

## К6. Числено решаване на 2D уравнението на Поасон

Намерете функция  $u(x_1, x_2)$  удовлетворяваща уравнението на Поасон

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2)$$

в единичния квадрат  $0 < x_1, x_2 < 1$  с гранично условие на Дирихле  $u = 0$  по границата на квадрата.

Напишете програма, която решава горната задача приближено. Дясната част  $f(x_1, x_2)$  на уравнението на Поасон да бъде входен параметър за програмата. За целта извършете стъпките а), б) и в) по-долу.

а) Въведете равномерна мрежа със стъпка  $h$  ( $h = 1/(N+1)$ ) и по двете направления  $x_1$  и  $x_2$  и направете стандартната апроксимация за уравнението на Поасон по шаблона "кръст". Граничните условия се задават точно.

б) Получената линейна система алгебрични уравнения с неизвестни  $y_{i,j}, i = 0, \dots, N+1, j = 0, \dots, N+1$  решете с итерационния метод на Якоби (Jacobi's method). Забележете, че явния вид на матрицата на системата не се използва.

Една итерация по метода на Якоби се задава така:

for i=1,N

for j=1,N

$$y_{i,j}^{(k+1)} = (y_{i-1,j}^{(k)} + y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i,j-1}^{(k)} + y_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j})/4$$

end for

end for

Тук  $y_{i,j}^{(k+1)}$  е новото приближение (на  $k+1$ -та итерация), а  $y_{i,j}^{(k)}$  е предишното приближение (от  $k$ -тата итерация). С други думи, всяко ново приближение за  $y_{i,j}$  се получава с усредняване на неговите 4 съседни по шаблона "кръст" от предишната итерация с  $h^2 f_{i,j}$ .

За начално приближение вземете  $y_{i,j}^{(0)} = 0$ . Итерациите да продължават докато  $\max_{i,j} |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}| < \varepsilon$ .

в) Въведете три вложени мрежи със стъпки  $h, h/2, h/4$ . Намерете приближените решения  $y_h, y_{h/2}, y_{h/4}$ . Пресметнете практическия ред на сходимост  $\alpha(x)$  по формулата:

$$\log \left| \frac{y_h(x) - y_{h/2}(x)}{y_{h/2}(x) - y_{h/4}(x)} \right| / \log(2),$$

където  $x$  е точка от най-едрата мрежа.