ALEXANDRE CAMPOS BONILLA. *Cinemática diferencial de manipuladores empregando cadeias virtuais*. Florianópolis, SC, 2004. [18](#)
- [17] SÉBASTIEN BRIOT AND WISAMA KHALIL. *Dynamics of Parallel Robots, 35 of Mechanisms and Machine Science*. Springer International Publishing, Cham, mechanisms edition, 2015. [73](#)
- [18] A CAMPOS. Enfoque unificado da cinemática diferencial de manipuladores. 2002. [24](#)
- [19] A. CAMPOS, R. GUENTHER, AND D. MARTINS. Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **27**:345 – 356, 12 2005. [17](#), [37](#)
- [20] MARCO CECCARELLI. Screw axis defined by Giulio Mozzi in 1763 and early studies on helicoidal motion. *Mechanism and Machine Theory*, **35**:761–770, 2000. [27](#)

- [21] CECILIA GARCIA CENA, PEDRO F. CARDENAS, ROQUE SALTAREN PAZMINO, LISANDRO PUGLISI, AND RAFAEL ARACIL SANTONJA. A cooperative multi-agent robotics system: Design and modelling. *Expert Systems with Applications*, 40[12]:4737 – 4748, 2013. [204](#)
- [22] D. CHABLAT AND P. WENGER. Kinematic analysis of a new parallel machine tool: The orthoglide. In *7th International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, pages 305–314, Portoroz, Slovenia, June 25-29 2000. [103](#)
- [23] P. CHEDMAIL AND M. GAUTIER. Optimum choice of robot actuators. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 112[4]:361–367, 1990. [176](#)
- [24] G. CHENG, J.-L. YU, S.-R. GE, AND S. ZHANG. Workspace analysis of 3SPS+1PS bionic parallel test platform for hip joint simulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 225[9]:2216–2231, June 2011. [16](#), [18](#)
- [25] G. CHENG, J.-L. YU, S.-R. GE, AND S. ZHANG. Workspace analysis of 3SPS+1PS bionic parallel test platform for hip joint simulator. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 225[9]:2216–2231, jun 2011. [126](#)
- [26] ABDELHAKIM CHERFIA, ABDELOUAHAB ZAATRI, AND MAX GIORDANO. Kinematics Analysis of a Parallel Robot With a Passive Segment. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 15[2], August 2007. [126](#)
- [27] REYMOND CLAVEL. *Conception d'un robot parallele rapide a 4 degres de liberte*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federal de Lausanne, 1991. [93](#)
- [28] ALAIN CODOUREY AND ETIENNE BURDET. A body-oriented method for finding a linear form of the dynamic equation of fully parallel robots. In *Robotics and Automation, 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Conference on*, 2, pages 1612–1618. IEEE, 1997. [19](#)

- [29] GALIL MOTION CONTROL. User Manual - DCM-41x3. *Galil Motion Control*, 112[V.1.]:1, 2010. [190](#)
- [30] JIAN S. DAI AND JR JONES. A linear algebraic procedure in obtaining reciprocal screw systems. *Journal of Robotic Systems*, 20[7]:401–412, 2003. [37](#)
- [31] BHASKAR DASGUPTA AND PRASUN CHOUDHURY. A general strategy based on the newton–euler approach for the dynamic formulation of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 34[6]:801–824, 1999. [19](#)
- [32] BHASKAR DASGUPTA AND T. S. MRUTHYUNJAYA. The stewart platform manipulator: a review. *Mechanism and Machine Theory*, 35[1]:15–40, January 2000. [96](#)
- [33] JOSEPH K. DAVIDSON AND KENNETH H. HUNT. *Robots and screw theory: applications of kinematics and statics to robotics*. Published by Oxford University Press, 2004. [17](#), [28](#), [29](#)
- [34] TH DAVIES. Kirchhoff’s circulation law applied to multi-loop kinematic chains. *Mechanism and machine theory*, 16[3]:171–183, 1981. [17](#)
- [35] ROY FEATHERSTONE. *Rigid body dynamics algorithms*. Springer-Verlag New York Inc, 2008. [34](#)
- [36] EUGENE F FICHTER. A stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction. *The International Journal of Robotics Research*, 5[2]:157–182, 1986. [19](#)
- [37] A. FRISOLI, D. CHECCACCI, F. SALSEDOD, AND M. BERGAMASCO. *Advances in Robot Kinematics*, chapter Synthesis by Screw Algebra of Translating in-Parallel Actuated Mechanisms, pages 433–440. Springer Netherlands, Dordrecht, 2000. [17](#)
- [38] JAIME GALLARDO-ALVARADO, JOSÃ© MARÃA RICO-MARTÃNEZ, AND GÃRSEL ALICI. Kinematics and singularity analyses of a 4-dof parallel manipulator using screw theory. *Mechanism and Machine Theory*, 41[9]:1048 – 1061, 2006. [17](#)
- [39] CECILIA GARCÃA, PEDRO F. CÃRDENAS, LISDANDRO J. PUGLISI, AND ROQUE SALTAREN. Design and modeling of the multi-agent

- robotic system: {SMART}. *Robotics and Autonomous Systems*, 60[2]:143 – 153, 2012. [205](#)
- [40] C. GERMAIN, S. CARO, S. BRIOT, AND P. WENGER. Optimal design of the IRSBot-2 based on an optimized test trajectory. In *In Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2013)*, Portland, Oregon, USA., 2013. [176](#)
- [41] GRIGORE GOGU. *Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 1: Methodology*, 149 of *Solid Mechanics and its Applications*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2008. [48](#), [73](#)
- [42] GRIGORE GOGU. Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom. 159, 2009. [73](#)
- [43] GRIGORE GOGU. *Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 3: Topologies with Planar Motion of the Moving Platform*, 173 of *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer Netherlands, Dordrecht, 2010. [9](#), [40](#), [51](#)
- [44] ANDREW A GOLDENBERG, XIAOGENG HE, AND SP ANANTHANARAYANAN. Identification of inertial parameters of a manipulator with closed kinematic chains. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 22[4]:799–805, 1992. [19](#)
- [45] C. GOSSELIN AND J. ANGELES. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 6[3]:281–290, Jun 1990. [3](#), [9](#), [14](#)
- [46] CLÉMENT GOSSELIN. *Kinematic analysis, optimization and programming of parallel robotic manipulators*. National Library of Canada, 1985. [14](#)
- [47] CLÉMENT GOSSELIN AND JORGE ANGELES. The Optimum Kinematic Design of a Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 110[1]:35, 1988. [75](#)
- [48] CLÉMENT GOSSELIN AND J.F. HAMEL. The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device.

- In *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 781–786. IEEE Comput. Soc. Press, 1994. [90](#)
- [49] CLÉMENT GOSSELIN AND ERIC LAVOIE. On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 1993. [19](#)
- [50] CLÉMENT GOSSELIN, J SEFRIoui, AND M. J. RICHARD. On the Direct Kinematics of Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators with a Coplanar Platform. *Journal of Mechanical Design*, 116[JUNE]:587, 1994. [16](#)
- [51] V. E. GOUGH AND S. G. WHITEHALL. Universal tyre test machine. In *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, pages 117–137, May 1962. [96](#)
- [52] MJD HAYES, PJ ZSOMBOR-MURRAY, AND CHAO CHEN. Unified kinematic analysis of general planar parallel manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 126[5]:866–874, 2004. [15, 16](#)
- [53] JACQUES M. HERVÉ. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design. *Mechanism and Machine Theory*, 34[5]:719–730, jul 1999. [2](#)
- [54] JACQUES M. HERVÉ. Conjugation in the displacement group and mobility in mechanisms. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 33[2]:1–14, 2009. [2](#)
- [55] JOHN M HOLLERBACH. *An iterative Lagrangian formulation of manipulator dynamics*. Massachusetts Institute of Technology, Artificial Intelligence Laboratory, 1980. [19](#)
- [56] T. HUANG, P WANG, J MEI, X ZHAO, AND D.G. CHETWYND. Time Minimum Trajectory Planning of a 2-DOF Translational Parallel Robot for Pick-and-place Operations. *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 56[1]:365–368, 2007. [73](#)
- [57] TIAN HUANG, DJ WHITEHOUSE, AND JINSONG WANG. The local dexterity, optimal architecture and design criteria of parallel machine tools. *CIRP Annals-Manufacturing*, 47[12]:2404–2409, December 1998. [18](#)

- [58] K. H. HUNT. Robot kinematicsâa compact analytic inverse solution for velocities. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, ASME*, 109[1]:42–49, 1987. [17](#)
- [59] KENNETH HUNT. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 105[4]:705–712, March 1983. [14](#)
- [60] KENNETH H. HUNT. *Kinematics geometry of Mechanism*. Cambridge University Press, 1990. [16](#)
- [61] M HUSTY. Kinematic mapping of planar three-legged platforms. In *Proceedings of 15th Canadian Congress of Applied Mechanics (CANCAM 1995)*, 2, pages 876–877, 1995. [16](#), [126](#)
- [62] MANFRED L. HUSTY. An algorithm for solving the direct kinematic of stewart-gough-type platforms. In *MECHANISM AND MACHINE THEORY*, page 365â380, 1994. [14](#)
- [63] C. INNOCENTI. Closed-form determination of the location of a rigid body by seven in-parallel linear transducers. *ASME Journal of Mechanical Design*, 120[2]:293–298, 1998. [15](#)
- [64] JHON CRAIG. *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. Pearson Educacion, 3 edition, 2005. [9](#), [78](#)
- [65] M. KAROUIA AND J.M. HERVÃ©. A three-dof tripod for generating spherical rotation. In J. LENARÃIÄ AND M.M. STANIÅJIÄ, editors, *Advances in Robot Kinematics*, pages 395–402. Springer Netherlands, 2000. [2](#)
- [66] W. KHALIL AND ETIENNE DOMBRE. *Modeling, Identification and Control of Robots, 1st Edition*. Kogan Page Science, London, 2004. [19](#), [79](#)
- [67] WISAMA KHALIL AND FOUAD BENNIS. Symbolic calculation of the base inertial parameters of closed-loop robots. *The International journal of robotics research*, 14[2]:112–128, 1995. [20](#)
- [68] WISAMA KHALIL AND SÉBASTIEN BESNARD. Self calibration of stewart-gough parallel robots without extra sensors. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 15[6]:1116–1121, 1999. [3](#), [20](#)

- [69] WISAMA KHALIL AND OUARDA IBRAHIM. General solution for the dynamic modeling of parallel robots. *Journal of intelligent and robotic systems*, 49[1]:19–37, 2007. [3](#), [19](#)
- [70] WISAMA KHALIL AND JEAN-FRANÇOIS KLEINFINGER. Minimum operations and minimum parameters of the dynamic models of tree structure robots. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 3[6]:517–526, 1987. [19](#)
- [71] FELIX KLEIN, R FRICKE, AND A OSTROWSKI. Vergleichende betrachtungen  ber neuere geometrische forschungen. In *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, pages 460–497. Springer, 1921. [15](#)
- [72] JF KLEINFINGER AND W KHALIL. Dynamic modelling of closed-chain robots. In *Int. Symp. On Industrial Robots, 16i me ISIR, Belgique*, 1986. [19](#)
- [73] XIANWEN KONG. *Type Synthesis and Kinematics of General and Analytic Parallel Mechanisms*. PhD thesis, University Laval, 2003. [15](#)
- [74] XIANWEN KONG AND CLÉMENT GOSSELIN. *Type synthesis of parallel mechanisms*, 33. Springer Verlag, 2007. [73](#)
- [75] V. KUMAR. Instantaneous kinematics of parallel-chain robotic mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, 114[3]:349–358, 1992. [14](#)
- [76] BARON L. AND ANGELES J. A linear algebraic solution of the direct kinematics of parallel manipulators using a camera. *Proceedings of the ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, 3:1925–1929, 1995. [15](#)
- [77] KOK-MENG LEE AND DHARMAN K SHAH. Dynamic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 4[3]:361–367, 1988. [19](#)
- [78] LENG-FENG LEE. *Analysis and Design Optimization of In Parallel Haptic devices*. PhD thesis, Universidad de Nueva York, 2010. [14](#)

- [79] H LIPKIN AND J DUFFY. The elliptic polarity of screws. *Journal of Mechanisms*, . . ., 107:377–387, 1985. [35](#)
- [80] H. LIPKIN AND J. DUFFY. Sir Robert Stawell Ball and methodologies of modern screw theory. *Proceedings of the I MECH E Part C Journal of Mechanical Engineering Science*, 216[1]:1–11, January 2002. [26](#)
- [81] GUANFENG LIU, YUNJIANG LOU, AND ZEXIANG LI. Singularities of parallel manipulators: a geometric treatment. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 19[4]:579–594, Aug 2003. [14](#)
- [82] X LIU. Optimum design of 3-DOF spherical parallel manipulators with respect to the conditioning and stiffness indices. *Mechanism and Machine Theory*, 35[9]:1257–1267, September 2000. [19](#)
- [83] XIN-JUN LIU, JINSONG WANG, AND JONGWON KIM. Determination of the Link Lengths for a Spatial 3-DOF Parallel Manipulator. *Journal of Mechanical Design*, 128[2]:365, 2006. [1, 126](#)
- [84] JYS LUH AND YUAN-FANG ZHENG. Computation of input generalized forces for robots with closed kinematic chain mechanisms. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, 1[2]:95–103, 1985. [19](#)
- [85] ANA CRISTINA MAJARENA, JORGE SANTOLARIA, DAVID SAMPER, AND JUAN JOSE AGUILAR MARTIN. Spatial resolution-based kinematic design of a parallel positioning platform. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 53[9-12]:1149–1165, August 2010. [126](#)
- [86] J.-P. MERLET. Closed-form resolution of the direct kinematics of parallel manipulators using extra sensors data. In *Robotics and Automation, 1993. Proceedings., 1993 IEEE International Conference on*, pages 200–204 vol.1, May 1993. [3](#)
- [87] J. P. MERLET. Determination of the orientation workspace of parallel manipulators. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 13[2]:143–160, 1995. [126](#)

- [88] J.-P. MERLET. Direct kinematics of planar parallel manipulators. In *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, 4, pages 3744–3749 vol.4, Apr 1996. [14](#)
- [89] J.-P. MERLET. Solving the Forward Kinematics of a Gough-Type Parallel Manipulator with Interval Analysis. *The International Journal of Robotics Research*, 23[3]:221–235, March 2004. [101](#)
- [90] J-P MERLET. Optimal design of robots. In *Proc. Robotics: Science and Systems*. Citeseer, 2005. [2](#)
- [91] J.-P. MERLET. *Parallel robots*. Springer-Verlag New York Inc, 2006. [1](#)
- [92] J.-P. MERLET AND D. DANAY. Legs interference checking of parallel robots over a given workspace or trajectory. In *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006.*, number May, pages 757–762. IEEE, 2006. [127](#)
- [93] JEAN PIERRE MERLET. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, 2nd edition, 2005. [133](#)
- [94] JEAN-PIERRE MERLET. Singular configurations of parallel manipulators and grassmann geometry. In J.-D. BOISSONNAT AND J.-P. LAUMOND, editors, *Geometry and Robotics*, 391 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 194–212. Springer Berlin Heidelberg, 1989. [3, 14](#)
- [95] JEAN PIERRE MERLET. *Les Robots parallèles*. Hermès, 1990. [73](#)
- [96] JEAN PIERRE MERLET. *Parallel Robots*. Springer, second edition, 2006. [73](#)
- [97] KAROL MILLER. Optimal design and modeling of spatial parallel manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, 23[2]:127–140, 2004. [19](#)
- [98] MG MOHAMED AND J DUFFY. A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 107[2]:226–229, 1985. [16](#)

- [99] HÉCTOR A. MORENO, ROQUE SALTARÉN, LISANDRO PUGLISI, ISELA CARRERA, PEDRO CÁRDENAS, AND CÉSAR ÁLVAREZ. Robótica submarina: Conceptos, elementos, modelado y control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial -RIAI-*, 11[1]:3 – 19, 2014. [205](#)
- [100] RICHARD M MURRAY, ZEXIANG LI, AND S SHANKAR SAstry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, 29. CRC press, 1994. [79](#)
- [101] YOSHIHIKO NAKAMURA AND MODJTABA GHODOUSSI. A computational scheme of closed link robot dynamics derived by d'alembert principle. In *Robotics and Automation, 1988. Proceedings., 1988 IEEE International Conference on*, pages 1354–1360. IEEE, 1988. [19](#)
- [102] V. PARENTI-CASTELLI. Real-time computation of the actual posture of the general geometry 6-6 fully-parallel mechanism using two extra rotary sensors. *ASME Journal of Mechanical Design*, 120[6]:549â554, 1998. [15](#)
- [103] V. PARENTI-CASTELLI AND DI GREGORIO R. Determination of the actual configuration of the general stewart platform using only one additional sensor. 121[1]:21–25, 1999. [15](#)
- [104] D. T. PHAM. Modeling and control of robot manipulators by l sciavicco and b siciliano, mcgraw hill, new york, 1996, 358 pp., isbn 0&ndash;07&ndash;057217&ndash;8 (&dollar;59.47; hbk). *Robotica*, 16[6]:701–701, November 1998. [3, 17](#)
- [105] SOMOV PI. *On the degree of freedom of motion of kinematic chains (in Russian)*. Published by Phys Chem Soc of Russia, 1887. [45](#)
- [106] F. PIERROT, F. MARQUET, O. COMPANY, AND T. GIL. H4 parallel robot: modeling, design and preliminary experiments. In *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, 4, pages 3256–3261 vol.4, 2001. [2, 3, 16](#)

- [107] D. PISLA, M. CECCARELLI, M. HUSTY, AND B. CORVES. *New Trends in Mechanism Science: Analysis and Design*. Not Avail, 2010. [73](#)
- [108] JULIUS PLUCKER. On a new geometry of space. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:725–791, 1865. [15, 25](#)
- [109] LISANDRO J. PUGLISI, ROQUE J. SALTAREN, HECTOR A. MORENO, PEDRO F. CÁRDENAS, CECILIA GARCIA, AND RAFAEL ARACIL. Dimensional synthesis of a spherical parallel manipulator based on the evaluation of global performance indexes. *Robotics and Autonomous Systems*, 60[8]:1037 – 1045, 2012. [206](#)
- [110] LISANDRO J. PUGLISI, ROQUE J. SALTAREN, GERMÁN REY PORTOLÁS, HECTOR MORENO, PEDRO F. CÁRDENAS, AND CECILIA GARCIA. Design and kinematic analysis of 3pss-1s wrist for needle insertion guidance. *Robotics and Autonomous Systems*, 61[5]:417 – 427, 2013. [205](#)
- [111] B RAVANI AND B ROTH. Mappings of spatial kinematics. *Journal of Mechanical Design*, 106[3]:341–347, 1984. [15](#)
- [112] BAHRAM RAVANI. *Kinematic mappings as applied to motion approximation and mechanism synthesis*. PhD thesis, 1982. [15](#)
- [113] C. REBOULET AND T. BERTHOMIEU. Dynamic models of a six degree of freedom parallel manipulator. In *ICAR*, pages 1153–1157, june 1991. [19](#)
- [114] LUC ROLLAND. Certified solving of the forward kinematics problem with an exact algebraic method for the general parallel manipulator. *Advanced Robotics*, 19[9]:995–1025, 2005. [3](#)
- [115] J ROONEY AND CF EARL. Manipulator postures and kinematics assembly configurations. In *6th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, pages 1014–1020, 1983. [15, 16](#)
- [116] BERNARD ROTH. Computations in kinematics. In *Computational Kinematics*, pages 3–14. Springer, 1993. [14, 15, 16](#)
- [117] R. SALTAREN, R. ARACIL, P. CARDENAS, C. PENA, E. YIME, AND C. ALVAREZ. Underwater parallel robot for oceanic measuring

- and observations-remo i: development and navigation control advances. In *OCEANS 2009 - EUROPE*, pages 1–9, May 2009. [207](#)
- [118] AH SHIRKHODAIE AND AH SONI. Forward and inverse synthesis for a robot with three degrees of freedom. In *Summer Computer Simulation Conference*, pages 851–856, 1987. [16](#)
- [119] GOUGTH STEWART. Review of stewart platforms. *1955:1–40*, 1965. [96](#)
- [120] T TAKAMORI AND K TSUCHIYA. Parallel manipulators: state of the art and perspectives. *Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems*, page 21, 2012. [3, 20](#)
- [121] L. TANCREDI AND M. TEILLAUD. Application de la geometrie synthetique au probleme de modelisation geometrique directe des robots paralleles. *Mechanism and Machine Theory*, 34[2]:255–269, 1999. [15](#)
- [122] L.-W. TSAI, G.C. WALSH, AND R.E. STAMPER. Kinematics of a novel three dof translational platform. In *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, 4, pages 3446–3451 vol.4, Apr 1996. [3, 10](#)
- [123] LUNG-WEN TSAI. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley \& Sons Inc., 1999. [18, 84, 136, 137, 138](#)
- [124] L.W. TSAI. Technical Research Report. Systematic Enumeration of Parallel Manipulators. Technical report, 2009. [14, 150](#)
- [125] L.W. TSAI AND RICHARD E. STAMPER. A parallel manipulator with only translational degrees of freedom. *Mechanical Engineering Department and Institute for Systems Research, University of Maryland*, pages 2–19, 1997. [93](#)
- [126] WAMPLER C. W. Forward displacement analysis of general six-in-parallel sps (stewart) platform manipulators using soma coordinates. In *MECHANISM AND MACHINE THEORY*, pages 331–337, 1996. [3, 15](#)

- [127] KENNETH J WALDRON AND KENNETH H HUNT. Series-parallel dualities in actively coordinated mechanisms. *The International Journal of Robotics Research*, 10[5]:473–480, 1991. [2](#)
- [128] J WANG AND CM GOSSELIN. âdynamic analysis of spatial four-degree-of-freedom parallel manipulators. In *Proceedings the 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences*, 1997. [19](#)
- [129] JIEGAO WANG AND CLEMENT M GOSSELIN. A new approach for the dynamic analysis of parallel manipulators. *Multibody System Dynamics*, 2[3]:317–334, 1998. [19](#)
- [130] JENS WITTENBURG. *Dynamics of systems of rigid bodies*, 33. Springer-Verlag, 2013. [19](#)
- [131] G. YANG, I.M. CHEN, W.K. LIM, AND S.H. YEO. Design and kinematic analysis of modular reconfigurable parallel robots. *Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, 4:2501–2506, 1999. [18](#), [19](#)
- [132] GUILIN YANG, E HO, AND WEI LIN. A differential geometry approach for the workspace analysis of spherical parallel manipulators. *of the 11th World Congress in*, 2003. [127](#)
- [133] BYUNG-JU YI, GOO BONG CHUNG, HEUNG YEOL NA, WHEE KUK KIM, AND IL HONG SUH. Design and experiment of a 3-dof parallel micromechanism utilizing flexure hinges. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 19[4]:604–612, Aug 2003. [2](#)
- [134] DAN ZHANG. *Parallel robotic machine tools*. Springer Science Business Media, 2009. [1](#)
- [135] YONGJIE ZHAO AND FENG GAO. Dynamic formulation and performance evaluation of the redundant parallel manipulator. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Article in Press, Corrected Proof, 2009. [37](#)
- [136] D. ZLATANOV, I.A. BONEV, AND CLÉMENT GOSSELIN. Constraint singularities as configuration space singularities. *ParalleMIC—the Parallel Mechanisms Information Center*, <http://www.parallemic.org/Reviews/Review008.html>, 2002. [3](#), [126](#)

*Dinámica de PMs*

- [137] PJ ZSOMBOR-MURRAY, CHAO CHEN, AND MATTHEW JOHN D HAYES. Direct kinematic mapping for general planar parallel manipulators. In *To appear in Proc. CSME Forum*, page 1, 2002.

[16](#)